# Esami Ricerca Operativa

# ▷ ESAME 11 GIUGNO 2018

1.

a) DATO $P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0 \}$ POLIEDRO IN FORMA STANDARD DIMOSTRARE CHE $\bar{x} \in P$ È VERTICE SE E SOLO SE È UNA SBA.

$\bar{x}$ SI DICE SBA SE

$$\bar{x}_B = B^{-1} b$$
$$\bar{x}_N = 0$$

$\bar{x}$ È UNA SBA $\Rightarrow$ È VERTICE

$\bar{x}$ ESSENDO SBA HA LE COMPONENTI POSITIVE ASSOCIATE AD UNA SOTTOMATRICE $B$ CON COLONNE LIN. INDIPENDENTI QUINDI È VERTICE.

$\bar{x}$ È VERTICE $\Rightarrow$ $\bar{x}$ È UNA SBA

SE $\bar{x}$ È VERTICE SIGNIFICA CHE LE COMPONENTI POSITIVE DI $\bar{x}$ SONO LEGATE A COLONNE LIN. INDIP. DI $A$ E LE RESTANTI COMPONENTI SONO NULLE. CHIAMO $\bar{x}_B$ LE COMPONENTI POSITIVE ED $\bar{x}_N$ QUELLE NULLE.

PONGO

$B = (a_1 \dots a_r)$ LE COLONNE DI $A$ ASSOCIATE ALLE COMPONENTI NON NULLE

VOGLIO MOSTRARE CHE

$$A\bar{x} = B\bar{x}_B + B\bar{x}_N = b$$

QUINDI TROVO UN COMPLETAMENTO DI $B$ T.C. $B$ SIA ANCORA A COLONNE LIN. INDIP.

$$B = (a_1 \dots a_r\ a_{r+1} \dots a_n)$$

ALLORA

$$A\bar{x} = B\bar{x}_B + B\bar{x}_N = b \Rightarrow B\bar{x}_B = b \Rightarrow \bar{x}_B = B^{-1} b$$

QUINDI $\bar{x}$ È UNA SBA.

b) ENUNCIARE E DIMOSTRARE IL CRITERIO DI OTTIMALITÀ

SIA $P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ POLIEDRO IN FORMA STANDARD E $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$.

$\bar{x} \in P$ SI DICE OTTIMO DI $P$ SE $\gamma \geq \emptyset$.

dim.

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1} b + \gamma x_N \geq c_B^T B^{-1} b = c^T \bar{x}$$

INFATTI SI HA $\gamma \geq 0$ E PER $c^T \bar{x}$ SI HA $\bar{x}_N = 0$ ESSENDO UNA SBA

DALLA DIMOSTRAZIONE SI VEDE ANCHE CHE È UN CRITERIO SUFFICIENTE MA NON NECESSARIO.

2. 3 LINEE

$P_1$ $P_2$

BASTA UNA LINEA PER PRODURRE UN P

VINCOLI

- 2750 UNITÁ DI $P_1$
- 1050 UNITÁ DI $P_2$
- CAPACITÁ MAX LINEA

COSTI

- ATTIVAZIONE LINEA
- COSTO UNITARIO PRODUZIONE

MINIMIZZARE IL COSTO DI PRODUZIONE

VARIABILI DI DECISIONE

$x_i^J$ = UNITÁ DI $P_J$ PRODOTTO NELLA LINEA $i$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{SE USO LINEA } i \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$i = 1,2,3$ $J = 1,2$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \left(60 x_1^1 + 50 x_2^1 + 45 x_3^1\right) + \left(55 x_1^2 + 52 x_2^2 + 40 x_3^2\right) + \left(500\,\delta_1 + 600\,\delta_2 + 750\,\delta_3\right)$$

VINCOLI

$$x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = 2750$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1050$$
$$(x_1^1 + x_1^2) - 1000\,\delta_1 \leq 0$$
$$(x_2^1 + x_2^2) - 2500\,\delta_2 \leq 0$$
$$(x_3^1 + x_3^2) - 1300\,\delta_3 \leq 0$$
$$x_i^J \in \mathbb{Z}^+,\ \delta_i \in \{0,1\}$$

2. RISOLVERE USANDO IL METODO DEL SIMPLESSO

$$\begin{cases} \min & -x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

HO GIÀ IL POLIEDRO IN FORMA STANDARD MA NON HO L'IDENTITÀ DA CUI PARTIRE QUINDI APPLICO IL PROBLEMA ARTIFICIALE

$$\begin{cases} \min & \alpha_1 + \alpha_2 \\ & \alpha_1 + 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ & \alpha_2 - x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ CRITERIO DI OTTIMALITÀ NON VERIFICATO

SCELGO $h = 3$, $h$-ESIMA ENTRA IN BASE

TROVO $k$

$$\rho = \min \left\{ \frac{(B^{-1} b)_i}{(\tilde{\pi}_h)_i} \right\} = \min \{ 2, 6 \} = 2 \qquad k = 1$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \alpha_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \left( \begin{array}{c|cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c|cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 2 \\ 0 & -5/2 & 5/2 & -1/2 & 11/2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 \\ -5/2 & 5/2 & -1/2 & 11/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

PRENDO $h = 4$, $h$-ESIMA FUORI BASE

TROVO $k$

$$\rho = \min \left\{ \frac{(B^{-1} b)_i}{(\tilde{\pi}_h)_i} \right\} = \min \left\{ V, \frac{2}{\frac{11}{2}} \right\} \qquad k = 2$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cancel{\alpha_1} \\ \cancel{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} -\frac{3}{2} & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 2 \\ \frac{11}{2} & -5/2 & 5/2 & -1/2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 9/11 & 2/11 & -3/22 & 3/11 & 34/11 \\ 1 & -10/22 & 10/22 & -1/11 & 2/11 & 8/11 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ HO QUINDI RAGGIUNTO L'OTTIMO

IL PROBLEMA ORIGINARIO È AMMISSIBILE E LA FORMA CANONICA DI PARTENZA È

$$\begin{cases} \min \; \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/11 & 2/11 \\ -5/11 & 5/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34/11 \\ 8/11 \end{pmatrix} \\ x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/11 & 2/11 \\ -5/11 & 5/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{26}{11} & \frac{18}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{37}{11} & -\frac{73}{11} \end{pmatrix}$$

PRENDO $h = 2$

$$\rho = \min \left\{ 17, \frac{8}{5} \right\} = \frac{8}{5} \qquad k = 2$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c|cc|c} 2/11 & 9/11 & 0 & 34/11 \\ 5/11 & -5/11 & 1 & 8/11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 1 & -2/5 & 14/5 \\ 1 & -1 & 11/5 & 8/5 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ -1 & 11/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -\frac{63}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & \frac{73}{5} \end{pmatrix}$$

SCELGO $h = 1$

$$\rho = \min \left\{ \frac{14}{5}, V \right\} \qquad k = 1$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1 & -2/5 & 14/5 \\ -1 & 0 & 11/5 & 8/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1 & -2/5 & 14/5 \\ 0 & 1 & 9/5 & 22/5 \end{array}\right) \qquad x^* = \begin{pmatrix} 14/5 \\ 22/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 1 & 9/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$ CRITERIO OTTIMALITÀ VERIFICATO

3. UTILIZZANDO IL METODO DEL B AND B DETERMINARE L'OTTIMO DEL SEGUENTE PROBLEMA DI KNAPSACK

$$\begin{cases} \max & x_1 + 1{,}2x_2 - x_3 + 2{,}1x_4 + x_5 + 5x_6 + 2{,}4x_7 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 + 3x_6 + 2x_7 \leq 4 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 7 \end{cases}$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3 = 0$ | $x_4$ | $x_5 = 1$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1{,}2$ | ✓ | $\frac{2{,}1}{2} = 1{,}05$ | ✓ | $\frac{5}{3} = 1{,}7$ | $\frac{2{,}4}{2} = 1{,}2$ |
| $y_5$ | $y_2$ | | $y_4$ | | $y_1$ | $y_3$ |

$$\begin{cases} \max & 5y_1 + 1{,}2y_2 + 2{,}4y_3 + 2{,}1y_4 + y_5 \\ & 3y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 \leq 5 \\ & y \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

$$\bar{y}^{(0)} = \left(1 \quad 1 \quad \frac{5-4}{2} \quad 0 \quad 0\right)^T = \left(1 \quad 1 \quad 0{,}5 \quad 0 \quad 0\right) \qquad U_0 = 5 + 1{,}2 + 2{,}4 \cdot 0{,}5 = 7{,}4$$

PONGO

$$y^* = \left(1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)^T \qquad z^* = 6{,}2$$ OTTIMO CORRENTE

FACCIO BRANCHING SU PROB 0 RISPETTO $y_3$

PROB 0:
- PROB 1 $y_3 = 0 \Rightarrow 3y_1 + y_2 + 2y_4 + y_5 \leq 5$
- PROB 2 $y_3 = 1 \Rightarrow 3y_1 + y_2 + 2y_4 + y_5 \leq 3$

$\mathcal{L} = \{$ ~~PROB 1~~, PROB 2 $\}$

ESTRAGGO PROB 1

$$\bar{y}^{(1)} = \left(1 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{5-4}{2} \quad 0\right)^T = \left(1 \quad 1 \quad 0 \quad 0{,}5 \quad 0\right)^T \qquad U_1 = 5 + 1{,}2 + 2{,}1 \cdot 0{,}5 = 7{,}25 > z^*$$

FACCIO BRANCHING SU PROB 1 RISPETTO $y_4$

PROB 1:
- PROB 3 $y_4 = 0 \Rightarrow 3y_1 + y_2 + y_5 \leq 5$
- PROB 4 $y_4 = 1 \Rightarrow 3y_1 + y_2 + y_5 \leq 1$

$\mathcal{L} = \{$ ~~PROB 2~~, ~~PROB 3~~, ~~PROB 4~~ $\}$

ESTRAGGO PROB 2

$$\bar{y}^{(2)} = \left(1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\right)^T \qquad U_2 = 5 + 2{,}4 = 7{,}4 > z^*$$

$$y^* = \left(1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\right) \qquad z^* = 7{,}4$$ OTTIMO CORRENTE

ESTRAGGO PROB 3

$$\bar{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad U_3 = 5 + 1,2 + 1 = 7,2 < z^*$$ CHIUDO PROB 3

ESTRAGGO PROB 4

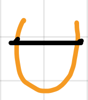
$$\bar{y}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \quad U_4 = 1,2 + 2,1 = 3,3 < z^*$$

CHIUDO PROB 4

$\mathcal{L} = \{\emptyset\}$, L'OTTIMO DEL PROBLEMA È $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ $z^* = 8,4$

QUESTIONARIO

1) V, V, F, F
3) V, V, F, V
5) V, F, V, F
7) F, V, F, F
2) F, V, F, F
4) V, F, F, F
6) F, F, V, V
8) V, V, F, V
9) V, F, V, F
10) F, V, V, V

1) L'INSIEME È FORMATO DAI PUNTI SU UNA CURVA  DA CUI SI VEDE CHE NON È UN INSIEME CONVESSO

2) PER TROVARE IL DUALE PORTO IL PRIMALE NELLA SEGUENTE FORMA

$$(P) \begin{cases} \max & c^T x \\ & -Ax \le -b \\ & x \ge 0 \end{cases}$$

QUINDI IL DUALE È

$$(D) \begin{cases} \min & -b^T \mu \\ & -A^T \mu \le c \\ & \mu \ge 0 \end{cases}$$

3) NON SI PUÒ DIRE CHE NON SIA MAI OTTIMA PERCHÉ IL CRITERIO DI OTTIMALITÀ È SOLO SUFFICIENTE

4) PER VERIFICARE SE IL VETTORE NULLO È UNA SBA OTTIMA DEVO CALCOLARE IL $\gamma$

$$I_B = \{4, 2, 6\}$$

$$c_B^T = (-2, -2, 0) \qquad c_N^T = (-18 \quad 4 \quad 6)$$

$$\gamma^T = (-18 \quad 4 \quad 6) - (-2 \quad -2 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix} = (-18 \quad 4 \quad 6) - (-18 \quad -12 \quad -4)$$

QUINDI IL VETTORE NULLO È UNA SBA OTTIMA

## ▷ QUESTIONARIO 1

1. F, V, F, F   2. F, V, F, F   3. V, V, F, V   4. V, F, F, F   5. F, F, V, F   6. F, F, V, V

7. F, V, F, F   8. V, F, V, F   9. V, F, V, F   10. F, V, V, V

LE SBA DEGENERI SONO LE STESSE SBA NON DEVONO ESSERE CONSIDERATE COME NUOVE

VA CALCOLATO IL $\gamma$ E VERIFICATO IL CRITERIO DI OTTIMALITÁ

## ▷ QUESTIONARIO 2

1. V, V, F, F   2. V, V, V, F   3. V, F, F, F   4. V, F, V, F   5. F, F, V, F   6. F, V, F, F

LEGGI BENE IL TESTO

7. V, V, V, F   8. F, V, F, F   9. V, V, F, V   10. F, V, V, V

$\det = 0$ (ATTENZIONE AI CALCOLI)

PRIMA DI STUDIARE IL det CONTROLLA SE È AMMISSIBILE

$c_B^T B^{-1} b$ RIMANE INVARIATO PERCHÉ ANCHE SE CAMBIO $x^T$ LA SBA RIMANE LA STESSA E QUINDI $c_B^T B^{-1} b$ RIMANE INVARIATA

$Ax \geq 0$ ALLORA $x = 0$ È UNA SOL. AMM. QUINDI IL DUALE NON È MAI ILLIMITATO

## ▷ ESAME 28 GENNAIO 2019 (B)

1 (PARTE I). CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA TOTALE UNIMODULARITÁ É CHE

1) SE $d_{kT} \neq 0$ E $d_{iT} \neq 0$ E DELLO STESSO SEGNO ALLORA $k \in Q_1$ E $i \in Q_2$

2) SE $d_{kT} \neq 0$ E $d_{iT} \neq 0$ E DI SEGNO OPPOSTO ALLORA $k, i \in Q_1$ OPPURE $k, i \in Q_2$

dim.

LA DIMOSTRAZIONE AVVIENE PER INDUZIONE QUINDI SUPPONGO CHE FINO A SOTTOMATRICI DI ORDINE $k-1$ SI HA TOTALE UNIMODULARITÁ VERIFICATA ALLORA DATA MATRICE $C$ DI ORDINE $k+1$ POSSONO AVVENIRE 3 COSE:

1) $\det C = 0$ ED AVVIENE SE $C$ HA UNA RIGA OD UNA COLONNA TUTTA NULLA

2) SE UNA RIGA OD UNA COLONNA DI $C$ HA UNA SOLA COMPONENTE NON NULLA ALLORA CALCOLO IL DET. RISPETTO TALE COMPONENTE CHE È SICURAMENTE $0, 1, -1$ PER INDUZIONE

3) ALTRIMENTI SI HA PER OGNI COLONNA $T$

$$\sum_{i \in Q_1} d_{iT} = \sum_{i \in Q_2} d_{iT} \quad \text{E} \quad \sum_{i \in Q_1} d_i = \sum_{i \in Q_2} d_i$$

DOVE $d_i$ SONO I VETTORI RIGA DI $C$

ALLORA SI HA CHE

$$\sum_{i \in Q_1} d_i - \sum_{T \in Q_2} d_T = 0$$

ALLORA SONO LIN. INDIP. E QUINDI $\det C = 0$

1. VARIABILI DI DECISIONE

$x_i^T$ = QUANTITÀ IN LITRI DI $B_i$ IN $S_T$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{SE UTILIZZO } B_4 \text{ IN } S_1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\max -\left[10\left(x_1^1+x_1^2\right)+9{,}5\left(x_2^1+x_2^2\right)+12\left(x_3^1+x_3^2\right)+10{,}5\left(x_4^1+x_4^2\right)\right]+25\left(x_1^1+x_2^1+x_3^1+x_4^1\right)+20\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)$$

VINCOLI

$$y_1 = x_1^1+x_2^1+x_3^1+x_4^1$$
$$y_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$
$$y_1 \geq 125$$
$$y_2 \geq 110$$
$$3y_1 \leq 2x_1^1+6x_2^1+x_3^1+x_4^1 \leq 6y_1$$
$$2x_1^2+6x_2^2+x_3^2+x_4^2 \geq 4y_2$$
$$y_2 \geq 0{,}20(y_1+y_2)$$
$$\left(x_1^1+x_1^2\right) \leq 100$$
$$\left(x_2^1+x_2^2\right) \leq 200$$
$$\left(x_3^1+x_3^2\right) \leq 250$$
$$\left(x_4^1+x_4^2\right) \leq 180$$
$$x_4^1 - 100\delta \leq 0$$
$$x_4^2 - (1-\delta)100 \leq 0$$
$$x_i^T \geq 0,\ \delta \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,4 \qquad T=1,2$$

2.
$$\begin{cases} \min & x_1-20x_2+60x_3 \\ & -2x_1-x_2+4x_3=-4 \\ & 4x_1+x_2-3x_3 \geq 10 \\ & x_i \geq 0,\ i=1,2,3 \end{cases}$$

IN FORMA STANDARD

$$\begin{cases} \min & x_1-20x_2+60x_3 \\ & 2x_1+x_2-4x_3=4 \\ & 4x_1+x_2-3x_3-x_4=10 \\ & x_i \geq 0,\ i=1,\dots,4 \end{cases}$$

USO IL PROBLEMA ARTIFICIALE

$$x_B^T = \left(\alpha_1 \quad \alpha_2\right) \qquad x_N^T = \left(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\right)$$

$$\gamma^T = -\left(1 \quad 1\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = -\left(6 \quad 2 \quad -7 \quad -1\right) = \left(-6 \quad -2 \quad 7 \quad 1\right)$$

$h = 1$

$$p = \min\left\{2, \frac{5}{2}\right\} = 2 \qquad k=1$$

$x_B^T = (x_1\ \ \alpha_2)$ $\quad x_N^T = (\alpha_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4)$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 2 & 1 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & -3 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0) - (-2\ \ -1\ \ 5\ \ -1) = (3\ \ 1\ \ -5\ \ 1)$$

$h = 3$

$\quad p = \min\left\{ V,\ \frac{2}{5} \right\} = \frac{2}{5} \quad k = 2$

$x_B^T = (x_1\ \ x_3)$ $\quad x_N^T = (\cancel{\alpha_1}\ \ x_2\ \ \cancel{\alpha_2}\ \ x_4)$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} -2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & -3/10 & 1/10 & 2/5 & -2/5 & 14/5 \\ 1 & -2/5 & -1/5 & 1/5 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

$\gamma^T = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)$ OTTIMALITÀ VERIFICATA E PROBLEMA ORIGINARIO AMMISSIBILE

$x_B^T = (x_1\ \ x_3)$ $\quad x_N^T = (x_2\ \ x_4)$

$$\gamma^T = (-20\ \ 0) - (1\ \ 60)\begin{pmatrix} 1/10 & -2/5 \\ -1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = (-20\ \ 0) - \left(-\frac{119}{10}\ \ -\frac{62}{5}\right) = \left(-\frac{81}{10}\ \ \frac{62}{5}\right)$$

$h = 1$

$\quad p = \min\{ 7,\ V \} = 7 \quad k = 1$

$x_B^T = (x_2\ \ x_3)$ $\quad x_N^T = (x_1\ \ x_4)$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1/10 & 1 & -2/5 & 14/5 \\ -1/5 & 0 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 10 & -4 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = (1\ \ 0) - (-20\ \ 60)\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (1\ \ 0) - (-80\ \ 20) = (81\ \ -20)$$

$h = 2$ CRITERIO DI ILLIMITATEZZA VERIFICATO

PROBLEMA ILLIMITATO

## ▷ QUESTIONARIO 3

1. F, F, V, F
2. F, V, F, V
3. V, V, F, F
4. F, F, V, F
5. V, V, V, V
6. F, F, F, V
7. V, F, V, V
8. V, V, V, F
9. F, F, F, F
10. F, V, V, V

NON DEVE MA PUÒ ESSERLO — SI PORTA IL PRIMALE IN FORMA DI MIN E POI SI TROVA IL DUALE

▷ ESAME 21 FEBBRAIO 2019 (A)

♡ Elisa ti vuole tanto bene

1. VARIABILI DI DECISIONE

$x_i^j$ = LITRI DI $C_j$ PRODOTTO NELL'IMPIANTO $I_i$

$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{SE USO } I_i \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ $\qquad i = 1,\dots,5 \quad j = 1,2$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \; 10x_1^1 + 15x_2^1 + 12x_3^1 + 14x_4^1 + 11x_5^1 + 11x_1^2 + 18x_2^2 + 15x_3^2 + 13x_4^2 + 10x_5^2 + 600\delta_1 + 750\delta_2 + 600\delta_3 + 750\delta_4 + 600\delta_5$$

VINCOLI

$$(x_1^1 + x_1^2) - 500\delta_1 \le 0$$
$$(x_2^1 + x_2^2) - 750\delta_2 \le 0$$
$$(x_3^1 + x_3^2) - 550\delta_3 \le 0$$
$$(x_4^1 + x_4^2) - 580\delta_4 \le 0$$
$$(x_5^1 + x_5^2) - 510\delta_5 \le 0$$

$$x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 + x_4^1 + x_5^1 \ge 1200$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \ge 1000$$
$$x_i^j \ge 0, \quad \delta_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,5 \quad j = 1,2$$

2.

$$\begin{cases} \min\; 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 12 \\ x_i \ge 0 \qquad i = 1,\dots,4 \end{cases}$$

APPLICO IL PROBLEMA ARTIFICIALE

$x_B^T = (\alpha_1 \;\; \alpha_2) \qquad x_N^T = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4)$

$$\gamma^T = -(1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = -(3 \;\; -1 \;\; 7 \;\; 0) = (-3 \;\; 1 \;\; -7 \;\; 0)$$

$h = 3$

$$\rho = \min\left\{ \frac{7}{2}, \frac{12}{5} \right\} = \frac{12}{5} \qquad k = 2$$

$x_B^T = (\alpha_1 \;\; x_3) \qquad x_N^T = (x_1 \;\; x_2 \;\; \alpha_2 \;\; x_4)$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & -1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 1/5 & 2/5 & -2/5 & -7/5 & 11/5 \\ 1 & 2/5 & -1/5 & 1/5 & 1/5 & 12/5 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & -2/5 & -7/5 \\ 2/5 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$h = 2$

$$p = \min\left\{ \frac{11}{2}, v \right\} \qquad k = 1$$

$$x_B^T = (x_2, x_3) \qquad x_N^T = \begin{pmatrix} x_1 & \cancel{\alpha_1} & \cancel{\alpha_2} & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 2/5 & 1/5 & 1 & -2/5 & -7/5 & 11/5 \\ -1/5 & 2/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 12/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1/2 & \cancel{5/2} & \cancel{-1} & -7/2 & 11/2 \\ 0 & 1/2 & \cancel{1/2} & \cancel{0} & -1/2 & 7/2 \end{array}\right)$$

$\gamma^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ OTTIMO RAGGIUNTO E PROBLEMA ORIGINARIO AMMISSIBILE

$\gamma^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -7/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$ OTTIMO RAGGIUNTO

$$x^{*T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad z^* = \frac{11}{2} - 7 = -\frac{3}{2}$$

1 (PARTE I). DATO $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ E $\bar{x} \in P$. $\bar{x}$ È VERTICE DI $P$ SE E SOLO SE LE COLONNE DI $A$ ASSOCIATE ALLE COMPONENTI NON NEGATIVE DI $\bar{x}$ SONO LIN. INDIP.

dim.

DATO $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ E $\bar{x} \in P$ CON $r$ COMPONENTI NON NULLE ED $n-r$ NULLE.

POSSO RISCRIVERE I VINCOLI COME

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ALLORA } V = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix}$$ È LA MATRICE DEI VINCOLI CHE DEFINISCONO $P$

DATO $\bar{x}$ SI HA CHE RENDE ATTIVI TUTTI I VINCOLI DI $P$ ALLORA $V$ È LA MATRICE DEI VINCOLI RESI ATTIVI DA $\bar{x}$.

STUDIO IL RANGO DI $V$

$$rg\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a_1 .. a_r & a_{r+1} \dots a_n \\ \emptyset_r & I_{n-r} \end{pmatrix} = n$$

DOVE LA SEPARAZIONE È STATA FATTA CONSIDERANDO $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ CON $x_1 \in \mathbb{R}^r$ E $x_1 > \emptyset_r$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$ $x_2 = \emptyset_{n-r}$

QUINDI DATO IL RANGO SI HA

$$V\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a_1 \dots a_r)y + (a_{r+1} \dots a_n)z = 0 \\ \emptyset\, y + I z = 0 \end{cases}$$ LA SOLUZIONE È $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ E QUESTO SI VERIFICA SE E SOLO SE $(a_1 .. a_r)$ SONO LIN. INDIP. ESSENDO $z = 0$

QUINDI È DIMOSTRATO

▷ QUESTIONARIO 4

È UN SEGMENTO, ESSO PUÒ ESSERE RAPPR. DA UN NUMERO FINITO DI VERT.

UN PROBLEMA DI PL NON È SEMPRE UN POLITOPO QUINDI NEANCHE LA SUA F. LINEARE

1. F, F, V, F    2. F, F, V, V    3. V, F, V, F    4. V, F, V, F    5. F, F, F, V    6. V, F, F, V

ERRORE DI COSTRUZIONE DEL DUALE

7. F, V, F, V    8. F, F, V, F    9. V, F, V, F    10. V, F, F, V

LO SCAMBIO DEGENERE AVVIENE PER OGNI COLONNA CHE SIA ≠ 0, VA BENE ANCHE NEGATIVA

ATTENZIONE AI CALCOLI

SÌ PERCHÉ SI DETERMINA CON UN PARTICOLARE METODO

▷ ESAME 22 MARZO 2019 (A)

2.
$$\begin{cases} \min & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, .., 4 \end{cases}$$

APPLICO IL P.A. INTRODUCENDO UNA SOLA VARIABILE ARTIFICIALE

ATTENZIONE QUANDO USI UNA SOLA VARIABILE ARTIFICIALE A COME LA POSIZIONI

$$x_B = (x_1 \quad \lambda_1)^T \qquad x_N = (x_2 \quad x_3 \quad x_4)^T$$

$$\gamma^T = -(0 \quad 1)\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (-1 \quad -2 \quad -2)$$

$h = 2$

$$\min\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\} \qquad k = 2$$

$$x_B = (x_1 \quad x_3)^T \qquad x_N = (x_2 \quad \lambda_1 \quad x_4)^T$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c|c} 0 & 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$

$\gamma^T = (0 \quad 1 \quad 0)$ OTTIMALITÀ VERIFICATA E PROBLEMA ORIGINARIO AMMISSIBILE

$$\gamma^T = (2 \quad -1) - (1 \quad -1)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = (2 \quad -1) - \left(\frac{5}{2} \quad -2\right) = \left(-\frac{1}{2} \quad 1\right)$$

$h = 1$

$$\min\{1, 3\} = 1 \qquad k = 1$$

$$x_B = (x_2 \quad x_3)^T \qquad x_N = (x_1 \quad x_4)^T$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1/2 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & -1/6 & 7/6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/6 & 7/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{11}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{17}{6} \end{pmatrix}$$

CRITERIO DI OTTIMALITÁ VERIFICATO, L'OTTIMO Ē QUINDI RAGGIUNTO PER

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

1. VARIABILI DI DECISIONE

$x_i^T$ = ETTOLITRI DI PETROLIO DA $R_i$ A $D_T$

$$\delta_i^T = \begin{cases} 1 & \text{SE USO OLEODOTTO DA } R_i \text{ A } D_T \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \quad 50x_1^1 + 75x_1^2 + 60x_1^3 + 70x_1^4 + 60x_1^5 + 40x_2^1 + 70x_2^2 + 55x_2^3 + 75x_2^4 + 70x_2^5 + 6000\delta_1^1 + 6000\delta_1^2 + 6000\delta_1^3 +$$
$$6000\delta_1^4 + 6000\delta_1^5 + 5500\delta_2^1 + 5500\delta_2^2 + 5500\delta_2^3 + 5500\delta_2^4 + 5500\delta_2^5$$

VINCOLI

$x_1^1 - 4000\delta_1^1 \le 0$

$x_1^2 - 5000\delta_1^2 \le 0$

$x_1^3 - 3000\delta_1^3 \le 0$

$x_1^4 - 4600\delta_1^4 \le 0$

$x_1^5 - 4000\delta_1^5 \le 0$

$x_2^1 - 3800\delta_2^1 \le 0$

$x_2^2 - 4000\delta_2^2 \le 0$

$x_2^3 - 4000\delta_3^2 \le 0$

$x_2^4 - 5000\delta_4^2 \le 0$

$x_2^5 - 5000\delta_5^2 \le 0$

$(x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 + x_1^5) \le 15000$

$(x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 + x_2^5) \le 20000$

$x_1^1 + x_2^1 \ge 3750$

$x_1^3 + x_2^3 \ge 3750$

$x_1^2 + x_2^2 \ge 4500$

$x_1^4 + x_2^4 \ge 4500$

$x_1^5 + x_2^5 \ge 4500$

$x_i^T \ge 0, \quad \delta_i^T \in \{0,1\} \quad i=1,2 \quad T=1,\dots,5$

1 (PARTE I).

DATO $P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$ E $\bar{x}\in P$.

$\bar{x}$ È UNA SBA $\Rightarrow$ $\bar{x}$ È VERTICE

SE $\bar{x}$ È SBA DI UN POLIEDRO IN FORMA STANDARD ALLORA $\exists$ B SOTTOMATRICE DI A COMPOSTA DALLE COLONNE ASSOCIATE ALLE COMPONENTI NON NULLE DI $\bar{x}$ CHE SONO LIN. INDIP. PER DEFINIZIONE DI SBA ALLORA $\bar{x}$ È VERTICE.

$\bar{x}$ È VERTICE $\Rightarrow$ $\bar{x}$ È UNA SBA

$\bar{x}$ HA $r$ COMPONENTI NON NULLE ED $n-r$ NULLE ALLORA DEFINISCO

$B=(a_1 \dots a_r)$ MATRICE FATTA DALLE COLONNE ASSOCIATE ALLE COMPONENTI NON NULLE DI $\bar{x}$ CHE SONO LIN. INDIP. PER DEFINIZIONE DI VERTICE

POSSO DEFINIRE UN COMPLETAMENTO DI B T.C. B SIA ANCORA NON SINGOLARE

$$\bar{B}=(a_1 \dots a_r \;\; a_{r+1} \dots a_n)$$

ALLORA SIA $x_B$ COMPOSTA DALLE COMPONENTI NON NULLE DI $\bar{x}$ ED $x_N$ DALLE COMPONENTI NULLE DI $\bar{x}$

$$A\bar{x}=\bar{B}\begin{pmatrix}x_B\\ x_N\end{pmatrix}=Bx_B=b \Rightarrow \begin{array}{l} x_B=B^{-1}b \\ x_N=\emptyset \end{array}$$

ALLORA $\bar{x}$ È UNA SBA.

## ▷ QUESTIONARIO 5

NON BASTANO DUE PUNTI DEVE VALERE PER OGNI PUNTO

DEVE ANCHE ESSERE LIMITATO OLTRE CHE NON VUOTO PERCHÉ SE FOSSE ILLIMITATO NON AMM. VERTICI

1. V, F, F, V   2. V, F, F, V   3. V, V, V, V   4. F, F, F, V   5. F, V, V, V   6. F, V, V, V

7. V, F, F, V   8. F, V, V, F   9. F, F, V, F   10. V, F, V, V

SE CONTIENE RETTE NON HA VERTICI MA PUÒ AVERE INFINITI OTTIMI SU UNA RETTA

## ▷ QUESTIONARIO 6

SEMIRETTE NON SONO SEGMENTI

1. V, F, F, V   2. F, V, F, V   3. F, V, V, F   4. V, F, F, F   5. V, F, F, F   6. V, F, F, V

VA CALCOLATO IL $\gamma$ E FATTA L'INVERSA DI B E POI CALCOLATO $B^{-1}N$

7. V, F, F, F   8. V, F, V, F   9. F, V, F, F   10. F, V, F, F

BISOGNA FARE L'INVERSA DI B E CALCOLARE $B^{-1}b$ CHE NON È MAGGIORE DI 0 $\forall \gamma$

LA TOTALE UNIMODULARITÀ È RICHIESTA PER IL POLIEDRO IN FORMA GENERALE

## ▷ ESAME 29 GENNAIO 2019

2.

$$\begin{cases} \max\ 4x_1+0{,}1x_2+x_3+3{,}6x_4-2x_5+2{,}5x_6+3x_7 \\ 2x_1+x_2+2x_3+2x_4+x_5+x_6+x_7\leq 3 \\ x_i\in\{0,1\},\ i=1,\dots,7 \end{cases}$$

ORDINO LE VARIABILI

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,1 | 0,5 | 1,8 | ✓ | 2,5 | 3 |
| $y_3$ | $y_6$ | $y_5$ | $y_4$ | | $y_2$ | $y_1$ |

$$\begin{cases} \max & 3y_1 + 2{,}5y_2 + 4y_3 + 3{,}6y_4 + y_5 + 0{,}1y_6 \\ & y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6 \leq 3 \\ & y_i \in \{0,1\},\ i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$y^* = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ $\quad z^* = 5{,}5$ OTTIMO ATTUALE

$\bar{y}^T = (1 \quad 1 \quad \frac{3-2}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ ALLORA EFFETTUO UN BRANCH

$$\text{PROB}(0): \begin{cases} \max & 3y_1 + 2{,}5y_2 + 4y_3 + 3{,}6y_4 + y_5 + 0{,}1y_6 \\ & y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6 \leq 3 \\ & y_3 = 0,\ y_i \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$$\text{PROB}(1): \begin{cases} \max & 3y_1 + 2{,}5y_2 + 4y_3 + 3{,}6y_4 + y_5 + 0{,}1y_6 \\ & y_1 + y_2 + 2y_4 + 2y_5 + y_6 \leq 1 \\ & y_3 = 1,\ y_i \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$\mathcal{L} = \{ \cancel{\text{PROB}(0)}, \text{PROB}(1) \}$

ESTRAGGO PROB (0)

$\bar{y}^T = (1 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{3-2}{2} \quad 0 \quad 0)$ $\quad U_0 = 3 + 2{,}5 + 0{,}5 \cdot 3{,}6 = 7{,}5$ EFFETTUO UN BRANCH

$$\text{PROB.}(2) \begin{cases} \max & 3y_1 + 2{,}5y_2 + 4y_3 + 3{,}6y_4 + y_5 + 0{,}1y_6 \\ & y_1 + y_2 + 2y_5 + y_6 \leq 3 \\ & y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_i \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$$\text{PROB}(3) \begin{cases} \max & 3y_1 + 2{,}5y_2 + 4y_3 + 3{,}6y_4 + y_5 + 0{,}1y_6 \\ & y_1 + y_2 + 2y_5 + y_6 \leq 1 \\ & y_3 = 0,\ y_4 = 1,\ y_i \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$\mathcal{L} = \{ \cancel{\text{PROB}(1)}, \cancel{\text{PROB}(2)}, \cancel{\text{PROB}(3)} \}$

ESTRAGGO PROB (1)

$\bar{y}^T = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ $\quad U_1 = 7 > 5{,}5$

HO QUINDI UN NUOVO OTTIMO

$y^* = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ $\quad z^* = 7$

ESTRAGGO PROB (2)

$\bar{y} = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3-2}{2} \quad 0)$ $\quad U_2 = 3 + 2{,}5 + 0{,}5 = 6 < 7$ CHIUDO PROB (2)

ESTRAGGO PROB(3)

$\bar{Y} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T \quad U_3 = 3 + 3,6 = 6,6 < 7$ CHIUDO PROB(3)

$$\mathcal{L} = \{\emptyset\}$$

$$\begin{array}{l} y^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z^* = 7 \\ \qquad\; x_7 \quad x_6 \quad x_1 \quad x_4 \quad x_3 \quad x_2 \end{array}$$

QUINDI NELLE VARIABILI X SI HA

$$y^* = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T \quad z^* = 7$$

1 (PARTE I).

DATO $\bar{x} \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$

$\bar{x}$ VERTICE $\Rightarrow$ $\bar{x}$ È UNA SBA

SE $\bar{x}$ È VERTICE SIGNIFICA CHE DATE $r$ COMPONENTI POSITIVE ED $n-r$ NULLE SI HA UNA SOTTOMATRICE $B$

$B = (a_1 \dots a_r)$ COMPOSTA DALLE COLONNE DI $A$ ASSOCIATE ALLE COMPONENTI NON NULLE DI $\bar{x}$ CHE SONO LIN. INDIP.

ALLORA SI PUÒ DEFINIRE UN COMPLETAMENTO T.C.

$\bar{B} = (a_1 \dots a_r \; a_{r+1} \dots a_n)$ IN MODO CHE CI SIA COMUNQUE LIN. INDIP.

ALLORA SCRITTO $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{n-r} \end{pmatrix}$ SI HA

$$A\bar{x} = B\begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{n-r} \end{pmatrix} = B\bar{x}_r + (a_{r+1} \dots a_n)\bar{x}_{n-r} = B\bar{x}_r = b$$

ALLORA

$$\bar{x}_r = B^{-1} b > \emptyset$$

$\bar{x}_{n-r} = \emptyset$ COME DA DEFINIZIONE DI SBA

$\bar{x}$ È UNA SBA $\Rightarrow$ $\bar{x}$ È VERTICE

SE $\bar{x}$ È UNA SBA ALLORA $\exists B$ SOTTOMATRICE DI $A$ TALE CHE LE COLONNE ASSOCIATE ALLE COMPONENTI NON NULLE DI $\bar{x}$ SONO LIN. INDIP. E QUINDI $\bar{x}$ È VERTICE.

## ▷ QUESTIONARIO 7

1. F, F, F, F
2. F, V, F, V
3. F, V, V, V
4. F, F, V, F
5. F, V, F, F
6. V, V, V, V
7. F, F, F, F
8. V, V, F, F
9. F, V, F, F
10. F, F, V, V

SE SONO SU UN SEGMENTO SONO DISTINTE

# ▷ ESAME 21 FEBBRAIO 2019 (B)

**2.**

$$\begin{cases} \max & 2{,}7x_1+0{,}5x_2+4x_3+x_4+4x_5+0{,}3x_6-3x_7 \\ & 3x_1+2x_2+3x_3+2x_4+2x_5+2x_6+x_7 \le 7 \\ & x_i \in \{0,1\},\ i=1,\dots,7 \end{cases}$$

ORDINO LE VARIABILI SECONDO IL RAPPORTO COSTO-PESO

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
| 0,9 | 0,25 | $\frac{4}{3}$ | 0,5 | 2 | 0,15 | V |
| $y_3$ | $y_5$ | $y_2$ | $y_4$ | $y_1$ | $y_6$ | |

RISCRIVO QUINDI IL PROBLEMA

$$\begin{cases} \max & 4y_1+4y_2+2{,}7y_3+y_4+0{,}5y_5+0{,}3y_6 \\ & 2y_1+3y_2+3y_3+2y_4+2y_5+2y_6 \le 7 \\ & y_i \in \{0,1\},\ i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$$y^* = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \qquad z^* = 8$$ OTTIMO CORRENTE

$$\bar{y} = (1 \quad 1 \quad \tfrac{7-5}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \qquad U_0 = 4+4+\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{27}^{\,9}}{\cancel{10}\,5} = \frac{40+9}{5} = \frac{49}{5} > z^*$$ QUINDI EFFETTUO BRANCHING

$$(1)\begin{cases} \max & 4y_1+4y_2+2{,}7y_3+y_4+0{,}5y_5+0{,}3y_6 \\ & 2y_1+3y_2+2y_4+2y_5+2y_6 \le 7 \\ & y_3=0,\ y_i \in \{0,1\},\ i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \max & 4y_1+4y_2+2{,}7y_3+y_4+0{,}5y_5+0{,}3y_6 \\ & 2y_1+3y_2+2y_4+2y_5+2y_6 \le 4 \\ & y_3=1,\ y_i \in \{0,1\}\ i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \{\cancel{\text{PROB}(1)},\ \cancel{\text{PROB}(2)}\}$$

ESTRAGGO PROB(1)

$$\bar{y} = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T \qquad U_1 = 4+4+1 = 9 > z^*$$ CHIUDO PROB(1)

NUOVO OTTIMO CORRENTE

$$y^* = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T \qquad z^* = 9$$

ESTRAGGO PROB(2)

$$\bar{y} = (1 \quad \tfrac{4-2}{3} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \qquad U_2 = 4+\tfrac{2}{3}4+2{,}7 \simeq 9{,}3$$ QUINDI FACCIO BRANCHING

$$(3)\begin{cases} \max & 4y_1+4y_2+2{,}7y_3+y_4+0{,}5y_5+0{,}3y_6 \\ & 2y_1+2y_4+2y_5+2y_6 \le 4 \\ & y_2=0,\ y_3=0,\ y_i \in \{0,1\}\ i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} \max & 4y_1+4y_2+2{,}7y_3+y_4+0{,}5y_5+0{,}3y_6 \\ & 2y_1+2y_4+2y_5+2y_6 \le 1 \\ & y_2=1,\ y_3=0,\ y_i \in \{0,1\}\ i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$\mathcal{L} = \{ \cancel{PROB(3)}, \cancel{PROB(4)} \}$

ESTRAGGO PROB(3)

$\bar{y} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T \qquad U_3 = 4 + 1 = 5 < z^* \quad$ CHIUDO PROB(3)

ESTRAGGO PROB(4)

$\bar{y} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \qquad U_4 = 0 \qquad$ CHIUDO PROB(4)

$$\mathcal{L} = \{ \emptyset \}$$

ALLORA L'OTTIMO DEL PROBLEMA $\bar{R}$

$$y^* = \begin{pmatrix} \underset{x_5}{1} & \underset{x_3}{1} & \underset{x_1}{0} & \underset{x_4}{1} & \underset{x_2}{0} & \underset{x_6}{0} \end{pmatrix}^T \qquad z^* = 9$$

NELLA VARIABILI $x$ $\bar{R}$

$$x^* = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T \qquad z^* = 9$$

1 (PARTE I). DATO $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ POLIEDRO DI UN PROBLEMA DI PL IN FORMA STANDARD ED $\bar{x} \in P$ VERTICE:

- SE $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq \emptyset$ ALLORA $\bar{x}$ È UNA SBA OTTIMA.
- SE ESISTE UN INDICE $i$ PER CUI $\gamma_i < 0$ E $(B^{-1}N)_i \leq \emptyset$ ALLORA IL PROBLEMA $\bar{R}$ ILLIMITATO.

dim. OTTIMALITÀ

PRESO $x \in P$ PUNTO QUALSIASI

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

DAI VINCOLI DEL PROBLEMA SI HA

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \quad$ ALLORA $\quad c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N \quad$ QUINDI

$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N \geq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x} \qquad$ ESSENDO $\gamma^T \geq \emptyset$

dim. ILLIMITATEZZA

SE ESISTE $i$ T.C. $\gamma_i < 0$ ALLORA POSSO DEFINIRE $x(\rho) \in P$ T.C.

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}N x_N(\rho)$$
$$x_N(\rho) = \rho e_i \qquad \rho > 0$$

APPARTIENE A $P$ PER $\rho > 0$ INFATTI

$$A x(\rho) = B(B^{-1}b - B^{-1}N \rho e_i) + N \rho e_i = b - N\rho e_i + N \rho e_i = b$$

E SONO SODDISFATTI I VINCOLI DI NON NEGATIVITÀ INFATTI

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}N\rho e_i > \emptyset \quad \text{ESSENDO } \rho > 0 \text{ E } (B^{-1}N)_i \le \emptyset$$

$$x_N(\rho) > 0 \quad \text{ESSENDO } \rho > 0$$

ALLORA

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} N x_N(\rho) + c_N^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \gamma_i \rho e_i$$

PER $\rho \to +\infty$ SI HA $c^T x(\rho) \to -\infty$ COMUNQUE APPARTENENDO AL POLIEDRO QUINDI È ILLIMITATO

## ▷ QUESTIONARIO 8

ATTENZIONE AL CALCOLO DEL DET.

1. V, V, V, F
2. F, F, F, V
3. F, F, V, V
4. F, F, F, V
5. F, F, V, F
6. F, F, F, F
7. F, F, V, F
8. F, V, F, F
9. F, V, F, F
10. V, V, V, F

## ▷ ESAME 11 GIUGNO 2018

3.

$$\begin{cases} \max & x_1 + 1{,}2x_2 - x_3 + 2{,}1x_4 + x_5 + 5x_6 + 2{,}4x_7 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 + 3x_6 + 2x_7 \le 4 \\ & x_i \in \{0,1\},\ i = 1,\dots,7 \end{cases}$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,2 | ✓ | 1,05 | OK | ≃1,6 | 1,2 |
| $y_5$ | $y_2$ | | $y_4$ | | $y_1$ | $y_3$ |

RISCRIVO IL PROBLEMA

$$\begin{cases} \max & 5y_1 + 1{,}2y_2 + 2{,}4y_3 + 2{,}1y_4 + y_5 \\ & 3y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 \le 5 \\ & y_i \in \{0,1\},\ i = 1,\dots,5 \end{cases}$$

COSTRUISCO L'OTTIMO ATTUALE

$$y^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad z^* = 6{,}2$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5-4}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad U_0 = 5 + 1{,}2 + \frac{2{,}4}{2} = 6{,}2 + 1{,}2 = 7{,}4 > z^* \quad \text{FACCIO BRANCHING}$$

$$(1)\begin{cases} \max & 5y_1 + 1{,}2y_2 + 2{,}4y_3 + 2{,}1y_4 + y_5 \\ & 3y_1 + y_2 + 2y_4 + y_5 \le 5 \\ & y_3 = 0,\ y_i \in \{0,1\}\ i = 1,\dots,5 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \max & 5y_1 + 1{,}2y_2 + 2{,}4y_3 + 2{,}1y_4 + y_5 \\ & 3y_1 + y_2 + 2y_4 + y_5 \le 3 \\ & y_3 = 1,\ y_i \in \{0,1\}\ i = 1,\dots,5 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \{\text{PRO}\cancel{\text{B}}(1),\ \text{PRO}\cancel{\text{B}}(2)\}$$

ESTRAGGO PROB(1)

$$\bar{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{5-4}{2} & 0 \end{pmatrix}^T \quad U_1 = 5 + 1,2 + \frac{2,1}{2} = 6,2 + 1,05 = 7,25 > z^*$$ FACCIO BRANCHING

$$(3)\begin{cases} \max & 5y_1 + 1,2y_2 + 2,4y_3 + 2,1y_4 + y_5 \\ & 3y_1 + y_2 + y_5 \leq 5 \\ & y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_i \in \{0,1\}\ i = 1,..,5 \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} \max & 5y_1 + 1,2y_2 + 2,4y_3 + 2,1y_4 + y_5 \\ & 3y_1 + y_2 + y_5 \leq 3 \\ & y_3 = 0,\ y_4 = 1,\ y_i \in \{0,1\}\ i = 1,...,5 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \{\cancel{PROB(2)}, \cancel{PROB(3)}, \cancel{PROB(4)}\}$$

ESTRAGGO PROB(2)

$$\bar{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad U_2 = 5 + 2,4 = 7,4 > z^*$$

QUINDI HO UN NUOVO OTTIMO CORRENTE, CHIUDO PROB(2).

ESTRAGGO PROB(3)

$$\bar{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad U_3 = 5 + 1,2 + 1 = 7,2 < z^*$$ CHIUDO PROB(3)

ESTRAGGO PROB(4)

$$\bar{y}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \quad U_4 = 5 + 2,1 = 7,1 < z^*$$ CHIUDO PROB(4)

$$\mathcal{L} = \{\emptyset\}$$

HO L'OTTIMO PER

$$y^* = \begin{pmatrix} \underset{x_6}{1} & \underset{x_2}{0} & \underset{x_7}{1} & \underset{x_4}{0} & \underset{x_1}{0} \end{pmatrix}^T$$

TRADUCO IN X

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \quad z^* = 1 + 5 + 2,4 = 8,4$$

2.
$$\begin{cases} \min & -x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,..,4 \end{cases}$$

APPLICO LA FASE I

$$x_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}^T \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$$

$$\gamma^T = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$h = 3$

$$p = \min\left\{2,\ 6\right\} = 2 \qquad k = 1$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}^T \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha_1 & x_4 \end{pmatrix}^T$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 2 \\ 0 & -5/2 & 5/2 & -1/2 & 11/2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$h = 4$

$$p = \min\left\{V,\ \frac{8}{11}\right\} \qquad k = 2$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cancel{\alpha_1} & \cancel{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} -3/2 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 2 \\ 11/2 & -5/2 & 5/2 & -1/2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 9/11 & 2/11 & \cancel{4/11} & \cancel{3/11} & 34/11 \\ 1 & -5/11 & 5/11 & \cancel{-1/11} & \cancel{2/11} & 8/11 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ OTTIMO RAGGIUNTO E P.O. AMMISSIBILE

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/11 & 2/11 \\ -5/11 & 5/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{26}{11} & \frac{18}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{37}{11} & -\frac{73}{11} \end{pmatrix}$$

$h = 2$

$$p = \min\left\{\frac{\frac{34}{11}}{\frac{2}{11}},\ \frac{\frac{8}{11}}{\frac{5}{11}}\right\} \qquad k = 2$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 2/11 & 9/11 & 0 & 34/11 \\ 5/11 & -5/11 & 1 & 8/11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 1 & -2/5 & 154/55 \\ 1 & -1 & 11/5 & 8/5 \end{array}\right)$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 \end{pmatrix}^T \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \end{pmatrix}^T \qquad \gamma^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ -1 & 11/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -\frac{63}{5} \end{pmatrix}$$ OTTIMO VERIFICATO

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{5} & \frac{14}{5} & 0 \end{pmatrix}^T$$

1. VARIABILI DI DECISIONE

$x_i^T$: UNITÀ DI PNEUMATICI $P_T$ PRODOTTI DALLA LINEA $L_i$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{SE LINEA } L_i \text{ È ATTIVA} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3 \quad T = 1, 2$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \; 60 x_1^1 + 50 x_2^1 + 45 x_3^1 + 55 x_1^2 + 52 x_2^2 + 40 x_3^2 + 500 \delta_1 + 600 \delta_2 + 750 \delta_3$$

VINCOLI

$$x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = 2750$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1050$$
$$(x_1^1 + x_1^2) - 1000 \delta_1 \le 0$$
$$(x_2^1 + x_2^2) - 2500 \delta_2 \le 0$$
$$(x_3^1 + x_3^2) - 1300 \delta_3 \le 0$$
$$\delta_i \in \{0,1\}, \; x_i^T \ge 0, \; i = 1,2,3 \quad T = 1,2$$
$$x_i^T \in \mathbb{Z}^+$$

(PARTE I)

a) DATO $P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \; x \ge 0 \}$ E $\bar{x} \in P$. $\bar{x}$ È VERTICE SE E SOLO SE È UNA SBA.

dim.

$\bar{x}$ VERTICE $\Rightarrow$ $\bar{x}$ È UNA SBA

SE $\bar{x}$ È VERTICE ALLORA $\exists$ $B$ SOTTOMATRICE DI $A$ COMPOSTA DALLE COLONNE DI $A$ ASSOCIATE ALLE COMPONENTI NON NULLE DI $\bar{x}$ CHIAMATE $\bar{x}_r$, MENTRE $\bar{x}_{n-r}$ SONO LE COMPONENTI DI $\bar{x}$ NULLE. QUINDI $B = (a_1 \dots a_r)$ È COMPOSTA DA COLONNE LIN. INDIP. SI PUÒ DEFINIRE IL SEGUENTE COMPLETAMENTO DI B:

$$\bar{B} = (a_1 \dots a_r \; a_{r+1} \dots a_n) \Rightarrow A\bar{x} = \bar{B} \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{n-r} \end{pmatrix} = B \bar{x}_r + (a_{r+1} \dots a_n) \bar{x}_{n-r} = B \bar{x}_r = b \quad \text{ALLORA}$$

$$\bar{x}_r = B^{-1} b > \emptyset$$
$$\bar{x}_{n-r} = \emptyset$$

QUINDI È UNA SBA.

$\bar{x}$ SBA $\Rightarrow$ $\bar{x}$ È VERTICE

SE $\bar{x}$ È SBA ALLORA LA BASE ASSOCIATA $B$ È SOTTOMATRICE DI $A$ ED È NON SINGOLARE QUINDI PER DEFINIZIONE $\bar{x}$ È VERTICE.

b) DATO $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ E $\bar{x} \in P$. DATO $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} b$ VETTORE DEI COSTI RIDOTTI ASSOCIATO AD $\bar{x}$. SE $\gamma^T \geq \emptyset$ ALLORA $\bar{x}$ È OTTIMA PER IL PROBLEMA.

dim.

PRESO $x \in P$ SI HA

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$ DAI VINCOLI SI HA

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

ALLORA

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N \geq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}$$

QUINDI $\bar{x}$ É OTTIMA.

## ▷ QUESTIONARIO 9

É LIMITATO AL 1° ORTANTE

SI RIFERISCE A TUTTA LA COLONNA

1. V, F, F, F
2. V, F, F, F
3. F, F, V, V
4. F, F, F, V
5. F, V, F, V
6. V, V, V, V
7. V, F, F, V
8. F, V, V, F
9. F, F, V, F
10. F, V, F, V

## ▷ ESAME 18 LUGLIO 2018

3.
$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 0{,}4x_2 - 0{,}5x_3 + 3{,}2x_4 + 3{,}9x_5 + 2x_6 + 4x_7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \leq 5 \\ x_i \in \{0,1\},\ i = 1, .., 7 \end{cases}$$

ORDINO LE VARIABILI

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,2 | V | 1,6 | 1,3 | 1 | 4 |
| $y_2$ | $y_6$ | | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_1$ |

RISCRIVO IL PROBLEMA

$$\begin{cases} \min\ 4y_1 + 3y_2 + 3{,}2y_3 + 3{,}9y_4 + 2y_5 + 0{,}4y_6 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 5 \\ y_i \in \{0,1\},\ i = 1, .., 6 \end{cases}$$

$$y^* = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T \qquad z^* = 4 + 3 + 3{,}2 = 10{,}2$$ OTTIMO CORRENTE

$$\bar{y} = \left(1\ \ 1\ \ 1\ \ \tfrac{5-4}{3}\ \ 0\ \ 0\right)^T$$ FACCIO BRANCHING

$$(0)\begin{cases} \min\ 4y_1+3y_2+3{,}2y_3+3{,}9y_4+2y_5+0{,}4y_6 \\ y_1+y_2+2y_3+2y_5+2y_6 \le 5 \\ y_i \in \{0,1\},\ i=1,\dots,6,\ y_4=0 \end{cases} \qquad (1)\begin{cases} \min\ 4y_1+3y_2+3{,}2y_3+3{,}9y_4+2y_5+0{,}4y_6 \\ y_1+y_2+2y_3+2y_5+2y_6 \le 2 \\ y_4=1,\ y_i \in \{0,1\},\ i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}: \{\cancel{PROB(0)},\ \cancel{PROB(1)}\}$$

ESTRAGGO PROB(0)

$$\bar{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{5-4}{2} & 0 \end{pmatrix}^T \qquad U_0 = 4+3+3{,}2+1 = 11{,}2 > z^* \text{ FACCIO BRANCHING}$$

$$(2)\begin{cases} \min\ 4y_1+3y_2+3{,}2y_3+3{,}9y_4+2y_5+0{,}4y_6 \\ y_1+y_2+2y_3+2y_6 \le 5 \\ y_4=0,\ y_5=0,\ y_i \in \{0,1\},\ i=1,\dots 6 \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} \min\ 4y_1+3y_2+3{,}2y_3+3{,}9y_4+2y_5+0{,}4y_6 \\ y_1+y_2+2y_3+2y_6 \le 3 \\ y_4=0,\ y_5=1,\ y_i \in \{0,1\},\ i=1,\dots,6 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}: \{\cancel{PROB(1)},\ \cancel{PROB(2)},\ \cancel{PROB(3)}\}$$

ESTRAGGO PROB(1)

$$\bar{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad U_1 = 4+3+3{,}9 = 10{,}9 > z^*$$

NUOVO OTTIMO CORRENTE $y^* = \bar{y}^{(1)}$ E $z^* = U_1$. CHIUDO PROB(1).

ESTRAGGO PROB(2)

$$\bar{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{5-4}{2} \end{pmatrix}^T \qquad U_2 = 4+3+3{,}2+0{,}4 = 10{,}6 < z^* \text{ CHIUDO PROB(2)}$$

ESTRAGGO PROB(3)

$$\bar{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3-2}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad U_3 = 4+3+\tfrac{1}{2}\cdot 3{,}2+2 = 10{,}6 < z^* \text{ CHIUDO PROB(3)}$$

L'OTTIMO È

$$y^* = \begin{pmatrix} \underset{x_7}{1} & \underset{x_1}{1} & \underset{x_4}{0} & \underset{x_5}{1} & \underset{x_6}{0} & \underset{x_2}{0} \end{pmatrix}^T \qquad z^* = 10{,}9$$

PORTO NELLA VARIABILE $x$

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad z^* = 10{,}9$$

1 (PARTE I).

d) DATO $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \ge b\}$ E $\bar{x} \in P$. $\bar{x}$ È VERTICE SE E SOLO SE ESISTONO $n$ VINCOLI DI P RESI ATTIVI DA $\bar{x}$ LINEARMENTE INDIPENDENTI.

dim.

$\bar{x}$ VERTICE $\Rightarrow$ $n$ VINCOLI LIN. INDIP.

SUPPONIAMO $\bar{x}$ VERTICE MA $rg\{a_i,\ i \in I(\bar{x})\} = k < n$ ALLORA $\exists\ d \neq \emptyset$ T.C.

$$a_i^T d = 0 \quad \text{PER } i \in I(\bar{x})$$

SI POSSONO DEFINIRE $y, z$ COME

$$y = \bar{x} + \lambda d \qquad \lambda > 0$$
$$z = \bar{x} - \lambda d$$

ABBIAMO PER $i \in I(\bar{x})$

$$a_i^T y = a_i^T \bar{x} + \lambda a_i^T d = a_i^T \bar{x} = b_i$$
$$a_i^T z = a_i^T \bar{x} - \lambda a_i^T d = a_i^T \bar{x} = b_i$$

E PER $i \notin I(\bar{x})$ POSSIAMO SCEGLIERE $\lambda$ T.C.

$$a_i^T y \geq b_i$$
$$a_i^T z \geq b_i$$

QUINDI $y \in P$ E $z \in P$.

ALLORA HO TROVATO UN SEGMENTO CHE CONTIENE $\bar{x}$ INFATTI

$$\frac{y+z}{2} = \frac{\bar{x} + \lambda d + \bar{x} - \lambda d}{2} = \bar{x}$$

MA $\bar{x}$ È VERTICE QUINDI È UN ASSURDO.

$n$ VINCOLI LIN. INDIP. $\Rightarrow$ $\bar{x}$ È VERTICE

SUPPONIAMO $rg\{a_i, i \in I(\bar{x})\} = n$ MA PER ASSURDO $\bar{x}$ NON VERTICE ALLORA DATI $y, z \in P$ CON $y \neq z$, $y \neq \bar{x}$, $z \neq \bar{x}$ POSSO SCRIVERE $\bar{x}$ COME

$$\bar{x} = \lambda y + (1-\lambda) z \qquad \lambda \in [0,1]$$

SICCOME $y, z \in P$ SI HA

$$a_i^T y \geq b_i \quad \text{E} \quad a_i^T z \geq b_i$$

ALLORA

$$a_i^T \bar{x} = \lambda a_i^T y + (1-\lambda) a_i^T z \geq \lambda b_i + (1-\lambda) b_i = b_i$$

ALLORA PER $i \in I(\bar{x})$ SI HA

$$\lambda a_i^T y + (1-\lambda) a_i^T z = b_i$$ MA ALLORA HO RAGGIUNTO UN ASSURDO, AVENDO LINEARE INDIPENDENZA MI ASPETTO UNA SOLA SOLUZIONE QUINDI $\bar{x}$ È VERTICE.

b) È UNA CONSEGUENZA DELLA DUALITÀ DEBOLE INFATTI

$$b^T \mu \leq c^T x$$ QUINDI SE LA FUNZIONE OBIETTIVO DEL PRIMALE È ILLIMITATA ALLORA QUELLA DEL DUALE È PER FORZA INAMMISSIBILE

2.
$$\begin{cases} \min \ -5x_1 + 2x_2 + 20x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

APPLICO IL PROBLEMA ARTIFICIALE

$$x_B = (\alpha_1 \ \ \alpha_2)^T \quad x_N = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ x_4 \ \ x_5)^T$$

$$\gamma^T = -(1 \ \ 1)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -(2 \ \ 2 \ \ 6 \ \ 0 \ \ -1) = (-2 \ \ -2 \ \ -6 \ \ 0 \ \ 1)$$

$h = 3$

$$\rho = \min\left\{ \frac{3}{2}, \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{4}_2} \right\} = \frac{3}{2} \quad k = 1$$

$$x_B = (x_3 \ \ \alpha_2)^T \quad x_N = (x_1 \ \ x_2 \ \ \alpha_1 \ \ x_4 \ \ x_5)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & -1/2 & -3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & -7 & -1 & 2 & 9 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = (0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0) - (-7 \ \ -1 \ \ 2 \ \ 9 \ \ 2) = (7 \ \ 1 \ \ -1 \ \ -9 \ \ -2)$$

$h = 4$

$$\rho = \min\left\{ V, \frac{4}{9} \right\} \quad k = 2$$

$$x_B = (x_3 \ \ x_4)^T \quad x_N = (x_1 \ \ x_2 \ \ \alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ x_5)^T$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} -3/2 & 3/2 & 1/2 & -1/2 & -3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 9 & -7 & -1 & 2 & 9 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 0 & 1/3 & 1/3 & -1/6 & 0 & -1/6 & 13/6 \\ 1 & -7/9 & -1/9 & 2/9 & 1 & 2/9 & 4/9 \end{array}\right)$$

$\gamma^T = (0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0)$ OTTIMO RAGGIUNTO E PROBLEMA ORIGINARIO AMMISSIBILE ANCORA

$$\gamma^T = (-5 \ \ 2 \ \ 0) - (20 \ \ 1)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/6 \\ -7/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix} = (-5 \ \ 2 \ \ 0) - \left(\frac{53}{9} \ \ \frac{59}{9} \ \ -\frac{28}{9}\right) = \left(-11 \ \ -\frac{41}{9} \ \ \frac{28}{9}\right)$$

$h = 1$

$$\rho = \min\left\{ \frac{13/6}{3}, V \right\} \quad k = 1$$

$$x_B = (x_1 \ \ x_4)^T \quad x_N = (x_3 \ \ x_2 \ \ x_5)^T$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1/3 & 1 & 1/3 & -1/6 & 13/6 \\ -7/9 & 0 & -1/9 & 2/9 & 4/9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -1/6 & 11/2 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1/3 \\ 7/3 & 2/3 & -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{38}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

CRITERIO DI ILLIMITATEZZA SODDISFATTO

1. VARIABILI DI DECISIONE

$x_i^J$ = UNITÀ DI PRODOTTO TRASPORTATE DAL DEPOSITO $i$ ALLA FILIALE $J$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{COSTRUISCO IL DEPOSITO } i \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3 \qquad J = 1, 2, 3, 4$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \; 1{,}2\, x_1^1 + 1{,}4\, x_1^2 + 0{,}9\, x_1^3 + 1{,}5\, x_1^4 + x_2^1 + 2{,}1\, x_2^2 + 1{,}1\, x_2^3 + 1{,}2\, x_2^4 + 1{,}1\, x_3^1 + 1{,}3\, x_3^2 + 0{,}9\, x_3^3 + 1{,}1\, x_3^4 + 15\,\delta_1 + 16\,\delta_2 + 19\,\delta_3$$

VINCOLI

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2$$
$$x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = 2500$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3000$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 4500$$
$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 5000$$
$$(x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4) - 8500\,\delta_1 \le 0$$
$$(x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4) - 9000\,\delta_2 \le 0$$
$$(x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 + x_3^4) - 10000\,\delta_3 \le 0$$
$$x_i^J \ge 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3 \quad J = 1, 2, 3,$$

▷ QUESTIONARIO 18 LUGLIO 2018

1. V, V, F, F  2. V, V, V, F  3. V, F, F, F  4. V, F, V, F  5. F, F, F, F  6. F, V, F, F

7. F, V, F, F  8. V, F, F, F  9. V, V, F, F  10. F, V, V, V

▷ ESAME 6 SETTEMBRE 2018

2.
$$\begin{cases} \min & -x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

RISOLVO IL PA

$$x_B = (\alpha_1 \;\; \alpha_2)^T \qquad x_N = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5)^T$$

$$\gamma^T = -(1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$h=1$

$$\min\{1, 0\} = 0 \qquad k=2$$

$$x_B = (\alpha_1 \;\; x_1)^T \qquad x_N = (\alpha_2 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5)^T$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 0 & -1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\gamma^T = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0) - (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0) - (-1 \;\; -3 \;\; 3 \;\; -1 \;\; 1) =$$
$$= (2 \;\; 3 \;\; -3 \;\; 1 \;\; -1)$$

$h = 3$

$$\min\left\{\frac{1}{3}, \checkmark\right\} = \frac{1}{3} \qquad k=1$$

$$x_B = (x_3 \;\; x_1)^T \qquad x_N = (\alpha_2 \;\; x_2 \;\; \alpha_1 \;\; x_4 \;\; x_5)^T$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 3 & -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & -1/3 & -1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -3 & 2/3 & -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

$y^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ OTTIMO RAGGIUNTO E PROBLEMA ORIGINARIO AMMISSIBILE

$$\gamma^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 1/3 \\ -3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ CRITERIO DI ILL. VERIFICATO

QUINDI IL PROBLEMA È ILLIMITATO

3.
$$\begin{cases} \max & x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0{,}8x_4 + 4x_5 + 1{,}4x_6 + 0{,}9x_7 \\ & -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 \le 5 \\ & x_i \in \{0,1\},\ i = 1,\dots,7 \end{cases}$$

ORDINO LE VARIABILI

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| OK | 3 | 1,75 | 0,8 | 2 | 0,7 | 0,45 |
| | $y_1$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_2$ | $y_5$ | $y_6$ |

QUINDI RISCRIVO IL PROBLEMA

$$\begin{cases} \max & 6y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 0{,}8y_4 + 1{,}4y_5 + 0{,}9y_6 \\ & 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \le 6 \\ & y_i \in \{0,1\},\ i = 1,\dots,6 \end{cases}$$

$y^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad z^* = 9$ OTTIMO CORRENTE

$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{6-4}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \bar{z} = 6 + 4 + \frac{7}{2} = \frac{27}{2} > z^*$ FACCIO BRANCHING

$$(1)\begin{cases} \max & 6y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 0{,}8y_4 + 1{,}4y_5 + 0{,}9y_6 \\ & 2y_1 + 2y_2 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \le 6 \\ & y_i \in \{0,1\}\ i = 1,\dots,6,\ y_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \max & 6y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 0{,}8y_4 + 1{,}4y_5 + 0{,}9y_6 \\ & 2y_1 + 2y_2 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \le 2 \\ & y_i \in \{0,1\}\ i = 1,\dots,6,\ y_3 = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \{\cancel{(1)}, (2)\}$$

ESTRAGGO (1)

$\bar{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{6-5}{2} & 0 \end{pmatrix}^T \qquad U_1 = 6 + 4 + 0{,}8 + 1{,}4 \cdot \frac{1}{2} = 6 + 4 + 0{,}8 + 0{,}7 = 11{,}5 > z^*$ FACCIO BRANCHING

$$(3)\begin{cases} \max & 6y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 0{,}8y_4 + 1{,}4y_5 + 0{,}9y_6 \\ & 2y_1 + 2y_2 + y_4 + 2y_6 \le 6 \\ & y_3 = 0,\ y_5 = 0,\ y_i \in \{0,1\}\ i = 1,\dots,6 \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} \max & 6y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 0{,}8y_4 + 1{,}4y_5 + 0{,}9y_6 \\ & 2y_1 + 2y_2 + y_4 + 2y_6 \le 4 \\ & y_3 = 0,\ y_5 = 1,\ y_i \in \{0,1\}\ i = 1,\dots,6 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \{\cancel{(2)}, \cancel{(3)}, \cancel{(4)}\}$$

ESTRAGGO PROB (2)

$$\bar{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad U_2 = 6 + 7 = 13 > z^*$$

AGGIORNO OTTIMO CORRENTE E CHIUDO PROB (2)

$$y^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad z^* = 13$$

ESTRAGGO PROB (3)

$$\bar{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{6-5}{2} \end{pmatrix}^T \qquad U_3 = 6+4+0,8+\frac{1}{2}\cdot 0,9 = 11,25 < z^* \text{ CHIUDO PROB(3)}$$

ESTRAGGO PROB(4)

$$\bar{y}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad U_4 = 11,4 < z^* \text{ CHIUDO PROB(4)}$$

OTTIMO DEL PROBLEMA $\bar{F}$

$$\begin{array}{rcccccccl} y^* = ( & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & )^T & \quad z^* = 13 \\ & x_2 & x_5 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 & & \end{array}$$

RIPORTATO NELLA VARIABILE X SI HA

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad z^* = 14$$

1. VARIABILI DI DECISIONE

$x_i^T$ = QUANTITÀ IN QUINTALI DI $M_i$ USATA IN $F_T$

$$\delta_{1,3} = \begin{cases} 1 & \text{SE USO } M_1 \text{ IN } F_1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \qquad \delta_{3,2} = \begin{cases} 1 & \text{SE USO } M_3 \text{ IN } F_2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min\ 16\left(x_1^1 + x_1^2\right) + 19\left(x_2^1 + x_2^2\right) + 17\left(x_3^1 + x_3^2\right)$$

VINCOLI

$$x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 \geq 300$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 400$$

$$0,15x_1^1 + 0,18x_2^1 + 0,20x_3^1 \geq 0,17\left(x_1^1 + x_2^1 + x_3^1\right)$$

$$0,05\left(x_1^1 + x_2^1 + x_3^1\right) \leq 0,04x_1^1 + 0,07x_2^1 + 0,035x_3^1 \leq 0,06\left(x_1^1 + x_2^1 + x_3^1\right)$$

$$0,15x_1^2 + 0,18x_2^2 + 0,20x_3^2 \leq 0,20\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$

$$0,04x_1^2 + 0,07x_2^2 + 0,035x_3^2 \geq 0,07\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$

$$x_1^1 - M_1\delta_{1,3} \leq 0 \qquad x_3^2 - M_2\delta_{3,2} \leq 0$$

$$x_3^1 - (1-\delta_{1,3})M_1 \leq 0 \qquad x_2^2 - M_2\delta_{3,2} \leq 0$$

$$x_i^T \geq 0,\ i = 1,2,3,\ T = 1,2,\ \delta_{1,3} \in \{0,1\},\ \delta_{3,2} \in \{0,1\},\ M_1 \gg \left(x_1^1 + x_3^1\right),\ M_2 \gg \left(x_3^2 + x_2^2\right)$$

▷ QUESTIONARIO 11 OTTOBRE 2018

ATTENZIONE AI CALCOLI

1. V, F, V, F
2. F, F, V, V
3. V, F, F, F
4. V, F, F, F
5. F, F, F, V
6. V, F, F, V
7. F, V, V, V
8. F, F, V, V
9. V, F, V, F
10. V, V, V, V