

## 6.2 IL TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

Quanto fino ad ora esaminato permette di enunciare e dimostrare un risultato di fondamentale importanza che caratterizza i problemi di Programmazione Lineare.

**Teorema 6.2.1** – TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

*Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases} \quad (\text{PL})$$

*Supponiamo che il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  non contenga rette. Allora una e una sola delle seguenti tre affermazioni è vera:*

- 1. Il problema (PL) è inammissibile, ovvero il poliedro  $P$  è vuoto;*
- 2. Il problema (PL) è illimitato inferiormente;*
- 3. Il problema (PL) ammette soluzioni ottime e almeno una di queste soluzioni è un vertice del poliedro  $P$ .*

Prima di dimostrare questo teorema enunciamo e dimostriamo un lemma che sarà alla base della dimostrazione del Teorema fondamentale.

**Lemma 6.2.1** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

*Supponiamo che il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  sia non vuoto e non contenga rette. Supponiamo inoltre che il problema non sia illimitato inferiormente. Allora se  $\tilde{x}$  è un punto di  $P$  che non è un vertice di  $P$ , è possibile trovare un punto  $\hat{x}$  appartenente a  $P$  tale che  $c^T \hat{x} \leq c^T \tilde{x}$  e il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in  $\hat{x}$  è maggiore che in  $\tilde{x}$ .*

**Dimostrazione:** Sia  $\tilde{x}$  un punto qualunque di  $P$  e indichiamo con  $k$  il numero dei vincoli attivi in  $\tilde{x}$  che sono linearmente indipendenti. Siccome  $\tilde{x}$  non è un vertice, ne segue che  $k < n$ . Sia  $I(\tilde{x})$  l'insieme degli indici dei vincoli attivi in  $\tilde{x}$ ; poiché  $k < n$ , si può trovare un vettore  $d \in \mathbb{R}^n$  non nullo tale che  $a_i^T d = 0$  per ogni  $i \in I(\tilde{x})$ . Inoltre, si può assumere che  $c^T d \leq 0$ ; infatti se questo non

si verificasse (cioè se fosse  $c^T d > 0$ ) sarebbe sufficiente prendere  $-d$  e ottenere comunque  $c^T d \leq 0$ .

Ora possono verificarsi due casi:  $c^T d < 0$  e  $c^T d = 0$ .

• Primo caso:  $c^T d < 0$ . Consideriamo la semiretta  $x(\lambda) = \tilde{x} + \lambda d$  con  $\lambda \geq 0$ . Per ogni punto di tale semiretta, ovvero per ogni  $\lambda \geq 0$ , e per  $i \in I(\tilde{x})$  si ha

$$a_i^T x(\lambda) = a_i^T \tilde{x} + \lambda a_i^T d = a_i^T \tilde{x} = b_i. \quad (6.2.1)$$

Quindi tutti i vincoli che erano attivi in  $\tilde{x}$  rimangono attivi in tutti i punti della semiretta. Ora, se l'intera semiretta è contenuta nel poliedro  $P$  si può far tendere  $\lambda$  a  $+\infty$  e poiché  $c^T d < 0$  si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} c^T (\tilde{x} + \lambda d) = c^T \tilde{x} + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda c^T d = -\infty.$$

Il problema sarebbe quindi illimitato inferiormente, ma ciò è stato escluso per ipotesi e quindi la semiretta non è interamente contenuta in  $P$ . Se la semiretta  $x(\lambda)$  non è interamente contenuta in  $P$ , devono esistere valori di  $\lambda$  per i quali i punti  $x(\lambda)$  non appartengono al poliedro  $P$ , ovvero deve esistere almeno un indice  $j \notin I(\tilde{x})$  tale che, per tali valori di  $\lambda$ , il  $j$ -esimo vincolo è violato, cioè risulta  $a_j^T x(\lambda) < b_j$ . Tra questi indici  $j$  deve esistere un indice  $j_0$  tale che possa essere scelto un  $\hat{\lambda} > 0$  in modo che risulti

$$\begin{aligned} a_{j_0}^T x(\hat{\lambda}) &= b_{j_0} \\ a_j^T x(\hat{\lambda}) &\geq b_j, \quad \text{per ogni } j \notin I(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Poiché per la (6.2.1) per ogni  $\lambda \geq 0$  risulta  $a_j^T x(\lambda) = b_j$  quando  $j \in I(\tilde{x})$ , il punto  $\hat{x} = x(\hat{\lambda})$  appartiene al poliedro  $P$ . Dalla (6.2.2), ricordando che  $j_0 \notin I(\tilde{x})$ , si ha che il vincolo  $j_0$ -esimo non era attivo in  $\tilde{x}$  ed è attivo in  $\hat{x} = x(\hat{\lambda})$  che è un punto del poliedro. Quindi, spostandosi da  $\tilde{x}$  a  $\tilde{x} + \hat{\lambda}d$ , il numero dei vincoli attivi aumenta di almeno uno.

Dobbiamo ora dimostrare che  $a_{j_0}^T$  (ovvero la riga della matrice  $A$  corrispondente al vincolo che è divenuto attivo passando da  $\tilde{x}$  a  $\tilde{x} + \hat{\lambda}d$ ) non può essere ottenuta come combinazione lineare delle righe  $a_i^T$ ,  $i \in I(\tilde{x})$  (ovvero delle righe corrispondenti ai vincoli attivi in  $\tilde{x}$ ). Infatti, se per assurdo fosse

$$a_{j_0} = \sum_{i \in I(\tilde{x})} \mu_i a_i \quad \text{con } \mu_i \in \mathbb{R}, \quad \mu_i \text{ non tutti nulli,} \quad (6.2.3)$$

moltiplicando scalarmente per il vettore  $d$  entrambe i membri della (6.2.3) e tenendo conto che  $a_i^T d = 0$  per ogni  $i \in I(\tilde{x})$ , si avrebbe

$$a_{j_0}^T d = \sum_{i \in I(\tilde{x})} \mu_i a_i^T d = 0 \quad (6.2.4)$$

e questo è assurdo perché  $j_0 \notin I(\tilde{x})$  ed invece dalla (6.2.2) risulterebbe

$$b_{j_0} = a_{j_0}^T x(\hat{\lambda}) = a_{j_0}^T (\tilde{x} + \hat{\lambda}d) = a_{j_0}^T \tilde{x}.$$

Perciò, spostandosi da  $\tilde{x}$  a  $\tilde{x} + \hat{\lambda}d$ , il numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti è almeno pari a  $k + 1$ . Inoltre, ricordando che  $c^T d < 0$  e  $\hat{\lambda} > 0$ , si ha che  $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x} + \hat{\lambda}c^T d < c^T \tilde{x}$ . Possiamo quindi concludere che nel caso  $c^T d < 0$  l'affermazione del lemma è verificata.

• Secondo caso:  $c^T d = 0$ . Consideriamo la retta  $x(\lambda) = \tilde{x} + \lambda d$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Poiché si è supposto che il poliedro  $P$  non contenga rette, ragionando nello stesso modo del caso precedente, ci si può spostare da  $\tilde{x}$  lungo la direzione  $d$  e determinare un punto  $\hat{x}$  in cui il numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti è maggiore del numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti in  $\tilde{x}$ . Inoltre, poiché  $c^T d = 0$  si ha  $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x} + \hat{\lambda}c^T d = c^T \tilde{x}$ . Quindi, anche in questo caso, l'affermazione del lemma risulta verificata. □

Utilizzando il Lemma precedente, possiamo ora dimostrare il Teorema 6.2.1.

### **Dimostrazione Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare.**

*Dimostrazione:* Le tre affermazioni 1, 2 e 3 sono ovviamente mutuamente escludentesi (cioè al più una di esse può essere vera). Per dimostrare il teorema è allora sufficiente far vedere che almeno una di esse è vera. A questo fine basta mostrare che se né l'affermazione 1 né quella 2 sono verificate allora l'affermazione 3 è verificata. Supponiamo dunque che  $P$  sia non vuoto e che il problema di Programmazione Lineare (PL) non sia illimitato inferiormente.

Se  $P$  è costituito da un solo punto  $\bar{x}$ , cioè  $P = \{\bar{x}\}$ , allora  $\bar{x}$  è un vertice ed è anche, ovviamente, una soluzione ottima del problema; il teorema è quindi vero in questo caso.

Consideriamo allora il caso non banale in cui  $P$  è costituito da infiniti punti<sup>3</sup>. Per dimostrare che l'affermazione 3 è vera dimostriamo utilizziamo il risultato del Lemma 6.2.1, ovvero che se  $\tilde{x}$  è un punto di  $P$  che non è un vertice, è possibile trovare un punto  $\hat{x}$  appartenente a  $P$  tale che  $c^T \hat{x} \leq c^T \tilde{x}$  e il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in  $\hat{x}$  è maggiore che in  $\tilde{x}$ . Il punto  $\hat{x}$  appartiene a  $P$  e sono possibili allora due casi: o  $\hat{x}$  è un vertice di  $P$  o è possibile applicare di nuovo il risultato del Lemma 6.2.1 e concludere che esiste un ulteriore punto  $\tilde{x}$  in  $P$  in cui il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti è strettamente maggiore del numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in  $\hat{x}$  e  $c^T \tilde{x} \leq c^T \hat{x}$ . Iterando

---

<sup>3</sup>Se il poliedro  $P$  contiene almeno due punti distinti deve contenere, in quanto insieme convesso, tutto il segmento che congiunge questi due punti. Siccome questo segmento contiene infiniti punti possiamo concludere che un poliedro non vuoto o contiene un singolo punto o ne contiene infiniti

questo procedimento, e tenendo conto che il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in un punto può essere al più  $n$ , un semplice ragionamento induttivo mostra che dal Lemma 6.2.1 possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} &\text{Se } \tilde{x} \text{ è un punto di } P \text{ che non è un vertice,} \\ &\text{allora è possibile trovare un vertice } \hat{v} \text{ di } P \text{ tale che} \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

$$c^T \hat{v} \leq c^T \tilde{x}.$$

Siano, ora,  $\{v_1, \dots, v_p\}$  i vertici di  $P$  (ricordiamo che i vertici sono sicuramente in numero finito, si veda il Corollario 6.1.17); indichiamo con  $v^*$  uno di questi vertici per cui  $c^T v^* \leq c^T v_h$  per ogni  $h = 1, \dots, p$ . Dalla definizione di  $v^*$  e dalla (6.2.5) segue immediatamente che per ogni punto  $\tilde{x} \in P$  possiamo scrivere, per un qualche vertice  $\hat{v}$ :

$$c^T v^* \leq c^T \hat{v} \leq c^T \tilde{x}.$$

Questo mostra che il vertice  $v^*$  è una soluzione ottima del problema di Programmazione Lineare (PL) e che l'affermazione 3 è vera.  $\square$

Un'immediata conseguenza del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare è che se il poliedro è un politopo non vuoto, allora il problema ammette soluzione ottima in un vertice del politopo. Questo risultato è formalizzato nel seguente corollario.

**Corollario 6.2.2** *Sia dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

*Se il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  è un politopo non vuoto, allora il problema di Programmazione Lineare ammette soluzione ottima (finita) in un vertice del poliedro  $P$ .*

**Osservazione 6.2.3** La struttura lineare di un problema di Programmazione Lineare è l'elemento chiave che permette di ottenere un risultato così forte <sup>4</sup> circa la possibile soluzione di un problema di ottimizzazione. Infatti, come controesempio si consideri il problema in una variabile reale

$$\begin{cases} \min \frac{1}{x} \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Questo problema non ammette soluzione ottima pur non essendo illimitato inferiormente. L'alternativa espressa dal Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare in questo caso non vale proprio perché viene meno l'ipotesi fondamentale di linearità della funzione obiettivo.

**Osservazione 6.2.4** Se un problema di Programmazione Lineare, come accade spesso nei problemi provenienti da modelli reali, presenta limitazioni inferiori e superiori sulle variabili cioè è del tipo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ l \leq x \leq u \end{cases}$$

---

<sup>4</sup>In effetti è possibile ottenere risultati ancora più forti di quelli fin qui elencati. Usando il Teorema 6.1.6 possiamo sostituire l'ipotesi che il poliedro “non contenga rette” con quella che “possieda almeno un vertice”. È possibile mostrare che in effetti questa ipotesi (che il poliedro “non contenga rette” o, equivalentemente “possieda almeno un vertice”) è necessaria solo per dimostrare che nel caso 3 del Teorema 6.2.1 se esistono vertici allora c'è almeno una soluzione ottima che cade su un vertice. La dimostrazione di questo risultato più forte richiede però strumenti analitici più complessi di quelli usati in questo corso. Vogliamo comunque riportare, per completezza, questa versione del Teorema 6.2.1.

**Teorema 6.2.2** *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases} \quad (\text{PL})$$

*Una e una sola delle seguenti tre affermazioni è vera:*

1. *Il problema (PL) è inammissibile, ovvero il poliedro  $P$  è vuoto;*
2. *Il problema (PL) è illimitato inferiormente;*
3. *Il problema (PL) ammette soluzioni ottime.*

*Nel caso in cui il problema ammetta soluzioni ottime e se  $P$  ammette almeno un vertice, allora almeno una soluzione ottima cade su un vertice.*

dove  $l \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^n$  sono rispettivamente una limitazione inferiore e superiore delle variabili, allora il poliedro che descrive l'insieme ammissibile è un politopo e quindi vale la caratterizzazione delle soluzioni data dal Corollario 6.2.2.

È interessante approfondire un poco la natura dell'insieme delle soluzioni di un problema di PL. Nello studio della risoluzione grafica di problemi di PL (cfr. paragrafo 5.3) si sarà notato che sembra essere vero che se un problema di PL ha più di una soluzione ottima, allora ne ammette infinite. Ci proponiamo qui di precisare questa affermazione.

Sia dato un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  e un corrispondente problema di PL:

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ & x \in P. \end{cases}$$

Supponiamo che questo problema abbia (almeno) una soluzione ottima  $x^*$ . Indichiamo con  $z^* = c^T x^*$  il *valore ottimo*, cioè il valore assunto dalla funzione obiettivo all'ottimo. È evidente che se  $\hat{x}^*$  è una qualunque altra soluzione ottima, risulta  $z^* = c^T \hat{x}^*$ . Vice versa, se un punto  $x$  è ammissibile, cioè se  $x \in P$  e risulta  $c^T x = z^*$ , allora  $x$  è una soluzione ottima per definizione. Riassumendo possiamo affermare che l'insieme delle soluzioni ottime del problema di PL dato è

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = z^*\}.$$

Questo mostra immediatamente che l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di Programmazione Lineare è un poliedro contenuto in  $P$ , in quanto intersezione di  $P$ , definito da un insieme di equazioni e disequazioni lineari con l'iperpiano

$$\{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = z^*\}.$$

Quindi vale il seguente teorema.

**Teorema 6.2.3** *Sia dato un problema di PL*

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ & x \in P. \end{cases}$$

*L'insieme delle soluzioni ottime di questo problema è un poliedro contenuto in  $P$ .*