

3

Modelli di Programmazione Lineare

3.1 GENERALITÀ

Come già detto nel capitolo precedente, è possibile classificare i modelli di Programmazione Matematica in base alla struttura particolare che possono avere la funzione obiettivo e i vincoli. Riprendiamo qui, espandendola, la definizione di *problemi di Programmazione Lineare* nei quali sia la funzione obiettivo, sia i vincoli sono rappresentati mediante funzioni lineari nelle variabili di decisione.

Preliminarmente, richiamiamo il concetto di *funzione lineare*.

Definizione 3.1.1 Una funzione reale di n variabili reali $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice lineare se valgono le seguenti condizioni:

- i) per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- ii) per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Una immediata conseguenza di questa definizione è che una funzione è lineare se e solo se può essere scritta nella forma

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.1.1)$$

con c_1, \dots, c_n costanti reali. Infatti è immediato verificare che una funzione della forma (3.1.1) soddisfa la Definizione 3.1.1; d'altra parte, se una funzione $f(x)$ è lineare cioè se soddisfa la Definizione 3.1.1, allora si può scrivere nella forma (3.1.1); infatti se indichiamo con $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonica di \mathbb{R}^n allora

risulta $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dove le x_i sono le componenti del vettore x . Quindi utilizzando la linearità si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) + \dots + f(x_n e_n) = \\ &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \end{aligned}$$

dove $c_i = f(e_i)$ per $i = 1, \dots, n$. □

Quindi

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 - 3.5x_3 \\ &-2x_1 + (\sin 4)x_2 + \pi x_3 - 4x_5, \end{aligned}$$

sono funzioni lineari, mentre

$$\begin{aligned} &(x_1)^2 + 4x_2 - 3.5x_3 \\ &x_1 + 4x_2 - 3.5e^{x_3} \\ &-2x_1 + \sin x_2 + \pi x_3 - 4x_5, \end{aligned}$$

non sono funzioni lineari.

3.2 STRUTTURA DI UN MODELLO DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Esaminiamo ora la struttura di un generico modello di Programmazione Lineare. Un modello di Programmazione Lineare è caratterizzato da

- una singola *funzione obiettivo lineare* da minimizzare o massimizzare che può essere quindi scritta nella forma

$$f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

- un numero finito di *vincoli lineari* che, supponendo siano m , possono essere scritti nella forma

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & \geq b_m. \end{array}$$

Introducendo il vettore $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ e $x \in \mathbb{R}^n$ definito $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$c^T x.$$

Inoltre, introducendo la matrice ($m \times n$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ la formulazione completa di un generico problema di Programmazione Lineare può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

Osservazione 3.2.1 Come già osservato in relazione ad un generico problema di Programmazione Matematica, (cfr. Osservazione 2.2.1) non si perde di generalità formulando un generico problema di Programmazione Lineare con vincoli di sola diseguaglianza nella forma di maggiore o uguale. Infatti, ogni vincolo di diseguaglianza nella forma di minore o uguale e ogni vincolo di uguaglianza può essere ricondotto a questa forma con semplici operazioni algebriche.

Per esempio,

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \\ & x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

sono problemi di PL.

Le applicazioni della Ricerca Operativa che possono essere formulate mediante l'uso di modelli di Programmazione Lineare sono molto frequenti e importanti. In riferimento alle applicazioni di tipo economico la funzione obiettivo ha di solito il significato di profitto (da massimizzare) oppure di costo (da minimizzare). Profitti e costi sono ottenuti come somma dei *profitti* e *costi marginali* cioè di quelli relativi a ciascuna unità di prodotto. Quando è richiesta la massimizzazione di un profitto, il modello contiene, di solito, vincoli che esprimono limitazioni superiori sulle risorse (vincoli di capacità produttiva, disponibilità di materie prime); se invece è richiesta la minimizzazione di un costo sono di solito presenti vincoli sulla domanda (richieste di mercato) che impongono limitazioni inferiori alle variabili.

È possibile la presenza di *vincoli di continuità* che esprimono conservazione o riduzione di masse o volumi ed hanno spesso la forma di vincoli di uguaglianza.

I modelli di Programmazione Lineare hanno un impiego molto generale non limitato ad applicazioni economiche o progettuali; ad esempio, essi sono usati come elementi base di procedimenti di soluzione di problemi più complessi: è il caso di alcuni algoritmi di ottimizzazione discreta che sono basati sulla soluzione di una successione di problemi di Programmazione Lineare.

3.3 GENERALITÀ SUI MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Mettiamo ora in evidenza le caratteristiche che un problema reale deve possedere per poter essere formulato come modello di Programmazione Lineare ed i pregi dei modelli di Programmazione Lineare.

Innanzitutto, chiariamo che le ipotesi che vengono assunte nel formulare un problema come modello di Programmazione Lineare sono le seguenti:

- *proporzionalità*: il contributo di una variabile di decisione alla funzione obiettivo e ai vincoli è proporzionale secondo una costante moltiplicativa alla quantità rappresentata dalla variabile stessa;
- *additività*: il contributo delle variabili di decisione alla funzione obiettivo e ai vincoli è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile.
- *continuità*: ogni variabile di decisione può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità, e quindi le variabili possono assumere valori frazionari.

In relazione ad applicazioni reali queste ipotesi non rappresentano una grossa restrizione nel senso che sono molti gli ambiti e i problemi che sono ben rappresentati da un modello di Programmazione Lineare; si tenga comunque presente che esistono casi significativi in cui queste ipotesi non sono soddisfatte e quindi in questi casi è necessario considerare Modelli di Programmazione Non Lineare.

La particolare attenzione dedicata ai modelli di Programmazione Lineare deriva, comunque, dai numerosi vantaggi che essa presenta e che possono essere così sintetizzati:

1. *Generalità e flessibilità*.

I modelli di Programmazione Lineare possono descrivere moltissime situazioni reali anche assai diverse tra loro e quindi hanno un carattere di universalità e di adattabilità alle diverse realtà applicative e anche quando l'ipotesi di linearità non è accettabile, il modello lineare costituisce una buona base di partenza per successive generalizzazioni.

2. *Semplicità.*

I modelli di Programmazione Lineare sono espressi attraverso il linguaggio dell'algebra lineare e quindi sono facilmente comprensibili anche in assenza di conoscenze matematiche più elevate.

3. *Efficienza degli algoritmi risolutivi.*

Come accennato in precedenza i modelli reali hanno dimensioni molto elevate ed è quindi indispensabile l'uso del calcolatore che con opportuni programmi di calcolo possa rapidamente fornire una soluzione numerica. Relativamente ai modelli di Programmazione Lineare esistono programmi molto efficienti e largamente diffusi che sono in grado di risolvere rapidamente problemi con migliaia di vincoli e centinaia di migliaia di variabili.

4. *Possibilità di analisi qualitative.*

I modelli di Programmazione Lineare permettono di ottenere, oltre la soluzione numerica del problema, anche ulteriori informazioni relative alla dipendenza della soluzione da eventuali parametri presenti, che possono avere significative interpretazioni economiche.

3.4 CLASSI DI MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Lo scopo di questo paragrafo è quello di illustrare alcune classi di problemi di Programmazione Lineare tipici che si incontrano frequentemente nelle applicazioni reali. Questa divisione in classi ha uno scopo esclusivamente didattico al fine di fornire una esposizione sistematica di esempi di modelli di Programmazione Lineare di tipo generale. Nella realtà, nella maggior parte dei casi, i problemi che si presentano non sono riconducibili ad una classe specifica, ma possono essere costituiti da molteplici elementi. Tuttavia, la trattazione per grandi classi di problemi dovrebbe fornire strumenti utili per la modellizzazione di problemi reali. Tenendo presente questa osservazione, nel seguito esamineremo tre grandi classi di modelli di Programmazione Lineare che rappresentano situazioni molto diffuse del mondo reale; si tratta dei

- *modelli di allocazione ottima di risorse,*
- *modelli di miscelazione,*
- *modelli di trasporto.*

Per ciascuna classe di modelli verranno presentati alcuni esempi e una formulazione generale. Tale divisione in "classi" di problemi ha il solo scopo permettere una descrizione schematica di alcune situazioni tipiche che possono essere rappresentate attraverso problemi di Programmazione Lineare. È chiaro che nella

realità i problemi si presentano nelle forme più diverse e sta a colui che costruisce il modello fornirne una rappresentazione il più possibile completa e significativa del problema in analisi.

3.4.1 Modelli di allocazione ottima di risorse

Si tratta di modelli che considerano il problema di come dividere (allocare) risorse limitate tra varie esigenze in competizione fra di loro. Il generico termine “*risorse*” può rappresentare, ad esempio, disponibilità di macchinari, materie prime, mano d’opera, energia, tempi macchina, capitali, etc.

Esempio 3.4.1 *Un colorificio produce due tipi di coloranti **C1** e **C2** utilizzando 3 preparati base in polvere **P1**, **P2**, **P3** che vengono sciolti in acqua. La differente concentrazione dei preparati base dà origine ai due diversi tipi di coloranti. Le quantità (in etogrammi) di preparati base necessarie per produrre un litro di colorante di ciascuno dei due tipi è riportato nella seguente tabella*

	C1	C2
P1	1	1
P2	1	2
P3	-	1

Ogni giorno la quantità di ciascuno dei preparati base (in etogrammi) della quale il colorificio può disporre è la seguente

P1	P2	P3
750	1000	400

*Il prezzo di vendita del colorante **C1** è di 7 Euro al litro, mentre il colorante **C2** viene venduto a 10 Euro al litro. Determinare la strategia ottimale di produzione giornaliera in modo da massimizzare i ricavi ottenuti dalla vendita dei due coloranti.*

Formulazione.

Si vuole costruire il modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi considerando le limitazioni date dalle produzioni effettivamente realizzabili.

È immediato associare le variabili di decisione ai quantitativi di coloranti prodotti. Siano, quindi, rispettivamente x_1 e x_2 i quantitativi (in litri) da produrre giornalmente dei due coloranti.

Nel formulare il modello di Programmazione Lineare si deve verificare che siano soddisfatte le ipotesi fondamentali:

- *Proporzionalità.*

I consumi dei preparati base e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di coloranti prodotti. Ad esempio, per produrre una quantità x_2 di colorante **C2** si consumano $2x_2$ etogrammi di **P2** e dalla vendita di x_2 litri di **C2** si ricavano $10x_2$ Euro indipendentemente dalla quantità prodotta e venduta dell'altro tipo di colorante.

- *Additività.*

I consumi dei preparati base e i ricavi rispettivamente associati alla produzione dei due coloranti sono additivi, nel senso che per produrre x_1 litri di colorante **C1** e x_2 di **C2** si consumano $x_1 + 2x_2$ etogrammi di preparato di base **P2** e si ricavano $7x_1 + 10x_2$ Euro.

- *Continuità.*

Ogni variabile introdotta nel modello può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità.

- *Variabili.* Come già detto, prendiamo come variabili di decisione x_1 e x_2 , rispettivamente i quantitativi (in litri) di colorante **C1** e **C2** da produrre giornalmente.
- *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal profitto totale che per le ipotesi fatte è dato (in Euro) da $7x_1 + 10x_2$.
- *Vincoli.* Poiché il consumo di preparati base non può essere superiore alla disponibilità si deve avere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 750 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ x_2 &\leq 400. \end{aligned}$$

Inoltre si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

□

Esempio 3.4.2 Una azienda automobilistica produce tre diversi modelli di autovettura: un modello economico, uno normale ed uno di lusso. Ogni autovettura viene lavorata da tre robot: **A**, **B** e **C**. I tempi necessari alla lavorazione sono riportati, in minuti, nella tabella seguente insieme al profitto netto realizzato per autovettura

	Economica	Normale	Lusso
A	20	30	62
B	31	42	51
C	16	81	10
Prezzo	1000	1500	2200

I robot **A** e **B** sono disponibili per 8 ore al giorno mentre il robot **C** è disponibile per 5 ore al giorno. Il numero di autovetture di lusso prodotte non deve superare il 20% del totale mentre il numero di autovetture economiche deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva. Supponendo che tutte le autovetture prodotte vengano vendute, formulare un problema di Programmazione Lineare che permetta di decidere le quantità giornaliere (non necessariamente intere) da produrre per ciascun modello in modo tale da massimizzare i profitti rispettando i vincoli di produzione.

Formulazione.

È un problema di allocazione ottima di risorse e può essere formulato in termini di Programmazione Lineare nel seguente modo.

- *Variabili.* Indichiamo con x_1, x_2, x_3 , rispettivamente il numero di autovetture (assunte non necessariamente intere) del modello economico, normale e di lusso da produrre giornalmente.
- *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è data dal profitto globale ottenuto dalla vendita delle automobili e quindi può essere scritta

$$1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3.$$

- *Vincoli.* Ci sono due tipologie di vincoli da considerare:

- i vincoli sulla capacità produttiva; poiché il robot **A** è disponibile giornalmente per 8 ore, cioè per 480 minuti si ha il vincolo

$$20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480.$$

Ragionando in modo analogo si ottengono i vincoli relativi alla disponibilità dei robot **B** e **C**, e quindi si ottengono i seguenti vincoli:

$$31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480$$

$$16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300.$$

- i vincoli sul numero totale dei singoli tipi di autovetture da fabbricate giornalmente che possono essere scritti nella forma

$$x_3 \leq 0.2(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_1 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3).$$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0.$$

Quindi la formulazione completa può essere scritta

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3) \\ 20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480 \\ 31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480 \\ 16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300 \\ x_3 \leq 0.2(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

□

Osservazione 3.4.3 Nel modello precedente sono state utilizzate variabili di decisione *continue* associate a quantità che possono essere considerate indivisibili (autovetture). Questa ipotesi potrebbe risultare impropria, tuttavia permette di formulare il problema come Problema di Programmazione Lineare (e non di Programmazione Lineare Intera, cioè come un problema più “trattabile”). D’altra parte, in generale, tale ipotesi può non far perdere validità al modello soprattutto se i valori assunti dalle variabili di decisione sono relativamente molto grandi. Ogni approssimazione a valori interi del valore ottimo delle variabili, ovviamente, fa perdere l’ottimalità della soluzione così ottenuta, ma in molti casi tale soluzione approssimata può essere efficacemente utilizzata nella pratica.

Esempio 3.4.4 Si consideri la stessa azienda dell’esempio precedente con la sola differenza che, questa volta, i tre modelli di autovetture possono essere prodotti utilizzando uno qualsiasi dei tre robot senza richiedere quindi che per avere un’autovettura finita sia necessaria la lavorazione di tutti i tre robot.

Formulazione.

- *Variabili.* Indichiamo con x_{ij} , con $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$, il numero di autovetture del modello j -esimo da produrre giornalmente con il robot i -esimo.
- *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo diventa:

$$1000(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1500(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 2200(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

– *Vincoli.*

- I vincoli sulla capacità produttiva si esprimono:

$$20x_{11} + 30x_{12} + 62x_{13} \leq 480.$$

$$31x_{21} + 42x_{22} + 51x_{23} \leq 480$$

$$16x_{31} + 81x_{32} + 10x_{33} \leq 300.$$

- i vincoli sul numero totale dei singoli tipi di autovetture da fabbricare assumono la forma:

$$\begin{aligned} x_{13} + x_{23} + x_{33} &\leq 0.2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 0.4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij}. \end{aligned}$$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Quindi la formulazione finale è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (1000(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1500(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 2200(x_{13} + x_{23} + x_{33})) \\ 20x_{11} + 30x_{12} + 62x_{13} \leq 480 \\ 31x_{21} + 42x_{22} + 51x_{23} \leq 480 \\ 16x_{31} + 81x_{32} + 10x_{33} \leq 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 0.2(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 0.4(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

□

Formulazione generale di un problema di allocazione ottima di risorse

Per costruire uno schema generale di formulazione per questo tipo di problemi si assuma di disporre di m risorse $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_m$ e di voler fabbricare n diversi prodotti $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$.

Le risorse possono essere sia umane (mano d'opera) sia materiali (disponibilità di macchinari o di materie prime). Il problema della pianificazione delle risorse consiste nel determinare le quantità da fabbricare di ciascun prodotto $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ in modo da massimizzare il profitto rispettando i vincoli sulle risorse disponibili o sui livelli di produzione richiesti.

Si indichi con a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ la quantità della risorsa \mathbf{R}_i necessaria per fabbricare una unità del prodotto \mathbf{P}_j . Si può così costruire la seguente tabella

	\mathbf{P}_1	\cdots	\mathbf{P}_j	\cdots	\mathbf{P}_n
\mathbf{R}_1	a_{11}	\cdots	a_{1j}	\cdots	a_{1n}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
\mathbf{R}_i	a_{i1}	\cdots	a_{ij}	\cdots	a_{in}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
\mathbf{R}_m	a_{m1}	\cdots	a_{mj}	\cdots	a_{mn}

Supponiamo che ciascuna risorsa \mathbf{R}_i non possa superare un valore prefissato b_i , $i = 1, \dots, m$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \cdots & \mathbf{R}_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{array}$$

e che nella vendita di ciascuna unità di prodotto \mathbf{P}_j si ricavi un profitto netto c_j , $j = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \cdots & \mathbf{P}_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n. \end{array}$$

È utile ribadire le ipotesi già esposte in precedenza le quali devono valere in generale per la costruzione di modelli di Programmazione Lineare: *proporzionalità, additività, continuità* cioè i consumi delle risorse e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di prodotto fabbricati; i consumi globali di risorse e i ricavi totali si ottengono come somma dei consumi e dei ricavi marginali; le variabili possono assumere valori frazionari.

Formulazione 1: risorse concorrenti.

Esaminiamo prima la situazione in cui il bene fabbricato per essere finito e pronto per la vendita deve utilizzare tutte le risorse, anche se in misura diversa.

– *Variabili di decisione.* Si introducono le variabili di decisione x_1, x_2, \dots, x_n rappresentanti (in un'opportuna unità di misura) la quantità di ciascun prodotto $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$. Queste saranno le incognite del problema. Tali variabili di

decisione sono i cosiddetti *livelli di attività*. Introducendo come spazio delle variabili lo spazio delle n -uple reali \mathbb{R}^n si può considerare un $x \in \mathbb{R}^n$ definendo $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

– *Funzione obiettivo.* Per le ipotesi fatte la funzione obiettivo (da massimizzare) può essere scritta

$$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j.$$

Introducendo $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$z = c^T x.$$

– *Vincoli.* Si devono introdurre i seguenti vincoli:

- *Vincoli di capacità produttiva:*

tenendo conto delle limitazioni delle risorse si hanno i seguenti m vincoli

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & \leq b_m. \end{array}$$

- *Vincoli di non negatività:*

le variabili devono essere non negative in quanto esse rappresentano livelli di produzione e quindi si hanno i vincoli

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Introducendo la matrice $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ la formulazione completa del problema può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

È una formulazione generale (con solo vincoli di disegualanza e vincoli di non negatività) in cui si può porre un generico problema di allocazione ottima di risorse.

Nella pratica, potrebbe essere necessario imporre ulteriori vincoli:

- Vincoli di domanda

- limitazioni inferiori sulle variabili x_i cioè

$$x_i \geq l_i \quad i = 1, \dots, n$$

con $l_i \geq 0$ per assicurare che i prodotti siano fabbricati in quantità significative. In questo caso, per ogni indice i per il quale $l_i > 0$ il vincolo di non negatività $x_i \geq 0$ è ridondante.

- limitazioni superiori sulle variabili, cioè

$$x_i \leq u_i \quad i = 1, \dots, n$$

dovute ad eventuali possibilità limitate di assorbimento dei prodotti da parte del mercato.

Introducendo le notazioni vettoriali $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ e $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ questi vincoli possono essere scritti nella forma $l \leq x \leq u$, $x \in \mathbb{R}^n$.

- Vincoli di interezza.

Se inoltre non ha senso considerare i prodotti quantità divisibili allora si deve definire un modello di programmazione a numeri interi. Cioè nel caso in cui non si possa supporre che i livelli di attività siano frazionari (ad es. se i prodotti sono quantità indivisibili come motori, lavatrici etc.), allora si deve aggiungere il vincolo che le quantità x_i siano intere.

Formulazione 2: risorse alternative.

Si consideri ora invece la situazione in cui il bene fabbricato per essere finito e pronto per la vendita necessita esclusivamente di una risorsa. Nella pratica questo può accadere se, ad esempio, ciascun reparto in cui può essere suddivisa un'industria è in grado di produrre autonomamente ciascuno dei prodotti, ovvero la lavorazione di un prodotto avviene esclusivamente in uno dei reparti disponibili.

- *Variabili di decisione.* Si introducono le variabili di decisione x_{ij} rappresentanti la quantità di prodotto \mathbf{P}_j da fabbricare utilizzando la risorsa \mathbf{R}_i .
- *Funzione obiettivo.* Per le ipotesi fatte la funzione obiettivo (da massimizzare) può essere scritta

$$c_1 \sum_{i=1}^m x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^m x_{i2} + \dots + c_n \sum_{i=1}^m x_{in} = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m x_{ij}.$$

- *Vincoli.* I vincoli di capacità produttiva sono della forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + & \dots + a_{1n}x_{1n} \leq b_1 \\ a_{21}x_{21} + & \dots + a_{2n}x_{2n} \leq b_2 \\ \vdots & \dots \vdots \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + & \dots + a_{mn}x_{mn} \leq b_m. \end{aligned}$$

Infine si devono esplicitare i vincoli di non negatività della variabili cioè $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Come si può facilmente osservare la matrice A dei coefficienti delle disequazioni lineari che descrivono i vincoli è rimasta immutata rispetto alla matrice considerata nella formulazione del caso delle risorse concorrenti già vista, ma c'è una sostanziale differenza nelle variabili.

Modelli multi-plant

Si tratta di problemi di pianificazione della produzione in cui modelli di grandi dimensioni sono ottenuti come combinazione di modelli più piccoli. Tali modelli combinati sono sicuramente più efficaci dei sottomodelli dai quali essi sono costituiti. Esaminiamo un esempio di questa situazione.

Esempio 3.4.5 *Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica due tipi di prodotti \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 utilizzando due macchine utensili: una per la levigatura e una per la pulitura. Per avere un prodotto finito è necessaria l'utilizzazione di entrambe le macchine. Il primo impianto ha una disponibilità massima settimanale di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali. La tabella che segue riporta, per ciascun prodotto, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina per ottenere un prodotto finito (poiché le macchine possedute dal secondo impianto sono più vecchie, i tempi di utilizzo sono maggiori)*

	IMPIANTO 1		IMPIANTO 2	
	\mathbf{P}_1	\mathbf{P}_2	\mathbf{P}_1	\mathbf{P}_2
levigatura	4	2	5	3
pulitura	2	5	5	6

Inoltre ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo. Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 è rispettivamente di 10\$ e 15\$.

- (a) Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti in ciascun impianto sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto.
- (b) Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti supponendo che l'industria non allochi a priori 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto, ma lasci al modello la decisione di come ripartire tra i due impianti 120 Kg complessivi disponibili di questo materiale grezzo.

Formulazione

– *Variabili.* Si introducono le variabili x_1 e x_2 associate alla quantità di prodotto \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 fabbricato settimanalmente dal primo impianto e le variabili x_3 e x_4 associate alla quantità di prodotto \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 fabbricato settimanalmente dal secondo impianto.

Formulazione del caso (a)

Questo caso, nella pratica, corrisponde a costruire due modelli indipendenti: uno riferito al primo impianto, uno riferito al secondo impianto. Una “risorsa” (il materiale grezzo) è già allocata a priori.

IMPIANTO 1: La formulazione relativa al primo impianto è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

IMPIANTO 2: La formulazione relativa al secondo impianto è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(10x_3 + 15x_4) \\ 4x_3 + 4x_4 \leq 45 \\ 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Formulazione del caso (b)

Questo caso corrisponde a costruire un unico modello comprendente entrambi gli impianti. L'allocazione della “risorsa” data dal materiale grezzo è lasciata al modello stesso.

La formulazione relativa a questo caso è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4) \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

□

Osservazione 3.4.6 Nel caso (b) si richiede al modello di ripartire i 120 Kg di materiale grezzo piuttosto che effettuare un'allocazione arbitraria a priori, quindi ci si può aspettare una maggiore efficienza nell'allocazione di queste risorse nel caso (b). Un confronto delle soluzioni ottime di questi problemi conferma questa intuizione: infatti nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di $225\$ + 168.75\$ = 393.75\$$, mentre nel caso (b) si ottiene un guadagno di 404.15\$.

Osservazione 3.4.7 Si osservi la particolare struttura della matrice dei coefficienti dei vincoli che è tipica dei problemi di questo tipo

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Una matrice con questa struttura si chiama *matrice a blocchi*. Una siffatta struttura permette di utilizzare metodi particolari per la soluzione del problema. Infatti possono essere utilizzate *tecniche di decomposizione* che consentono di risolvere efficientemente anche problemi di questo tipo anche di dimensioni molto elevate. Si osservi che le tecniche di decomposizione non consistono nella suddivisione del problema in sottoproblemi, ma piuttosto con tale termine ci si riferisce a procedure computazionali specifiche che pur considerando il problema complessivo sfruttano la sua particolare struttura. L'importanza della decomposizione non è soltanto computazionale ma ha anche una significativa interpretazione economica; infatti essa corrisponde a considerare una pianificazione decentralizzata.

Modelli multiperiodo

Si tratta di problemi di allocazione ottima di risorse limitate analoghi a quelli già trattati, ma dove la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da più periodi elementari; si richiede, cioè, di estendere la programmazione mensile della produzione di un'azienda in modo da ottenere un piano di produzione semestrale con possibilità di giacenze al termine di ciascun mese. L'esempio che segue riporta una semplice situazione di questo tipo.

Esempio 3.4.8 Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente Esempio 3.4.5 nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione. In questo caso si deve programmare la produzione dei due prodotti \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al più 12 prodotti \mathbf{P}_1 e 4 prodotti \mathbf{P}_2 , mentre nella seconda si potranno vendere

al più 8 prodotti \mathbf{P}_1 e 12 prodotti \mathbf{P}_2 . Inoltre nella prima settimana c'è la possibilità di produrre più prodotti rispetto a quelli che si possono vendere, immagazzinando i prodotti in eccesso prevedendo un loro utilizzo nella settimana successiva. Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti nelle due settimane sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo e tenendo conto che il costo di immagazzinamento di un prodotto (sia di tipo \mathbf{P}_1 sia di tipo \mathbf{P}_2) è di 2 \$. Si ricorda che il profitto netto ottenuto dalla vendita di 1 unità di prodotto \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 è rispettivamente di 10\$ e 15\$.

Formulazione

- *Variabili.* Si introducono le variabili x_1 e x_2 associate alla quantità di prodotti \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 fabbricati nella prima settimana, le variabili x_3 e x_4 associate alla quantità di prodotti \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 fabbricati nella seconda settimana e le variabili y_1 e y_2 che indicano le quantità di prodotti \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 fabbricati nella prima settimana ed immagazzinati per venderli nella seconda.
- *Funzione obiettivo.* Nella prima settimana saranno vendute le quantità $(x_1 - y_1)$ di prodotto \mathbf{P}_1 e $(x_2 - y_2)$ di prodotto \mathbf{P}_2 , nella seconda le quantità $(x_3 + y_1)$ di prodotto \mathbf{P}_1 e $(x_4 + y_2)$ di prodotto \mathbf{P}_2 . Tenendo conto dei costi di immagazzinamento si ottiene la seguente funzione obiettivo:

$$\begin{aligned} 10(x_1 - y_1) + 15(x_2 - y_2) + 10(x_3 + y_1) + 15(x_4 + y_2) - 2(y_1 + y_2) = \\ 10(x_1 + x_3) + 15(x_2 + x_4) - 2(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

- *Vincoli.* In questo problema si hanno nuovamente quattro tipologie di vincoli:

- i vincoli sulle capacità produttive nelle due settimane:

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 4x_2 & \leq & 75 \\ 4x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\ 2x_1 + 5x_2 & \leq & 60 \\ \\ 4x_3 + 4x_4 & \leq & 75 \\ 4x_3 + 2x_4 & \leq & 80 \\ 2x_3 + 5x_4 & \leq & 60 \end{array}$$

- vincoli che rappresentano il fatto che, alla fine della prima settimana, una parte dei prodotti può essere immagazzinata

$$x_1 - y_1 \leq 12$$

$$x_2 - y_2 \leq 4$$

- vincoli che rappresentano il fatto che il numero dei prodotti disponibili nella seconda settimana non deve superare le richieste del mercato

$$y_1 + x_3 \leq 8$$

$$y_2 + x_4 \leq 12$$

- vincoli che rappresentano la non negatività delle variabili

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

La formulazione relativa a questo problema è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left(10(x_1 + x_2) + 15(x_3 + x_4) - 2(y_1 + y_2) \right) \\ \\ \begin{array}{lll} 4x_1 + 4x_2 & \leq & 75 \\ 4x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\ 2x_1 + 5x_2 & \leq & 60 \\ & 4x_3 + 4x_4 & \leq 75 \\ & 4x_3 + 2x_4 & \leq 80 \\ & 2x_3 + 5x_4 & \leq 60 \\ x_1 & - y_1 & \leq 12 \\ x_2 & - y_2 & \leq 4 \\ x_3 & + y_1 & \leq 8 \\ x_4 & + y_2 & \leq 12 \end{array} \\ \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Osservazione 3.4.9 Se non si fosse prevista la possibilità di poter immagazzinare dei prodotti non venduti, si sarebbe dovuto massimizzare separatamente i profitti ottenuti dalla vendita dei prodotti fabbricati nella prima e nella seconda settimana risolvendo i seguenti problemi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 0 \leq x_1 \leq 12 \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 0 \leq x_1 \leq 8 \\ 0 \leq x_2 \leq 12. \end{array} \right.$$

In questo caso si sarebbe ottenuto un guadagno complessivo di $180\$ + 212\$ = 392\$$. Mentre la soluzione ottima del modello di Programmazione Lineare, descritto precedentemente e che prevedeva anche la possibilità di poter immagazzinare i prodotti non venduti, porta ad un guadagno di $429.1\$$. Questo mette in

evidenza la convenienza di effettuare una programmazione complessiva sulle due settimane, prevedendo la possibilità di produrre nella prima settimana di più di quanto si possa vendere e considerando anche le spese relative all'immagazzinamento dei prodotti non venduti.

Osservazione 3.4.10 Si osservi che i primi sei vincoli del precedente modello multiperiodo presentano una struttura particolare. Infatti possono essere rappresentati da una matrice *a blocchi* (in particolare nell'esempio considerato tutti i blocchi sono uguali). Il fatto di avere la maggior parte dei vincoli con una struttura a blocchi è una caratteristica di tutti i modelli multiperiodo. Come detto per i modelli multi-plan, questa particolare struttura può essere sfruttata attraverso l'uso di tecniche di decomposizione in modo da risolvere efficientemente anche problemi di questo tipo di grosse dimensioni.

Esaminiamo ora un altro modello multiperiodo.

Esempio 3.4.11 Una fabbrica produce due tipi di pneumatici A e B ed ha una gestione trimestrale della produzione. Per i prossimi tre mesi deve soddisfare il seguente ordine (espresso in numero di pneumatici richiesti ciascun mese)

	tipo A	tipo B
ottobre	16000	14000
novembre	7000	4000
dicembre	4000	6000

Per la produzione di questi pneumatici la fabbrica dispone di due linee di produzione **L1** e **L2**. Per avere un pneumatico finito e pronto per essere venduto, è necessaria la lavorazione di materiale grezzo su solo una delle due linee di produzione. Il numero di ore in cui le linee di produzione sono disponibili ciascun mese sono riportate nella seguente tabella

	L1	L2
ottobre	2000	3000
novembre	400	800
dicembre	200	1000

I tempi necessari per produrre questi pneumatici varia a seconda del tipo e della linea di produzione usata. Tali tempi sono riportati nella seguente tabella (in ore)

	L1	L2
tipo A	0.10	0.12
tipo B	0.12	0.18

Il costo di ogni ora di lavorazione su una linea di produzione è uguale per entrambe le linee ed è pari a 6 euro. Il costo del materiale grezzo necessario per produrre ciascun pneumatico è di euro 2.50 per il tipo A e di euro 4.00 per il tipo B.

Nel primo e nel secondo mese del trimestre è possibile produrre più di quanto richiesto nello stesso mese; la produzione in eccesso deve essere immagazzinata per essere usata nel mese successivo. Ogni mese, il costo di tale immagazzinamento è di euro 0.35 per ciascun pneumatico immagazzinato. Si assuma che all'inizio del trimestre non ci sia nessun prodotto immagazzinato e analogamente alla fine del trimestre non rimanga nessun prodotto immagazzinato.

Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione trimestrale minimizzando il costo complessivo trascurando l'interezza dei prodotti.

Formulazione.

Si tratta di un problema di allocazione ottima di risorse nel quale si deve tenere presente la possibilità dell'immagazzinamento del prodotto in eccesso (allocazione ottima multiperiodo).

– *Variabili.* Si introducono le variabili A_{Li}^{ott} , A_{Li}^{nov} , A_{Li}^{dic} che indicano la quantità di pneumatici di tipo A prodotti dalla i -esima linea produzione ($i = 1, 2$) rispettivamente nei mesi di ottobre, novembre e dicembre. Analogamente B_{Li}^{ott} , B_{Li}^{nov} , B_{Li}^{dic} indicheranno le quantità di pneumatici di tipo B prodotti dalla i -esima linea di produzione ($i = 1, 2$) rispettivamente nei mesi di ottobre, novembre e dicembre. Si indichino inoltre con A_{im}^{ott} , A_{im}^{nov} , B_{im}^{ott} , B_{im}^{nov} le quantità di pneumatici di tipo A e B da immagazzinare nei mesi di ottobre e novembre.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal costo complessivo di produzione. Poiché un'ora di lavorazione su una linea di produzione costa 6 euro, e poiché i tempi di lavorazione cambiano a seconda della linea di produzione utilizzata, per produrre ciascun pneumatico di tipo A si spende euro 0.60 se si utilizza la linea **L1** e euro 0.72 se si utilizza la linea **L2**. Analogamente, il costo di ciascun pneumatico del tipo B è di euro 0.72 se si utilizza la macchina 1, e di euro 1.08 se si utilizza la linea **L2**. Quindi tenendo conto del costo del materiale grezzo e dell'immagazzinamento, il costo complessivo sarà

$$\begin{aligned} & 0.6(A_{L1}^{ott} + A_{L1}^{nov} + A_{L1}^{dic}) + 0.72(A_{L2}^{ott} + A_{L2}^{nov} + A_{L2}^{dic}) + \\ & + 0.72(B_{L1}^{ott} + B_{L1}^{nov} + B_{L1}^{dic}) + 1.08(B_{L2}^{ott} + B_{L2}^{nov} + B_{L2}^{dic}) + \\ & + 2.50(A_{L1}^{ott} + A_{L1}^{nov} + A_{L1}^{dic} + A_{L2}^{ott} + A_{L2}^{nov} + A_{L2}^{dic}) + \\ & + 4.00(B_{L1}^{ott} + B_{L1}^{nov} + B_{L1}^{dic} + B_{L2}^{ott} + B_{L2}^{nov} + B_{L2}^{dic}) + \\ & + 0.35(A_{im}^{ott} + A_{im}^{nov} + B_{im}^{ott} + B_{im}^{nov}). \end{aligned}$$

– *Vincoli.* I vincoli dovuti alla disponibilità limitata delle macchine sono

$$\begin{aligned} 0.10A_{L1}^{ott} + 0.12B_{L1}^{ott} &\leq 2000 \\ 0.10A_{L1}^{nov} + 0.12B_{L1}^{nov} &\leq 400 \\ 0.10A_{L1}^{dic} + 0.12B_{L1}^{dic} &\leq 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.12A_{L2}^{ott} + 0.18B_{L2}^{ott} &\leq 3000 \\ 0.12A_{L2}^{nov} + 0.18B_{L2}^{nov} &\leq 800 \\ 0.12A_{L2}^{dic} + 0.18B_{L2}^{dic} &\leq 1000. \end{aligned}$$

Si hanno inoltre i seguenti vincoli dovuti alla richiesta e all'immagazzinamento:

$$\begin{aligned} A_{L1}^{ott} + A_{L2}^{ott} &= 16000 + A_{im}^{ott} \\ A_{L1}^{nov} + A_{L2}^{nov} + A_{im}^{ott} &= 7000 + A_{im}^{nov} \\ A_{L1}^{dic} + A_{L2}^{dic} + A_{im}^{nov} &= 4000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{L1}^{ott} + B_{L2}^{ott} &= 14000 + B_{im}^{ott} \\ B_{L1}^{nov} + B_{L2}^{nov} + B_{im}^{ott} &= 4000 + B_{im}^{nov} \\ B_{L1}^{dic} + B_{L2}^{dic} + B_{im}^{nov} &= 6000. \end{aligned}$$

Si hanno infine i vincoli di non negatività sulle variabili. Quindi il modello finale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left(3.1(A_{L1}^{ott} + A_{L1}^{nov} + A_{L1}^{dic}) + 3.22(A_{L2}^{ott} + A_{L2}^{nov} + A_{L2}^{dic}) + \right. \\ \quad \left. + 4.72(B_{L1}^{ott} + B_{L1}^{nov} + B_{L1}^{dic}) + 5.08(B_{L2}^{ott} + B_{L2}^{nov} + B_{L2}^{dic}) + \right. \\ \quad \left. + 0.35(A_{im}^{ott} + A_{im}^{nov} + B_{im}^{ott} + B_{im}^{nov}) \right) \\ 0.10A_{L1}^{ott} + 0.12B_{L1}^{ott} \leq 2000 \\ 0.10A_{L1}^{nov} + 0.12B_{L1}^{nov} \leq 400 \\ 0.10A_{L1}^{dic} + 0.12B_{L1}^{dic} \leq 200 \\ 0.12A_{L2}^{ott} + 0.18B_{L2}^{ott} \leq 3000 \\ 0.12A_{L2}^{nov} + 0.18B_{L2}^{nov} \leq 800 \\ 0.12A_{L2}^{dic} + 0.18B_{L2}^{dic} \leq 1000 \\ A_{L1}^{ott} + A_{L2}^{ott} = 16000 + A_{im}^{ott} \\ A_{L1}^{nov} + A_{L2}^{nov} + A_{im}^{ott} = 7000 + A_{im}^{nov} \\ A_{L1}^{dic} + A_{L2}^{dic} + A_{im}^{nov} = 4000 \\ B_{L1}^{ott} + B_{L2}^{ott} = 14000 + B_{im}^{ott} \\ B_{L1}^{nov} + B_{L2}^{nov} + B_{im}^{ott} = 4000 + B_{im}^{nov} \\ B_{L1}^{dic} + B_{L2}^{dic} + B_{im}^{nov} = 6000 \\ A_{Li}^{ott} \geq 0, A_{Li}^{nov} \geq 0, A_{Li}^{dic} \geq 0, i = 1, 2 \\ B_{Li}^{ott} \geq 0, B_{Li}^{nov} \geq 0, B_{Li}^{dic} \geq 0, i = 1, 2. \end{array} \right.$$

□

3.4.2 Modelli di miscelazione

Nei modelli di allocazione ottima le risorse devono essere ripartite mentre nei modelli di miscelazione le risorse devono essere combinate tra di loro. I modelli di miscelazione decidono come combinare (miscelare) tali risorse in maniera da soddisfare al meglio determinati obiettivi rispettando opportune richieste.

Esempio 3.4.12 *Un'industria conserviera deve produrre succhi di frutta mescolando polpa di frutta e dolcificante ottenendo un prodotto finale che deve soddisfare alcuni requisiti riguardanti il contenuto di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. La polpa di frutta e il dolcificante vengono acquistati al costo rispettivamente di 4 Euro e 6 Euro ogni ettagrammo. Inoltre dalle etichette si ricava che 100 grammi di polpa di frutta contengono 140 mg di vitamina C, 20 mg di sali minerali e 25 grammi di zucchero, mentre 100 grammi di dolcificante contengono 10 mg di sali minerali, 50 grammi di zucchero e non contengono vitamina C. I requisiti che il prodotto finale (cioè il succo di frutta pronto per la vendita) deve avere sono i seguenti: il succo di frutta deve contenere almeno 70 mg di vitamina C, almeno 30 mg di sali minerali e almeno 75 grammi di zucchero. Si devono determinare le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta in modo da minimizzare il costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base.*

Formulazione.

Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi tenendo presente i requisiti di qualità richiesti. Si verifica facilmente che le ipotesi fondamentali di un modello di Programmazione Lineare sono soddisfatte.

- *Variabili.* È naturale associare la variabili di decisione alle quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare per la produzione del succo di frutta. Quindi siano x_1 e x_2 rispettivamente le quantità espresse in ettagrammi di polpa di frutta e di dolcificante che devono essere utilizzate.
- *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base e quindi è data (in centesimi di Euro) da $400x_1 + 600x_2$. Questa espressione naturalmente deve essere minimizzata.
- *Vincoli.* Poiché un ettagrammo di polpa contiene 140 mg di vitamina C e il dolcificante non contiene vitamina C, il primo vincolo da considerare riguardante il contenuto di vitamina C del succo di frutta si può scrivere nella forma

$$140x_1 \geq 70.$$

Analogamente per rispettare il requisito sul contenuto di sali minerali del succo di frutta si dovrà imporre il vincolo

$$20x_1 + 10x_2 \geq 30.$$

Infine il vincolo sul contenuto di zucchero del succo di frutta si può esprimere nella forma

$$25x_1 + 50x_2 \geq 75.$$

Infine si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili cioè

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

□

Esempio 3.4.13 – IL PROBLEMA DELLA DIETA A COSTO MINIMO

Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di calorie, proteine e calcio, intese come fabbisogni minimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base (pane, latte, uova, carne, dolce). Tali fabbisogni minimi sono di 2000 calorie, 50 g. di proteine, 700 mg. di calcio. Dalle tabelle dietetiche si ricavano i seguenti contenuti di calorie (in cal.), proteine (in g.), calcio (in mg.) per ogni singola porzione di ciascun alimento, intendendo come porzione una quantità espressa in grammi e quindi frazionabile.

	Pane	Latte	Uova	Carne	Dolce
calorie	110	160	180	260	420
proteine	4	8	13	14	4
calcio	2	285	54	80	22

I costi (in Euro) e il numero massimo di porzioni tollerate giornalmente sono i seguenti

	Pane	Latte	Uova	Carne	Dolce
costo	2	3	4	19	20
porz.	4	8	3	2	2

Determinare una dieta a costo minimo che soddisfi le prescrizioni richieste.

Formulazione.

Poiché si è supposto che le porzioni siano frazionabili ed inoltre valgono le ipotesi di linearità, si può costruire un modello di Programmazione Lineare per rappresentare il problema in analisi.

– *Variabili.* È ovvio introdurre le variabili x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 indicanti le quantità di porzioni dei singoli alimenti da includere giornalmente nella dieta.

– *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal costo complessivo ed è quindi data da

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 20x_5.$$

– *Vincoli.* Poiché sono prescritti i fabbisogni minimi giornalieri, si avranno i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \text{calorie} &\rightarrow 110x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 260x_4 + 420x_5 \geq 2000 \\ \text{proteine} &\rightarrow 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 50 \\ \text{calcio} &\rightarrow 2x_1 + 285x_2 + 54x_3 + 80x_4 + 22x_5 \geq 700 \end{aligned}$$

Inoltre i vincoli sul numero massimo di porzioni giornaliere di ciascun alimento e di non negatività

$$0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 8, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq x_4 \leq 2, 0 \leq x_5 \leq 2.$$

La formulazione completa sarà quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 + 20x_5) \\ 110x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 260x_4 + 420x_5 \geq 2000 \\ 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 4x_5 \geq 50 \\ 2x_1 + 285x_2 + 54x_3 + 80x_4 + 22x_5 \geq 700 \\ 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 8, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq x_4 \leq 2, 0 \leq x_5 \leq 2. \end{array} \right.$$

Se inoltre si vuole supporre, ad esempio, che nella dieta sia presente almeno una porzione di dolce e due di latte si dovranno imporre i vincoli $x_5 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$ da aggiungere alla precedente formulazione. In questo caso, i vincoli già presenti $x_5 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ sono ridondanti. \square

Formulazione generale di un problema di miscelazione

Formalmente, supponiamo di disporre di n sostanze diverse che indichiamo con $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ ciascuna delle quali contenga una certa quantità di ciascuno degli m componenti utili che indichiamo con $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m$. Supponendo che ogni sostanza \mathbf{S}_j abbia costo unitario c_j , $j = 1, \dots, n$

$$\begin{matrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \cdots & \mathbf{S}_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{matrix}$$

si desidera ottenere la miscela più economica che soddisfi alcuni requisiti qualitativi, cioè contenga una quantità non inferiore a b_i di ciascun \mathbf{C}_i , $i = 1, \dots, m$

$$\begin{matrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \cdots & \mathbf{C}_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m. \end{matrix}$$

Si indichi con $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ la quantità di componente \mathbf{C}_i presente nella sostanza \mathbf{S}_j . Si può così costruire la seguente tabella

	\mathbf{S}_1	\dots	\mathbf{S}_j	\dots	\mathbf{S}_n
\mathbf{C}_1	a_{11}	\dots	a_{1j}	\dots	a_{1n}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
\mathbf{C}_i	a_{i1}	\dots	a_{ij}	\dots	a_{in}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
\mathbf{C}_m	a_{m1}	\dots	a_{mj}	\dots	a_{mn}

Formulazione.

Supponendo che valgano le ipotesi di proporzionalità, additività ed inoltre assumendo che le quantità di sostanze da utilizzare siano frazionabili, si può formulare questo problema in termini di un problema di Programmazione Lineare.

– *Variabili.* È naturale introdurre le variabili di decisione x_1, x_2, \dots, x_n rappresentanti la quantità di ciascuna sostanza $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ da utilizzare nella miscela. Queste saranno le incognite del problema. Introducendo come spazio delle variabili lo spazio delle n -uple reali \mathbb{R}^n si può considerare un $x \in \mathbb{R}^n$ definendo $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

– *Funzione obiettivo.* Per le ipotesi fatte, la funzione obiettivo può essere scritta

$$z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Introducendo $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$z = c^T x.$$

– *Vincoli.* Si devono introdurre i seguenti vincoli:

- Vincoli di qualità.

Tenendo conto del fatto che la miscela deve contenere una quantità non inferiore a b_i di ciascun componente \mathbf{C}_i si dovrà avere

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

- Vincoli di non negatività.

Si devono infatti considerare i vincoli di non negatività sulle variabili cioè $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Introducendo la matrice $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ la formulazione completa del problema può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Nella pratica, potrebbe essere necessario introdurre ulteriori vincoli:

- possono essere presenti limitazioni superiori o inferiori sulle variabili cioè $x_j \geq L, x_j \leq M, j = 1, \dots, n$;
- se è richiesto anche che la miscela contenga una quantità non superiore ad un valore d_i di ciascun componente \mathbf{C}_i si dovrà aggiungere alla formulazione un altro vincolo di qualità:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq d_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

- in alcuni casi si richiede che una certa sostanza appartenga alla miscela solo se un'altra sostanza vi appartiene (o non vi appartiene). Questi vincoli richiedono l'uso di variabili booleane come descritto in seguito.

□

Esempio 3.4.14 Il prodotto finale di una fabbrica è ottenuto raffinando materie prime grezze e miscelandole insieme. Queste materie prime possono essere di due categorie: naturali e sintetizzate. In particolare, sono disponibili tre materie prime naturali (**N1**, **N2**, **N3**) e due materie prime sintetizzate (**S1**, **S2**). Le materie prime naturali e quelle sintetizzate richiedono differenti linee di produzione. Ogni settimana è possibile raffinare non più di 500 quintali di materie prime naturali e non più di 300 quintali di materie prime sintetizzate. Si assume che non ci sia perdita di peso durante la raffinazione e che si possa trascurare il costo di raffinazione. Inoltre esiste una restrizione tecnologica sulla gradazione del prodotto finale: nell'unità di misura in cui questa gradazione è misurata, essa deve essere tra 2 e 7; si assume che tale gradazione nella miscela finale dipenda linearmente dalle singole gradazioni delle materie prime componenti. Nella tabella che segue è riportato il costo (in euro) per quintale e la gradazione delle materie prime grezze.

	N1	N2	N3	S1	S2
costo	300	190	250	200	230
grad.	6.0	1.9	8.5	5.0	3.5

Il prodotto finale viene venduto a 350 euro per quintale. Determinare come va pianificata la produzione settimanale per massimizzare il profitto netto.

Formulazione.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili di decisione x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rappresentanti le quantità (in quintali) di **N1**, **N2**, **N3**, **S1**, **S2** che devono essere comprate e raffinate in una settimana. Inoltre introduciamo una ulteriore variabile y che indica la quantità di prodotto finale che deve essere fabbricato.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare sarà data dal profitto netto cioè da

$$350y - 300x_1 - 190x_2 - 250x_3 - 200x_4 - 230x_5.$$

– *Vincoli.* Sono presenti tre tipi di vincoli

- capacità di raffinamento

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

$$x_4 + x_5 \leq 300;$$

- limitazioni sulla gradazione

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \leq 7y$$

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \geq 2y;$$

- vincolo di continuità

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = y.$$

Questo vincolo di continuità esprime il fatto che il peso finale del prodotto deve essere uguale alla somma dei pesi degli ingredienti.

Inoltre si devono esplicitare i vincoli di non negatività delle variabili.

La formulazione finale risulta quindi

$$\begin{cases} \max (-300x_1 - 190x_2 - 250x_3 - 200x_4 - 230x_5 + 350y) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ x_4 + x_5 \leq 300 \\ 6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 - 7y \leq 0 \\ 6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 - 2y \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - y = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

□

Osservazione 3.4.15 Un errore comune è quello di scrivere i vincoli sulla gradazione

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \leq 7$$

$$6.0x_1 + 1.9x_2 + 8.5x_3 + 5.0x_4 + 3.5x_5 \geq 2.$$

Queste relazioni sono evidentemente dimensionalmente errate: il primo membro ha le dimensioni di *gradazione* × *quantità* mentre il secondo membro ha le dimensioni della *gradazione*. Tuttavia, invece delle variabili x_i in queste due diseguaglianze si potevano usare le variabili x_i/y per rappresentare le *proporzioni degli ingredienti*, piuttosto che le *quantità assolute* x_i ; ovviamente, in questo caso si dovevano modificare anche le altre espressioni. Comunque, l'uso delle variabili x_i/y è ovviamente possibile solo nel caso in cui la quantità di prodotto fabbricato è non nulla, cioè $y \neq 0$.

Modelli di input–output

I modelli di miscelazione possono essere visti come modelli più generali in cui le sostanze \mathbf{S}_j e i componenti utili \mathbf{C}_i sono genericamente definiti come “*input*” e “*output*”; per ogni input j si deve decidere la quantità x_j da utilizzare incorrendo in un costo $c_j x_j$ e creando $a_{ij} x_j$ unità di output i . Lo scopo è quello di determinare la combinazione a più basso costo di input che fornisce, per ogni output i , una quantità di unità di output compresa tra valori prefissati. Nei modelli di miscelazione analizzati fino ad ora, gli input sono dati dalle sostanze che devono essere mescolate, gli output sono dati dalle qualità della miscela risultante.

Un esempio di questa generalizzazione è dato dai problemi di *assegnazione di personale a turni* che rappresentano problemi di fondamentale importanza in diversi settori applicativi; in questo caso gli output possono corrispondere alle ore lavorate in un certo giorno i e, per ogni turno lavorativo j , a_{ij} rappresenta il numero di ore che una persona assegnata al turno j lavorerà il giorno i (ponendo $a_{ij} = 0$ se la persona assegnata al turno j non lavora il giorno i); le c_j rappresentano il salario di una persona assegnata al turno j e x_j il numero di persone assegnate a quel turno. In questo contesto, la funzione obiettivo diventa il costo totale dei salari mensile, mentre i vincoli diventano quelli dovuti al fatto che ogni giorno i , il numero totale di ore lavorative fornite dalle persone che lavorano quel giorno deve essere pari ad almeno un valore prefissato b_i . Supponendo di voler considerare n giorni e m possibili turni, un modello di Programmazione Lineare che rappresenti questa situazione è dato da

$$\min \quad c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\
 a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\
 \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\
 a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \\
 x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

In questo caso però, a differenza degli altri casi di miscelazione visti fino ad ora, l'assunzione di continuità delle variabili non è molto plausibile e potrebbe risultare necessario introdurre il vincolo di interezza sulle variabili.

Il concetto di modello di “input–output” fu una delle prime applicazioni della Programmazione Lineare nelle analisi economiche.

Si riporta, di seguito, un semplice esempio di assegnamento di personale a turni di lavoro.

Esempio 3.4.16 *Un catena di ristoranti opera sette giorni alla settimana e richiede il seguente numero minimo di camerieri:*

Lun.	Mar.	Mer.	Giov.	Ven.	Sab.	Dom.
52	50	47	55	70	40	40

Ciascun cameriere lavora seguendo turni così definiti: cinque giorni lavorativi ogni settimana e due di riposo; inoltre sono possibili al più quattro giorni consecutivi di lavoro seguiti da uno di riposo; inoltre uno solo dei due giorni del fine settimana (sabato o domenica) deve far parte del turno di lavoro. I turni risultanti sono sei e sono schematizzati nella tabella che segue (dove “L” indica giornata lavorativa e “R” riposo):

TURNI:	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Lun.	L	R	L	L	L	L	L	L
Mar.	L	L	R	L	L	R	L	L
Mer.	L	L	L	R	L	L	R	L
Giov.	L	L	L	L	R	L	L	R
Ven.	R	L	L	L	L	L	L	L
Sab.	L	R	L	R	L	R	L	R
Dom.	R	L	R	L	R	L	R	L

Il salario settimanale di un cameriere è pari a 250 Euro se assegnato ad un turno che non comprende la domenica, mentre è pari a 270 Euro se il turno comprende anche la domenica. Il gestore di questa catena di ristoranti vuole minimizzare il costo che deve sostenere per retribuire i camerieri in modo da soddisfare le richieste giornaliere.

Formulazione.

– *Variabili.* Si associano le variabili di decisione x_j al numero di camerieri assegnati al turno j , $j = 1, \dots, 8$.

– *Funzione obiettivo.* È data dal salario complessivo dei camerieri e quindi può essere espressa nella forma

$$250x_1 + 270x_2 + 250x_3 + 270x_4 + 250x_5 + 270x_6 + 250x_7 + 270x_8.$$

– *Vincoli.* I vincoli sono dovuti al fatto che ogni giorno c'è una richiesta minima di camerieri. Osservando ogni giorno quale turno prevede il lavoro o il riposo si ottengono i seguenti vincoli

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 52 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 &\geq 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 &\geq 47 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 &\geq 55 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 70 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 &\geq 40 \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 &\geq 40 \end{aligned}$$

Si deve inoltre esplicitare la non negatività delle variabili $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 8$ e l'interezza $x_j \in \mathbf{Z}$, $j = 1, \dots, 8$.

La formulazione completa sarà quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (250x_1 + 270x_2 + 250x_3 + 270x_4 + 250x_5 + 270x_6 + 250x_7 + 270x_8) \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 52 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 \geq 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 47 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 55 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 70 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \geq 40 \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 \geq 40 \\ x_j \geq 0, x_j \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, \dots, 8 \end{array} \right.$$

□

È chiaramente riconoscibile questa formulazione come un modello di miscelazione; è sufficiente, infatti, introdurre la matrice A che definisce i vincoli di un problema di miscelazione nel seguente modo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se nel posto } (i, j) \text{ della tabella c'è la lettera "L"} \\ 0 & \text{se nel posto } (i, j) \text{ della tabella c'è la lettera "R".} \end{cases}$$

3.4.3 Modelli di trasporto

Si tratta di problemi in cui si hanno un certo numero di località (origini) ciascuna delle quali ha una quantità fissata di merce disponibile e un certo numero di clienti residenti in altre località (destinazioni) i quali richiedono quantitativi precisi di merce. Quindi conoscendo il costo unitario del trasporto della merce da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione è necessario pianificare i trasporti, cioè la quantità di merce che deve essere trasportata da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione in modo da soddisfare l'ordine dei clienti minimizzando il costo complessivo derivante dai trasporti.

Esempio 3.4.17 *Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere M_1 e M_2 e di tre impianti di produzione $P_1 P_2 P_3$. Il minerale estratto deve essere giornalmente trasportato agli impianti di produzione soddisfacendo le rispettive richieste. Le miniere M_1 e M_2 producono giornalmente rispettivamente 130 e 200 tonnellate di minerale. Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale*

P_1	P_2	P_3
80	100	150

Il costo (in euro) del trasporto da ciascuna miniera a ciascun impianto di produzione di una tonnellata di minerale è riportato nella seguente tabella

	P_1	P_2	P_3
M_1	10	8	21
M_2	12	20	14

Formulare un modello che descriva il trasporto dalle miniere agli impianti di produzione in modo da minimizzare il costo globale del trasporto.

Analisi del problema.

È un problema di trasporti con 2 origini (M_1, M_2) e 3 destinazioni ($P_1 P_2 P_3$). Si noti che risulta $130 + 200 = 330$ e $80 + 100 + 150 = 330$, ovvero la somma delle disponibilità uguaglia la somma delle richieste.

Formulazione.

- *Variabili.* Associamo le variabili di decisione alle quantità di minerale che deve essere trasportato; indichiamo con x_{ij} $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, le quantità (in tonnellate) di minerale da trasportare giornalmente da ciascuna miniera M_i a ciascun impianto di produzione P_j .

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dalla somma dei costi dei trasporti cioè da

$$z = 10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}.$$

– *Vincoli.* I vincoli di origine esprimono il fatto che la somma della quantità di minerale trasportato dalla miniera \mathbf{M}_i deve essere uguale alla disponibilità giornaliera della miniera stessa:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 200. \end{aligned}$$

I vincoli di destinazione esprimono il fatto che la somma delle quantità di minerale trasportato all'impianto di produzione \mathbf{P}_j deve essere pari alla richiesta giornaliera di tale impianto:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 80 \\ x_{12} + x_{22} &= 100 \\ x_{13} + x_{23} &= 150. \end{aligned}$$

Infine si devono considerare i vincoli di non negatività $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$.

La formulazione completa è quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}) \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 100 \\ x_{13} + x_{23} = 150 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

□

Formulazione generale di un problema di trasporti

Sono definite m località *origini* indicate con $\mathbf{O}_1, \dots, \mathbf{O}_m$, e n località *destinazioni* indicate con $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_n$. Ogni origine \mathbf{O}_i , ($i = 1, \dots, m$) può fornire una certa disponibilità $a_i \geq 0$ di merce che deve essere trasferita dalle origini alle destinazioni

$$\begin{matrix} \mathbf{O}_1 & \cdots & \mathbf{O}_m \\ a_1 & \cdots & a_m. \end{matrix}$$

Ad ogni destinazione \mathbf{D}_j , ($j = 1, \dots, n$) è richiesta una quantità $b_j \geq 0$ di merce.

$$\begin{matrix} \mathbf{D}_1 & \cdots & \mathbf{D}_n \\ b_1 & \cdots & b_n. \end{matrix}$$

Supponiamo che il costo del trasporto di una unità di merce da \mathbf{O}_i a \mathbf{D}_j sia pari a c_{ij} . Tali costi nella realtà sono spesso collegati alle distanze tra origini e destinazioni.

Il problema consiste nel pianificare i trasporti in modo da soddisfare le richieste delle destinazioni minimizzando il costo del trasporto complessivo nella seguente ipotesi:

- la disponibilità complessiva uguaglia la richiesta complessiva, cioè

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j; \quad (3.4.1)$$

si escludono possibilità di giacenze nelle origini, cioè tutta la merce prodotta in una origine deve essere trasportata in una delle destinazioni; si escludono possibilità di giacenze nelle destinazioni, cioè la quantità totale che arriva in una destinazione \mathbf{D}_j deve uguagliare la richiesta b_j .

Formulazione.

Si vuole dare una formulazione del problema in esame in termini di un problema di programmazione lineare supponendo quindi che siano verificate le ipotesi di linearità e continuità.

– *Variabili.* Per ogni coppia di origine e destinazione \mathbf{O}_i , \mathbf{D}_j si introducono le variabili di decisione x_{ij} rappresentanti la quantità di merce da trasportare da \mathbf{O}_i a \mathbf{D}_j . Si tratta di mn variabili

	\mathbf{D}_1	...	\mathbf{D}_j	...	\mathbf{D}_n
\mathbf{O}_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
:	:		:		:
\mathbf{O}_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}
:	:		:		:
\mathbf{O}_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data da costo totale del trasporto e quindi da

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

– *Vincoli.* Per le ipotesi fatte, si avranno due tipi di vincoli:

- vincoli di origine

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m; \quad (3.4.2)$$

impongono che tutta la merce prodotta in una origine sia trasportata alle destinazioni; si tratta di m vincoli;

- vincoli di destinazione

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n; \quad (3.4.3)$$

impongono che la quantità totale di merce che arriva in ciascuna delle destinazioni uguaglia la richiesta; si tratta di n vincoli.

Si devono infine considerare i vincoli di non negatività delle variabili

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Si è così ottenuta una formulazione del problema dei trasporti con mn variabili e $m + n + mn$ vincoli:

$$\begin{cases} \min \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Osservazione 3.4.18 È chiaro che per le ipotesi fatte dovrà risultare

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Esaminiamo, ora, un risultato che è una condizione necessaria e sufficiente affinché un generico problema dei trasporti scritto nella forma (3.4.4) con $a_i \geq 0$ e $b_j \geq 0$ abbia soluzione; tale risultato chiarisce perché nella formulazione classica del problema dei trasporti si adotta l'ipotesi (3.4.1) cioè che la disponibilità complessiva uguagli la richiesta complessiva.

Teorema 3.4.1 Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una soluzione ammissibile per problema (3.4.4), è che risulti

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.4.5)$$

Dimostrazione: Dimostriamo innanzitutto la necessità, cioè che se esiste una soluzione ammissibile che denotiamo con \bar{x}_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, allora la condizione (3.4.5) deve essere verificata; poiché \bar{x}_{ij} deve soddisfare i vincoli, dalle equazioni dei vincoli nella (3.4.4) si ottiene

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j,$$

e sottraendo membro a membro si ha

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = 0$$

che è la (3.4.5).

Dimostriamo ora la sufficienza; supponiamo quindi che valga la (3.4.5) e poniamo

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A.$$

Si vuole allora dimostrare che esiste una soluzione ammissibile; infatti, sia $\bar{x}_{ij} := \frac{a_i b_j}{A}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$; allora \bar{x}_{ij} ora definito è una soluzione ammissibile per il problema dei trasporti. Infatti risulta innanzitutto $\bar{x}_{ij} \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ per la non negatività degli a_i e dei b_j ; inoltre

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i \sum_{j=1}^n b_j}{A} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum_{i=1}^m a_i}{A} = b_j$$

e quindi \bar{x}_{ij} soddisfando i vincoli del problema è una soluzione ammissibile. \square

Il teorema appena dimostrato garantisce quindi che, se è soddisfatta l'ipotesi (3.4.1) allora il problema dei trasporti ammette sempre soluzione.

Osservazione 3.4.19 La soluzione ammissibile del teorema, ovviamente, *non è l'unica soluzione* ammissibile del problema.

Riportiamo di seguito, senza dimostrazione, un altro risultato di fondamentale importanza nella trattazione del problema dei trasporti.

Teorema 3.4.2 *Se nel problema dei trasporti le a_i , $i = 1, \dots, m$ e le b_j , $j = 1, \dots, n$ sono intere e se il problema ammette soluzione ottima, allora ha una soluzione ottima intera.*

Passiamo, ora, ad analizzare alcune varianti della formulazione classica del problema dei trasporti; può infatti accadere che non tutte le rotte di trasporto siano disponibili: se non è possibile il trasporto da una certa origine \mathbf{O}_i ad una destinazione \mathbf{D}_j si pone, per convenzione, $c_{ij} = \infty$. Oppure possono esistere rotte di trasporto in cui vi sono limitazioni sulle quantità massima di merci trasportabili. Infine, si può supporre che la disponibilità complessiva possa essere superiore alla domanda cioè

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.4.6)$$

In tal caso, possono essere ammesse giacenze nelle origini e/o nelle destinazioni; se si accetta di avere giacenze nelle origini, allora i vincoli di origine diventano

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m;$$

se si accetta di avere giacenze nelle destinazioni, allora i vincoli di destinazione diventano

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \dots, n.$$

nel caso in cui vale la (3.4.6), per porre il problema dei trasporti nella sua formulazione classica, cioè con vincoli di uguaglianza, si può introdurre una destinazione fittizia che abbia una richiesta pari a

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

ponendo uguale a zero il costo per raggiungere questa destinazione fittizia da qualsiasi origine.