

11

Soluzione di problemi di Programmazione Lineare Intera

11.1 ESERCIZI SULLA SOLUZIONE DI PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA

Esercizio 11.1.1 Risolvere con il metodo del Branch and Bound il seguente problema di Programmazione Lineare Intera¹

$$Prob^{(0)} \quad \begin{cases} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \text{ interi.} \end{cases}$$

Soluzione.

È un problema di massimizzazione, quindi le soluzioni dei problemi rilassati forniranno dei limiti superiori (“upper bounds”) al valore della soluzione ottima intera. Inoltre, il valore della funzione obiettivo calcolato in corrispondenza ad una soluzione ammissibile fornirà una limitazione inferiore del valore ottimo del problema originario. Per la soluzione dei problemi rilassati si può utilizzare il metodo grafico oppure utilizzare un solutore di problemi di Programmazione Lineare.

La soluzione ottima $\bar{x}^{(0)}$ del rilassamento lineare di $Prob^{(0)}$ è $\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 17/6 \end{pmatrix}$ e fornisce un “upper bound” pari a $U_0 = \bar{x}^{(0)} = 59/6 = 9.8333\dots$. Se effett-

¹cfr. A. Sassano, *Metodi e Modelli della Ricerca Operativa*, Franco Angeli, 1999.

tuiamo un semplice arrotondamento all'intero inferiore delle componenti di $\bar{x}^{(0)}$ otteniamo il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Poichè tale vettore è ammissibile per $Prob^{(0)}$, possiamo porre come prima soluzione ammissibile del problema originario (ottimo corrente) $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e quindi possiamo inizializzare il valore ottimo corrente \tilde{z} con il valore corrispondente cioè $\tilde{z} = 8$ (che è una limitazione inferiore dell'ottimo del problema intero).

Non è possibile chiudere il problema $Prob^{(0)}$ in quanto la soluzione \bar{x} non è intera e l'“upper bound” U_0 è strettamente maggiore di \tilde{z} . Si procede quindi alla separazione del problema $Prob^{(0)}$. Possiamo separare rispetto ad una qualsiasi delle variabili non intere, per semplicità separiamo rispetto alla variabile con indice più piccolo (x_1). A tale scopo, aggiungiamo ai vincoli del problema $Prob^{(0)}$, i due vincoli $x_1 \geq \lceil \bar{x}_1^{(0)} \rceil$ e $x_1 \leq \lfloor \bar{x}_1^{(0)} \rfloor$ cioè $x_1 \geq 3$ e $x_1 \leq 2$.

Si ottengono i due sottoproblemi seguenti che vengono inseriti nella lista:

$$Prob^{(1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \text{ intere} \end{array} \right. \quad Prob^{(2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 3 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \text{ intere} \end{array} \right.$$

- Estraiamo un problema dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(1)}, Prob^{(2)}\}$ dei problemi candidati. In particolare esaminiamo il problema $Prob^{(1)}$. Il rilassamento lineare del problema $Prob^{(1)}$ ha soluzione $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ e fornisce il corrispondente valore $U_1 = 8.5$.

Il problema non è eliminabile in quanto $U_1 > \tilde{z}$. La prima componente di $\bar{x}^{(1)}$ è intera mentre la seconda componente è frazionaria. Scegliamo quindi la variabile x_2 per effettuare la separazione. A tale scopo, aggiungiamo alla formulazione di $Prob^{(1)}$ i due vincoli $x_2 \leq 2$ e $x_2 \geq 3$. In tal modo, otteniamo i due problemi seguenti che inseriamo nella lista:

$$Prob^{(3)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \text{ intere} \end{array} \right. \quad Prob^{(4)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 3 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \text{ intere} \end{array} \right.$$

- Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(2)}, Prob^{(3)}, Prob^{(4)}\}$ il problema $Prob^{(2)}$. La soluzione del rilassamento lineare del problema $Prob^{(2)}$ è $\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ con valore $U_2 = 9.5$. Il problema non è eliminabile ed effettuiamo la separazione rispetto alla variabile x_2 (infatti la seconda componente di $\bar{x}^{(2)}$ è frazionaria). Dobbiamo aggiungere alla formulazione di $Prob^{(2)}$ i due vincoli $x_2 \leq 0$ e $x_2 \geq 1$. In tal modo, otteniamo i due problemi seguenti da aggiungere alla lista:

$$Prob^{(5)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 3 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \text{ intere} \end{array} \right. \quad Prob^{(6)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 3 \leq x_1 \leq 4 \\ 1 \leq x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \text{ intere} \end{array} \right.$$

- Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(3)}, Prob^{(4)}, Prob^{(5)}, Prob^{(6)}\}$ il problema $Prob^{(3)}$. La soluzione del rilassamento lineare del problema $Prob^{(3)}$ è $\bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ con valore $U_3 = 8$. Siccome risulta $U_3 = \tilde{z}$, si chiude il problema.

- Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(4)}, Prob^{(5)}, Prob^{(6)}\}$ il problema $Prob^{(4)}$. Siccome il problema $Prob^{(4)}$ non ha soluzioni ammissibili, si chiude il problema.
- Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(5)}, Prob^{(6)}\}$ il problema $Prob^{(5)}$. La soluzione del rilassamento lineare del problema $Prob^{(5)}$ è $\bar{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 3.14 \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ con valore $U_5 = 9.428 \dots$. Risulta $U_5 < \tilde{z}$, e quindi viene effettuata la separazione rispetto alla variabile x_1 di $Prob^{(5)}$. A tale scopo, si aggiungono al problema $Prob^{(5)}$ i due vincoli $x_1 \leq 3$ e $x_1 \geq 4$, ottenendo i due problemi da aggiungere alla lista:

$$Prob^{(7)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 3 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \text{ intere} \end{array} \right. \quad Prob^{(8)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 + x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 4 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \text{ intere} \end{array} \right.$$

- Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(6)}, Prob^{(7)}, Prob^{(8)}\}$ il problema $Prob^{(6)}$. Il problema $Prob^{(6)}$ non ha soluzioni ammissibili e viene chiuso.
- Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(7)}, Prob^{(8)}\}$ il problema $Prob^{(7)}$. La soluzione del rilassamento lineare del problema $Prob^{(7)}$ è $\bar{x}^{(7)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ con valore $U_7 = 9$. La soluzione $\bar{x}^{(7)}$ è intera e inoltre $U_7 > \tilde{z}$, quindi la soluzione corrente viene aggiornata: si pone $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\tilde{z} = 9$.

- Estraiamo dalla lista $\mathcal{L} = \{Prob^{(8)}\}$ il problema $Prob^{(8)}$. Il problema $Prob^{(8)}$ non ha soluzioni ammissibili e viene chiuso.
- La lista \mathcal{L} è ora vuota, il procedimento quindi termina. La soluzione ottima è data dalla soluzione corrente, ossia dalla soluzione del problema $Prob^{(7)}$.

L'Albero di Enumerazione è riportato in Figura 11.1.1.

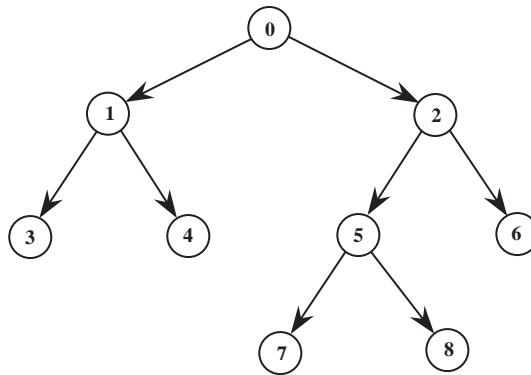


Fig. 11.1.1 Albero di enumerazione.

Esercizio 11.1.2 Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \text{ interi.} \end{cases} \quad (11.1.1)$$

Sia $\bar{x} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ la soluzione ottima del rilassamento lineare del problema (11.1.1), con valore ottimo della funzione obiettivo $\bar{z} = 41.25$.

- (i) Si effettui una operazione di separazione rispetto alla variabile x_2 generando due sottoproblemi $Prob^{(1)}$, $Prob^{(2)}$.
- (ii) La soluzione ottima del rilassamento del problema $Prob^{(1)}$ è

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{con valore ottimo} \quad \bar{z}^{(1)} = 39$$

mentre per il problema $Prob^{(2)}$ si ha

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{con valore ottimo} \quad \bar{z}^{(2)} = 41$$

Utilizzando il metodo del Branch and Bound dire se è possibile chiudere qualche problema della lista dei candidati e indicare le eventuali operazioni di separazione.

- (i) La soluzione ottima del rilassamento lineare del problema (11.1.1) non è intera. Si può separare rispetto alla variabile x_2 . Si ha $\lfloor x_2 \rfloor = 3$ e $\lceil x_2 \rceil = 4$ quindi si ottengono i due sottoproblemi:

$$Prob^{(1)} \begin{cases} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \text{ interi} \end{cases} \quad Prob^{(2)} \begin{cases} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \text{ interi} \end{cases}$$

- (ii) Per rispondere al secondo quesito, è necessario individuare una soluzione ammissibile per il problema (11.1.1) ed un valore di ottimo corrente a cui fare riferimento. Un valore ammissibile si può ottenere considerando la parte intera inferiore della soluzione ottima \bar{x} del rilassamento lineare del problema (11.1.1); in particolare si ha $\lfloor \bar{x}_1 \rfloor = 2$ e $\lfloor \bar{x}_2 \rfloor = 3$; poiché il punto $(2, 3)^T$ così ottenuto è ammissibile per il problema originario (11.1.1), si può prendere $\tilde{x} = (2, 3)^T$ come ottimo corrente con $\tilde{z} = 34$ valore ottimo corrispondente. La soluzione ottima del rilassamento lineare del problema

$Prob^{(1)}$ è intera con valore ottimo $\bar{z}^{(1)} > \bar{z}$. Quindi si aggiorna l'ottimo corrente e si pone pari a 39. Il problema $Prob^{(2)}$ non ha soluzione intera e $\bar{z}^{(2)} = 41$ risulta maggiore dell'ottimo corrente; quindi il problema $Prob^{(2)}$ non può essere chiuso. Si deve ulteriormente separare rispetto alla variabile x_1 . Si generano quindi due problemi $Prob^{(3)}$ e $Prob^{(4)}$ inserendo i vincoli $x_1 \leq 1$, $x_1 \geq 2$:

$$Prob^{(3)} \left\{ \begin{array}{l} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_1, x_2 \text{ interi} \end{array} \right. \quad Prob^{(4)} \left\{ \begin{array}{l} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_1, x_2 \text{ interi} \end{array} \right.$$

La lista dei problemi candidati è $\{Prob^{(3)}, \ Prob^{(4)}\}$.

Esercizio 11.1.3 Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare Intera

$$\left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \text{ interi} \end{array} \right. \quad (11.1.2)$$

Sia $\bar{x} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ la soluzione ottima del rilassamento lineare del problema (11.1.2), con valore ottimo della funzione obiettivo $\bar{z} = 14/5$.

- (i) Elencare tutti i possibili modi di separare il problema e generare la lista di problemi candidati.
- (ii) Dire se è possibile chiudere qualche problema della lista dei candidati.
- (i) Poiché nella soluzione ottima sono frazionarie entrambe le componenti, si può separare il problema sia rispetto a x_1 (ottenendo i problemi $Prob^{(1)}$ e $Prob^{(2)}$), sia rispetto a x_2 (ottenendo i problemi $Prob^{(3)}$ e $Prob^{(4)}$). Risulta $\lfloor \bar{x}_1 \rfloor = 1$, $\lceil \bar{x}_1 \rceil = 2$ e $\lfloor \bar{x}_2 \rfloor = 0$, $\lceil \bar{x}_2 \rceil = 1$ e quindi si ottengono i sottoproblemi:

$$Prob^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad Prob^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$Prob^{(3)} \left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0, \end{array} \right. \quad Prob^{(4)} \left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right.$$

La lista dei problemi candidati è costituita da

$$\{Prob^{(1)}, \ Prob^{(2)}, \ Prob^{(3)}, \ Prob^{(4)}\}.$$

- (ii) Osserviamo che il problema (11.1.2) è di minimizzazione, quindi si deve fare riferimento a “lower bound” per il valore ottimo. Per stabilire se è possibile chiudere qualche problema è necessario individuare una soluzione ammissibile per il problema (11.1.2) e quindi il valore dell’ottimo corrente. Osserviamo inoltre che, in questo caso, una soluzione ammissibile non si può trovare (come è stato fatto nell’esercizio precedente) approssimando all’intero inferiore la soluzione \bar{x} . Infatti, il punto $(1, 0)^T$ che si otterrebbe non è ammissibile. Una possibile soluzione ammissibile del problema (11.1.2) si determina comunque facilmente: possiamo considerare $\tilde{x} = (1, 1)^T$ con valore $\tilde{z} = 4$. Per la soluzione ottima dei sottoproblemi utilizziamo il metodo grafico. Il problema $Prob^{(1)}$ è raffigurato in Figura 11.1.2 dove è evi-

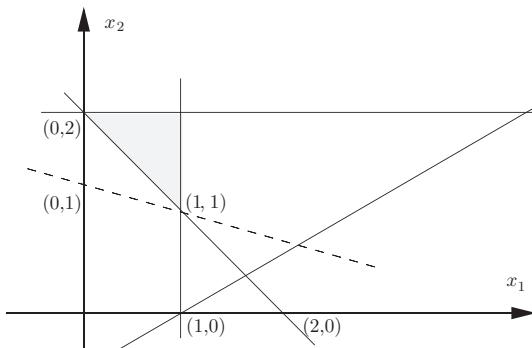
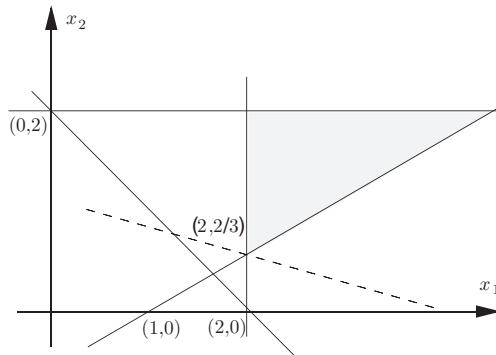


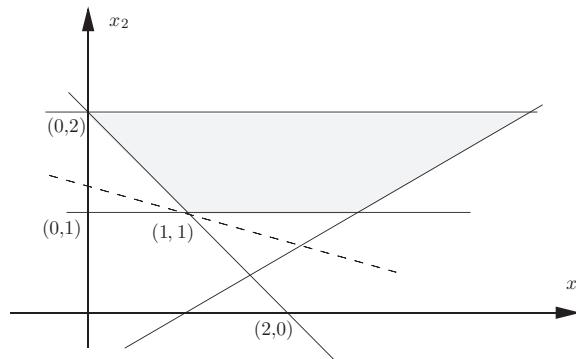
Fig. 11.1.2 Soluzione grafica del Problema $Prob^{(1)}$ dell’Esercizio 11.1.3.

denziato l’insieme ammissibile e la curva di livello della funzione obiettivo corrispondente al valore ottimo.

Il rilassamento lineare del problema $Prob^{(1)}$ ha soluzione ottima intera $\bar{x}^{(1)} = (1, 1)^T$ con valore ottimo della funzione obiettivo pari a $\bar{z}^{(1)} = 4$. Quindi può essere chiuso.

Fig. 11.1.3 Soluzione grafica del Problema $Prob^{(2)}$ dell'Esercizio 11.1.3.

Il rilassamento lineare del problema $Prob^{(2)}$ ha soluzione ottima frazionaria $\bar{x}^{(2)} = (2, 2/3)^T$ con valore ottimo della funzione obiettivo $z^{(2)} = 4$ (si veda la Figura 11.1.3). Anche il problema $Prob^{(2)}$ può essere chiuso.

Fig. 11.1.4 Soluzione grafica del Problema $Prob^{(4)}$ dell'Esercizio 11.1.3.

Il rilassamento lineare problema $Prob^{(3)}$ ha regione ammmissibile vuota, quindi può essere chiuso.

Il rilassamento lineare problema $Prob^{(4)}$ ha soluzione ottima intera $\bar{x}^{(4)} = (1, 1)^T$ con valore ottimo della funzione obiettivo pari a $\bar{z}^{(4)} = 4$ (si veda La Figura 11.1.4) e quindi può essere chiuso.

Si può concludere che la soluzione ottima è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con valore 4.

Esempio 11.1.4 Risolvere con il metodo del Branch and Bound il seguente problema di knapsack binario:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3.1x_1 + 4x_2 - 3.7x_3 + 4.1x_4 + 1.3x_5 - 4x_6 - 2.2x_7 \\ & 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 2 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Innanzitutto si fissano $x_2 = 1$ (ricordandoci di sommare 4 al termine noto del vincolo), $x_6 = 0$ e $x_7 = 0$. Inoltre si definisce una nuova variabile \hat{x}_3 che sostituisce x_3 (ricordandoci di sommare 1 al termine noto del vincolo). Si deve risolvere il problema nelle variabili rimanenti. Si riordinano le variabili in modo decrescente rispetto al rapporto peso-ingombro c_k/a_k (rinominandole con y) e si aumenta di 5 il valore del termine noto; si ottiene il seguente problema (in cui si sono sostituite \hat{x}_3 con y_1 , x_1 con y_2 , x_4 con y_3 , x_5 con y_4)

$$Prob^{(0)} \left\{ \begin{array}{l} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

Inizializzazione

Una soluzione del rilassamento lineare è data da

$$\bar{y}^{(0)} = \left(1, 1, \frac{7-4}{4}, 0 \right)^T = \left(1, 1, \frac{3}{4}, 0 \right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_0 = 9.875$. Siccome $\bar{y}^{(0)}$ non è intera, essa non può essere la soluzione del problema di knapsack binario. Per inizializzare l'ottimo corrente è sufficiente ottenere una soluzione ammissibile intera, approssimando all'intero inferiore la componente frazionaria, ovvero $\tilde{y} = (1, 1, 0, 0)^T$ ed il valore dell'ottimo corrente è $\tilde{z} = 6.8$. Siccome risulta $6.8 = \tilde{z} < U_0 = 9.875$, \tilde{y} non è ottimo.

Si separa rispetto alla variabile y_3 e si ottengono i due sottoproblemi:

$$Prob^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_3 = 0 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

$$Prob^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_3 = 1 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

Si inizializza la lista \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \{ Prob^{(1)}, Prob^{(2)} \}.$$

Prima iterazione

Si estrae $Prob^{(1)}$ dalla lista:

$$\mathcal{L} = \{ Prob^{(2)} \}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(1)} = (1, 1, 0, 1)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_1 = 8.1$. Poiché $U_1 = 8.1 > 6.8 = \tilde{z}$ e $\bar{y}^{(1)}$ è intera, si aggiorna l'ottimo corrente $\tilde{y} = \bar{y}^{(1)}$ e $\tilde{z} = 8.1$ e si chiude il $Prob^{(1)}$.

Seconda iterazione

Si estrae $Prob^{(2)}$ dalla lista:

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(2)} = \left(1, \frac{2}{3}, 1, 0\right)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_2 = 9.86667$. Poiché $U_2 = 9.86667 > 8.1 = \tilde{z}$ e $\bar{y}^{(2)}$ non è intera, si separa rispetto alla variabile y_2 e si ottengono i seguenti due sottoproblemi:

$$Prob^{(3)} \left\{ \begin{array}{l} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_3 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

$$Prob^{(4)} \left\{ \begin{array}{l} \max 3.7y_3 + 3.1y_2 + 4.1y_3 + 1.3y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 7 \\ y_3 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

e si inseriscono nella lista:

$$\mathcal{L} = \left\{ Prob^{(3)}, Prob^{(4)} \right\}.$$

Terza iterazione

Si estrae $Prob^{(3)}$ dalla lista:

$$\mathcal{L} = \left\{ Prob^{(4)} \right\}.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(3)} = (1, 0, 1, 1)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_3 = 9.1$. Poiché $U_3 = 9.1 > 8.1 = \tilde{z}$ e $\bar{y}^{(3)}$ è intera, si aggiorna l'ottimo corrente $\tilde{y} = \bar{y}^{(3)}$ e $\tilde{z} = 9.1$ e si chiude il $Prob^{(3)}$.

Quarta iterazione

Si estrae $Prob^{(4)}$ dalla lista:

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Si ottiene:

$$\bar{y}^{(4)} = (0, 1, 1, 0)^T$$

in corrispondenza della quale abbiamo l'upper bound $U_4 = 7.2$. Poiché $U_4 = 7.2 < \tilde{z}$ si chiude il $Prob^{(4)}$.

Quinta iterazione

La lista \mathcal{L} è vuota, quindi si ha

$$y^* = \tilde{y} = \bar{y}^{(3)} = (1, 0, 1, 1)^T$$

con valore ottimo pari a 9.1. Nelle variabili originarie la soluzione ottima è $x^* = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)^T$. (Si ricorda che siccome $\hat{x}_3^* = 1$ allora $x_3^* = 0$). \square

Sommario

1	Introduzione	1
2	La Programmazione Matematica	3
2.1	Problemi di Programmazione Matematica	3
3	Modelli di Programmazione Lineare	5
3.1	Modelli di allocazione ottima di risorse	5
3.2	Modelli di miscelazione	14
3.3	Modelli di trasporto	19
4	Il linguaggio di modellizzazione algebrica AMPL	25
4.1	Esercizi di formulazioni mediante il linguaggio AMPL	25
5	La Programmazione Lineare	31
5.1	Interpretazione geometrica di un Problema di Programmazione Lineare	31
6	Teoria della Programmazione Lineare	43
6.1	Vertici di un poliedro	43
7	Il metodo del simplesso	45

7.1	La forma standard	45
7.2	Vertici e Soluzioni di Base	46
7.3	Il criterio di ottimalità e il criterio di illimitatezza	49
7.4	Il metodo del simplex	54
8	La dualità nella Programmazione Lineare	73
8.1	Teoria della dualità	73
9	Modelli di Programmazione Lineare Intera	85
9.1	Modelli di Programmazione Lineare Intera	85
10	Teoria della Programmazione Lineare Intera	95
11	Soluzione di problemi di Programmazione Lineare Intera	97
11.1	Esercizi sulla soluzione di problemi di Programmazione Lineare Intera	97