

Esercizi di riepilogo sui Capitoli 1 – 5

1. Dare la definizione di funzione lineare.

R: Una funzione lineare di n variabili è una funzione del tipo

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

dove c_1, c_2, \dots, c_n sono numeri reali.

2. Dire quali delle seguenti funzioni è lineare.

(a) $2x_1 + x_1x_2 - x_3$

(b) $(\log 5)x_1 - x_{25}$

(c) $\sin x_1 - x_{25}$

(d) $x_1 - x_3 + 5x_4$

(e) $x_1 - x_3 + 5x_4 + 1$

(f) $\frac{x_1+2x_2-4x_3}{-x_1+2,5x_2+x_3}$

(g) $x_1 + x_2 + x_3^3$

R: (b) e (d). Attenzione (e) è la somma di una funzione lineare e di una costante; questo tipo di funzioni è chiamato *affine*. Geometricamente le funzioni lineari rappresentano iperpiani (rette nel caso di due solo variabili) *passanti per l'origine* mentre le funzioni affini rappresentano iperpiani (rette nel caso di due solo variabili) *che non necessariamente passano per l'origine*. Ovviamente ogni funzione lineare è anche affine (una funzione lineare può essere pensata come la somma di se stessa e della costante 0), ma il viceversa non è vero. Spesso nell'ambito della Programmazione Lineare si usa il termini *lineare* anche quando, a rigore, si dovrebbe usare la parola *affine*; vedi per esempio l'esercizio numero 7.

3. Se il valore di una funzione lineare nel punto $(2, 1, -1)$ è 4, qual è il valore della stessa funzione nel punto $(4, 2, -2) = 2(2, 1, -1)$? Sai dire qual è il nome della proprietà che hai utilizzato per dare la risposta?

R: Il valore è $8 = 2 \cdot 4$. La funzione lineare in questione ha ovviamente tre variabili. Ora, pur senza sapere qual è il valore dei coefficienti c_1 , c_2 e c_3 (vedi l'esercizio 1), sappiamo che $c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot (-1) = 4$. Quindi Possiamo concludere che

$$c_1(2 \cdot 2) + c_2(2 \cdot 1) + c_3(2 \cdot (-1)) = 2(c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot (-1)) = 2 \cdot 4 = 8.$$

Questa osservazione può essere generalizzata. Data una funzione lineare essa può essere scritta come $c^T x$. E quindi, se λ è una costante reale, ragionando come appena fatto, abbiamo che

$$c^T(\lambda x) = \lambda(c^T x).$$

In parole, se una funzione lineare ha un certo valore in un dato punto x , il valore della funzione in un punto ottenuto moltiplicando tutte le componenti di x per una data costante λ è uguale al valore della funzione in x moltiplicato per la stessa costante λ . Questa proprietà è chiamata *proporzionalità* o, in termini più matematici, *omogeneità*.

4. Se il valore di una funzione lineare nel punto $(2, 1, -1)$ è 4 e quello nel punto $(2, 0, 1)$ è 7, qual è il valore della stessa funzione in $(4, 1, 0) = (2, 1, -1) + (2, 0, 1)$? Sai dire qual è il nome della proprietà che hai utilizzato per dare la risposta?

R: Il valore è $11 = 4 + 7$. La funzione lineare in questione ha ovviamente tre variabili. Ora, pur senza sapere qual è il valore dei coefficienti c_1 , c_2 e c_3 (vedi l'esercizio 1), sappiamo che

$$c_1 2 + c_2 1 + c_3 (-1) = 4 \quad \text{e} \quad c_1 2 + c_2 0 + c_3 1 = 7.$$

Quindi possiamo concludere che

$$c_1(2+2) + c_2(1+0) + c_3(-1+1) = [c_1 2 + c_2 1 + c_3 (-1)] + [c_1 2 + c_2 0 + c_3 1] = 4 + 7 = 11.$$

Questa osservazione può essere generalizzata. Data una funzione lineare e due punti x e y , ragionando come appena fatto, abbiamo che

$$c^T(x + y) = c^T x + c^T y.$$

In parole, il valore di una funzione lineare in un punto z che è la somma di due punti x e y (cioè $z = x + y$) è uguale alla somma dei valori della funzione calcolata in x e in y . Questa proprietà è chiamata *sovrapposizione degli effetti* o, in termini più matematici, *addittività*.

5. Cos'è un *poliedro*?

R: Un poliedro è l'insieme di soluzioni di un sistema di equazioni o disequazioni lineari. Un'equazione lineare è un'espressione del tipo:

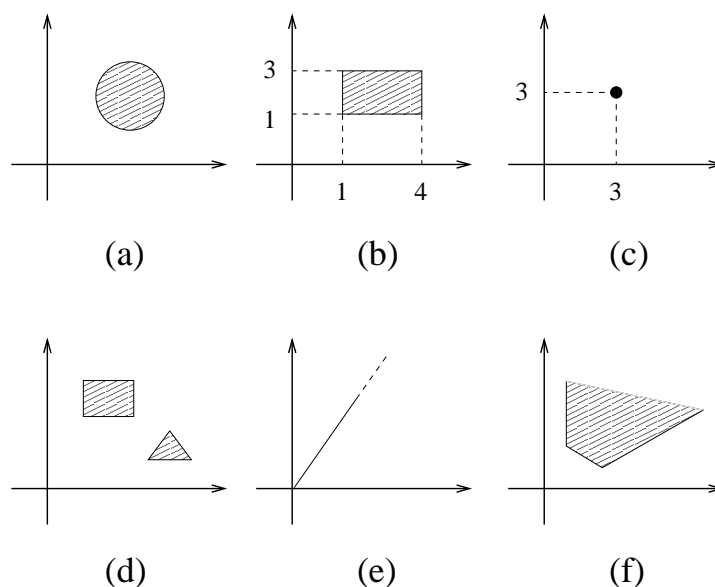
$$a^T x = b,$$

dove b è un numero (detto “termine noto”) e a è un vettore di coefficienti numerici. Una disequazione lineare è un'espressione del tipo

$$a^T x \leq b \quad \text{o} \quad a^T x \geq b.$$

Nella nostra definizione di poliedro, non consideriamo valide disequazioni con disuguaglianze strette (cioè $a^T x < b$ o $a^T x > b$).

6. Tra gli insiemi riportati in figura, quali sono i poliedri e quali i poliedri illimitati?



R: (b), (c), (e), (f). (b) è il poliedro più facilmente “riconoscibile”, non di meno anche gli altri sono soluzioni di sistemi lineari. In particolare in (c) è rappresentato un singolo punto, che può essere visto come la soluzione del sistema

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 \\x_2 &= 3.\end{aligned}$$

Altri esempi di poliedri “strani” sono l’insieme vuoto (che è l’insieme di soluzioni di un sistema incompatibile) e tutto lo spazio (che è l’insieme di soluzioni di un sistema “vuoto”, cioè di un sistema che non contiene nessun vincolo).

I poliedri illimitati sono (e) e (f). Questo è abbastanza intuitivo. Volendo precisare la nozione di poliedro limitato o illimitato, possiamo dire che un poliedro è limitato se esiste una costante positiva M , tale che, se x appartiene al poliedro, allora per ogni sua componente abbiamo $|x_i| \leq M$. Un poliedro che non è limitato è illimitato. Per il poliedro (b) possiamo prendere $M = 4$, per il poliedro (c) possiamo prendere invece $M = 3$. Quindi (b) e (c) sono poliedri limitati.

7. Definisci un problema di Programmazione Lineare (PL nel seguito).

R: Un problema di PL è un problema di minimizzazione o massimizzazione di una funzione lineare soggetta a vincoli lineari. In altre parole un problema di PL è un problema di minimizzazione o massimizzazione di una funzione lineare su un poliedro. Sono problemi di PL anche quelli in cui la funzione obiettivo è affine, quindi, con più precisione, dovremmo dire, che un problema di PL consiste nella minimizzazione o massimizzazione di

una funzione affine soggetta a vincoli lineari. L'uso del termine lineare per descrivere la funzione obiettivo è motivato sia dall'uso sia dall'osservazione che minimizzare una funzione affine $c^T x + \text{costante}$ su un poliedro P è "equivalente" a minimizzare la funzione lineare $c^T x$ su P . Qui, la parola "equivalente" va intesa nel senso che le soluzioni ottime dei due problemi coincidono.

8. Dire quali dei seguenti problemi è un problema di PL.

(a)

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 \leq 2 \\ & 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4^2 \leq 3 \\ & 3x_1^3 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ & x_1 \leq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 + 4 \\ & x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 \leq 2 \\ & 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_4 = 0. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \\ & x \in P, \end{aligned}$$

dove P è un poliedro.

(e)

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1x_2 - x_2 + x_3 + e^{x_4} \\ & x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 \leq 2 \\ & 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 \leq 0. \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

dove il vettore delle variabili x ha n componenti, c è un vettore di numeri a n componenti, A è una matrice di numeri $m \times n$, e b è un vettore di numeri a m componenti.

R: (a), (c), (d), (f).

9. Risolvere graficamente i seguenti problemi di PL

(a)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

R: Indichiamo con x^* la soluzione ottima.

(a) $x^* = (2, 1)$

(b) Il problema è illimitato (superiormente)

(c) $x^* = (3, 0)$

10. Considera il problema (a) nell'esercizio precedente:

- (a) Proponi una nuova funzione obiettivo (sempre da massimizzare) in modo tale che il punto $(4, 0)$ diventi soluzione ottima.
- (b) Spiega perchè i punti $(4, 1)$ e $(3, 0.25)$ non potranno mai essere soluzioni ottime del problema, qualunque sia la funzione lineare che si sceglie come funzione obiettivo (attenzione: le ragioni sono diverse per i due punti).

R:

- (a) La scelta più semplice è probabilmente di scegliere come funzione obiettivo x_2 , ma ovviamente esistono infinite scelte possibili (prova a caratterizzarle tutte!)
- (b) Il punto $(4, 1)$ non è ammissibile, e quindi per definizione, non potrà mai essere una soluzione ottima. Il punto $(3, 0.25)$ è interno al poliedro e quindi non potrà mai essere soluzione ottima. Infatti, spostandosi lungo la semiretta di origine $(3, 0.25)$ e direzione $(1, 3)$ (la direzione è quella definita dai coefficienti della funzione obiettivo), sappiamo che la funzione obiettivo aumenta. Siccome $(3, 0.25)$ è un punto interno al poliedro, ci si può sicuramente spostare lungo questa semiretta di una quantità positiva (eventualmente anche molto piccola) e rimanere nel poliedro, così generando un punto ammissibile con un valore della funzione obiettivo maggiore di quella in $(3, 0.25)$.

11. Determinare tutti i vertici dei seguenti poliedri:

(a)

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -1$$

$$0.5x_1 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(b)

$$-x_1 + x_2 - x_3 \geq -5$$

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$

$$x_1 \geq 0.$$

(c)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x \geq 0.$$

R:

(a) $v_1 = (0, 11, 5)^T$ e $v_2 = (10, 11, 0)^T$.

(b) $v_1 = (25, 13, -7)^T$, $v_2 = (0, -2, 3)^T$ e $v_3 = (0, 106/37, 66/37)^T$.

(c) $v_1 = (0, 2/3, 8/3)^T$, $v_2 = (8/3, 2/3, 0)^T$, $v_3 = (0, 0, 2)^T$, $v_4 = (2, 0, 0)^T$.

12. Sia dato il poliedro $P(\tau)$ definito da

$$x_1 - 2x_2 - \frac{\tau}{2}x_3 = 1$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Determinare per quali valori non negativi di τ , il poliedro $P(\tau)$ ammette più di un vertice.

R:

Il poliedro può ammettere al più due vertici (due è il numero di tutti i sottosistemi di tre vincoli, contenenti però i due vincoli di uguaglianza, che si possono estrarre dai vincoli che definiscono il poliedro). Si tratta allora di ricavare in funzione di τ l'espressione dei punti "candidati" a essere vertici e calcolare per quali valori comuni e non negativi di τ i due punti sono effettivamente vertici distinti.

Risulta che per $\tau > 1$ il poliedro ha due vertici. (Attenzione, perché c'è un solo vertice per $\tau = 1/2$?)

13. Un ospedale deve organizzare il servizio di trasporto del sangue, proveniente dalle donazioni spontanee. Le sacche di sangue sono disponibili in 4 centri di raccolta diversi e vanno tutte trasportate in 3 centri di trasformazione situati in altrettanti ospedali. Nella tabella di seguito sono riassunti la distanza (Km) tra i centri di raccolta e gli ospedali, nonché il costo di trasporto di una sacca, per ogni kilometro (il costo di trasporto di una

sacca è quindi dato dal prodotto del costo al kilometro per la distanza), da ciascun centro:

	ospedale 1	ospedale 2	ospedale 3	costo
centro 1	14	19	54	0.2
centro 2	12	31	45	0.26
centro 3	16	45	60	0.19
centro 4	21	44	46	0.29

A ciascun ospedale è necessario portare il seguente quantitativo minimo di sacche di sangue, per uso interno:

	ospedale 1	ospedale 2	ospedale 3
n° sacche	28	58	25

mentre in ogni centro di raccolta è disponibile il seguente quantitativo di sacche:

	centro 1	centro 2	centro 3	centro 4
n° sacche	34	38	35	22

Si costruisca un modello di PL che permetta di minimizzare i costi di trasporto

R:

– *Variabili.* Le variabili sono x_{ij} (con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3$) e rappresentano le sacche di sangue trasportate dal deposito i-esimo all'ospedale j-esimo.

– *Funzione obiettivo.* Indichiamo con d_{ij} la distanza dal deposito i-esimo all'ospedale j-esimo e con c_i il costo di trasporto per un kilometro relativa al deposito i-esimo. La funzione obiettivo è data dal costo complessivo di trasporto ed è quindi

$$\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{j=1}^3 d_{ij} x_{ij}$$

– *Vincoli.* Poiché sono prescritti i fabbisogni minimi di ogni ospedale avremo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 x_{i1} &\geq 28 \\ \sum_{i=1}^4 x_{i2} &\geq 58 \\ \sum_{i=1}^4 x_{i3} &\geq 25 \end{aligned}$$

Inoltre i vincoli sul numero massimo di sacche disponibili nei centri di raccolta si esprimono come

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 x_{1j} &\leq 34 \\ \sum_{j=1}^3 x_{2j} &\leq 38 \\ \sum_{j=1}^3 x_{3j} &\leq 35 \\ \sum_{j=1}^3 x_{3j} &\leq 22.\end{aligned}$$

Le variabili sono inoltre non negative:

$$x \geq 0.$$

A rigore le variabili x_{ij} sono anche *intere*, in quanto le sacche non sono divisibili. Per formulare questo problema come problema di PL trascuriamo però questo vincolo.

14. Un investitore deve scegliere come far fruttare il proprio capitale che ammonta a 10000 Euro. Egli deve scegliere come suddividere l'investimento tra 5 tipologie distinte: Conto corrente bancario, Titoli di stato, Obbligazioni, Azioni e Future. Ciascuno dei 5 investimenti proposti offre un tasso di rendimento annuo e presenta una percentuale di rischio, inoltre per diversificare il portafoglio, il budget (in Euro) destinato ad ogni investimento deve essere compreso tra un valore minimo ed un valore massimo, ovvero

	tasso di rendimento	perc. rischio	min. invest. (Euro)	max. invest. (Euro)
C/C bancario	2.5 %	5 %	0	1500
Titoli di Stato	6.5 %	8.5 %	1000	5000
Obbligazioni	8.7 %	12.4 %	1000	5000
Azioni	18.7 %	20 %	500	4000
Future	11.7 %	14 %	0	4000

L'investimento nel C/C bancario e nei titoli di stato deve essere complessivamente almeno 1/3 dell'investimento nelle azioni. La percentuale di rischio totale (si consideri che le grandezze varino linearmente ¹⁾) non deve superare l' 11.5.

¹⁾Ovvero se si investono 1000 Euro nel C/C bancario, 2000 in Titoli di stato, 1500 in Obbligazioni, 2000 Euro in Azioni e 3500 Euro in Future, la percentuale di rischio totale è data da

$$rischio\ totale = \frac{5 \cdot 1000 + 8.5 \cdot 2000 + 12.4 \cdot 1500 + 20 \cdot 2000 + 14 \cdot 3500}{10000}.$$

Si costruisca un modello di PL che permetta di determinare l'investimento che massimizza il tasso di rendimento annuo (si consideri che le grandezze variano linearmente ²).

R:

– *Variabili.* Le variabili sono x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e rappresentano la quantità di denaro investita in ogni tipo di investimento.

– *Funzione obiettivo.* Si vuole massimizzare il tasso di rendimento. La funzione obiettivo, da massimizzare è quindi data da

$$2.5x_1 + 6.5x_2 + 8.7x_3 + 18.7x_4 + 11.7x_5.$$

Si noti che il tasso di rendimento è stato, in effetti, moltiplicato per 10000, ma è evidente che questo non altera il problema.

– *Vincoli.* Le variabili sono tutte non negative, ma, in particolare devono soddisfare le limitazioni minime e massime riportate in tabella

$$0 \leq x_1 \leq 1500, \quad 1000 \leq x_2 \leq 5000, \quad 1000 \leq x_3 \leq 5000,$$

$$500 \leq x_4 \leq 4000, \quad 0 \leq x_5 \leq 4000,$$

e inoltre la somma totale investita è pari a 10000

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10000$$

(Sarebbe stato lecito porre invece $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10000$? Qual è il significato di questo vincolo? Le soluzioni ottime ottenute considerando il vincolo con uguaglianza e quello con la disuguaglianza differiscono?)

L'investimento nel C/C bancario e nei titoli di stato deve essere complessivamente almeno $1/3$ dell'investimento nelle azioni:

$$x_1 + x_2 \geq \frac{1}{3}x_4.$$

La percentuale di rischio totale non deve superare l'11.5, cioè

$$5x_1 + 8.5x_2 + 12.4x_3 + 20x_4 + 14x_5 \leq 11.5 \times 10000.$$

²Ovvero se si investono 1000 Euro nel C/C bancario, 2000 in Titoli di stato, 1500 in Obbligazioni, 2000 Euro in Azioni e 3500 Euro in Future, il tasso di rendimento annuo è dato da

$$\text{tasso di rendimento annuo totale} = \frac{2.5 \cdot 1000 + 6.5 \cdot 2000 + 8.7 \cdot 1500 + 18.7 \cdot 2000 + 11.7 \cdot 3500}{10000}.$$