

# 3

## Modelli di Programmazione Lineare

### 3.1 MODELLI DI ALLOCAZIONE OTTIMA DI RISORSE

**Esercizio 3.1.1** Un'industria manifatturiera può fabbricare 5 tipi di prodotti che indichiamo genericamente con **P1, P2, P3, P4, P5** usando 2 processi di produzione che avvengono mediante l'uso di due macchine che indichiamo con **M1** e **M2**. Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna unità di prodotto dà i seguenti profitti (in migliaia di lire)

P1	P2	P3	P4	P5
250	300	500	450	180

Ciascuna unità di prodotto richiede un certo tempo di ciascuno dei 2 processi; la tabella che segue riporta i tempi (in ore) di lavorazione di ciascuna macchina per ottenere una unità di ciascuno dei prodotti finiti

	P1	P2	P3	P4	P5
M1	10	15	7	18	-
M2	9	13	-	-	20

Inoltre, l'assemblaggio finale per ciascuna unità di ciascun prodotto richiede 18 ore di lavoro di un operaio. La fabbrica possiede 4 macchine **M1** e 3 macchine **M2** che sono in funzione 5 giorni alla settimana per 2 turni di 8 ore al giorno. Gli operai impiegati nell'assemblaggio sono 10 e ciascuno di essi lavora 5 giorni alla settimana per un turno di 8 ore al giorno. Trovare la quantità che conviene produrre di ciascun prodotto per massimizzare il profitto totale.

### Formulazione.

Costruiamo un modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema in analisi supponendo di voler pianificare la produzione settimanale. È immediato verificare che anche in questo caso le ipotesi fondamentali della Programmazione Lineare sono soddisfatte.

- *Variabili di decisione.* È naturale introdurre le variabili reali  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto **P1**, **P2**, **P3**, **P4**, **P5** che conviene fabbricare in una settimana.
- *Funzione Obiettivo.* Ciascuna unità di prodotto finito contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà

$$250x_1 + 300x_2 + 500x_3 + 450x_4 + 180x_5. \quad (3.1.1)$$

L’obiettivo della fabbrica sarà quello di scegliere le variabili  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  in modo che l’espressione (3.1.1) del profitto sia massimizzata. La (3.1.1) rappresenta la funzione obiettivo.

- *Vincoli.* Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica sia dal punto di vista delle macchine, sia dal punto di vista degli operai, limita i valori che possono assumere le variabili  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 5$ . Si hanno solo 4 macchine **M1** che lavorano per un totale di 320 ore settimanali e poiché ciascuna unità di prodotto **P1** usa per 10 ore la macchina **M1**, ciascuna unità di prodotto **P2** la usa per 15 ore e così via per gli altri prodotti, si dovrà avere

$$10x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 18x_4 \leq 320. \quad (3.1.2)$$

Ragionando in modo analogo per la macchina **M2** si ottiene

$$9x_1 + 13x_2 + 20x_5 \leq 240. \quad (3.1.3)$$

Inoltre si hanno solo 10 uomini per l’assemblaggio, ciascuno dei quali lavora 40 ore a settimana e quindi si ha una capacità lavorativa settimanale di 400 ore. Poiché ciascuna unità di prodotto prevede 18 ore di lavoro di assemblaggio si dovrà avere

$$18x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 18x_5 \leq 400. \quad (3.1.4)$$

Le espressioni (3.1.2), (3.1.3) e (3.1.4) costituiscono i vincoli del modello. Ci sono inoltre vincoli impliciti dovuti al fatto che le variabili  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 5$  rappresentando quantità di prodotto non possono essere negative. Questa limitazione va esplicitata e quindi vanno aggiunti i vincoli

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

La formulazione finale sarà quindi

$$\begin{cases} \max (250x_1 + 300x_2 + 500x_3 + 450x_4 + 180x_5) \\ 10x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 18x_4 \leq 320 \\ 9x_1 + 13x_2 + 20x_5 \leq 240 \\ 18x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 18x_5 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Questa formulazione è un problema matematico ben definito e costituisce il modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema di pianificazione della produzione industriale in analisi.  $\square$

**Esercizio 3.1.2** Un'industria produce 4 tipi di elettrodomestici **E1, E2, E3, E4** ed è divisa in 3 reparti. Ciascun reparto può fabbricare ciascuno tipo di elettrodomestico. Questa industria dispone di 100 operai così ripartiti: 40 nel reparto 1, 35 nel reparto 2 e 25 nel reparto 3. Ciascun operaio lavora 5 giorni la settimana, per 8 ore al giorno. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di elettrodomestico e per ciascun reparto, il tempo di lavorazione (in ore) necessario per ottenere un elettrodomestico pronto per la vendita, insieme al prezzo di vendita unitario in migliaia di lire.

	<b>E1</b>	<b>E2</b>	<b>E3</b>	<b>E4</b>
<b>Reparto 1</b>	1	1.5	0.5	1.6
<b>Reparto 2</b>	1.2	1.3	0.6	1
<b>Reparto 3</b>	0.8	1.7	0.7	1.3
<b>prezzo di vendita</b>	800	1200	950	1100

Questa industria deve pianificare la sua produzione settimanale, deve cioè determinare il numero di ciascuno degli elettrodomestici che deve essere fabbricato da ciascun reparto in modo da soddisfare un ordine di almeno 1000, 600, 300, 200 elettrodomestici rispettivamente del tipo **E1, E2, E3, E4** e in modo da massimizzare il profitto complessivo ricavato dalla vendita.

### Formulazione.

È un problema di pianificazione in cui ciascun reparto è in grado di ottenere un prodotto finito.

- *Variabili.* Si devono distinguere il numero di elettrodomestici prodotti in ciascun reparto e quindi una naturale associazione delle variabili di decisione è la seguente: si indica con  $x_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , il numero di elettrodomestici del tipo **Ej** da produrre settimanalmente nel reparto  $i$ -esimo.

– *Funzione obiettivo.* Sarà data dal profitto complessivo ricavato dalla vendita e quindi è

$$800(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1200(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 950(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + 1100(x_{14} + x_{24} + x_{34})$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli dovuti alla limitata disponibilità settimanale di ore lavorative; in particolare, vista la distribuzione degli operai nei reparti si hanno al più le seguenti disponibilità orarie: 1600 ore nel reparto 1, 1400 ore nel reparto 2 e 1000 ore nel reparto 3. Pertanto in base ai tempi di lavorazione riportati nella tabella i vincoli da considerare sono:

$$\begin{aligned} x_{11} + 1.5x_{12} + 0.5x_{13} + 1.6x_{14} &\leq 1600 \\ 1.2x_{21} + 1.3x_{22} + 0.6x_{23} + x_{24} &\leq 1400 \\ 0.8x_{31} + 1.7x_{32} + 0.7x_{33} + 1.3x_{34} &\leq 1000. \end{aligned}$$

Inoltre si devono considerare dovuti all'ordine da soddisfare che possono essere scritti nella forma

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 1000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 600 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 300 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 200. \end{aligned}$$

Infine devono essere esplicitati i vincoli di

- non negatività delle variabili  $x_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$
- interezza delle variabili  $x_{ij} \in \mathbf{Z}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Quindi la formulazione completa è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (800(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 1200(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ \quad + 950(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + 1100(x_{14} + x_{24} + x_{34})) \\ x_{11} + 1.5x_{12} + 0.5x_{13} + 1.6x_{14} \leq 1600 \\ 1.2x_{21} + 1.3x_{22} + 0.6x_{23} + x_{24} \leq 1400 \\ 0.8x_{31} + 1.7x_{32} + 0.7x_{33} + 1.3x_{34} \leq 1000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 1000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 600 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 300 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 200 \\ x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \mathbf{Z}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right.$$

□

**Esercizio 3.1.3** Una azienda agricola si è specializzata nella coltivazione di granoturco e nell'allevamento di vitelli. Questi due beni vengono prodotti con tre sistemi diversi: con un primo sistema vengono allevati 1000 vitelli utilizzando 30 mesi/uomo di lavoro, 20 ettari di terreno e 200 tonnellate di granoturco. Con il secondo sistema vengono prodotte 100 tonnellate di granoturco usando 20 mesi/uomo e 40 ettari di terreno. Con il terzo sistema si producono 200 tonnellate di granoturco e si allevano 500 vitelli usando 40 mesi/uomo di lavoro e 50 ettari di terreno. Il granoturco viene venduto a £100000 a tonnellata ed i vitelli a £30000 ciascuno.

L'azienda possiede 70 ettari di terreno e può disporre di 50 mesi/uomo di lavoro. Si vuole individuare quanto produrre con ciascuno dei tre sistemi in modo da massimizzare i profitti.

### Analisi del problema e costruzione del modello

La situazione proposta può essere riassunta nella seguente tabella:

Sistema di produzione	Produzione annua	Risorse		
		Terreno (ettari)	granoturco (ton.)	mesi/uomo
1	1000 vitelli	20	200	30
2	100 t. granoturco	40	-	20
3	200 t. granot. 500 vitelli	50	-	40

Si suppone che i livelli di attività siano variabili continue e quindi si tratta di formulare un problema di PL continuo. Si suppone inoltre che l'azienda sia autosufficiente, cioè non acquisti nessun bene da terzi.

### Formulazione.

– *Variabili.* Si considerano come variabili di decisione i livelli di attività di ciascuno dei tre sistemi di produzione; indichiamo quindi con  $x_i$  il livello di attività dell' $i$ -esimo sistema di produzione.

– *Vincoli.* Per quanto riguarda i vincoli si hanno:

- *vincoli di capacità produttiva.* Sono i vincoli sulla risorsa mesi/uomo e vincoli sulla risorsa terreno:

$$30x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 50$$

$$20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 70$$

- *vincoli di disponibilità di materie prime.* Il granoturco prodotto deve essere almeno pari alla quantità consumata con il sistema di produzione 1 (per l'ipotesi di autosufficienza):

$$100x_2 + 200x_3 - 200x_1 \geq 0.$$

- *vincoli di non negatività.* Si tratta di livelli di produzione e quindi deve essere

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

– *Funzione obiettivo.* Per quanto riguarda la funzione obiettivo si tratta di massimizzare i profitti, cioè la differenza tra ricavo e costi. Il ricavo è dato dalla vendita del granoturco e dei vitelli; si deve tenere conto del fatto che parte del granoturco prodotto non è venduto ma viene utilizzato come risorsa nel primo sistema di produzione, quindi la funzione obiettivo da massimizzare sarà

$$30000(1000x_1 + 500x_3) + 100000(100x_2 + 200x_3 - 200x_1),$$

cioè:

$$10^6(10x_1 + 10x_2 + 35x_3).$$

Complessivamente possiamo scrivere il problema come:

$$\begin{cases} \max 10^6(10x_1 + 10x_2 + 35x_3) \\ 30x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 50 \\ 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 70 \\ 100x_2 + 200x_3 - 200x_1 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Esercizio 3.1.4** *Un'impresa può usare tre procedimenti differenti (**P1**, **P2**, **P3**) per la produzione di un bene. Per la produzione di un'unità di bene è necessario l'impiego di tre macchine per tempi che dipendono dal procedimento usato e che sono riportati nella seguente tabella (in ore):*

	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P3</b>
<b>Macchina A</b>	2	1	3
<b>Macchina B</b>	4	2	3
<b>Macchina C</b>	3	4	2

*Ogni macchina è disponibile per 50 ore. Il profitto per la vendita di un'unità di prodotto dipende dal procedimento usato ed è riportato nella seguente tabella (in migliaia di lire):*

	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P3</b>
<i>Profitto</i>	15	18	10

*Formulare i problemi di Programmazione Lineare che permettono*

- di massimizzare il profitto;*
- di minimizzare il numero di ore di impiego della macchina B, con il vincolo che il profitto sia almeno 200.*

### Analisi del problema e costruzione del modello

Si suppone che si tratti di produrre un bene frazionabile, quindi si vuole formulare un problema di (PL) continuo. La formulazione è diversa se si intende che un'unità di bene deve essere processata in sequenza sulle macchine A, B e C oppure se un'unità di bene può essere prodotta indifferentemente sulla macchina A, B o C con tre procedimenti diversi su ciascuna macchina (in totale con 9 procedimenti diversi). Riportiamo entrambe le formulazioni.

#### Formulazione 1.

Ogni unità di bene, prodotta con un qualunque procedimento  $i = 1, 2, 3$ , deve essere lavorata su tutte le macchine A, B e C. In questo caso si può costruire il seguente modello.

– *Variabili.* Siano  $x_i$  con  $i = 1, 2, 3$  le unità di bene prodotto con procedimento  $i$ .

**Quesito a)** In questo caso i vincoli e la funzione obiettivo sono:

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli sulla capacità produttiva, infatti le macchine possono lavorare solo 50 ore e quindi si ha:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 50 && \text{macchina A} \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 50 && \text{macchina B} \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 50 && \text{macchina C} \end{aligned}$$

Si hanno, inoltre, i vincoli di non negatività sulle variabili in quanto si tratta di quantità prodotte, quindi

$$x_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, 2, 3.$$

– *Funzione obiettivo.* È data del profitto da massimizzare e quindi può essere scritta

$$15x_1 + 18x_2 + 10x_3.$$

Complessivamente il problema di (PL) relativo al quesito a) si scrive:

$$\begin{cases} \max(15x_1 + 18x_2 + 10x_3) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 50 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 50 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

**Quesito b)** Per quanto riguarda il punto b) la *funzione obiettivo* è il numero di ore di impiego della macchina B che si vogliono minimizzare, cioè

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

I vincoli sono gli stessi del punto a) con in aggiunta un vincolo sul profitto minimo:

$$15x_1 + 18x_2 + 10x_3 \geq 200.$$

Complessivamente il problema di (PL) relativo al quesito b) si scrive:

$$\begin{cases} \min(4x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 50 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 50 \\ 15x_1 + 18x_2 + 10x_3 \geq 200 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

### Formulazione 2.

In questo caso si devono distinguere le unità di bene prodotte con procedimento  $i$  utilizzando la macchina  $j$ , cioè con modalità  $ij$ . Quindi in questo caso si può costruire il seguente modello.

- *Variabili.* Si introducono le variabili  $x_{ij}$  con  $i = 1, 2, 3$  e  $j = A, B, C$ , che rappresentano le unità di bene prodotto con modalità  $ij$ .

**Quesito a)** In questo caso i vincoli e la funzione obiettivo sono:

- *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli di capacità in quanto le macchine possono lavorare solo 50 ore e quindi:

$$\begin{aligned} 2x_{1A} + x_{2A} + 3x_{3A} &\leq 50 \\ 4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B} &\leq 50 \\ 3x_{1C} + 4x_{2C} + 2x_{3C} &\leq 50 \end{aligned}$$

Si devono inoltre esplicitare i vincoli di non negatività in quanto si tratta di quantità prodotte, e quindi

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad j = A, B, C.$$

- *Funzione obiettivo.* È data dal profitto da massimizzare. Il profitto dipende solo dal procedimento usato, non dalla macchina su cui è stato realizzato, quindi:

$$15 \sum_{j=A,B,C} x_{1j} + 18 \sum_{j=A,B,C} x_{2j} + 10 \sum_{j=A,B,C} x_{3j}.$$

Complessivamente il problema di (PL) relativo al quesito a) si scrive:

$$\begin{cases} \max 15 \sum_{j=A,B,C} x_{1j} + 18 \sum_{j=A,B,C} x_{2j} + 10 \sum_{j=A,B,C} x_{3j} \\ 2x_{1A} + x_{2A} + 3x_{3A} \leq 50 \\ 4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B} \leq 50 \\ 3x_{1C} + 4x_{2C} + 2x_{3C} \leq 50 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = A, B, C. \end{cases}$$

**Quesito b)** Per quanto riguarda il punto b) la *funzione obiettivo* è il numero di ore di impiego della macchina  $B$  che si vogliono minimizzare, cioè

$$4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B}.$$

I vincoli sono gli stessi del punto a) con in aggiunta un vincolo sul profitto minimo:

$$15 \sum_{j=A,B,C} x_{1j} + 18 \sum_{j=A,B,C} x_{2j} + 10 \sum_{j=A,B,C} x_{3j} \geq 200.$$

Complessivamente il problema di (PL) relativo al quesito b) si scrive:

$$\begin{cases} \min(4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B}) \\ 2x_{1A} + x_{2A} + 3x_{3A} \leq 50 \\ 4x_{1B} + 2x_{2B} + 3x_{3B} \leq 50 \\ 3x_{1C} + 4x_{2C} + 2x_{3C} \leq 50 \\ 15 \sum_{j=A,B,C} x_{1j} + 18 \sum_{j=A,B,C} x_{2j} + 10 \sum_{j=A,B,C} x_{3j} \geq 200 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = A, B, C. \end{cases}$$

□

### 3.2 MODELLI DI MISCELAZIONE

**Esercizio 3.2.1** Una raffineria produce quattro tipi di benzine grezze ( $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{B}_3$ ,  $\mathbf{B}_4$ ) e le miscela allo scopo di ottenere carburanti di due diverse qualità ( $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ). Le quantità di benzine grezze non utilizzate nella produzione delle miscele possono essere vendute direttamente. La seguente tabella riassume i dati delle benzine grezze, cioè il numero di ottani, la quantità (in ettolitri) che si può produrre al giorno e il costo (in migliaia di lire) di un ettolitro di ciascuna benzina.

	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$
<b>n. ottani</b>	90	73	79	86
<b>ettolitri</b>	3500	6000	4500	5200
<b>costo</b>	260	210	190	220

Nella seguente tabella sono riportate le caratteristiche che devono avere le miscele cioè il minimo numero di ottani e il prezzo di vendita di un ettolitro di carburante (in migliaia di lire)

	$\mathbf{C}_1$	$\mathbf{C}_2$
<b>min. n. ottani</b>	80	85
<b>prezzo</b>	350	520

Inoltre il mercato è in grado di assorbire non più di 25000 ettolitri al giorno del carburante  $\mathbf{C}_1$ , mentre richiede almeno 10000 ettolitri al giorno di carburante  $\mathbf{C}_2$ . Infine, i quantitativi di benzine grezze prodotti ma non utilizzati nella preparazione delle miscele sono rivenduti al prezzo di 280 migliaia di lire per ettolitro se il numero di ottani è non inferiore a 80, e a 250 migliaia di lire per ettolitro altrimenti. Occorre pianificare la produzione giornaliera della raffineria, cioè le quantità e le composizioni delle due miscele, massimizzando il profitto ottenuto dalla vendita dei prodotti. Assumere che il numero di ottani di ciascuna miscela dipenda in modo lineare dalle gradazioni delle benzine componenti.

#### Formulazione.

- *Variabili.* È conveniente scegliere come variabili di decisione le quantità (in ettolitri) di benzina grezza  $\mathbf{B}_i$  utilizzate nella miscela  $\mathbf{C}_j$  che indichiamo con  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $j = 1, 2$ . Inoltre denotiamo con  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  le quantità di benzine grezze prodotte ma non utilizzate nelle miscele.
- *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da massimizzare è data dal ricavo ottenuto dalla vendita dei prodotti sottratto dei costi di produzione. Quindi è

data da

$$\begin{aligned} z = & 350(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 520(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) + \\ & + 280(y_1 + y_4) + 250(y_2 + y_3) + \\ & - 260(x_{11} + x_{12} + y_1) - 210(x_{21} + x_{22} + y_2) + \\ & - 190(x_{31} + x_{32} + y_3) - 220(x_{41} + x_{42} + y_4). \end{aligned}$$

– *Vincoli.* I vincoli sulla capacità produttiva sono

$$x_{11} + x_{12} + y_1 \leq 3500$$

per quanto riguarda la benzina **B<sub>1</sub>** e analoghi per le altre benzine. Tuttavia tali vincoli possono essere imposti, senza perdere generalità, come vincoli di uguaglianza considerando che non vi è alcuna convenienza a sotto-utilizzare le capacità produttive della raffineria:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + y_1 &= 3500 \\ x_{21} + x_{22} + y_2 &= 6000 \\ x_{31} + x_{32} + y_3 &= 4500 \\ x_{41} + x_{42} + y_4 &= 5200. \end{aligned}$$

Analizziamo ora i vincoli dovuti al minimo numero di ottani che devono avere le miscele; essi sono dati da

$$\begin{aligned} 90x_{11} + 73x_{21} + 79x_{31} + 86x_{41} &\geq 80(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) \\ 90x_{12} + 73x_{22} + 79x_{32} + 86x_{42} &\geq 85(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

A queste espressioni si può anche arrivare considerando che il numero degli ottani di ciascuna miscela, per ipotesi, dipende linearmente dalle gradazioni delle benzine componenti e quindi è dato dalla media pesata dei numeri di ottani delle benzine componenti, con pesi costituiti dalle quantità di ciascun componente; quindi il numero di ottani della  $j$ -esima miscela è dato da

$$\frac{90x_{1j} + 73x_{2j} + 79x_{3j} + 86x_{4j}}{x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j}}.$$

Questa espressione è valida solamente se la miscela è prodotta in quantità non nulla, perché in questo caso il denominatore è non nullo. Esprimendo con una disequazione la richiesta che il numero di ottani di tale miscela sia non inferiore al rispettivo limite minimo e moltiplicando entrambi i membri della disequazione per il denominatore della frazione si ottengono i vincoli richiesti nella forma data dalle (3.2.1) che valgono anche nel caso di produzione nulla delle miscele. Svolgendo i calcoli nelle (3.2.1) si ottengono i seguenti vincoli

$$10x_{11} - 7x_{21} - x_{31} + 6x_{41} \geq 0$$

$$5x_{12} - 12x_{22} - 6x_{32} + x_{42} \geq 0.$$

Si devono inoltre esprimere vincoli di mercato, cioè

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 25000$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 10000$$

e i vincoli di non negatività sulle variabili

$$x_{ij} \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4; \quad j = 1, \dots, 3.$$

Quindi, la formulazione completa è

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(90x_{11} + 140x_{21} + 160x_{31} + 130x_{41} + 260x_{12} + 310x_{22} + \\ \quad + 330x_{32} + 300x_{42} + 20y_1 + 40y_2 + 60y_3 + 60y_4) \\ x_{11} + x_{12} + y_1 = 3500 \\ x_{21} + x_{22} + y_2 = 6000 \\ x_{31} + x_{32} + y_3 = 4500 \\ x_{41} + x_{42} + y_4 = 5200 \\ 10x_{11} - 7x_{21} - 1x_{31} + 6x_{41} \geq 0 \\ 5x_{12} - 12x_{22} - 6x_{32} + 1x_{42} \geq 0 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 25000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 10000 \\ x_{ij} \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4; \quad j = 1, 2. \end{array} \right.$$

□

**Esercizio 3.2.2** Una compagnia petrolifera produce 2 tipi di gasolio che vengono venduti rispettivamente a 18 c/gal e a 21 c/gal. La raffineria può comprare quattro tipi di greggio con le seguenti analisi percentuali del contenuto di tre sostanze **A**, **B** e **C** e al prezzo (al gallone) riportato nella seguente tabella

Greggio	A	B	C	prezzo
<b>tipo 1</b>	80%	10%	10%	14 c
<b>tipo 2</b>	30%	30%	40%	10 c
<b>tipo 3</b>	70%	10%	20%	15 c
<b>tipo 4</b>	40%	50%	10%	12 c

Il tipo di gasolio da 21 c deve avere almeno il 60 % di sostanza **A** e non più del 35% della sostanza **C**. Il tipo da 18 c non deve avere più del 18% di sostanza **C**. Determinare le quantità relative di greggio da usare in modo da minimizzare il costo del greggio occorrente.

**Formulazione.**

È un problema di miscelazione e una sua formulazione come problema di Programmazione Lineare è la seguente.

– *Variabili.* Introduciamo le variabili  $x_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, 4$  rappresentanti le quantità percentuali di greggio di tipo  $j$  da usare nella miscela  $i$ , intendendo per miscela 1 il gasolio da 18 c/gal e per miscela 2 il gasolio da 21 c/gal.

– *Funzione obiettivo.* È data dal costo complessivo del greggio occorrente e quindi da

$$14(x_{11} + x_{21}) + 10(x_{12} + x_{22}) + 15(x_{13} + x_{23}) + 12(x_{14} + x_{24}).$$

– *Vincoli.* Si devono imporre i seguenti vincoli sul contenuto delle varie sostanze

$$\begin{aligned} 0.1x_{11} + 0.4x_{12} + 0.2x_{13} + 0.1x_{14} &\leq 0.18 \\ 0.8x_{21} + 0.3x_{22} + 0.7x_{23} + 0.4x_{24} &\geq 0.6 \\ 0.1x_{21} + 0.4x_{22} + 0.2x_{23} + 0.1x_{24} &\leq 0.35 \end{aligned}$$

e poiché si tratta di quantità percentuali,

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1. \end{aligned}$$

Infine i vincoli di non negatività  $x_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, 4$  □

**Esercizio 3.2.3** Una città deve essere rifornita, ogni giorno, con 500000 litri di acqua. Si richiede che l'acqua non contenga sostanze inquinanti in quantità superiore a 100 parti per milione. L'acqua può essere ottenuta da un fiume o da un pozzo. La quantità di acqua che può essere fornita dal fiume è illimitata, e un impianto di depurazione può depurarla in modo che il livello di inquinamento sia inferiore a 150 parti per milione ad un costo di lire 10000 ogni 5000 litri di acqua trattata o a 75 parti per milione ad un costo di lire 30000 per 5000 litri di acqua trattata. Il pozzo, invece, può fornire al più 200000 litri di acqua al giorno con un livello di inquinamento pari a 50 parti per milione. L'acqua fornita dal pozzo può, volendo, essere purificata mediante un processo sperimentale che riduce le impurità a 10 parti per milione. Il pompaggio dell'acqua dal pozzo costa 40000 lire ogni 5000 litri e la stessa quantità di acqua può essere purificata mediante il processo sperimentale al costo di 15000 lire. Scrivere il problema di PL che permette di determinare il modo di soddisfare le esigenze idriche della città al costo minimo.

### Formulazione.

– *Variabili.* Sceglieremo come variabili di decisione le quantità di acqua (in litri)  $x_{1F}$  ottenuta dal fiume con procedimento di depurazione 1,  $x_{2F}$  ottenuta dal fiume con procedimento di depurazione 2,  $x_{1P}$  ottenuta dal pozzo senza depurazione,  $x_{2P}$  ottenuta dal pozzo con procedimento di depurazione.

– *Vincoli.* Si devono imporre i seguenti vincoli:

- Vincoli di domanda: la città deve essere rifornita con 500000 lt.di acqua:

$$x_{1F} + x_{2F} + x_{1P} + x_{2P} = 500000$$

- Vincoli di capacità: il pozzo può fornire al più 200000 lt. di acqua:

$$x_{1P} + x_{2P} \leq 200000.$$

- Vincoli di qualità: la qualità della miscela è misurata in parti di sostanze inquinanti per milione:

$$150x_{1F} + 75x_{2F} + 50x_{1P} + 10x_{2P} \leq 100(x_{1F} + x_{2F} + x_{1P} + x_{2P}).$$

- Vincoli di non negatività: si tratta di quantità acqua, quindi

$$x_{iF} \geq 0 \quad x_{iP} \geq 0 \quad i = 1, 2.$$

– *Funzione obiettivo.* È il costo da minimizzare. Il costo è diverso a seconda della sorgente e del trattamento effettuato. Poiché 5000 lt. di acqua del tipo 1F costano 10000, il costo di  $x_{1F}$  lt. di acqua è  $(x_{1F}/5000)10000 = 2x_{1F}$ , analogamente il costo di  $x_{2F}$  lt. di acqua prodotti con modalità  $x_{2F}$  è  $(x_{2F}/5000)30000 = 6x_{2F}$ . Per quanto riguarda l'acqua ottenuta dal pozzo, abbiamo che per la quantità  $x_{1P}$  dobbiamo pagare solo il pompaggio dato da:  $(x_{1P}/5000)40000 = 8x_{1P}$ , mentre per l'acqua sottoposta a trattamento dobbiamo pagare sia il pompaggio che la purificazione  $(x_{2P}/5000)(40000 + 15000) = 11x_{2P}$ . Quindi la funzione obiettivo è :

$$2x_{1F} + 6x_{2F} + 8x_{1P} + 11x_{2P}.$$

Complessivamente possiamo scrivere il problema di PL

$$\begin{cases} \min (2x_{1F} + 6x_{2F} + 8x_{1P} + 11x_{2P}) \\ x_{1F} + x_{2F} + x_{1P} + x_{2P} = 500000 \\ x_{1P} + x_{2P} \leq 200000 \\ 50x_{1F} - 25x_{2F} - 50x_{1P} - 90x_{2P} \leq 0 \\ x_{iF} \geq 0, \quad x_{iP} \geq 0 \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

□

### 3.3 MODELLO DI TRASPORTO

**Esercizio 3.3.1** Un'industria di acque minerali ha due stabilimenti uno a Viterbo e uno a Latina e tre impianti di imbottigliamento situati a Napoli, Roma e Rieti. L'industria ha la necessità di trasportare giornalmente l'acqua minerale dagli stabilimenti ai tre impianti di imbottigliamento che devono essere riforniti giornalmente rispettivamente di 30, 40 e 35 ettolitri di acqua. Gli stabilimenti giornalmente possono disporre rispettivamente di 50 e 55 ettolitri di acqua minerale. La tabella che segue riporta il costo (in Euro) per trasportare un ettolitro di acqua minerale da ciascuno stabilimento a ciascun impianto di imbottigliamento.

	Napoli	Roma	Rieti
Viterbo	250	100	85
Latina	120	80	150

Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare che permetta di determinare le quantità di acqua minerale da trasportare giornalmente da ciascuno stabilimento a ciascun impianto di imbottigliamento in modo da soddisfare esattamente le richieste degli impianti e in modo che non ci siano giacenze di acqua non trasportata negli stabilimenti minimizzando il costo complessivo dovuto al trasporto.

#### Formulazione.

Si tratta di pianificare i trasporti dagli stabilimenti agli impianti di imbottigliamento. Sono ovviamente verificate le ipotesi fondamentali della Programmazione Lineare.

– *Variabili.* È naturale associare le variabili di decisione alle quantità da determinare cioè alle quantità di acqua minerale (in ettolitri) da trasportare da ciascuno stabilimento a ciascun impianto. Indicheremo quindi con  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  rispettivamente la quantità di acqua minerale (in ettolitri) da trasportare giornalmente dallo stabilimento di Viterbo agli impianti di Napoli, Roma e Rieti; analogamente indicheremo con  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  rispettivamente la quantità di acqua minerale (in ettolitri) da trasportare giornalmente dallo stabilimento di Latina agli impianti di Napoli, Roma e Rieti.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo che deve essere minimizzata sarà data dal costo complessivo dei trasporti ed è quindi data da

$$250x_1 + 100x_2 + 85x_3 + 120y_1 + 80y_2 + 150y_3.$$

– *Vincoli.* I vincoli sono dovuti al fatto che giornalmente non ci devono essere giacenze negli stabilimenti e quindi si deve avere

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 50 \\y_1 + y_2 + y_3 &= 55.\end{aligned}$$

Inoltre devono essere soddisfatte esattamente le richieste giornaliere degli impianti e quindi si ha

$$\begin{aligned}x_1 + y_1 &= 30 \\x_2 + y_2 &= 40 \\x_3 + y_3 &= 35.\end{aligned}$$

Infine si devono esplicitare i vincoli di non negatività sulle variabili, cioè

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Quindi la formulazione completa è

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (250x_1 + 100x_2 + 85x_3 + 120y_1 + 80y_2 + 150y_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 55 \\ x_1 + y_1 = 30 \\ x_2 + y_2 = 40 \\ x_3 + y_3 = 35 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

□

**Esercizio 3.3.2** Un'industria produce un preparato chimico utilizzando due impianti di produzione **I1**, **I2**. Da questi impianti tutto il preparato chimico prodotto viene trasportato in due magazzini **M1**, **M2** che si trovano in differenti località. In questi magazzini una parte del preparato è venduta all'ingrosso direttamente, un'altra parte viene inviata a quattro centri di distribuzione **D1**, **D2**, **D3**, **D4** che effettuano la vendita al minuto. Questi centri necessitano ripetutivamente di almeno 150, 190, 220, 170 quintali di preparato chimico che vendono rispettivamente a Lire 350000, 280000, 200000, 270000 al quintale. La tabella che segue riporta i costi (in migliaia di lire) necessari per trasportare un quintale di preparato da ciascun impianto a ciascun magazzino.

	M1	M2
I1	21	25
I2	27	22

Nella seguente tabella si riportano i costi (in migliaia di lire) necessari per trasportare un quintale di preparato chimico da ciascun magazzino a ciascun centro di distribuzione.

	D1	D2	D3	D4
M1	33	31	36	30
M2	27	30	28	31

L'impianto di produzione **I1** può fabbricare al più 3000 quintali di preparato, l'impianto **I2** può fabbricare al più 2000 quintali di preparato. I prezzi di vendita all'ingrosso effettuati presso i magazzini **M1** e **M2** sono rispettivamente di Lire 150000 e 170000 al quintale. Per ragioni commerciali i quantitativi di preparato chimico venduti all'ingrosso in ciascun magazzino devono essere pari ad almeno 500 quintali ed inoltre tutto il preparato contenuto nei magazzini dovrà essere o venduto o trasportato ai centri di distribuzione per non avere rimanenze non vendute. Costruire un modello lineare che permetta di determinare le quantità di preparato chimico che devono essere prodotte in ciascun impianto e come esse devono essere ripartite tra i magazzini e i centri di distribuzione in modo da massimizzare il profitto netto complessivo.

### Formulazione.

Si tratta di un problema di pianificazione industriale che unisce ad un problema di trasporti dagli impianti di produzione ai magazzini e dai magazzini ai centri di distribuzione, un problema di allocazione ottima di risorse.

– *Variabili.* Si introducono le variabili  $x_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  per rappresentare le quantità (in quintali) di preparato chimico da produrre e quindi da trasportare dall'impianto **Ii** al magazzino **Mj**. Inoltre si introducono le variabili  $y_{kh}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $h = 1, 2, 3, 4$ , per rappresentare le quantità (in quintali) di preparato chimico da trasportare dal magazzino **Mk** al centro di distribuzione **Dh**. Infine si devono introdurre due variabili  $z_1, z_2$  per rappresentare la quantità (in quintali) di preparato chimico venduto all'ingrosso rispettivamente nel magazzino **M1** e **M2**.

– *Funzione obiettivo.* È data dal profitto netto, quindi dalla differenza tra ricavo ottenuto dalla vendita (presso i centri di distribuzione e all'ingrosso presso i magazzini) e le spesa complessiva dei trasporti. Il ricavo è dato da

$$350(y_{11} + y_{21}) + 280(y_{12} + y_{22}) + 200(y_{13} + y_{23}) + 270(y_{14} + y_{24}) + 150z_1 + 170z_2$$

mentre la spesa complessiva dei trasporti (dagli impianti ai magazzini e dai magazzini ai centri di distribuzione) è data

$$21x_{11} + 25x_{12} + 27x_{21} + 22x_{22} + 33y_{11} + 31y_{12} + 36y_{13} + 30y_{14} + 27y_{21} + 30y_{22} + 28y_{23} + 31y_{24}.$$

La funzione obiettivo sarà quindi data dalla differenza di queste due espressioni.

– *Vincoli.* Si hanno i seguenti vincoli

- vincoli dovuti alla capacità massima produttiva dei due impianti

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} &\leq 3000 \\x_{21} + x_{22} &\leq 2000\end{aligned}$$

- vincoli dovuti alle richieste dei centri di distribuzione

$$\begin{aligned}y_{11} + y_{21} &\geq 150 \\y_{12} + y_{22} &\geq 190 \\y_{13} + y_{23} &\geq 220 \\y_{14} + y_{24} &\geq 170\end{aligned}$$

- vincoli derivanti dal quantitativo minimo di preparato che deve essere venduto all'ingrosso nei magazzini

$$z_1 \geq 500, \quad z_2 \geq 500$$

- vincoli dovuti al fatto che tutto il preparato contenuto nei magazzini deve essere o venduto all'ingrosso oppure trasportato ai centri di distribuzione in modo da non avere rimanenze non vendute; questi vincoli si esprimono imponendo che in ciascun magazzino la quantità di preparato chimico che arriva trasportato dagli impianti sia uguale alla somma del quantitativo di preparato trasportato dal magazzino ai centri di distribuzione e del quantitativo di preparato venduto all'ingrosso direttamente nel magazzino. Si hanno quindi i vincoli

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} &= y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + z_1 \\x_{12} + x_{22} &= y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + z_2\end{aligned}$$

- vincoli di non negatività su tutte le variabili

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \quad y_{kh} \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad h = 1, 2, 3, 4 \quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione completa sarà

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(350(y_{11} + y_{21}) + 280(y_{12} + y_{22}) + 200(y_{13} + y_{23}) + 270(y_{14} + y_{24}) \\ + 150z_1 + 170z_2 + -(21x_{11} + 25x_{12} + 27x_{21} + 22x_{22} \\ + 33y_{11} + 31y_{12} + 36y_{13} + 30y_{14} + 27y_{21} + 30y_{22} + 28y_{23} + 31y_{24})) \\ x_{11} + x_{12} \leq 3000 \\ x_{21} + x_{22} \leq 2000 \\ y_{11} + y_{21} \geq 150 \\ y_{12} + y_{22} \geq 190 \\ y_{13} + y_{23} \geq 220 \\ y_{14} + y_{24} \geq 170 \\ x_{11} + x_{21} = y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + z_1 \\ x_{12} + x_{22} = y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + z_2 \\ z_1 \geq 500 \\ z_2 \geq 500 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \\ y_{kh} \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad h = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right.$$

I vincoli di non negatività delle variabili  $z_i$  sono ovviamente implicati dai vincoli  $z_1, z_2 \geq 500$ .  $\square$

**Osservazione 3.3.3** L'esempio appena esaminato mette in evidenza come nella realtà i problemi che si incontrano spesso possono essere la combinazione di più problemi appartenenti a più classi di modelli; la divisione che si è effettuata in problemi di allocazione ottima, problemi di miscelazione e problemi di trasporti ha, evidentemente, scopi essenzialmente didattici e dovrebbe fornire la possibilità di affrontare anche situazioni in cui confluiscono simultaneamente problematiche riconducibili a differenti classi di modelli.

