Funzione lineare:

- f a n variabili reali è lineare se:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\alpha f(x) = f(\alpha x)$$

- Una qualsiasi funz. reale si può scrivere come

$$f(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = c^T x$$

Dim:

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ vett. canonico

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \overbrace{f(e_1)}^{c_1} + \ldots + x_n \overbrace{f(e_n)}^{c_n} \quad \text{OK}$$

Geometria della PL (slide 02)

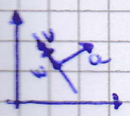
$a_1 x_1 + a_2 x_2 = C$ famiglia rette parallele con $\begin{cases} a_1, a_2 \text{ reali fissati} \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$

Il vettore $a^T = (a_1, a_2)$ individua una direzione ORTOGONALE alle rette della famiglia $a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$ ed è orientato dalla parte in cui si trovano le rette della famiglia ottenute per valori crescenti di c cioè nel semipiano $a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq c$

DIMOSTRAZIONE:

- $a^T = (a_1, a_2)$ individua direzione ortogonale a $a^T x = c$ $c \in \mathbb{R}$

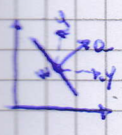
Fisso c e prendo due punti v e w appartenenti a $a^T x = c$



$$\begin{matrix} a^T v = c \\ a^T w = c \end{matrix} \Rightarrow a^T (v - w) = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = 90°$$

- Fissato c, $a^T = (a_1, a_2)$ è orientato verso il semipiano $a^T x \geq c$

Prendo due punti ($w \in a^T x = c$ e $y : a^T y \geq c$)



$$\begin{matrix} a^T w = c \\ a^T y \geq c \end{matrix} \Rightarrow a^T (y - w) \geq 0 \iff \cos\theta \geq 0 \iff \theta \leq 90°$$

CONVESSITA' IN R^N

DIM: • Un semispazio S in $\mathbb{R}^n$ è un insieme convesso

$\forall$ x, y in $S = \{ x \text{ in } \mathbb{R}^n : a^T x \leq b \}$ e z in $[x\, y]$ ho

$$a^T z = a^T [\alpha x + (1-\alpha) y] = \alpha a^T x + (1-\alpha) a^T y \leq \alpha b + (1-\alpha) b = b$$

LEMMA FONDAMENTALE (slide 04)

Dati vettori $a_1, \dots, a_k$ in $\mathbb{R}^n$, se il numero di vettori linearmente indipendenti tra $a_1, \dots, a_k$ è $< n$

$\Downarrow$

$\exists$ un vettore d in $\mathbb{R}^n$, $d \neq 0$:

$a_i^T d = 0 \quad i = 1, \dots, k$

DIMOSTRAZIONE:

Ho un numero di vettori linearmente indipendente tra $a_1, \dots, a_k$ strettamente minore di n

$\Downarrow$

$A_{k \times n}$, (matrice con righe i vettori $a_1, \dots, a_k$),

ha

$R(A) < n$

$\Downarrow$

Le n colonne di A $(a_1, \dots, a_n)$ sono linearmente dipendenti, quindi esistono:

$d_1, \dots, d_n$ reali non tutti nulli:

$a_1 d_1 + \dots + a_n d_n = 0_k$

colonne di A

Che scrivendo rispetto alle righe

$a_i^T d = \emptyset \quad , i = 1, \dots, k \quad , d \neq 0$

TEO. CARATTERIZZ. PUNTI ESTREMI DI P (slide 04)

Dato poliedro $P = \{ x \text{ in } \mathbb{R}^n : A_{m \times n} x \geq b_m \}$ e x in P

x è punto estremo di $P \iff \exists$ n righe a_i, $i = 1, \dots, n$ tra le m della matrice A:

- $i \in I(x)$ (Vincolo i attivo in x)
- a_i, $i = 1, \dots, n$, sono linearmente indipendenti

DIMOSTRAZIONE

• C.N. per assurdo → Hp: $x \in P$ è punto estremo di P

$\Downarrow$

Ts: in $I(x)$ ho n vincoli lin. indipendenti

(Assumo che $|I(x)| = n$)

Suppongo per assurdo che il numero k di vincoli lin. indipendenti in $I(x)$ ~~sono~~ sia $k < n$

$\Downarrow$

$$\exists \, d \text{ in } \mathbb{R}^n : a_i^T d = 0 \, , \, i \text{ in } I(x) \, , \, d \neq 0$$

Due vettori y e z in $\mathbb{R}^n$ definiti per $\varepsilon > 0$ come:

$$y = x - \varepsilon d$$
$$z = x + \varepsilon d \qquad \text{con } y \neq z$$

Per ε sufficientemente piccolo y e z sono punti di P

Quindi, verificando che x è combinazione convessa di y e z:

$$0.5y + 0.5z = 0.5(x - \varepsilon d) + 0.5(x + \varepsilon d) = x$$

$\Downarrow$

$$x = 0.5y + 0.5z$$

DIMOSTRAZIONE

- per i in $I(x)$ $\quad (a_i^T d = 0)$

$a_i^T y = a_i^T (x - \varepsilon d) = a_i^T x = b_i$

$a_i^T z = a_i^T (x + \varepsilon d) = a_i^T x = b_i$

- per i non in $I(x)$ $\quad (a_i^T d \neq 0, a_i^T x > b_i)$

$a_i^T y = a_i^T x - \varepsilon a_i^T d \geq b$

$a_i^T z = a_i^T x + \varepsilon a_i^T d \geq b$

Per Hp x è punto estremo, mentre questa è definizione di punto intermedio!

$\boxed{\text{CONTRADDIZIONE}}$ $\Rightarrow$ i vincoli attivi in x lin. indip sono n

• C. S. per Assurdo → Hp: $x \in P$ e ho n vincoli lin. indipend. in $I(x)$

⇓

Ts: x è punto estremo di P

Siano a_i^T in $I(x)$ n righe linearmente indipendenti

Supponiamo PA che x non sia punto estremo di P.

⇓

Essendo x punto intermedio devono esistere due punti y e z con $y \neq z \neq x$:

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z \qquad \lambda \text{ in } (0,1)$$

y e z sono in P $\Rightarrow$ $a_i^T y \geq b_i$, $a_i^T z \geq b_i$

ma per i in $I(x)$

$$a_i^T y = b_i \quad , \quad a_i^T z = b_i$$

Ma allora $a_i^T x = b_i$, i in $I(x)$ ammette tre soluzioni $x \neq y \neq z$

CONTRADDIZIONE → devo avere un unica soluzione!

x è punto estremo di P

COROLLARIO 1:

$$P = \{x \text{ in } \mathbb{R}^n : A_{m \times n} x \geq b_m\}$$

Se $A_{m \times n}$ ha un numero di righe lin. indipendenti $< n$

⇓

P non ha vertici (punti estremi)

In particolare P non ha vertici se $m < n$

↳ vincoli del sistema

TEO. 1 , REGIONE AMMISSIBILE (slide 05)

$P = \{ x \text{ in } \mathbb{R}^n : A_{m \times n} x \geq b_m \}$ con $m \geq n$, $P \neq \emptyset$

$\Downarrow$

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. P non contiene rette
2. P ha almeno un vertice
3. $\exists$ n vettori tra a_i^T, $i = 1, \dots, m$ lin. indipendenti

DIMOSTRAZIONE

1 => 2

$P \neq \emptyset$ => consideriamo un x^0 in P e $I(x^0)$

Ho 2 casi → (a) $\exists$ n righe a_i, con i in $I(x^0)$ lin. indipendenti

(b) il numero di righe a_i con i in $I(x^0)$ lin. indipendenti è $k < n$

(a) => Per teo. caratterizzazione, x^0 è vertice di P

(b) => Per il Lemma $\exists$ $d \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$: $a_i^T d = 0$, i in $I(x^0)$

Considero la retta

$x^0 + \lambda d$ (λ in $\mathbb{R}$)

e $z = x^0 + \lambda d$ un punto della retta

$\Downarrow$

$\forall$ i in $I(x^0)$ ho:

$a_i^T z = a_i^T (x^0 + \lambda d) = a_i^T x^0 + \lambda a_i^T d = a_i^T x^0 = b_i$

↳ Cioè, i vincoli attivi in x^0 lo sono su tutti i punti z della retta

P per ipotesi non contiene rette ↳ $\exists$ una riga a_j non in $I(x^0)$ per cui il vincolo j è violato da qualche z lungo d

$\Downarrow$

$\exists$ $j \notin I(x^0)$ e $\lambda^* \in \mathbb{R}$:

$a_j^T z^* = a_j^T (x_0 + \lambda^* d) = b_j$

$\Downarrow$ ho un nuovo punto z^* dove ho un vincolo attivo, che non ho x^0

Quindi in z^* ho un numero di vincoli attivi linearmente indipendenti maggiori rispetto a x^0

$|I(x^0)| = k < |I(z^*)| = k + 1$

↳ Quindi ho di nuovo i due casi

(a) (b)

$\Downarrow$

Dopo al più n passi avrò un punto x^* con n vincoli attivi lin. indipendenti

P ha almeno un vertice!

② => ③ Verificato per il teorema di caratterizzazione
Se x vertice => $\exists$ n vincoli attivi che corrispondono a n righe lin. indipendenti tra le m righe a_i $i = 1,..,m$ di A

③ => ①

Supponiamo per assurdo che P contenga una retta:
$\exists$ $x \in P$, $d \in \mathbb{R}^n$ (direzione) ($d \neq 0$):
$z = x + \lambda d$ $\in$ a P $\forall \lambda$ reale
$\Downarrow$
$a_i^T z = a_i^T (x + \lambda d) \geq b_i$, $i = 1,...,m$, $\lambda \in \mathbb{R}$
devo avere anche che
$a_i^T d = 0$ $\forall$ $i = 1,..,m$ (per ammissibilità del punto)
$\Downarrow$
$a_i^T d = 0$ per $i = 1,...,n$ con d in $\mathbb{R}^n$ e $d \neq 0$
↓
Contraddizione: → $a_1, ..., a_n$ sarebbero linearmente dipendenti
$\Downarrow$
P non può contenere rette

|ESISTENZA VERTICI|

$P = \{x$ in $\mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ → P ammette sempre almeno un vertice.
P è nel primo ortante => P non può contenere rette.

|TEO. 1 , REGIONE AMMISSIBILE|

$P \neq \emptyset$ => P possiede almeno un vertice se e solo se non contiene rette.

|TEO. 2 , TEO FONDAMENTALE DELLA PL (OTTIMALITA')|

Problema di PL $\min\limits_{Ax \geq b} c^T x$ (P1) con $P = \{x$ in $\mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ anche, non contiene rette.
$\Downarrow$
Una sola è vera delle seg. affermazioni:

① P_1 non è ammissibile ($P = \emptyset$)
② $P \neq \emptyset$ e $P1$ è illimitato inferiormente
→ ③ $P \neq \emptyset$ e $P1$ ammette ottimo finito e almeno una delle soluzioni ottime di $P1$ è vertice di P

COROLLARIO 4

P è politopo non vuoto $\Rightarrow$ problema di PL

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$

ha ottimo finito in un vertice.

TEO. 3

Dato Problema di PL $\min c^T x$, $Ax \geq b$ (P1) con regione ammissibile

$$P = \{x \text{ in } \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$$

Allora, l'insieme delle soluzioni ottime di P1 è un poliedro contenuto in P (Q)

DIMOSTRAZIONE:

$P = \emptyset \Rightarrow Q = \emptyset$

P ha ottimo illimitato $\Rightarrow Q = \emptyset$

$P \neq \emptyset$ e $\exists$ almeno una soluzione ottima x^* in Q con valore ottimo finito $z^* = z(x^*) = c^T x^*$

$$\Downarrow$$
$$Q^* = \{x \text{ in } \mathbb{R}^n : c^T x = z^*\}$$

Per ogni soluzione ottima di P1 y:

vale $z(y) = c^T y = z^* \rightarrow y$ in Q^*

e y è ammissibile $\rightarrow$ y in P

Quindi

$Q = \underset{x \text{ ammissibili}}{P} \cap \underset{x : c^T x = z^*}{Q^*}$, quindi Q sono le soluzioni ottime di P1

Essendo P e Q^* poliedri $\rightarrow$ Q è un poliedro contenuto in P

TEOREMA

P poliedro non vuoto. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. x è vertice di P
2. x è punto estremo di P
3. x è SBA del sistema S in FS equivalente a P

$$S = \{x \text{ in } \mathbb{R}^n : A_{m \times n} x = b_m, \ x \geq 0\}, \quad m < n, \quad R(A) = m$$

x è SBA di S $\Leftrightarrow$ in corrispondenza di una scelta di indici B in $\{1, .., m\}$, A può essere decomposta in A_B e A_N in modo tale che

$x = [x_B, x_N]$ con $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$

dove A_B^{-1} è quadrata di ordine m : $A_B^{-1} b \geq 0$

TEO FCA

Dato un problema in FS (P) $\min c_n^T x_n$, $A_{m \times n} x_n = b_m$, $x_n \geq 0$

$\exists$ FCA equivalente a (P) $\iff$ $\exists$ una soluzione di FS a componenti non negative ($P \neq \emptyset$)

TEO 5.4.14 (slide 07)

Il numero di SBA (cioè vertici) è finito e pari al più a $\binom{n}{m}$

infatti può essere minore poiché fissate m colonne di A queste potrebbero non essere lin. indipendenti o potrebbero avere SB associata non ammissibile

COROLLARIO 5.4.16

$\bar{x} \neq 0_n$ soluzione $\in$ a P è SBA $\iff$ colonne di A corrispondenti alle componenti di $\bar{x} > 0$ sono lin. indipendenti

OSS:

A ciascuna base ammissibile B (di A) corrisponde una sola SBA $x = (B^{-1}b \quad 0_{n-m})^T$

Una SBA può essere associata a due basi ammissibili diverse

Degenerazione x_B ha $A_B^{-1} b \geq 0$ cioè gli 0 sono più di n-m

TEO. 5.4.19

Se una SBA $\bar{x}$ è non degenere $\Rightarrow$ $\exists$ una ed una sola base ammissibile B:

$\bar{x}_B = B^{-1} b$

$\bar{x}_N = 0_{n-m}$

DIMOSTRAZIONE

$\tilde{B}$ e B basi di A diverse

$\tilde{x}$ è SBA di $\tilde{B}$: $\tilde{x}_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1} b$

$\tilde{x}_{\tilde{N}} = 0_{n-m}$

$\tilde{B} \neq B \Rightarrow$ almeno una colonna di A (es. i-esima) appartiene a B e non appartiene a $\tilde{B}$

Quindi

$i \in I_{\tilde{N}} \Rightarrow \tilde{x}_i = 0$

$i \in I_B \Rightarrow \bar{x}_i > 0$ ($\bar{x}$ non degenere per Hp)

$\Downarrow$

$\tilde{x} \neq \bar{x}$ Quindi, ogni base ammissibile diversa da B, produce una SBA $\neq \bar{x}$

$\Downarrow$ Verificato!

TEO 5.5.1

Data base ammissibile B di A del problema
$$\min c^T x \quad Ax = b \quad x \geq 0_n$$
$(x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n})$

Se il vettore dei costi ridotti è non negativo:

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m}$$
$$\Downarrow$$

la SBA $\bar{x}$ associata alla base B $(\bar{x}_B = B^{-1}b \quad \bar{x}_N = 0_{n-m})$ è ottima per il problema

DIMOSTRAZIONE

- Se γ è non negativo $(\geq 0) \Rightarrow$ per un qualunque vettore ammissibile x risulta:

$$c^T x \geq c^T \bar{x} \quad (\text{Problema di minimo, } \bar{x} \text{ è ottima})$$

Sia x un qualsiasi punto ammissibile del problema, si ha:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

$\downarrow$ ricordando che $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N$$

Per
- ipotesi $\gamma \geq 0$
- ammissibilità di x $\quad x_N \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$c^T x \geq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T 0_{n-m} = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}$$

Quindi $\bar{x}$ è ottima per il problema

COROLLARIO 5.5.2

Data base ammissibile B di A del problema precedente
se il vettore dei costi ridotti è positivo:

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B > 0_{n-m}$$
$$\Downarrow$$

la SBA $\bar{x}$ associata alla base B $(\bar{x}_B = B^{-1}b \quad \bar{x}_N = 0_{n-m})$ è l'unica soluzione ottima per il problema

DIMOSTRAZIONE

Come in precedenza ho che per ogni vettore x ammissibile

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N > c_B^T B^{-1} b = c^T \bar{x}$$

con $\gamma > 0$ per ipotesi e
$x \neq \bar{x}$ deve avere $\begin{cases} x_N \geq 0_{n-m} \\ x_N \neq 0_{n-m} \end{cases}$

$\boxed{\text{TEO } 5.5.6}$ (criterio ottimalità)

Data base ammissibile B di A del problema precedente

Se x^* SBA associata a B ($x^*_B = B^{-1}b$ $x^*_N = 0_{n-m}$) è ottima per il problema e se è un vertice non degenere

$$\Downarrow$$

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m}$$

Se non è così:

$$\{i \in \{1, \dots, n-m\} : \gamma_i < 0\} \neq \emptyset$$

$$\Downarrow$$

(criterio di illimitatezza)

$\boxed{\text{TEO } 5.5.7}$

Data base ammissibile B di A del problema precedente

Se per qualche indice $i \in \{1, \dots, n-m\}$ abbiamo che:

$\gamma_i < 0$ e la colonna i-esima di $B^{-1}N$ (π_i) è ≤ 0

$$(B^{-1}N)_i \leq 0_m$$

$$\Downarrow$$

il problema è illimitato inferiormente

$\boxed{\text{TEO } 5.5.9}$ (Scelta di h)

Data matrice di base ammissibile B del problema precedente

sia $\bar{x}$ SBA associata e γ il corrispondente vettore dei costi ridotti

Se $h \in \{1, \dots, n-m\}$ è indice:

$$\gamma_h \leq 0$$

$$\Downarrow$$

il punto $x(\rho) = \begin{cases} x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho B^{-1}Ne_h \\ x_N(\rho) = \rho e_h \end{cases}$

(con $\rho \geq 0$) ha valore della f.o. non superiore a quello di $\bar{x}$

$\hookrightarrow c^T x(\rho) \leq c^T \bar{x}$

DIMOSTRAZIONE

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \underbrace{\gamma^T e_h}_{= \gamma_h}$$

$$\Downarrow$$

· Per ipotesi $\gamma_h \leq 0$

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \gamma_h \leq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}$$

$$\Downarrow$$

il valore della f.o in $x(\rho)$ è minore/uguale del valore della f.o. in $\bar{x}$

$\boxed{\text{TEO 5.5.11}}$ (Scelta scalare ρ)

Data base ammissibile B del problema precedente

Sia
- γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti
- h indice : $\gamma_h < 0$
- $\bar{\rho}$ scalare dato da $\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ \pi_{ih} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}$

$\Downarrow$

i punti $x(\rho)$ con $\rho \in [0, \bar{\rho}]$ sono punti ammissibili per il problema

$\boxed{\text{TEO 5.5.13}}$ (Criterio del rapporto minimo)

Data base ammissibile $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_m})$ del problema precedente

Sia
- γ vettore coeff. ridotti
- h indice : $\gamma_h < 0$
- $\bar{\rho}$ scalare e k indice dati da:

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}}$$

$\Rightarrow$ il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ è SBA del problema e la matrice di base ammissibile $\tilde{B}$ associata è data da

$$\tilde{B} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m})$$

$\boxed{\text{TEO 5.5.16}}$

Sia T matrice $T = I_m + \frac{1}{\pi_{kh}} (e_k - \pi_h) e_k^T$

$\Downarrow$

$$\tilde{B}^{-1} = T B^{-1}$$

$\boxed{\text{TEO 5.5.17}}$

Sia T matrice definita come in precedenza

$\Downarrow$

$$\tilde{B}^{-1} b = T(B^{-1} b)$$

$$\tilde{B}^{-1} \tilde{N} = T(\pi_1, \dots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \dots, \pi_{n-m})$$

COROLLARIO 5.5.18

T matrice precedente

$$\Downarrow$$

$$(e_u \mid \tilde{B}^{-1}\tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1}b) = T(\pi_h \mid \pi_1 \cdots \pi_{h-1}\, e_u\, \pi_{h+1} \cdots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b)$$

Quindi

$$M = (\pi_h \mid \pi_1 \cdots \pi_{h-1}\, e_u\, \pi_{h+1} \cdots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b)$$

$$\tilde{M} = (e_u \mid \tilde{B}^{-1}\tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1}b)$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{M} = TM \quad \text{cioè} \quad \tilde{m}_i^T = t_i^T \begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_u^T \\ \vdots \\ m_m^T \end{pmatrix}$$

righe di $\tilde{M}$ — righe di T — righe di M

TEO 5.5.21 (Slide 08)

Se nell'applicare il metodo del simplesso non viene mai generata due volte la stessa base

$$\Downarrow$$

$\exists$ un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza prodotta dal metodo soddisfa il criterio di ottimalità o illimitatezza

DIMOSTRAZIONE

Se non sono soddisfatti i due criteri, si può generare una nuova BA diversa dalle precedenti!
Essendo un numero finito (e per ipotesi non ci sono ripetizioni) dopo un numero finito di passi non potranno più essere generate basi diverse dalle precedenti

$$\Downarrow$$

Necessariamente uno dei due criteri devono essere soddisfatti.

COROLLARIO 5.5.22

Se ogni SBA del problema è non degenere allora, in numero finito di passi, il metodo del simplesso converge alla soluzione ottima o conclude che il problema è illimitato inferiormente.

- SBA degeneri

Col simplesso vengono generate sequenze di BA uguali.
In questo caso il valore della f.o rimane costante e non cresce. Questo è possibile solamente se ad ogni iterazione $\bar{\rho} = 0$ $\Rightarrow$ in questo caso le basi $\{B_1, \dots, B_q\}$ corrispondono tutte allo stesso vertice (degenere)

TEOREMA 5.5.24 — Regola di Bland

→ • h + piccolo (indici)
• k + piccolo

Utilizzando la regola di Bland non viene mai generata due volte la stessa base e quindi (per Teo. 5.5.21) esiste un indice $t \geq 1$: la base B_t generata con il metodo del simplesso soddisfi il criterio di ottimalità/illimitatezza e il metodo quindi converge in un numero finito di passi

TEO 5.5.25 (slide 08, n°28)

TEO. DUALITÀ IN FORMA DEBOLE (slide 10)

• Consideriamo coppia P-D canonica.

Comunque prese due soluzioni x e y rispettivamente ammissibili per P e D, si ha:

$$y^T b \leq c^T x$$

DIMOSTRAZIONE

• x ammissibile per P $\rightarrow$ $Ax \geq b$, $x \geq 0$
• y ammissibile per D $\rightarrow$ $A^T y \leq c$, $y \geq 0$

Quindi abbiamo

Per:

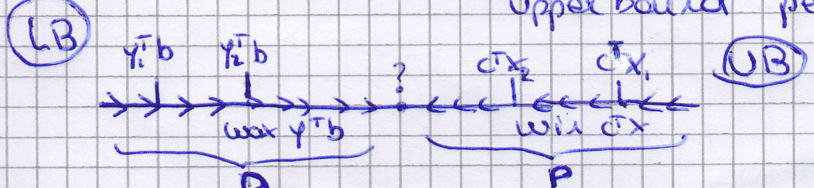
• $Ax \geq b$, $y \geq 0$ $\rightarrow$ $y^T A x \geq y^T b$
• $x \geq 0$, $A^T y \leq c$ $\rightarrow$ $y^T A x \leq c^T x$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y^T b \leq y^T A x \leq c^T x}$$ ok

Quindi una qualsiasi soluzione ammissibile y di D genera un lower bound finito $y^T b$ per la f.o di P, viceversa per $\underline{x \text{ e } P}$.

Upper bound per f.o di D



COROLLARIO 1

Dal teorema precedente si dimostra che:

① P illimitato => D non ammissibile
② D illimitato => P non ammissibile

DIMOSTRAZIONE

Per Assurdo, P illimitato e D ammissibile

se y è soluzione di D, per la dualità in forma debole ho:

$$y^T b \leq c^T x \quad \forall x \text{ ammissibile di } P$$
$$\Downarrow$$

$y^T b$ è un lower bound sul valore ottimo della f.o. di P => P è limitato

CONTRADDIZIONE

(Analogo D illimitato P ammissibile)

COROLLARIO 2, COND. SUFF. DI OTTIMALITÀ

Consideriamo coppia P-D. Sia

- $\bar{x}$ sol. ammissibile per P
- $\bar{y}$ sol. ammissibile per D

Se $\bar{y}^T b = c^T \bar{x}$ => $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime per P($\bar{x}$) e per D($\bar{y}$)

DIMOSTRAZIONE

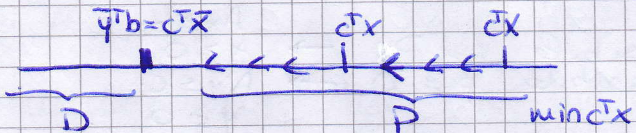
Per dualità in forma debole:

$$\bar{y}^T b \leq c^T x \quad \forall x \text{ ammissibile in } P$$

cioè $\bar{y}^T b$ è LB per f.o di P

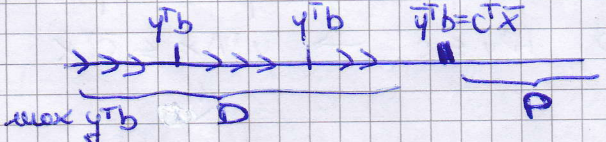
$$\Downarrow$$

- $\bar{x}$ è ottima per P perché raggiunge il LB



($y^T b \leq c^T \bar{x}$ $\forall y$ ammissibile di D)

- $\bar{y}$ è ottima per D perché raggiunge l'UB



TEO. DUALITÀ IN FORMA FORTE

Consideriamo la coppia P-D e supponiamo che sia P che D siano ammissibili.

$\Downarrow$

Sia P che D hanno ottimo finito x^* e y^*

$$y^{*T} b = c^T x^*$$

Quindi i valori ottimi di P e D coincidono.

TEO. COND. SCARTI COMPLEMENTARI

- x sol. ammissibile per P
- y sol ammissibile per D

condizione scarti complementari

$$\begin{matrix} x \text{ è ottima per } P \\ y \text{ è ottima per } D \end{matrix} \iff \begin{matrix} y^T(Ax-b)=0 \\ (c-A^Ty)^T x = 0 \end{matrix}$$

(Condizioni di ortogonalità)

DIMOSTRAZIONE

SUFFICIENZA
- Ipotesi: Valgono condizioni di ortogonalità

$\Downarrow$

- tesi: x ottima per P, y ottima per D

$$\begin{matrix} y^T(Ax-b)=0 \\ (c-A^Ty)^Tx=0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} y^TAx = y^Tb \\ c^Tx = y^TAx \end{matrix} \Rightarrow y^Tb = c^Tx$$

condizione sufficiente ottimalità

NECESSITÀ
- Ipotesi: x e y ottime

$\Downarrow$

- tesi: valgono condizioni di ortogonalità

$$\left.\begin{matrix} x \text{ ottima per } P \xrightarrow{\text{Dualità forte}} y^Tb = c^Tx \\ y \text{ ottima per } D \xrightarrow{\text{Dualità debole}} y^Tb \le y^TAx \le c^Tx \end{matrix}\right] \to y^Tb = y^TAx = c^Tx$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} y^T(Ax-b)=0 \\ (c-A^Ty)^Tx=0 \end{cases}$$

Altra formulazione equivalente:

$$\begin{matrix} s = (Ax-b) \ (m \times 1) \\ t = (c-A^Ty) \ (n \times 1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y^Ts=0 \\ t^Tx=0 \end{cases}$$

TEO. PL E SISTEMI LINEARI

$\bar{x}$ ammissibile per P
$\bar{y}$ ammissibile per D

Consideriamo sistema $S: \begin{cases} c^T x \le y^T b \\ Ax \ge b \\ x \ge 0 \\ A^T y \le c \\ y \ge 0 \end{cases}$

① Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è soluzione di S $\Rightarrow$ $\bar{x}$ ottima per P, $\bar{y}$ ottima per D

② Se $\bar{x}$ soluzione ottima di P, $\bar{y}$ soluzione ottima di D $\Rightarrow$ $(\bar{x}, \bar{y})$ è soluzione di S

DIMOSTRAZIONE

SUFFICIENZA ① Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è soluzione di S, soddisfa $c^T\bar{x} \le \bar{y}^T b$

Siccome x e y sono ammissibili → teo. dualità forma debole

$\bar{y}^T b \le c^T \bar{x}$

$\Downarrow$

$\bar{y}^T b = c^T \bar{x}$ $\Rightarrow$ $\bar{x}$ ottima per P, $\bar{y}$ ottima per D

Cond. suff. ottimalità

NECESSITÀ ② Se $\bar{x}$ sol. ottima di P, $\bar{y}$ sol. ottima di D $\Rightarrow$ sono ammissibili $\rightarrow$ $\begin{matrix} Ax \ge b \\ x \ge 0 \end{matrix}$ e $\begin{matrix} A^T y \le c \\ y \ge 0 \end{matrix}$ sono soddisfatte

Per teorema dualità in forma forte ho:

$\bar{y}^T b = c^T \bar{x} \Rightarrow c^T x \le y^T b$ è soddisfatta

$\Downarrow$

$(\bar{x}, \bar{y})$ è soluzione di S

TEO. 1 RILASSAMENTO PROBLEMI OC (Slide 16)

OC: ottimizzazione combinatoria

(P) $z(P) = \min_{x \in X} f(x)$

con $X \subseteq Y$, $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X$

(PR) $z(PR) = \min_{x \in Y} g(x)$

PR rilassamento di P

$x^* \in Y$ soluzione ottima di PR **Se:** $x^* \in X$ e $f(x^*) = g(x^*)$
$\Downarrow$
x^* è ottima anche di P

DIMOSTRAZIONE

(P) minimo, x^* sol ottima di (PR) $\left(\begin{array}{l} x^* \in X \\ f(x^*) = g(x^*) \end{array} \right)$

Per assurdo

x^* non è soluzione ottima di P

$\Downarrow$

deve esistere un $\bar{x} \in X$ diverso da x^*:

$f(\bar{x}) < f(x^*)$

$\Downarrow$ Per ipotesi $f(x^*) = g(x^*)$

$f(\bar{x}) < f(x^*) = g(x^*)$

$\bar{x} \in X \Rightarrow$ Per la condizione della definizione di rilassamento si ha:

$g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) < f(x^*) = g(x^*)$

$\Downarrow$

x^* non è ottimo per PR ← CONTRADDIZIONE

RILASSAMENTO PROBLEMI OC (slide 16)
OC → ottimizzazione combinatoria

(P) $z(P) = \min_{x \in X} f(x)$

(PR) $z(PR) = \min_{x \in Y} g(x)$

X e Y in $\mathbb{R}^n$
$f(x)$ e $g(x)$ funzioni reali definite su $\mathbb{R}^n$

PR si dice rilassamento di P se:
- $X \subseteq Y$
- (Per min) $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X$

((Per max) $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in X$)

PROPRIETÀ 1:
$X \subseteq Y$
Se PR non ammette soluzioni ammissibili ($Y = \emptyset$) $\Rightarrow$ P non ammette soluzioni ammissibili ($X = \emptyset$)

PROPRIETÀ 2:
$g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X$
se PR ammette soluzioni ammissibili ($Y \neq \emptyset$) $\Rightarrow$ il valore ottimo $z(PR)$ di PR non può essere peggiore del valore ottimo $z(P)$ di P
$\downarrow$
$z(PR) \leq z(P)$

DIMOSTRAZIONE
Problema di minimo.
$g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X$

$z(PR)$ è il valore ottimo del problema rilassato PR
$\Downarrow$
$z(PR) \leq g(x) \quad \forall x \in Y \supseteq X$
$\Downarrow$
$z(PR) \leq g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X$ $\Rightarrow z(PR) \leq z(P) = \min_{x \in X} f(x)$

COROLLARIO 1 | RILASSAMENTO PROBLEMI PLI

Se x^* è soluzione ottima del rilassamento continuo (P_a) ed è intera

$\Downarrow$

x^* è sol. ottima del problema intero

DIMOSTRAZIONE

$x^* \in P_a$

$x^* \in \mathbb{Z}^n$ (è intera) $\Rightarrow x^* \in P_a \cap \mathbb{Z}^n \rightarrow x^* \in X$

Grazie al TEO 1 si conclude che x^* è sol. ottima anche di P

(P_a e Q hanno stessa f.o)

- Riloss. continuo
  $\min c^T x$
  $x \in P_a$
- Problema intero
  $\min c^T x$
  $x \in P_a$
  $x \in \mathbb{Z}^n$

COROLLARIO 2, COND. SUFFICIENTE OTTIMALITÀ

- $x^* \in P_a$ soluzione ottima di P_a (valore ottimo di P_a è $c^T x^*$)
  (non necessariamente a componenti intere)
- $\bar{x}$ ammissibile per Q

Se $c^T \bar{x} = c^T x^* \Rightarrow \bar{x}$ è soluzione ottima di Q

(Conseguenza TEO 1)

DIMOSTRAZIONE

Prob. max: $\underbrace{z(P_a)}_{UB} \geq z(Q) \rightarrow c^T x = c^T x^* \rightarrow$ x è ammissibile per Q
$z(Q) = c^T x = c^T x^* = z(P_a)$
$\Downarrow$
$c^T x$ è il più grande valore che $z(Q)$ può assumere

Prob. min: $\underbrace{z(P_a)}_{LB} \leq z(Q) \rightarrow c^T x = c^T x^* \rightarrow$ x è ammissibile per Q
$z(Q) = c^T x = c^T x^* = z(P_a)$
$\Downarrow$
$c^T x$ è il più piccolo valore che $z(Q)$ può assumere

$\downarrow$

x ottimo nel min e nel max