

7.4.6 Convergenza del metodo del simplexso

Per concludere l'analisi della Fase II del metodo del simplexso, vogliamo ora mostrare che, sotto opportune ipotesi, il numero di iterazioni della Fase II è finito, ovvero che, in un numero finito di iterazioni, l'algoritmo descritto nei paragrafi precedenti *converge* alla soluzione ottima del problema (7.3.1) o conclude che il problema è illimitato inferiormente. A tale scopo notiamo che, nelle ipotesi che abbiamo finora adottato (il problema (7.3.1) è ammissibile e il rango della matrice A è m) sappiamo che il numero di basi ammissibili per il problema è finito (vedi il Teorema (7.2.3)) e maggiore o uguale a 1 (perchè il poliedro del problema in forma standard ammette almeno un vertice, essendo non vuoto e non contenendo rette). Il principale risultato sulla convergenza della Fase II del metodo del simplexso è il seguente.

Teorema 7.4.7 *Se nell'applicazione della Fase II del metodo del simplexso non viene mai generata due volte la stessa base (cioè se nessuna base si ripete nella sequenza delle basi prodotte dal metodo), allora esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza prodotta dal metodo soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza.*

Dimostrazione: Come abbiamo più volte osservato, ad ogni iterazione della Fase II, se i criteri di arresto e di illimitatezza non sono verificati, il metodo è in grado di generare una nuova base ammissibile differente da quella corrente. D'altra parte, siccome le basi sono in numero finito, e abbiamo fatto l'ipotesi che non ci siano ripetizioni, dopo un numero finito di passi (pari al più al numero di basi ammissibili distinte del problema) non potranno più essere generate basi diverse da tutte le precedenti. Dunque, necessariamente, o il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza devono essere soddisfatti. \square

È appena il caso di osservare che, nelle ipotesi di questo teorema, la Fase II del metodo del simplexso termina una volta raggiunta la base B_t con il soddisfacimento del criterio di ottimalità o del criterio di illimitatezza. Un caso semplice (poco frequente nelle applicazioni reali) in cui si può garantire che non ci sono ripetizioni di basi è quello in cui tutte le soluzioni di base siano *non degeneri*. In questo caso infatti, il Corollario 7.4.9 ci assicura che ad ogni cambio di base corrisponde una *diminuzione* del valore della funzione obiettivo. È allora chiaro che non ci possono essere ripetizioni di base, perché questo implicherebbe che in qualche iterazione viene generata una nuova base il cui valore è *maggior* del valore della base precedente. Questa osservazione ci permette di enunciare, senza bisogno di ulteriori dimostrazioni, il seguente corollario.

Corollario 7.4.14 *Se ogni soluzione di base ammissibile del problema (7.3.1) è non degenere allora, in un numero finito di passi, la Fase II del metodo del simplex converge alla soluzione ottima o conclude che il problema è illimitato inferiormente.*

Se il problema (7.3.1) ammette SBA degeneri, è possibile che la Fase II del metodo del simplex generi una sequenza di basi ammissibili $\{B_1, \dots, B_q\}$ ($q > 1$) con $B_1 = B_q$. Ovviamente affinché ciò sia possibile è evidente che (visto che il valore della funzione obiettivo ad ogni cambio di base non cresce) deve risultare che il valore della funzione obiettivo in ogni base $\{B_1, \dots, B_q\}$ è costante. A sua volta, ciò è possibile solamente se ad ogni iterazione $\bar{\rho} = 0$. Questo vuol quindi dire che, nella situazione appena descritta, le basi $\{B_1, \dots, B_q\}$ corrispondono tutte allo stesso vertice (degenero). In tale situazione, se usiamo un qualsiasi criterio deterministico per la scelta della variabile entrante e della variabile uscente, l'algoritmo genererà la stessa sequenza di basi ammissibili indefinitamente. Tale situazione viene detta di *ciclaggio*, ed è illustrata dal seguente esempio, dovuto a Beale.

Esempio 7.4.15 Si consideri il problema

$$\begin{array}{lllllll} \min & \frac{3}{4}x_4 & +20x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +6x_7 \\ & x_1 & +\frac{1}{4}x_4 & -8x_5 & -x_6 & +9x_7 & = 0 \\ & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & -12x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +3x_7 & = 0 \\ & x_3 & & & & & = 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & x \geq 0 \end{array} \quad (7.4.18)$$

Indicando con a_i , $i = 1, \dots, 7$, le colonne della matrice dei vincoli di uguaglianza del problema (7.4.18), la base ottima di questo problema è (a_1, a_4, a_6) (si lascia al lettore la verifica del test di ottimalità). Supponiamo ora di applicare la Fase II del metodo del simplex a partire dalla base ammissibile ovvia (a_1, a_2, a_3) . Si tratta ovviamente di una base degenere in quanto $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Supponiamo ora di applicare la Fase II del metodo del simplex scegliendo ad ogni iterazione l'indice h della variabile entrante per il quale il coefficiente di costo ridotto è minimo e l'indice k della variabile uscente il più piccolo tra quelli possibili (ad ogni iterazione ci sono una o due scelte possibili per k). Il lettore può verificare che con queste scelte (molto naturali, e coerenti con le scelte usate in classe per la risoluzione degli esercizi) viene generata la seguente successione di basi

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, a_3), \quad (a_4, a_2, a_3), \quad (a_4, a_5, a_3), \\ & (a_6, a_5, a_3), \quad (a_6, a_7, a_3), \quad (a_1, a_7, a_3), \quad (a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$

Si tratta di una serie di basi degeneri tutte corrispondenti allo stesso vertice. La cosa importante da notare è che l'ultima base indicata coincide con la prima. Quindi è chiaro che (se non si cambiano i criteri di scelta di h e k) da questo punto in poi, la Fase II non farà altro che ripetere indefinitivamente la stessa successione di basi senza mai raggiungere la base ottima.

Quindi, nel caso (più frequente nelle applicazioni) in cui esistano SBA degeneri, la Fase II del Metodo del Simplex, così come descritta prima, può non convergere, ovvero può produrre una sequenza infinita di basi ammissibili senza mai verificare uno dei due criteri di arresto.

Questa situazione indesiderata può essere risolta sfruttando la libertà esistente nel metodo nella scelta di h e k . È possibile definire opportune *regole anti ciclaggio* per la selezione di questi indici quando ci sia più di una variabile candidata ad entrare o uscire. Utilizzando queste regole si può garantire *in ogni caso* che il metodo del simplex converge in un numero finito di passi. È da notare, però, che spesso queste regole non vengono applicate in pratica, perché eccessivamente onerose e il metodo del simplex viene applicato esattamente così come lo abbiamo descritto. La pratica mostra che i casi in cui, pur non applicando nessuna regola anti ciclaggio, l'algoritmo non converge (cicla) sono rari. Inoltre, nel momento in cui ci si rende conto di trovarsi in una di queste rare situazioni è sempre possibile applicare le regole anti ciclaggio (anche ad algoritmo già iniziato). La discussione della reale implementazione pratica del metodo del simplex è però argomento molto complesso e non può essere qui trattata in dettaglio. Ci limitiamo a riportare una delle più famose e semplici regole anti ciclaggio, la regola di Bland.

Regola anti ciclaggio di Bland: *Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad entrare in base si sceglie quella con indice h più piccolo. Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad uscire dalla base si sceglie quella con indice k più piccolo.*

Vale il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 7.4.8 *Supponiamo di applicare la Fase II del metodo del simplex con la regola di Bland per la scelta delle variabili entranti e delle variabili uscenti (cioè per la scelta di h e k). Allora non viene mai generata due volte la stessa base e quindi, per il Teorema 7.4.7, esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza generata dal metodo del simplex (Fase II) soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza e il metodo converge quindi in un numero finito di passi.*

Il lettore può verificare che se si applica la regola di Bland nella soluzione del problema di Beal considerato sopra, viene in effetti trovata la base ottima in un numero finito di passi.

7.5 LA FASE I DEL METODO DEL SIMPLEXO

Come già detto, il primo obiettivo della Fase I del metodo del simplex è quello di verificare l'ammissibilità del problema da risolvere. Poi, in caso affermativo, deve identificare una base ammissibile B del problema e calcolare la matrice $B^{-1}N$ ed vettore $B^{-1}b$. Inoltre la Fase I deve essere anche in grado di accorgersi che la matrice dei vincoli di uguaglianza non ha rango massimo e, in questo caso, deve eliminare i vincoli di ridondanti presenti.

Ci sono vari algoritmi che realizzano la Fase I del metodo del simplex. In questa sezione esaminiamo in dettagliato la struttura di un particolare algoritmo che è basato sull'uso delle cosiddette *variabili artificiali*.

Si considera, come al solito, un problema di programmazione lineare in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Questa volta, a differenza della Fase II del metodo del simplex si richiede che sia vera solamente la seguente assunzione.

Assunzione: Il vettore b dei vincoli di uguaglianza del problema (7.5.1) è tale che:

$$b \geq 0_m.$$

In realtà la precedente non è una vera e propria assunzione, ma piuttosto la richiesta di formulare i vincoli in maniera tale da soddisfare $b \geq 0_m$. Infatti se una componente b_i è strettamente negativa, basta cambiare il segno ad entrambi i termini dell' i -esimo vincolo per soddisfare l'ipotesi richiesta.

A partire dal problema (7.5.1), si definisce il seguente *problema ausiliario* in cui si introducono m nuove variabili $\alpha_1, \dots, \alpha_m$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \alpha_i \\ \text{s.t.} \quad & Ax + I_m \alpha = b \\ & x \geq 0_n, \alpha \geq 0_m \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

con $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Diremo *artificiali* le variabili α_i ed *originarie* le variabili x_i .

Questo nuovo problema di programmazione lineare soddisfa tutte le ipotesi richieste per poter applicare la Fase II del metodo del simplex, infatti:

- è facile verificare che il punto $\begin{pmatrix} \alpha \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, avendo ipotizzato $b \geq 0_m$, soddisfa tutti i vincoli del problema ausiliario, quindi l'insieme ammissibile del problema (7.5.1) è non vuoto;
- la matrice dei vincoli $(A \ I_m)$, contenendo la matrice identità $m \times m$, soddisfa alla richiesta che $\text{rango}(A \ I_m) = m$;
- la matrice $\hat{B} = I_m$ è una base ammissibile per il problema (7.5.1) (poichè $\hat{B}^{-1}b = b \geq 0_m$) e si ha che $\hat{B}^{-1}\hat{N} = \hat{N} = A$ ed $\hat{B}^{-1}b = b$.

Il problema (7.5.2) ha anche la proprietà di *non essere illimitato inferiormente*, infatti la non negatività delle variabili artificiali α_i implica la non negatività del valore della funzione obiettivo nella regione ammissibile di (7.5.2), cioè per ogni vettore α ammissibile per il problema (7.5.2) si ha:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \geq 0. \quad (7.5.3)$$

Abbiamo quindi che il problema (7.5.2) ammette una soluzione ottima $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$ e che tale soluzione può essere individuata utilizzando la Fase II del metodo del simplex descritta nei paragrafi precedenti.

7.5.1 Ammissibilità del problema originario

Risolvere il problema ausiliario (7.5.2) permette di sapere se il problema originario (7.5.1) è ammissibile o meno, come è dimostrato dal seguente teorema:

Teorema 7.5.1 Il problema (7.5.1) possiede una soluzione ammissibile se e solo se la soluzione ottima $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$ del problema (7.5.2) ha valore $\sum_{i=1}^m \alpha_i^* = 0$.

Dimostrazione: Se $\sum_{i=1}^m \alpha_i^* = 0$, la non negatività delle α_i^* implica che

$$\alpha_1^* = \cdots = \alpha_m^* = 0. \quad (7.5.4)$$

Poichè $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$ è ammissibile per il problema (7.5.2) soddisfa anche a

$$Ax^* + I_m \alpha^* = b, \quad x^* \in \mathbb{R}^n,$$

che, utilizzando le (7.5.4), possono essere riscritte nella forma

$$Ax^* = b, \quad x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi il punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ è ammissibile per (7.5.1).

Mostriamo, ora, che se il problema (7.5.1) ammette una soluzione ammissibile $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ allora $\sum_{i=1}^m \alpha_i^* = 0$. Supponiamo, per assurdo, che $\sum_{i=1}^m \alpha_i^* > 0$.

Poichè $A\tilde{x} = b$ e $\tilde{x} \geq 0_n$, possiamo definire un vettore $\begin{pmatrix} 0_m \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$, ammissibile per (7.5.2) (infatti $A\tilde{x} + I_m 0_m = b$, $\tilde{x} \geq 0_n$ e $0_m \geq 0_m$). Ma il valore della funzione obiettivo di (7.5.2) calcolata in $\begin{pmatrix} 0_m \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$ è nullo, contraddicendo l'ottimalità di $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$. \square

Una conseguenza del precedente teorema è il seguente corollario.

Corollario 7.5.1 *Il problema (7.5.1) possiede una soluzione ammissibile se e solo se la soluzione ottima $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$ del problema (7.5.2) è tale che:*

$$\alpha_1^* = \dots = \alpha_m^* = 0.$$

Quindi, utilizzando i risultati precedenti, se dopo aver applicato la Fase II del metodo del simplex al problema ausiliario (7.5.2) si è ottenuta una soluzione ottima in cui il valore delle funzione obiettivo è positivo o, equivalentemente, una variabile artificiale α_i^* è positiva allora la Fase I del metodo del simplex termina dichiarando che il problema (7.5.1) è inammissibile. Se, al contrario, il valore ottimo della funzione obiettivo del problema (7.5.2) è zero o se tutte le variabili artificiali α_i^* sono nulle, allora il problema (7.5.1) è ammissibile. In questo caso, la Fase I del metodo del simplex, utilizzando alcune informazioni ottenute nella minimizzazione del problema (7.5.2) permette individuare la prima base ammissibile B del problema (7.5.1) e di determinare la matrice $B^{-1}N$ ed il vettore $B^{-1}b$.

7.5.2 Individuazione di una matrice di base ammissibile \hat{B} del problema originario e determinazione della matrice $\hat{B}^{-1}\hat{N}$ ed del vettore $\hat{B}^{-1}\hat{b}$

Sia \hat{B} la matrice di base ottima determinata dalla Fase II del metodo simplexso applicato al problema ausiliario (7.5.2), cioè la base ammissibile associata alla soluzione ottima ottenuta $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$. Per semplicità e senza perdere di generalità, supponiamo che la base \hat{B} sia costituita dalle prime q colonne della matrice I_m associata alle variabili artificiali α_i e dalle prime p colonne della matrice A associata alle variabili originarie x_i , cioè:

$$\hat{B} = (e_1, \dots, e_q, a_1, \dots, a_p) \quad (7.5.5)$$

con $p + q = m$. Per quanto riguarda la matrice delle colonne non di base \hat{N} , supponiamo che abbia la seguente struttura:

$$\hat{N} = (e_{q+1}, \dots, e_m, a_{p+1}, \dots, a_n). \quad (7.5.6)$$

Con queste scelte, nell'ultima forma canonica determinata dal metodo del simplexso, l'insieme ammissibile del problema (7.5.2) viene trasformato nella forma equivalente:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{q+1} \\ \vdots \\ \alpha_m \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \hat{B}^{-1}\hat{b} \quad (7.5.7)$$

$$x \geq 0_n, \quad \alpha \geq 0_m,$$

dove la matrice $\hat{B}^{-1}\hat{N}$ è stata partizionata nella matrica G costituita dalle colonne corrispondenti alle variabili α_i , con $i = q + 1, \dots, m$, e nella matrice H costituita dalle colonne corrispondenti alle variabili x_i , con $i = p + 1, \dots, n$, cioè:

$$G = \hat{B}^{-1}(e_{q+1}, \dots, e_m) \quad (7.5.8)$$

$$H = \hat{B}^{-1}(a_{p+1}, \dots, a_n). \quad (7.5.9)$$

Adesso l'analisi si divide nei due seguenti casi:

- (i) $p = m$ (ovvero $q = 0$) che corrisponde al fatto che nessuna colonna relativa ad una variabile ausiliaria è nella matrice di base;
- (ii) $p < m$ (ovvero $q \geq 1$) che corrisponde al fatto che qualche colonna relativa ad una variabile ausiliaria è rimasta nella matrice di base.

Caso (i) ($p=m$)

In questo caso la matrice di base ammissibile determinata dal metodo del simplex è data da:

$$\hat{B} = (a_1, \dots, a_m),$$

e la forma canonica (7.5.7) diventa:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \hat{B}^{-1}b \quad (7.5.10)$$

$$x \geq 0_n, \quad \alpha \geq 0_m,$$

dove matrici G e H assumono la forma:

$$G = \hat{B}^{-1}(e_1, \dots, e_m) \quad (7.5.11)$$

$$H = \hat{B}^{-1}(a_{m+1}, \dots, a_n). \quad (7.5.12)$$

Poichè la matrice di base ammissibile \hat{B} è costituita da tutte colonne della matrice A , essa è una matrice di base ammissibile anche per il Problema (7.5.1). Ovvero è immediatamente disponibile una base ammissibile per il problema originario. Quindi se poniamo:

$$B = \hat{B}$$

$$N = (a_{m+1}, \dots, a_n),$$

si ottiene (ricordando anche la (7.5.12)):

$$B^{-1}N = H,$$

$$B^{-1}b = \hat{B}^{-1}b.$$

Inoltre, se dalla forma canonica (7.5.10) eliminiamo le variabili artificiali e le colonne relative (formalmente poniamo $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$), otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + B^{-1}N \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B^{-1}b \quad (7.5.13)$$

$$x \geq 0_n$$

che costituisce la forma canonica del Problema (7.5.1) rispetto alla base B dalla quale può iniziare la Fase II.

In conclusione, quindi, nel caso $p = m$, per ottenere la prima forma canonica per la Fase II è sufficiente eliminare le variabili artificiali fuori base e le colonne corrispondenti.

Caso (ii) ($p < m$)

In questo caso la base ottima del problema artificiale non fornisce immediatamente una base ammissibile per il problema originario, in quanto contiene delle colonne della matrice I_m . Tuttavia è possibile, tramite operazioni relativamente semplici, eliminare dalla matrice di base tutte le colonne relative a variabili artificiali e ricondursi quindi al caso (i).

L'idea base è quella di cercare di sostituire una colonna e_k della matrice di base

$$\hat{B} = (e_1, \dots, e_k, \dots, e_q, a_1, \dots, a_p), \quad (7.5.14)$$

con una colonna a_{p+h} della matrice

$$\hat{N} = (e_{q+1}, \dots, e_m, a_{p+1}, \dots, a_{p+h}, \dots, a_n). \quad (7.5.15)$$

Analogamente al caso (i), nella forma canonica (7.5.7) possiamo porre $\alpha_{q+1} = \dots = \alpha_m = 0$ in modo da eliminare le variabili artificiali che non appartengono al vettore di base e le colonne ad esse associate. Notare inoltre che risulta

$$\hat{B}^{-1}b = \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_q^* \\ x_1^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{pmatrix}. \quad (7.5.16)$$

Ora, se osserviamo la riga k -esima della matrice H si possono presentare due sottocasi:

1. esiste almeno un elemento diverso da zero;
 2. tutti gli elementi sono uguali a zero.
-
1. Se esiste un indice h tale che l'elemento h -esimo della riga k -esima, che indichiamo con $(\hat{\pi}_h)_k$, è diverso da zero, possiamo ripetere gli stessi ragionamenti fatti nel Teorema 7.4.4 per determinare una nuova matrice di base. Si può dimostrare che in questo caso $((\pi_h)_k \neq 0)$, le colonne

$$e_1, \dots, e_{k-1}, a_{p+h}, e_{k+1}, \dots, e_q, a_1, \dots, a_p$$

sono linearmente indipendenti, e quindi in particolare costituiscono una nuova base data da:

$$\bar{B} = (e_1, \dots, a_{p+h}, \dots, e_q, a_1, \dots, a_p), \quad (7.5.17)$$

a cui corrisponde la matrice di colonne non appartenenti alla base:

$$\bar{N} = (e_{q+1}, \dots, e_m, a_{p+1}, \dots, e_k, \dots, a_n). \quad (7.5.18)$$

Se introduciamo \hat{T} la matrice di pivot rispetto all'elemento $(\hat{\pi}_h)_k$ il Teorema 7.4.6 mostra che

$$\begin{aligned} \bar{B}^{-1}b &= \hat{T}(\hat{B}^{-1}b) \\ \bar{B}^{-1}\bar{N} &= \hat{T}(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{h-1}, e_k, \hat{\pi}_{h+1}, \dots, \hat{\pi}_{n-m}), \end{aligned} \quad (7.5.19)$$

avendo indicato con $\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{n-m}$ le colonne della matrice H . In particolare la (7.5.19) e la (7.5.16) implicano:

$$\bar{B}^{-1}b = \hat{T}(\hat{B}^{-1}b) = \hat{B}^{-1}b \geq 0_m, \quad (7.5.20)$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla (7.5.16) che implica $(\hat{B}^{-1}b)_k = \alpha_k^* = 0$ e quindi $e_k^T \hat{B}^{-1}b = 0$.

La (7.5.20) garantisce, quindi, che la matrice di base \bar{B} è ammmissibile. Perciò l'operazione di pivot rispetto all'elemento $(\hat{\pi}_h)_k$ (operazione descritta dal Corollario 7.4.10 e dalle note successive) permette di passare alla nuova forma canonica:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \\ x_{p+h} \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_q \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \bar{B}^{-1}\bar{N} \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ \vdots \\ x_{p+h-1} \\ \alpha_k \\ x_{p+h+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1^* \\ \vdots \\ x_p^* \end{pmatrix} \quad (7.5.21)$$

$$x \geq 0_n, \quad \alpha \geq 0_m,$$

In questa nuova forma canonica la variabile α_k non appartiene al vettore delle componenti di base e, analogamente a quanto fatto nel caso (i), può essere eliminata, insieme alla colonna corrispondente, ponendo $\alpha_k = 0$.

La precedente operazione di pivot viene detta *scambio degenero*; tale operazione si può applicare in corrispondenza di una SBA degenera e permette di

cambiare base ammissibile senza cambiare la SBA corrispondente. Nel caso della Fase I del metodo del simplesso permette di far uscire dalla matrice di base una colonna e_k e di far entrare una colonna a_{p+h} per cui risulti $(\hat{\pi}_h)_k \neq 0$.

2. Nel caso in cui la riga k -esima della matrice H è costituita solamente da elementi nulli, si può dimostrare che il k -esimo vincolo del Problema (7.5.1) (quello in cui compare α_k) è ridondante e, quindi, si è in un caso in cui $\text{rango}(A) < m$.

Tale k -esimo vincolo può essere eliminato dal problema originario (eliminando quindi anche la variabile α_k) ottenendo un problema con un vincolo in meno. Si può dimostrare che se si riapplica la Fase I del metodo del simplesso al problema ottenuto eliminando tale vincolo, si riottiene la stessa forma canonica senza la variabile α_k e la riga ad essa corrispondente.

In conclusione, riassumendo, ogni variabile artificiale α_k presente nel vettore delle variabili di base può essere fatte uscire da tale vettore attraverso uno scambio degenere oppure può essere eliminata direttamente. Quindi ci si può sempre ricondurre al caso (i) in cui il vettore di base è costituito da tutte variabili originarie.

Siamo ora in grado di formulare uno schema completo del metodo del simplesso *in due fasi*.

Il metodo del simplex in due fasi

Fase I

- Definire il Problema Ausiliario (7.5.2)
- Determinare la soluzione ottima $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$ del Problema Ausiliario utilizzando l'algoritmo per la Fase II.
- Determinare se il problema originario è ammissibile:
 - se $\alpha_i^* \neq 0$ per qualche $i \in \{1, \dots, m\}$ il problema originario è *inammissibile* - STOP.
 - Se $\alpha^* = 0_m$, il problema originario è *ammissibile*.
- Costruire la forma canonica relativa alla base ottima \hat{B} del problema ausiliario tutta composta da colonne della matrice A originaria

Fase II

- Applicare la Fase II del metodo del simplex al problema originario a partire dalla base ammissibile determinata alla fine della Fase I.

7.5.3 Esempi

Esempio 7.5.2 Applicare la Fase I del metodo del simplex al seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

e nel caso in cui esso risulti ammissibile, determinare la forma canonica iniziale della Fase II.

Introduciamo tre variabili ausiliarie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e scriviamo il problema ausiliario

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \alpha_1 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + \alpha_2 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 + \alpha_3 &= 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Naturalmente se prendiamo $I_{B_0} = \{4, 5, 6\}$, ovvero

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}N_0$$

il problema ausiliario è in forma canonica rispetto alla base B_0 :

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Applichiamo, quindi, la Fase II a questo problema ausiliario in forma canonica.

Iterazione 0

Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma_0^T = (0 \ 0 \ 0) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ -6 \ -2)$$

Verifica criterio di ottimalità.

Il criterio di ottimalità fallisce perché esistono componenti di γ negative.

Verifica criterio di illimitatezza.

La verifica di questo criterio può essere omessa perché sappiamo che il problema ausiliario non può essere illimitato. Comunque si verifica immediatamente che non è soddisfatto.

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: poiché $\gamma_2 = -6 = \min_{\gamma_i < 0} \gamma_i$, scegliamo $h = 2$ e quindi la seconda variabile fuori base, x_2 entra in base.

Variabile uscente: dal criterio del rapporto minimo si ha

$$\min\{2/1, 1/2, 3/3\} = 1/2$$

e quindi $k = 2$, ovvero la seconda variabile, α_2 in base esce dalla base.

Scambiando le colonne si ha:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $B_1^{-1}N_0$ e $B_1^{-1}b$ attraverso un'operazione di pivot. La matrice da considerare è

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{2} & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_2)_2 = 2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 3/2 \end{array} \right)$$

e quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B_1 è

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Iterazione 1

Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma_1^T = (0 \ 1 \ 0) - (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} = (-3 \ 3 \ -2)$$

Verifica criterio di ottimalità.

Il criterio di ottimalità fallisce perché esistono componenti di γ negative.

Verifica criterio di illimitatezza.

La verifica di questo criterio può essere omessa perché sappiamo che il problema ausiliario non può essere illimitato. Comunque si verifica immediatamente che non è soddisfatto.

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: poiché $\gamma_1 = -3 = \min_{\gamma_i < 0} \gamma_i$ scegliamo $h = 1$ e quindi la prima variabile fuori base, x_1 entra in base.

Variabile uscente: dal criterio del rapporto minimo si ha

$$\min \left\{ \frac{3/2}{3/2}, \frac{3/2}{3/2} \right\} = 1;$$

scegliamo $k = 1$, ovvero la prima variabile in base α_1 esce dalla base.

Scambiando le colonne si ha:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora $B_2^{-1}N_2$ e $B_2^{-1}b$ attraverso un'operazione di pivot. La matrice da considerare è

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathbf{3/2} & | & 1 & -1/2 & 1 & | & 3/2 \\ -1/2 & | & 0 & 1/2 & 0 & | & 1/2 \\ 3/2 & | & 0 & -3/2 & 1 & | & 3/2 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_1)_1 = 3/2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & | & 2/3 & -1/3 & 2/3 & | & 1 \\ 0 & | & 1/3 & 1/2 & 1/3 & | & 1 \\ 0 & | & -1 & -1 & 0 & | & 0 \end{array} \right)$$

e quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B_2 è

$$\begin{aligned} \min (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ \alpha_1 \geq 0, \ \alpha_2 \geq 0, \ \alpha_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Iterazione 2

Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma_2^T = (1 \ 1 \ 0) - (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \ 2 \ 0)$$

Verifica criterio di ottimalità.

Il criterio di ottimalità è soddisfatto e la soluzione ottima trovata è

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \alpha_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Siamo quindi alla fine della Fase I. Dobbiamo ora verificare se il problema originario è ammissibile. Poiché la funzione obiettivo del problema ausiliario all'ottimo vale $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* = 0$, il problema originario è ammissibile. Si deve ora determinare la forma canonica iniziale della Fase II eliminando le variabili artificiali. Innanzitutto osserviamo che ci sono due variabili artificiali (α_1 e α_2) che sono fuori base e quindi possono essere eliminate insieme alle colonne della matrice $B_2^{-1}N_1$, ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.5.22)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0.$$

Ora dobbiamo eliminare la variabile artificiale α_3 che è in base. Poiché α_3 è la terza variabile in base, dobbiamo esaminare la terza riga della matrice $B^{-1}N$ per verificare se esiste un elemento $(\pi_h)_3$ non nullo; se esaminiamo la matrice $B^{-1}N$ ora ottenuta nella (7.5.22) dalla quale abbiamo già eliminato le colonne relative alle variabili artificiali fuori base, sappiamo, ovviamente che sono rimaste solo colonne relative a variabili originarie. Come si vede tale matrice è costituita della

sola colonna $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi la terza riga è costituita dal solo elemento zero.

Questo significa che la terza riga dei vincoli del problema originario è esprimibile come combinazione delle altre righe e quindi è ridondante. Tale riga può essere pertanto eliminata dal problema originario e dal problema ausiliario. Tuttavia non è necessario risolvere il problema ausiliario ottenuto eliminando la terza riga perché la base ottima del nuovo problema si ottiene rimovendo la colonna relativa alla variabile α_3 ; quindi la matrice di base ottima è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere $B^{-1}N$ è sufficiente eliminare la terza riga dalla (7.5.22), ovvero risulta

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Quindi la forma canonica per iniziare la Fase II è la seguente

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 2/3 \\ 1/3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_3 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

□

Esempio 7.5.3 Applicando il metodo del simplex, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & -4x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Risolvendo il problema ausiliario si determinare, se esiste, una soluzione ammissibile di base.

Introduciamo due variabili artificiali: α_1 e α_2 e scriviamo il problema ausiliario.

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \alpha_1 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + \alpha_2 &= 3 \\ \alpha &\geq 0, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Il problema ausiliario ha una soluzione di base ammissibile facilmente individuabile (ed è così proprio per come lo abbiamo definito) e quindi possiamo applicare la seconda fase del metodo del simplex.

Iterazione 0 $I_{B_0} = \{4, 5\}$, $I_{N_0} = \{1, 2, 3\}$. Le quantità canoniche rispetto alla base corrente sono:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}N_0, \quad B_0^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcolo dei coefficienti ridotti.

$$\gamma_0^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N = (0, 0, 0) - (1, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-5, -4, -3).$$

Verifica criterio di ottimalità.

Poiché i coefficienti ridotti non sono tutti non negativi, dobbiamo proseguire.

Possiamo non effettuare il test di illimitatezza perché sappiamo a priori che il problema ausiliario non è illimitato (è comunque immediato verificare che non è soddisfatto).

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: sceglio come variabile entrante quella con più basso valore del coefficiente ridotto: la prima non in base, x_1 ($h = 1$).

Variabile uscente: le variabili candidate a uscire dalla base sono quelle per cui $(\pi_1)_i > 0$, cioè, in questo caso, la prima e la seconda in base. Risulta

$$\frac{(B_0^{-1}b)_1}{(\pi_1)_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{(B_0^{-1}b)_2}{(\pi_1)_2} = \frac{3}{3} = 1.$$

e quindi il minimo dei rapporti $(B_0^{-1}b)_i/(\pi_1)_i$ (per quegli i tali che $(\pi_1)_i > 0$) è raggiunto per $i = 2$. La variabile uscente dalla base è la seconda in base ($k = 2$): α_2 .

Iterazione 1 $I_{B_1} = \{4, 1\}$, $I_{N_1} = \{5, 2, 3\}$. Calcoliamo ora le quantità canoniche, relative alla base corrente, mediante l'operazione di pivot utilizzando esplicitamente la matrice di pivot T :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1}N_1 = T_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1}b = T_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo dei coefficienti ridotti.

$$\gamma_1^T = c_{N_1}^T - c_{B_1}^T B_1^{-1} N_1 = (1, 0, 0) - (1, 0) \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} = (5/3, 1, -4/3).$$

Poiché i coefficienti ridotti non sono tutti non negativi, dobbiamo proseguire.

Costruzione nuova base ammissibile

Variabile entrante: sceglio come variabile entrante quella con più basso valore del coefficiente ridotto (in questo caso la scelta è obbligata perché solo un coefficiente ridotto è non negativo): la terza non in base, x_3 ($h = 3$) entra in base.

Variabile uscente: le variabili candidate a uscire dalla base sono quelle per cui $(\pi_3)_i > 0$, cioè, in questo caso, la prima e la seconda in base. Risulta

$$\frac{(B_1^{-1}b)_1}{(\pi_3)_1} = \frac{2}{4/3} = \frac{3}{2}, \quad \frac{(B_1^{-1}b)_2}{(\pi_3)_2} = \frac{1}{1/3} = 3.$$

e quindi il minimo dei rapporti $(B_1^{-1}b)_i/(\pi_3)_i$ (per quegli i tali che $(\pi_3)_i > 0$) è raggiunto per $i = 1$. La variabile uscente dalla base è la prima in base ($k = 1$): α_1 .

Iterazione 2 $I_{B_2} = \{3, 1\}$, $I_{N_2} = \{5, 2, 4\}$ Poiché tutte le variabili artificiali sono uscite dalla base il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario è 0 nella soluzione di base corrente (che dobbiamo ancora calcolare). Siamo quindi all'ottimo del problema ausiliario ed è quindi sufficiente, per concludere, calcolare la soluzione di base corrente.

$$T_2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1}b = T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La soluzione ottima del problema ausiliario è quindi

$$x^T = (1/2, 0, 3/2, 0, 0).$$

Poiché il valore ottimo del problema ausiliario è zero la regione ammissibile del problema originario e non vuota. Una soluzione di base ammissibile si ottiene dalla soluzione ottima del problema ausiliario eliminando le componenti relative alle variabili artificiali, ovvero

$$x^T = (1/2, 0, 3/2).$$

È immediato verificare che questa è, in effetti, una soluzione di base ammissibile per il problema originario.

Passiamo ora alla Fase II del metodo del simplexso, sapendo quindi che una base ammissibile per il problema originario è

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

corrispondente alle variabili x_3, x_1 . Calcoliamo le quantità canoniche; abbiamo già calcolato la matrice T , quindi possiamo calcolare queste quantità utilizzando le informazioni ottenute nelle iterazioni precedenti. In particolare risulta

$$B^{-1}N = T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e inoltre abbiamo già calcolato

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Quindi la forma canonica iniziale della Fase II è

$$\begin{aligned} \min & -4x_1 - x_2 - x_3 \\ \left(\begin{array}{c} x_3 \\ x_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} -3/4 \\ 5/4 \end{array} \right) x_2 &= \left(\begin{array}{c} 3/2 \\ 1/2 \end{array} \right) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Calcolo dei coefficienti di costo ridotto.

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = -1 - (-1 \quad -4) \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 13/4 > 0$$

La soluzione $x^T = (1/2, 0, 3/2)$ è quindi ottima per il problema originario. \square

Esempio 7.5.4 Applicando il metodo del simplex risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Innanzitutto il problema deve essere riscritto in forma standard; introducendo due variabili di surplus si ha

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Risolvendo il problema ausiliario si determina, se esiste, una soluzione ammissibile di base. Introduciamo ora due variabili artificiali, α_1 e α_2 e scriviamo il problema ausiliario.

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 + \alpha_2 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 + \alpha_1 = 1 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 + \alpha_2 = 1 \\ & \alpha \geq 0 \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Poiché una soluzione di base ammissibile è evidente per il problema ausiliario possiamo applicare la Fase II del metodo del simplex.

Iterazione 0 $I_B = \{5, 6\}$, $I_N = \{1, 2, 3, 4\}$. Le quantità canoniche, relative alla base corrente sono

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1}N, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{-1}b$$

Calcolo dei coefficienti ridotti.

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (0, 0, 0, 0) - (1, 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0, 1, 1, 1).$$

Poichè i coefficienti ridotti sono tutti non negativi, siamo all' ottimo. La soluzione corrente è

$$x = (0, 0, 0, 0, 1, 1)^T$$

alla quale corrisponde il valore ottimo 2. Possiamo quindi concludere che il problema originario non ammette soluzioni ammissibili. Si lascia allo studente una verifica diretta per via geometrica della inammissibilità del problema originario; infatti è immediato rappresentare sul piano Cartesiano l'insieme ammissibile del problema originario e verificare che esso è vuoto. \square

Esempio 7.5.5 Applicando il metodo del simplex risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ x_1 + x_2 & \geq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 4 \\ x_1 & \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Innanzitutto scriviamo il problema in forma standard aggiungendo una variabile di surplus (x_3) e una variabile di slack (x_4):

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = 4 \\ x_i & \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Poiché si dispone già della quarta colonna (corrispondente ad x_4) data da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ da utilizzare come seconda colonna della matrice identità della base, è sufficiente introdurre una sola variabile artificiale nel primo vincolo (anche se i vincoli sono due e quindi $m = 2$) per definire il problema ausiliario

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + \alpha_1 & = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = 4 \\ x_i & \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \alpha_1 \geq 0. \end{aligned}$$

In questo modo è disponibile la forma canonica rispetto alla base formata dalla quinta e quarta colonna, ovvero: $I_{B_0} = \{5, 4\}$ e $I_{N_0} = \{1, 2, 3\}$ e

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = B_0^{-1} N_0$$

e il problema ausiliario in forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ x \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Applichiamo ora la Fase II al problema ausiliario:

Calcolo dei coefficienti ridotti.

$$\gamma_0^T = (0 \ 0 \ 0) - (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (-1 \ -1 \ 1).$$

Verifica criterio di ottimalità.

Poiché esistono componenti di γ negative, il criterio non è verificato.

Poiché il problema ausiliario non può essere illimitato, la verifica del criterio di illimitatezza può essere omessa, e comunque, si vede immediatamente che non è verificato.

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: scegliamo $h = 1$, in corrispondenza della prima componente di γ ; quindi la prima variabile fuori base, x_1 , entra in base.

Variabile uscente: dal criterio del rapporto minimo si ricava che deve uscire dalla base la seconda variabile (x_4) ovvero $k = 2$.

Effettuando lo scambio si ha: $I_{B_1} = \{5, 1\}$ e

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Effettuando un'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_1)_{22} = 2$ nella matrice

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ \mathbf{2} & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

si ottiene

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1/2 & -1/2 & -1 & 4 \\ 1 & 1/2 & 3/2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

e quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha_1 \\ \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) \\ x \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Effettuiamo una nuova iterazione:

Calcolo dei coefficienti ridotti.

$$\gamma_1^T = (0 \ 0 \ 0) - (1 \ 0) \left(\begin{array}{ccc} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \end{array} \right) = (1/2 \ 1/2 \ 1).$$

Quindi abbiamo ottenuto la soluzione ottima del problema ausiliario. A questo punto deve essere fatta la verifica circa l'ammissibilità del problema originario: poiché c'è la variabile artificiale α_1 in base con valore 4, la funzione obiettivo del problema ausiliario non è nulla all'ottimo e quindi il problema originario è inammissibile. Si lascia allo studente una verifica diretta per via geometrica della inammissibilità del problema originario; infatti è immediato rappresentare sul piano Cartesiano l'insieme ammissibile del problema originario e verificare che esso è vuoto \square

Esempio 7.5.6 Supponiamo che, dopo aver applicato la Fase I del metodo del simplex si ottenga la seguente forma canonica:

$$\begin{aligned} & \min \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_2 \\ \alpha_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 0 \end{array} \right) \\ & x \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

Verificare se il problema originario è ammissibile e, in caso affermativo, determinare la forma canonica iniziale per la Fase II.

Osservando la forma canonica si ottiene che la soluzione ottima del problema ausiliario è

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} x_2 \\ \alpha_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

e quindi il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario all'ottimo vale $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ e quindi il problema originario è ammissibile. Determiniamo ora una forma canonica per il problema originario:

La variabile ausiliaria α_3 è fuori base, quindi può essere eliminata insieme alla colonna π_2 . Quindi, per quanto riguarda i vincoli di uguaglianza si ottiene

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 0 \end{array} \right)$$

Le variabili α_1, α_2 sono invece in base.

- La variabile α_2 è la terza variabile in base e quindi si deve analizzare la terza riga della matrice $B^{-1}N$ che è

$$(0 \ 0 \ 0).$$

Ovvero alla variabile α_2 corrisponde una riga tutta nulla nella matrice $B^{-1}N$ ottenuta eliminando le variabili artificiali fuori base, cioè non esistono colonne π_h associate a variabili originarie tali che $(\pi_h)_k \neq 0$. Questo significa che il vincolo in cui compare la variabile α_2 è ridondante e può essere eliminato. Si ottiene così

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 10 \end{array} \right)$$

- La variabile α_1 è nulla ed è la prima variabile in base e nella prima riga della nuova matrice $B^{-1}N$ ora ottenuta esiste un elemento tale $(\pi_h)_1 \neq 0$: si ottiene per $h = 2$, ovvero $(\pi_2)_1 = -1$; è possibile quindi effettuare uno *scambio degenero* tra la variabile α_1 in base e la seconda variabile fuori base corrispondente a x_3 . Questo corrisponde alle nuove matrici

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La nuova base \tilde{B} è tale che $\tilde{B}^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Si calcola $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ con un'operazione di pivot. La matrice di pivot è

$$(\pi_2 \mid \pi_1 \ e_1 \ \pi_3 \mid B^{-1}b)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} -1 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 4 & | & 2 & 0 & 2 & | & 10 \end{pmatrix}.$$

Effettuando un'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_2)_1 = -1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & | & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 2 & 4 & 2 & | & 10 \end{pmatrix}.$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

A questo punto la variabile α_1 è fuori base e può quindi essere eliminata ottenendo la forma canonica per il problema originario che presenta i vincoli di uguaglianza nella forma

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

□

Esempio 7.5.7 Supponiamo che, dopo aver applicato la Fase I del metodo del simplex si ottenga la seguente forma canonica:

$$\begin{aligned} & \min \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_2 \\ \alpha_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 1 \end{array} \right) \\ & x \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

Verificare se il problema originario è ammissibile e, in caso affermativo, determinare la forma canonica iniziale per la Fase II.

Osservando la forma canonica si ottiene che la soluzione ottima del problema ausiliario è

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} x_2 \\ \alpha_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

e quindi il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario all'ottimo vale $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \neq 0$ e quindi il problema originario non è ammissibile. \square