Programmazione lineare multiobiettivo

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione XXIII

Formalizzazione matematica di un problema di PLMO

.

$$\min Cx$$

$$Ax \geq b$$

$$x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{n} \text{ decisional variables}$$

$$C \in \mathbb{R}^{p \times n} \rightarrow \mathbf{p} \text{ objectives}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbf{m} \text{ constraints}$$

Nuovo concetto di soluzione "ottima"

Assunzione

Consideriamo un problema di minimo

Definizione (Dominanza di Pareto)

Una soluzione ammissibile $x \in X$ è dominata da un’altra soluzione ammissibile $x' \in X$ se $Cx' \leq Cx$ con una disuguaglianza stretta per almeno uno dei p obiettivi.

Definizione (Efficienza o Pareto Ottimalità)

Una soluzione ammissibile $x^* \in X$ è efficiente o Pareto ottima se non esiste un’altra soluzione $x \in X$ tale che $Cx \leq Cx^*$ con una disuguaglianza stretta per almeno uno dei p obiettivi. Il corrispondente vettore $y^* = Cx^*$ è definito non dominato.

Nuovo concetto di soluzione "ottima"

Definizione (Insieme efficiente)
L'insieme delle soluzioni efficienti o Pareto ottime X_E è chiamato insieme efficiente

Definizione (Frontiera di Pareto o insieme non dominato)
L'insieme dei vettori non dominati Y_N è chiamato frontiera di Pareto o insieme non dominato.

Formalizzazione matematica di un problema di PLIMO

.

$$\min Cx$$

$$Ax \geq b$$

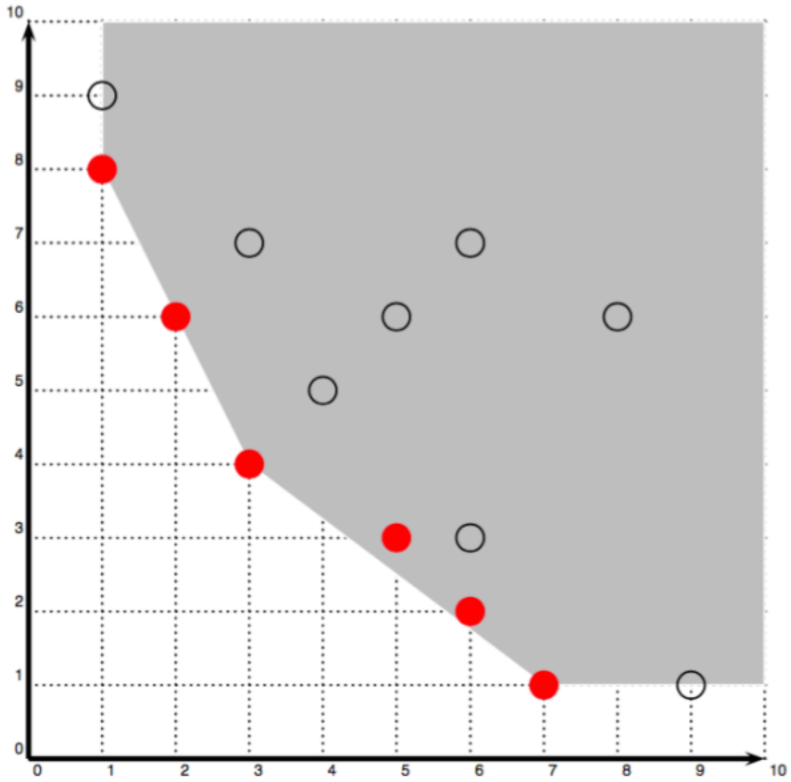
$$x \in \mathbb{Z}^n : x \geq 0 \ (\text{ or } x \in \{0,1\}^n \ )$$

$$x \in \mathbb{Z}^n \rightarrow \textbf{n} \text{ decisional variables}$$

$$C \in \mathbb{Z}^{p \times n} \rightarrow \textbf{p} \text{ objectives}$$

$$A \in \mathbb{Z}^{m \times n} \rightarrow \textbf{m} \text{ constraints}$$

Come cambia la frontiera di Pareto?



Soluzione efficienti supportate e non supportate

Definizione (Soluzioni efficienti supportate)
Una soluzione efficiente x^* è definita supportata se e solo se esiste

$$\lambda \in \mathbb{R}^p : \lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, .., p$$

e $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$

tale che x^* è ottima per il seguente problema ottenuto come somma pesata dei p criteri:

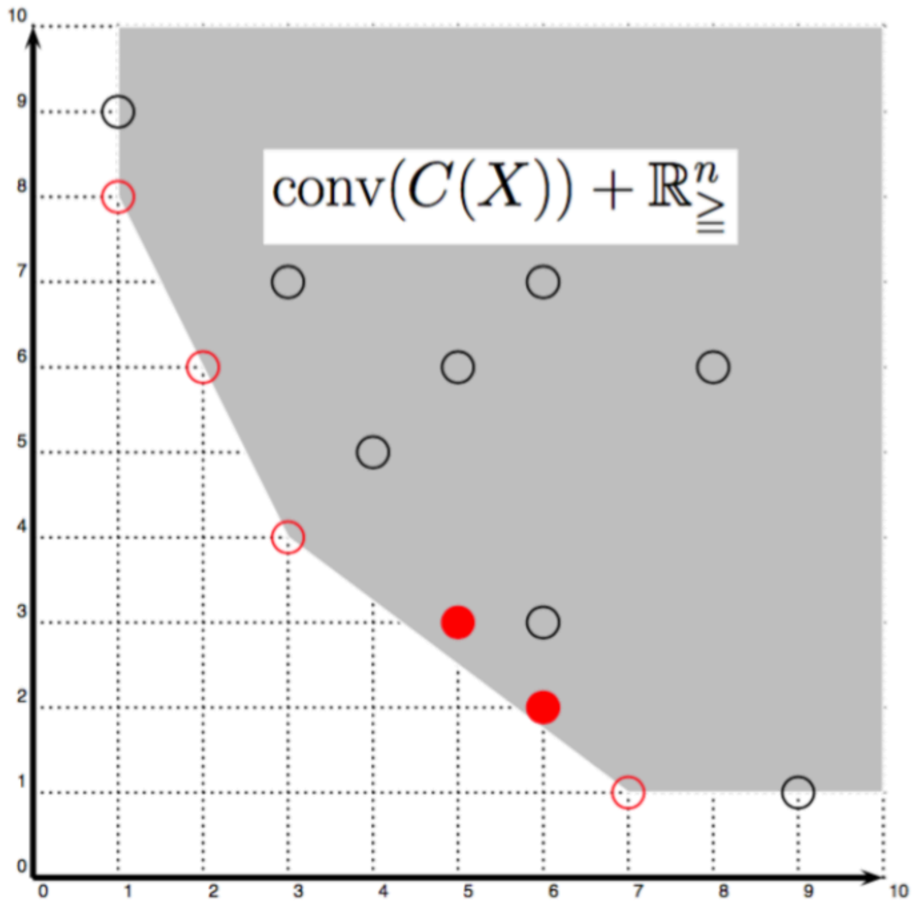
$$\min \lambda^T Cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0 \quad (integer)$$

Definizione (Soluzioni efficienti non supportate)
Una soluzione efficiente x^* è definita non supportata se non è ottima per alcun problema ottenuto come somma pesata dei p criteri.

Esempio



Punto ideale e punto Nadir

Definizione (Punto/Vettore ideale degli obiettivi)
Si definisce punto/vettore ideale degli obiettivi $y^{id} \in R^p$ il vettore di componenti:

$$y_i^{id} = \min c_i x : x \in X$$

Definizione (Punto/Vettore di Nadir di 2 obiettivi)
Si definisce punto/vettore Nadir di due obiettivi $y^N \in R^p$ il vettore di componenti:

$$y_j^N = \min \{y_j(x) : y_i(x)=y_i^I,\ j=1,2: i\neq j\} : \ x \in X$$

Il punto ideale ed il punto Nadir definiscono un lower ed un upper bound sui valori degli obiettivi corrispondenti a soluzioni efficienti.

Esempio

Sia dato il seguente problema:

$$\max(-x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

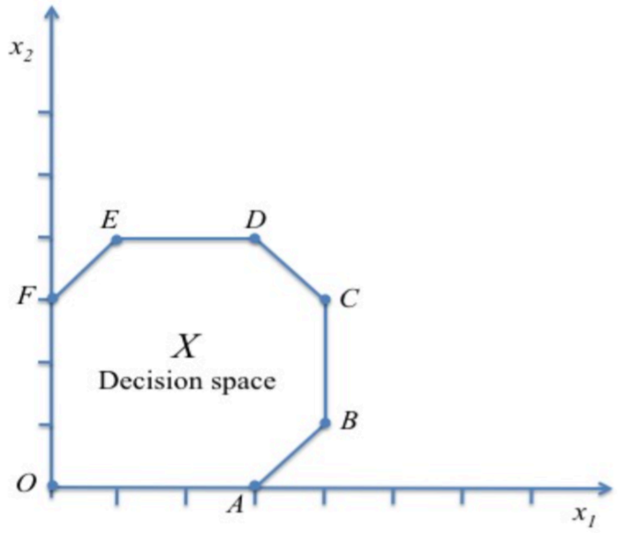
$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1, \ \ x_2 \geq 0$$

$$x_1, \ \ x_2 \leq 4$$

Insieme ammissibile nello spazio delle decisioni

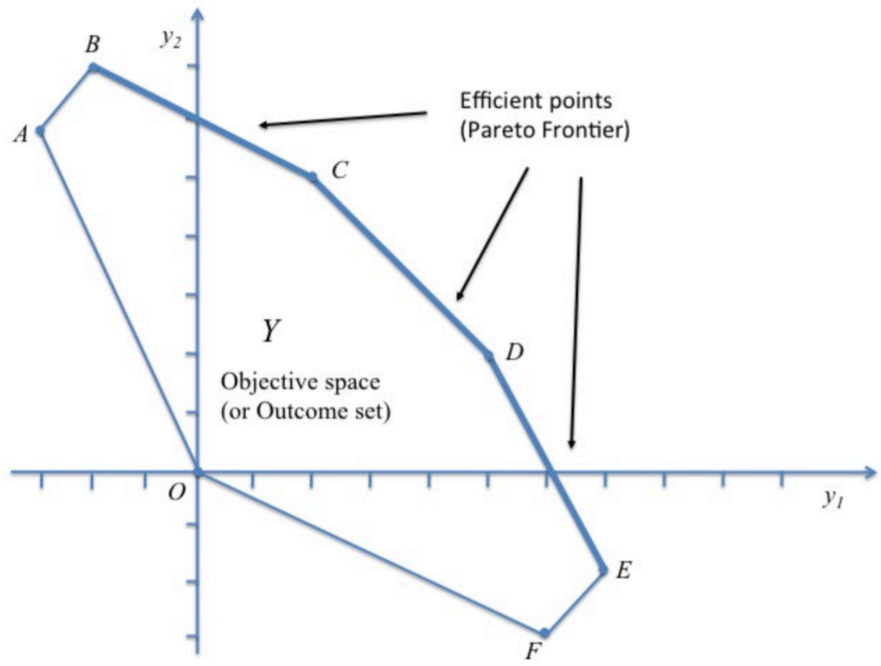
La regione ammissibile è rappresentata in figura:



Il perimetro del poligono X è la spezzata che unisce ordinatamente il punti O,A,B,C,D,E,F.

Frontiera di Pareto

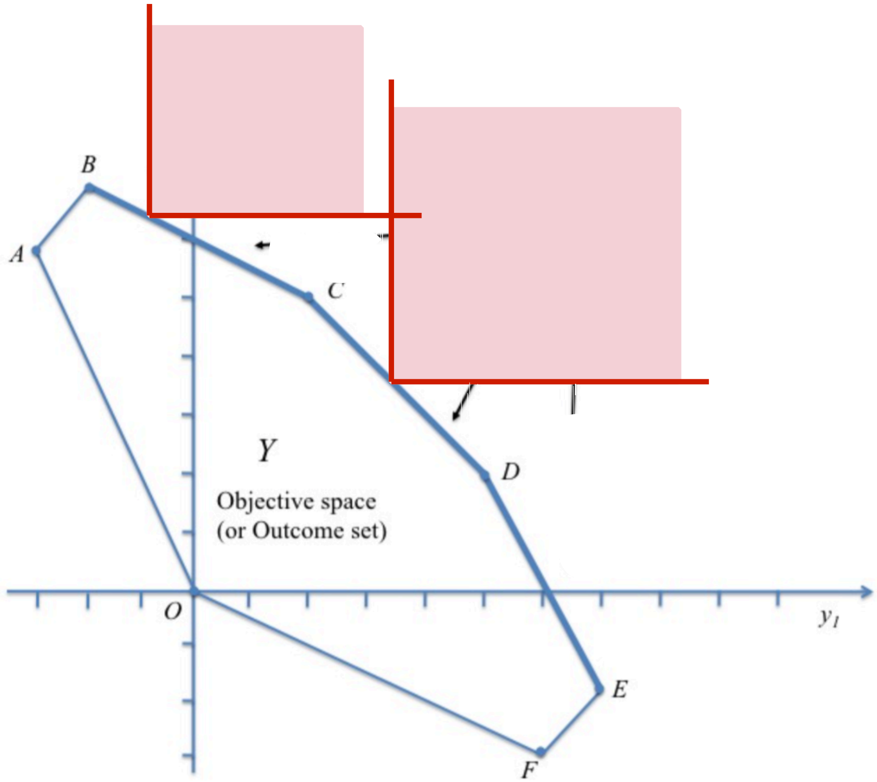
Lo spazio degli obiettivi è rappresentato in figura:



Il perimetro del poligono Y è la spezzata che unisce ordinatamente i punti O,A,B,C,D,E,F. La frontiera Pareto efficiente è la spezzata che unisce ordinatamente i punti B,C,D,E.

Frontiera di Pareto

Nel caso di problemi bi-obiettivo la frontiera di Pareto si determina graficamente mediante la regola del quadrante inferiore (per problemi di minimo) e del quadrante superiore (per problemi di massimo).



Tecniche di scalarizzazione più comuni

- **Metodo dei pesi**
- **Metodo ε-constrained**

Il metodo dei pesi

Nel metodo dei pesi viene risolto iterativamente il seguente problema singolo obiettivo:

$$\min \lambda^T Cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0 \text{ (integer)}$$

dove $\lambda \in R^p$ è tale che $0 \leq \lambda_j \leq 1 \ \forall\, j=1,\ldots,p$ e $e^T \lambda = 1$. Variando i pesi è possibile generare tutte le soluzioni efficienti (supportate). Il principale vantaggio di questo metodo è che per ogni $\lambda \in R^p$ il problema è difficile esattamente come la sua versione singolo obiettivo.

Il metodo ε-constrained

Si tratta di un altro metodo mediante il quale è possibile generare tutte le soluzioni efficienti, e che consiste nel mantenere solo uno dei p obiettivi, diciamo l'obiettivo i-esimo, e trasformando gli altri (p-1) obiettivi in vincoli nel modo seguente:

$$\min C_i x$$
$$Ax = b$$
$$C_k x \leq \varepsilon_k \ \forall\, k \neq i$$
$$x \geq 0 \text{ (integer)}$$

Tutte le soluzioni efficienti (supportate e non supportate) possono essere generate specificando opportunamente i termini noti ε_k. Lo svantaggio di questo metodo è la presenza di vincoli aggiuntivi (vincoli di knapsack) che rendono il problema più difficile da risolvere.

Esempio Knapsack Bi-obiettivo (6/6)