# 8

# La dualità nella Programmazione Lineare

## 8.1 TEORIA DELLA DUALITÀ

**Esercizio 8.1.1** *Scrivere il problema duale del seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{l} \min x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

**Soluzione.**
Riscriviamo innanzitutto il vincolo $x_2 - x_3 \leq 3$ nella forma $-x_2 + x_3 \geq -3$.
Il problema duale è:

$$\begin{array}{l} \max 3u_1 - 3u_2 + 2u_3 \\ 2u_1 + u_3 \leq 1 \\ 3u_1 - u_2 + u_3 \leq -1 \\ u_2 + u_3 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{array}$$

□

**Esercizio 8.1.2** *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{l} \min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_4 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4 \end{array} \qquad (P)$$

*Sia $\bar{x} = (0, 0, 2, 1/3)^T$ una soluzione ammissibile per (P) e sia $\bar{u} = (1, 1/3)^T$ una soluzione ammissibile per il problema duale associato a (P).*

(i) *Scrivere il problema duale di (P).*

(ii) *Dire se $\bar{x}$ è una soluzione ottima di (P) e dimostrare l'affermazione utilizzando le condizioni di complementarità.*

**Soluzione.**
Il problema duale di (P) è:

$$\begin{array}{l} \max 2u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ u_1 \leq 3 \\ u_1 \leq 1 \\ 3u_2 \leq 1 \end{array}$$

Poiché (P) presenta solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a $x^T(c - A^T u) = 0$ cioè:

$$\begin{array}{l} x_1(2 - u_1 - 2u_2) = 0 \\ x_2(3 - u_1) = 0 \\ x_3(1 - u_1) = 0 \\ x_4(1 - 3u_2) = 0 \end{array}$$

Sostituendo i valori delle soluzioni ammissibili $\bar{x}$, $\bar{u}$ rispettivamente per il primale ed il duale, le condizioni di complementarità risultano verificate. Quindi la soluzione $\bar{x}$ è effettivamente ottima per il primale e $\bar{u}$ è ottima per il duale. □

**Esercizio 8.1.3** *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{l} \min 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

*decidere se la soluzione $u^* = (1/2,\ 1/2)^T$ è ottima per il problema duale.*

**Soluzione.**
Il problema duale è:

$$\begin{array}{l} \max\ 2u_1 + 5u_2 \\ u_1 + u_2 \leq 3 \\ -u_1 \leq 4 \\ u_1 + u_2 \leq 1 \\ 2u_2 \leq 1 \end{array}$$

Le condizioni di complementarità si scrivono:

$$\begin{aligned}&x_1(3-u_1-u_2)=0\\&x_2(4+u_1)=0\\&x_3(1-u_1-u_2)=0\\&x_4(1-2u_2)=0\end{aligned}$$

Nel punto assegnato $u^*$ le ultime due equazioni sono soddisfatte per qualunque valore di $x_3, x_4$, mentre le prime due equazioni sono soddisfatte se e solo se $x_1 = 0$ ed $x_2 = 0$. Si tratta di verificare se esiste una soluzione ammissibile del primale con $x_1 = x_2 = 0$. Si pongono a zero le variabili $x_1$ ed $x_2$ nel problema primale e si ottiene il problema:

$$\begin{aligned}&\min x_3+x_4\\&x_3=2\\&x_3+2x_4=5\\&x_3\geq 0,\quad x_4\geq 0\end{aligned}$$

Una soluzione ammissibile per questo problema si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}x_3=2\\x_3+2x_4=5\\x_3\geq 0,\ x_4\geq 0\end{cases}$$

che ha per soluzione $x_3 = 2$ e $x_4 = \dfrac{3}{2}$. Il punto $(0,\ \ 0,\ \ 2,\ \ 3/2)^T$ è una soluzione ammissibile per il problema primale che soddisfa le condizioni di complementarità e quindi $u^* = (1/2,\ 1/2)^T$ è ottima per il duale. □

**Esercizio 8.1.4** *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}&\max(-x_1-x_2)\\&-x_1+x_2\geq 1\\&2x_1-x_2\leq 2\\&x_1\geq 0\\&x_2\geq 0\end{aligned}$$

*scrivere il problema duale. Risolvere il problema primale e il problema duale graficamente e verificare il risultato del Teorema della dualità forte.*

Innanzitutto riscriviamo il problema nella forma

$$\begin{aligned}&\max(-x_1-x_2)\\&x_1-x_2\leq -1\\&2x_1-x_2\leq 2\\&x_1\geq 0\\&x_2\geq 0.\end{aligned}$$

Il problema duale è

$$
\begin{aligned}
&\min(-u_1 + 2u_2)\\
&u_1 + 2u_2 \geq -1\\
&-u_1 - u_2 \geq -1\\
&u_1 \geq 0\\
&u_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Risolvendo graficamente i due problemi si ottiene

$$x^\star = (0,1)^T \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad u^\star = (-1,0)^T.$$

In corrispondenza di questi punti risulta

$$c^T x^\star = -1 = b^T u^\star$$

e quindi il Teorema della dualità forte è verificato. □

**Esercizio 8.1.5** *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$
\begin{aligned}
&\min 2x_1 + 9x_2 + 3x_2\\
&-2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1\\
&x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 1\\
&x_1 \geq 0\\
&x_2 \geq 0\\
&x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

a) *Scrivere il problema duale e risolverlo graficamente.*

b) *Utilizzando la complementarità determinare la soluzione del problema primale.*

a) Il problema duale del problema dato è

$$
\begin{aligned}
&\max u_1 + u_2\\
&-2u_1 + u_2 \leq 2\\
&2u_1 + 4u_2 \leq 9\\
&u_1 - u_2 \leq 3\\
&u_1 \geq 0\\
&u_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

e graficamente si ottiene che il punto di ottimo è $u^\star = (7/2, 1/2)^T$.

b) Poiché $u^\star = (7/2, 1/2)^T$ risulta

$$A^T u^\star = \begin{pmatrix} -2 & 1\\ 2 & 4\\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2}\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2}\\ 9\\ 3 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$c - A^T u^\star = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi le condizioni di complementarità

$$0 = (x^\star)^T (c - A^T u^\star) = x^T \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forniscono $x_1 = 0$. Mentre per le condizioni di complementarità

$$(u^\star)^T (Ax^\star - b)$$

essendo $u^\star > 0$ si deve avere $Ax^\star = b$ cioè, tenendo conto che $x_1 = 0$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene la soluzione ottima del problema primale data da
$x^\star = (0, 1/3, 1/3)^T$.

□

**Esercizio 8.1.6** *Scrivere il problema duale del seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{l} \min 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -1 \leq x_1 \leq 1 \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

*Supponendo che all'ottimo la prima variabile del problema duale valga* 0.5*, qual è il valore all'ottimo della somma delle variabili* $x_1$ *e* $x_2$*?*

**Soluzione.**
Per scrivere il problema duale trasformiamo innanzitutto i vincoli di minore o uguale in vincoli di maggiore o uguale:

$$\begin{array}{l} \min 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ -x_1 - x_2 \geq -5 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 \geq -1 \\ -x_1 \geq -1 \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ora possiamo scrivere il problema duale:

$$\begin{aligned}
&\max -5u_1 - 2u_2 - u_3 - u_4 \\
&-u_1 - 3u_2 + u_3 - u_4 = 3 \\
&-u_1 + 2u_2 \leq -2 \\
&-u_2 = 4 \\
&u_1 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0
\end{aligned}$$

La condizione di complementarità relativa alla variabile $u_1$ è:

$$u_1(-x_1 - x_2 + 5) = 0$$

Poiché $u_1^* \neq 0$, deve risultare all'ottimo $-x_1^* - x_2^* + 5 = 0$, quindi la somma delle variabili primali $x_1, x_2$ all'ottimo è $x_1^* + x_2^* = 5$. □

**Esercizio 8.1.7** *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}
&\max 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = z(x) \\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 500 \\
&3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\
&x_1 + 4x_2 \leq 420 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

*utilizzando la teoria della dualità determinare un intervallo in cui è compreso il valore ottimo $z(x^*)$ della funzione obiettivo.*

**Soluzione.**
Osserviamo preliminarmente che, poiché $x \geq 0$ ed i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono positivi, risulta $z(x^*) \geq 0$. Il problema duale è:

$$\begin{aligned}
&\min 500u_1 + 460u_2 + 420u_3 = g(u) \\
&3u_1 + 3u_2 + u_3 \geq 3 \\
&2u_1 + 4u_3 \geq 2 \\
&u_1 + 2u_2 \geq 5 \\
&u \geq 0
\end{aligned}$$

Osserviamo che il problema primale è di massimizzazione ed il duale è di minimizzazione, quindi, per il teorema della dualità debole, per ogni soluzione ammissibile primale-duale risulta $z(x) \leq g(u)$. Individuiamo quindi una soluzione ammissibile del problema duale. Fissiamo ad esempio $u_1 = 0$. Si ottiene allora

$$\begin{aligned}
u_2 &\geq 5/2 \\
u_3 &\geq 1/2 \\
3u_2 + u_3 &\geq 3
\end{aligned}$$

Quindi fissando $u_3 = 1/2$ si ha $u_2 \geq \max\{5/2, 5/6\} = 5/2$. Una soluzione ammissibile duale è quindi $(0,\ 5/2,\ 1/2)^T$ e la funzione obiettivo duale vale in questo punto $g(u) = 1360$. Quindi, poiché risulta $z(x^*) = g(u^*) \leq g(u)$, si ha $z(x^*) \in [0, 1360]$. □

**Esercizio 8.1.8** *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{l} \max\ 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ x \geq 0 \end{array}$$

*si supponga di sapere che* $x_1$ *e* $x_2$ *sono positive in una soluzione ottima. Utilizzando questa informazione e la teoria della dualità:*

(i) *calcolare una soluzione ottima del duale e del primale;*

(ii) *stabilire se può esistere una soluzione ottima con* $x_1 = 0$.

**Soluzione.**
Il problema duale è:

$$\begin{array}{l} \min 10u_1 + 8u_2 \\ u_1 + 2u_2 \geq 5 \\ 2u_1 - u_2 \geq 12 \\ u_1 + 3u_2 \geq 4 \\ u_1 \geq 0 \end{array}$$

e le condizioni di complementarità sono:

$$\begin{array}{l} u_1(10 - x_1 - 2x_2 - x_3) = 0 \\ x_1(u_1 + 2u_2 - 5) = 0 \\ x_2(2u_1 - u_2 - 12) = 0 \\ x_3(u_1 + 3u_2 - 4) = 0 \end{array}$$

(i) Sapendo che $x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$, dalle condizioni di complementarità, risulta all'ottimo

$$\begin{array}{l} u_1^* + 2u_2^* = 5 \\ 2u_1^* - u_2^* = 12 \end{array}$$

e quindi $u_1^* = 29/5$ e $u_2^* = -2/5$. Sostituendo questo punto nelle condizioni di complementarità si ottiene

$$\begin{array}{l} x_3^* = 0 \\ x_1^* + 2x_2^* = 10 \\ 2x_1^* - x_2^* = 8 \end{array}$$

cioè $x_1^* = 26/5$, $x_2^* = 12/5$, $x_3^* = 0$. Il valore della funzione obiettivo è $z(x^*) = 274/5$.

(ii) Una soluzione ottima con $x_1^* = 0$ deve verificare il vincolo di uguaglianza $-x_2^* + 3x_3^* = 8$ e avere lo stesso valore della funzione obiettivo $12x_2^* + 4x_3^* = 274/5$. Si ottiene la soluzione $x_2^* = 3,31$ e $x_3^* = 3,77$ che non è ammissibile. Non esiste quindi una soluzione ottima con $x_1^* = 0$.

□

**Esercizio 8.1.9** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{l} \max\ b^T x \\ Ax \le b, \\ x \ge 0, \end{array}$$

*in cui $A$ è una matrice simmetrica $n \times n$. Stabilire se è vera o falsa l'affermazione seguente: "se $\bar{x}$ soddisfa $A\bar{x} = b$ e $\bar{x} \ge 0$ allora $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema assegnato".*

**Soluzione.**
L'affermazione è vera. Infatti, poiché la matrice $A$ è simmetrica risulta $A^T = A$ e il problema duale del problema dato è

$$\begin{array}{l} \min b^T u \\ Au \ge b, \\ u \ge 0. \end{array}$$

Quindi la soluzione $\tilde{u} = \bar{x}$ è tale che $A\tilde{u} = b$ e $\tilde{u} \ge 0$. Esiste quindi una coppia di soluzioni ammissibili primale e duale $(\bar{x}, \tilde{u})$ che soddisfa le condizioni di complementarità e quindi ottime. □

**Esercizio 8.1.10** *Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{l} \max 9x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{array}$$

*Supponiamo che si tratti di un modello di Programmazione Lineare relativo all'allocazione ottima di tre risorse $A, B, C$ per la produzione di due beni $x_1, x_2$.*

(i) *Si risolva il problema graficamente, indicando il punto ottimo; si determini tale punto ed il valore corrispondente della funzione obiettivo.*

(ii) *Supponiamo che il primo vincolo corrisponda ad un limite di disponibilità per la risorsa $A$, il secondo per la $B$ ed il terzo per la $C$. A quale risorsa corrisponde sicuramente nel problema duale una variabile nulla all'ottimo?*

(iii) *Si supponga di poter incrementare la disponibilità della risorsa A, trasformando il primo vincolo in*

$$x_1 + x_2 \leq 10 + k.$$

*Determinare graficamente il valore di $k$ oltre il quale ulteriori incrementi della risorsa A non fanno aumentare il profitto.*

**Soluzione**

(i) L'insieme ammissibile e le curve di livello della funzione obiettivo sono rappresentate nella Figura 8.1.1 dove l'insieme ammissibile è evidenziato in grigio e la curva di livello della funzione obiettivo corrispondente al valore ottimo è tratteggiata.

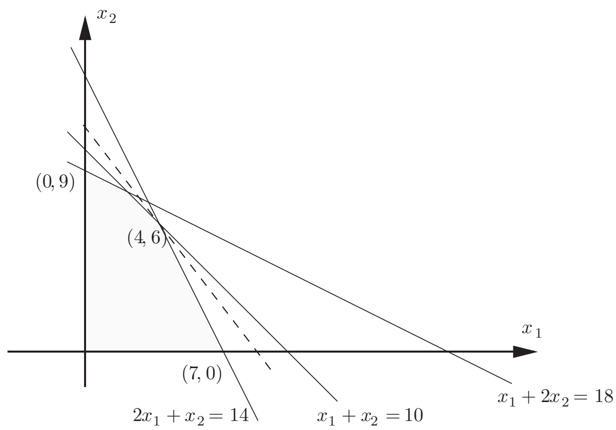


*Fig. 8.1.1* Rappresentazione grafica del problema.

Il massimo è raggiunto nel vertice $(4, 6)^T$ che si ottiene come intersezione delle rette

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \end{cases}$$

a cui corrisponde il valore per la funzione obiettivo 84.

(ii) All'ottimo devono valere le condizioni di complementarità, cioè

$$\begin{gathered} u_1^*(10 - x_1^* + x_2^*) = 0 \\ u_2^*(18 - x_1^* - 2x_2^*) = 0 \\ u_3^*(14 - 2x_1^* - x_2^* = 0 \end{gathered}$$

La variabile duale che deve essere necessariamente nulla all'ottimo è quella che corrisponde ad un vincolo non attivo nel problema primale; in $(4,\ 6)^T$ non è attivo il vincolo relativo alla risorsa $B$, quindi $u_2^* = 0$.

(iii) L'aumento della risorsa A consente di aumentare il profitto finché il vincolo corrispondente rimane attivo. Analizzando graficamente, il vincolo $x_1 + x_2 = 10 + k$ rappresenta un fascio di rette parallele. All'aumentare di $k$ il vincolo si sposta fino ad incontrare il punto $P$, ottenuto come intersezione dei vincoli relativi alla risorsa $A$ e $C$. Per ulteriori aumenti di $k$ il vincolo è ridondante e quindi non influenza più la soluzione. In Figura 8.1.2 la retta tratteggiata $x_1 + x_2 = 10 + 2/3$ individua il valore massimo della risorsa A oltre il quale un aumento non consente ulteriore guadagno.

Il punto $P$ si ottiene come intersezione delle rette

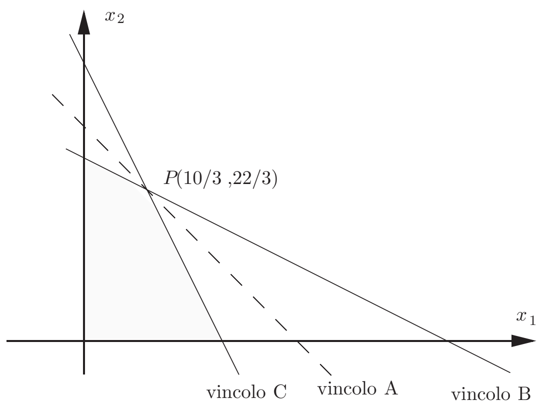


*Fig. 8.1.2* Rappresentazione grafica del problema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \end{cases}$$

cioè il punto $P(10/3, 22/3)$. La retta del fascio $x_1 + x_2 = 10 + k$ passante per il punto $P$, è quindi

$$10/3 + 22/3 = 10 + k$$

che corrisponde a $k = 2/3$.

□

**Esercizio 8.1.11** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{l} \max c_1 x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

*Determinare graficamente una soluzione ottima assumendo $c_1 = 2$ e determinare l'intervallo entro cui può variare $c_1$ perché la soluzione ottima rimanga invariata.*

**Soluzione.**
Per $c_1 = 2$ la funzione obiettivo è $z = 2x_1 + x_2$. In Figura 8.1.3 la regione ammissibile è disegnata in grigio, e la retta di livello relativa al valore ottimo della funzione obiettivo è tratteggiata.

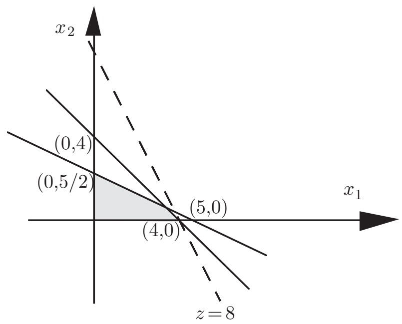


*Fig. 8.1.3* Rappresentazione grafica del problema.

La soluzione ottima è nel punto $x_1^* = 4, x_2^* = 0$ con valore ottimo della funzione obiettivo $z(x^*) = 8$. La soluzione rimane invariata per valori di $c_1 \geq 1$. □

**Esercizio 8.1.12** *Determinare la soluzione ottima (se esiste) del seguente problema di Programmazione Lineare, risolvendo graficamente il problema duale.*

$$
\begin{aligned}
&\min 2x_1 + x_2 \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\
&3x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\
&x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

**Soluzione.**
Il problema duale è

$$
\begin{aligned}
&\max 3u_1 + 7u_2 \\
&u_1 + 3u_2 = 2 \\
&u_1 + u_2 = 1 \\
&u_1 \leq 0 \\
&u_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

La regione ammissibile del problema duale è vuota, come si può vedere in Figura 8.1.4.

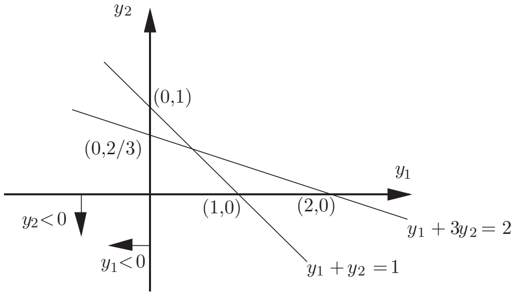


*Fig. 8.1.4* L'insieme ammissibile del problema duale è vuoto.

Il problema primale può avere insieme ammissibile vuoto, oppure funzione obiettivo illimitata inferiormente; in entrambi i casi non ammette soluzione ottima. Osserviamo però che si può determinare facilmente una soluzione ammissibile primale fissando $x_3 = x_4 = 0$. Si ottiene $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Quindi l'insieme ammissibile primale è non vuoto ed il primale è illimitato inferiormente. □