

8

La dualità nella Programmazione Lineare

In questo capitolo verrà introdotto un concetto di fondamentale importanza sia per l'analisi dei problemi di Programmazione Lineare, sia per lo sviluppo di algoritmi risolutivi, sia per l'interpretazione dei risultati da essi prodotti. Si tratta del concetto di *dualità* che è legato alla possibilità di associare ad ogni problema di Programmazione Lineare un altro problema di Programmazione Lineare (chiamato *problema duale*) che ha la particolarità di permettere la deduzione di importanti proprietà del problema originario; quest'ultimo viene chiamato *problema primale*. In particolare, da un punto di vista computazionale, sarà possibile risolvere il problema duale al posto del problema primale e ottenere comunque le informazioni desiderate sulla soluzione ottima del problema primale.

Verrà inoltre esaminata un'interpretazione economica delle variabili del problema duale

Si osservi che la teoria della dualità sarà esaminata in relazione a problemi di Programmazione Lineare, ma essa può essere estesa anche al caso di problemi di Programmazione Non Lineare.

8.1 TEORIA DELLA DUALITÀ

Un modo di introdurre il problema duale può essere quello di far riferimento alla possibilità di determinare delle stime inferiori del valore ottimo della funzione obiettivo di un problema di Programmazione Matematica (in forma di problema di minimizzazione). In particolare, dato un problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \quad (8.1.1)$$

(dove $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$) se si dispone di un punto ammissibile \tilde{x} può risultare molto interessante capire se esso rappresenta una buona stima di un punto di ottimo senza risolvere il problema esattamente. Infatti se si conoscesse una buona stima ϕ del valore ottimo potremmo capire la “bontà” del punto \tilde{x} confrontando il valore $c^T \tilde{x}$ con la stima ϕ .

A questo scopo, sia x^* una soluzione ottima del problema (8.1.1); allora per ogni $u \in \mathbb{R}^m$, $u \geq 0$, poiché $Ax^* \geq b$ risulta

$$\begin{aligned} c^T x^* &\geq c^T x^* + u^T (b - Ax^*) \\ &= b^T u + (c^T - u^T A)x^*. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Se si restringe ulteriormente la scelta del vettore u si può eliminare la presenza di x^* dal membro di destra della (8.1.2). Infatti, per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, $u \geq 0$, tale che

$$A^T u = c,$$

la (8.1.2) si riduce a $b^T u$ e quindi risulta

$$c^T x^* \geq b^T u. \quad (8.1.3)$$

Per rendere quanto più possibile stringente la stima della limitazione inferiore del valore ottimo della funzione obiettivo $c^T x^*$ si può rendere quanto più possibile grande il termine di destra della disuguaglianza (8.1.3), cioè si può massimizzare la quantità $b^T u$ al variare del vettore $u \in \mathbb{R}^n$, tra tutti i vettori che soddisfano $A^T u = c$, $u \geq 0$. Più formalmente si ha

$$c^T x^* \geq b^T u^*$$

dove u^* è soluzione del problema

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u = c \\ u \geq 0 \end{cases} \quad (8.1.4)$$

Questo problema viene definito *problema duale* del problema dato (8.1.1) che viene denominato *problema primale*.

La possibilità di definire un problema duale non è legato al fatto che il problema dato abbia solo vincoli di disuguaglianza e variabili non vincolate in segno come è il problema (8.1.1). Infatti, si consideri un problema Programmazione Lineare scritto nella forma più generale possibile cioè nella forma

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x + d^T y \\ Cx + Dy = h \\ Ex + Fy \geq g \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (8.1.5)$$

con $x \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^{n-p}$, $d \in \mathbb{R}^{n-p}$; C matrice $q \times p$, D matrice $q \times (n-p)$ e $h \in \mathbb{R}^q$; E matrice $(m-q) \times p$, F matrice $(m-q) \times (n-p)$ e $g \in \mathbb{R}^{m-q}$. La notazione in cui è scritto questo generico problema di Programmazione Lineare (P) è tale da evidenziare separatamente gli elementi che intervengono nella formulazione: le variabili sono partizionate nella variabili x vincolate in segno e y non vincolate in segno e corrispondentemente anche i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono partizionati in c e d ; i vincoli sono scritti suddividendo quelli di uguaglianza e quelli di disuguaglianza (nella forma di maggiore o uguale).

Per costruire il problema duale del problema (P) è sufficiente ripetere i ragionamenti fatti in relazione al problema (8.1.1) dopo aver trasformato il problema (P) in un problema equivalente con soli vincoli di disuguaglianza cioè nella forma (8.1.1). A tale scopo riscriviamo il problema (P) nella forma equivalente

$$\begin{cases} \min c^T x + d^T y \\ Cx + Dy \geq h \\ -Cx - Dy \geq -h \\ Ex + Fy \geq g \\ I_p x \geq 0 \end{cases}$$

dove I_p è la matrice identità di ordine p . I vincoli di questo problema possono essere scritti in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -C & -D \\ E & F \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} h \\ -h \\ g \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi il problema (P) è stato ricondotto nella forma (8.1.1). Siamo quindi in grado di scrivere il duale di questo problema nella forma (8.1.4) cioè:

$$\begin{cases} \max h^T t - h^T w + g^T v \\ C^T t - C^T w + E^T v + I_p z = c \\ D^T t - D^T w + F^T v = d \\ t \geq 0, w \geq 0, v \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \max h^T(t-w) + g^T v \\ C^T(t-w) + E^T v + I_p z = c \\ D^T(t-w) + F^T v = d \\ t \geq 0, w \geq 0, v \geq 0, z \geq 0. \end{cases}$$

Eliminando la variabile z ed effettuando il cambio di variabili $t-w=u$ si ottiene il seguente problema nelle variabili (u, v) , con u non vincolata in segno e $v \geq 0$:

$$(D) \quad \begin{cases} \max h^T u + g^T v \\ C^T u + E^T v \leq c \\ D^T u + F^T v = d \\ v \geq 0 \end{cases} \quad (8.1.6)$$

con $u \in \mathbb{R}^q$ e $v \in \mathbb{R}^{m-q}$.

Il problema (D) è il *problema duale* del problema (P) che viene detto *problema primale*. Le variabili (x, y) sono dette *variabili primali*; le variabili (u, v) sono

dette *variabili duali*. I due problemi (P) e (D) vengono chiamati *coppia primale–duale*. In maniera del tutto simmetrica, il problema (P) risulterà il problema duale del problema (D).

Dall'osservazione dei due problemi (P) e (D) si deducono facilmente le proprietà fondamentali di una coppia primale–duale; innanzitutto un problema è di minimizzazione mentre l'altro è di massimizzazione. Inoltre poiché la matrice dei coefficienti dei vincoli di un problema si ottiene trasponendo quella dell'altro, si ha che ad ogni variabile di un problema corrisponde un vincolo nell'altro. Si osserva inoltre uno scambio tra i termini noti di un problema e i coefficienti della funzione obiettivo dell'altro.

Queste proprietà possono essere così schematicamente riassunte:

- il problema duale di un problema di minimizzazione è un problema di massimizzazione e simmetricamente, il problema duale di un problema di massimizzazione è un problema di minimizzazione;
- ad ogni vincolo di uguaglianza del problema primale è associata una variabile nel problema duale non vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni vincolo di disuguaglianza (di maggiore o uguale) del problema primale è associata una variabile nel problema duale vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni variabile vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di disuguaglianza (di minore o uguale) del problema duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale;
- ad ogni variabile non vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di uguaglianza del problema duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale.

Queste corrispondenze possono essere riassunte nella tabella che segue dove gli insiemi I , J , M e N sono insiemi di indici:

	PRIMALE	DUALE	
	$\min c^T x$	$\max b^T u$	
VINCOLI	$= b_i, \quad i \in I$ $\geq b_i, \quad i \in J$	$u_i, \quad i \in I, \text{ libere}$ $u_i, \quad i \in J, u_i \geq 0$	VARIABILI
VARIABILI	$x_j \geq 0, \quad j \in M$ $x_j, \quad j \in N \text{ libere}$	$\leq c_j, \quad j \in M$ $= c_j, \quad j \in N$	VINCOLI

Un importante caso di coppia primale–duale è ottenuto considerando nel problema primale solamente i vincoli di disuguaglianza e solamente variabili vincolate in segno. In questo caso si ottiene la seguente coppia di problemi:

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Tale coppia di problemi viene detta *coppia primale–duale simmetrica*. A tale coppia particolare primale–duale si farà spesso riferimento nel seguito anche in relazione a considerazioni riguardanti l'interpretazione della dualità per problemi di Programmazione Lineare che sono formulazioni di importanti classi di modelli lineari.

Seguono ora alcuni esempi di costruzione del problema duale di un problema di Programmazione Lineare assegnato.

Esempio 8.1.1 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ x_1 - 5x_3 + 2x_4 \geq 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geq 9. \end{cases}$$

Il problema duale associato è

$$\begin{cases} \max 7u_1 + 9u_2 \\ u_1 + 2u_2 = 2 \\ 4u_2 = 3 \\ -5u_1 - 6u_2 = 4 \\ 2u_1 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

Esempio 8.1.2 Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ 2x_1 - x_3 \leq 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente problema di minimizzazione

$$\begin{cases} \min 8u_1 + 7u_2 + 5u_3 + 6u_4 \\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 4 \\ 2u_1 + 4u_3 + u_4 \geq 3 \\ 3u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0. \end{cases}$$

Esempio 8.1.3 Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 7 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Dopo aver riscritto il secondo vincolo come $-x_1 - x_2 + 6x_3 \geq -9$ si può formulare facilmente il problema duale associato

$$\begin{cases} \max 7u_1 - 9u_2 + 8u_3 \\ 3u_1 - u_2 + 4u_3 \leq 2 \\ u_1 - u_2 - u_3 \leq -3 \\ 5u_1 + 6u_2 - 2u_3 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

8.1.1 Risultati fondamentali della teoria della dualità

Una coppia primale-duale di problemi di Programmazione Lineare gode di proprietà importanti sia dal punto di vista teorico sia da quello pratico. I risultati che verranno di seguito analizzati valgono per una generica coppia primale-duale,

ma per brevità e semplicità di notazioni essi sono enunciati e dimostrati facendo riferimento alla coppia primale duale simmetrica

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases} \quad (8.1.7)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Il primo risultato che si vuole analizzare discende in maniera naturale dal modo in cui è stato introdotto il problema duale.

Teorema 8.1.1 – TEOREMA DELLA DUALITÀ DEBOLE

Per ogni soluzione ammissibile \bar{x} del problema primale (P) ed ogni soluzione ammissibile \bar{u} del problema duale (D) si ha

$$b^T \bar{u} \leq c^T \bar{x}$$

cioè il valore della funzione obiettivo duale in \bar{u} è minore o uguale del valore della funzione obiettivo primale in \bar{x} .

Dimostrazione: Poiché \bar{x} è soluzione ammissibile per il problema primale (P), deve risultare $A\bar{x} \geq b$; tale disuguaglianza può essere riscritta nella forma $\bar{x}^T A^T \geq b^T$. Effettuando il prodotto scalare di entrambi i membri di questa disuguaglianza per \bar{u} (che è non negativo perché \bar{u} è ammissibile per il problema duale) si ottiene

$$\bar{x}^T A^T \bar{u} \geq b^T \bar{u}. \quad (8.1.8)$$

In modo del tutto analogo, poiché \bar{u} è soluzione ammissibile per il problema duale (D), deve risultare $A^T \bar{u} \leq c$ che può essere riscritta nella forma $\bar{u}^T A \leq c^T$. Effettuando il prodotto scalare di entrambi i membri di questa disuguaglianza per \bar{x} (che è non negativo perché \bar{x} è ammissibile per il problema primale) si ottiene

$$\bar{u}^T A \bar{x} \leq c^T \bar{x}. \quad (8.1.9)$$

Dalla (8.1.8) e dalla (8.1.9) si ottiene

$$b^T \bar{u} \leq \bar{x}^T A^T \bar{u} = \bar{u}^T A \bar{x} \leq c^T \bar{u}$$

che è quanto si voleva dimostrare. \square

Da questo importante teorema discendono due conseguenze immediate che sono riportate nei corollari che seguono.

Corollario 8.1.4 *Se \bar{x} è una soluzione ammissibile del problema primale (P) e \bar{u} una soluzione ammissibile del problema duale (D) tali che*

$$c^T \bar{x} = b^T \bar{u} \quad (8.1.10)$$

allora \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale (P) e per il problema duale (D).

Dimostrazione: La dimostrazione procede per assurdo. Infatti, supponiamo per assurdo che \bar{u} non sia soluzione ottima del problema duale (D). Questo significa che esiste una soluzione ammissibile del problema duale (D) che indichiamo con \tilde{u} tale che

$$b^T \tilde{u} > b^T \bar{u}.$$

Per la (8.1.10) si avrebbe

$$b^T \tilde{u} > b^T \bar{u} = c^T \bar{x}$$

contraddicendo il Teorema 8.1.1 (Teorema della Dualità debole).

Simmetricamente, si ottiene una contraddizione supponendo che \bar{x} non sia soluzione ottima del problema primale (P). \square

Corollario 8.1.5 *Se il problema primale (P) è illimitato (inferiormente) allora il problema duale (D) è inammissibile. Viceversa, se il problema duale è illimitato (superiormente) allora il problema primale è inammissibile.*

Dimostrazione: Supponiamo che il problema primale (P) sia illimitato e che, per assurdo, il problema duale (D) non sia inammissibile, cioè che esista una soluzione ammissibile \bar{u} del problema duale (D). Per il Teorema 8.1.1 (Teorema della Dualità debole), per ogni soluzione ammissibile x del problema primale (P) deve valere

$$b^T \bar{u} \leq c^T x \quad (8.1.11)$$

e, poiché si è supposto che il problema primale (P) è illimitato inferiormente, con la (8.1.11) si ottiene una contraddizione al fatto che \bar{u} è una soluzione ammissibile del problema duale (D). In modo del tutto simmetrico si dimostra il viceversa. \square

Oltre alle proprietà fino ad ora esaminate, nel caso di problemi di Programmazione Lineare è vera anche un'altra proprietà che è solitamente chiamata *dualità forte* che fornisce una caratterizzazione importante nel caso in cui esista soluzione ottima di uno dei due problemi della coppia primale duale. Questa proprietà è descritta nel seguente teorema che si riporta senza dimostrazione in quanto la

dimostrazione richiederebbe la conoscenza di ulteriori risultati preliminari la cui trattazione esula dallo scopo di queste note.

Teorema 8.1.2 – TEOREMA DELLA DUALITÀ FORTE

Se il problema primale (P) ammette una soluzione ottima x^ allora anche il problema duale (D) ammette una soluzione ottima u^* . Simmetricamente, se il problema duale (D) ammette una soluzione ottima u^* allora anche il problema primale (P) ammette una soluzione ottima x^* . Inoltre i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi all'ottimo sono uguali cioè risulta*

$$c^T x^* = b^T u^*.$$

Siamo ora in grado di formulare delle *condizioni di ottimalità* in riferimento alla coppia primale–duale simmetrica; esse costituiscono una caratterizzazione analitica delle soluzioni ottime del problema primale e del problema duale; enunciamo queste condizioni nel seguente teorema che discende immediatamente dai risultati già ottenuti:

Teorema 8.1.3 – CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ

Siano dati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$. Allora \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale (P) e per il problema duale (D) se e solo se valgono le seguenti condizioni

- (i) $A\bar{x} \geq b, \quad \bar{x} \geq 0$ (ammissibilità primale)
- (ii) $A^T\bar{u} \leq c, \quad \bar{u} \geq 0$ (ammissibilità duale)
- (iii) $c^T\bar{x} = b^T\bar{u}.$ (coincidenza dei valori delle funzioni obiettivo)

Sulla base dei risultati fino ad ora esaminati si evince che data un coppia primale–duale di problemi di Programmazione Lineare possono verificarsi le seguenti situazioni: o entrambi ammettono soluzione ottima, oppure se uno è illimitato l'altro è inammissibile, oppure sono entrambi inammissibili. Queste possibilità sono riportate schematicamente nella tabella che segue.

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO SUPERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO INFERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI

Ribadiamo che tutti i risultati ottenuti nel caso di una coppia primale–duale simmetrica (8.1.7) si estendono facilmente ad una qualsiasi coppia primale–duale.

Seguono alcuni esempi che illustrano i risultati teorici ora esaminati.

Esempio 8.1.6 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ 5x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Geometricamente si ricava facilmente che questo problema ammette soluzione ottima nel punto $(x_1, x_2) = (4, 5)$ e il valore ottimo della funzione obiettivo è pari a 19. Se si considera il problema duale

$$\begin{cases} \max 24u_1 + 25u_2 \\ u_1 + 5u_2 \leq 1 \\ 4u_1 + u_2 \leq 3 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0; \end{cases}$$

si ricava facilmente (geometricamente) che, in accordo con quanto previsto dal Teorema della Dualità Forte, anche questo problema ammette soluzione ottima

— nel punto $(u_1, u_2) = \left(\frac{14}{19}, \frac{1}{19}\right)$ — e il valore ottimo della funzione obiettivo vale 19.

Esempio 8.1.7 Si consideri il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max 2x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Geometricamente si ricava che il problema è illimitato superiormente. Quindi, per l'analisi teorica vista deve risultare che il suo duale è inammissibile. E infatti se si considera il problema duale associato

$$\begin{cases} \min 3u_1 + 6u_2 \\ -2u_1 - \frac{1}{2}u_2 \geq 2 \\ u_1 + u_2 \geq 3 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

si vede facilmente che questo problema non ammette soluzioni ammissibili.

Esercizio 8.1.8 Risolvere graficamente i problemi di Programmazione Lineare proposti nell'Esempio 8.1.6 e nell'Esempio 8.1.7 e verificare le conclusioni tratte negli esempi.

8.1.2 Condizioni di complementarità

Un'ulteriore proprietà della coppia primale-duale è la cosiddetta *complementarità*. Tale proprietà è di fondamentale importanza anche negli sviluppi algoritmici in quanto è alla base dei cosiddetti *metodi primali duali* per soluzione dei problemi di Programmazione Lineare.

Anche in questo caso si farà riferimento alla coppia primale-duale simmetrica

$$(P) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ma tutti i risultati sono validi nel caso di una qualsiasi coppia primale-duale.

In particolare, riportiamo di seguito un teorema fondamentale che caratterizza ulteriormente le soluzioni ottime di una coppia primale-duale di problemi di Programmazione Lineare.

Teorema 8.1.4 *Sia \bar{x} un punto ammissibile del problema primale (P) e sia \bar{u} un punto ammissibile del problema duale (D). Allora \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) se e solo se soddisfano le seguenti condizioni:*

$$\bar{u}^T(A\bar{x} - b) = 0 \quad (8.1.12)$$

$$\bar{x}^T(c - A^T\bar{u}) = 0. \quad (8.1.13)$$

Dimostrazione: Iniziamo supponendo che \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ammissibili rispettivamente per il problema primale (P) e per il problema duale (D) e che valgano le (8.1.12) e (8.1.13), e mostrando che allora \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D). Allora dalla (8.1.12) si ha $\bar{u}^T A\bar{x} = \bar{u}^T b$ e dalla (8.1.13) si ha $\bar{x}^T c = \bar{x}^T A^T \bar{u}$, da cui

$$b^T \bar{u} = \bar{u}^T b = \bar{u}^T A\bar{x} = \bar{x}^T A^T \bar{u} = \bar{x}^T c = c^T \bar{x}.$$

Quindi risulta $b^T \bar{u} = c^T \bar{x}$ e dal Teorema 8.1.3 si ha che \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D).

Supponiamo ora che \bar{x} e \bar{u} siano soluzioni ottime rispettivamente del problema e dimostriamo allora che devono valere le condizioni (8.1.12) e (8.1.13). Se \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi, dal Teorema 8.1.3 si ha che deve valere $c^T \bar{x} = b^T \bar{u}$. Ora, poiché \bar{x} e \bar{u} sono ammissibili rispettivamente per il problema (P) e per il problema (D) si ha

$$A\bar{x} \geq b, \quad \bar{x} \geq 0 \quad (8.1.14)$$

$$A^T \bar{u} \leq c, \quad \bar{u} \geq 0. \quad (8.1.15)$$

Effettuando il prodotto scalare di entrambi i membri della (8.1.14) per \bar{u} e di entrambi i membri della (8.1.15) per \bar{x} si ha

$$\bar{u}^T A\bar{x} \geq \bar{u}^T b$$

$$\bar{x}^T A^T \bar{u} \leq \bar{x}^T c.$$

Da queste due disuguaglianze segue che

$$\bar{u}^T b \leq \bar{u}^T A\bar{x} = \bar{x}^T A^T \bar{u} \leq \bar{x}^T c \quad (8.1.16)$$

e poiché stiamo supponendo $c^T \bar{x} = b^T \bar{u}$ allora la (8.1.16) diventa

$$\bar{u}^T b = \bar{u}^T A\bar{x} = \bar{x}^T A^T \bar{u} = \bar{x}^T c$$

dalla quale discende immediatamente

$$\begin{aligned}\bar{u}^T(A\bar{x} - b) &= 0 \\ \bar{x}^T(c - A^T\bar{u}) &= 0\end{aligned}$$

che sono le condizioni (8.1.12) e (8.1.13). \square

Le condizioni (8.1.12) e (8.1.13) vengono chiamate *condizioni di complementarità* e costituiscono, di fatto, delle condizioni di ottimalità per i problemi della coppia primale-duale.

Dal precedente risultato seguono facilmente i seguenti corollari.

Corollario 8.1.9 *Sia \bar{x} un punto ammissibile del problema primale (P) e sia \bar{u} un punto ammissibile del problema duale (D). Allora \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) se e solo se soddisfano le seguenti condizioni:*

$$\bar{u}_j(A\bar{x} - b)_j = 0 \quad (8.1.17)$$

$$\bar{x}_i(c - A^T\bar{u})_i = 0. \quad (8.1.18)$$

$$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Dimostrazione: Per il Teorema 8.1.4 \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi se e solo se i prodotti scalari

$$\begin{aligned}\bar{u}^T(A\bar{x} - b) \\ \bar{x}^T(c - A^T\bar{u})\end{aligned}$$

sono nulli. Ora, poiché per l'ammissibilità primale risulta $A\bar{x} - b \geq 0$ e $\bar{x} \geq 0$ e per l'ammissibilità duale risulta $c - A^T\bar{u} \geq 0$ e $\bar{u} \geq 0$, si ha che affinché ciascuno dei prodotti scalari risulti nullo, ogni termine dei due prodotti deve essere nullo e quindi il corollario è dimostrato. \square

Il Corollario (8.1.9) può essere formulato in maniera del tutto equivalente nella seguente forma:

Corollario 8.1.10 *Sia \bar{x} un punto ammissibile del problema primale (P) e sia \bar{u} un punto ammissibile del problema duale (D). Allora \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) se e solo se soddisfano le seguenti proprietà:*

- (i) *per ogni variabile del problema (P) che assume valore non nullo il corrispondente vincolo del problema duale (D) deve essere soddisfatto all'uguaglianza;*
- (ii) *per ogni variabile del problema (D) che assume valore non nullo il corrispondente vincolo del problema primale (P) è soddisfatto all'uguaglianza.*

Il Teorema 8.1.4 e i successivi corollari forniscono delle *condizioni di ottimalità* per i problemi Programmazione Lineare; essi infatti forniscono delle condizioni necessarie e sufficienti che caratterizzano analiticamente la soluzione ottima di un problema di Programmazione Lineare. Per completezza riportiamo queste condizioni formalizzate nel seguente teorema.

Teorema 8.1.5 CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ

Due punti $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema (P) e (D) se e solo se valgono le seguenti condizioni:

- (i) $A\bar{x} \geq b, \quad \bar{x} \geq 0$ *(ammissibilità primale)*
- (ii) $A^T\bar{u} \leq c, \quad \bar{u} \geq 0$ *(ammissibilità duale)*
- (iii) $\bar{u}^T(A\bar{x} - b) = 0$ *(condizioni di complementarità)*
- (iv) $\bar{x}^T(c - A^T\bar{u}) = 0.$

Ribadiamo che tutti i risultati fino ad ora esaminati nel caso di una coppia primale-duale simmetrica, valgono in generale per ogni coppia primale-duale. Volendo scrivere le condizioni di complementarità riferite alla generica coppia primale-duale (8.1.5)–(8.1.6) si hanno le seguenti condizioni: se (\bar{x}, \bar{y}) è un punto ammissibile del problema primale (8.1.5) e (\bar{u}, \bar{v}) è un punto ammissibile del problema duale (8.1.6), allora (\bar{x}, \bar{y}) e (\bar{u}, \bar{v}) sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale e del problema duale se e solo se soddisfano le seguenti proprietà:

$$\bar{v}^T(E\bar{x} + F\bar{y} - g) = 0$$

$$\bar{x}^T (c - C^T \bar{u} + E^T \bar{v}) = 0.$$

Ovviamente, sono presenti solamente le condizioni di complementarità relative ai vincoli di disuguaglianza in quanto quelle relative ai vincoli di uguaglianza sono banalmente verificate.

In particolare, in relazione alla coppia primale-duale

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u = c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

le condizioni di complementarità si riducono alla sola condizione

$$u^T (Ax - b) = 0,$$

mentre per una coppia primale-duale

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

le condizioni di complementarità si riducono alla sola condizione

$$x^T (c - A^T u) = 0.$$

Seguono alcuni esempi di applicazione della complementarità.

Esempio 8.1.11 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -2 \end{cases}.$$

Il problema duale associato è

$$\begin{cases} \max 5u_1 + 3u_2 - 2u_3 \\ u_1 + 2u_2 + 7u_3 = 3 \\ u_2 - 4u_3 = 2 \\ -3u_1 - u_2 + 6u_3 = 1 \\ 2u_1 + 9u_3 = 4 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Visti i vincoli di uguaglianza presenti nei due problemi, le condizioni di complementarità si riducono a

$$\begin{aligned} u_1(x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 5) &= 0 \\ u_2(2x_1 + x_2 - x_3 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Esempio 8.1.12 Dato il problema di programmazione lineare

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_4 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (8.1.19)$$

si consideri il punto $\bar{x} = (0, 0, 2, 1/3)$ soluzione ammissibile per il problema (8.1.19) e il punto $\bar{u} = (1, 1/3)$ soluzione ammissibile per il problema duale associato a (8.1.19). Attraverso le condizioni di complementarità si vuole verificare se \bar{x} è una soluzione ottima del problema (8.1.19). Innanzitutto scriviamo il problema duale del problema dato; esso è

$$\begin{cases} \max 2u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ u_1 \leq 3 \\ u_1 \leq 1 \\ 3u_2 \leq 1. \end{cases}$$

Poiché il problema (8.1.19) presenta solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a $x^T(c - A^T u) = 0$ che in questo caso sono

$$\begin{aligned} x_1(2 - u_1 - 2u_2) &= 0 \\ x_2(3 - u_1) &= 0 \\ x_3(1 - u_1) &= 0 \\ x_4(1 - 3u_2) &= 0 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori delle soluzioni ammissibili \bar{x} , \bar{u} rispettivamente per il primale ed il duale, le condizioni di complementarità risultano verificate. Quindi la soluzione \bar{x} è effettivamente ottima per il primale e \bar{u} è ottima per il duale.

Esempio 8.1.13 Si consideri il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $c_3 \in \mathbb{R}$. Utilizzando la teoria della dualità, si vuole stabilire se esistono valori (non tutti nulli) di c_1, c_2, c_3 tali che il punto $\bar{x} = (0, 0, 1/2)^T$ sia una soluzione ottima del problema.

Innanzitutto scriviamo il problema duale associato che è

$$\begin{cases} \max -2u_1 - 3u_2 \\ -u_1 - u_2 \leq c_1 \\ -2u_1 - 4u_2 \leq c_2 \\ -2u_1 - 2u_2 \leq c_3 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

e le condizioni di complementarità

$$u_1(-2 + x_1 + 2x_2 + 2x_3) = 0$$

$$u_2(-3 + x_1 + 4x_2 + 2x_3) = 0$$

$$x_1(c_1 + u_1 + u_2) = 0$$

$$x_2(c_2 + 2u_1 + 4u_2) = 0$$

$$x_3(c_3 + 2u_1 + 2u_2) = 0$$

Sostituendo il punto \bar{x} affinché siano soddisfatte tutte le equazioni deve essere

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = 0, \quad \frac{1}{2}(c_3 + 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2) = 0$$

e quindi $c_3 = 0$ (dove \bar{u} è soluzione ottima del problema duale). Quindi le condizioni di complementarità sono soddisfatte per qualunque c_1 e c_2 e $c_3 = 0$. Quindi il punto dato \bar{x} è soluzione ottima del problema per qualsiasi valore di c_1 e c_2 e $c_3 = 0$.

8.2 INTERPRETAZIONE DELLA DUALITÀ

Nei modelli reali le variabili (primali) possono rappresentare, ad esempio, livelli di produzione e i coefficienti di costo possono essere associati ai profitti ricavati dalla vendita dei prodotti. Quindi la funzione obiettivo di un problema primale indica direttamente come un aumento della produzione può influenzare il profitto. Sempre in relazione, ad esempio, ad un modello per la pianificazione della produzione, i vincoli di un problema (primale) possono rappresentare una limitazione dovuta alla limitata disponibilità delle risorse; ora, un aumento della disponibilità delle risorse può consentire un aumento della produzione e quindi anche del profitto, ma questa relazione tra aumento della disponibilità delle risorse e aumento del profitto non si deduce facilmente dal problema formulato (il problema primale). Uno dei possibili usi della dualità è quello di rendere esplicito l'effetto dei cambiamenti nei vincoli (ad esempio in quelli di disponibilità di risorse) sul valore della funzione obiettivo. Questo perché, come vedremo, le variabili duali possono essere anche interpretate come i cosiddetti *prezzi ombra* in quanto misurano i “costi” impliciti associati ai vincoli.

8.2.1 Interpretazione economica della dualità e prezzi ombra

Per introdurre il concetto delle variabili duali come prezzi ombra facciamo riferimento ad un semplice esempio di modello di pianificazione della produzione che brevemente descriviamo.

Esempio 8.2.1 *Un'industria produce due tipi di prodotti: un tipo de luxe e un tipo standard. Per avere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi sono necessari due ingredienti grezzi \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 e la lavorazione su una macchina. La tabella che segue riporta le quantità in Kg di ciascuno degli ingredienti e le ore di lavorazione sulla macchina necessarie per ottenere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi.*

	de luxe	standard
\mathbf{I}_1	3	2
\mathbf{I}_2	4	1
ore lavoraz.	2	1

Settimanalmente si hanno a disposizione al più 1200 Kg dell'ingrediente \mathbf{I}_1 e al più 1000 Kg dell'ingrediente \mathbf{I}_2 mentre la disponibilità massima settimanale di ore lavorative della macchina è pari a 700. Un prodotto de luxe è venduto a 24 Euro e un prodotto standard è venduto a 14 Euro. Si vuole pianificare la produzione settimanale in modo da massimizzare il profitto complessivo assumendo che i prodotti siano frazionabili.

Si tratta di un problema di allocazione ottima di risorse limitate che può essere formulato come problema di Programmazione Lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \max 24x_1 + 14x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\ 4x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 700 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

dove le variabili x_1 e x_2 rappresentano le quantità di prodotti rispettivamente del tipo *de luxe* e del tipo *standard* da fabbricare settimanalmente.

Consideriamo, ora, il problema duale del problema ora formulato; esso è

$$\begin{cases} \min 1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 2u_3 \geq 24 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 \geq 14 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

La soluzione ottima del primale è

$$x_1^* = 160, \quad x_2^* = 360$$

e il valore ottimo della funzione obiettivo primale è pari a 8880.

La soluzione ottima del duale è

$$u_1^* = 6.4, \quad u_2^* = 1.2, \quad u_3^* = 0$$

e il valore ottimo della funzione obiettivo duale è pari a 8880. Quindi il Teorema della Dualità Forte è verificato.

Scriviamo, ora, le condizioni di complementarità:

$$\begin{aligned} x_1^*(3u_1^* + 4u_2^* + 2u_3^* - 24) &= 0 \\ x_2^*(2u_1^* + u_2^* + u_3^* - 14) &= 0 \\ u_1^*(1200 - 3x_1^* - 2x_2^*) &= 0 \\ u_2^*(1000 - 4x_1^* - x_2^*) &= 0 \\ u_3^*(700 - 2x_1^* - x_2^*) &= 0 \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che tali condizioni sono soddisfatte. Si osservi che tutte le equazioni tranne l'ultima sono verificate in quanto si annulla il secondo dei due fattori moltiplicativi. Questo significa, in particolare, che il primo e il secondo vincolo del problema primale sono attivi nella soluzione ottima, cioè verificati all'uguaglianza. L'ultima equazione invece è verificata per il fatto che è nulla all'ottimo la variabile duale u_3^* mentre il vincolo corrispondente primale (cioè il terzo vincolo del problema primale) non è verificato all'uguaglianza. Infatti in corrispondenza della soluzione ottima il valore ottenuto è $2x_1^* + x_2^* = 680$.

Poiché la disponibilità di ore lavorative è pari a 700 ore, si hanno ancora 20 ore disponibili (surplus). Quindi l'industria, per aumentare il profitto, potrebbe acquistare altre quantità di ingredienti grezzi e quindi aumentare la disponibilità settimanale di questi ingredienti e utilizzare le ore di lavorazione ancora rimaste disponibili. Poiché i valori all'ottimo della funzione obiettivo primale e della funzione obiettivo duale coincidono e poiché la funzione obiettivo duale è

$$1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3,$$

essendo $u_1^* = 6.4$, $u_2^* = 1.2$, $u_3^* = 0$, l'aumento di 1 Kg della disponibilità di ingrediente **I₁** (da 1200 a 1201 Kg) porta ad un incremento di 6.4 Euro nel profitto complessivo. Analogamente per l'ingrediente **I₂**: un incremento di 1 Kg (da 1000 a 1001 Kg) porta ad un incremento del profitto complessivo di 1.2 Euro. Questo è il motivo per cui le variabili duali sono anche chiamate *prezzi ombra* e determinano il *valore marginale* delle risorse. Essi rappresentano, di fatto, il prezzo massimo che si è disposti a pagare una unità di risorsa aggiuntiva. Ovviamente il fatto che $u_3^* = 0$ significa che l'aumento della disponibilità di ore lavorative non porta a nessun incremento del profitto, ma questo è ovvio in quanto ore lavorative inutilizzate sono già disponibili.

Nell'ipotesi che, ad esempio, si possa incrementare la disponibilità di una sola delle risorse, naturalmente esaminando i prezzi ombra, si deduce che conviene aumentare la disponibilità dell'ingrediente **I₁** che porta ad un maggiore incremento del profitto complessivo.

Si osservi che il fatto che ad un incremento pari a δ nel termine noto del primo vincolo corrisponda un incremento pari a 6.4δ nel valore ottimo della funzione obiettivo, è valido fin tanto che la variabile duale all'ottimo u_1^* associata al primo vincolo rimane pari al valore 6.4. Infatti, ovviamente la variazione del termine noto del vincolo corrispondente alla disponibilità dell'ingrediente **I₁** porta anche ad un cambiamento nella formulazione del problema duale: infatti un cambiamento nel termine noto di un vincolo primale corrisponde ad un cambiamento in un coefficiente della funzione obiettivo del problema duale. Pertanto c'è la possibilità che se la variazione è ampia, cambi il punto di ottimo del problema duale e quindi, in particolare, cambi il prezzo ombra u_1^* associato al primo vincolo. In questo caso, naturalmente, la variazione del valore della funzione obiettivo all'ottimo non può essere più proporzionale al valore 6.4. \square

Implementiamo ora il problema primale nel linguaggio AMPL. Seguono il file `.mod` e `.dat`.

 primale1.mod

```

####      SEZIONE PER LA DICHIARAZIONE DEGLI INSIEMI      ####

set PRODOTTI;          # introduce l'insieme dei prodotti
set RISORSE;           # introduce l'insieme delle risorse

####      SEZIONE PER LA DICHIARAZIONE DEI PARAMETRI      ####

param max_dispo {RISORSE}>=0;
      # array di parametri ciascuno dei quali indica
      # la disponibilita' di ciascuna risorsa.

param profitto {PRODOTTI} >=0;
      # ciascuna sua componente indica il profitto
      # marginale per uno dei prodotti.

param richieste {RISORSE,PRODOTTI}>=0;
      # l'elemento (i,j) indica la quantita' di
      # risorsa i-esimo richiesta per produrre
      # un'unita' di prodotto j-esimo.

####      SEZIONE PER LA DICHIARAZIONE DELLE VARIABILI      ####

var x {j in PRODOTTI} >=0;
      # la variabile x[j] rappresenta il quantitativo
      # di prodotto j-esimo.

####      FUNZIONE OBIETTIVO E VINCOLI      ####

maximize profitto_totale: sum {j in PRODOTTI} profitto[j]*x[j];
      # rappresenta il profitto totale.

s.t. vincoli {i in RISORSE}:
      sum {j in PRODOTTI} richieste[i,j]*x[j] <= max_dispo[i];
      # vincoli sul massimo quantitativo disponibile delle
      # risorse (ingredienti e di ore lavorative)

```

```

                                primale1.dat
                                -----

set PRODOTTI:= de_luxe  standard;
set RISORSE:=  I1 I2 ore_lav;

param      max_dispo :=
  I1      1200
  I2      1000
  ore_lav  700 ;

param:      profitto:=
  de_luxe      24
  standard     14  ;

param richieste:  de_luxe  standard :=
  I1              3        2
  I2              4        1
  ore_lav         2        1  ;

```

Risolviamo ora questo problema e analizziamo i risultati che AMPL produce.

```

profitto_totale = 8880

x [*] :=
  de_luxe  160
  standard  360

vincoli [*] :=
  I1  6.4
  I2  1.2
  ore_lav  0

```

Insieme al punto di ottimo

$$x_1^* = 160, \quad x_2^* = 360$$

e al valore ottimo della funzione obiettivo 8880 abbiamo riportato altre informazioni riguardanti il problema duale associato. In particolare vengono riportati

i valori ottimi della variabili duali associate ai vincoli del problema originario (prezzi ombra). La soluzione ottima del duale risulta quindi

$$u_1^* = 6.4, \quad u_2^* = 1.2, \quad u_3^* = 0$$

Per verificare ciò, implementiamo direttamente il problema duale. Seguono il file .mod e .dat che realizzano una possibile implementazione del problema duale.

```

##### SEZIONE PER LA DICHIARAZIONE DEGLI INSIEMI #####
set COLONNE;      # introduce l'insieme delle colonne.
set RIGHE;        # introduce l'insieme delle righe.

##### SEZIONE PER LA DICHIARAZIONE DEI PARAMETRI #####
param matr_coeff {RIGHE,COLONNE}>=0;
                # dichiara la matrice dei coefficienti per
                # il problema duale.

param noti {RIGHE} >=0;
                # dichiara il vettore dei termini noti.

param coeff_obiett {COLONNE} >=0;
                # dichiara i coefficienti della funzione
                # obiettivo.

##### SEZIONE PER LA DICHIARAZIONE DELLE VARIABILI #####
var u {j in COLONNE} >=0;
                # dichiara il vettore delle variabili duali.

##### FUNZIONE OBIETTIVO E VINCOLI #####
minimize funz_obj_duale:
    sum {j in COLONNE} coeff_obiett[j]*u[j];
    # funzione obiettivo del problema duale.

s.t. vincoli {i in RIGHE}:
    sum {j in COLONNE} matr_coeff[i,j]*u[j] >= noti[i];
    # vincoli del problema duale.

```

 duale1.dat

```

set COLONNE:= COL1  COL2  COL3;
set RIGHE:=  RIGA1  RIGA2;

param matr_coeff:      COL1  COL2  COL3:=
      RIGA1           3    4    2
      RIGA2           2    1    1  ;

param:  noti:=
      RIGA1  24
      RIGA2  14  ;

param:  coeff_obiett:=
      COL1      1201
      COL2      1000
      COL3       700  ;

```

Risolvendo questo problema si hanno i seguenti risultati:

```

funz_obj_duale = 8880

u [*] :=
COL1  6.4
COL2  1.2
COL3  0

vincoli [*] :=
RIGA1  160
RIGA2  360

```

Questi risultati confermano che il valore ottimo delle variabili duali è $u_1^* = 6.4$, $u_2^* = 1.2$, $u_3^* = 0$ e che il valore ottimo del problema primale e del problema duale coincide ed è pari a 8880. Naturalmente, in modo del tutto simmetrico, nei risultati relativi al problema duale possiamo avere informazioni relative al duale del problema duale, cioè al problema primale. Infatti è riportato il valore ottimo delle variabili primali che infatti risultano pari a $x_1^* = 160$, $x_2^* = 360$.

Abbiamo già detto che le variabili duali costituiscono i *prezzi ombra* e rappresentano l'effetto dei cambiamenti nel termine noto dei vincoli: ad esempio, incrementando di un valore Δ la disponibilità dell'ingrediente \mathbf{I}_1 si ottiene un incremento

del profitto pari a 6.4Δ cioè proporzionale a u_1^* che è la variabile duale associata al primo vincolo. Verifichiamo ciò cambiando il termine noto del vincolo relativo alla disponibilità di ingrediente \mathbf{I}_1 dato da $3x_1 + 2x_2 \leq 1200$; in particolare aumentando di una unità il termine noto ($\Delta = 1$), trasformando cioè il vincolo in $3x_1 + 2x_2 \leq 1201$ ci si aspetta un incremento del valore ottimo della funzione obiettivo pari a 6.4 e quindi un valore pari a 8886.4. Per verificare ciò è sufficiente modificare il file `primale1.dat` (lasciando ovviamente immutato il file `primale1.mod`), cambiando il valore del parametro `max_dispo` relativo a \mathbf{I}_1 e scrivendo quindi

```
param      max_dispo :=
  I1        1201
  I2        1000
  ore_lav    700 ;
```

Risolvendo di nuovo il problema, si ottengono i risultati di seguito riportati che confermano quanto ci si aspettava.

```
profitto_totale = 8886.4

x [*] :=
  de_luxe  159.8
  standard 360.8

vincoli [*] :=
  I1  6.4
  I2  1.2
  ore_lav 0
```

Come abbiamo già visto nel paragrafo 4.6.4, AMPL oltre a risolvere un problema di Programmazione Lineare, permette attraverso il comando `display` di visualizzare anche altri elementi del problema. In particolare, è possibile utilizzare il comando `display` per avere informazioni sulle variabili duali associate ad un problema *senza dover direttamente implementare il problema duale*. Infatti, se in un problema di Programmazione Lineare implementato in AMPL è presente un vincolo chiamato ad esempio `vincolo1`, con il comando

```
display vincolo1;
```

si visualizza il valore della variabile duale associata a quel vincolo (ovvero il prezzo ombra), ovviamente senza la necessità di dover costruire esplicitamente il problema duale.

Come visto nell'esempio precedente, in generale, le variabili duali (i prezzi ombra) rappresentano l'effetto di cambiamenti nel termine noto dei vincoli. Si consideri, infatti un generico problema di Programmazione Lineare (in forma standard) (P), il suo duale (D) ed inoltre si consideri il problema (P_Δ) ottenuto modificando il termine noto da b a $b + \Delta$ (con $\Delta \in \mathbb{R}^m$) e il corrispondente problema duale (D_Δ) :

$$\begin{aligned} (P) \quad & \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} & (D) \quad & \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \end{cases} \\ (P_\Delta) \quad & \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b + \Delta \\ x \geq 0 \end{cases} & (D_\Delta) \quad & \begin{cases} \max (b + \Delta)^T u \\ A^T u \leq c \end{cases} \end{aligned}$$

Siano x^* e u^* rispettivamente la soluzione ottima del problema (P) e del problema (D). Siano inoltre $x^*(\Delta)$ e $u^*(\Delta)$ rispettivamente la soluzione del problema (P_Δ) e del problema (D_Δ)

Dalle formulazioni di questi problemi si possono facilmente dedurre due osservazioni:

- la variazione del termine noto b nel problema primale si riflette in un cambiamento dei coefficienti della funzione obiettivo del problema duale;
- la regione ammissibile del problema (D) e del problema (D_Δ) sono uguali; da questo segue che se $u^* \in \mathbb{R}^m$ è soluzione ottima del problema (D) allora u^* è ammissibile per il problema (D_Δ) , ma non necessariamente è ottima per (D_Δ) .

Inoltre per il Teorema della dualità forte applicato alla coppia primale-duale (P)–(D) deve essere

$$c^T x^* = b^T u^*, \quad (8.2.1)$$

mentre, sempre per il Teorema della dualità forte ma applicato alla coppia primale-duale (P_Δ) – (D_Δ) deve essere

$$c^T x^*(\Delta) = (b + \Delta)^T u^*(\Delta). \quad (8.2.2)$$

Se la soluzione ottima x^* soddisfa un'opportuna ipotesi (cioè che in x^* non ci siano più di n vincoli attivi) e se il vettore Δ ha componenti “sufficientemente” piccole allora si può dimostrare che:

$$u^*(\Delta) = u^*. \quad (8.2.3)$$

Utilizzando la (8.2.1), la (8.2.2) e la (8.2.3) si ha:

$$c^T x^*(\Delta) = b^T u^* + \Delta^T u^* = c^T x^* + \Delta^T u^*, \quad (8.2.4)$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$c^T x^*(\Delta) - c^T x^* = \Delta_1 u_1^* + \Delta_2 u_2^* + \dots + \Delta_m u_m^*, \quad (8.2.5)$$

dove $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)^T$.

Dalla precedente relazione segue che una possibile interpretazione della variabile duale u_i^* è quella di essere un prezzo associato ad un incremento unitario del termine noto b_i . Per questa ragione le variabili duali u_i^* , $i = 1, \dots, m$, vengono denominate *prezzi ombra*. Sebbene la (8.2.3) (e di conseguenza la (8.2.5)) valga solamente sotto opportune ipotesi, in molte situazioni pratiche, le variabili duali u_i^* , $i = 1, \dots, m$, forniscono delle utili indicazioni su quale componente b_i variare per migliorare il valore ottimo della funzione obiettivo.

Si consideri, ora (come nell'Esempio 8.2.1) la variazione del termine noto di un solo vincolo che si ottiene prendendo $\Delta = \delta e_i$ (dove $e_i \in \mathbb{R}^m$ è il vettore con l' i -esima componente uguale a 1 e le altre componenti nulle). In questo caso, naturalmente ad una variazione del termine noto dell' i -esimo vincolo corrisponde una variazione del valore della funzione obiettivo pari a δu_i^* . Nell'esempio precedente era stato infatti osservato come una variazione di δ effettuata nel termine noto del primo vincolo porta ad una variazione della funzione obiettivo pari a $u_1^* \delta = 6.4\delta$. Si deve tuttavia ribadire un fatto molto importante: l'interpretazione delle variabili duali come prezzi ombra e quindi come strumento per valutare la variazione del valore della funzione obiettivo al variare del termine noto di un vincolo a partire da una soluzione ottima è vera *solamente per piccole variazioni* del termine noto; esiste cioè un intervallo entro il quale δ deve rimanere.

Esula dallo scopo di queste note la motivazione teorica dettagliata della validità dell'interpretazione data delle variabili duali, a partire da una soluzione ottima, come prezzi ombra rappresentanti i *valori marginali* dei termini noti dei vincoli solo per piccole perturbazioni di questi termini noti ed anche la determinazione dell'intervallo $[\delta_l, \delta_u]$ in cui può variare δ rimanendo valida tale l'interpretazione. Si riporta tuttavia di seguito un esempio geometrico di questa interpretazione delle variabili duali che dovrebbe chiarire, almeno in un caso particolare, quanto illustrato in precedenza.

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (8.2.6)$$

Si verifica facilmente che i prezzi ombra associati ai vincoli sono rispettivamente $u_1^* = 1$, $u_2^* = 1$ e $u_3^* = 0$. Questi possono naturalmente essere ricavati scrivendo il problema duale del problema dato

$$\begin{cases} \min 4u_1 + 5u_2 - 2u_3 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 3 \\ u_1 + u_2 - 4u_3 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

e determinandone la soluzione ottima. Geometricamente si può determinare facilmente la soluzione ottima del problema assegnato (primale) (8.2.6) che risulta essere nel punto $P(1, 3)$ a cui corrisponde un valore ottimo della funzione obiettivo pari a 9 (Figura 8.2.1).

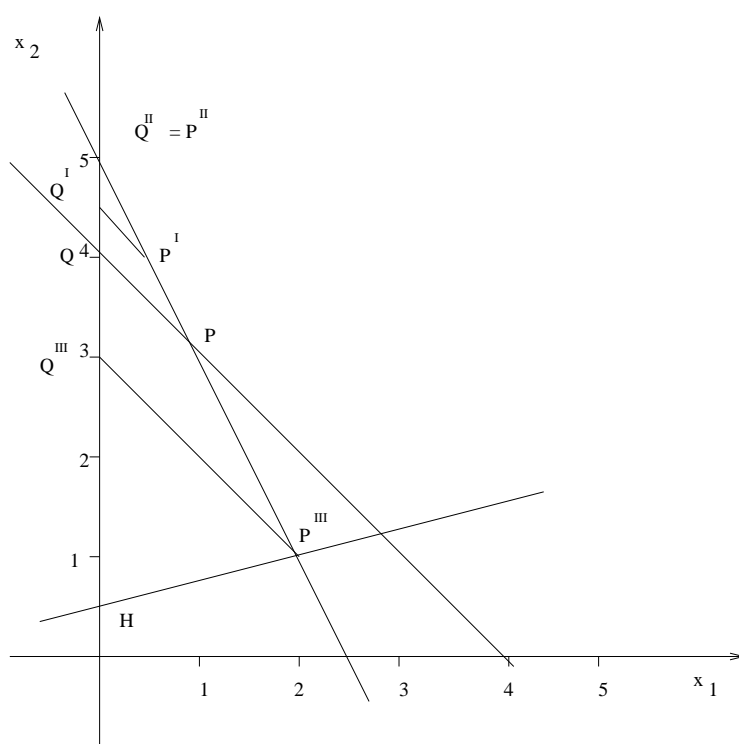


Figura 8.2.1 Rappresentazione geometrica del problema (8.2.6)

Ora, consideriamo il primo vincolo $x_1 + x_2 \leq 4$ e facciamo variare di un valore $\delta = 0.5$ il termine noto che passa da 4 a 4.5; rappresentando geometricamente il nuovo vincolo $x_1 + x_2 \leq 4.5$ si determina la nuova regione ammissibile del problema in cui il segmento \overline{PQ} è mutato nel segmento $\overline{P'Q'}$. Il punto di ottimo del nuovo problema è $P'(0.5, 4)$ e corrispondentemente risulta un incremento del valore della funzione obiettivo proporzionale al valore del prezzo ombra $u_1^* = 1$ associato al primo vincolo cioè dato da $u_1^* \delta$, cioè pari a 0.5: infatti il valore ottimo passa da 9 a 9.5. È facile verificare che il cambiamento effettuato nel termine

noto non ha fatto variare il punto di ottimo del problema duale, cioè i costi ombra sono rimasti invariati.

Se si continua a rilassare il vincolo considerato facendolo diventare $x_1 + x_2 \leq 5$, considerando la nuova regione ammissibile così ottenuta, si osserva che il segmento \overline{PQ} degenera in un punto $Q'' = P''(0, 5)$ con conseguente incremento proporzionale del valore della funzione obiettivo nel nuovo punto di ottimo dove è pari a 10. (Nemmeno con questa variazione si è avuto un cambiamento nei prezzi ombra.) Come si deduce facilmente dalla rappresentazione geometrica, non ci sarà nessun effetto nell'incrementare ulteriormente il termine noto del primo vincolo, in quanto il punto soluzione continuerà a rimanere $Q'' = P''$. Quindi la limitazione superiore alla variazione del δ in questo caso risulta pari a $\delta_u = 1$.

Se invece si diminuisce il termine noto del vincolo $x_1 + x_2 \leq 4$, la regione ammissibile progressivamente muta fino a che il segmento \overline{PQ} coincide con $\overline{P'''Q'''}$ e questo accade quando il valore del termine noto del vincolo è pari a 3. In corrispondenza di questo valore il punto di ottimo è $P'''(2, 1)$ a cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a 8. Anche in questo caso la variazione ha lasciato invariato i prezzi ombra.

Fino al raggiungimento del valore 3 nel termine noto del vincolo considerato, ogni decrescita di questo termine noto porta ad un decremento della funzione obiettivo proporzionale al prezzo ombra associato ($u_1^* = 1$). Il valore 3 assunto dal termine noto del vincolo sembra essere un “valore di soglia” al di sotto del quale la funzione obiettivo decrescerà con una “rapidità” completamente diversa; infatti dalla rappresentazione geometrica si deduce facilmente che la situazione cambia drasticamente al di sotto di questo valore e la rapidità di decrescita non è prevedibile a partire dalla conoscenza della soluzione ottima P . Si verifica infatti che, ad esempio, variando il termine noto considerato dal valore 3 al valore 2.5, il valore ottimo della funzione obiettivo passa dal valore 8 al valore 6.6 e i prezzi ombra sono mutati in $u^* = (2.8, 0, 0.2)$.

Geometricamente si può verificare ciò osservando come al variare del termine noto del primo vincolo dal valore 3 al valore 5, i corrispondenti punti di ottimo appartengono al segmento $\overline{P''P'''}$ mentre per valori inferiori al valore 3 i punti corrispondenti di ottimo appartengono al segmento $\overline{HP'''}$. Quindi il valore della limitazione inferiore dell'intervallo di variabilità di δ può essere considerata $\delta_l = -1$. Quindi l'intervallo ammesso perché le considerazioni fatte sui prezzi ombra valgano, in questo caso è l'intervallo $[\delta_l, \delta_u] = [-1, 1]$.

Si evince quindi che volendo disegnare il grafico del valore ottimo del profitto al variare del termine noto di un vincolo, i prezzi ombra rappresentano i coefficienti angolari delle rette che rappresentano queste variazioni. Il grafico complessivo del valore ottimo del profitto al variare del termine noto di un vincolo è quindi una curva *lineare a tratti convessa* nel caso di problema di massimizzazione, *concava* nel caso di problemi di minimizzazione. I punti nodali di questa funzione lineare

a tratti rappresentano i punti in cui si verifica il cambio del prezzo ombra.

Queste considerazioni qui dedotte solo in modo geometrico fanno parte della cosiddetta *analisi post-ottimale*. Un altro scopo di questo tipo di analisi è quello di indagare la “*sensibilità*” del modello al variare dei termini noti dei vincoli; questo rientra nella cosiddetta *analisi della sensibilità* che affronta lo studio di come varia la soluzione ottima di un problema al variare oltre che dei termini noti dei vincoli, anche al variare dei coefficienti di costo della funzione obiettivo, oppure aggiungendo nuove variabili o nuovi vincoli. Ovviamente una trattazione rigorosa di queste problematiche esula dallo scopo di queste note e perciò si rimanda ai testi di approfondimento specifici.

È lasciata alla cura dello studente l’implementazione in AMPL di questo problema e la verifica delle conclusioni ora ottenute modificando direttamente il file dei dati del problema.