Problemi di flusso a costo minimo

È data una rete (grafo orientato e connesso) $G = (V, A)$.

$$(i, j) \in A \quad \rightarrow \quad c_{ij},$$

costo di trasporto unitario lungo l'arco (i, j).

$$i \in V \quad \rightarrow \quad b_i \ \text{ interi}$$

e tali che $\sum_{i \in V} b_i = 0$.

Esempio

Rete $G = (V, A)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$A = \{(1,2); (1,3); (1,5); (2,3); (3,4); (4,2); (4,5); (5,3)\}$$

(i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,2)$	$(4,5)$	$(5,3)$
c_{ij}	5	-2	2	-4	0	6	3	4

i	1	2	3	4	5
b_i	2	5	1	-4	-4

Classificazione nodi

- **Nodi i tali che $b_i > 0$**: sono denominati nodi sorgente; in essi viene "realizzato" il "prodotto" che viaggia attraverso la rete;
- **Nodi i tali che $b_i < 0$**: sono denominati nodi destinazione; in essi viene "consumato" il "prodotto" che viaggia attraverso la rete;
- **Nodi i tali che $b_i = 0$**: sono denominati nodi transito; in essi il "prodotto" che viaggia attraverso la rete si limita a transitare.

Il problema di flusso a costo minimo

Il problema consiste nel far giungere il "prodotto" realizzato nei nodi sorgente ai nodi destinazione facendolo viaggiare attraverso la rete e cercando di spendere il meno possibile per il trasporto.

NB: La condizione $\sum_{i \in V} b_i = 0$ garantisce che ciò che viene prodotto nei nodi sorgente è esattamente pari a ciò che viene consumato nei nodi destinazione.

Applicazione I - Struttura di una ditta

- il "prodotto" è in tal caso proprio quello che viene realizzato dalla ditta;
- Nodi sorgente = centri di produzione della ditta (il valore b_i ne rappresenta la capacità produttiva);
- Nodi destinazione = centri vendita della ditta (il valore $\mid b_i \mid$ rappresenta la capacità di vendita del centro);
- Nodi transito = magazzini della ditta;
- archi = strade di collegamento tra i vari centri di proprietà della ditta (con i c_{ij} che rappresentano i costi unitari di trasporto lungo esse).

Applicazione II - Rete di computer

- il "prodotto" in tal caso sono i bit di informazione;
- Nodi sorgente = computer che producono informazione (il valore b_i rappresenta la capacità produttiva nell'unità di tempo);
- Nodi destinazione = computer che devono ricevere l'informazione (il valore $| b_i |$ rappresenta la quantità di informazione che possono ricevere nell'unità di tempo);
- Nodi transito = computer che si limitano a smistare l'informazione;
- archi = cavi di collegamento tra i vari computer (con i c_{ij} che rappresentano i costi unitari di trasporto lungo essi).

Applicazione III - Rete idraulica

- il "prodotto" in tal caso è l'acqua;
- Nodi sorgente = centraline di immissione di acqua nella rete (il valore b_i rappresenta la quantità d'acqua che immettono nell'unità di tempo);
- Nodi destinazione = punti di raccolta dell'acqua (il valore $\mid b_i \mid$ rappresenta la quantità di acqua che ciascuno di essi deve ricevere nell'unità di tempo);
- Nodi transito = punti di smistamento dell'acqua;
- archi = tubi di collegamento tra i vari nodi della rete idraulica (con i c_{ij} che rappresentano i costi unitari di trasporto lungo essi).

Il modello matematico - le variabili

Associamo una variabile x_{ij} ad ogni arco (i, j) della rete:

$(i, j) \in A \;\; \rightarrow \;\; x_{ij} =$ quantità "prodotto" inviata lungo l'arco (i, j)

Il modello matematico - i vincoli

In ogni nodo $i \in V$ si deve avere:

(Flusso uscente da i) - (Flusso entrante in i) $= b_i$

Flusso uscente da i:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}$$

Flusso entrante in i:

$$\sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji}$$

Continua

Quindi:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \quad \forall\, i \in V$$

Avremo inoltre il vincolo di non negatività e di interezza del flusso lungo ciascun arco, cioè:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ interi} \quad \forall\,(i,j) \in A$$

Esempio

Nodo 1

$$x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2$$

Nodo 2

$$x_{23} - x_{12} - x_{42} = 5$$

Nodo 3

$$x_{34} - x_{13} - x_{23} - x_{53} = 1$$

Nodo 4

$$x_{42} + x_{45} - x_{34} = -4$$

Nodo 5

$$x_{53} - x_{15} - x_{45} = -4$$

Modello matematico - l'obiettivo

Costo totale di trasporto:

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

che vorremo minimizzare.

Nell'esempio:

$$5x_{12} - 2x_{13} + 2x_{15} - 4x_{23} + 0x_{34} + 6x_{42} + 3x_{45} + 4x_{53}$$

Il modello matematico completo

$$
\begin{array}{ll}
\min \ \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i & \forall\ i \in V \\
x_{ij} \geq 0 \text{ interi} & \forall\ (i,j) \in A
\end{array}
$$

In forma matriciale

$$\min \mathbf{CX}$$
$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

con:

- $\mathbf{X}$ vettore le cui $\mid A \mid$ componenti sono le variabili x_{ij} del problema;
- $\mathbf{C}$ vettore le cui $\mid A \mid$ componenti sono i costi unitari c_{ij};
- $\mathbf{B}$ vettore le cui $\mid V \mid$ componenti sono i valori b_i;
- $\mathbf{A}$ matrice dei vincoli di uguaglianza con $\mid V \mid$ righe e $\mid A \mid$ colonne.

Modello matematico dell'esempio

$$\begin{aligned}
\min\ & 5x_{12} - 4x_{23} + 6x_{42} - 2x_{13} + 0x_{34} + 2x_{15} + 4x_{53} + 3x_{45} \\
& x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2 \\
& x_{23} - x_{12} - x_{42} = 5 \\
& x_{34} - x_{13} - x_{23} - x_{53} = 1 \\
& x_{42} + x_{45} - x_{34} = -4 \\
& x_{53} - x_{15} - x_{45} = -4 \\
& x_{12}, x_{23}, x_{42}, x_{13}, x_{34}, x_{15}, x_{53}, x_{45} \geq 0 \text{ interi}
\end{aligned}$$

Matrice dei vincoli

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|cccccccc|}
\hline
 & (1,2) & (1,3) & (1,5) & (2,3) & (4,2) & (3,4) & (5,3) & (4,5) \\
\hline
\mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{3} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
\mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
\mathbf{5} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}$$

Coincide con la *matrice di incidenza nodo-arco* della rete e quindi è TU.

Matrici totalmente unimodulari

Definizione *Una matrice* $\mathbf{A}$ *si dice totalmente unimodulare (TU nel seguito) se ogni sua sottomatrice quadrata ha determinante pari a 0, +1 o -1.*

Si noti che una matrice TU può avere come elementi solo i valori 0, +1 e -1 visto che ogni suo elemento è una particolare sottomatrice quadrata di ordine 1×1.

Alcuni modi per riconoscerle

Esistono alcune regole per riconoscere le matrici TU, tra cui la seguente.

Osservazione *Sia $\mathbf{A}$ una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, +1 o -1 e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi diversi da 0. Allora $\mathbf{A}$ è TU se e solo se l'insieme delle righe di $\mathbf{A}$ può essere suddiviso in due sottinsiemi Q_1 e Q_2 tali che se una colonna contiene due elementi diversi da 0 si ha che:*

- *se i due elementi hanno lo stesso segno allora una delle due righe in cui si trovano è in Q_1 e l'altra in Q_2;*
- *se hanno segno opposto le righe corrispondenti sono entrambe contenute in Q_1 od entrambe in Q_2.*

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prendendo $Q_1 = \{1, 2\}$ e $Q_2 = \{3, 4\}$ si verifica immediatamente che la condizione è soddisfatta e quindi $\mathbf{A}$ è TU.

Corollario

Sia $\mathbf{A}$ una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, +1 o -1 e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi diversi da 0. Se nelle colonne con due elementi diversi da 0 la somma di tali elementi è uguale a 0 (ovvero un elemento è uguale a +1 e l'altro a -1), allora $\mathbf{A}$ è TU.

Dimostrazione È sufficiente utilizzare l'osservazione precedente ponendo

$$Q_1 = \{\text{tutte le righe di } \mathbf{A}\} \quad Q_2 = \emptyset.$$

Il corollario ci dice ad esempio che tutte le matrici di incidenza nodo-arco di un grafo orientato sono matrici TU.

Osservazione importante

In *tutti* i problemi di flusso a costo minimo la matrice dei vincoli è la matrice di incidenza nodo-arco della rete e quindi è TU.

Inoltre, i termini noti sono i valori b_i, $i \in V$, che sono interi.

Quindi: i problemi di flusso a costo minimo sono problemi più semplici dei generici problemi di PLI in quanto risolvibili come se fossero problemi di PL.

In particolare, i problemi di flusso a costo minimo sono risolvibili in tempo polinomiale (appartengono alla classe P).

Una semplificazione

Ogni vincolo del problema di flusso a costo minimo può essere ottenuto attraverso la somma di tutti gli altri.

Quindi: uno (ed un solo) vincolo del problema (non importa quale) può essere eliminato in quanto ridondante. Come convenzione fissiamo quella di eliminare l'ultimo vincolo.

Nell'esempio

$$\min\ 5x_{12} - 4x_{23} + 6x_{42} - 2x_{13} + 0x_{34} + 2x_{15} + 4x_{53} + 3x_{45}$$
$$x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2$$
$$x_{23} - x_{12} - x_{42} = 5$$
$$x_{34} - x_{13} - x_{23} - x_{53} = 1$$
$$x_{42} + x_{45} - x_{34} = -4$$
$$x_{12}, x_{23}, x_{42}, x_{13}, x_{34}, x_{15}, x_{53}, x_{45} \geq 0 \text{ interi}$$

Matrice dei vincoli:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Come risolvere questi problemi?

Essendo risolvibili come problemi di PL, possiamo utilizzare un qualsiasi algoritmo per risolvere problemi di PL. In particolare, qui useremo l'algoritmo del simplesso primale. Ma ...

...come già anticipato, i problemi di PLI risolvibili come problemi di PL semplicemente eliminando i vincoli di interezza hanno tipicamente una struttura tale da consentire di applicare metodi già noti come il simplesso stesso ma con passi implementati sfruttando la struttura del problema.

Basi

In un generico problema di PL in forma standard:

$$\max \ \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

una base è un insieme di m variabili (dove m è il numero di vincoli di uguaglianza o, equivalentemente, il numero di righe della matrice dei vincoli $\mathbf{A}$), con l'ulteriore proprietà che le m colonne della matrice $\mathbf{A}$ relative a tali variabili formano una matrice quadrata *invertibile*.

Tale definizione si applica anche al problema di flusso a costo minimo. In tal caso $m = \mid V \mid -1$.

Nell'esempio

$B_0 = \{x_{15}, x_{23}, x_{34}, x_{45}\}$ è una base? Si verifichi se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

è invertibile.

$B_1 = \{x_{12}, x_{15}, x_{23}, x_{53}\}$ è una base? Si verifichi se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è invertibile.

Ma ...

... esiste un modo più semplice per capire se un insieme di $\mid V \mid -1$ variabili forma una base.

Vale il seguente risultato.

Osservazione *In un problema di flusso su rete a costo minimo vi è una corrispondenza uno a uno tra basi ed alberi di supporto, ovvero ad ogni insieme di* $\mid V \mid -1$ *variabili che formano una base corrisponde un albero di supporto e viceversa.*

Soluzioni di base

Base $\rightarrow$ Soluzione di base.

Ottenuta ponendo a 0 tutte le variabili fuori base, ovvero tutte quelle che non fanno parte dell'albero di supporto corrispondente alla base.

Nell'esempio

Con la base $B_0 = \{x_{15}, x_{23}, x_{34}, x_{45}\}$ si deve porre

$$x_{12} = x_{13} = x_{42} = x_{53} = 0,$$

sostituire tali valori nulli nei vincoli e risolvere il sistema ottenuto in questo modo:

$$\begin{aligned} x_{15} &= 2 \\ x_{23} &= 5 \\ x_{34} - x_{23} &= 1 \\ x_{45} - x_{34} &= -4 \end{aligned}$$

la cui soluzione è:

$$x_{15} = 2 \quad x_{23} = 5 \quad x_{34} = 6 \quad x_{45} = 2$$

con valore dell'obiettivo pari a -10.

Ammisibilità e degenerazione

Se tutte le variabili in base hanno valore non negativo, si parla di soluzione di base *ammissibile* (da un punto di vista geometrico si tratta di un vertice della regione ammissibile).

Se una o più delle variabili in base sono uguali a 0 si parla di soluzione di base *degenere*.

Nell'esempio la soluzione di base è ammissibile e non degenere.

Coefficienti di costo ridotto

Data una base con relativa soluzione di base ammissibile, ad ogni variabile fuori base è associato un *coefficiente di costo ridotto*. Questo misura:

la variazione del valore dell'obiettivo al crescere di un'unità del valore della variabile fuori base.

Condizione di ottimalità

Se i coefficienti di costo ridotto di *tutte* le variabili fuori base sono non negativi, questo indica che la crescita di qualsiasi variabile fuori base dal suo valore nullo attuale comporta una crescita dell'obiettivo (se il coefficiente è positivo) o nessuna variazione nell'obiettivo (se ha valore nullo). Quindi ...

... in tal caso possiamo concludere che la soluzione di base attuale è soluzione ottima del problema di flusso a costo minimo.

Inoltre, è soluzione ottima *unica* se tutti i coefficienti di costo ridotto sono strettamente positivi.

Come si calcolano?

- prendere l'arco relativo a una variabile fuori base;
- aggiungere l'arco all'albero di supporto corrispondente alla base attuale;
- considerare l'unico ciclo che si forma con tale aggiunta;
- fissare come verso del ciclo quello dell'arco relativo alla variabile fuori base;
- calcolare il coefficiente di costo ridotto sommando tra loro tutti i costi relativi agli archi attraversati dal ciclo nel loro stesso verso e sottraendo al risultato i costi degli archi attraversati dal ciclo in senso opposto.

Nell'esempio

Coefficiente di costo ridotto di x_{13}.

Aggiungiamo l'arco $(1,3)$ all'albero di supporto. Si forma il ciclo:

$$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1.$$

Il ciclo attraversa gli archi $(1,3)$, $(3,4)$ e $(4,5)$ nel loro verso, mentre attraversa l'arco $(1,5)$ nel suo verso opposto. Il coefficiente di costo ridotto relativo all'arco $(1,3)$, indicato con $\overline{c}_{13}$, sarà quindi:

$$\overline{c}_{13} = c_{13} + c_{34} + c_{45} - c_{15} = -2 + 0 + 3 - 2 = -1.$$

Essendo negativo questo ci dice immediatamente che non possiamo concludere che la soluzione di base corrente è ottima.

Nell’esempio-continua

Altri coefficienti di costo ridotto:

$$\overline{c}_{42} = 2 \;\; \overline{c}_{12} = 2 \;\; \overline{c}_{53} = 7.$$

Cambio di base

Come si procede se la condizione di ottimalità non è soddisfatta?

Procedo ad un cambio di base, ovvero:

- scelgo una variabile fuori base da inserire nella nuova base;
- scelgo una variabile in base per farla uscire.

Le scelte devono garantire il mantenimento dell'ammissibilità e, possibilmente, il miglioramento (decrescita) del valore dell'obiettivo.

Variabile entrante in base

Si deve scegliere una di quelle con coefficiente di costo ridotto negativo (perché?).

Fisseremo come regola quella di selezionare la variabile a coefficiente di costo ridotto minimo.

Aggiornamento del flusso

- Aggiungere l'arco relativo alla variabile che si farà entrare in base;
- si forma un ciclo che viene orientato secondo il verso di questo arco;
- si porti a Δ il flusso lungo tale arco;
- si incrementi di Δ il flusso lungo gli archi del ciclo attraversati secondo il proprio verso;
- si decrementi di Δ il flusso lungo gli archi attraversati in verso opposto al proprio.

Illimitatezza

La procedura appena vista garantisce che il flusso aggiornato in questo modo continui a soddisfare i vincoli relativi alla differenza tra flusso uscente e flusso entrante nei vari nodi.

Se il flusso non viene decrementato lungo nessun arco (ovvero, se il ciclo che si forma con l'aggiunta dell'arco è un *ciclo orientato*), allora al crescere di Δ non vengono mai violati i vincoli di non negatività dei flussi e quindi non si esce mai dalla regione ammissibile mentre l'obiettivo decresce a $-\infty$. In tal caso quindi possiamo concludere che il problema ha obiettivo illimitato.

Variabile uscente dalla base

Se il flusso viene decrementato su uno o più archi, si farà uscire dalla base il primo arco il cui flusso si annulla al crescere di Δ (con scelta arbitraria se questo accade contemporaneamente per più archi).

Indicheremo con $\bar{\Delta}$ il massimo valore che può assumere Δ senza far diventare negativa alcuna delle variabili in base.

Nell'esempio

Variabile entrante in base: x_{13}.

Aggiornamento flusso:

$$x_{13} = \Delta \quad x_{34} = 6 + \Delta \quad x_{45} = 2 + \Delta \quad x_{15} = 2 - \Delta.$$

Quindi, Δ può crescere fino al valore $\bar{\Delta} = 2$ e la variabile uscente dalla base è x_{15}.

La nuova base è $\{x_{13}, x_{23}, x_{34}, x_{45}\}$ e la nuova soluzione di base è:

$$x_{13} = 2 \quad x_{23} = 5 \quad x_{34} = 8 \quad x_{45} = 4 \quad x_{12} = x_{15} = x_{42} = x_{53} = 0$$

con valore dell'obiettivo $-10 + \overline{c}_{13}\bar{\Delta} = -12$.

Algoritmo del simplesso

Una volta completate le operazioni relative a una base e definita una nuova base l'algoritmo del simplesso ripete le operazioni appena viste sulla nuova base, cioè:

- verifica di ottimalità
- verifica di illimitatezza
- cambio di base

e itera questo procedimento fino a quando arriva ad una base che soddisfi la condizione di ottimalità o quella di illimitatezza.

Nell'esempio

Il calcolo dei coefficienti di costo ridotto per le nuove variabili fuori base porta a questo risultato:

$$\bar{c}_{42} = 2 \;\; \bar{c}_{12} = 3 \;\; \bar{c}_{53} = 7 \;\; \bar{c}_{15} = 1,$$

da cui possiamo concludere che la soluzione di base attuale è l'unica soluzione ottima del nostro problema e quindi il valore ottimo dello stesso è pari a -12.

Problema da risolvere

L'algoritmo del simplesso parte da una base ammissibile iniziale, ma:

- esiste sempre una base ammissibile?
- se esiste, come faccio a trovarla?

A questo si risponde con il metodo due fasi.

Problema di I fase

- aggiungo alla rete un nuovo nodo q;
- collego tale nodo ad ogni nodo $i \in V$ con $b_i < 0$ con un arco (q, i);
- collego tale nodo ad ogni nodo $i \in V$ con $b_i \geq 0$ con un arco (i, q);
- i valori b_i per $i \in V$ sono quelli della rete originaria, mentre $b_q = 0$;
- si pone $c_{ij} = 0$ per ogni $(i, j) \in A$, $c_{iq} = 1$ per ogni $i \in V$ con $b_i \geq 0$, $c_{qi} = 1$ per ogni $i \in V$ con $b_i < 0$.

Base ammissibile iniziale

Per questo problema si ha immediatamente a disposizione un albero di supporto ammissibile, quello formato da tutti gli archi incidenti su q, con i seguenti valori delle variabili:

$$x_{qi} = -b_i \ \ \forall \ i : \ b_i < 0$$
$$x_{iq} = b_i \ \ \forall \ i : \ b_i \geq 0$$

mentre tutte le altre variabili sono nulle.

Cosa ci dice il problema di I fase

A questo punto risolviamo questo problema con il simplesso su rete nel modo già visto in precedenza.

Valore ottimo problema I fase $> 0 \Rightarrow$ il problema originario ha regione ammissibile vuota.

Valore ottimo problema I fase $= 0 \Rightarrow$ il problema originario ha regione ammissibile non vuota.

Inoltre, in tal caso esiste un albero di supporto ottimo che contiene solo uno dei nuovi archi (quelli incidenti su q). Eliminando tale arco si ottiene un albero di supporto (base) ammissibile per il problema originario.

Esempi

(i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
c_{ij}	2	3	5

i	1	2	2
b_i	1	3	-4

(i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
c_{ij}	2	4	5

i	1	2	3
b_i	-1	0	1

Variante: capacità limitate sugli archi

Un'importante variante dei problemi di flusso a costo minimo che abbiamo trattato sino ad ora è quella in cui esistono dei limiti di capacità associati agli archi. In pratica ad ogni arco $(i, j) \in A$ della rete è associato un valore intero, indicato nel seguito con d_{ij}, che rappresenta il flusso massimo di prodotto inviabile lungo quell'arco.

Se pensate all'esempio pratico di una rete di comunicazione, non potete inviare una quantità infinita di prodotto nell'unità di tempo lungo un cavo della rete, cioè avete proprio un limite di capacità del vostro collegamento.

Modello matematico

$$
\begin{array}{rl}
\min \ \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i & \forall\ i \in V \\
x_{ij} \leq d_{ij} & \forall\ (i,j) \in A \\
x_{ij} \geq 0 \text{ interi} & \forall\ (i,j) \in A
\end{array}
$$

È ancora un problema nella classe P

In forma matriciale possiamo riscrivere i vincoli aggiuntivi di capacità come segue:

$$\mathbf{IX} \leq \mathbf{D}$$

dove $\mathbf{I}$ è la matrice identica di ordine $\mid A \mid$, $\mathbf{X}$ il vettore con le $\mid A \mid$ componenti x_{ij} e $\mathbf{D}$ il vettore con le $\mid A \mid$ componenti intere d_{ij}.

L'unimodularità della matrice identica e l'interezza delle componenti di $\mathbf{D}$ consentono di estendere immediatamente anche al caso a capacità limitate la possibilità di risolverlo semplicemente eliminando i vincoli di interezza sulle variabili.

Risoluzione: una variante del simplesso

Dal punto di vista della risoluzione non potremo più utilizzare l'algoritmo del simplesso come lo abbiamo visto in precedenza ma dovremo utilizzare una sua variante in grado di trattare variabili con limitazioni superiori.

Resta del tutto invariata la corrispondenza uno ad uno tra basi e alberi di supporto.

Continua

Ciò che cambia è che se in precedenza in corrispondenza di ogni base una variabile poteva trovarsi in uno solo tra due possibili stati (*in base* oppure *fuori base*), ora i possibili stati di una variabile x_{ij} sono tre:

- in base;
- fuori base *a valore nullo* (ovvero $x_{ij} = 0$);
- fuori base *a valore pari al proprio limite superiore* (ovvero $x_{ij} = d_{ij}$).

Notazione

- B insieme delle variabili in base;
- N_0 insieme delle variabili fuori base a valore nullo;
- N_1 insieme delle variabili fuori base a valore pari al proprio limite superiore.

Soluzione di base

Soluzione di base associata alla tripla (B, N_0, N_1):

è ottenuta ponendo nei vincoli pari a 0 tutte le variabili in N_0, pari al loro limite superiore tutte le variabili in N_1 e risolvendo quindi il sistema risultante.

Una soluzione di base si definisce ammissibile se tutte le variabili in base hanno valore compreso tra 0 e la propria limitazione superiore.

Inoltre, si parlerà di soluzione di base ammissibile non degenere nel caso in cui nessuna variabile in base abbia valore pari a 0 o alla propria limitazione superiore.

Esempio

Problema di flusso a costo minimo su una rete con 5 nodi con i seguenti valori b_i:

$$b_1 = 8 \quad b_4 = -8 \quad b_2 = b_3 = b_5 = 0$$

e archi aventi i seguenti costi unitari di trasporto e limiti di capacità:

	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(5,4)$
c_{ij}	5	2	15	3	2	3	2
d_{ij}	9	7	3	11	2	7	7

Modello matematico

$$\min\ 5x_{12} + 2x_{13} + 15x_{14} + 3x_{24} + 2x_{34} + 3x_{35} + 2x_{54}$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 8$$

$$x_{24} - x_{12} = 0$$

$$x_{34} + x_{35} - x_{13} = 0$$

$$-x_{14} - x_{24} - x_{34} - x_{54} = -8$$

$$x_{12} \leq 9 \qquad x_{13} \leq 7$$

$$x_{14} \leq 3 \qquad x_{24} \leq 11$$

$$x_{34} \leq 2 \qquad x_{35} \leq 7$$

$$x_{54} \leq 7$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{54} \geq 0 \text{ interi}$$

Base di partenza

Risolvere l'esempio partendo dalla seguente suddivisione:

$$B^0 = \{x_{12}, x_{13}, x_{24}, x_{35}\} \quad N_0^0 = \{x_{34}, x_{54}\} \quad N_1^0 = \{x_{14}\}.$$

Soluzione di base

Per ottenere il valore delle variabili in base sostituiamo nei vincoli ad ogni variabile fuori base il valore corrispondente (0 o il limite superiore della variabile) e risolvere il sistema risultante:

$$x_{12} + x_{13} + 3 = 8$$
$$x_{24} - x_{12} = 0$$
$$x_{35} - x_{13} = 0$$
$$-3 - x_{24} = -8$$

da cui si ottiene la soluzione di base:

$$x_{12} = 5 \quad x_{24} = 5 \quad x_{13} = 0 \quad x_{35} = 0 \quad x_{34} = x_{54} = 0 \quad x_{14} = 3$$

con valore dell'obiettivo pari a $5 \times 5 + 15 \times 3 + 3 \times 5 = 85.$ Tale soluzione di base è ammissibile ed è degenere (le variabili in base x_{13} e x_{35} hanno valore nullo).

Coefficienti di costo ridotto

Il calcolo si effettua in modo del tutto identico a quanto già visto. In particolare per la base del nostro esempio abbiamo:

$$\overline{c}_{14} = 7 \quad \overline{c}_{34} = -4 \quad \overline{c}_{54} = -1$$

Condizione di ottimalità

Per le variabili fuori base a valore nullo vale il discorso già fatto in precedenza: tra queste quelle che conviene far crescere se vogliamo ridurre il valore dell'obiettivo sono quelle a coefficiente di costo ridotto negativo.

La novità è rappresentata dal fatto che per le variabili fuori base con valore pari al proprio limite superiore non è ovviamente possibile farle crescere (sono, appunto, già al loro limite superiore) ma solo farle decrescere. Ne consegue che per variabili fuori base al proprio limite superiore quelle la cui variazione (ovvero diminuzione) consente un decremento del valore dell'obiettivo sono quelle con coefficiente di costo ridotto positivo.

Quindi ...

...avremo la seguente condizione di ottimalità: una soluzione di base ammissibile è soluzione ottima del problema se:

- **a)** tutte le variabili fuori base a valore nullo hanno coefficiente di costo ridotto non negativo;
- **b)** tutte le variabili fuori base a valore pari al limite superiore hanno coefficiente di costo ridotto non positivo.

Formalmente:

$$\bar{c}_{ij} \geq 0 \ \ \forall\, (i,j) \in N_0 \quad \bar{c}_{ij} \leq 0 \ \ \forall\, (i,j) \in N_1.$$

e se tutte le disuguaglianze sono strette la soluzione ottima è unica.

Variabile entrante in base

Nel nostro esempio la condizione non è soddisfatta e si dovrà procedere ad un cambio di base.

La variabile che si decide di far entrare in base è la più promettente (quella la cui variazione modifica più rapidamente il valore dell'obiettivo). Questa la si identifica prendendo quella che fornisce il massimo tra i coefficienti di costo ridotto delle variabili fuori base a valore pari al limite superiore e quelli cambiati di segno delle variabili fuori base a valore nullo. Formalmente:

$$(i, j) \in \arg\max\{\max_{(i,j)\in N_1} \overline{c}_{ij}, \max_{(i,j)\in N_0} -\overline{c}_{ij}\}$$

Nel nostro esempio sceglieremo la variabile x_{14}.

Variabile uscente dalla base

Procedimento simile a quanto visto nel caso senza capacità sugli archi ma con qualche variante.

Se la variabile che decidiamo di far entrare in base è fuori base a valore nullo, allora si procede esattamente come nel caso senza capacità.

Se la variabile che stiamo cercando di far entrare in base è fuori base a valore pari al proprio limite superiore si riduce il suo valore da d_{ij} a $d_{ij} - \Delta$ mentre sugli archi del ciclo che si forma con l'aggiunta dell'arco relativo a questa variabile i flussi sono aggiornati secondo regole inverse rispetto a quelle viste in precedenza (il flusso viene diminuito di Δ lungo gli archi attraversati secondo il proprio verso dal ciclo ed incrementato di Δ lungo gli archi attraversati dal ciclo in verso opposto al proprio).

Fino a quanto cresce Δ?

- una variabile in base si annulla (in tal caso essa uscirà dalla base e diventerà fuori base a valore nullo, cioè passerà in N_0, mentre in B entrerà la nostra variabile fuori base);
- una variabile in base raggiunge il proprio limite superiore (in tal caso essa uscirà dalla base e diventerà fuori base a valore pari al proprio limite superiore, cioè passerà in N_1, mentre in B entrerà la nostra variabile fuori base);

- la variabile fuori base che stiamo cercando di far entrare in base raggiunge il proprio limite superiore (se era a valore nullo) o si annulla (se era a valore pari al proprio limite superiore): in tal caso la base B non cambia, cambia solamente lo stato della variabile fuori base che abbiamo tentato di far entrare in base, la quale passa da fuori base a valore nullo a fuori base a valore pari al proprio limite superiore (cioè da N_0 in N_1) o viceversa.

Nell'esempio

Se cerchiamo di far entrare in base x_{14} abbiamo le seguenti variazioni nei valori delle variabili

$$x_{12} = 5 + \Delta \quad x_{24} = 5 + \Delta \quad x_{13} = 0 \quad x_{35} = 0$$

$$x_{34} = x_{54} = 0 \quad x_{14} = 3 - \Delta$$

con un valore dell'obiettivo pari a $85 - 7\Delta$.

Continua

Si vede che Δ può crescere al massimo fino al valore $\bar{\Delta} = 3$ (in corrispondenza di tale valore la variabile x_{14} si annulla).

Quindi la base non cambia ma cambia lo stato della variabile x_{14} che da fuori base al proprio limite superiore passa a fuori base a valore nullo.

La nuova soluzione di base è la seguente:

$$x_{12} = 8 \quad x_{24} = 8 \quad x_{13} = 0 \quad x_{35} = 0 \quad x_{34} = x_{54} = x_{14} = 0$$

con un valore dell'obiettivo pari a 64. In questo momento abbiamo:

$$B^1 = \{x_{12}, x_{13}, x_{24}, x_{35}\} \quad N_0^1 = \{x_{14}, x_{34}, x_{54}\} \quad N_1^1 = \emptyset.$$

Algoritmo del simplesso

Una volta effettuato un cambio di base (o spostato una variabile da N_0 a N_1 o viceversa) i passi dell'agoritmo vengono ripetuti e si procede fino ad arrivare ad una tripla (B^k, N_0^k, N_1^k) che soddisfa la condizione di ottimalità.

NB Si noti che se le capacità d_{ij} sono tutti valori finiti, il problema non potrà mai avere obiettivo illimitato.

Nell’esempio

Coefficienti di costo ridotto (in realtà non essendo cambiata la base essi rimangono identici a prima):

$$\bar{c}_{14} = 7 \quad \bar{c}_{34} = -4 \quad \bar{c}_{54} = -1.$$

Condizione di ottimalità non soddisfatta (i coefficienti di costo ridotto di x_{34} e x_{54}, entrambe in N_0, sono negativi).

Continua

Entra in base x_{34}. Abbiamo le seguenti variazioni nei valori delle variabili:

$$x_{12} = 8 - \Delta \quad x_{24} = 8 - \Delta \quad x_{13} = \Delta \quad x_{35} = 0$$

$$x_{34} = \Delta \quad x_{54} = x_{14} = 0$$

con un valore dell'obiettivo pari a $64 - 4\Delta$.

Si vede che Δ può crescere al massimo fino al valore $\bar{\Delta} = 2$ (in corrispondenza di tale valore la variabile x_{34} raggiunge il proprio limite superiore).

Continua

Quindi la base non cambia ma cambia lo stato della variabile x_{34} che da fuori base a valore nullo passa a fuori base al proprio limite superiore. La nuova soluzione di base è la seguente:

$$x_{12} = 6 \quad x_{24} = 6 \quad x_{13} = 2 \quad x_{35} = 0$$

$$x_{34} = 2 \quad x_{54} = x_{14} = 0$$

con un valore dell'obiettivo pari a 56.

In questo momento abbiamo:

$$B^2 = \{x_{12}, x_{13}, x_{24}, x_{35}\} \quad N_0^2 = \{x_{14}, x_{54}\} \quad N_1^2 = \{x_{34}\}.$$

Continua

Iteriamo la nostra procedura.

Coefficienti di costo ridotto (in realtà non essendo cambiata la base essi continuano a rimanere identici a prima):

$$\overline{c}_{14} = 7 \quad \overline{c}_{34} = -4 \quad \overline{c}_{54} = -1.$$

Condizione di ottimalità non soddisfatta.

Continua

Entra in base x_{54}.

Se cerchiamo di far entrare in base x_{54} abbiamo le seguenti variazioni nei valori delle variabili

$$x_{12} = 6 - \Delta \quad x_{24} = 6 - \Delta \quad x_{13} = 2 + \Delta$$

$$x_{35} = \Delta \quad x_{54} = \Delta \quad x_{34} = 2 \quad x_{14} = 0$$

con un valore dell'obiettivo pari a $56 - \Delta$.

Si vede che Δ può crescere al massimo fino al valore $\bar{\Delta} = 5$ (in corrispondenza di tale valore la variabile in base x_{13} raggiunge il proprio limite superiore).

Continua

Ora la base cambia in quanto in essa la variabile x_{13} viene sostituita dalla x_{54}.

La nuova soluzione di base è la seguente:

$x_{12} = 1 \quad x_{54} = 5 \quad x_{13} = 7 \quad x_{35} = 5 \quad x_{34} = 2 \quad x_{24} = 1 \quad x_{14} = 0$

con un valore dell'obiettivo pari a 51.

In questo momento abbiamo:

$$B^3 = \{x_{12}, x_{24}, x_{54}, x_{35}\} \quad N_0^3 = \{x_{14}\} \quad N_1^3 = \{x_{13}, x_{34}\}.$$

Continua

Coefficienti di costo ridotto:

$$\bar{c}_{14} = 7 \quad \bar{c}_{34} = -3 \quad \bar{c}_{13} = -1.$$

Da essi possiamo concludere che la soluzione di base ammissibile attuale è soluzione ottima (unica) del nostro problema.

Soluzione di base ammissibile

Il problema di stabilire se esistono o meno soluzioni ammissibili del problema si risolve con una procedura a due fasi del tutto analoga a quella vista per il problema senza vincoli di capacità sugli archi (nel problema di I fase agli archi incidenti sul nodo aggiuntivo q si assegna capacità infinita, mentre quelli originari mantengono la loro capacità).