Ricerca Operativa
a.a. 2018-2019

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione XVI- 1 aprile 2019

Soluzione di Problemi di Programmazione Lineare Intera (PLI)

Modelli di PLI

Molti problemi reali possono essere rappresentati con un modello di PLI, cioè con un modello in cui vincoli e funzione obiettivo sono funzioni lineari e le variabili assumono solo **valori interi**.

Modello a variabili intere

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$x_j \text{ intera} \qquad j = 1,2,\dots,n$$

(Q)

max $c^T x$

$x \in P_Q$

$x \in Z^n$

Modello a variabili binarie 0/1

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1,2,\dots,n$$

max $c^T x$

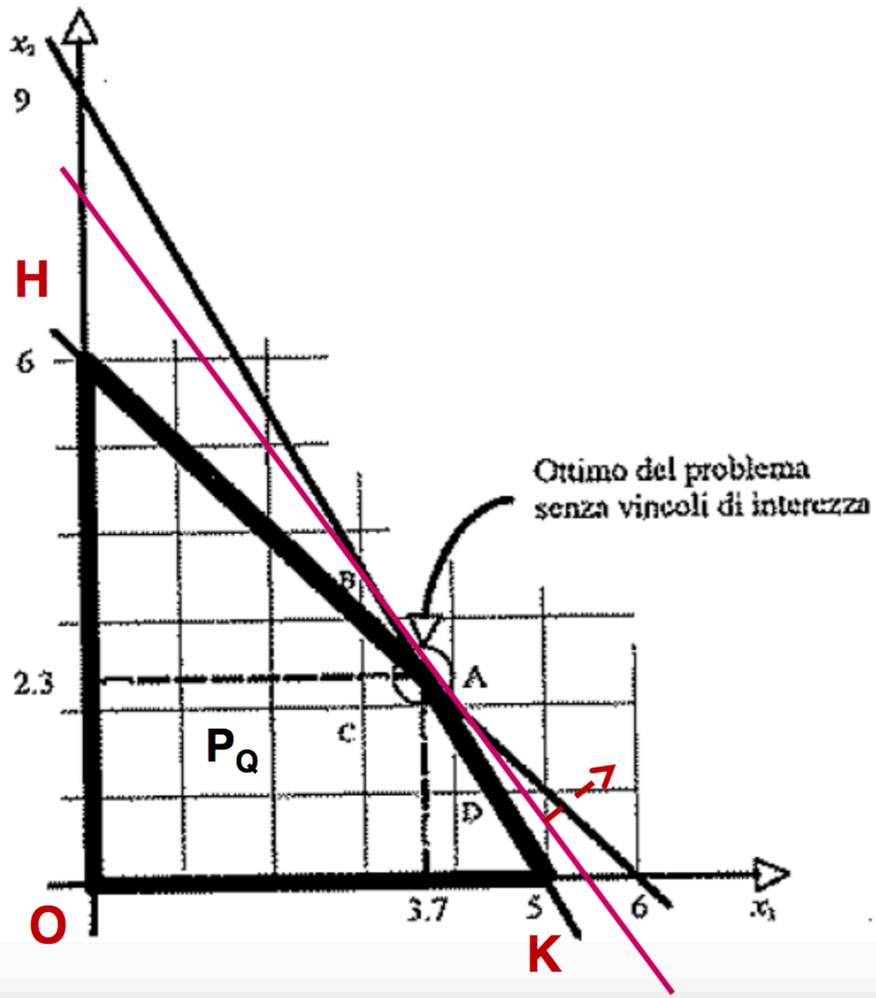
$x \in P_Q$

$x \in B^n$

Geometria della PLI: $x \in Z^n$

Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)

$$
(Q) \quad \begin{aligned}
\max\ & 8x_1 + 5x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0 \\
& x_1,\ x_2 \text{ intere}
\end{aligned}
$$



Vertici di P_Q

O = (0,0)

K = (5,0)

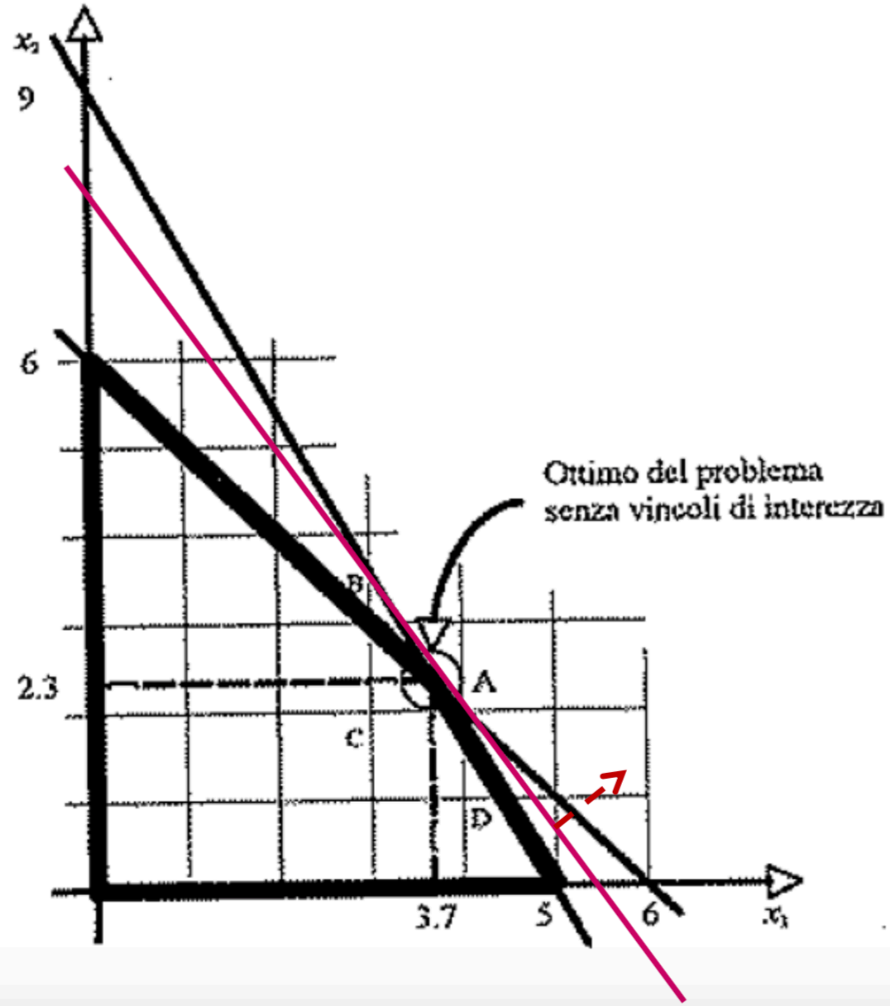
A = (3.7, 2.3)

H = (0,6)

Geometria della PLI: $x \in Z^n$

Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)

$$
(Q) \quad
\begin{aligned}
\max\ & 8x_1 + 5x_2 \\
& x_1 + x_2 \le 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 \le 45 \\
& x_1 , x_2 \ge 0 \\
& x_1 , x_2 \text{ intere}
\end{aligned}
$$



Punti interi ammissibili **"vicini"** al punto A

B = (3,3)
C = (3,2)
D = (4,1)

Geometria della PLI: $x \in Z^n$

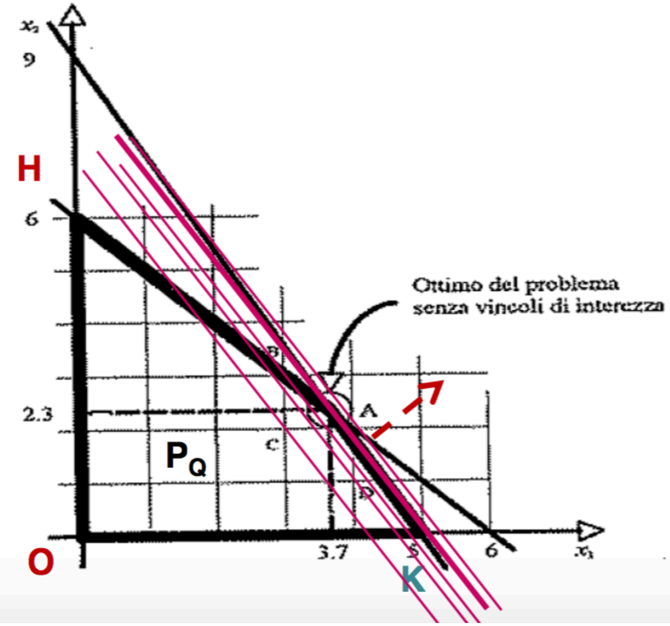
Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)

Si ha:

C = (3,2) **D = (4,1)** **B = (3,3)** **K = (5,0)** **A = (3.7, 2.3)**

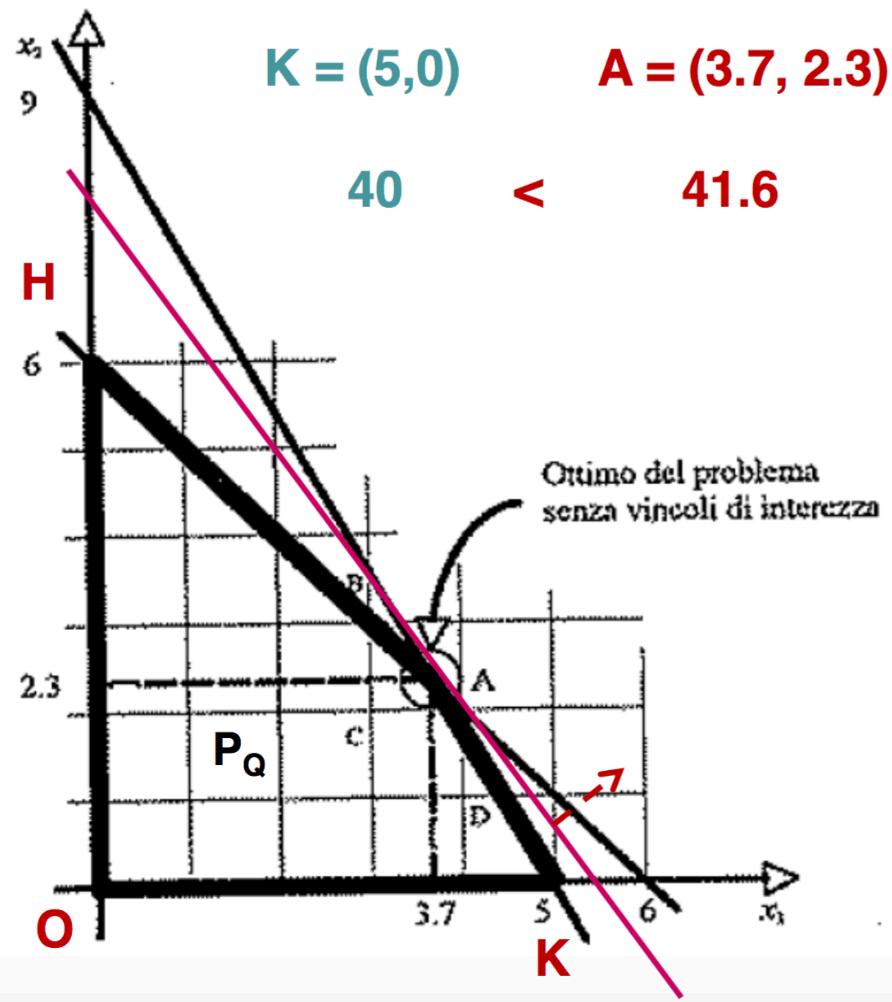
34 < 37 < 39 < 40 < 41.6

Il punto ottimo del problema intero è il punto **K = (5,0)**.



Geometria della PLI: $x \in Z^n$

Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)



Il punto ottimo del problema intero è il punto **K = (5,0)**.

NOTA

K = (5,0) **non è** il punto intero 'più vicino' a A.

Le coordinate del punto K **non corrispondono** ad arrotondamenti di quelle del punto A.

Geometria della PLI: $x \in Z^n$

Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)

Si ha:

C = (3,2) **D = (4,1)** **B = (3,3)** **K = (5,0)** **A = (3.7, 2.3)**

34 < 37 < 39 < 40 < 41.6

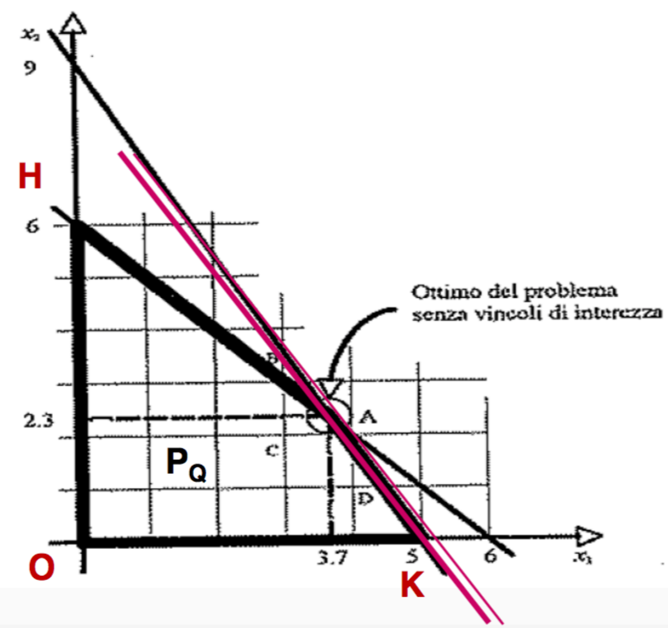
Indichiamo con **z** il valore ottimo del **problema intero** e con $\mathbf{z_L}$ il valore ottimo del problema in cui vengono **trascurati i vincoli di interezza** (problema di PL con regione ammissibile $\mathbf{P_Q}$).

Per un problema di massimo si ha

$$z_L \geq z.$$

Per un problema di minimo si ha

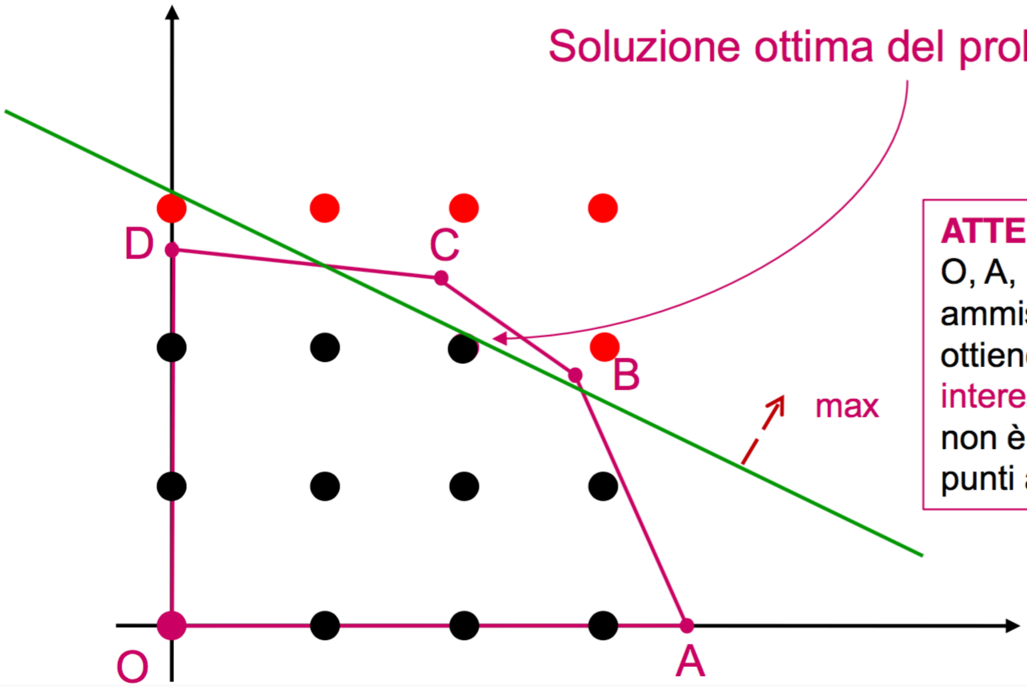
$$z_L \leq z.$$



Geometria della PLI: $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n$

In generale, dal punto di vista geometrico, il vincolo di interezza sulle variabili definisce un reticolo di punti all'interno del poliedro $\mathbf{P_Q}$ descritto dagli altri vincoli (lineari) del problema.

Nel caso di due sole variabili, la regione ammissibile di un generico problema di PLI è del tipo seguente:

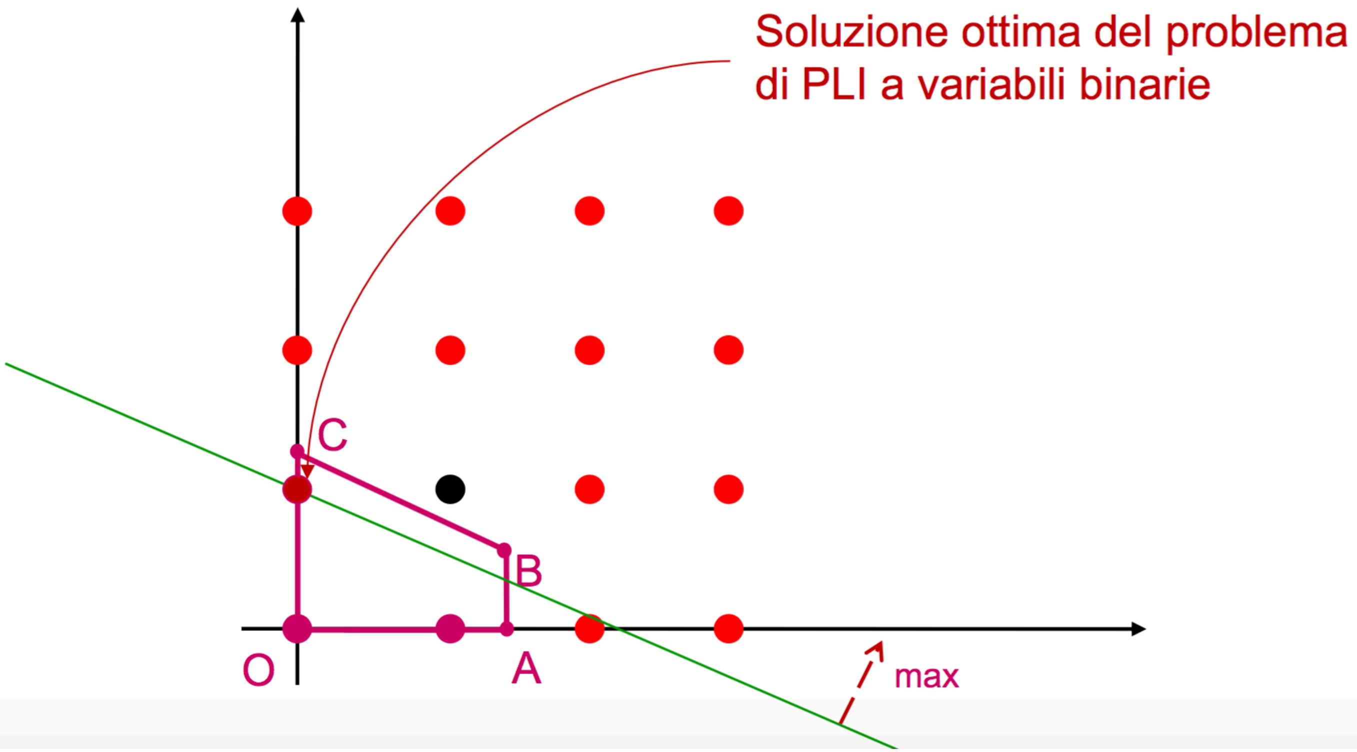


ATTENZIONE:
O, A, B, C, D sono vertici della regione ammissibile del problema di PL che si ottiene rimuovendo i vincoli di interezza sulle variabili, e, pertanto, non è detto che corrispondano tutti a punti a coordinate intere.

Geometria della PLI: $\mathbf{x} \in \mathbf{B}^n$

Nel caso di variabili binarie 0/1 i soli punti a coordinate intere da considerare sono quelli in $B^n = \{0,1\}^n$, cioè tutti i vettori di dimensione n con elementi uguali a 0 o a 1.

Per n = 2 si ha:



Soluzione di un problema di PLI

Purtroppo, a causa del vincolo di interezza sulle variabili, il problema di PLI perde tutte le "buone proprietà" che hanno i problemi di PL e perciò la sua soluzione non è altrettanto agevole.

In ogni caso, per risolvere un problema di PLI, **si sfrutta molto la teoria della PL**. In particolare si definisce un problema di PL associato al problema di PLI dato detto **rilasciamento o rilssamento continuo**.

Problema intero

$$z = \max \ cx$$
$$\boxed{\begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}}$$
$$x \quad \text{intero}$$

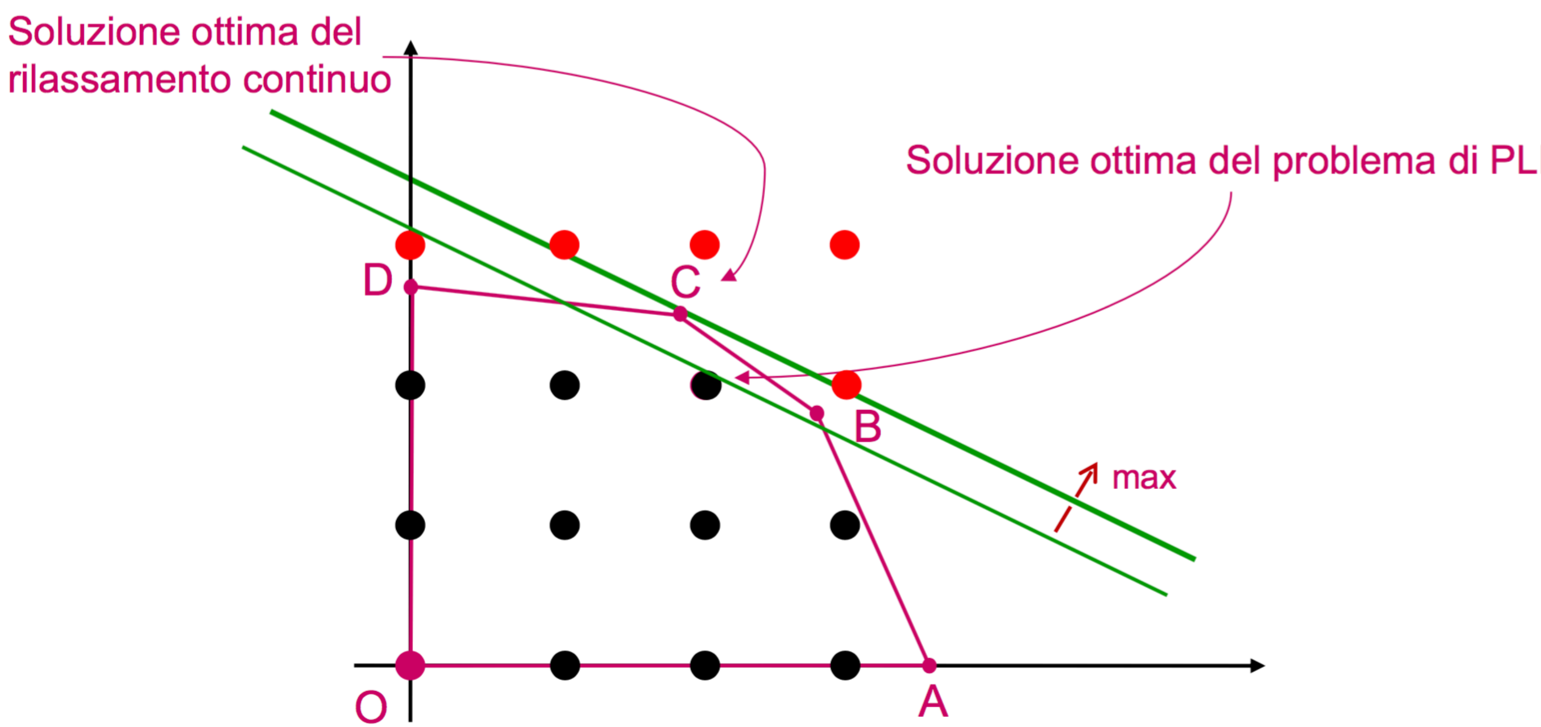
Rilassamento continuo

$$z_L = \max \ cx$$
$$\boxed{\begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

x∈P_Q

NOTA La relazione tra ottimo del problema intero z e l'ottimo del rilassamento continuo z_L può essere sfruttata per la risoluzione del problema intero.

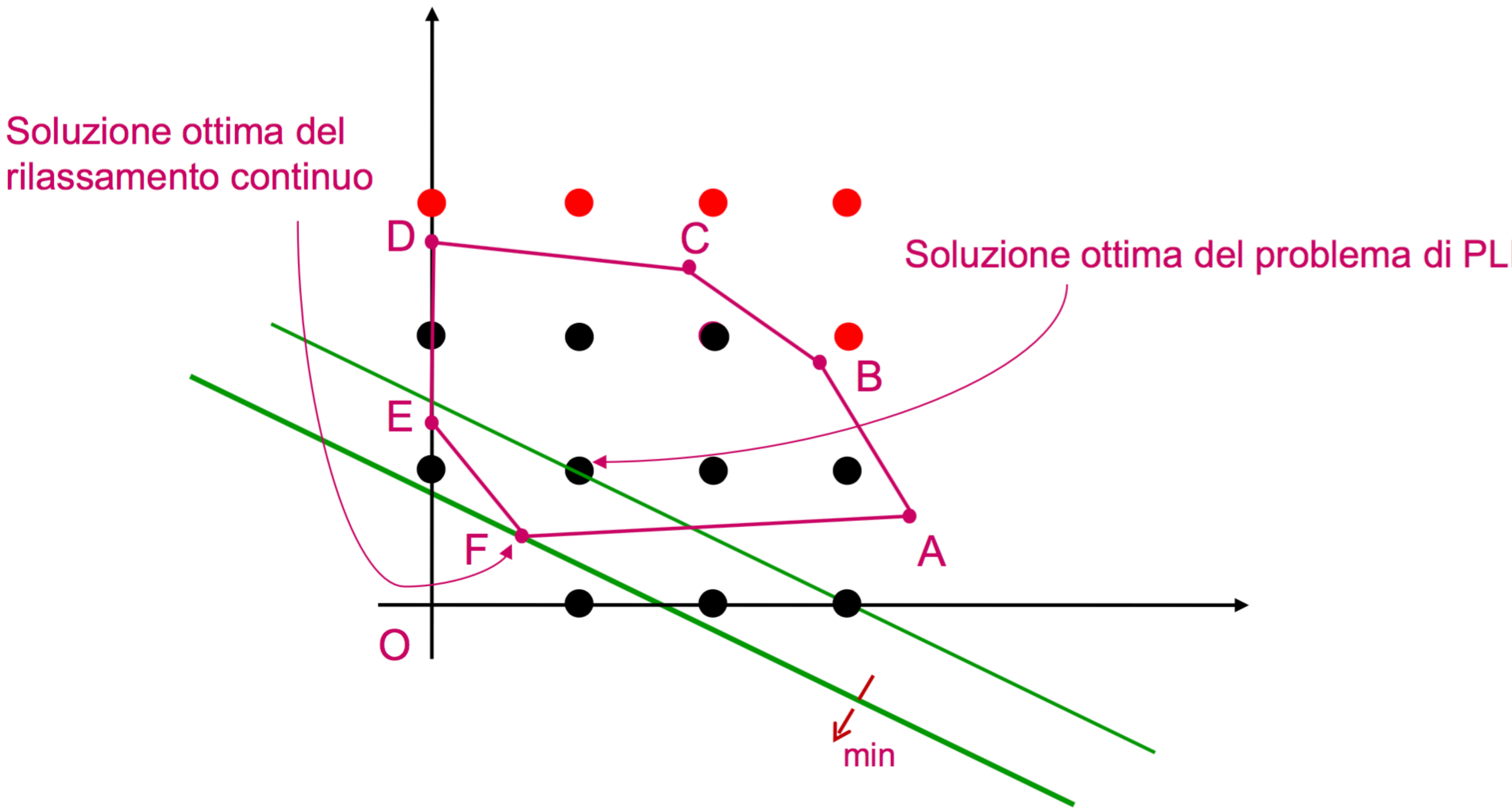
Soluzione di un problema di PLI



Per un problema di massimo si ha

$$z_L \geq z.$$

Soluzione di un problema di PLI



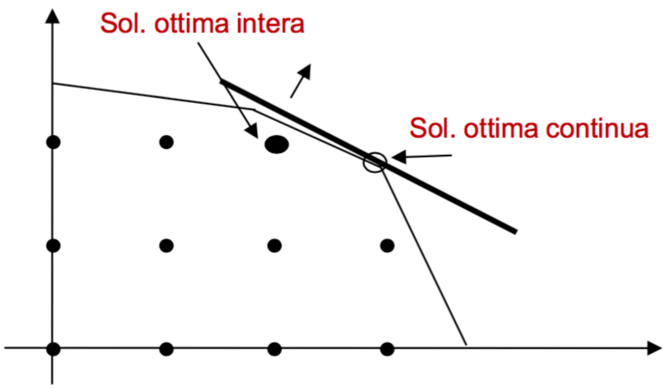
Per un problema di minimo si ha

$$z_L \leq z.$$

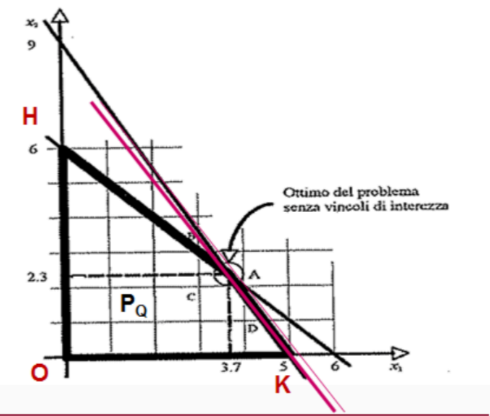
Arrotondamenti

ATTENZIONE: L'arrotondamento della soluzione ottima del rilasciamento continuo di un problema di PLI **non corrisponde** alla soluzione ottima del problema di PLI.

L'idea di ***arrotondare*** la soluzione ottima del problema rilasciato non è sempre buona! (e quindi **non è una regola valida in generale**)



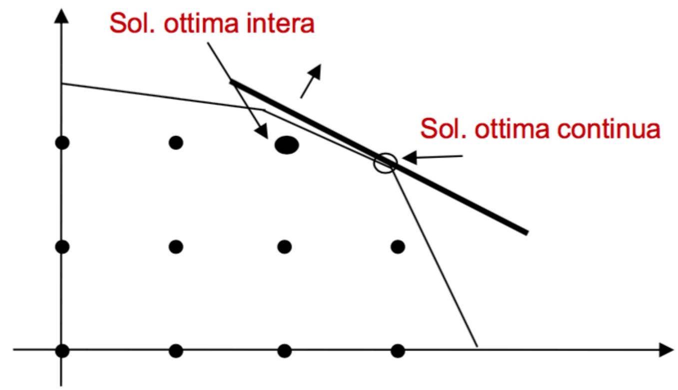
Nell'esempio visto prima la soluzione ottima era nel punto K. Esistevano però arrotondamenti di A con valori della f.o. 'vicini' a quello ottimo.



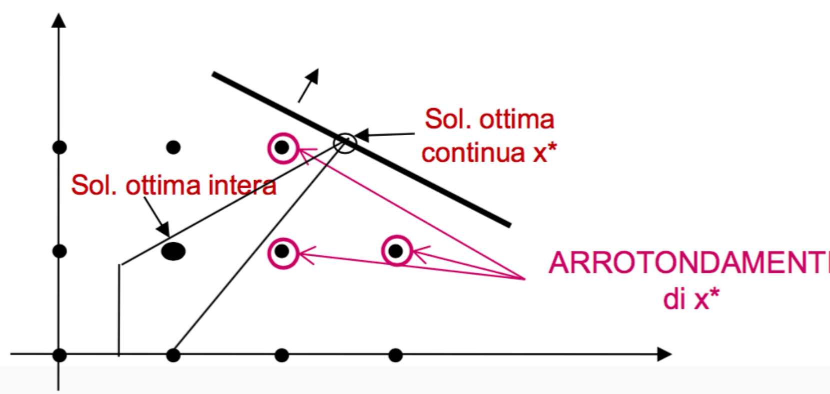
Arrotondamenti

ATTENZIONE: L'arrotondamento della soluzione ottima del rilasciamento continuo di un problema di PLI **non corrisponde** alla soluzione ottima del problema di PLI.

L'idea di ***arrotondare*** la soluzione ottima del problema rilasciato non è sempre buona! (e quindi **non è una regola valida in generale**)



Può addirittura capitare che **ogni arrotondamento** della soluzione ottima del rilassamento continuo sia una soluzione **non ammissibile** per il problema intero.



Soluzione di un problema di PLI

Proprietà

Il valore ottimo z_L del rilassamento continuo (P_Q) non può essere peggiore del valore ottimo z del problema intero (Q).

$$(Q) \quad \begin{aligned} z = \max\ & c^T x \\ & x \in P_Q \\ & x \in Z^n \end{aligned}$$

$$(Q) \quad \begin{aligned} z = \min\ & c^T x \\ & x \in P_Q \\ & x \in Z^n \end{aligned}$$

Per un problema di massimo si ha:

(upper bound) $z_L = z(P_Q) \geq z(Q) = z$

Per un problema di minimo si ha:

(lower bound) $z_L = z(P_Q) \leq z(Q) = z$

Come possiamo sfruttare questa informazione?

Problemi di Ottimizzazione Combinatoria e Rilassamenti

Problemi di Ottimizzazione Combinatoria (OC)

Problemi di Ottimizzazione Combinatoria (OC)

Sono problemi di ottimizzazione (vincoli e f.o.) in cui l'insieme delle soluzioni ammissibili è definito attraverso strutture combiantorie (es.: problemi di ottimizzazione su grafi, (SC), (SPAC) e (SPAR), Knapsack, ecc.).

I problemi di OC hanno regione ammissibile **discreta** e un numero di soluzioni ammissibili **molto <u>elevato</u>** ma **<u>finito</u>**.

NOTA
I problemi di PLI con regione ammissibile costituita da un numero finito di punti (cioè quelli contenuti in un politopo P_Q) sono problemi di OC.

Problema di OC

$$\min f(x)$$
$$x \in X$$

Problema di PLI

$$(Q) \quad \begin{array}{l} \min c^T x \\ x \in P_Q \\ x \in Z^n \end{array}$$

La **formulazione naturale** di un problema di ottimizzazione combinatoria con f.o. lineare è un modello di PLI con $X = P_Q \cap Z^n$.

NOTA Per risolvere problemi di natura discreta occorrono tecniche molto diverse da quelle utilizzate per i problemi di ottimizzazione continua (come quelli di PL).

Rilassamento continuo

Problema intero

(Q)

$$z = \max \ cx$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$\boxed{x \quad \text{intero}}$$

Rilassamento continuo

(P_Q)

$$z_L = \max cx$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

(P_Q) è il rilassamento continuo di (Q).

Si tratta di un "rilassamento per **eliminazione**" (del vincolo di interezza)

NOTA Il rilassamento per eliminazione è solo uno dei rilassamenti possibili.

Per un problema di OC esistono atri tipi di rilassamento come, ad esempio, il rilassamento *per decomposizione*, *lagrangiano*, ecc.

Rilassamenti di problemi di OC

Definizione Sia dato un problema (P) e il problema (PR):

$$(P) \qquad z(P) = \min_{x \in X} f(x) \qquad\qquad z(PR) = \min_{x \in Y} g(x) \qquad (PR)$$

con X,Y in R^n, f(x) e g(x) funzioni reali definite su R^n.

Il problema (PR) si dice rilassamento di (P) se:

1. $X \subseteq Y$ ← **la regione ammissibile di (PR) è più grande di quella di (P)**
2. $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$. ← **sui punti ammissibili di (P) il valore della f.o. di (PR) non è mai peggiore di quello della f.o. di (P)**

Analogamente per un problema di massimo:

$$(P) \qquad z(P) = \max_{x \in X} f(x) \qquad\qquad z(PR) = \max_{x \in Y} g(x) \qquad (PR)$$

il problema (PR) è un rilassamento di (P) se:

1. $X \subseteq Y$
2. $g(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in X$.

Rilassamenti di problemi di OC

$$(P) \qquad z(P) = \min_{x \in X} f(x) \qquad\qquad z(PR) = \min_{x \in Y} g(x) \qquad (PR)$$

Il problema (PR) si dice rilassamento di (P) se:

1. $X \subseteq Y$;
2. $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$.

Proprietà 1

Se (PR) **non ammette** soluzioni ammissibili ($Y = \varnothing$) $\Longrightarrow$ (P) **non ammette** soluzioni ammissibili ($X = \varnothing$)

Rilassamenti di problemi di OC

$$(P) \quad z(P) = \min_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{f}(x) \qquad z(PR) = \min_{x \in \mathbf{Y}} \mathbf{g}(x) \quad (PR)$$

Il problema (PR) si dice rilassamento di (P) se:

1. $X \subseteq Y$;
2. $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$.

Proprietà 2

Se (PR) **ammette soluzioni ammissibili** ($Y \neq \varnothing$)	⇒	Il valore ottimo **z(PR)** di (PR) **non può essere peggiore** del valore ottimo **z(P)** di (P) $\longrightarrow$ **z(PR) ≤ z(P)**.

Dim. Consideriamo un problema di **minimo**. Per la condizione **2.**, si ha:

$$g(x) \leq f(x) \text{ **per ogni** } \mathbf{x \in X}$$

Siccome **z(PR) è il valore ottimo** del problema rilassato (PR), si ha:

$$z(PR) \leq g(x) \text{ per ogni } x \in \mathbf{Y} \supseteq \mathbf{X}$$

da cui: $\mathbf{z(PR)} \leq g(x) \leq f(x)$ <u>**per ogni $x \in X$**</u> ⇒ $z(PR) \leq \mathbf{z(P)} = \mathbf{\min_{x \in X} f(x)}$

Rilassamenti di problemi di OC

Proprietà 1

Se (PR) **non ammette** soluzioni ammissibili ($Y = \emptyset$)	⇒	(P) **non ammette** soluzioni ammissibili ($X = \emptyset$)

Proprietà 2

Se (PR) **ammette soluzioni ammissibili** ($Y \neq \emptyset$)	⇒	Il valore ottimo **z(PR)** di (PR) **non può essere peggiore** del valore ottimo **z(P)** di (P) → $z(PR) \leq z(P)$.

OSSERVAZIONI

La **Proprietà 1** è utile per verificare l'eventuale **non ammissibilità** del problema (P).

La **Proprietà 2** permette di calcolare lower bound (min) o upper bound (max) per il valore ottimo z(P) del problema (P) sfruttando il problema (PR) "di più facile soluzione".

Rilassamenti di problemi di OC

Proprietà 2

Se (PR) **ammette soluzioni ammissibili** ($Y \neq \emptyset$)	➡	Il valore ottimo **z(PR)** di (PR) **non può essere peggiore** del valore ottimo **z(P)** di (P) ⟶ **z(PR) ≤ z(P)**.

min: z(PR) ≤ z(P) ▶ I bound per il valore ottimo z(P) sono tanto migliori quanto più essi risultano "stretti", cioè quanto più piccola risulta la differenza **|z(PR) – z(P)|** .

Qual è infatti il "caso ideale"?

$$x^* \in Y \begin{cases} \mathbf{x^* \in X} \\ \mathbf{x^* \in Y \setminus X} \end{cases}$$

Situazione ideale:

- **z(PR) = z(P)** ($x^* \in X$)
- Se $\mathbf{x^* \in Y}$ è la soluzione ottima di (PR), allora vorremmo che x^* fosse **ottima anche per (P)**.

OSSERVAZIONE

Se $x^* \in Y \setminus X$ la **Proprietà 2 non dice nulla su x* rispetto al problema (P)**.

Rilassamenti di problemi di OC

Teorema 1

Sia (PR) un rilassamento del problema (P) e sia $x^* \in Y$ una soluzione ottima del problema rilassato (PR). Allora vale quanto segue:

Se $x^* \in X$ e $f(x^*) = g(x^*)$ $\Rightarrow$ x^* è soluzione ottima anche di (P).

Dim. Sia (P) un problema di minimo e x^* una soluzione ottima di (PR) che soddisfa le ipotesi del teorema, cioè: $x^* \in X$ e $f(x^*) = g(x^*)$.

Supponiamo per assurdo che **x^* non sia soluzione ottima di (P)**.

Allora deve esistere un $\overline{x} \in X$ **diverso da x^*** tale che:

$$f(\overline{x}) < f(x^*)$$

Ma, per ipotesi $f(x^*) = g(x^*)$ e dunque:

$$f(\overline{x}) < f(x^*) = g(x^*).$$

Ma siccome $\overline{x} \in X$, per la cond. 2. nella def. di rilassamento si ha anche:

$$g(\overline{x}) \leq f(\overline{x}) < f(x^*)=g(x^*)$$

e ciò **contraddice** l'ipotesi che x^* sia una soluzione ottima **per (PR)**. ■

Rilassamento continuo per problemi di PLI

NOTA

Un caso particolare di rilassamento (condizioni 1. e 2.) è quello in cui $g(\cdot) = f(\cdot)$:

1. $X \subseteq Y$
2. **$g(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$**

Si tratta di un rilassamento che coinvolge solo la regione ammissibile X del problema (P) che, dopo il rilassamento, può risultare più grande (Y).

Questo è il caso del rilassamento continuo del problema di PLI (Q):

Problema intero

$$(Q) \quad \begin{array}{l} \min c^T x \\ x \in P_Q \\ x \in Z^n \end{array}$$

Rilassamento continuo

$$\begin{array}{l} \min c^T x \\ x \in P_Q \end{array} \quad (P_Q)$$

Si ha:

1. $X = \{ x \in P_Q \cap Z^n \} \subset Y = \{ x \in P_Q \}$
2. $g(x) = f(x) = c^T x$ per ogni $x \in R^n$.

NOTA

Il Teorema 1 vale in particolare per il problema di PLI (Q) e il suo rilassamento continuo (P_Q).

Rilassamento continuo per problemi di PLI

Corollario 1

Sia $x^* \in P_Q$ una soluzione ottima del rilassamento continuo (P_Q). Se x* è intera, allora essa è soluzione ottima anche del problema intero.

Il Corollario 1 è conseguenza immediata del **Teorema 1**. Infatti:

$x^* \in P_Q$

x* è intera e quindi $x^* \in Z^n$ ⇒ $x^* \in P_Q \cap Z^n$ **($x^* \in X$)**

Grazie al Teorema 1 questo è sufficiente per concludere che x* è soluzione ottima anche di (P) dato che (Q) e (P_Q) **hanno la stessa funzione obiettivo**.

Teorema 1 (x* ottima per (PR)): Se $x^* \in X$ e $f(x^*) = g(x^*)$ ⇒ x* è soluzione ottima anche di (P).

Corollario 1 (x* ottima per (P_Q)): $x^* \in Z^n$ ⇒ x* è soluzione ottima anche di (Q).

Rilassamento continuo per problemi di PLI

Corollario 2 (Condizione sufficiente di ottimalità)

Sia $x^* \in P_Q$ una soluzione ottima del rilassamento continuo (P_Q), <u>non necessariamente a componenti intere</u> (**nota**: il valore ottimo di (P_Q) è $\mathbf{c^T x^*}$).

Sia $\bar{x}$ un punto **<u>ammissibile</u>** per il problema intero (Q).

Se $\mathbf{c^T \bar{x} = c^T x^*}$ allora $\bar{x}$ è soluzione **ottima** del problema intero (Q). ■

Anche il Corollario 2 è conseguenza immediata del **Teorema 1**. Infatti:

Siccome $\mathbf{c^T \bar{x} = c^T x^*}$ allora $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P_Q).

perché x^* è un punto ottimo per (P_Q)

Teorema 1 ($\bar{x}$ ottima per (PR)): Se $\bar{x} \in X$ e $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ ⇒ $\bar{x}$ è soluzione ottima anche di (P).

Corollario 2 ($\bar{x}$ ottima per (P_Q)): $\bar{x}$ è ammissibile per (Q) ⇒ $\bar{x}$ è soluzione ottima anche di (Q).

Rilassamento continuo per problemi di PLI

Sia $x^* \in P_Q$ una soluzione ottima del rilassamento continuo (P_Q):

Cond. Suff. Ott. $\rightarrow$ per un qualsiasi punto x ammissibile per (Q), se $c^T x = c^T x^*$ allora x è un punto ottimo per (Q).

Ricordando la proprietà:

Per un problema di max si ha

(upper bound) $z(P_Q) \geq z(Q)$.

Per un problema di min si ha

(lower bound) $z(P_Q) \leq z(Q)$.

$c^T x = c^T x^*$

(max) x è un punto **ammissibile per (Q)** e, dato che $z(Q)=c^T x=c^T x^*=z(P_Q)$, corrisponde al più grande valore che z(Q) può assumere $\rightarrow$ x è ottimo.

(min) x è un punto **ammissibile per (Q)** e , dato che $z(Q)=c^T x=c^T x^*=z(P_Q)$, corrisponde al più piccolo valore che z(Q) può assumere $\rightarrow$ x è ottimo.

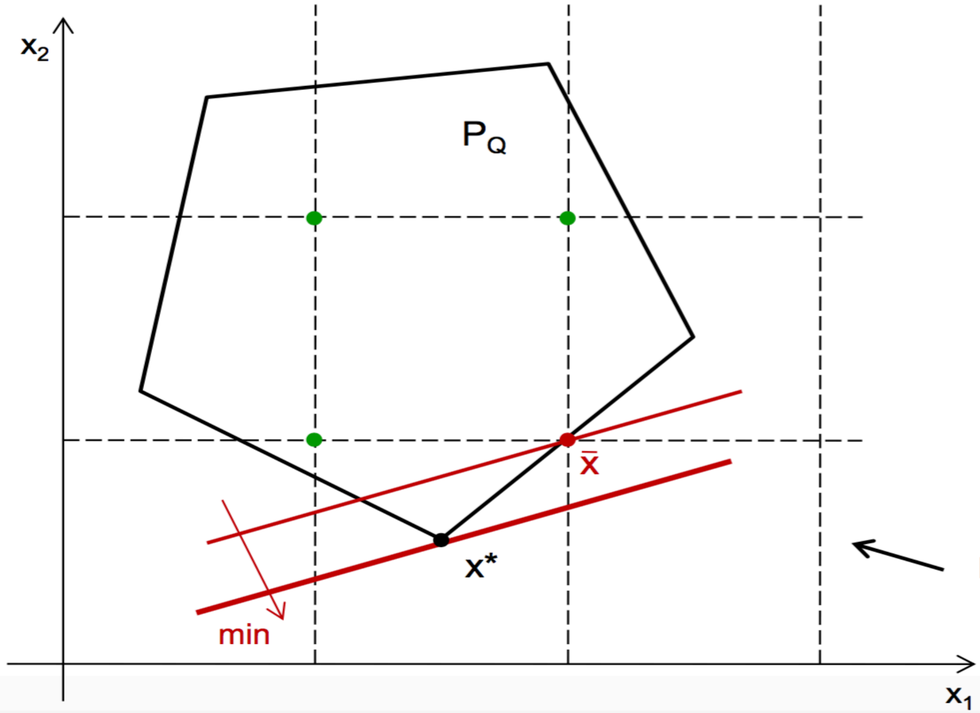
NOTA

Sui risultati visti si basano le tecniche di risoluzione generali per problemi di Ottimizzazione Combinatoria note come Tecniche di Branch&Bound (B&B) - “Ramifica e Limita”.

Rilassamento continuo per problemi di PLI

CASO GENERALE:

	Problema intero	**Rilassamento continuo**	
(Q)	$\min c^T x$ $x \in P_Q$ $x \in Z^n$	$\min c^T x$ $x \in P_Q$	(P_Q)

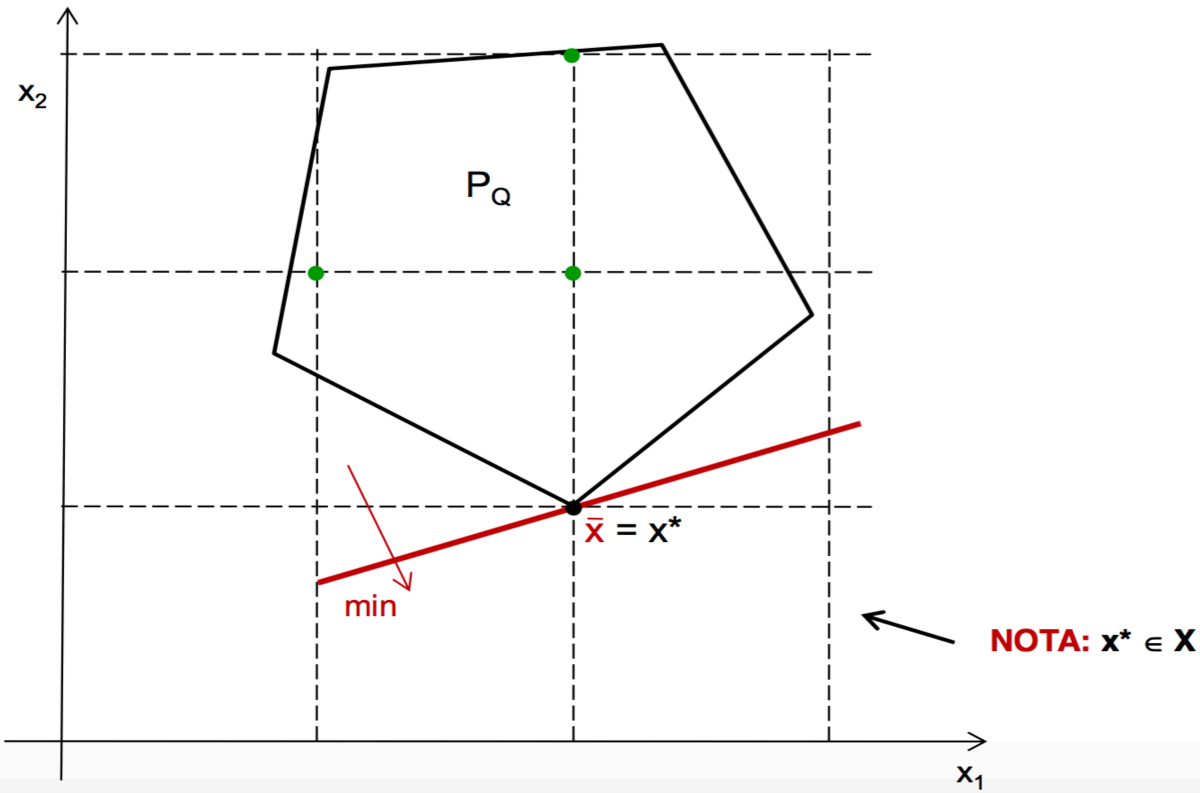


NOTA: $x^* \in Y \setminus X$

Rilassamento continuo per problemi di PLI

Corollario 1

Sia $x^* \in P_Q$ una soluzione ottima del rilassamento continuo (P_Q). Se **x^* è intera**, allora essa è soluzione ottima anche del problema intero. ■



Rilassamento continuo per problemi di PLI

Corollario 2 (Condizione sufficiente di ottimalità)
Sia $x^* \in P_Q$ una soluzione ottima del rilassamento continuo (P_Q), **non necessariamente a componenti intere** (il valore ottimo di (P_Q) è $\mathbf{c^T x^*}$).

Sia $\overline{x}$ un punto **ammissibile** per il problema intero (Q).

Se $\mathbf{c^T \overline{x} = c^T x^*}$ allora $\overline{x}$ è soluzione **ottima** del problema intero (Q). ∎