# 6

# Teoria della Programmazione Lineare

## 6.1 VERTICI DI UN POLIEDRO

**Esercizio 6.1.1** *Dato il poliedro decritto dal seguente sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

*verificare se il punto* $(1, 1, 0)^T$ *è un vertice del poliedro.*

Riscriviamo innanzitutto il poliedro nella forma

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \geq -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0; \end{cases}$$

Nel punto $(1, 1, 0)^T$, che appartiene al poliedro, sono attivi il primo, il secondo e il quinto vincolo. Inoltre i vettori $(-3, 2, -5)^T$, $(-2, 3, 1)^T$ e $(0, 0, 1)^T$ corrispondenti a questi tre vincoli sono linearmente indipendenti e quindi il punto $(1, 1, 0)^T$ è un vertice del poliedro. □

**Esercizio 6.1.2** *Dato il poliedro decritto dal seguente sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 \geq -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \end{cases}$$

*verificare se il punto* $(1,1,0)^T$ *è un vertice del poliedro.*

Il punto $(1,1,0)^T$ non appartiene al poliedro in quanto il quarto vincolo è violato. □

**Esercizio 6.1.3** *Dato il poliedro decritto dal seguente sistema*

$$\begin{cases} \tau x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

*determinare per quali valori di* $\tau$ *sono vertici del polidero i punti*

a) $P(1/2,0,0)^T$

b) $Q(1,0,1)^T$.

Riscriviamo innanzitutto il sistema nella forma

$$\begin{cases} -\tau x_1 - x_2 + x_3 \geq -1 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Sostituendo il punto $P$ nel primo vincolo, si verifica che per $\tau \leq 2$ il punto soddisfa il primo vincolo; inoltre il punto soddisfa anche gli altri vincoli e quindi per $\tau \leq 2$ il punto $P$ appartiene al poliedro. Inoltre il secondo il quarto e il quinto vincolo sono attivi nel punto $P$ e i vettori $(-4 \;\; 1 \;\; 2)^T$, $(0,1,0)^T$ e $(0,0,1)^T$ corrispondenti a questi tre vincoli sono linearmente indipendenti e quindi il punto $P$ per $\tau \leq 2$ è un vertice del polidero.

b) Sostituendo le coordinate di $Q$ nel sistema si ottiene che per $\tau \leq 2$ il punto appartiene al poliedro. Inoltre nel punto $Q$ sono attivi il secondo e il quarto vincolo, mentre non sono attivi il terzo e il quinto vincolo. Pertanto affinché si abbiano tre vincoli attivi nel punto $Q$ si dovrà scegliere $\tau$ in modo che risulti attivo in $Q$ il primo vincolo e cioè $\tau = 2$. Con questa scelta di $\tau$ si hanno tre vincoli attivi, ma i vettori corrispondenti $(-2,-1,1)^T$, $(-4,1,2)^T$ e $(0,1,0)^T$ non sono linearmente indipendenti e quindi il punto $Q$ non può essere un vertice del poliedro.

□