Programmazione lineare multiobiettivo

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione XXII

Un esempio di PLMO

Blackstone Mining gestisce due miniere di carbone nel sud-ovest della Virginia.
La produzione mensile in ciascuna miniera è riassunta come segue:

Tipo di carbone	Wythe Mine	Giles Mine
Alta qualità	12 (t)	4 (t)
Media qualità	4 (t)	4 (t)
Bassa qualità	10 (t)	20 (t)
Costo mensile	$40,000	$32,000
Acqua inquinata prodotta	3000 (l)	5000 (l)
Incidenti mortali	0.20	0.45

Un esempio di PLMO

Blackstone ha bisogno di produrre **almeno 48 tonnellate** in più di carbone di alta qualità, **almeno 28 tonnellate** in più di carbone di media qualità e **almeno 100 tonnellate** in più di carbone di bassa qualità nel prossimo anno.

Variabili Decisionali

X_1= numero di mesi in cui programmare un turno di lavoro nella mi niera della
contea di Wythe

X_2 = numero di mesi in cui programmare un turno di lavoro nella mi niera della
contea di Giles

Un esempio di PLMO

Vincoli del problema

Carbone di alta qualità richiesto

$12\ X_1 + 4\ X_2 \geq 48$

Carbone di media qualità richiesto

$4\ X_1 + 4\ X_2 \geq 28$

Carbone di bassa qualità richiesto

$10\ X_1 + 20\ X_2 \geq 100$

Vincoli di non negatività

$X_1, X_2 \geq 0$

Funzioni obiettivo

Il problema è caratterizzato da **tre** obiettivi

Min: \$40000 X1 + \$32000 X2 } Costi di produzione

Min: 3000 X1 + 5000 X2} Acqua inquinata

Min: 0.20 X1 + 0.45 X2 } Incidenti

Formalizzazione matematica

Un problema di programmazione lineare multiobiettivo è formalizzato nel modo seguente:

$$\max/\min Cx = \max/\min (c_1x, c_2x, \ldots, c_px)$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

dove $C \in R^{pxn}$ è la matrice dei coefficienti dei p obiettivi del problema, $A \in R^{mxn}$ èla matrice dei coefficienti dei vincoli che definiscono la regione ammissibile del problema e $b \in R^m$ è il vettore dei termini noti associati ai vincoli.

Esempio 1

$$\min(y_1, y_2) = \min(3x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2)$$

$$x_2 \leq 3$$

$$3x_1 - x_2 \leq 6$$

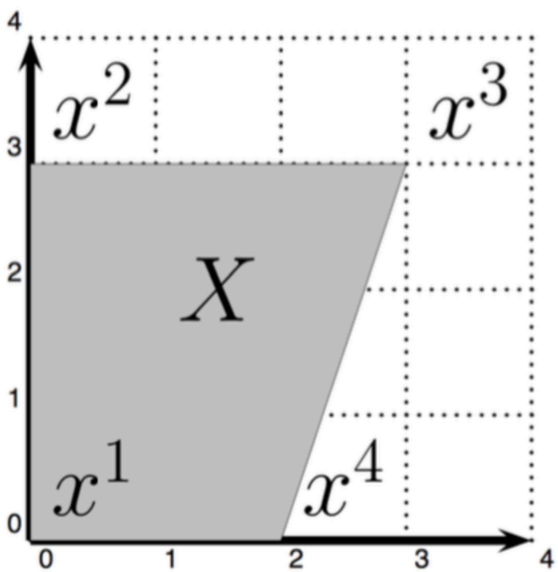
$$x \geq 0$$

Insiemi ammissibili nello spazio delle decisioni e nello spazio degli obiettivi

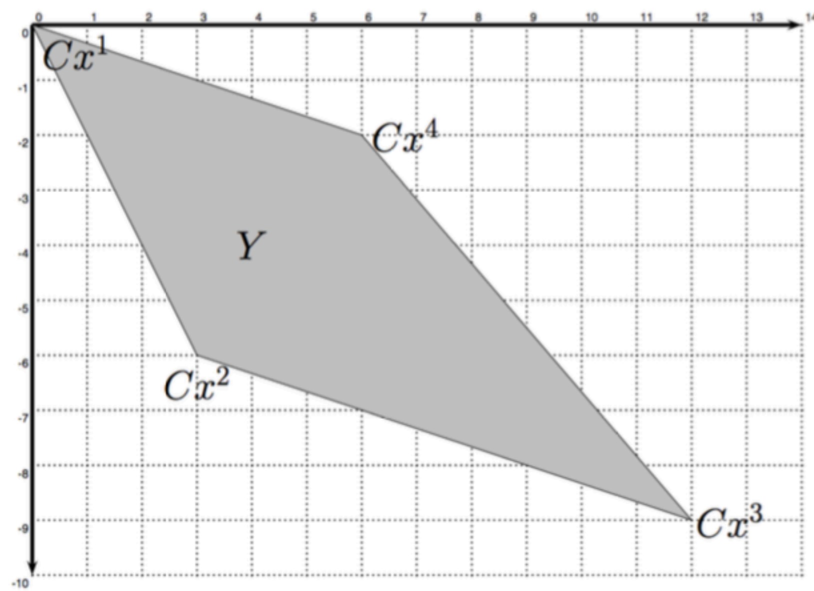
Definizione (Insieme ammissibile nello spazio delle decisioni)
L'insieme delle soluzioni ammissibili $X = \{x \in R^n : Ax=b,\ x \geq 0\}$ è definito insieme ammissibile nello spazio delle decisioni.

Definizione (Insieme ammissibile nello spazio degli obiettivi)
L'insieme dei vettori $Y=\{Cx : x \in X\}$ è definito insieme ammissibile nello spazio degli obiettivi e contiene tutti i punti associati a soluzioni ammissibili tramite la funzione lineare definita dai p obiettivi.

Insieme ammissibile nello spazio delle decisioni



Insieme ammissibile nello spazio degli obiettivi



Osservazioni

- In generale in un problema di ottimizzazione multi-obiettivo non esiste una soluzione che ottimizza tutti gli obiettivi.

- Si dovrà definire l'insieme delle soluzioni a cui si è interessati

- Si dovranno sviluppare nuovi metodi per determinare tali soluzioni

Nuovo concetto di soluzione "ottima"

Assunzione

Consideriamo un problema di minimo

Definizione (Dominanza di Pareto)

Una soluzione ammissibile $x \in X$ è dominata da un'altra soluzione ammissibile $x' \in X$ se $Cx' \leq Cx$ con una disuguaglianza stretta per almeno uno dei p obiettivi.

Definizione (Efficienza o Pareto Ottimalità)

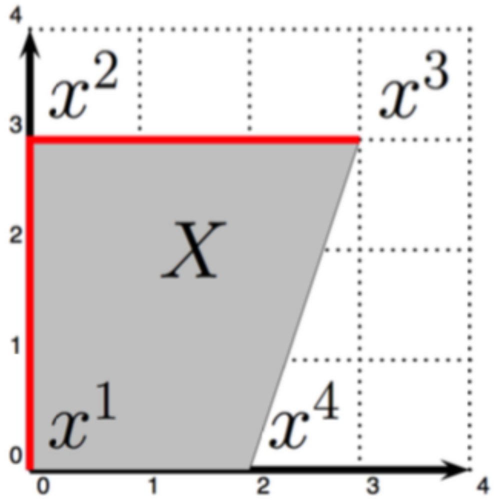
Una soluzione ammissibile $x^* \in X$ è efficiente o Pareto ottima se non esiste un'altra soluzione $x \in X$ tale che $Cx \leq Cx^*$ con una disuguaglianza stretta per almeno uno dei p obiettivi. Il corrispondente vettore $y^* = Cx^*$ è definito non dominato.

Nuovo concetto di soluzione "ottima"

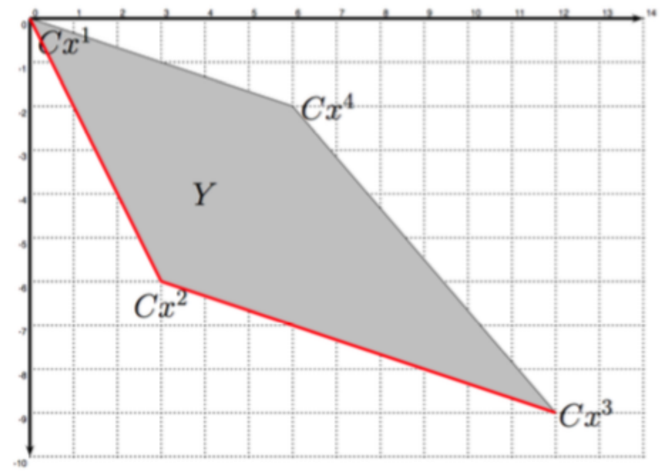
Definizione (Insieme efficiente)
L'insieme delle soluzioni efficienti o Pareto ottime X_E è chiamato insieme efficiente

Definizione (Frontiera di Pareto o insieme non dominato)
L'insieme dei vettori non dominati Y_N è chiamato frontiera di Pareto o insieme non dominato.

Insieme efficiente



Frontiera di Pareto
o Insieme non dominato



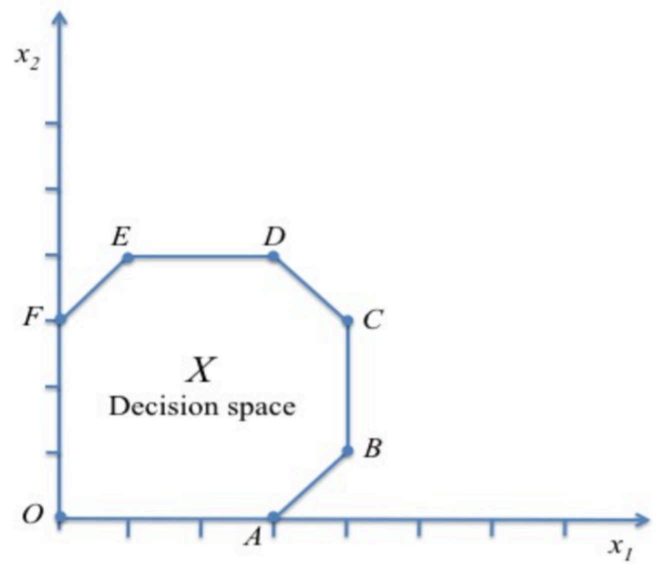
Esempio 2

Sia dato il seguente problema:

$$\max(-x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$-x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 - x_2 \leq 3$$
$$x_1,\ \ x_2 \geq 0$$
$$x_1,\ \ x_2 \leq 4$$

Insieme ammissibile nello spazio delle decisioni

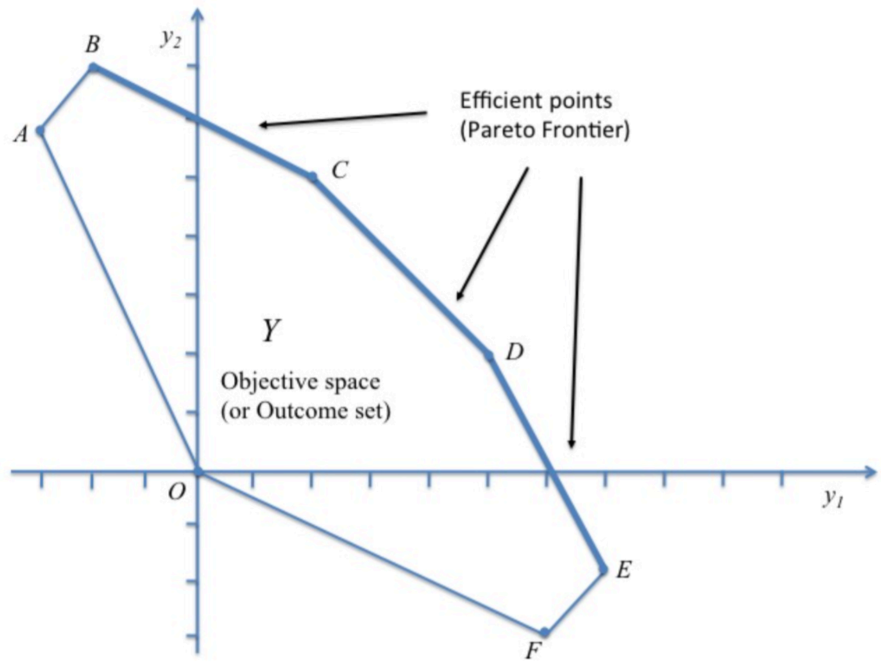
La regione ammissibile è rappresentata in figura:



Il perimetro del poligono X è la spezzata che unisce ordinatamen te il punti O,A,B,C,D,E,F.

Frontiera di Pareto

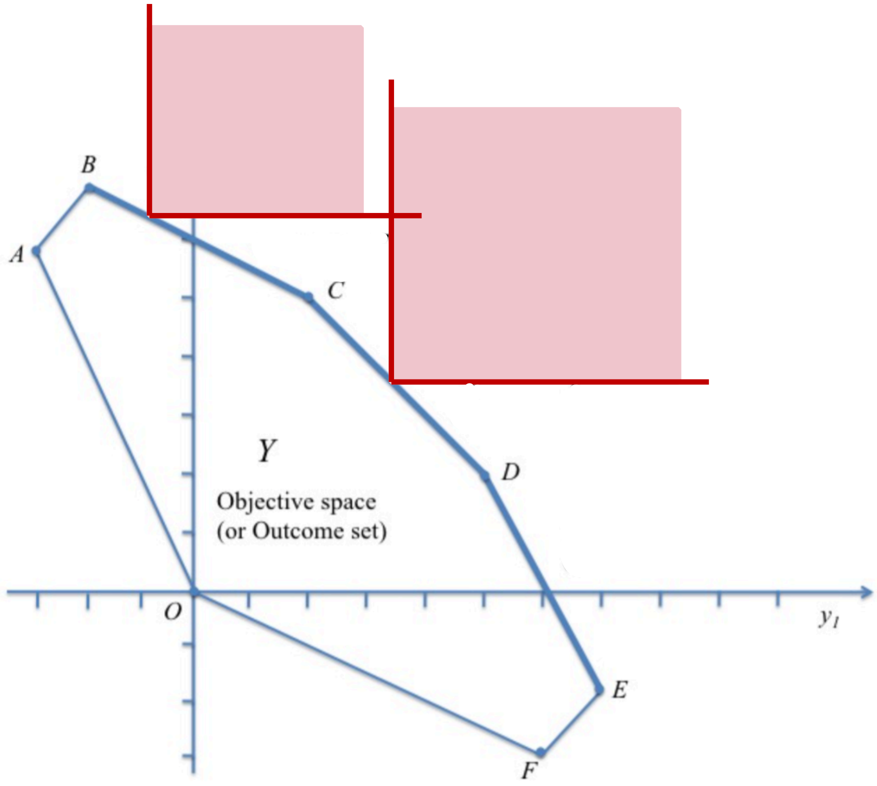
Lo spazio degli obiettivi è rappresentato in figura:



Il perimetro del poligono Y è la spezzata che unisce ordinatamente i punti O,A,B,C,D,E,F. La frontiera Pareto efficiente è la spezzata che unisce ordinatamente i punti B,C,D,E.

Frontiera di Pareto

Nel caso di problemi bi-obiettivo la frontiera di Pareto si determina graficamente mediante la regola del quadrante inferiore (per problemi di minimo) e del quadrante superiore (per problemi di massimo).



Teorema fondamentale della PLMO: Teorema di Geoffrion

Sia dato l'insieme

$$\Lambda \equiv \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in R^p : \boldsymbol{\lambda} > 0,\ \mathbf{e}'\boldsymbol{\lambda} = 1 \right\};$$

E si consideri il problema di PL P(λ) definito come segue:

$$\max\ \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{C}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x} \in S$$
$$\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$$

x* ϵ S (regione ammissibile) è Pareto ottima se e solo se esiste un vettore $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ tale che x* è soluzione ottima di P(λ) .

Metodi risolutivi per la PLMO

Sulla base del ruolo che il decisore ha nel processo risolutivo possiamo distinguere i metodi risolutivi in tre categorie:

- **Metodi «a priori»:** il decisore specifica le sue preferenze prima che abbia inizio il processo risolutivo. In base alle informazioni avute dal decisore la ricerca si indirizza verso la soluzione «migliore» senza dover necessariamente generare tutti gli ottimi di Pareto.

- **Metodi «a posteriori»:** tutto l'insieme Pareto efficiente viene generato e all'interno di questo il decisore sceglie la soluzione per lui migliore.

- **Metodi «interattivi»:** il decisore specifica le sue preferenze mano a mano che il processo risolutivo procede, eventualmente scartando alcune soluzioni efficienti trovate e guidando in tal modo il processo stesso verso la soluzione per lui più soddisfacente.

Scalarizzazione

Una scalarizzazione è un problema singolo obiettivo ottenuto dal problema multiobiettivo originario aggiungendo variabili e/o parametri, che è solitamente risolto iterativamente al fine di determinare alcuni sottoinsiemi di soluzioni efficienti per il problema multiobiettivo.

Proprietà desiderabili per una tecnica di scalarizzazione

- **Correttezza**: questa proprietà garantisce che le soluzioni ottime del problema singolo obiettivo siano (debolmente) efficienti per il problema multiobiettivo originario.

- **Completezza**: questa proprietà assicura che risolvendo iterativamente il problema singolo obiettivo, tutte le soluzioni efficienti possono essere generate.

- **Risolvibilità:** la scalarizzazione non dovrebbe essere più difficile della versione singolo obiettivo del problema originario (da un punto di vista pratico e teorico).

- **Linearità**: la scalarizzazione deve essere lineare.

Tecniche di scalarizzazione più comuni

- **Metodo dei pesi**
- **Metodo Ɛ-constrained**

Il metodo dei pesi

Nel metodo dei pesi viene risolto iterativamente il seguente problema singolo obiettivo:

$$\min \lambda^T Cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0 \text{ (integer)}$$

dove $\lambda \in R^p$ è tale che $0 \leq \lambda_j \leq 1 \ \forall \ j=1,...,p$ e $e^T \lambda = 1$. Variando i pesi è possibile generare tutte le soluzioni efficienti (supportate). Il principale vantaggio di questo metodo è che per ogni $\lambda \in R^p$ il problema è difficile esattamente come la sua versione singolo obiettivo.

Il metodo ε-constrained

Si tratta di un altro metodo mediante il quale è possibile generare tutte le soluzioni efficienti, e che consiste nel mantenere solo uno dei p obiettivi, diciamo l'obiettivo i-esimo, e trasformando gli altri (p-1) obiettivi in vincoli nel modo seguente:

$$\min C_i x$$
$$Ax = b$$
$$C_k x \leq \varepsilon_k \ \forall\, k \neq i$$
$$x \geq 0 \text{ (integer)}$$

Tutte le soluzioni efficienti possono essere generate specificando opportunamente i termini noti ε_k. Lo svantaggio di questo metodo è la presenza di vincoli aggiuntivi (vincoli di knapsack) che rendono il problema più difficile da risolvere.

Esempio Knapsack Bi-obiettivo (1/6)

Consideriamo una applicazione in campo finanziario

Sia dato un insieme di n possibili investimenti j, ognuno richiedente un esborso in denaro w_j, e con un profitto p_j e un indice di sicurezza o affidabilità (inversamente proporzionale al rischio) s_j; sia dato inoltre un limite massimo di budget W per l'esborso iniziale

L'obiettivo è quello di selezionare l'insieme di investimenti il cui esborso totale non ecceda W e per cui siano massimi il profitto totale e la sicurezza totale.

Si consideri il caso in cui $n = 14$, $W = 100$ e i dati sono quelli nella tabella sottostante

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
w_j	16	18	21	9	7	23	14	38	16	41	13	26	31	22
p_j	23	13	53	2	2	8	33	43	13	13	10	11	31	30
s_j	34	44	14	22	11	28	9	7	27	9	15	6	16	10

Esempio Knapsack Bi-obiettivo (2/6)

Determiniamo la frontiera di Pareto con il seguente metodo ε-constrained:

1. Risolviamo un problema di knapsack massimizzando il profitto; siano P ed S il profitto e la sicurezza ottenuti
2. massimizziamo nuovamente il profitto, ma imponendo come vincolo che la sicurezza totale sia maggiore o uguale a $S + 1$
3. iteriamo aggiornando il vincolo sulla sicurezza con l'ultimo valore S ottenuto, fino a quando il modello risulta non ammissibile

Esempio Knapsack Bi-obiettivo (3/6)

Iterazione 1: risolviamo il problema di zaino

$$\begin{aligned} \max \quad & p^T x \\ & w^T x \leq 100 \\ & x_j \in \{0,1\} \qquad\qquad j = 1,\ldots,14 \end{aligned}$$

ottenendo profitto massimo P= 159 e sicurezza S = 40, con gli investimenti: 3, 7, 8, 14

Iterazione 2: risolviamo il modello

$$\begin{aligned} \max \quad & p^T x \\ & w^T x \leq 100 \\ & s^T x \geq LB_S \\ & x_j \in \{0,1\} \qquad\qquad j = 1,\ldots,14 \end{aligned} \tag{1}$$

con $LB_S = S + 1 =$ **41**, dove S è il valore di sicurezza ottenuto all'iterazione precedente; in questo modo otteniamo i nuovi valori $P = 154$ e S = 105, con gli investimenti: 1, 3, 5, 7, 9, 14

Esempio Knapsack Bi-obiettivo (4/6)

Iterazione 3: risolviamo il modello (1) con LB_S = **106**, ottenendo P= 154 e S = 122, con gli investimenti: 1, 2, 3, 5, 7, 14
Notare che P è rimasto invariato!

Iterazione 4: risolviamo il modello (1) con LB_S = **123**, ottenendo P= 154 e S = 133, con gli investimenti: 1, 2, 3, 4, 7, 14
Notare che P è rimasto di nuovo invariato!

Iterazione 5: risolviamo il modello (1) con LB_S = **134**, ottenendo P= 145 e S = 143, con gli investimenti: 1, 2, 3, 7, 9, 11

Iterazione 6: risolviamo il modello (1) con LB_S = **144**, ottenendo P= 137 e S = 150, con gli investimenti: 1, 2, 3, 4, 7, 9

Esempio Knapsack Bi-obiettivo (5/6)

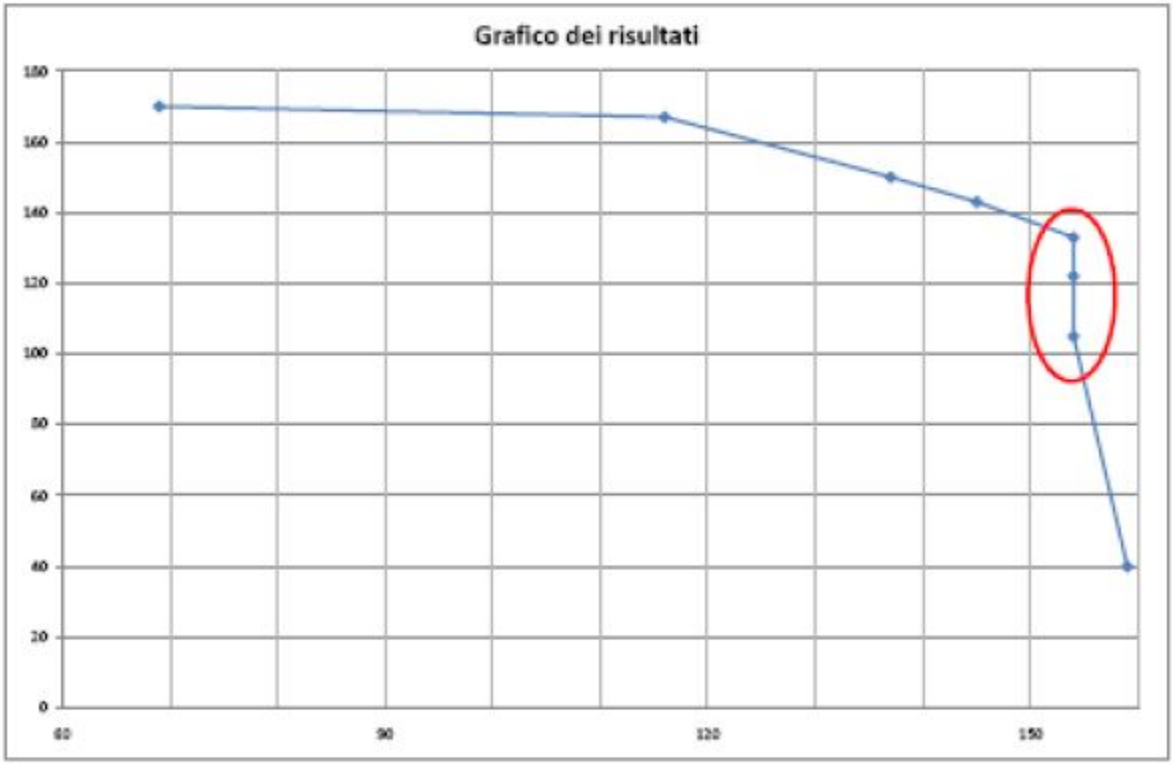
Iterazione 7: risolviamo il modello (1) con LB_S = **151**, ottenendo P=116 e S = 167, con gli investimenti: 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11

Iterazione 8: risolviamo il modello (1) con LB_S = **168**, ottenendo P=69 e S = 170, con gli investimenti: 1, 2, 4, 6, 9, 11

Iterazione 9: risolviamo il modello (1) con LB_S = **171**, e non otteniamo nessuna soluzione ammissibile: il metodo termina

Le coppie (P, S) generate dall'algoritmo sono: $(159, 40)$, $(154, 105)$, $(154, 122)$, $(154, 133)$, $(145, 143)$, $(137, 150)$, $(116, 167)$, $(69, 170)$

Esempio Knapsack Bi-obiettivo (6/6)



Esempio Knapsack Bi-obiettivo (1/2)

Un decisore abbastanza propenso al rischio potrebbe assegnare peso $\lambda_P = 2$ all'obiettivo "profitto", e peso $\lambda_S = 1$ all'obiettivo "sicurezza"

Il problema singolo obiettivo risultante è il seguente:

$$\begin{array}{llll} \max & \lambda_P \cdot p^T x + \lambda_S \cdot s^T x & = & \sum_{j=1}^{14} (2p_j + s_j) x_j \\ & w^T x & \leq & 100 \\ & x_j & \in & \{0, 1\} \qquad\qquad j = 1, \ldots, 14 \end{array}$$

Il valore ottimo è 441 (ottenuto con gli investimenti 1, 2, 3, 4, 7, 14) e corrisponde alla soluzione efficiente con $P = 154$ e $S = 133$ trovata all'iterazione **4** del metodo ε-constrained

Esempio Knapsack Bi-obiettivo (2/2)

Un decisore decisamente avverso al rischio potrebbe invece assegnare pesi $\lambda_P = 1$ e $\lambda_S = 3$, ottenendo il problema:

$$\begin{array}{lrcll}
\max & \lambda_P \cdot p^T x + \lambda_S \cdot s^T x & = & \sum_{j=1}^{14} (p_j + 3s_j) x_j & \\
 & w^T x & \leq & 100 & \\
 & x_j & \in & \{0, 1\} & j = 1, \ldots, 14
\end{array}$$

Il valore ottimo è 617 (ottenuto con gli investimenti 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11) e corrisponde alla soluzione efficiente con $P = 116$ e $S = 167$ trovata all'iterazione **7** del metodo ε-constrained