Ricerca Operativa
a.a. 2018-2019

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione XIII – 25 marzo 2019

MODELLI DI LOCALIZZAZIONE

Modelli di localizzazione

Una società informatica ha deciso di aprire (localizzare) nel territorio laziale sino a 4 possibili centri di assistenza per i suoi 10 clienti.

I centri possono essere dislocati in 4 diversi siti, che indichiamo con A, B, C, D (ad esempio edifici di proprietà della società).

I costi di apertura dei centri sono:

Siti	Costo di apertura di un centro (in euro)
A	50000
B	47000
C	35000
D	30000

Per ogni centro è nota una capacità, cioè il numero massimo di clienti che esso potrà servire (che dipende dalla struttura del centro aperto in quel sito):

Centri/Siti	Capacità massima
A	4
B	5
C	3
D	3

Modelli di localizzazione

Hp: ogni cliente deve essere servito da un solo centro.

Il servizio erogato da un centro comporta un costo di servizio (in euro per un contratto di 1 anno) che può essere diverso da cliente a cliente:

Cliente	Centro di servizio			
	A	B	C	D
1	2000	3500	2800	4000
2	3200	4000	4300	4200
3	1800	4000	2320	5400
4	1500	3400	1200	4200
5	2300	2400	4200	3000
6	3600	4500	2800	5200
7	2100	3400	3400	4300
8	2300	3800	2350	4320
9	3100	3400	4500	2500
10	2100	2300	3400	3900

Questi costi sono diversi perché dipendono dal tipo di cliente e dal tipo di centro che lo serve.

Dipendono dal tipo di contratto di assistenza stabilito con il cliente: ad esempio, possono essere legati al **numero di interventi "on-site"**.

Modelli di localizzazione

Problema
La società deve decidere quali centri aprire e a quale centro assegnare ogni cliente in modo da minimizzare il costo complessivo (di apertura dei centri e di erogazione del servizio).

NOTA 1
Si tratta dunque simultaneamente di un problema di **localizzazione** di centri (apertura) e di **assegnazione** di clienti a centri (erogazione del servizio).

Modelli di localizzazione

NOTA 2

Problemi di questo tipo sorgono in molti contesti applicativi legati alla pianificazione e gestione dei servizi pubblici e privati.

Possiamo distinguere due grandi classi principali di problemi di localizzazione:

1. **Servizi ordinari**
   scuole, ASL, uffici postali, stazioni terminali di trasporto, ecc.
   ▶ **Minimizzare la distanza media** (o tempo di percorrenza medio) di un cliente dal centro a cui è assegnato (**min-sum**).

2. **Servizi di emergenza**
   localizzazione di ospedali, stazioni antincendio, stazioni servizio 118, ecc.
   ▶ **Minimizzare la massima distanza** (o massimo tempo di risposta) tra un centro e un cliente (**min-max**).

Modelli di localizzazione

Indichiamo con:

F l'insieme dei centri di assistenza (*facilities*) da attivare;
C l'insieme dei clienti (*clients*) da assegnare ad un centro di assistenza.

$f_j \geq 0 \quad \forall j \in F$ costo per l'apertura del centro *j* ("costo di **impianto**")

$c_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) : i \in C, j \in F$ costo per l'erogazione del servizio al cliente *i* dal centro *j* ("costo di **servizio**")

$k_j \geq 0 \quad \forall j \in F$ capacità del centro *j*

Modelli di localizzazione

Variabili

Variabile di apertura centro (binaria):

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{apro il centro } j \\ 0 & \text{non apro il centro } j \end{cases} \qquad \forall j \in F$$

Variabile di assegnazione di cliente a centro (binaria):

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{assegno il cliente } i \text{ al centro } j \\ 0 & \text{non assegno il cliente } i \text{ al centro } j \end{cases} \qquad \forall (i,j),\ \ i \in C, j \in F$$

Modelli di localizzazione

Modello 1

Costo di impianto — Costo di servizio

f.o.

$$\min \sum_{j \in F} f_j y_j + \sum_{i \in C} \sum_{j \in F} c_{ij} x_{ij}$$

vincolo di **assegnamento** cliente i

$$\sum_{j \in F} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in C$$

Un cliente può essere assegnato ad **un solo** centro.

vincolo di **condizionamento** di i sull'apertura di j

$$x_{ij} \leq y_j \qquad \forall i \in C \quad \forall j \in F$$

vincolo di **capacità** centro j

$$\sum_{i \in C} x_{ij} \leq k_j \qquad \forall j \in F$$

Un centro può servire **più** clienti.

vincoli di interezza

$$\begin{cases} y_j \in \{0,1\} & \forall j \in F \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i \in C \quad \forall j \in F \end{cases}$$

Modelli di localizzazione

54 vincoli

vincolo di assegnamento cliente i

$$\sum_{j \in F} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in C$$

1 vincolo di assegnamento per ogni cliente → |C| vincoli di assegnamento (|C|=10)

vincolo di condizionamento di i sull'apertura di j

$$x_{ij} \le y_j \quad \forall i \in C \quad \forall j \in F$$

1 vincolo di apertura per ogni coppia cliente-centro → |C||F| vincoli di apertura (|C||F|=10x4=40)

vincolo di capacità centro j

$$\sum_{i \in C} x_{ij} \le k_j \quad \forall j \in F$$

1 vincolo di capacità per ogni centro → |F| vincoli di capacità (|F|=4)

Modelli di localizzazione: formulazione alternativa

Modello 2

Costo di impianto — Costo di servizio

f.o.

$$\min \sum_{j\in F} f_j y_j + \sum_{i\in C}\sum_{j\in F} c_{ij} x_{ij}$$

vincolo di assegnamento cliente i

$$\sum_{j\in F} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in C$$

Un cliente può essere assegnato ad **un solo** centro.

vincolo di **condizionamento** di i sull'apertura di j **e** di **capacità** del centro j

$$\sum_{i\in C} x_{ij} \le k_j y_j \qquad \forall j \in F$$

Un centro può servire **più** clienti.

vincoli di interezza

$$\begin{cases} y_j \in \{0,1\} & \forall j \in F \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i \in C \quad \forall j \in F \end{cases}$$

|C|+|F| vincoli
(|C|+|F|=10+4=14)

14 vincoli invece di 54!!

Applicazione: Trattamento rifiuti

Localizzazione di impianti di trattamento dei rifiuti urbani
(Beltrami, 1977)

Per problemi di questo tipo gli obiettivi sono spesso contrastanti, infatti **gli impianti dovrebbero essere localizzati**:

1. lontano dai centri abitati per questioni di inquinamento;
2. non troppo lontano dai centri abitati per questioni di **minimizzazione dei costi di trasporto**.

Per formulare il problema si può considerare un modello di localizzazzione in cui:

1. I **siti** dove potenzialmente collocare gli impianti sono **preselezionati** considerando l'obiettivo 1 in relazione al territorio;
2. Si minimizza il **costo totale** (di apertura impianti, trasporto e trattamento dei rifiuti).

Applicazione: Trattamento rifiuti

Consideriamo:

n punti di raccolta rifiuti, $i=1,2,\ldots,n$;
m punti per la potenziale localizzazione degli impianti di smaltimento rifiuti, $j=1,2,\ldots,m$.

Sia:

w_i la quantità (in tonnellate) di rifiuti caricata nel punto i;
k_j la capacità dell'impianto localizzato in j;

f_j il costo di apertura di un impianto nella zona j;
h_j il costo per il trattamento di una tonnellata di rifiuti nell'impianto localizzato nella zona j;
c_{ij} il costo per il trasporto di una tonnellata di rifiuti dal punto i all'impianto nella zona j.

NOTA
In questa applicazione la struttura del modello include aspetti legati alla **localizzazione** (apertura e assegnazione degli impianti ai punti di raccolta) e altri legati al **trasporto** (dai punti di raccolta agli impianti).

Applicazione: Trattamento rifiuti

Possiamo formulare il seguente modello MILP:

Costo di impianto — **Costo di lavorazione** — Costo di trasporto

$$\min \sum_{j\in F} f_j y_j + \sum_{j\in F} h_j \sum_{i\in C} x_{ij} + \sum_{i\in C}\sum_{j\in F} c_{ij}x_{ij}$$

Assenza di giacenze di rifiuti nel punto di raccolta i

$$\sum_{j\in F} x_{ij} = w_i \qquad \forall i\in C$$

Un cliente può essere "servito" da **più** centri.

vincolo di **apertura** e **capacità** centro j

$$\sum_{i\in C} x_{ij} \le k_j y_j \qquad \forall j\in F$$

Un centro può "servire" **più** clienti.

intera ⟶ $y_j \in \{0,1\} \qquad \forall j\in F$

frazionaria ⟶ $x_{ij} \ge 0 \qquad \forall i\in C \quad \forall j\in F$

Applicazione: Trattamento rifiuti (variante)

NOTA È possibile introdurre nel modello vincoli aggiuntivi per indirizzare – per quanto possibile – il carico di un centro di raccolta i verso un determinato impianto j.

Per un fissato i e j si inseriscono nel modello i due gruppi di vincoli seguenti:

Tutto il carico del punto di i è trasportato in j	$x_{ij} = w_i y_j, \quad \text{se } w_i \leq k_j$	**se** la capacità di j **è sufficiente** per ricevere l'intero carico di i
Tutta la capacità di ricezione di j è utilizzata per il carico di i.	$x_{ij} = k_j y_j, \quad \text{se } w_i > k_j$	**se** la capacità di j **non è sufficiente** per ricevere l'intero carico di i.

La capacità dell'impianto j viene completamente utilizzata per ricevere da i un carico $x_{ij} = k_j$.

Il resto del materiale proveniente da i $(w_i - k_j)$ – se ne avanza – deve necessariamente essere indirizzato verso altri impianti di smaltimento.

Classificazione di problemi di localizzazione

A seconda del contesto applicativo e delle ipotesi sulla base delle quali si formula il problema, si definiscono tipologie diverse di modelli di localizzazione.

Per quanto riguarda i vincoli:

- **Uncapacitated** Facility Location Problems: ogni cliente è servito da un solo punto di servizio e **non ci sono limiti di capacità** per i punti di servizio;
- **Capacitated** Facility Location Problems: ogni cliente è servito da un solo punto di servizio e **ci sono vincoli di capacità** (Problema della società informatica);
- Capacitated Facility Location Problems con integrazione tra centri: ci sono vincoli di capacità e ogni cliente è servito da **più punti di servizio** (Problema dello smaltimento rifiuti).

Per quanto riguarda la funzione obiettivo:

- **Median Problems** (min-sum), **1**-Mediane e **p**-Median: si minimizza la **somma dei costi** (distanze, tempi) cliente-centro;
- **Center Problems** (min-max) , **1**-Center e **p**-Center: si minimizza **il massimo costo** (distanze, tempi) cliente-centro.

Altri importanti problemi di localizzazione

La letteratura sui problemi di localizzazione è molto vasta ed esistono molti altri tipi di modelli di localizzazione utili per caratterizzare situazioni particolare.

Citiamo ad esempio:

Competitive location
localizzazione di impianti in presenza di impianti già pre-esistenti di aziende in concorrenza sul mercato.

Nel modello si tiene conto di elementi relativi agli impianti dei concorrenti.

Servizi indesiderati (Obnoxious facilities)
localizzazione di impianti di smaltimento rifiuti, impianti industriale, centrali nucleari, ecc.

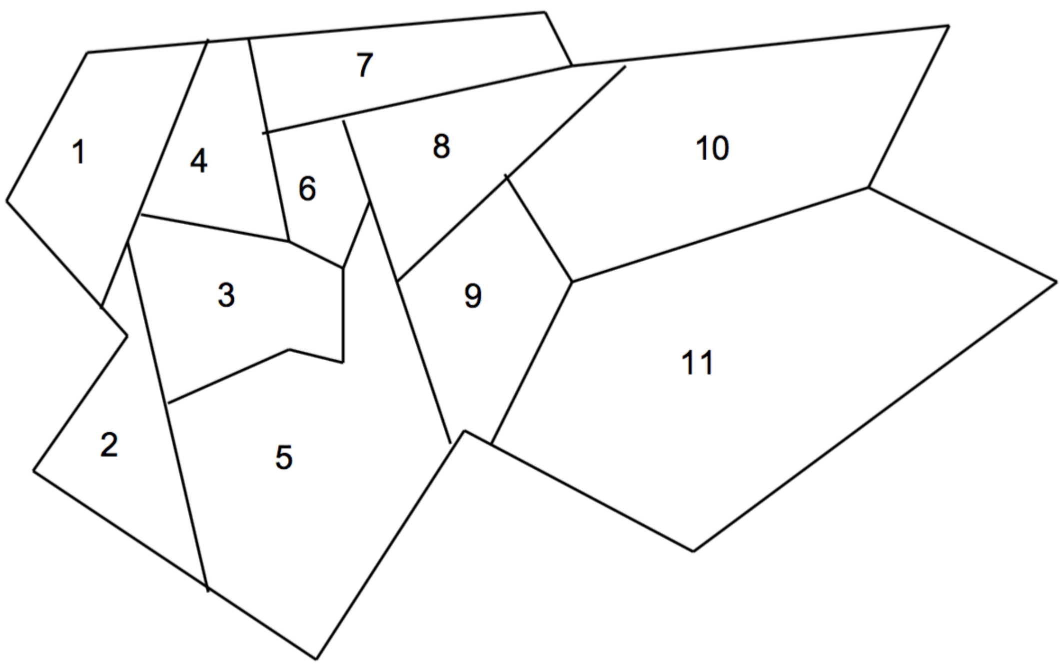
Si vuole massimizzare la distanza tra un centro e ogni cliente (f.o.: max distanza minima o media).

MODELLI DI SET COVERING,
SET PARTITIONING E SET PACKING

Set Covering

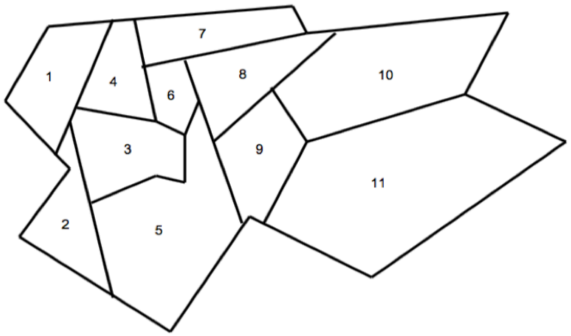
Esempio

Consideriamo un territorio diviso in 11 porzioni (numerate da 1 a 11) che potrebbe, ad esempio, corrispondere al territorio del comune C, suddiviso nelle sue circoscrizioni (zone elementari).



Set Covering

Il comune C sta ragionando sulla possibilità di attivare un servizio di intervento dei Vigili del Fuoco sul suo territorio. Fino ad oggi il servizio veniva erogato dai comuni confinanti, ma, con l'aumentare della popolazione del comune C, si sta valutando la possibilità di aprire delle stazioni dei Vigili del Fuoco sul proprio territorio.



Copertura ⟷ **Garantire il servizio in un tempo contenuto (es. 5 minuti)**

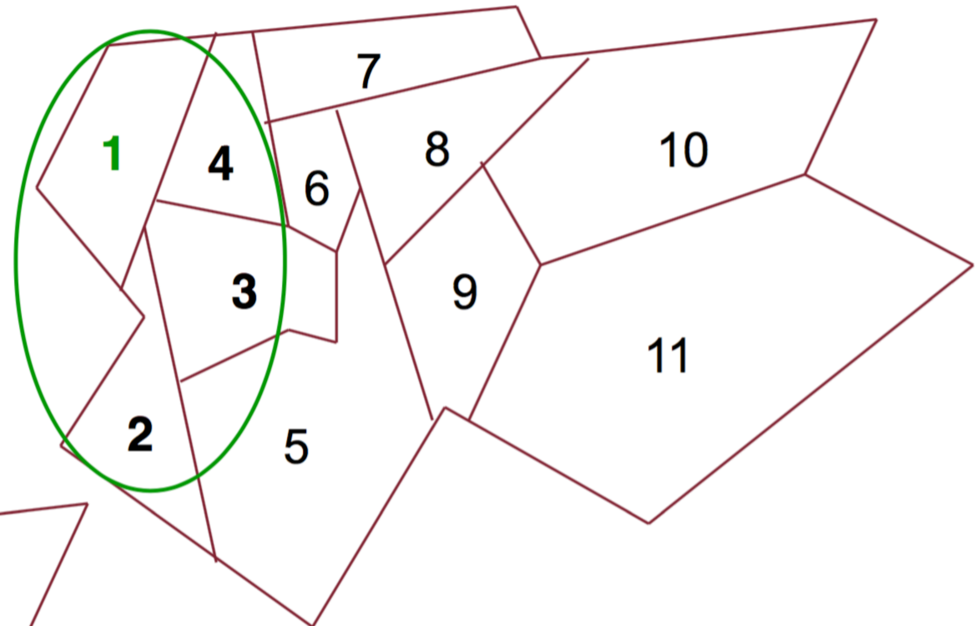
Hp: Le zone sono state ritagliate in modo tale che **una stazione aperta in una zona j possa servire in tempo contenuto ogni utente residente nella stessa zona j**, ma anche quelli **residenti in una zona ad essa adiacente.**

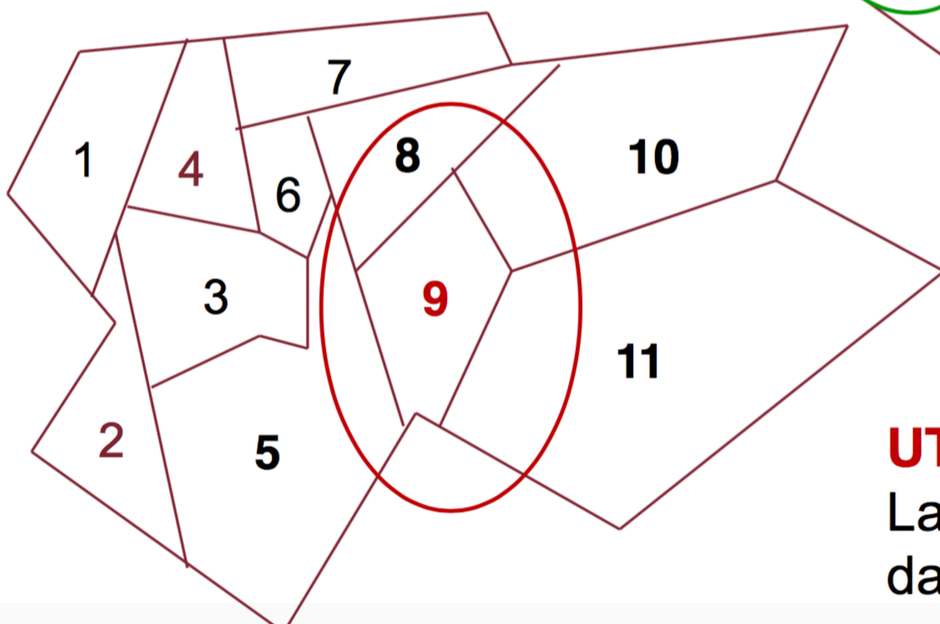
Aprire stazioni di servizio comporta dei **costi** che il comune dovrà sostenere, per cui il **problema del comune C** è quello di **aprire il minor numero possibile di stazioni ma in modo tale da garantire che ogni zona sia servita da almeno una stazione**. In sostanza il problema si può vedere come quello di "coprire/servire" tutto il territorio al minor costo totale possibile.

Set Covering

SERVIZIO

Sotto le nostre ipotesi, una stazione aperta nella **zona 1** potrà **servire** la **stessa zona 1** e le **zone 2**, **3** e **4**.





UTENTE

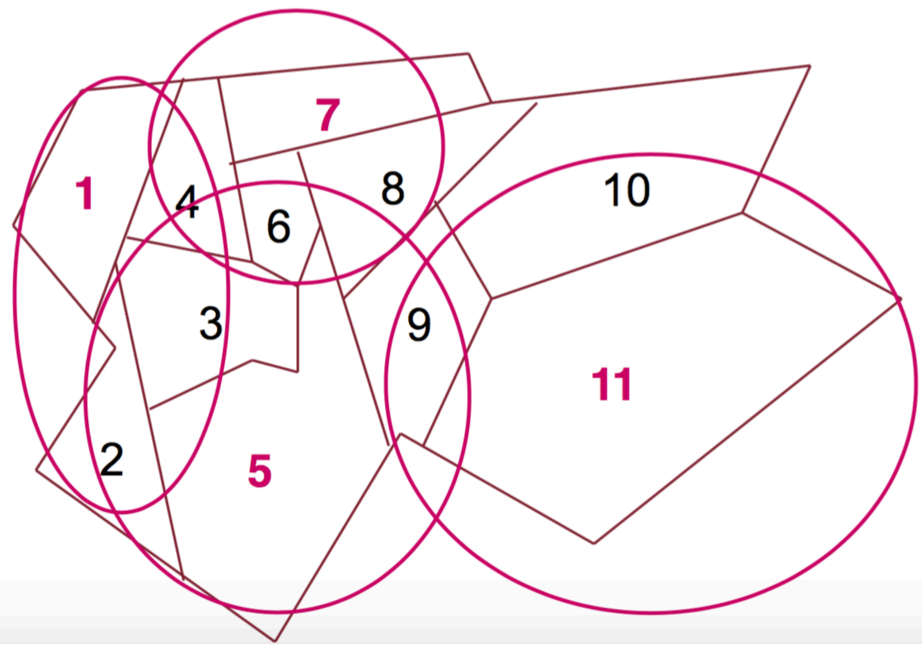
La **zona 9** può **essere servita** da **se stessa**, oppure dalle **zone adiacenti 5, 8, 10, 11**.

Set Covering

Il problema è allora quello di aprire stazioni nel minor numero di zone ma in modo tale da garantire che ogni zona sia servita da almeno una stazione.

Un problema di questo tipo viene formulato generalmente come modello di *set covering*.

Una soluzione ammissibile,
ma non ottima,
è la seguente:

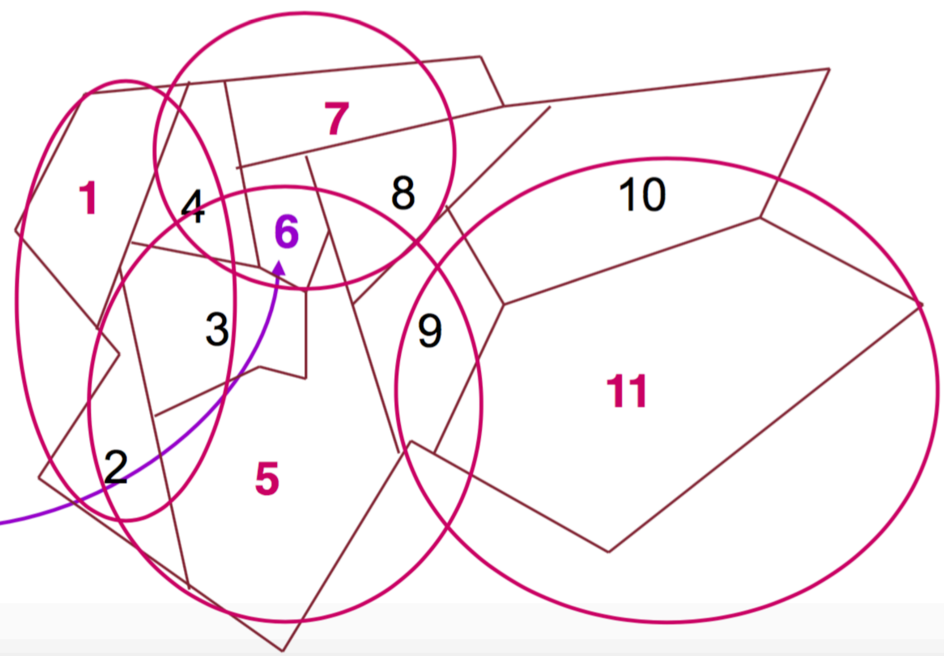


Set Covering

Il problema è allora quello di aprire stazioni nel minor numero di zone ma in modo tale da garantire che ogni zona sia servita da almeno una stazione.

Un problema di questo tipo viene formulato generalmente come modello di *set covering*.

Una soluzione ammissibile, ma non ottima, è la seguente:



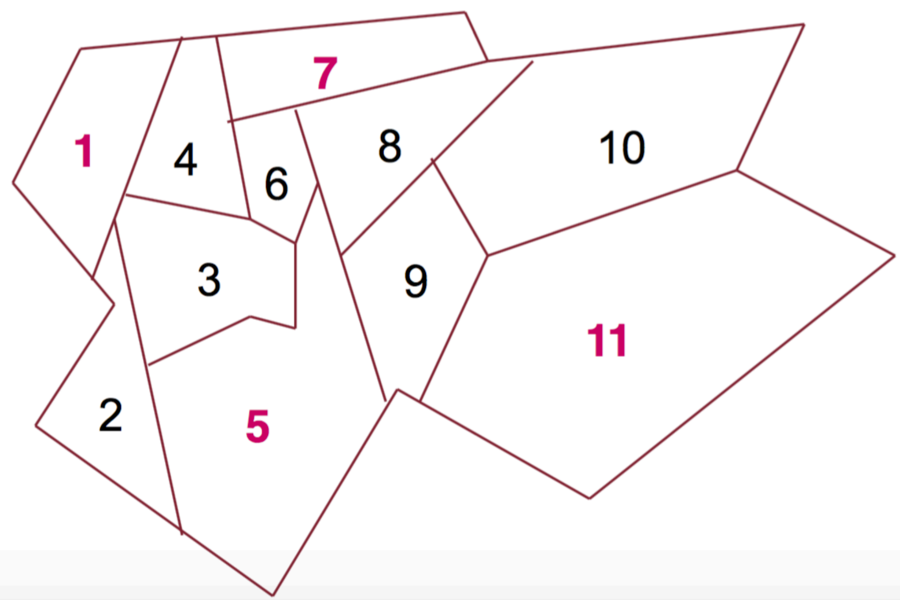
Alcune zone sono "coperte" più di una volta!

Set Covering

Il problema è allora quello di aprire stazioni nel minor numero di zone ma in modo tale da garantire che ogni zona sia servita da almeno una stazione.

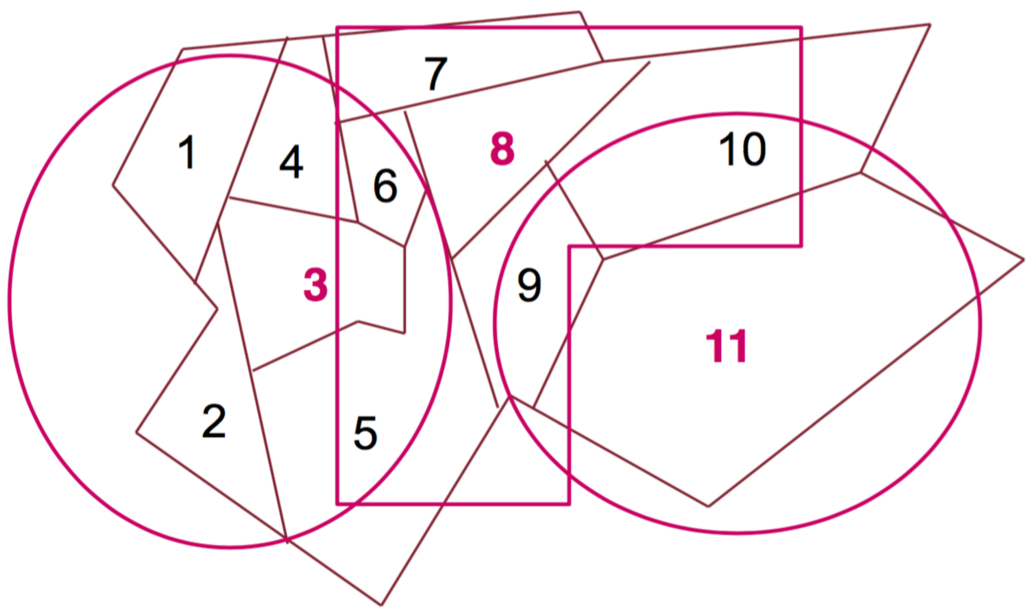
Un problema di questo tipo viene formulato generalmente come modello di *set covering*.

Esiste una soluzione migliore?



Set Covering

La soluzione seguente è sicuramente migliore della precedente, visto che prevede l'apertura di 3 stazioni invece che 4 e riesce comunque a garantire il servizio su tutto il territorio.



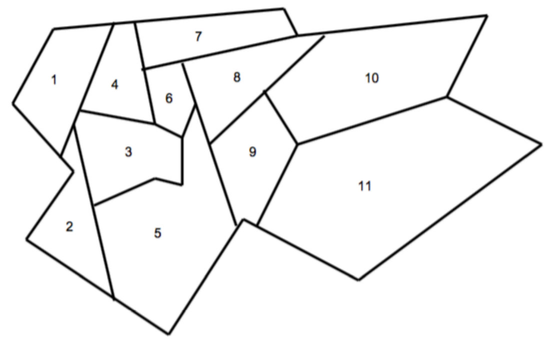
NOTA: Rispetto alla precedente, in questa soluzione i punti di servizio sono localizzazati in zone "più centrali".

Set Covering

Introduciamo le variabili binarie:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se nella zona } j \text{ viene aperta una stazione} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 1,2,\ldots,11$$



Le 11 **variabili** binarie x_j, j=1,2,...,11 si riferiscono alla possibilità di aprire/non aprire una stazione nella zona j (*attivazione del **servizio***).

Dobbiamo introdurre 11 **vincoli** necessari per garantire che ciascuna delle 11 zone sia servita da almeno una stazione (*copertura dell'**utente***).

Set Covering

Modello di set covering (Hp: costi di apertura **uguali** per tutte le stazioni)

SERVIZI

UTENTI

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$								≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$							≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$						≥ 1
x_1		$+x_3$	$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$					≥ 1
	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$	$+x_6$		$+x_8$	$+x_9$			≥ 1
		$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
			$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
				$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$		≥ 1
				$+x_5$			$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
							$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
								$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1

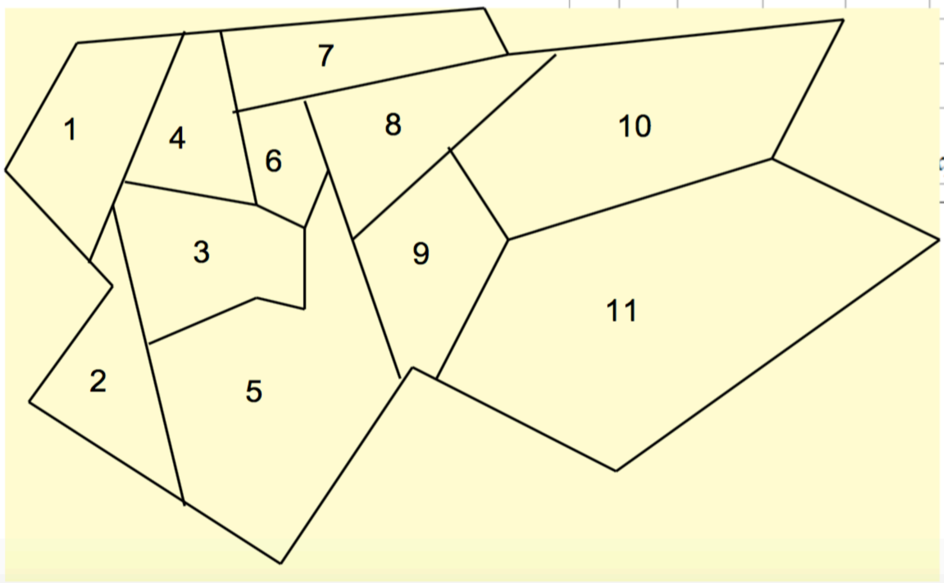
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ variabili binarie

Set Covering

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$								≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$							≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$						≥ 1
x_1		$+x_3$	$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$					≥ 1
	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$	$+x_6$		$+x_8$	$+x_9$			≥ 1
		$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
			$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
				$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$		≥ 1
				$+x_5$			$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
							$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
								$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1

$x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ variabili binarie



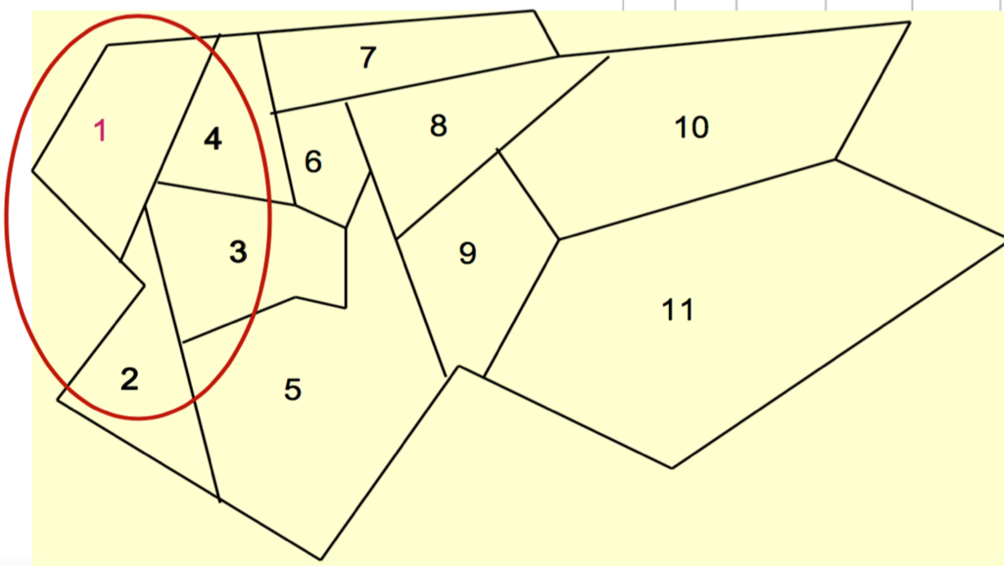
Set Covering

Utenza zona 1

Vincoli logici di necessità di scelta

$\min$	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$										
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$								≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$							≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$						≥ 1
x_1		$+x_3$	$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$					≥ 1
	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$	$+x_6$		$+x_8$	$+x_9$			≥ 1
		$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
			$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
				$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$		≥ 1
				$+x_5$			$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
							$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
								$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1

$x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ variabili binarie



Set Covering

Modello di set covering (Hp: costi di apertura **uguali** per tutte le stazioni)

SERVIZIO ZONA 2

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

UTENTI

x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$								≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$							≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$						≥ 1
x_1		$+x_3$	$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$					≥ 1
	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$	$+x_6$		$+x_8$	$+x_9$			≥ 1
		$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
			$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
				$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$		≥ 1
				$+x_5$			$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
							$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
								$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ variabili binarie

Set Covering

Modello di set covering (Hp: costi di apertura **uguali** per tutte le stazioni)

SERVIZIO ZONA 2

UTENTI

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$								≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$							≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$						≥ 1
x_1		$+x_3$	$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$					≥ 1
	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$	$+x_6$		$+x_8$	$+x_9$			≥ 1
		$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
			$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
				$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$		≥ 1
				$+x_5$			$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
							$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
								$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ variabili binarie

Set Covering

Modello di set covering (Hp: costi di apertura **uguali** per tutte le stazioni)

SERVIZIO ZONA 3

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

UTENTI

x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$								≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$							≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$						≥ 1
x_1		$+x_3$	$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$					≥ 1
	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$	$+x_6$		$+x_8$	$+x_9$			≥ 1
		$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
			$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
				$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$		≥ 1
				$+x_5$			$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
							$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
								$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ variabili binarie

Set Covering

Modello di set covering (Hp: costi di apertura **uguali** per tutte le stazioni)

SERVIZIO ZONA 7

$$\min \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

UTENTI

x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$								≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$							≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$						≥ 1
x_1		$+x_3$	$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$					≥ 1
	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$	$+x_6$		$+x_8$	$+x_9$			≥ 1
		$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
			$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
				$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$		≥ 1
				$+x_5$			$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
							$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
								$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ variabili binarie

Set Covering

Modello di set covering (Hp: costi di apertura **uguali** per tutte le stazioni)

SERVIZIO ZONA 11

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

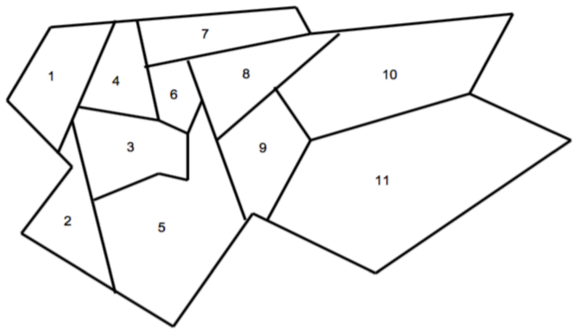
UTENTI

x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$								≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$							≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$						≥ 1
x_1		$+x_3$	$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$					≥ 1
	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$	$+x_6$		$+x_8$	$+x_9$			≥ 1
		$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
			$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
				$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$		≥ 1
				$+x_5$			$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
							$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
								$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ variabili binarie

Set Covering

È possibile generalizzare il modello appena visto al caso in cui ci siano costi diversi associati all'apertura di stazioni in zone diverse.



Supponiamo ad esempio che i costi per l'apertura di una stazione nelle diverse zone siano i seguenti:

	Zone										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Costo apertura stazione	3	14	5	3	4	7	12	9	7	5	4

Set Covering

Modello di set covering con costi di apertura **diversi** per le stazioni

$$min\ 3x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 12x_7 + 9x_8 + 7x_9 + 5x_{10} + 4x_{11}$$

x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$								≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$							≥ 1
x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$						≥ 1
x_1		$+x_3$	$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$					≥ 1
	$+x_2$	$+x_3$		$+x_5$	$+x_6$		$+x_8$	$+x_9$			≥ 1
		$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
			$+x_4$		$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$				≥ 1
				$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$		≥ 1
				$+x_5$			$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
							$+x_8$	$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1
								$+x_9$	$+x_{10}$	$+x_{11}$	≥ 1

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ variabili binarie

Set Covering (SC)

Formulazione generale di un modello di **set covering**

Dati:

- un insieme (set) $F = \{1,2,\ldots,i,\ldots,m\}$
(insieme delle **zone da servire**)

- una famiglia di sottoinsiemi di F data da $S_1, S_2, \ldots, S_j, \ldots, S_n$
(**S_j** è il sottoinsieme di zone che il **punto di servizio aperto in j** può servire)

è possibile definire una matrice A di coefficienti in cui l'elemento (i,j) indica se l'elemento i di F appartiene a un certo S_j ($a_{ij} = 1$) oppure no ($a_{ij} = 0$) (possibilità di copertura di i con il punto di servizio aperto in j):

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'elemento } i \in S_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots,n \end{matrix}$$

A è una matrice di adiacenze di dimensione **mxn**.
Nell'esempio dei vigili del fuoco **m=n=11**.

Set Covering (SC)

Formulazione generale di un modello di set covering

Introducendo le variabili di scelta binarie seguenti:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{il sottoinsieme } j \text{ viene scelto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

"viene aperta la stazione j"

il vincolo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1$$

← vincolo di "covering" (copertura)

garantisce che venga scelto almeno uno dei sottoinsiemi S_j che contengono l'oggetto i.

In questo caso si dice che gli utenti della unità territoriale i ricevono il servizio dal (o l'unità territoriale i è "coperta" dal) punto di servizio aperto in j.

Set Covering (SC)

Formulazione generale di un modello di **set covering**

costo associato al sottoinsieme S_j

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

(SC)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad i = 1,\ldots,m \qquad \longleftarrow$$

m vincoli di **covering**

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1,\ldots,n \qquad \longleftarrow$$

n vincoli di interezza

NOTA

Nel modello di set covering tutti i vincoli sono di “necessità di scelta” (detti anche vincoli di copertura).

Set Covering (SC)

Formulazione generale di un modello di **set covering**

costo associato al sottoinsieme S_j

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

(SC)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad i = 1, \ldots, m \qquad \longleftarrow$$ m vincoli di **covering**

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, \ldots, n \qquad \longleftarrow$$ n vincoli di interezza

NOTA

Il modello di set covering può essere applicato in diversi contesti decisionali (anche non territoriali) in cui si richieda la "copertura di un insieme".

Set Covering (SC)

Problema di acquisto di software

Una facoltà universitaria deve acquistare dei software di programmazione matematica. Esistono 4 prodotti diversi, ciascuno in grado di risolvere un sottoinsieme diverso di problemi di PM, le cui caratteristiche e costi sono riportati in tabella.

Tipo di problema	**Prodotto**			
	1	**2**	**3**	**4**
LP	si	si	si	si
IP	no	si	no	si
NLP	no	no	si	si
Costo	3	4	6	14

F = insieme dei problemi di PM

S_j = sottoinsieme dei problemi risolvibili con il software j

Matrice A

$a_{ij} = 1$ se il software j può risolvere il problema i

$a_{ij} = 0$ altrimenti

NOTA

Il modello di set covering può essere applicato in diversi contesti decisionali (anche non territoriali) in cui si richieda la "copertura di un insieme".

Set Partitioning (SPAR)

Formulazione generale di un modello di **set partitioning**

Dati:

- un insieme (set) $F = \{1,2,\ldots,i,\ldots,m\}$

- una famiglia di sottoinsiemi di F data da $S_1, S_2, \ldots, S_j, \ldots, S_n$

- una matrice A di coefficienti in cui l'elemento (i,j) indica se l'elemento i di F appartiene a un certo S_j ($a_{ij} = 1$) oppure no ($a_{ij} = 0$):

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'elemento } i \in S_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

Set Partitioning (SPAR)

Formulazione generale di un modello di **set partitioning**

costo associato al sottoinsieme S_j

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

(SPAR)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \qquad i = 1,\ldots,m \quad \longleftarrow \quad \text{m vincoli di } \textbf{partitioning}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1,\ldots,n \quad \longleftarrow \quad \text{n vincoli di interezza}$$

NOTA

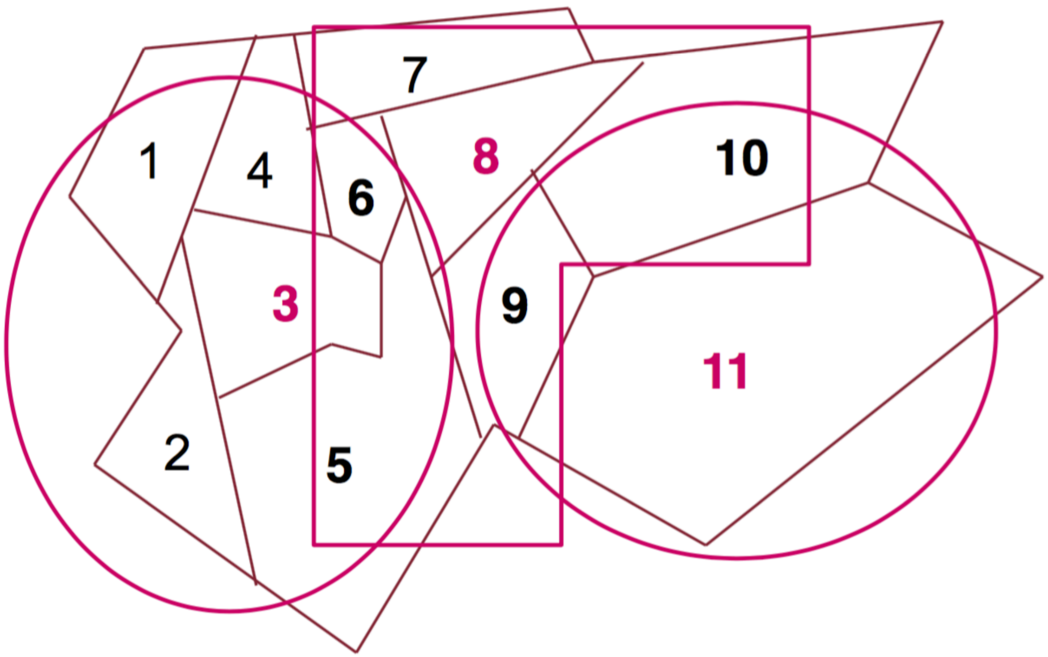
Se nel problema delle stazioni dei vigili del fuoco fosse stato richiesto che "ogni zona deve essere servita da **esattamente una** stazione" (vincoli di **scelta unica**), **avremmo dovuto** ricorrere ad un modello di set partitioning.

Come sarebbe stata la soluzione ottima?

Set Covering

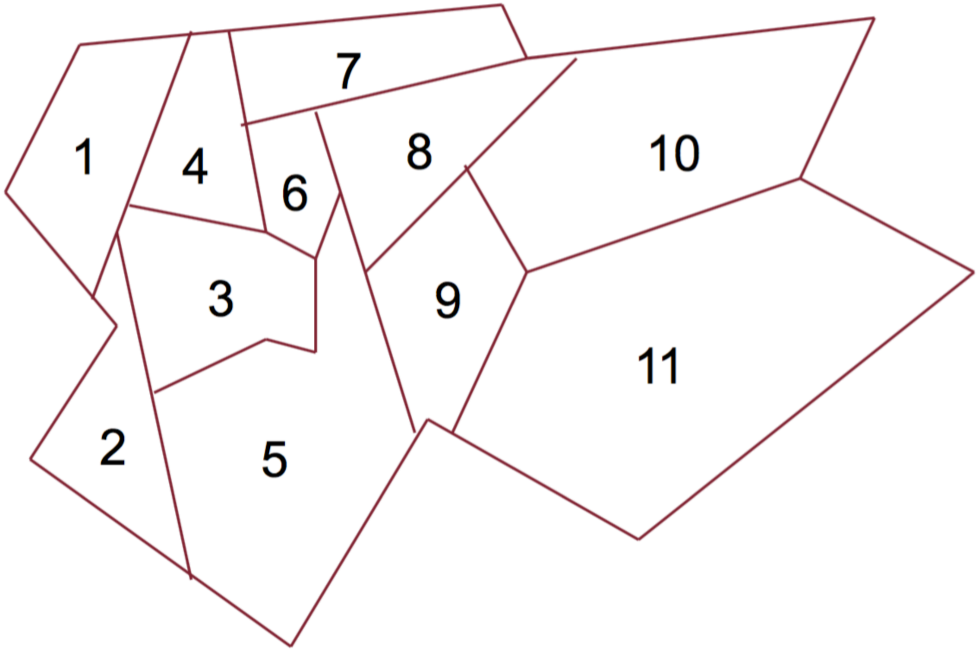
Nel caso con costi di apertura del servizio omogenei, una soluzione ottima del problema di set covering era la seguente:

In questa soluzione ci sono molte zone "coperte due volte" (le zone **5**, **6**, **9** e **10**).



Set Partitioning

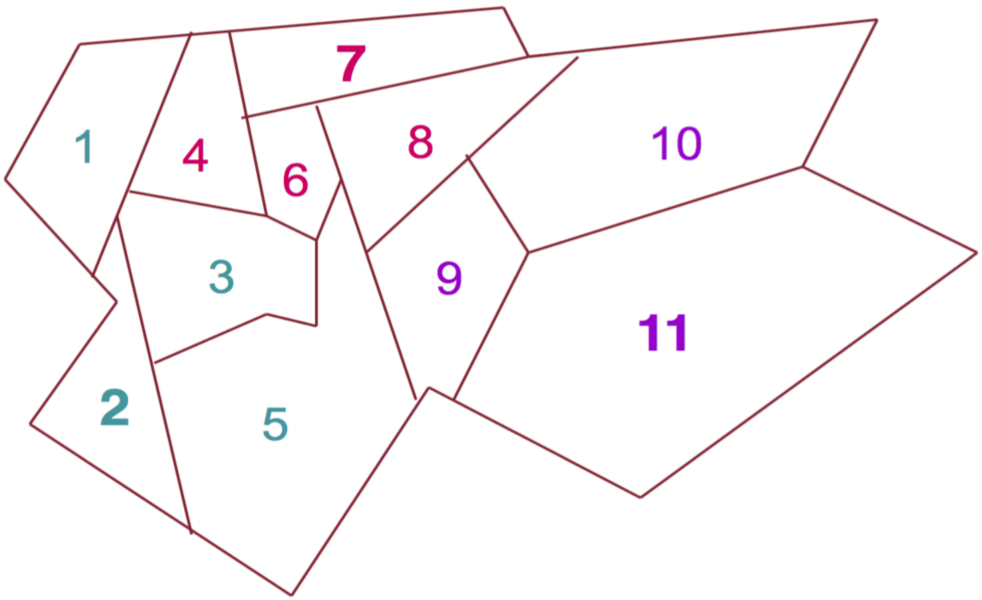
Come sarebbe fatta una soluzione se il problema fosse formulato con un modello di **set partitioning?**



Set Partitioning

Come sarebbe fatta una soluzione se il problema fosse formulato con un modello di **set partitioning?**

Una soluzione del problema di set partitioning con **tre servizi aperti** è la seguente:



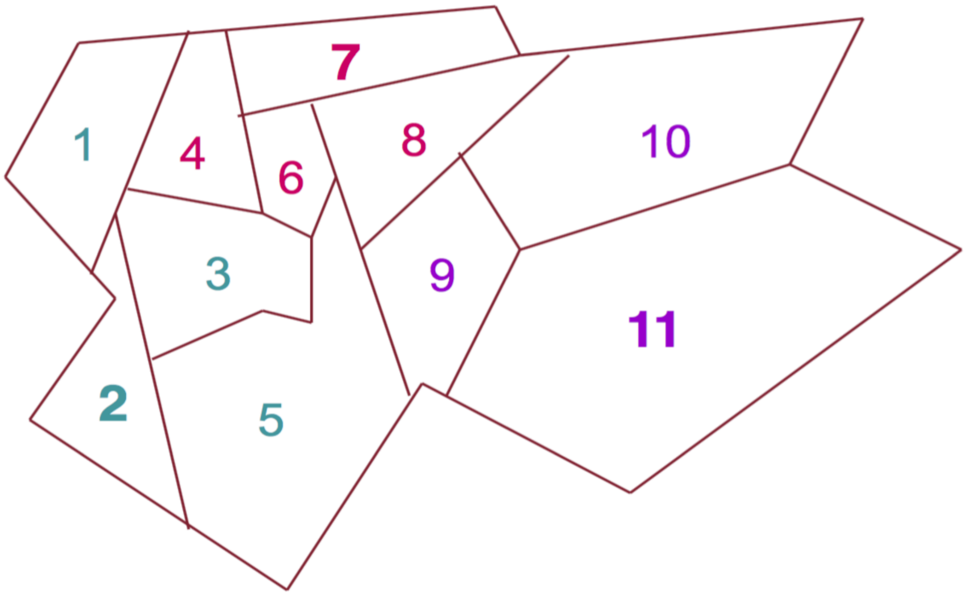
In questa soluzione ogni zona è "coperta da **un solo punto di servizio**":

2 copre 2,1, 3, 5
7 copre 7, 4, 6, 8
11 copre 11, 9, 10

Set Partitioning

Come sarebbe fatta una soluzione se il problema fosse formulato con un modello di **set partitioning?**

Una soluzione del problema di set partitioning con **tre servizi aperti** è la seguente:



NOTA
In questo caso si riesce a trovare una soluzione ottima del problema di set partitioning con valore della f.o. pari a 3 (3 punti di servizio aperti), proprio come nel problema di set covering.

Set Partitioning e Set Covering

Più in generale ciò non è garantito a causa del fatto che i vincoli del modello di set partitioning sono più restrittivi di quelli del corrispondente modello di set covering.

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{(SC)} \quad \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1} \quad i = 1,\dots,m \qquad \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1} \quad i = 1,\dots,m \quad \text{(SPAR)}$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1,\dots,n \qquad x_j \in \{0,1\} \quad j = 1,\dots,n$$

In generale vale quanto segue:

- una soluzione ammissibile del problema (SPAR) è sempre soluzione ammissibile del problema (SC);
- non è detto invece che valga il viceversa.

NOTA

Nel caso con costi diversi per localizzazioni diverse, anche a parità di numero di stazioni di servizio aperte, **il costo della soluzione di (SPAR) può essere più elevato di quella di (SC)**. Nell'esempio 30 invece di 18.

Set Partitioning: Applicazione

In alcune applicazioni le ipotesi del problema non permettono di adottare un modello di (SC), ma richiedono necessariamente la formulazione di un modello di (SPAR).

Esempio

Problemi di distrettizzazione elettorale, scolastica, sanitaria, ecc., in cui, per motivi di gestione, **ogni cittadino deve essere assegnato ad un unico servizio** (impossibilità di copertura multipla).

I problemi di **distrettizzazione territoriale** prevedono una serie di condizioni che limitano le possibilità di partizione del territorio e si basano su alcuni criteri che concorrono a stabilire la struttura e il costo di un "distretto ammissibile".

Set Partitioning: Applicazione

Un esempio semplificato che illustra l'applicazione di un modello (SPAR) per il problema della **distrettizzazione elettorale** è riportato in "3_DispensePLI_RICCA.pdf".

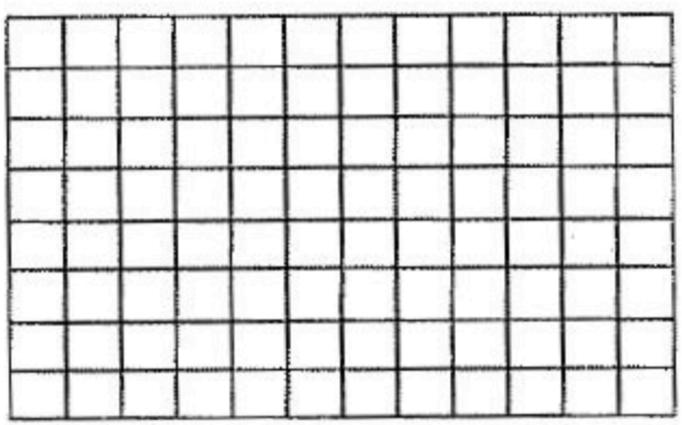
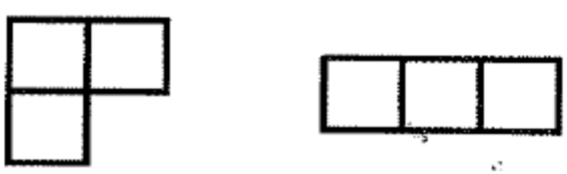


FIGURA 3.11 – Pianta della città suddivisa in 96 zone elementari.

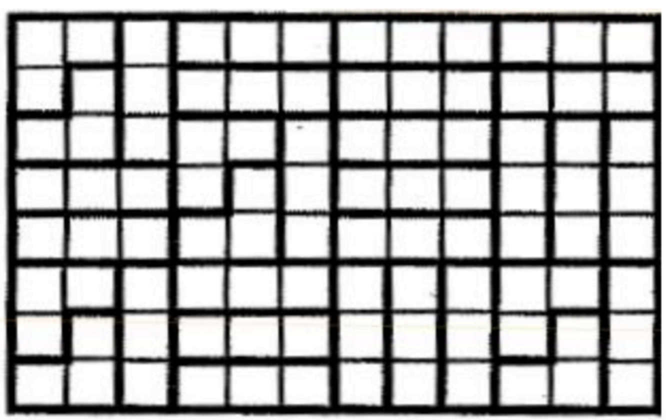
È dato un territorio partizionato in zone territoriali elementari o microzone (insieme F).

I possibili distretti sono insiemi di microzone adiacenti e con la struttura mostrata in basso a sx (sottoinsiemi di F).

Ciascun distretto è caratterizzato da un costo.



Struttura dei distretti



Soluzione ammissibile di SPAR

Set Packing (SPAC)

Formulazione generale di un modello di **set packing**

Dati:

- un insieme (set) $F = \{1,2,\dots,i,\dots,m\}$

- una famiglia di sottoinsiemi di F data da $S_1, S_2, \dots, S_j, \dots, S_n$

- una matrice A di coefficienti in cui l'elemento (i,j) indica se l'elemento i di F appartiene a un certo S_j ($a_{ij} = 1$) oppure no ($a_{ij} = 0$) (possibilità di impaccamento):

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'elemento } i \in S_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{array}$$

Set Packing (SPAC)

Formulazione generale di un modello di **set packing**

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

(SPAC)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, \dots, n$$

Set Packing (SPAC)

Formulazione generale di un modello di **set packing**

utilità associata al sottoinsieme S_j

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

(SPAC)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \qquad i = 1,\dots,m \quad \leftarrow$$ m vincoli di **packing**

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1,\dots,n \quad \leftarrow$$ n vincoli di interezza

Quali sono analogie e differenze tra (SPAC) e (SC) e (SPAR)?

Set Packing: Applicazione

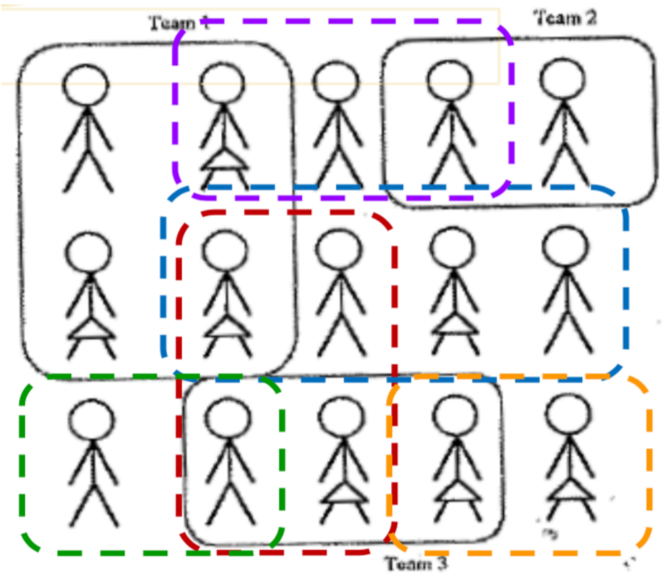
Un esempio che illustra l'applicazione di un modello (SPAC) per il problema della **formazione di gruppi di lavoro** è riportato in "3_DispensePLI_RICCA.pdf".

(SPAC)

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \quad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1,\ldots,n$$



Problema della Selezione di gruppi

È dato un insieme di m professionisti e un elenco di n progetti da realizzare, ciascuno caratterizzato da un suo valore (o utilità) c_j. Per ogni progetto j è possibile individuare un sottoinsieme di professionisti in grado di realizzare il progetto (gruppo j).

Il problema è selezionare i gruppi in modo tale che l'insieme dei progetti ad essi corrispondenti (progetti da realizzare) sia di valore totale massimo sotto la condizione che ogni professionista può essere incluso in **al più un gruppo**.

ESERCIZIO

La Fin-ACME riceve pagamenti da tutti gli Stati Uniti. A causa dell'organizzazione del sistema bancario vi sono dei ritardi tra il momento in cui il versamento è effettuato e il momento in cui il capitale diventa disponibile. Questi ritardi sono maggiori quando il versamento avviene fuori piazza. Si supponga di ricevere pagamenti dalle quattro regioni degli USA (West, Midwest, East, e South) e che il valore medio dei pagamenti giornaliero sia: $70,000 dal West, $50,000 dal Midwest, $60,000 dal East, e $40,000 dal South. La mancata disponibilità del denaro (e quindi l'impossibilità di reinvestirlo) ha un costo equivalente ad un tasso del 20% annuo, la Fin-ACME sta valutando l'opportunità di aprire degli uffici di riscossione (*lockbox*) in Los Angeles, Chicago, New York, Atlanta. La gestione di un lockbox costa $50,000 per anno. Sapendo che i ritardi medi saranno quelli riportati in tabella formulare un modello di programmazione lineare intera che permetta di decidere quale lockbox dovranno essere aperti e a quali di essi le differenti regioni dovranno fare riferimento.

Ritardi medi in giorni

	L.A.	Chicago	N.Y.	Atalanta
West	2	6	8	8
Midwest	6	2	5	5
East	8	5	2	5
South	8	5	5	2

Costo annuale ritardi in migliaia di dollari

	L.A.	Chicago	N.Y.	Atalanta
West	28	84	112	112
Midwest	60	20	50	50
East	96	60	24	60
South	64	40	40	16