

10

Teoria della Programmazione Lineare Intera

10.1 INTRODUZIONE

Come visto precedentemente, molti problemi particolarmente importanti dal punto di vista applicativo sono riconducibili alla soluzione di un Problema di Programmazione Intera. In generale un Problema di Programmazione Intera può essere descritto nella seguente maniera:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \\ x \in \mathbf{Z}^n, \end{cases}$$

dove $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un generico poliedro e \mathbf{Z}^n indica l'insieme dei vettori n -dimensionali a componenti intere. Quindi l'insieme ammissibile del precedente problema è costituito dai soli vettori a componenti intere contenuti nel dato poliedro P (si veda come esempio la Figura 10.1.1). Intuitivamente sembrerebbe che un possibile modo per affrontare i problemi di Programmazione Lineare Intera sia quello di trascurare il vincolo di interezza sulle componenti del vettore x , di risolvere, quindi, il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ottenendo come soluzione il punto \hat{x} e, infine, di scegliere un vettore a componenti intere “vicino” al punto \hat{x} (cioè un vettore che si ottiene da \hat{x} sostituendo le sue componenti non intere con degli interi “vicini”).

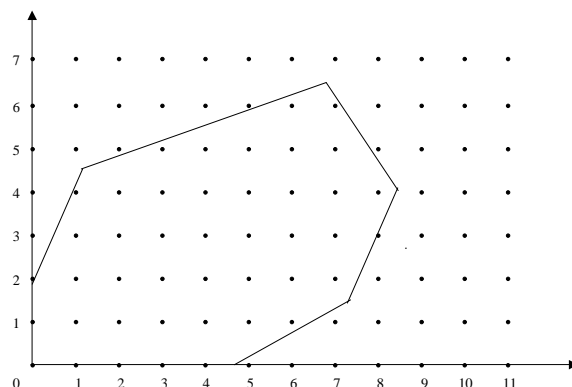


Figura 10.1.1 Esempio di un Problema di Programmazione Lineare Intera

Tale strategia, in alcuni casi permette di ottenere una buona approssimazione di una soluzione x^* del problema di Programmazione Lineare Intera di partenza. Tuttavia, in generale, può essere non utilizzabile o non efficiente.

Infatti, in molti casi, i punti ottenuti dal precedente arrondamento delle componenti non intere del vettore \hat{x} possono *non appartenere all'insieme ammissibile* del problema Programmazione Lineare Intera e quindi possono non aver nessun significato dal punto di vista applicativo. Un esempio di questo tipo è descritto nella Figura 10.1.2 (dove le linee tratteggiate sono le linee di livello della funzione obiettivo, supponendo che la direzione di decrescita sia orientata concordemente con la direzione dell'asse delle x), in cui si può notare che tutti i punti a componenti intere vicini a \hat{x} non sono contenuti nel poliedro che definisce l'insieme ammissibile del problema.

Per superare la precedente difficoltà, si può scegliere, come approssimazione della soluzione x^* del problema di Programmazione Lineare Intera, un punto intero *ammissibile* “vicino” al punto \hat{x} . Tuttavia, può capitare che questi punti interi ammissibili siano delle *pessime approssimazioni* delle soluzioni del problema di partenza. Questo tipo di situazione è descritta dalla Figura 10.1.3 (anche in questa figura le linee tratteggiate sono le linee di livello della funzione obiettivo, supponendo che la direzione di decrescita sia orientata concordemente con la direzione dell'asse delle x), in cui si può osservare che tutti i punti interi ammissibili vicini a \hat{x} sono molto distanti da x^* .

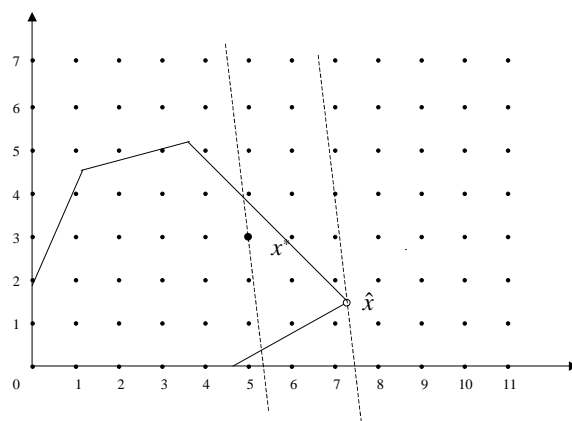


Figura 10.1.2 Esempio di soluzione per arrotondamento

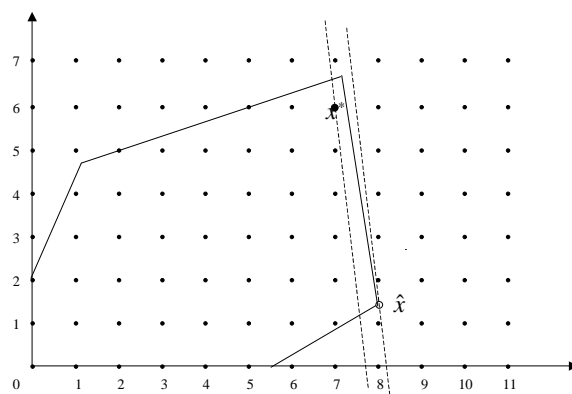


Figura 10.1.3 Esempio di soluzione per arrotondamento

Da quanto detto, emerge chiaramente la necessità di cercare di sviluppare dei metodi per affrontare i problemi di Programmazione Lineare Intera che considerino direttamente la presenza del vincolo che le componenti del vettore x siano intere.

10.2 PRELIMINARI

In questo paragrafo esaminiamo brevemente un importante concetto riguardante in generale i problemi di Programmazione Matematica; questo concetto sarà poi molto utilizzato nei prossimi paragrafi in relazione ai Problemi di Programmazione Lineare Intera.

A questo scopo, si considerino i seguenti problemi di Programmazione Matematica

$$(P) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in X \end{cases} \qquad (PR) \quad \begin{cases} \min g(x) \\ x \in Y \end{cases}$$

con $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 10.2.1 RILASSAMENTO

Il problema (PR) si dice rilassamento del problema (P) se risulta

- a) $X \subseteq Y$
- b) $g(x) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in X$

Naturalmente dalla a) e dalla b) si ottiene immediatamente $\min_{x \in Y} g(x) \leq \min_{x \in X} f(x)$.

Teorema 10.2.1 *Sia (PR) un rilassamento del problema (P) e sia $x^* \in Y$ soluzione ottima del problema rilassato (PR). Se $x^* \in X$ e $f(x^*) = g(x^*)$ allora x^* è soluzione ottima di (P).*

Dimostrazione: Se x^* soluzione ottima del problema (PR) e se $x^* \in X$ allora si vuole dimostrare che x^* deve essere ottima anche per il problema (P); infatti se non lo fosse, esisterebbe $\bar{x} \in X$ tale che $f(\bar{x}) < f(x^*)$. Poichè $X \subseteq Y$, si ha che $\bar{x} \in Y$ e per la b) risulta

$$g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) < f(x^*) = g(x^*)$$

e quindi il punto \bar{x} sarebbe tale che $g(\bar{x}) < g(x^*)$ contraddicendo l'ottimalità di x^* per il problema (PR). \square

Osservazione 10.2.2 In generale se si hanno due problemi del tipo

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in X \end{cases} \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in Y \end{cases}$$

(cioè con la stessa funzione obiettivo), se risulta $X \subseteq Y$ allora il secondo problema è un rilassamento del primo e naturalmente vale $\min_{x \in Y} f(x) \leq \min_{x \in X} f(x)$

10.3 RELAZIONI TRA PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA E PROGRAMMAZIONE LINEARE

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera

$$(PLI) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \quad \text{intero} \end{cases}$$

e il problema di Programmazione Lineare ottenuto dal problema (PLI) eliminando il vincolo di interezza sulle variabili, cioè il problema

$$(PL) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Poiché risulta che

- a) l'insieme ammissibile di (PLI) è incluso nell'insieme ammissibile di (PL), cioè

$$\{x \in \mathbf{Z}^n \mid Ax \geq b, \quad x \geq 0\} \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \geq b, \quad x \geq 0\}$$

- b) le funzioni obiettivo dei due problemi coincidono

allora il problema (PL) è un *rilassamento* del problema (PLI) (nel senso specificato dalla Definizione 10.2.1) e prende nome di *rilassamento continuo* o *lineare*. Naturalmente se x^* è soluzione ottima del problema (PLI) e y^* è soluzione ottima del rilassamento (PL), allora risulta $c^T y^* \leq c^T x^*$.

Il Teorema 10.2.1 si particolarizza facilmente al caso dei problemi (PLI) e (PL) come espresso nelle seguenti proposizioni.

Proposizione 10.3.1 *Se una soluzione ottima del problema rilassato (PL) è intera, allora essa è soluzione ottima del problema intero (PLI).*

Proposizione 10.3.2 *Sia \hat{x} una soluzione ottima (non necessariamente a componenti intere) del problema rilassato (PL) e sia \tilde{x} un punto ammissibile per il problema intero (PLI). Se $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x}$ allora il punto \tilde{x} è una soluzione ottima del problema intero (PLI).*

Le dimostrazioni delle precedenti proposizioni discendono immediatamente dal Teorema 10.2.1.

10.4 FORMULAZIONI LINEARI DI PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA

Il questo paragrafo verrà messo in evidenza che ci sono più poliedri in grado di identificare (cioè di separare dagli altri) i punti interi che costituiscono l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare Intera. In particolare verrà introdotto il concetto di “formulazione lineare” di un problema di Programmazione Lineare Intera e verrà fornita una caratterizzazione delle diverse formulazioni lineari di uno stesso problema di Programmazione Lineare Intera. Iniziamo considerando il seguente esempio di problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -5 \\ -2x_1 + 2x_2 \geq -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ intere.} \end{cases} \quad (10.4.1)$$

L'insieme ammissibile di questo problema è costituito dai punti $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ come si può facilmente dedurre dalla Figura 10.4.1

Se si denota con P il poliedro del rilassamento lineare del problema (10.4.1) cioè

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 5x_2 \geq -5, \quad -2x_1 + 2x_2 \geq -1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}, \quad (10.4.2)$$

si può riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ x \in P \cap \mathbf{Z}^2. \end{cases}$$

Lo stesso insieme ammissibile del problema intero (10.4.1) (formato quindi dai tre punti $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$) può essere ottenuto, ad esempio, sostituendo il secondo vincolo del problema intero (10.4.1) con il vincolo $-x_1 + x_2 \geq 0$ ottenendo così il

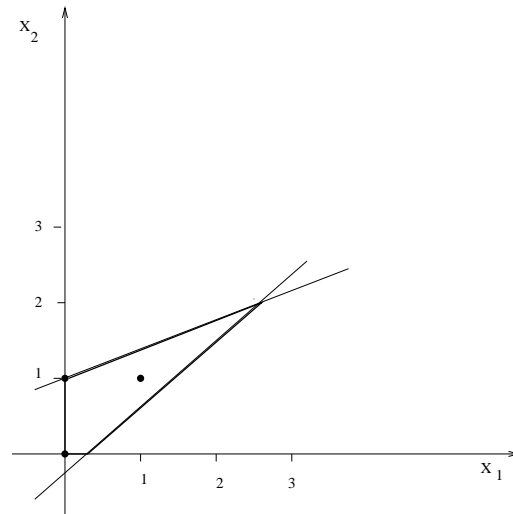


Figura 10.4.1 Regione ammissibile del problema (10.4.1)

seguinte problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -5 \\ -x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ intere.} \end{cases} \quad (10.4.3)$$

Con questa sostituzione la regione ammissibile del rilassamento lineare cambia e diventa

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 5x_2 \geq -5, -x_1 + x_2 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \quad (10.4.4)$$

ma l'insieme ammissibile di questo nuovo problema di Programmazione Lineare Intera (10.4.3) continua ad essere costituito dai soli tre punti $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ (si veda la Figura 10.4.2); quindi il problema (10.4.3), che può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ x \in P' \cap \mathbf{Z}^2, \end{cases}$$

è equivalente al problema (10.4.1).

Si possono ulteriormente variare i vincoli e ottenere gli stessi punti ammissibili per il problema intero; infatti possiamo, ad esempio, modificare il primo vincolo del problema (10.4.3) sostituendolo con il vincolo $x_2 \leq 1$, ottenendo così il seguente problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 \\ x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ intere.} \end{cases} \quad (10.4.5)$$

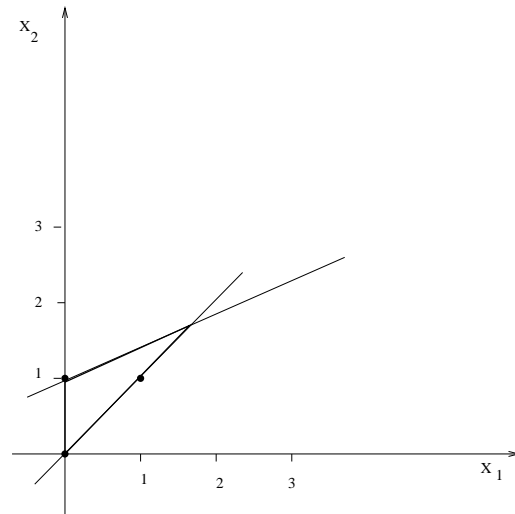


Figura 10.4.2 Regione ammissibile del problema (10.4.3)

Con questa sostituzione la regione ammissibile del rilassamento lineare cambia e diventa

$$P'' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 1, -x_1 + x_2 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \quad (10.4.6)$$

ma l'insieme ammissibile di questo nuovo problema di Programmazione Lineare Intera (10.4.5) continua ad essere costituito dai soli tre punti $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ (si veda la Figura 10.4.3); quindi il problema (10.4.5), che può essere riscritto

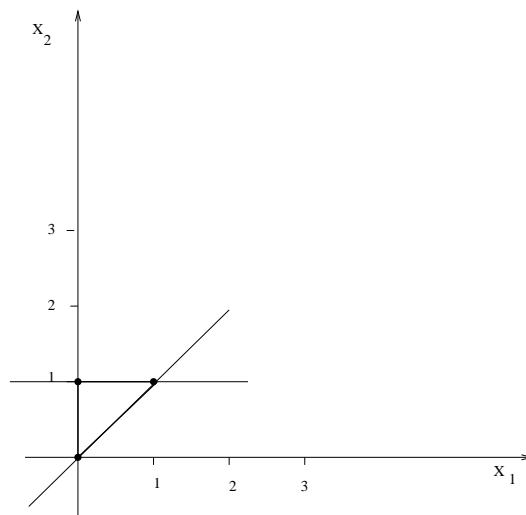


Figura 10.4.3 Regione ammissibile del problema (10.4.5)

nella forma

$$\begin{cases} \min(-x_1 - x_2) \\ x \in P'' \cap \mathbf{Z}^2 \end{cases}$$

è equivalente al problema (10.4.3).

I tre problemi (10.4.1), (10.4.3), (10.4.5) ora considerati sono equivalenti dal punto di vista della Programmazione Lineare Intera avendo essi la stessa funzione obiettivo e lo stesso insieme ammissibile. Sono però, diverse le rappresentazioni fornite. Questo concetto si può formalizzare nella seguente definizione.

Definizione 10.4.1 FORMULAZIONE LINEARE

Un poliedro P è una formulazione lineare per un problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \quad \text{intero} \end{cases}$$

se detto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, \quad x \geq 0, \quad x \text{ intero}\}$$

l'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare Intera, risulta

$$S = P \cap \mathbf{Z}^n.$$

In accordo a questa definizione, i tre problemi poliedri P , P' e P'' rispettivamente definiti in (10.4.2), (10.4.4), (10.4.6) costituiscono formulazioni lineari di uno stesso problema di Programmazione Lineare Intera.

Quindi per uno stesso problema di Programmazione Lineare Intera possono esistere più formulazioni lineari; infatti, in generale, definendo due polidri

$$\bar{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{A}x \geq \bar{b}, \quad x \geq 0\}, \quad \tilde{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x \geq \tilde{b}, \quad x \geq 0\},$$

se risulta $P \cap \mathbf{Z}^n = \bar{P} \cap \mathbf{Z}^n$, allora \bar{P} e \tilde{P} rappresentano formulazioni per uno stesso problema di Programmazione Lineare Intera. Naturalmente i rilassamenti lineari associati sono diversi; infatti se si considerano i problema rilassati

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in \bar{P} \end{cases} \quad \begin{cases} \min c^T x \\ x \in \tilde{P} \end{cases}$$

si avranno diversi valori ottimi; siano \bar{z} e \tilde{z} rispettivamente i valori ottimi di questi due problemi rilassati; se z^* è la soluzione ottima del corrispondente problema intero, ovviamente si ha

$$\bar{z} \leq z^* \quad \text{e} \quad \tilde{z} \leq z^*.$$

Quindi in entrambi i casi il valore ottimo dei due rilassamenti fornisce una limitazione inferiore (“*lower bound*”) del valore ottimo della soluzione ottima del

problema di Programmazione Lineare Intera. Se inoltre vale $\bar{P} \subseteq \tilde{P}$ risulta

$$\tilde{z} \leq \bar{z} \leq z^*,$$

e si ha quindi che il primo rilassamento fornisce un “lower bound” più stringente del valore ottimo z^* e in questo senso è da preferirsi all’altro; questo permette di definire un ordinamento delle formulazioni. In particolare, il concetto di formulazione migliore si può formalizzare nella seguente definizione.

Definizione 10.4.2 *Date due formulazioni P_1 e P_2 di un problema di Programmazione Lineare Intera, si dice che P_1 è migliore di P_2 se*

$$P_1 \subseteq P_2.$$

La definizione è giustificata dal fatto che, se risulta $P_1 \subseteq P_2$, allora la soluzione del rilassamento corrispondente a P_1 approssima meglio il valore dell’ottimo intero. Sulla base di questa definizione è possibile affermare che dato un problema di Programmazione Lineare Intera, può esistere una formulazione “ottima”, cioè una formulazione migliore, nel senso specificato dalla definizione, di qualsiasi altra formulazione lineare del problema di Programmazione Lineare Intera; tale formulazione ottima è costituita dal poliedro contenuto in tutti i poliedri che contengono la regione ammissibile del problema intero. Infatti, formalmente si ha il seguente teorema.

Teorema 10.4.1 *Sia dato un problema di Programmazione Lineare Intera*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \cap \mathbf{Z}^n \end{cases}$$

con $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$. Se A e b sono a componenti razionali, allora esiste sempre una formulazione ottima costituita da un poliedro P^ che è il più piccolo insieme convesso che contiene $P \cap \mathbf{Z}^n$.*

Se fosse noto il poliedro P^* , il problema di Programmazione Lineare Intera si potrebbe riformulare come

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P^*. \end{cases} \quad (10.4.7)$$

Negli esempi visti nelle pagine precedenti la formulazione P'' data dalla (10.4.6) è la formulazione ottima del problema di Programmazione Lineare Intera (10.4.1). È molto importante notare che il poliedro P'' definito nella (10.4.6) ha tutti vertici a componenti intere. Questo è vero in generale; infatti vale il seguente teorema.

Teorema 10.4.2 *La formulazione ottima P^* di un problema di Programmazione Lineare Intera ha tutti i vertici a componenti intere. Viceversa, se un poliedro P ha tutti i vertici interi allora esso costituisce la formulazione ottima di ogni problema di Programmazione Lineare Intera con insieme ammissibile $P \cap \mathbf{Z}^n$.*

Sarebbe molto importante conoscere P^* perché i vertici di P^* risultano essere tutti a componenti intere e quindi sarebbe sufficiente risolvere (ad esempio con il metodo del simplesso) il problema rilassato (10.4.7) ed ottenere la soluzione del problema di Programmazione Lineare Intera originario.

Questo fatto è di notevole importanza in quanto se si utilizza il metodo del simplesso per risolvere il problema rilassato, la soluzione ottenuta, che è un vertice del poliedro, sicuramente è a componenti intere.

Purtroppo però, tale formulazione ottima in generale non è nota oppure non è utilizzabile per il numero eccessivo dei vincoli (c'è una crescita esponenziale dei vincoli con la dimensione del problema). Tuttavia esistono importanti classi di problemi di Programmazione Lineare Intera per cui tale rappresentazione è nota. In particolare, si può dimostrare che alcune di queste classi sono già descritte attraverso le loro formulazioni ottime e che, quindi, il vincolo di interezza può essere trascurato. Una di queste classi è rappresentata dai problemi di assegnamento (si veda paragrafo 9.2.1), per cui è stato possibile notare (cfr. Osservazione 9.2.2) che il vincolo $x_{ij} \in \{0, 1\}$ del problema di assegnamento poteva essere rilassato con il vincolo $0 \leq x_{ij} \leq 1$ ottenendo comunque una soluzione ottima a componenti intere, cioè 0–1.

10.5 PROPRIETÀ DI INTEREZZA E TOTALE UNIMODULARITÀ

Abbiamo visto come una condizione sufficiente affinché sia possibile trovare una soluzione del problema di PLI risolvendo il suo rilassamento, è che tutti i vertici del rilassamento lineare siano interi. Alcune condizioni che assicurano tale interezza si basano sulla nozione di totale unimodularità che esaminiamo di seguito.

Definizione 10.5.1 *Una matrice A $m \times n$ di rango m si dice unimodulare se ogni sottomatrice quadrata non singolare $m \times m$ di A ha determinante pari a 1 o -1 . Si dice invece totalmente unimodulare se ogni sottomatrice quadrata non singolare di A ha determinante pari a 1 o -1 .*

Quindi una matrice $m \times n$ con $m \leq n$ e rango m si dice unimodulare se tutte le sue sottomatrici quadrate non singolari di ordine massimo hanno determinante pari a 1 o -1 . Mentre si dice totalmente unimodulare se tutte le sue sottomatrici quadrate (non solo quelle di ordine massimo) non singolari hanno determinante pari a 1 o -1 .

Si riportano di seguito due teoremi che consentono di caratterizzare le proprietà di integralità dei poliedri. Iniziamo con una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice A a componenti intere definisca per ogni b intero un poliedro in forma standard con vertici interi.

Teorema 10.5.1 *Sia A una matrice $m \times n$ di rango m a componenti intere. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché il poliedro*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

abbia tutti i vertici interi, per ogni b intero, è che la matrice A sia unimodulare.

Il teorema che segue mostra che per una matrice A a componenti intere la totale unimodularità è condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni vettore b intero il poliedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

abbia vertici a componenti intere.

Teorema 10.5.2 *Sia A una matrice $m \times n$ a componenti intere. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché il poliedro*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

abbia tutti i vertici interi, per ogni b intero, è che la matrice A sia totalmente unimodulare.

Una ovvia condizione necessaria per la totale unimodularità è che la matrice abbia tutti elementi $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ in quanto ogni elemento di A è una sottomatrice di A di ordine 1. Non è però una condizione sufficiente, infatti basta scegliere banalmente una matrice del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante pari a 2.

Si osservi comunque che la definizione di totale unimodularità non ha un'applicazione pratica. Infatti richiederebbe il calcolo di tutti i determinanti di tutte

le sue sottomatrici quadrate. Quindi è opportuno fornire una caratterizzazione alternativa della totale unimodularità che sia verificabile in tempo polinomiale. A tale scopo si riporta di seguito una condizione sufficiente per matrici che hanno elementi pari a 0, 1 o -1 . Vale infatti il seguente risultato:

Teorema 10.5.3 *Sia A una matrice $m \times n$ con elementi $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$. Allora A è totalmente unimodulare se*

1. *ogni colonna abbia al più due elementi diversi da zero.*
2. *è possibile partizionare gli indici di riga in due sottoinsiemi Q_1 e Q_2 tali che:*
 - (i) *se la colonna j contiene due elementi $a_{ij} \neq 0$ e $a_{kj} \neq 0$ dello stesso segno allora $i \in Q_1$ e $k \in Q_2$;*
 - (ii) *se la colonna j contiene due elementi $a_{ij} \neq 0$ e $a_{kj} \neq 0$ di segno opposto allora o $i, k \in Q_1$ oppure $i, k \in Q_2$.*

Dimostrazione: La dimostrazione procede per induzione. Ovviamente ogni sottomatrice di A con un solo elemento ha determinate pari a 0, 1 o -1 . Supponiamo ora che tutte le sottomatrici di A di ordine $r \leq k-1$ abbiano determinante pari a 0, 1 o -1 e dimostriamo che questo è vero anche per tutte le sottomatrici di ordine k .

Sia C una qualsiasi sottomatrice di ordine k :

- se C contiene un vettore nullo allora il suo determinante è nullo;
- se C contiene una colonna con un solo elemento $a_{ij} \neq 0$ allora il suo determinante è pari al prodotto di a_{ij} per il suo complemento algebrico. Ora, poiché $|a_{ij}| = 1$ e, per ipotesi induttiva, il complemento algebrico può assumere solo valori in $\{0, 1, -1\}$, allora anche il determinante di C può assumere valori solo in $\{0, 1, -1\}$;
- rimane il caso in cui ogni colonna di C contiene due elementi non nulli. Per l'ipotesi (ii), per ogni colonna j si ha

$$\sum_{i \in Q_1} a_{ij} = \sum_{i \in Q_2} a_{ij}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (10.5.1)$$

Sia ora d_i la i -esima riga di C . Dalla precedente equazione (10.5.1) si ha

$$\sum_{i \in Q_1} d_i - \sum_{i \in Q_2} d_i = 0,$$

ovvero una combinazione lineare di righe vale zero. Ma allora il determinante di C è nullo e questo conclude la dimostrazione.

□

Esempio 10.5.2 Applicando il Teorema 10.5.3 verifichiamo se la seguente matrice è totalmente unimodulare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sono verificate le ipotesi del Teorema 10.5.3. Esiste una partizione degli indici di riga, $Q_1 = \{1, 2, 3\}$, $Q_2 = \{4, 5, 6\}$, che soddisfa le condizioni (i) (ii), quindi la matrice è totalmente unimodulare.

Osservazione 10.5.3 Si osservi che la condizione espressa dal Teorema 10.5.3 è una *condizione sufficiente*. Questo vuol dire che esistono matrici con elementi in $\{0, 1, -1\}$ totalmente unimodulari che non soddisfano le ipotesi 1 e 2 del Teorema 10.5.3. Tuttavia è possibile dimostrare che per le matrici con elementi in $\{0, 1, -1\}$ che soddisfano la condizione 1 del Teorema 10.5.3 la condizione 2 dello stesso teorema è anche necessaria.

Esempio 10.5.4 Applicando quanto espresso nell'Osservazione 10.5.3 verifichiamo se la seguente matrice è totalmente unimodulare.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli elementi sono tutti 0,1. Inoltre, la condizione 1 è verificata, poiché ogni colonna di A ha al più due elementi non nulli. Cerchiamo di costruire la partizione degli indici di riga. Se la riga 1 $\in Q_1$ allora la riga 2 $\in Q_2$, ma la riga 3 non può stare né in Q_1 per l'elemento a_{12} né in Q_2 per l'elemento a_{13} . Quindi la matrice non è totalmente unimodulare.