7

Il metodo del simplesso

7.1 LA FORMA STANDARD

Esercizio 7.1.1 *Porre il problema di Programmazione Lineare:*

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& 2x_1 - x_3 \geq 4 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

in forma standard.

Si trasformano i vincoli di disuguaglianza in vincoli di uguaglianza introducendo le variabili di slack x_4 e di surplus x_5:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\
& 2x_1 - x_3 - x_5 = 4 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Si trasformano le variabili non vincolate in segno in variabili vincolate in segno effettuando la sostituzione $x_3 = x_3^+ - x_3^-$:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3x_1 + 2x_2 + x_3^+ - x_3^- \\
& x_1 + x_2 - x_3^+ + x_3^- = 2 \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\
& 2x_1 - x_3^+ + x_3^- - x_5 = 4 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3^+ \geq 0, \quad x_3^- \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0
\end{array}
$$

In alternativa, si sarebbe potuto procedere in un altro modo; infatti, utilizzando il primo vincolo $x_3 = x_1 + x_2 - 2$, si può eliminare la variabile x_3 ottenendo il problema di PL equivalente

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

da cui aggiungendo le variabili di slack x_4 e di surplus x_5 si ha

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

□

7.2 VERTICI E SOLUZIONI DI BASE

Esercizio 7.2.1 *Dimostrare che il vettore* $x = (1\ 0\ 0\ 1)^T$ *è un vertice del poliedro individuato dal seguente sistema di equazioni e disequazioni:*

$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Si tratta di un poliedro in forma standard. Consideriamo le colonne di A corrispondenti a componenti non nulle di x, (x_1 e x_4), cioè

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Poiché sono linearmente indipendenti, il punto dato è un vertice del poliedro. □

Esercizio 7.2.2 *Elencare i vertici del poliedro:*

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, & i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Si tratta dell'insieme ammissibile di un problema in forma standard. Quindi i vertici sono le SBA, cioè al più $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$, in questo caso, 6. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ($m = 2$) di colonne della matrice A, e verifichiamo se costituiscono una base (cioè se sono indipendenti). Tra le possibili basi dobbiamo poi individuare quelle ammissibili.
Si ottiene:

$$(1)\ I_B = \{3,4\} \qquad x_1 = x_2 = 0; \qquad \begin{cases} 3x_3 = 2 \\ -x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \frac{2}{3} \\ x_4 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$(2)\ I_B = \{2,4\} \qquad x_1 = x_3 = 0; \qquad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases},$$

$$(3)\ I_B = \{2,3\} \qquad x_1 = x_4 = 0; \qquad \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_3 = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{11}{2} \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

$$(4)\ I_B = \{1,4\} \qquad x_2 = x_3 = 0; \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 + x_4 = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$(5)\ I_B = \{1,3\} \qquad x_2 = x_4 = 0; \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(6)\ I_B = \{1,2\} \qquad x_3 = x_4 = 0; \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Possiamo riassumere schematicamente questa situazione con una tabella in cui riportiamo per ciascuna coppia di colonne la verifica se la matrice individuata è di base e se la corrispondente soluzione di base è ammissibile.

Indici delle colonne	Base	SBA
$\{1,2\}$	Sì	No
$\{1,3\}$	Sì	No
$\{1,4\}$	Sì	Sì
$\{2,3\}$	Sì	No
$\{2,4\}$	Sì	Sì
$\{3,4\}$	Sì	Sì

Quindi abbiamo solo tre soluzioni di base ammissibili (vertici) che sono:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 11/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 7.2.3 *Elencare i vertici del poliedro descritto dal sistema:*

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ &-x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ &x_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Analogo all'esercizio precedente. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ($m = 2$) di colonne della matrice A, verifichiamo se costituiscono una base ammissibile e calcoliamo la soluzione.

$$(1)\ I_B = \{3,4\} \quad x_1 = x_2 = 0; \quad \begin{cases} -x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = -5 \end{cases};$$

$$(2)\ I_B = \{2,4\} \quad x_1 = x_3 = 0; \quad \begin{cases} 2x_2 - x_4 = 1 \\ -x_2 + x_4 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_4 = 7 \end{cases};$$

$$(3)\ I_B = \{2,3\} \quad x_1 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 5/3 \\ x_3 = 7/3 \end{cases};$$

$$(4)\ I_B = \{1,4\} \quad x_2 = x_3 = 0; \quad \begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_4 = 3 \end{cases};$$

$$(5)\ I_B = \{1,3\} \quad x_2 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_3 = 3/2 \end{cases};$$

$$(6)\ I_B = \{1,2\} \quad x_3 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -3 \end{cases}.$$

Complessivamente possiamo compilare la seguente tabella:

Indici delle colonne	Base	SBA
$\{1,2\}$	sì	no
$\{1,3\}$	sì	sì
$\{1,4\}$	sì	sì
$\{2,3\}$	sì	sì
$\{2,4\}$	sì	sì
$\{3,4\}$	sì	no

Quindi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

7.3 IL CRITERIO DI OTTIMALITÀ E IL CRITERIO DI ILLIMITATEZZA

Esercizio 7.3.1 *Applicare il criterio di ottimalità e di illimitatezza alla base costituita dalle colonne 1 e 5 nel seguente problema di PL in forma standard:*

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 - x_5 = 1 \\ & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5 \end{array}$$

Denotiamo

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La matrice di base che consideriamo è:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e la matrice delle variabili fuori base è

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per applicare il criterio di ottimalità e illimitatezza dobbiamo calcolare i costi ridotti. Calcoliamo l'inversa di B:

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi i coefficienti di costo ridotto sono:

$$\gamma = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (1\ 3\ \ -2) - \frac{1}{4}(2\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (0\ 2\ \ -5)$$

I costi ridotti non sono non negativi e quindi non si può concludere niente sulla soluzione data. Inoltre, la colonna $\pi_3 = (B^{-1}N)_3 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ è positiva, quindi non possiamo concludere niente sull'illimitatezza del problema. □

Esercizio 7.3.2 *Fornendo una breve giustificazione o un controesempio, stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa: "in una soluzione ammissibile di base ottima di un problema di PL (di minimo, in forma standard) i coefficienti di costo ridotti devono essere tutti non negativi."*

Falso. Il criterio di ottimalità basato sulla non negatività dei coefficienti di costo ridotto è solo sufficiente. Sia ad esempio dato il problema di PL seguente.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6 \end{array}$$

Consideriamo la base B individuata dalle variabili $(x_4,\ x_1,\ x_6)^T$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A questa base corrisponde la soluzione di base ammissibile $(x_4,\ x_1,\ x_6)^T = (2,\ 1,\ 0)^T$ e $x_2 = x_3 = x_5 = 0$ di valore $z = 3$. I coefficenti di costo ridotto relativi sono $(-5/2,\ -7/2,\ 3/2)$, quindi in base al criterio sufficiente non possiamo concludere nulla sulla ottimalità della soluzione. La soluzione è in realtà ottima, ma il criterio di ottimalità è verificato solamente nella soluzione di base ammissibile $(x_4,\ x_1,\ x_3)^T = (2,\ 1,\ 0)^T$ e $x_2 = x_6 = x_5 = 0$ sempre di valore $z = 3$ e relativa alla base

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 7.3.3 *Considerato il problema di PL*

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(i) *si stabilisca se il punto $x^* = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 2)^T$ è una soluzione ammissibile di base ottima calcolando i coefficienti di costo ridotto.*

(ii) *Qualora x^* sia ottima, si stabilisca se la soluzione è unica.*

Innanzitutto si deve scrivere il problema in forma standard.

(i) Si calcolano i coefficienti di costo ridotto che sono $(0,\ 1,\ 1)^T \geq 0$. Si può quindi concludere che la soluzione è ottima.

(ii) Poiché i coefficienti di costo ridotto non sono strettamente positivi, non si può concludere niente sull'unicità della soluzione.

□

Esercizio 7.3.4 *Sia dato il problema di PL*

$$\begin{array}{ll} \min & -4x_1 + 9x_3 + 12x_4 - 5x_5 + 7x_6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 3 \\ & x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 6 \\ & -x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 5 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, 6 \end{array}$$

(i) *Si verifichi che le variabili* $(x_1 \ x_2 \ x_3)$ *individuano una base ottima.*

(ii) *Si determini l'intervallo di valori entro cui può variare il termine noto* b_2 *del secondo vincolo affinché la base individuata da* $(x_1 \ x_2 \ x_3)$ *rimanga ottima.*

Qual è l'espressione che lega il valore ottimo della funzione obiettivo a b_2*?*

(iii) *Si supponga di inserire una nuova variabile* $x_7 \geq 0$ *con colonna dei coefficienti* $A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e coefficiente di costo* $c_7 = 18$*. L'inserimento di questa nuova variabile consente di ottenere un vantaggio? In caso di risposta negativa, si determini il valore di* c_7 *per cui l'uso di questa variabile può essere economicamente competitivo.*

(i) La base individuata dalle variabili $(x_1 \ x_2 \ x_3)$ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La corrispondente matrice fuori base è

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possono quindi calcolare i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma = c_N - N^T(B^{-1})^T c_B = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\gamma \geq 0$, la soluzione è ottima e vale

$$x_B^* = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x_N^* = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Supponiamo che $\tilde{b}^T = (3,\ b_2,\ 5)^T$. In questo caso si tratta di verificare che la soluzione sia ancora ammissibile cioè che $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b_2 - 21 \\ 8 - b_2 \\ 2b_2 - 8 \end{pmatrix} \geq 0$$

Si individua l'intervallo $b_2 \in [21/4, 8]$. Per un valore di b_2 in questo intervallo la funzione obiettivo vale

$$f^*(b_2) = -4(4b_2 - 21) + 9(2b_2 - 8) = 12 + 2b_2.$$

(iii) L'introduzione della variabile x_7 consente di ottenere un vantaggio se la soluzione ottima cambia. Possiamo verificare se il coefficiente di costo ridotto relativo alla variabile x_7 è non negativo oppure no. Risulta:

$$\gamma_7 = c_7 - c_B^T B^{-1} A_7 = 18 - (-4\ 0\ 9) \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1.$$

Poiché $\gamma_7 > 0$ la soluzione ottenuta al punto (i) è ancora ottima per il problema aumentato; non c'è quindi alcun vantaggio nell'inserire la variabile x_7.

Si può avere un vantaggio se risulta $\gamma_7 < 0$, cioè se $c_7 - 17 < 0$. In questo caso infatti non si può concludere che la soluzione è ottima (ma nemmeno che non lo è).

□

Esercizio 7.3.5 *Sia $x^* = (1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$ una soluzione di base ammissibile per un problema di Programmazione Lineare e sia $(\gamma_1,\ \gamma_2)^T = (-1,\ 0)^T$ il vettore dei costi ridotti associato alle variabili fuori base x_3 ed x_4. Se il valore della funzione obiettivo in x^* è pari a 12, ovvero $c^T x^* = 12$ dire qual è il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $\bar{x} = (2, 3, 2, 2)^T$.*

Si ha $z = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N$ cioè $z(x^*) = c_B^T B^{-1} b = 12$ e $z(\hat{x}) = c_B^T B^{-1} b + \gamma_1 x_3 + \gamma_2 x_4$. Si ottiene quindi $z(\hat{x}) = 12 - 2 = 10$. □

Esercizio 7.3.6 *Data una soluzione ammissibile di base $\bar{x} = (1, 2, 1, 0, 0)$ di valore $z(\bar{x}) = 7$, siano $\gamma_1 = 3 + h$ e $\gamma_2 = 2$ i costi ridotti associati alle variabili fuori base x_4 ed x_5. Determinare il valore del parametro h per il quale la soluzione ammissibile $\hat{x} = (0, 1, 0, 2, 2)^T$ ha valore 5.*

Si ha

$$z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N.$$

Sappiamo che $z(\bar{x}) = c_B^T B^{-1} b = 7$. Nel punto $\hat{x}$ si ha: $z(\hat{x}) = c_B^T B^{-1} b + \gamma_1 x_4 + \gamma_2 x_5 = 7 + (3+h)\hat{x}_4 + 2\hat{x}_5 = 7 + (3+h)2 + 4$ e quindi si ottiene l'equazione:

$$2h + 17 = 5$$

da cui $h = -6$. □