Ricerca Operativa

Contents

1 Nozioni base

Def. Problema Inammissibile
Il problema di ottimizzazione (PO) si dice **inammissibile** se $S = \emptyset$, cioè se non esistono soluzioni ammissibili.

Def. Problema Illimitato
Il problema di ottimizzazione (PO) si dice **illimitato** (inferiormente) se comunque scelto un valore $M > 0$ esiste un punto $x \varepsilon S$ tale che $f(x) < -M$

Def. Ottimizzazione
Ottimizzazione significa massimizzazione o minimizzazione di una funzione di un insieme di variabili, soggetta ad alcuni vincoli sui possibili valori che tali variabili possono assumere.

Def. Modello Matematico
Il modello matematico è una descrizione, per mezzo di relazioni di tipo logico-matematico, del problema di interesse. Il problema viene rappresentato attraverso un insieme di dati noti e variabili incognite che interagiscono in un unico sistema di relazioni.

Def. **Variabili Decisionali, Funzione obiettivo, Vincoli**
`Le variabili decisionali` sono quantità su cui è possibile intervenire e che sono oggetto di decisione.

`La funzione obiettivo` è la quantità che si vorrebbe massimizzare o minimizzare espressa come funzione delle variabili.

`I vincoli` sono restrizioni sui valori che le variabili decisionali possono assumere

Def. **Soluzione Ottima**
Si dice che il problema di ottimizzazione (PO) ammette **soluzione ottima** (finita) se esiste un $x^* \varepsilon S$tale che risulti $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \varepsilon S$. Il punto $x*$ è detto soluzione ottima o minimo globale e il corrispondente valore $f(x^*)$ di dice valore ottimo.

Assioma Continuità
Una variabile di decisione può assumere tutti i valori reali (nel suo intervallo di ammissibilità) e quindi le variabili posso avere valore frazionario. Una variabile può assumere un qualsiasi valore reale, quindi anche un valore intero ,ma non necessariamente.

Assioma Certezza
I valori dei parametri che definiscono un problema (input) sono considerati certi (veri) e quindi la significatività del modello e la sua soluzione sono strettamente legati ad essi. In una stesso modello, valori differenti dei parametri generano una diversa realizzazione dello stesso problema.

Assioma Proporzionalità
Il contributo di una variabile di decisione in ogni funzione è proporzionale secondo una costante moltiplicativa alla quantità rappresentata dalla variabile stessa

Assioma Additività
Il contributo di più variabili di decisione in ogni funzione è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile.

Def. **Funzione Lineare** Una funzione reale di n variabili reali si dice lineare se valgono le seguenti condizioni:

per ogni coppia di vettori reali x, y si ha: $f(x + y) = f(x) + f(y)$
per ogni vettore reale x e ogni scalare λ si ha: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Prop. **Funzione Lineare**
Una qualsiasi funzione lineare può essere scritta nella forma: $f(x) = c_1x_1 +$

$c_2x_2 + ... + c_nx_n = c^Tx$
con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ costanti reali.

Dim.

Una funzione della forma $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = c^Tx$ soddisfa sempre le condizione i) e ii) della definizione della funzione lineare.

Quindi sia $f(x)$ una funzione che soddisfa le condizione i) e ii) e sia $e_1, e_2, .., e_n$ la base canonica dello spazio vettoriale R^n per cui, per ogni x in R^n si ha:

$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$
Utilizzando proprietà di linearità si può scrivere: $f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = f(x_1e_1) + f(x_2e_2) + ... + f(x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n) = x_1c_1 + x_2c_2 + ... + x_nc_n$

Def. **Spazio Vettoriale**
Si definisce uno spazio vettoriale (o spazio lineare) di dimensione n (e si indica con S_n) un insieme di vettori in R^n chiuso rispetto alle operazioni di

1) Somma tra due vettori
2) Moltiplicazione di un vettore per uno scalare Lo stesso R^n è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Def. **Punto di Ottimo**
Il punto di Ottimo si trova nell'intersezione delle due rette che delimitano la regione in cui i vincoli sui vari requisiti del problema sono soddisfatti.

Lemma
Sia data la seguente famiglia di rette parallele

$a_1x_1 + a_2x_2 = c$ (equiv.$a^Tx = c$)

Con a_1 e a_2 reali fissati e c in R. Il vettore $a^T = (a_1, a_2)$ individua una direzione ortogonale alle rette della famiglia $a_1x_1 + a_2x_2 = c$ ed è orientato dalla parte in cui si trovano le rette della famiglia ottenute per valori crescenti di c, cioè dalla parte in cui ci si sposta dalla retta $a_1x_1 + a_2x_2 = c$ verso nel semipiano $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$.

Dim.

Dobbiamo dimostrare:
1) Il vettore $a^T = (a_1, a_2)$ individua una direzione ortogonale alle rette $a^Tx = c\varepsilon R$

Consideriamo un valore c fissato e due punti v e w appartenenti alla retta $a^T x = c$ tale che:

$a^T v = c$ e $a^T w = c$
Sottraendo si ottiene : $a^T (v - w) = 0 \Longrightarrow$ a è ortogonale al vettore (v-w)
Infatti si ha che $a^T (v - w) = 0 \iff cos\theta = 0 \iff \theta$ è di 90°

2) Fissato c, il vettore $a^T = (a_1, a_2)$ è orientato da $a^T x = c$ verso il semipiano $a^T x \geq c$

Consideriamo un valore c fissato e un punto y tale che $a^T y \geq c$ Si ha che : $a^T y \geq cea^T w = c$ Sottraendo si ottiene: $a^T (y - w) \geq 0 \Longrightarrow$ e (y-w) formano un angolo acuto Infatti si ha: $a^T (y - w) \geq 0 \iff cos\theta = 0 \iff \theta$ è $\leq 90°$

Def. **Intorno di punto x**
Sia x un punto di R^n e una distanza d (distanza euclidea), si definisce intorno di x di raggio $\varepsilon > 0$

L'insieme $N_\varepsilon\ (x) = \{$ y in $R^n : d(x, y) \leq \varepsilon\}$

Def. **Chiusura di un insieme S**
Sia dato un insieme S in R^n. Il punto x appartiene alla chiusura di S, cl(S), se

$S \cap N_\varepsilon\ (x) \neq \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$

Def. **Insieme Chiuso**
Dato un insieme S in R^n, S di dice chiuso se

S=cl(S)

Def. **Punto Interno**
Sia dato un insieme S in R^n. Il punto x appartiene all'interno di S, int(S), se

$N_\varepsilon(x)$ è contenuto in S per qualche $\varepsilon > 0$

Def. **Insieme Aperto**
Se S=int(S), allora S di dice aperto

Def. **Punto Di Frontiera**
Sia dato un insieme S in R^n. Il punto x appartiene alla frontiera di S, δS, se per ogni $\varepsilon > 0$

N_ε (x) contiene sia punti in S che punti fuori da S.

Def. **Semipiano**
Sia $a_1x_1 + ... + a_nx_n \leq b$

$S = \{$ x in $R^n : a_1x_1 + ... + a_nx_n \leq b\}$

Oppure

$S = \{$ x in $R^n : a^Tx \leq b\}$

Def. **Iperpiano**
Sia $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$

$H = \{$ x in $R^n : a_1x_1 + ... + a_nx_n = b\}$
Oppure $H = \{$ x in $R^n : a^Tx = b\}$

2 Programmazione Lineare

Def. **Combinazione lineare**
Un vettore $b \varepsilon R^n$ è combinazione lineare dei vettori $a_1, .., a_k$ in R^n se esistono k reali $\lambda_1, ..., \lambda_k$tali che

$b = \sum_{i=1,..,k} \lambda_i a_i$
Se $\lambda_1, ..., \lambda_k = 1 \rightarrow$ la combinazione si dice **affine**
Se $\lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0 \rightarrow$ la combinazione si dice **conica**
Se $\lambda_1, ..., \lambda_k = 1$ e $\lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0 \rightarrow$ la combinazione si dice **convessa**

Def. **Combinazione Convessa di Due Vettori**
Dati x,y, in R^n e un numero reale α, $0 \leq \alpha \leq 1$, la combinazione convessa di x e y è il vettore:

$z = \alpha x + (1 - \alpha)y$

Def. **Segmento**
Dati x,y, in R^n e il segmento di estremi x e y, $[xy]$, è l'insieme dei punti z che sono combinazioni convesse di x e y, cioè:

$[xy] = \{$ z in $R^n : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\}$

Def. **Insieme Convesso**
Un insieme C in R^n è convesso se comunque presi x e y in C, si ha che:

$\alpha x + (1 - \alpha)y$ appartiene a c per ogni $0 \leq \alpha \leq 1$ (oppure [xy] è tutto contenuto in C)

Prop. **Semipiano è un Insieme Convesso**
Un semipiano S in R^n è un insieme convesso

Dim.

Per qualsiasi x,y in S = { x in R^n : $a_1x_1 + ... + a_nx_n \leq b\}$ e z in [xy], si ha che:

$a^Tz = a^T[\alpha x + (1-\alpha)y] = \alpha a^Tx + (1-\alpha)a^Ty \leq \alpha b + (1-\alpha)b = b$

Prop. **Intersezione Insiemi Convessi è Convessa**
Ogni intersezione insiemi convessi è convessa.

Dim.

Siamo $A_1, \ldots, A_k$ k insieme e siano x e y due vettori appartenenti alla loro intersezione.
Siccome tutti gli insiemi A_i ,i=1,. . . ,k , sono convessi, il segmento [xy] è interamente contenuto in ciascuno di essi e, dunque, nella loro intersezione.

Def. **Poliedro**
Un insieme P in R^n si dice poliedro se esiste una matrice A_{mxn} reale e un vettore b_m reale tali che:

P = { x in R^n : $A_{mxn}x \geq b_m\}$ = { x in R^n : $a_i^Tx \geq b_i, i = 1, .., m\}$

Un insieme P in R^n si dice **poliedro** se è l'intersezione di un numero finito di semispazi.

Def. **Poliedro in Forma Standard** Data A_{mxn} reale con $m \leq n$ e R(A)=m un poliedro in Forma Standard è definito:

$P = \{$x in $R^n : A_{mxn}x = b_m, x \geq 0\}$

Def. **Punto Intermedio**
Sia x un punto di P in R^n.
Il punto x si dice **intermedio** se esistono due punti y e w in P, $y \neq w (\neq x)$:

$x = \alpha + (1-\alpha)w$ per qualche α in (0,1)

Def. **Punto Estremo**
Sia x un punto di P R^n. Il punto x si dice **punto estremo** di P se *non* è punto intermedio di P. In altre parole, se per due punti y e w in P, e α in (0,1) si ha sempre che:

$x = \alpha + (1-\alpha)w \Longrightarrow x = y = w$

Def. **Vertice**
Un punto x del poliedro P in R^n è un vertice di P se esiste un vettore c in R^n tale che

$c^T y > c^T x$ per ogni y in P,$y \neq x$ (S_H^+)

In altre parole, x vertice di P se esiste un iperpiano H, che interseca P solo nel punto x, rispetto al quale P si trova tutto in S_H^+ (o in S_H^-).
Quindi anche

$c^T y < c^T x$ per ogni y in P,$y \neq x$ (S_H^-)

Def. **Rette Contenute Nel Poliedro P**
Si dice che un poliedro P contiene una retta se esiste un punto x in P e un vettore $d \neq 0$ in R^n :

$x + \lambda d$ appartiene a P per ogni λ reale

Def. **Semirette Contenute Nel Poliedro P**

Si dice che un poliedro P contiene una semiretta se esiste un punto x in P e un vettore $d \neq 0$ in R^n:

$x + \lambda d$ appartiene a P per ogni $\lambda \geq 0$

Def. **Insieme Limitato**
Un insieme S in R^n è **limitato** se esiste $M > 0$ tale che per ogni x in S si ha:

$|x_i| < M$ i=1,. . . ,n

Def. **Politopo**
Un Poliedro P in R^n si dice **politopo** se è chiuso e limitato

Un politopo non contiene né rette né semirette.

Def. **Diseguaglianza Valida**
Una diseguaglianza $a^T x \leq b$ si dice valida per un poliedro $P \subseteq R^n$ se:

$P \subseteq S = \{x \ \varepsilon \ R^n : a^T x \leq b\}$

Def. **Faccia di un poliedro**
Dato un poliedro $P \subseteq R^n$ e un suo iperpiano di supporto $H = \{x \varepsilon R^n : a^T x = b\}$, l'insieme

$F = H \cap P$ si dice **faccia di P**. La faccia di un poliedro è un poliedro.

Def. **Dimensione Faccia**
La dimensione di una faccia F di $P \subseteq R^n$ è uguale a n-numero di vincoli linearmente indipendenti attivi per tutti gli x in F.

In un vertice sono attivi n vincoli linearmente indipendenti $\rightarrow$ Il vertice è una faccia di P di dimensione 0 = n - n

Se una faccia ha dimensione 1 può essere:
Segmento $\rightarrow$ faccia è detta spigolo
Semiretta $\rightarrow$ faccia è detta raggio estremo
Retta $\rightarrow$ faccia è detta retta estrema
Se dim(F)=dim(P)-1 si dice che F è una faccia massimale di P

Def. **Vincolo Attivo**
Dato un vincolo $a_i^T x \geq b_i$, se per un vettore $\bar{x}$ in R^n si ha $a_i^T x = b_i$ allora si dice che il vincolo $a_i^T x \geq b_i$ è **attivo** in $\bar{x}$

Dato un poliedro $P = \{$ x in $R^n : A_{mxn} x = b : m, x \geq 0\} = \{a_i^T x \geq b_i, i = 1, ..., m\}$ e un punto $\bar{x}$ **in P** indichiamo con l(x) l'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x}$ cioè

$l(\bar{x}) = \{i \varepsilon \{1, ..., m\} : a_i^T x = b_i\}$

Lemma Fondamentale
Siano dati i vettori $a_1, \ldots, a_k$ in R^n. Se il numero di vettori linearmente indipendenti tra $a_1, \ldots, a_k$ è strettamente minore di n, allora esiste un vettore d in R^n tale che:

$a_i^T d = 0 \ i = 1, \ldots, k$

Dim.

Siccome il numero di vettori linearmente indipendenti $a_1, \ldots, a_k$ è strettamente minore di n, la matrice A_{kxn} che ha per righe i vettori $a_1, \ldots, a_k$ ha rango R(A) strettamente minore di n.

Allora le n colonne di A $a^1, \ldots, a^n$,sono linearmente dipendenti, cioè esistono $d_1, \ldots, d_n$ reali non tutti nulli, tali che:

$a^1 d_1 + ... + a^n d_n = 0_k$
Riscrivendolo rispetto alle righe: $a_i^T d = 0 \; i = 1, \ldots, k$

Th. Caratterizzazione dei punti estremi/vertici di un poliedro P
Siano dati un poliedro $P = \{$x in $R^n : A_{mxn} x = b_m\}$ e un punto x in P. Il punto x è un punto estremo di P se e solo se esistono n righe $a_i \; i = 1, \ldots, n$ tra me m della matrice A tali che:

i appartiene a l(x) (il vincolo i è attivo in x)
$a_i \; i = 1, \ldots, n$ sono linearmente indipendenti

Dim.

1) Necessità

Utilizzando la dimostrazione per assurdo:

Ipotesi : $x \varepsilon$P è un punto estremo di P
Tesi che ci siano n vincoli linearmente indipendenti in l(x) Per semplicità in questo teorema assumiamo $|l(x)| = n$

Più in generale si può avere $|l(x)| > n$, il risultato del teorema rimane valido anche per questo caso più generale

Supponiamo quindi che per assurdo che il numero k di vincoli linearmente indipendenti in l(x) sia $k < n$. Allora per il Lemma Fondamentale esiste d in R^n, $d \neq 0$ tale che $a_i^T d = 0 \; iinl(x)$

Consideriamo i due vettori y e z in R^n definiti come segue per $\varepsilon > 0$:

$y = x - \varepsilon d$
$z = x + \varepsilon d$
Con $y \neq z$

Dimostriamo che, per un ε sufficientemente piccolo y e z sono punti di P, verificando prima i vincoli attivi in x e poi quelli non attivi in x.
Per i in l(x) si ha:

$a_i^T y = a_i^T (x - \varepsilon d) = a_i^T x - \varepsilon a_i^T d = a_i^T x = b_i$
$a_i^T z = a_i^T (x + \varepsilon d) = a_i^T x + \varepsilon a_i^T d = a_i^T x = b_i$

Per i non in l(x) e per ε sufficientemente piccolo si ha:

$a_i^T y = a_i^T (x - \varepsilon d) = a_i^T x - \varepsilon a_i^T d = a_i^T x \geq b_i$
$a_i^T z = a_i^T (x + \varepsilon d) = a_i^T x + \varepsilon a_i^T d = a_i^T x \geq b_i$

Notando che $a_i^T d \neq 0$ e $a_i^T x > b_i$
Allora y e z soddisfano $Ax \geq b$ e dunque appartengono a P

Verifichiamo ora che x è combinazione convessa di y e z :

$0.5y + 0.5z = 0.5(x - \varepsilon d) + 0.5(x + \varepsilon d) = x$

Dunque risulta y,z in P con $yneqz$ e x=0.5y+0.5z, che risulterebbe essere un punto intermedio di P

Ma questa è una contraddizione perché per Ipotesi era stato considerato x come punto estremo, questo implica che i vincoli attivi in x linearmente indipendenti sono n

2) Sufficienza

Ipotesi : $x\varepsilon P$ e ci sono n vincoli attivi linearmente indipendenti in l(x)
Tesi: x è un punto estremo di P

Siano a_i^T, i in l(x), n righe linearmente indipendenti.

Supponiamo per assurdo che x non sia un punto estremo di P e quindi che sia un punto intermedio (esistono altri punti in P). In particolare devono esistere due punti y e z in P , $y \neq z \neq x$, tali che

$x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ λ in (0,1)
Siccome y e z sono in P implica che:

$a_i^T y \geq b_i$ i=1,...,m

$a_i^T z \geq b_i$ i=1,...,m

In particolare, però, per i in l(x) deve valere :

$a_i^T y = b_i$
$a_i^T z = b_i$

Infatti, se cosi non fosse, per qualche i in l(x), avremmo:

$a_i^T y > b_i \implies a_i^T z > b_i \implies a_i^T x = a_i^T [\lambda y + (1 - \lambda)z] = \lambda a_i^T y + (1 - \lambda)z > \lambda b_i + (1 - \lambda)b_i = b_i$

Che ovviamente è impossibile perché sappiamo per ipotesi che per ogni i in l(x)

$a_i^T x = b_i$

Ritornando a sopra abbiamo che il sistema ammette 3 soluzioni $y \neq z \neq x$, ma ciò non è possibile dato che tale sistema ammette un'unica soluzione, questo implica che x è un punto estremo.

Se la matrice A_{mxn} ha un numero di righe linearmente indipendenti $< n \rightarrow$ P non ha punti estremi o vertici

Se $m < n \rightarrow$ P non ha vertici
Se $m \geq n \rightarrow$ Per ogni vertice x di P, esistono in l(x), n righe di A linearmente indipendenti che determinano il sistema di cui x è soluzione unica: $a_i^T x = b_i$ i in l(x) $\rightarrow$ P ha un numero di vertici al più pari a $\binom{m}{n}$

Th. Regione Ammissibile
Si consideri un poliedro $P = \{$ x in $R^n : A_{mxn}x = b_m\}$ con $m \geq n$ e $P \neq \emptyset$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) P non contiene rette
2) P ha almeno un vertice
3) Esistono n vettori tra a_i^T, i=1,. . . ,m linearmente indipendenti

Dim.

1) $\rightarrow$ 2)

Siccome $P \neq \emptyset$, consideriamo un x^0 in P e il corrispondente $l(x^0)$

2 CASI :

a) Esistono n righe a_i con i in $l(x^0)$ linearmente indipendenti $\rightarrow$ Per il teorema di caratterizzazione x^0 è un vertice di P
b) Il numero di righe a_i con i in $l(x^0)$ linearmente indipendenti è $k < n \rightarrow$ Per il Lemma esiste $d \neq 0$ in R^n tale che $a_i^T d = 0$ in in $l(x^0)$

Consideriamo allora la retta $x^0 + \lambda d, \lambda$ in R e si $z = x^0 + \lambda d$ un qualsiasi punto della retta, per ogni i in $l(x^0)$ si ha:

$a_i^T z = a_i^T (x^0 + \lambda d) = a_i^T x^0 + \lambda a_i^T d = a_i^T x^0 = b_i$

Cioè, tutti i vincoli attivi in x^0 rimangono in tutti i punti z sulla retta

Siccome per ipotesi P non contiene rette, deve esistere una riga a_j tra quelle non in $l(x^0)$ per cui il vincolo j è violato da qualche z lungo la direzione d.

Esistono $j \notin l(x^0)$ e $\lambda^* \in R$ tali che:

$a_j^T z^* = a_j^T(x^0 + \lambda^* d) = b_j$

Inoltre, possiamo dimostrare che la riga a_j non può essere ottenuta come combinazione lineare delle righe a_i con i in $l(x^0)$, cioè, a_i con i in $l(x^0)$ e a_j sono k+1 righe linearmente indipendenti.

Infatti, se per assurdo cosi non fosse, avremmo:

$a_j = \sum_{(i \ in \ l(x^0))} \mu_i a_i$

Con $\mu_i \in R$ per ogni i in $l(x^0)$ Ma, post-moltiplicando per d a destra e sinistra della relazione sopra: $a_j^T d = \sum_{(iinl(x^0))} \mu_i a_i^T d = 0$
E ciò nella (1) comporterebbe che:

$a_j^T z^* = a_j^T(x^0 + \lambda^* d) = a_j^T x^0 + \lambda^* a_j^T d = a_j^T x^0 = b_j$

Che ovviamente è impossibile perché sappiamo er ipotesi che il vincolo j non è attivo x^0

Siccome per ipotesi P non contiene rette, deve esistere una riga a_j tra quelle non in $l(x^0)$ per cui il vincolo j è violato da qualche z lungo la direzione d, cioè esiste λ^* reale fissato tale che:

$z = x^0 + \lambda d$ per valori $\lambda > \lambda^*$
$z^* = x^0 + \lambda^* d$

Esistono $j \notin l(x^0)$ e $\lambda^* \in R$ tali che:

$a_j^T z^* = a_j^T(x^0 + \lambda^* d) = b_j$

Inoltre, possiamo dimostrare che la riga a_j non può essere ottenuta come combinazione lineare delle righe a_i con i in $l(x^0)$, cioè, a_i con i in $l(x^0)$ e a_j sono k+1 righe linearmente indipendenti.

Spostandosi da x^0 al punto $z^* = x^0 + \lambda^* d$ si ha:

I vincoli attivi in x^0 rimangono attivi in z^*
Il vincolo j non attivo in x^0 è attivo in z^*
Il vincolo j è linearmente indipendente rispetto ai vincoli in $l(x^0)$

Il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in z^* aumenta rispetto a quelli in x^0 e si ha:

$|l(x^0)| = k < k+1 = |l(z^*)|$

A questo punto chiamando $x^1 = z^*$, si ripresentano per x^1 gli stessi due casi visti in precedenza per x^0:

2 CASI:

a) $k+1 = n \Longrightarrow$ esistono n righe a_i in $l(x^1)$ linearmente indipendenti e x^1 è un vertice di P.

b) $k+1 < n \Longrightarrow$ Si ripete per x^1 lo stesso procedimento visto per x^0 per individuare un nuovo punto x^2 e un vincolo j non in $l(x^1)$, ma in $l(x^2)$ e linearmente indipendenti da quelli in $l(x^1)$.

Dopo al più n passi si individua necessariamente un punto x^* con n vincoli in $l(x^*)$ linearmente indipendenti, cioè, per il teorema di caratterizzazione, un vertice di P $\Longrightarrow$ P ha almeno un vertice.

2) $\rightarrow$ 3)

Sia x il vertice di P. Sotto l'ipotesi 2), per il teorema di caratterizzazione, esistono n vincoli attivi x che corrispondono a n righe linearmente indipendenti tra m righe a_i^T ,i=1,2,...,m della matrice A $\Longrightarrow$ in A esistono n vettori a_i^T linearmente indipendenti.

3) $\rightarrow$ 1)

Siano $a_1, \dots, a_n$ le prime n righe di A

Supponiamo per assurdo che P contenga una retta, cioè esiste un $x \in P$ e una direzione d $\in R^n$, $d \neq 0$ tali che:

$z = x + \lambda d$ appartiene a P per ogni λ reale $\iff$ $a_i^T z = a_i^T(x + \lambda d) \geq b_i$ i=1,...,m $\lambda \in R$

Ma si deve anche avere: $a_i^T d = 0$ per ogni i=1,...,m

Infatti, se per assurdo cosi non fosse, avremmo:

$a_i^T d \neq 0$ per qualche i
Con la conseguenza che, in corrispondenza di questo a_i, per i punti sulla retta avremmo: $a_i^T z = a_i^T(x + \lambda d) = a_i^T x + \lambda a_i^T d \ \forall \lambda \in R$ e potremmo cosi sempre trovare un λ(positivo se $a_i^T d < 0$, negativo se $a_i^T d > 0$) per cui risulti $a_i^T z < b_i$, violando cosi il vincolo i-esimo.

Ciò è impossibile perché (sotto l'ipotesi assurda) tutti i punti z della retta sono in P (ammissibili).

Ma si deve avere $a_i^T d = 0$ per ogni i=1,...,m

In particolare si ha: $a_i^T d = 0$ per i=1,...,n con d in $R^n, d \neq 0$

Contraddizione: Perché ciò vorrebbe dire che $a_1, \dots, a_n$ sono linearmente dipendenti $\Longrightarrow$ P non può contenere rette.

Th. Fondamentale della PL (ottimalità)
Si consideri il problema di PL nella forma seguente (P1):

$min\ c^T x$
$Ax \geq b$

Supponiamo che il poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : Ax \geq b\}$ associato al problema (P1) non contenga rette (o, equivalentemente, abbia almeno un vertice).

Allora una ed una sola delle seguenti affermazioni è vera:

1) Il problema (P1) non è ammissibile (cioè $P \neq \emptyset$)
2) $P \neq \emptyset$ e il problema (P1) è illimitato inferiormente (OI)
3) $P \neq \emptyset$ e il problema (P1) ammette ottimo finito e almeno una delle soluzioni ottime di (P1) è vertice di P

Se il poliedro P è un politopo non vuoto, allora il problema di PL:

$min\ c^T x$
$Ax \geq b$

Ha un ottimo finito in un vertice
Se il problema di PL è della forma seguente (P2):

$min\ c^T x$
$Ax \geq b$
$x \geq I$
$x \leq u$

Con I e u i vettori in R^n, allora il poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : Ax \geq b, x \geq I, x \leq u\}$ che corrisponde alla regione ammissibile è un politopo e, per quello scritto sopra il problema (P2) ha ottimo finito in un vertice.

Th. 3
Sia dato un problema di PL nella forma (P1)

$min\ c^T x$
$Ax \geq b$

Con regione ammissibile $P = \{x \text{ in } R^n : Ax \geq b\}$. L'insieme delle soluzioni ottime di (P1) è un poliedro contenuto in P (indicato con Q)

Dim.

Se $P \neq \emptyset \implies Q = \emptyset$
Se P ha un ottimo illimitato si ha Q=∅
Se $P \neq \emptyset$ e esiste almeno una soluzione ottima x^* in Q con valore ottimo finito $z^* = z(x^*) = c^T x^*$

Sia $Q = \{$x in $R^n : c^T x = z^*\}$

Per ogni soluzione ottima di (P1) y: vale $z(y) = c^T y = z^* \rightarrow y$ in Q

Per ogni soluzione ottima di (P1) y: y è ammissibile → y in P $\implies$ Le soluzioni ottime del problema (P1) sono tutte e sole quelle dell'insieme: $Q = P \cap Q^*$

Q^* è un poliedro
P è un poliedro $\implies Q = P \cap Q^* = \{$ x in P: $c^T x = z^*\}$ è un poliedro contenuto in P

Def. **Forma Standard**
Un sistema lineare si dice in forma standard (FS) se:

Tutte le variabili sono soggette a vincoli di non negativi

Tutte le altre relazioni del sistema sono equazioni $\implies$ Un problema di PL si dice in Forma Standard se il suo sistema di vincoli (lineare) è in forma standard.

La Forma Standard riguarda solo la forma del sistema dei vincoli e non la funzione obiettivo.
In un problema di PL in forma standard la funzione obiettivo mantiene la sua forma originale. Infatti:

La sostituzione di una variabile libera x_j con la coppia di variabili non negative y_j, z_j non altera la funzione obiettivo
Ogni variabile slack aggiunta ha un coefficiente nullo nella funzione obiettivo

Proprietà Forma Standard 1)

$min\ c^T x\ min c^T x$

$a_i^T x \geq b_i$ i=1,2,...,m $\iff$ $a_i^T x - s_i = b_i$ i=1,2,...,m
$x \geq 0, s \geq 0$

2)

$a_i^T x = b_i \iff s_i = a_i^T x - b_i = 0 \iff a_i^T x - s_i = b_i$

3)

$a_i^T x > b_i \iff s_i = a_i^T x - b_i > 0 \iff a_i^T x - s_i = b_i$

Def. Forma Canonica Ammissibile (FCA)
Un sistema lineare con m equazioni e n variabili si dice in forma canonica ammissibile se :

Tutte le variabili sono soggette a vincoli di non negatività
Tutte le altre relazioni del sistema sono equazioni

Esiste un sottoinsieme di m variabili ciascuna univocamente associata a un vincolo (con coefficiente 1 in quel vincolo e 0 altrove)
Tutti i termini noti sono non negativi

La Forma Canonica Ammissibile e la Forma Standard coincidono quando i vincoli del problema sono nella forma:

$Ax \leq b$
$x \geq 0, b \geq 0$

Th. Esistenza FCA
Dato un problema in Forma Standard (FS)

Esiste FCA equivalente a al Problema dato $\iff$ Esiste una soluzione di FS a componenti non negative $P \neq \emptyset$

Def. SBA
Sia $S = \{$ x in $R^n : A_{mxn}x_n = b_m, x \geq 0\}$, con $m < n$ e R(A)=m. Un punto x è una SBA di S se e solo se, in corrispondenza di una scelta di indici B in 1,...,m, A può essere decomposta in A_B e A_N in modo tale che $x = [x_B, x_N]$ con

$x_B = A_B^{-1}$ e $x_N = 0$

Dove A_B^{-1} è una matrice quadrata di ordine m invertibile e tale che $A_B^{-1}b \geq 0$

Th.
Sia P un poliedro non vuoto. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

x è un vertice di P
x è un punto estremo di P
x è una SBA del sistema S in FS equivalente a P

Def. Matrice di base
Sia $A \in R^{mxn}$ la matrice dei coefficienti di un poliedro in forma standard, e sia no $\{a_1, \ldots, a_n\}$ insieme delle sue colonne. Una sottomatrice $B = (a_(j_1), \ldots, a_(j_m)) \in R^{mxn}$ di A non singolare (determinante $\neq 0$) è detta matrice di base di A.

Def. Matrice colonne fuori base
Data una matrice di base $B = (a_(j_1), \ldots, a_(j_m))$ di A:

La sottomatrice $N = (a_(j_(m+1)), \ldots, a_(j_n)) \in R^{mxn}$ di A è detta matrice delle colonne fuori base di A

L'insieme $I_B = \{j_1, \ldots, j_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ viene detto insieme degli indici di base
L'insieme $I_N = \{j_(m+1), \ldots, j_n\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ viene detto insieme degli indici fuori base

Le componenti $x_i \in I_B$ vengono dette variabili di base
Le componenti $x_i \in I_N$ vengono dette variabili fuori base

Ogni vettore $x \in R^n$ può essere partizionato in due sottovettori:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ . \\ . \\ . \\ x_{j_m} \end{pmatrix} \in R^m \tag{1}$$

vettore delle variabili di base

$$x_N = \begin{pmatrix} x_{j_{m+1}} \\ . \\ . \\ . \\ x_{j_n} \end{pmatrix} \in R^{n-m} \tag{2}$$

vettore delle variabili fuori base

Def. Soluzione di Base
Data una matrice di base B di A. Un vettore x$\bar{x}$ è detto soluzione di base del sistema Ax=b se i suoi sottovettori $\bar{x}_B$ e $\bar{x}_N$ sono tali che:

$\bar{x}_B = B^(-1)b$
$\bar{x}_N = 0_{n-m}$

Def. **Matrice di base ammissibile**
Dato un problema in forma standard:

$min\ c_B^T x_B c_N^T x_N$
$B x_B N x_N b$
$x_B \geq 0_m, x_N \geq 0_{n-m}$

una matrice di base B di A è detta matrice di base ammissibile se risulta:

$B^{-1}b \geq 0_m$

Def. **SBA Degenere**
Una SBA si dice degenere se più di n-m variabili sono uguali a 0. In pratica, oltre alle variabili $\bar{x}_N$ in un SBA degenere sono nulle anche alcune delle variabili $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$

SBA degenere $\iff$ vertice degenere

Th. **Unica sola base ammissibile**
Se una soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ è non degenere allora esiste una ed una sola base ammissibile B tale che:

$\bar{x}_B = B^{-1}b$
$\bar{x}_N = 0_{n-m}$

Dim.
Sia B e sia $\tilde{x}$ una base ammissibile di A diversa da B e sia $\tilde{x}$ la soluzione di base associata a $\tilde{B}$ ovvero:

$x\tilde{B} = \tilde{B}^{-1}b$
$x\tilde{N} = 0_{n-m}$

Poiché $B \neq \tilde{B}$ abbiamo che almeno una colonna di A, ad esempio l'i-esima, appartiene a B e non a $\tilde{B}$. Di conseguenza, i $\in I_{\tilde{N}}$ che implica $\tilde{x}_i$=0; mentre i $\in I_{\tilde{B}}$ implica $\tilde{x}_i$ >0 poiché $\tilde{x}_i \neq \bar{x}$. Abbiamo quindi che ogni base ammissibile diversa da B produce una soluzione ammissibile diversa da $\bar{x}$ ed il teorema segue.

Th. **Criterio di ottimalità**
Data un base ammissibile B della matrice A del problema (5.24) . Se γ il vettore dei costi ammissibili non è negativo allora la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla base B è ottima

Dim.

Si deve dimostrare che, se il vettore dei coefficienti ridotti è non negativa, allora per un qualunque vettore ammissibile x risulta

$c^T x \geq c^T \bar{x}$

Sia x un qualsiasi punto ammissibile si ha

$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$

Ricordando : $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$ si ha

$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N$

Ma per ipotesi si ha che $\gamma \geq 0$ da cui si ottiene:

$c^T x \geq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T 0_{n-m} = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}$

Per il teorema appena descritto, la soluzione che risulta essere ottima è anche l'unica.

Th. Vertice non degenere e Criterio di ottimalità
Data un base ammissibile B della matrice A del problema (5.24) . Se la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla base B è una soluzione ottima e se è un vertice non degenere allora:

$\gamma = c_N + (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m}$

Th. Criterio di Illimitatezza
Data un base ammissibile B della matrice A del problema (5.24). Se per qualche indice i $\in \{1, \ldots, n-m\}$ abbiamo che

i) $\gamma_i < 0$
ii) La colonna i-esima della matrice $(B^{-1}N)$ non è tutto positiva, cioè $B^{-1}N)_i \leq 0_m$ allora il problema 5.24 è illimitato inferiormente.

Se entrambi i criteri falliscono $\{i \in \{1, ..., n-m\}\} \neq \emptyset$ (ottimalità) e $\{k \in \{1, ..., n-m\}\} \neq \emptyset : \pi_{kh} > 0$ per $\gamma_k < 0$ il metodo del simplesso cerca di costruire una nuova soluzione di base ammissibile del problema (5.24), cioè un punto

$$\tilde{x} = \begin{cases} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{cases}$$

Idea metodo del simplesso è quella di modificare una sola componente del vettore x_N, ad esempio l'h-esima (ricordando la definizione di x_N si ha che $x_{N_h} = x_{j_{m+h}}$, portandola da zero ad un valore ρ. Formalmente viene considerata la seguente semiretta di punti:

$$x(\rho) = \begin{cases} x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho B^{-1}Ne_h \\ x_N(\rho) = \rho e_h \end{cases}$$

Dove ρ è un numero reale non-negativo e e_h è l'h-esimo vettore unitario con n-m componenti e l'espressione del sottovettore x_B (ρ) è data dalla 5.26 che nasce dalla necessità di soddisfare i vincoli di uguaglianza originario.

Th. Scelta indice h
Data una matrice di base ammissibile B del problema 5.24. Sia $\bar{x}$ la soluzione di base ammissibile associata e sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice h $\in \{1, \ldots, n-m\}$ è tale che

$\gamma_h \leq 0$

Allora il punto x(ρ) definito sopra con $\rho \geq 0$ ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello di $\bar{x}$, cioè

Dim.

Utilizzando espressione di x_B (ρ) e x_N (ρ) date dal N.B si ha

$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \rho\gamma^T e_h$

Ricordando che $\gamma^T e_h = \gamma_h$ e che per ipotesi $\gamma_h \leq 0$ si ottiene:

$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \rho\gamma_h \leq c_B^T B^{-1}b = c_B^T \bar{x}_B c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}$

E quindi che il valore della funzione obiettivo in $x(\rho)$ è minore o uguale al valore della funzione obiettivo in $\bar{x}$.

Th. Scelta di ρ
Data una matrice di base ammissibile B del problema 5.24. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h \leq 0$ sia $\bar{\rho}$lo scalare dato

$\rho = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{i=1,\ldots,m}\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{kh}}\}$

Allora i punti $x(\rho)$ con $\rho \in [0, \bar{\rho}]$ sono punti ammissibili per il problema 5.24.

Th. Criterio del rapporto minimo
Data una matrice di base ammissibile $B = (a_{j_i}), ..., a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, ..., a_{j_m})$

del problema 5.24. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h \leq 0$ sia $\bar{\rho}$ lo scalare e k indice dati da:

$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{i=1,...,m}\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{kh}}$

Allora , il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ è una soluzione di base ammissibile del problema 5.24 e la matrice di base ammissibile $\tilde{B}$ associata è data da:

$\tilde{B} = (a_{j_i}), ..., a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, ..., a_{j_m}$

Nuova Forma Canonica:

$\min c^T x$
$I_m x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$
$x_B \geq 0_m$
$x_N \geq 0_{n-m}$

Per il criterio del rapporto minimo:

$\min c^T x$
$I_m x_{\tilde{B}} + \tilde{B}^{-1} \tilde{N} x_{\tilde{N}} = \tilde{B}^{-1} b$
$x_{\tilde{B}} \geq 0_m$
$x_{\tilde{B}} \geq 0_{n-m}$

Matrice di pivot:

$M = (\pi_h | \pi_1 ... \pi_{h-1} e_k \pi_{h+1} ... \pi_{n-m} | B^{-1} b)$

Si parte dalla matrice M e si effettua operazione di pivot sull' elemento π_{kh}

a) Si divide la riga k-esima di m per π_{kh}
b) Si somma a ciascuna riga i-esima di M (con $i \neq k$), la riga k-esima ottenuta al precedente punto (a) moltiplicata per elemento $-\pi_{kh}$ ottenendo cosi:

$M = (e_k | \tilde{B}^{-}1 \tilde{N} | \tilde{B}^{-1} b)$

Th. Convegenza del metodo del simplesso
Se nell'applicazione del metodo del simplesso non viene mai generata due volte la stessa base (cioè se nessuna base si ripete nella sequenza delle basi prodotte dal metodo), allora esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza prodotta dal metodo soddisfa il criterio di ottimalità o quello di limitatezza.

Dim.

Come abbiamo più volte osservato, ad ogni iterazione, se i criteri di arresto o di limitatezza non sono verificati, il metodo è in grado di generare una nuova base ammissibili differente da quella corrente. D'altra parte, siccome le basi sono in numero finito, e abbiamo fatto l'ipotesi che non ci siano ripetizioni, dopo un numero finito di passi (pari al più al numero di basi ammissibili distinte del problema) non potranno più essere generate basi diverse da tutte le precedenti. Dunque, necessariamente, o il criterio di ottimalità o quello di limitatezza devono essere soddisfatti.

Def. **Problema Primale e Problema Duale**
Dato un problema di PL (detto Primale) esiste un altro problema di PL, univocamente associato al problema primale e detto problema Duale.

(Primale/Duale)

$\min c^T x$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

$\Longleftrightarrow$

(Duale/Primale)

$\max y^T b$
$A^T y \leq c$
$y \geq 0$

Le n variabili associate al problema "min" saranno il numero di vincoli nel problema "max" e gli m vincoli del problema "min" saranno numero di variabili nel problema "max".

Se ho un problema primale nella forma max, formulare il problema duale significo cercare upper bound del valore ottimo del primale $c^T x^*$, senza risolvere il problema primale.

Le disequazioni di un problema primale sono associate a varabili non negative, le equazioni sono associate a variabili libere.

Th. **Dualità in Forma Debole**
Consideriamo la coppia primale duale canonica

(Primale) - P

$\min c^T x$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

$\Longleftrightarrow$

(Duale) - D

$\max y^T b$
$A^T y \leq c$
$y \geq 0$

Comunque prese due soluzioni x e y, rispettivamente ammissibili per P e D, si ha: $y^T b \leq c^T x$

Dim.

Consideriamo x e y ammissibili per P e per D (generiche)

x ammissibile per P $\rightarrow Ax \geq b \rightarrow y^T Ax \leq y^T b$

. $x \geq 0$

y ammissibile per D $\rightarrow A^T y \leq c \rightarrow y^T Ax \leq c^T x$

. $y \geq 0$

$\rightarrow y^T b \leq y^T Ax \leq c^T x$

Una qualsiasi soluzione ammissibile y di D genera un lower bound (finito) $y^T b$ per la funzione obiettivo di P e ,viceversa una qualsiasi soluzione ammissibile x di P genera una upper bound (finito) $c^T x$ per la funzione obiettivo di D.

Corollario 1 (Dualità in forma debole)
Se P è illimitato allora il problema D non è ammissibile.
Se D è illimitato allora il problema P non è ammissibile.

Dim.

a) Supponiamo per assurdo che P è illimitato e D ammissibile. Se y è una soluzione ammissibile di D, si ha che $\rightarrow$ per la dualità in forma debole $y^T b \leq c^T x$ per ogni x ammissibile di P
Per tanto $y^T b$ è un lower bound sul valore ottimo della funzione obiettivo di P che quindi risulta necessariamente limitato (contraddizione)
b) Analogo per questo punto

Corollario 2 (Dualità in forma debole) – Condizione sufficiente di ottimalità

Consideriamo la coppia primale duale canonica

(Primale) - P

$\min c^T x$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

$\Longleftrightarrow$

(Duale) - D

$\max y^T b$
$A^T y \leq c$
$y \geq 0$

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per P e sia $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per D.
Se $\bar{y}^T b = c^T \bar{x}$ allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime rispettivamente per P e per D.

Dim.

1)
$\rightarrow$ Per la dualità in forma debole $\bar{y}^T b \leq c^T x$ per ogni x ammissibile di P
Cioè $\bar{y}^T b$ è un lower bound per il valore della funzione obiettivo di P
$\rightarrow$ Allora $\bar{x}$ è ottima per P perché raggiunge il lower bound

2) Per la dualità in forma debole $y^T b \leq c^T \bar{x}$ per ogni y ammissibile di D
Cioè $c^T \bar{x}$ è un upper bound per il valore della funzione obiettivo di D
$\rightarrow$ Allora $\bar{y}$ è ottima per D perché raggiunge l' upper bound

Th. Dualità in forma forte
Consideriamo la coppia primale duale canonica:

(Primale) - P

$\min c^T x$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

$\Longleftrightarrow$

(Duale) - D

$\max y^T b$

$A^T y \leq c$
$y \geq 0$

E supponiamo che sia P che D siano ammissibili

Allora sia P che D hanno ottimo finito, x^* e y^* e si ha

$y^{*T} b = c^T x^*$

Th. Condizioni degli scarti complementari, di ortogonalità, di equilibrio
Sia x una soluzione ammissibile per P e y una soluzione ammissibile per D. Dove P e D:

(Primale) - P

$\min c^T x$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

$\Longleftrightarrow$

(Duale) - D

$\max y^T b$
$A^T y \leq c$
$y \geq 0$

Allora si ha:

x è ottima per P e $\iff$ $y^T(Ax - b) = 0$
y è ottima per D $\qquad (c - A^T y)^T x = 0$

$y^T(Ax - b) = 0 \rightarrow$ condizione di ortogonalità tra i vettori $y_{m,1}$ e $(Ax - b)_{m,1}$ e tra $x_{n,1}$ e $(c - A^T y)_{n,1}$

$(c - A^T y)^T x = 0 \rightarrow$ condizione degli scarti complementari

$s_{m,1} = (Ax - b)_{m,1} \rightarrow$ vettore delle m variabili slack del problema P

$t_{n,1} = (c - A^T y)_{n,1} \rightarrow$ vettore delle n variabili slack del problema D

Dim.

1) Sufficienza

Assumiamo per ipotesi che valgono le condizioni, allora dobbiamo dimostrare che x è ottima per P e y è ottima per D.

$$\begin{array}{ll} y^T(Ax-b)=0 \iff & y^TAx = y^Tb \\ (c-A^Ty)^Tx = 0 & c^Tx = y^TAx \end{array}$$

$\rightarrow y^Tb = c^Tx$ e quindi che x ottima per P e y ottima per D

2) Necessità

Assumiamo per ipotesi che x e y siano ottima, allora dobbiamo dimostrare che valgono le condizioni.

x è ottima per P e $\rightarrow$ per la dualità forte $\quad y^Tb = c^Tx$
y è ottima per D $\rightarrow$ per la dualità debole $\quad y^Tb \leq y^TAx \leq c^Tx$
$\rightarrow y^Tb = y^TAx = c^Tx$ e quindi che $y^T(Ax-b)=0$ e $(c-A^Ty)^Tx = 0$

Th. PL e sistemi lineari
Sia $\bar{x}$ ammissibile per P e $\bar{y}$ ammissibile per D e consideriamo il seguente sistema S

$$\begin{cases} c^Tx \leq y^Tb \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ A^Ty \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

i) Se ($\bar{x}$,$\bar{y}$) è soluzione del sistema $\rightarrow$ $\bar{x}$ è ottima per P e $\bar{y}$ è ottima per D
ii) Se $\bar{x}$ è una soluzione ottima di P e $\bar{y}$ è una soluzione ottima per D $\rightarrow$ ($\bar{x}$,$\bar{y}$) è una soluzione del sistema.

Dim.

1)Sufficienza

Se ($\bar{x}$,$\bar{y}$) è una soluzione del sistema, essa soddisfa in particolare la condizione $c^T\bar{x} \leq \bar{y}^Tb$

Inoltre, siccome x e y sono ammissibili, vale il teorema di dualità in forma debole $\bar{y}^Tb \leq c^T\bar{x}$

$\bar{y}^Tb = c^T\bar{x} \rightarrow$ è condizione sufficiente di ottimalità, di conseguenza $\bar{x}$ è ottima per P e $\bar{y}$ è ottima per D

2) Necessità

Se $\bar{x}$ è una soluzione ottima di P e $\bar{y}$ è una soluzione ottima per D, esse sono ammissibili e quindi le condizioni ($Ax \geq b, x \geq 0, A^T y \leq c, y \geq 0$) sono tutte soddisfatte.

Per il teorema di dualità in forma forte si ha $y^T b = c^T \bar{x}$ e quindi anche la condizione $c^T x \leq y^T b$ è soddisfatta

($\bar{x}$,$\bar{y}$) è una soluzione del sistema

Modelli Programmazione Lineare

Modelli Di Produzione Con Risorse Concorrenti e Alternative

Formulazione generale (senza limitazioni di produzione)

n diversi prodotti $P_1, P_2, ..., P_n$
m risorse $R_1, R_2, .., R_m$

a_{ij} i=1,...,m; j=1,...,n $\rightarrow$ quantità della risorsa R_i necessaria per fabbricare una unità del prodotto P_j

b_i i=1,...,m $\rightarrow$ quantità della risorsa R_i disponibile

c_n j=1,...,n $\rightarrow$ profitto netto unitario per il prodotto P_j

Modelli Di Produzione Con Risorse Concorrenti

Variabili non negative: $x_i \geq 0$, i=1,..,n.

Funzione Obiettivo: $z = c_1 x_1 + ... + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Vincoli Sulle Risorse:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{gathered}$$

Formulazione

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Modelli Di Produzione Con Risorse Alternative

Variabili non negative: $x_{ij} \geq 0$, i=1,..,m j=1,...,n

Funzione Obiettivo: $c_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + ... + c_n \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$

Vincoli Sulle Risorse:

$$\begin{gathered} a_{11}x_{11} + ... + a_{1n}x_{1n} \leq b_1 \\ a_{21}x_{21} + ... + a_{2n}x_{2n} \leq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_{m1} + ... + a_{mn}x_{mn} \leq b_m \end{gathered}$$

Formulazione

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Modello Di Miscelazione

n sostanze $S_1, ..., S_j, ..., S_n$
m componenti (contenuti nelle sostanze): $C_1, ..., C_i, ..., C_m$

costo unitario sostanza j c_j j=1,...,n

quantità minima (fabbisogno) componente i b_i i=1,...,m

quantità di componente i presente in una unità di sostanza j: a_{ij} i=1,...,m; i=1,...,n

Problema: Individure la miscela più economica delle sostanze (variabili) in modo tale da garantire che siano soddisfatti tutti i requisiti minimi relativi ai componenti $C_1, ..., C_i, ..., C_m$

$$\begin{gathered} min c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{gathered}$$

Formulazione

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Problema del Trasporto

Assenza di Giacenze - Domanda=Offerta

Si consideri un problema generale di trasporto in cui ci sono m origini e n destinazioni.

Si indichi la quantità disponibile all'origine i con a_i e la quantità richiesta alla destinazione j con b_j

Sia inoltre c_{ij} il costo unitario di trasporto dall'origine i alla destinazione j

$$\begin{array}{lll} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & & . \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i & & i = 1, 2, ..., m \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j & & j = 1, 2, ..., n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, ..., m & j = 1, 2, ..., n \end{array}$$

Formulazione

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Offerta$\geq$ Domanda

Si consideri un problema generale di trasporto in cui ci sono m origini e n destinazioni.

Si indichi la quantità disponibile all'origine i con a_i e la quantità richiesta alla destinazione j con b_j

Sia inoltre c_{ij} il costo unitario di trasporto dall'origine i alla destinazione j

$$\begin{array}{lll} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & & . \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i & & i = 1, 2, ..., m \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq b_j & & j = 1, 2, ..., n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, ..., m & j = 1, 2, ..., n \end{array}$$

Formulazione

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Metodo Del Simplesso

Metodo che permette di risolvere problemi di programmazione lineare in *forma standard*, cioè quelli nella forma:

$$\begin{gathered} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{gathered}$$

dove $x \in R^n$ e $b \in R^m$ e $A \in R^{nxm}$

Riformulo

$$\begin{gathered} \min c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ x_B \geq 0_m \\ x_N \geq 0_{m-m} \end{gathered}$$

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \rightarrow$ Soluzione di base
$\gamma = c_N(B^{-1}N)^T c_B \in R^{n-m} \rightarrow$ Vettore dei costi ridotti

1) Calcolo del vettore dei costi ridotti

$\gamma^T = c_N^T - c_N^T B^{-1} N$

2)Verifica del criterio di ottimalità

Se per ogni $i \in \{1, \ldots, n-m\}$ risulta $\gamma_i \geq 0$, allora la soluzione corrente $\bar{x}_B < B^{-1}b$,$\bar{x}_N = 0_{n-m}$ è ottima

3) Verifica del criterio di illimitatezza

Se per qualche $i \in \{1, \ldots, n-m\}$, tale che $\gamma_i < 0$, risulta $\pi_i < 0$, allora il problema è illimitato inferiormente

4) Costruzione di una nuova base ammissibile

Selezionare un indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$, l'h-esima varabile fuori base, ovvero $x_{j_{m+h}}$, entra in base

Calcolare l'indice k attraverso il criterio del rapporto minimo $\frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}}$

k-esima variabile in base, ovvero x_{j_k} , esce dalla base

Costruire le matrici $\tilde{B}$ e $\tilde{N}$ a partire da B e N scambiando fra loro l'h-esima colonna di N, ovvero $a_{j_{m+n}}$ con la k-esima colonna di B, ovvero a_{j_k}

Costruire i nuovi vettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$, $c_{\tilde{B}}$, $c_{\tilde{N}}$

5) Costruzione di una forma canonica

Calcolare le grandezze rilevanti, relative alla nuova base $\tilde{B}$, ovvero $\tilde{B}^{-1}b$ e $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ attraverso un'operazione di pivot, e definire la nuova forma canonica rispetto alla nuova base $\tilde{B}$ ed effettuare una nuova iterazione.

Regola di Bland

Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad `entrare` in base, si sceglie quella con indice h più piccolo. Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad `uscire` dalla base si sceglie quella con indice k più piccolo.

3 Programmazione Lineare Intera

Def. Rilassamento continuo
Un problema di PL associato al Problema di PLI dato è detto rilasciamento o rilassamento continuo.

Problema intero

$z = \max cx$
$Ax \leq b$
$x \geq 0$
x intero

Rilassamento continuo

$z_L = \max cx$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

La relazione tra ottimo del problema intero z e l'ottimo del rilassamento continuo z_L può essere sfruttata per la risoluzione del problema intero.

L'arrotondamento della soluzione ottima del rilasciamento continuo di PLI non corrisponde alla soluzione ottima del problema PLI

Def. **Rilassamento di problemi di ottimizzazione combinatoria**
Sia dato un problema (P) e il problema (PR):

(P)

z(P)=min f(x)
$x \in X$

(PR)

z(PR)= min g(x)
$x \in Y$

Con X,Y in R^n,f(x) e g(x) funzioni reali definite su R^n

Il problema (PR) si dice rilassamento di P se

1) $X \cap Y$, cioè la regione ammissibile (PR) più grande di quella di (P)
2) $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$, cioè sui punti ammissibili di (P) il valore della funzione obiettivo di (PR) non è mai peggiore di quello della funzione obiettivo di (P)

Analogamente per un problema di massimo

(P)

z(P)=max f(x)

$x \in X$

(PR)

z(PR)= max g(x)
$x \in Y$

Il problema (PR) si dice rilassamento di P se

1) $X \cap Y$
2) $g(x) \geq f(x)$

Corollario

Se (PR) ammette soluzioni ammissibili (Y $\neq$ 0) Allora il valore di ottimo di z(PR) di PR non può essere peggiore del valore ottimo z(P) di P $\rightarrow$ z(PR)$\leq$ z(P)

Dim.

Consideriamo un problema di minimo. Per *la condizione 2* del rilassamento abbiamo che

$g(x) \leq f(x)$ per ogni x $\in$ X
Siccome z(PR) è il valore ottimo del problema rilassato (PR) si ha

$z(PR) \leq g(x)$ per ogni x $\in Y \supseteq X$
Da cui $z(PR) \leq g(x) \leq f(x)$ per pgni x $\in$ X

$\implies z(PR) \leq z(P) = \min_{x \in X} f(x)$

Th.
Sia (PR) un rilassamento del problema (P) e sia $x^* \in Y$ è una soluzione ottima del problema rilassato (PR). Allora:

Se $x^* \in X$ e $f(x^*) = g(x^*) \implies x^*$ è soluzione ottima anche di (P)

Dim.

Sia (P) un problema di minimo e x^* una soluzione ottima di (PR) che soddisfa le ipotesi del teorema, cioè $x^* \in X$ e $f(x^*) = g(x^*)$

Supponiamo per assurdo che x^* non sia una soluzione ottima di (P)

Allora deve esistere un $\bar{x} \in X$ diverso da x^* tale che:

$f(\bar{x}) < f(x^*)$

Ma per ipotesi $f(x^*) = g(x^*)$ e dunque:

$f(\bar{x}) < f(x^*) = g(x^*)$

Ma siccome $\bar{x} \in X$, per la condizione 2 della definizione di rilassamento di ha anche

$g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) < f(x^*) = g(x^*)$

E ciò contraddice l'ipotesi che x^* sia una soluzione ottima per (PR)

Corollario Condizione sufficiente di ottimalità
Sia $x^* \in P_Q$ una soluzione ottima del rilassamento continuo (P_Q), non necessariamente a componenti intere.

Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile per il problema intero (Q)

Se $c^T\bar{x} = c^T x^*$ allora $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema intero (Q).

Def. **Soluzione parziale x^h**
Un vettore $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ è una soluzione parziale per il problema (Q) se una parte delle componenti è fissata (al valore 0 oppure 1, nel caso di binario), mentre le restati sono ancora incognite.

Al nodo radice h=0, tutte le componenti del vettore x sono incognite, nessuna componente è fissata.

Una operazione di branching al generico nodo h fissa una nuova componente nel vettore della soluzione parziale.

In una foglia, x^h non è più una soluzione parziale ma completa.

Def. **Completamento di x^h**
Sia x^h una soluzione parziale del problema (Q). Si definisce completamento di x^h ogni vettore binario $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ tale che:

$x_i = x_i^h$ per ogni i fissata in x^h

Def. **Infeasibility**
$(P_(Q^h))$ è non ammissibile $\rightarrow$ (Q^h) è non ammissibile

Def. **Solving**
$(P_(Q^h))$ è ammissibile e la sua soluzione ottima x^h è a componenti intere $\rightarrow$ x^h è ottima anche per (Q^h)

Def. **Bounding**
(P_{Q^h}) è ammissibile e la sua soluzione ottima x^h non è componenti intere e si ha $z(x^*) \geq z(\bar{x}^h) = z_{P_{Q^h}}$ (questo$\geq$nel caso di un problema di max,viceversa nel caso del minimo)$\rightarrow$ Tutte le soluzioni intere che potrebbero essere individuate procedendo con l'analisi nel sottoalbero radicato nel noto h sono sicuramente non migliori di x^*.

Def. **Branching**
(P_{Q^h}) è ammissibile e la sua soluzione ottima x^h non è componenti intere e si ha $z(x^*) \leq z(\bar{x}^h) = z_{P_{Q^h}}$ (questo$\leq$nel caso di un problema di max,viceversa nel caso del minimo) $\rightarrow$ Non è possibile giungere a conclusioni implicite sui completamenti possibili di x^h.

Modelli Programmazione Lineare Intera

Modello di Knapsack Binario - Modello di Capital Budgeting

Consideriamo il caso generale di n progetti i=1,2,...,n, ciascuno caratterizzato dal suo costo a_i e dal suo punteggio r_i e un budget totale B(peso totale, spazio totale disponibile).

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad \leftarrow \ \textit{punteggio totale} \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B \quad \leftarrow \ \textit{vincolo di budget} \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, ..., n \end{array}$$

Avere $x_i \in \{0,1\} \rightarrow$ vuol dire che per ogni progetto i, la decisione corrisponde a **selezionare** il progetto i ($x_i = 1$) oppure **non selezionare** il progetto i ($x_i = 0$).

Modello di Knapsack Intero

Consideriamo il caso generale di n progetti i=1,2,...,n, ciascuno caratterizzato dal suo costo a_i e dal suo punteggio r_i e un budget totale B(peso totale, spazio totale disponibile).

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad \leftarrow \ \textit{utilitá totale} \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B \quad \leftarrow \ \textit{vincolo sul costo totale} \\ x_i \geq 0 \quad \textit{intera} \quad i = 1, ..., n \end{array}$$

Avere $x_i \geq 0 \rightarrow$ vuol dire che è possibile inserire più oggetti dello stesso tipo.

Modello di Knapsack Limitato

Consideriamo il caso generale di n progetti i=1,2,...,n, ciascuno caratterizzato dal suo costo a_i e dal suo punteggio r_i e un budget totale B(peso totale, spazio totale disponibile).

Sono disponibili $u_i (u_i > 0)$ copie di ciascun oggetto i, i=1,...,n. Per ciascun tipo di oggetto i si possono selezionare al più u_i unità. Le n variabili di scelta x_i i=1,...,n sono:

x_i =numero di unitá dell'oggetto i inserite

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad \leftarrow \ \textit{utilitá totale} \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B \quad \leftarrow \ \textit{vincolo sul costo totale} \\ 0 \leq x_i \leq u_i \quad \textit{intera} \quad i = 1, ..., n \end{array}$$

Avere $0 \leq x_i \leq u_i \rightarrow$ vuol dire che è possibile inserire più oggetti dello stesso tipo i, ma non più di u_i.

Modello di Knapsack Multiplo

Consideriamo il caso generale di n progetti i=1,2,...,n, ciascuno caratterizzato dal suo costo a_i e dal suo punteggio r_i.

Supponiamo che ci siano m contenitori e sia dato un costo totale massimo B_j per ogni contenitore j=1,...,

Definiamo nm variabili binarie di scelta x_{ij} i=1,...,n e j=1,...,m

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ l'\ oggetto\ i\ viene\ inserito\ nel\ contenitore\ j \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\max \textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \\ &\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq B_j \qquad j = 1, ..., m \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1, ..., n \\ &x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ..., n \;\; j = 1, ..., m \end{aligned}$$

Modelli di localizzazione

`Problema:` La società deve decidere quali centri aprire e a quale centro deve assegnare ogni cliente in modo da minimizzare il costo complessivo (di apertura dei centri e di erogazione del servizio)

F l'insieme dei centri di assistenza da attivare
C l'insieme dei clienti da assegnare ad *un* centro di assistenza

$f_j \geq 0 \quad \forall j \in F \qquad costo\ per\ l'apertura\ del\ centro\ j\ (''costo\ di\ impianto'')$

$c_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) : i \in C, j \in F \qquad costo\ per\ l'erogazione\ del\ servizio\ al\ cliente\ i\ dal\ centro\ j$

$k_j \geq 0 \quad \forall j \in F \qquad capacitá\ del\ centro\ j$

Variabili
Viariabile di apertura centro (binaria):

$$y_j = \begin{cases} 1 & apro\ il\ centro\ j \\ 0 & non\ apro\ il\ centro\ j \end{cases}$$

Variabile di assegnario di cliente a centro (binaria):

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & assegno\ cliente\ i\ al\ centro\ j \\ 0 & non\ assegno\ cliente\ i\ al\ centro\ j \end{cases}$$

Modello 1

$$\begin{aligned}
&min \sum_{j\in F} f_i y_i + \sum_{i\in C}\sum_{j\in F} c_{ij}x_{ij} \quad \leftarrow \quad funzione\ obiettivo\\
&\quad \sum_{j\in F} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in C \quad \leftarrow \quad vincolo\ di\ assegnamento\ cliente\ i\\
&\quad x_{ij} \le y_j \quad \forall i \in C \;\; \forall j \in F \quad \leftarrow \quad vincolo\ di\ condizionamento\ di\ i\ sull'apertura\ di\ j\\
&\quad \sum_{i\in C} x_{ij} \le k_j \quad \forall j \in F \quad \leftarrow \quad vincolo\ di\ capacitá\ centro\ j\\
&\quad \begin{cases} y_i \in \{0,1\} & \forall j \in F\\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i \in C \;\; \forall j \in F \end{cases}
\end{aligned}$$

In particolare $\sum_{j\in F} x_{ij} = 1 \rightarrow$ un cliente può essere assegnato ad **un solo** centro.

$\sum_{i\in C} x_{ij} \le k_j \rightarrow$ un centro può servire **più** centri.

Modello 2

$$\begin{aligned}
&min \sum_{j\in F} f_i y_i + \sum_{i\in C}\sum_{j\in F} c_{ij}x_{ij}\\
&\quad \sum_{j\in F} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in C\\
&\quad \sum_{i\in C} x_{ij} \le k_j y_i \quad \forall j \in F\\
&\quad \begin{cases} y_i \in \{0,1\} & \forall j \in F\\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i \in C \;\; \forall j \in F \end{cases}
\end{aligned}$$

Modello 3 - Trattamento Rifiuti

$$\begin{aligned}
&min \sum_{j\in F} f_i y_i + \sum_{j\in F} h_j \sum_{i\in C} x_{ij} + \sum_{i\in C}\sum_{j\in F} c_{ij}x_{ij}\\
&\quad \sum_{j\in F} x_{ij} = w_i \quad \forall i \in C\\
&\quad \sum_{i\in C} x_{ij} \le k_j y_i \quad \forall j \in F\\
&\quad y_i \in \{0,1\} \quad \forall j \in F\\
&\quad x_{ij} \ge 0 \quad \forall i \in C \;\; \forall j \in F
\end{aligned}$$

In particolare $\sum_{j\in F} f_i y_i \rightarrow$ costo dell'impiano

$\sum_{j\in F} h_j \sum_{i\in C} x_{ij} \rightarrow$ costo di lavorazione

$\sum_{i\in C}\sum_{j\in F} c_{ij}x_{ij} \rightarrow$ costo di trasporto

$\sum_{j\in F} x_{ij} = w_i \rightarrow$ Assenz di giacenze di rifiuti nel punto di raccolta i, con w_i la quantita di sostanza caricata nel punto i.

$\sum_{i\in C} x_{ij} \le k_j y_i \rightarrow$ vincolo di apertura e capacit*á* centro j

Inoltre y_i è binaria e x_{ij} è frazionaria

Set Covering - SC

Ho un insieme (set) $F = \{1, 2, ..., i, ..., n\}$ di zone da servire

Una famiglia di sottoinsiemi di F data da $S_1, S_2, ..., S_n$
(S_j è il sottoinsieme di zone che il punto di servizio aperto in j può servire)

è possibile definire una matrice A di coefficienti, in cui l'elemento (i,j) indica se l'elemento i di F appartiene a un certo $S_j(a_{ij} = 1)$ oppure no $(a_{ij} = 0)$ - possibilità di copertura di i con il punto di servizio aperto in j.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ l'elemento\ i \in S_j \qquad i = 1, 2, ..., m \;\; i = 1, 2, ...n \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

A è una matrice di adiacenze di dimensione mxn

Varibili

$$x_j = \begin{cases} 1 & il\ sottoinsieme\ j\ viene\ scelto \qquad j = 1, 2, ..., n \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Formulazione Generale

$$\begin{aligned} \min \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_i \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad i = 1, ..., m \\ x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, ..., n \end{aligned}$$

$c_j \rightarrow$ costo associato al sottoinsieme S_j

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \rightarrow$ garantisce che venga scelto almeno uno dei sottoinsiemi S_j che contengono l'oggetto i.
In questo caso si dice che gli utenti della unità territoriale i ricevono il servizio dal (o l'unità territoriale i è "coperta" dal) punto di serviio aperto in j.

Set Partitioning - SPAR

Ho un insieme (set) $F = \{1, 2, ..., i, ..., n\}$ di zone da servire

Una famiglia di sottoinsiemi di F data da $S_1, S_2, ..., S_n$
(S_j è il sottoinsieme di zone che il punto di servizio aperto in j può servire)

è possibile definire una matrice A di coefficienti, in cui l'elemento (i,j) indica se l'elemento i di F appartiene a un certo $S_j(a_{ij} = 1)$ oppure no $(a_{ij} = 0)$ - possibilità di copertura di i con il punto di servizio aperto in j.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ l'elemento\ i \in S_j \qquad i = 1, 2, ..., m \;\; i = 1, 2, ...n \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Formulazione Generale

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \qquad i = 1, ..., m$$
$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, ..., n$$

`Una soluzione ammissibile del problema (SPAR) è sempre soluzione ammissibile del problema (SC). Non è detto il viceversa.`

Set Packing - SPAC

Ho un insieme (set) $F = \{1, 2, ..., i, ..., n\}$ di zone da servire

Una famiglia di sottoinsiemi di F data da $S_1, S_2, ..., S_n$
(S_j è il sottoinsieme di zone che il punto di servizio aperto in j può servire)

è possibile definire una matrice A di coefficienti, in cui l'elemento (i,j) indica se l'elemento i di F appartiene a un certo $S_j(a_{ij} = 1)$ oppure no ($a_{ij} = 0$) - possibilità di copertura di i con il punto di servizio aperto in j.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ l'elemento\ i \in S_j \qquad i = 1, 2, ..., m \;\; i = 1, 2, ...n \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Formulazione Generale

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \qquad i = 1, ..., m$$
$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, ..., n$$

4 Problemi Sui Grafi

Def. Matrice Totalmente Unimodulare - TU
Una matrice A si dice **totalmente unimodulare** (TU nel seguito) se ogni sua sottomatrice quadrata ha determinante pari a 0,+1 o -1.

Oss. Matrice Totalmente Unimodulare
Sia A una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, +1 o -1 e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi diversi da 0.

Allora A è **TU** *se e solo se* l'insieme delle righe di A può essere suddiviso in due sottinsiemi Q_1 e Q_2 tali che se una colonna contiene due elementi diversi da 0 si ha che:

Se i due elementi hanno **lo stesso segno** allora una delle due righe in cui si trovano è in Q_1 e l'altra in Q_2;

Se hanno **segno opposto** le righe corrispondenti sono entrambe contenute in Q_1 od entrambe in Q_2.

Corollario Matrice Totalmente Unimodulare
Sia A una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, +1 o -1 e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi diversi da 0.
Se nelle colonne con due elementi diversi da zero la somma di tali elementi è uguale a 0 (ovvero un elemento è uguale a +1 e l'altro a -1), allora A è TU.

Dim.

É sufficiente utilizzare l'osservazione precedente ponendo

$Q_1 = \{$tutte le righe di A$\}$ e $Q_2 = \emptyset$

Il corollario dice che ad esempio tutte le matrici di incidenza nodo-arco di un grafo orientato sono tutte matrici TU.

Problemi di Flusso A Costo Minimo

È data una rete (grafo orientato e connesso) G =(V,A).

$(i, j) \in A \rightarrow c_{ij}$ costo di trasporto unitario lungo l'arco (i,j).
$i \in V \rightarrow b_i$ interi e tali che $\sum_{i \in V} b_i =$

Nodi i tali che $b_i > 0$: sono denominati nodi sorgente; in essi viene "realizzato" il "prodotto" che viaggia attraverso la rete;
Nodi i tali che $b_i < 0$: sono denominati nodi destinazione; in essi viene "consumato" il "prodotto" che viaggia attraverso la rete;
Nodi i tali che $b_i = 0$: sono denominati nodi transito;in essi il "prodotto" che viaggia attraverso la rete si limita a transitare.

```
Problema:  Il problema consiste nel far giungere il "prodotto" realizzato
nei nodi sorgente ai nodi destinazione facendolo viaggiare attraverso
la rete e cercando di spendere il meno possibile per il trasporto.
```

Variabili

Associamo una variabile x_{ij} ad ogni arco (i,j) della rete: $(i, j) \in A \rightarrow x_{ij}$ = quantità "prodotto" inviata lungo l'arco (i,j)

In ogni nodo $i \in V$ si deve avere:

(Flusso uscente da i)-(Flusso entrante in i) $= b_i$

Flusso uscente da i:

$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}$

Flusso entrante in i:

$\sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji}$

Formulazione Generale

$$\begin{aligned}
\min & \textstyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\
& \textstyle\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V \\
& x_{ij} \geq 0 \ \text{ interi} \quad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

A $\rightarrow$ matrice di incidenza nodo-arco della rete
c_{ij} $\rightarrow$ costo del trasporto

Oss. Problemi di Flusso A Costo Minimo

Ogni vincolo del problema di flusso a costo minimo può essere ottenuto attraverso la somma di tutti gli altri.
Uno(ed un solo) vincolo del problema(non importa quale) può essere eliminato in quanto ridondante.

Problema Del Commesso Viaggiatore

Il problema è definito su un grafo G=(N,A), con $|N| = n$ e $|A| = m$, in cui ad ogni arco $(i,j) \in A$ è associato un costo o lunghezza $c_{ij} > 0$.

Problema: `Un commesso viaggiatore (Travel Salesman) partendo dalla città in cui vive, ogni giorno deve visitare n=10 città. Egli deve passare in ciascuna città esattamente una volta e alla fine del percorso deve ritornare nella città di partenza minimizzando il costo totale degli spostamenti.`

TOUR: Percorso (sequenza ordinata di archi-nodi) che inizia e termina nel nodo fissato e che visita ogni nodo del grafo **una ed una sola volta.**

Costo del Tour: Somma del costi degli archi che sono inseriti nel ciclo.

Grafo Connesso: un grafo G = (V, E) è detto connesso se, per ogni coppia di vertici $(u,v) \in V$, esiste un cammino che collega u a v.

Problema TSP: `Dato un grafo G=(N,A) con` $|N| = n$ `e` $|A| = m$ `e con` `costi non negativi associati agli archi, individuare tour di costo totale minimo.`

$\rightarrow$ Algoritmi per TSP: Algoritmo di Approssimazione o Algoritmo Euristico di Ricerca Locale.

Problema Del TSP Asimmetrico

Consideriamo un grafo G=(N,A)

Formulazione

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$
$$\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in N$$
$$\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} = 1 \qquad \forall j \in N$$

$$\sum_{k\in S(i)} x_{ik} - \sum_{h\in P(i)} x_{hi} = \begin{cases} n-1 & \text{se } \ i=1 \\ -1 & \text{se } \ i\neq 1 \end{cases}$$

$$x_{ij} < (n-1)y_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$$
$$x_{ij} > 0 \qquad \forall (i,j) \in A$$
$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A$$

- y_{ij} $\rightarrow$ variabili **indicatrici** di quali archi appartengono al tour:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

- x_{ij} $\rightarrow$ variabili di **flusso**

- $\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in N$ e
  $\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} = 1 \qquad \forall j \in N$

  garantiscono che per ogni nodo visitato ci sia **esattamente** un arco del tour entrante e **esattamente** uno uscente (`vincoli di assegnamento`).

  *MA QUESTI DUE VINCOLI **NON** SONO SUFFICIENTI PER CARATTERIZZARE UN TOUR.*

- $\sum_{k\in S(i)} x_{ik} - \sum_{h\in P(i)} x_{hi} = \begin{cases} n-1 & \text{se } \ i=1 \\ -1 & \text{se } \ i\neq 1 \end{cases}$

  garantiscono che ogni nodo sia effettivamente visitato attraverso un **unico** tour (`vincoli di conservazione di flusso`).

- $x_{ij} < (n-1)y_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$

  mettono in relazione archi "bagnati dal flusso " con archi inseriti nel tour (`vincoli logici di condizionamento`).

Problema Del TSP Simmetrico

Consideriamo un grafo G=(N,E) non orientato con $|N| = n$, $|E| = m$

Formulazione

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{array}{ll}
\sum_{(i,j)\in A(i)} y_{ij} \leq 2 & \forall i \in N \\
\sum_{(i,j)\in A(S)} y_{ij} \leq |S| - 1 & \forall S \subset \{1, 2, ..., n\} \\
\sum_{(i,j)\in A(S)} y_{ij} = n & \\
y_{ij} \in \{0, 1\} & \forall (i,j) \in E
\end{array}$$

A(i) $\rightarrow$ Insieme degli spigoli che hanno un *estremo nel vertice i*

A(S) $\rightarrow$ Insieme degli spigoli formati da nodi dell'insieme S

y_{ij} $\rightarrow$ variabili **indicatrici** di quali archi appartengono al tour:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

- $\sum_{(i,j)\in A(i)} y_{ij} \leq 2 \qquad \forall i \in N$

  Ogni nodo deve avere grado al più pari a **2**

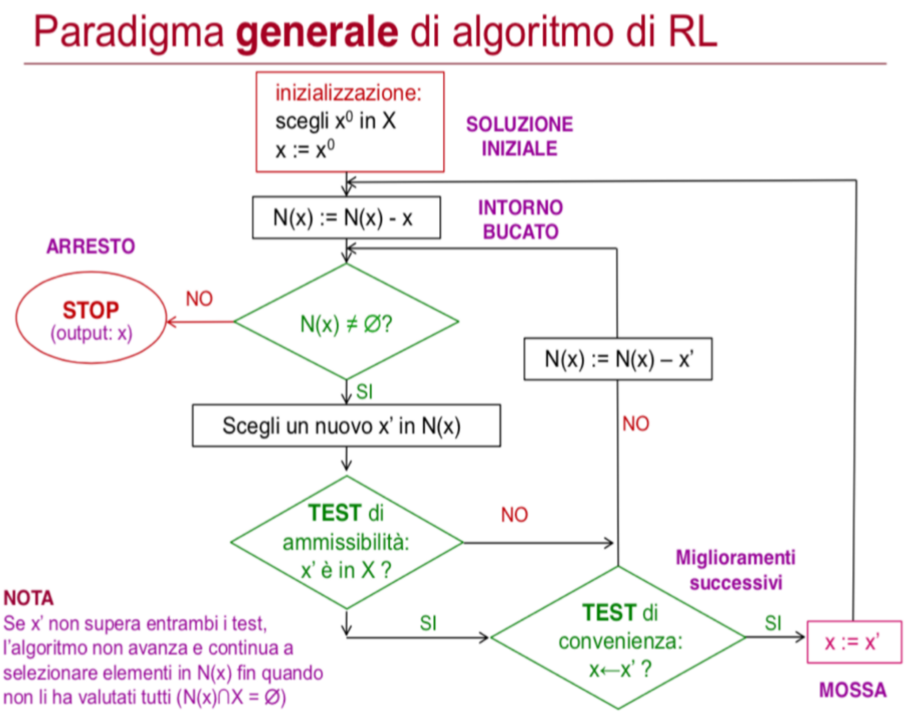
- $\sum_{(i,j)\in A(S)} y_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset \{1, 2, ..., n\}$

  Non ci devono essere cicli formati da 2,3,...,n-1 nodi

- $\sum_{(i,j)\in A(S)} y_{ij} = n$

  In totale bisogna selezionare n spigoli

5 Algoritmo Di Ricerca Locale



Progettazione Algoritmo RL
1) Regola scelta della soluzione iniziale
2) *Struttura e dimensione degli intorni*

– **Struttura** → La struttura dell'intorno dipende dal problema di ottimizzazione specifico che si sta analizzando (PL,PNL,PLI,Problemi sui grafi, etc.) e dalla topologia dello spazio delle sue soluzioni.
– **Dimensione** → La dimensione dell'intorno dipende dalla sua struttura. Possono essere previsti intorni di dimensioni variabili.

3) *Visita dell'intorno*

– **Scelta Random** → La nuova soluzione x' in N(x) ∩ X viene scelta in maniera casuale.
– **Scelta First** → Si ordinano le soluzioni in N(x) ∩ X e si selezionano le x' in maniera sistematica seguendo l'ordine (ad esempio, numerando le soluzioni).
– **Scelta Best** → Tra tutte le soluzioni in N(x) ∩ X si scelgie quella che produce il massimo miglioramento della funzione obienttivo; e in

questo caso si fa già il test di convenienza al momento della scelta di x'.

4) *Scelta della mossa (TEST di convenienza)*

– **DISCESA** $\rightarrow$ Si sceglie x' tale che $f(x') < f(x)$
– **GREEDY (GHIOTTO)** $\rightarrow$ Si sceglie x' tale che $f(x') = \min\{f(y) : y$ in $N(x) \cap X\} < f(x)$
– **TOLLERANZA** $\rightarrow$ Si sceglie x' tale che $f(x') \leq f(x) + \delta$ (quindi anche se $f(x') > f(x)$).
Si accetta la possibilita di un temporaneo (e contenuto) degrado della funzione obiettivo per evitare l'arresto "prematuro" per insuccesso

5) Regola di arresto

– **Arresto Forzato** $\rightarrow$ Si può imporre che l'algoritmo si arresti dopo M iterazioni: la soluzione finale sarà la soluzione associata all'ultima iterazione.
– **Arresto Naturale** $\rightarrow$ L'algoritmo termina perchè ha analizzato tutte le soluzioni in N(x) ∩ X (senza individuare miglioramenti): la soluzione corrente sarà la migliore localmente.

Def. Direzione Di Discesa
Data $f : R^n \rightarrow R$ e $x \in R^n$, una direzione $d \in R^n, d \neq 0$ si dice **di discesa (miglioramento) per f(x) in x** se esiste $\lambda^* > 0$ tale che:

$f(x + \lambda d) < f(x)$ per ogni $\lambda \in (0, \lambda^*)x$

Se d non è una direzione di discesa in un punto x e in x non essitono direzioni di discesa, allora x è un **ottimo locale**.

Def. Direzione Ammissibile
Dato un sottoinsieme S di R^n e $x \in S$, una direzione $d \in R^n, d \neq 0$, si dice **ammissibile per S in x** se esiste $\lambda^* > 0$ tale che:

$x + \lambda d \in S$ per ogni $\lambda \in [0, \lambda^*]$

Oss. Direzione Ammissibile
Sia il poliedro P delle soluzioni ammissibili del problema di PL. Può accadere che una direzione d sia ammissibile per P in x per ogni $\lambda^* > 0$.

Se in un punto x del poliedro ammissibile P di un problema di PL la direzione d è ammissibile per P ogni $\lambda^* > 0$ ed è di discesa per $f(x) = c^T x$, allora si ha un **ottimo illimitato**.

Strategie Per Evitare Di Rimanere Intrappolati In Un Ottimo Locale

1) Multistart - Diversificazione All'Inizio Della Ricerca
Inizializziamo la ricerca di più punti iniziali diversi, si amplificano le capacità di visita dello spazio delle soluzioni e aumenta la possibilità di individuare un ottimo globale o,almeno, un ottimo locale di buona qualità.

2) Peggioramenti Locali Della Funzione Obiettivo - Diversificazione Durante La Ricerca
Supponiamo che il massimo peggioramento accettatato sia pari a δ allora la stategia di miglioramento nel lungo periodo permette di individuare l'ottimo globale da un determinato punto x^0

Ma entrambe le strategie possono comunque non avere successo e terminare prematuramente in un ottimo locale di cattiva qualità.

Algoritmo di Lin e Kernighan

Consideriamo Grafo G=(N,E) non orientato.
Possiamo supporre che **G sia completo**, cioè che esista in G uno spigolo (i,j) per ogni coppia di nodi i e j.

Una soluzione ammissibile del TSP corrisponde ad un tour di G. L'insieme X del problema di ottimizzazione è dato da **tutti i possibili tour di G**.

Sia x^t il vettore che identifica il tour ammissibile corrente, dobbiamo quindi definire l'intorno di x^t, $N(x^t)$.

Cioè dobbiamo caratterizzare una soluzione "vicina" a x^t, $x \in N$ **e definire la regola per passare da** x^t a una nuova $x^{t+1} \in N$ (`mossa`).

`Sia` $x^t \in X$ `un tour di G, una operazione (mossa) di k-scambio consiste nel rimuovere da` x^t `k spigoli non consecutivi e sostituirli con altri k spigoli in modo tale da ottenere un nuovo tour` x^{t+1} `diverso da` x^t.

Se k=2 allora l'algoritmo si dice essere 2-opt

Algoritmo 2-OPT

`inizializzazione`

Individuare tour di partenza attraverso visita del grafo G

`iterazione t:2-scambio`

Sia x^t il tour corrente:
Rimuovere da x^t **2 spigoli non consecutivi**
Inserire i due spigoli che generano un nuovo tour x^{t+1} diverso da x^t

Se il costo di x^{t+1} è inferiore al costo x^t
$x^t \leftarrow x^{t+1}$

Oss.
Algoritmo di Lin e Kernighan è un algoritmo di ricerca locale *euristico* e dunque non garatisce una soluzione di ottimo globale, ma solo di ottimo locale.
Ma ha il vantaggio che risulta essere concettualmente molto semplice e capace di valutare velocemente molte soluzioni ammissibili.

6 Programmazione Lineare Multiobiettivo

Formulazione

$$\begin{gathered} min\ C \\ Ax \geq b \\ x \in Z^n : x \geq 0 \quad \text{or } x \in \{0{,}1\} \end{gathered}$$

$x \in Z^n \rightarrow$ n variabili decisionali
$C \in Z^{pxn} \rightarrow$ matrice dei coefficienti dei p obiettivi del problema
$A \in Z^{mxn} \rightarrow$ la matrice dei coefficienti dei vincoli che definiscono la regione ammissibile del problema
$b \in Z^m \rightarrow$ il vettore dei termini noti associati ai vincoli.

Def. Insieme ammissibile nello spazio delle decisioni

L'insieme delle soluzioni ammissibili $X = \{x \in R^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$ è definito **insieme ammissibile nello spazio delle decisioni.**

Def. Insieme ammissibile nello spazio degli obiettivi

L'insieme dei vettori $Y = \{Cx\colon x \in X\}$ è definito **insieme ammissibile nello spazio degli obiettivi** e contiene tutti i punti associati a soluzioni ammissibili tramite la funzione lineare definita dai pobiettivi.

Oss.

In generale in un problema di ottimizzazione multi-obiettivo non esiste una soluzione che ottimizza tutti gli obiettivi.
Si dovrà definire l'insieme delle soluzioni a cui si è interessati.

Def. **Dominanza di Pareto**

Una soluzione ammissibile $x \in X$ è dominata da un'altra soluzione ammissibile $x' \in X$ se $Cx' \leq Cx$ con una disuguaglianza stretta per almeno uno dei p obiettivi.

Def. **Efficienza o Pareto Ottimalità**

Una soluzione ammissibile $x* \in X$ è **efficiente o Pareto ottima** se non esiste un'altra soluzione $x \in X$ tale che $Cx \leq Cx*$ con una disuguaglianza stretta per almeno uno dei pobiettivi. Il corrispondente vettore $y* = Cx*$ è definito non dominato.

Def. **Insieme Efficiente**

L'insieme delle soluzioni efficienti o Pareto ottime X_E è chiamato **insieme efficiente**.

Def. **(Frontiera di Pareto o insieme non dominato**

L'insieme dei vettori non dominati Y_N è chiamato **frontiera di Pareto** o insieme non dominato.

Th. **Teorema Fondamentale di Geoffrion**

Sia dato l'insieme

$$\Lambda \equiv \{\lambda \in R^p : \lambda > 0, e'\lambda = 1\}$$

e' → vettore di tutti uni

E si consideri il problema di PL P(λ) definito come segue:

$$\begin{gathered} \max \lambda' Cx \\ x \in S \\ \lambda \in \Lambda \end{gathered}$$

$x* \in S$ (regione ammissibile) è **Pareto ottima se e solo se esiste un vettore tale che x* è soluzione ottima di P(λ)**.

Def. **Soluzioni Efficienti Supportate**

Una soluzione efficiente x* è definita supportata se e solo se esiste

$$\lambda \in R^p : \lambda_i \geq 0 \quad \forall j = 1, ...p \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_i = 1$$

tale che x* è ottima per il seguente problema ottenuto come somma pesata dei p criteri:

$$\min \lambda^T Cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0 \quad (interi)$$

Def. **Soluzioni Efficienti Non Supportate**

Una soluzione efficiente x* è definita non supportata se non è ottima per alcun problema ottenuto come somma pesata dei p criteri.

Def. **Punto/Vettore Ideale Degli Obiettivi**

Si definisce punto/vettore ideale degli obiettivi $y^{id} \in R^p$ il vettore di componenti:

$$y_i^{id} = \min c_i x : x \in X$$

Def. **Punto/Vettore Di Nadir Di 2 Obiettivi**

Si definisce punto/vettore Nadir di due obiettivi $y^N \in R^p$ il vettore di componenti:

$$y_j^N = \min\{y_j(x) : y_i(x) = y_i', j = 1, 2 : i \neq j\} : x \in X$$

Il punto ideale ed il punto Nadir definiscono un lower ed un upper bound sui valori degli obiettivi corrispondenti a soluzioni efficienti.

Scalarizzazione

Una scalarizzazione è un problema singolo obiettivo ottenuto dal problema multiobiettivo originario aggiungendo variabili e/o parametri, che è solitamente risolto iterativamente al fine di determinare alcuni sottoinsiemi di soluzioni efficienti per il problema multiobiettivo.

Metodo Dei Pesi

Nel metodo dei pesi viene risolto iterativamente il seguente problema singolo obiettivo:

$$\min \lambda^T Cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0 (interi)$$

dove $\lambda \in R^p$ è tale che $0 \leq \lambda_j \leq 1 \; \forall j = 1, ..., p$ e $e^T \lambda = 1$.
Variando i pesi è possibile generare tutte le soluzioni efficienti (supportate).
Il principale vantaggio di questo metodo è che per ogni $\lambda \in R^p$ il problema è difficile esattamente come la sua versione singolo obiettivo.

Metodo ε-constrained

Si tratta di un altro metodo mediante il quale è possibile generare tutte le soluzioni efficienti, e che consiste nel mantenere solo uno dei p obiettivi, diciamo l'obiettivo iesimo, e trasformando gli altri (p-1) obiettivi in vincoli nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \min C_i x \\ Ax = b \\ C_k x \leq \varepsilon_k \qquad \forall k \neq i \\ x \geq 0 (interi) \end{aligned}$$

Tutte le soluzioni efficienti possono essere generate specificando opportunamente i termini noti ε_k. Lo svantaggio di questo metodo è la presenza di vincoli aggiuntivi (vincoli di knapsack) che rendono il problema più difficile da risolvere.