

7.4.2 Criterio di illimitatezza

Se il criterio di ottimalità non è verificato il metodo del simplesso cerca di capire se il problema da risolvere sia illimitato inferiormente.

Il fallimento del criterio di ottimalità implica:

$$\{i \in \{1, \dots, n-m\} : \gamma_i < 0\} \neq \emptyset.$$

In questa situazione si può considerare il seguente criterio sufficiente di illimitatezza (inferiore) del problema (7.3.1).

Teorema 7.4.2 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema (7.3.1). Se per qualche indice $i \in \{1, \dots, n-m\}$ abbiamo che:*

- (i) $\gamma_i < 0$
- (ii) *la colonna i -esima della matrice $B^{-1}N$ è tutta non positiva, cioè $(B^{-1}N)_i \leq 0_m$,*

allora il problema (7.3.1) è illimitato inferiormente.

Dimostrazione: La dimostrazione è costruttiva. Facciamo cioè vedere che, nelle ipotesi poste, possiamo trovare una semiretta di punti $x(\rho)$, con $\rho \geq 0$, sempre contenuta nell'insieme ammissibile e tale che il valore della funzione obiettivo $c^T x(\rho)$ diminuisca indefinitamente al crescere di ρ . Consideriamo un vettore del tipo $x(\rho)$, con $\rho \geq 0$, dato da:

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}N x_N(\rho)$$

$$x_N(\rho) = \rho e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-esima componente.}$$

Per definizione, il vettore $x(\rho)$ soddisfa il vincolo $Ax(\rho) = b$. Si tratta di una soluzione ammissibile se risulta anche $x_B(\rho) \geq 0$, $x_N(\rho) \geq 0$. Per valori positivi di ρ abbiamo che, ovviamente risulta $x_N(\rho) \geq 0$. D'altra parte

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}N x_N(\rho) = B^{-1}b - \rho(B^{-1}N)_i \geq 0_m,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla (ii). Quindi sono verificati i vincoli del problema (7.3.1). Il valore della funzione obiettivo in $x(\rho)$ è

$$c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \gamma_i \rho.$$

Da ciò si vede, tenendo conto che $\gamma_i < 0$ per la (i), che, al crescere di ρ , la funzione obiettivo del problema (7.3.1) può assumere valori piccoli a piacere in punti ammissibili. \square

Esempio 7.4.4 Consideriamo il problema di PL seguente.

$$\begin{array}{rcccccccl} \min & -x_1 & - & x_2 & & & & & \\ & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & = & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = 1 \\ & & & & & & & x & \geq 0. \end{array}$$

Consideriamo la base formata dalle colonne 1 e 4 ($I_B = \{1, 4\}$ e $I_N = \{2, 3\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (-1, 0)^T, \quad c_N = (-1, 0)^T, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice $B^{-1}N$ e i coefficienti ridotti

$$\begin{aligned} B^{-1}N &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma^T &= c_N^T - c_B^T B^{-1}N = (-2, 1). \end{aligned}$$

Notiamo che in corrispondenza al coefficiente ridotto della prima variabile non in base (x_2), che è negativo, la prima colonna della matrice $B^{-1}N$ contiene solo elementi non positivi. Quindi possiamo concludere che il problema è illimitato inferiormente.

7.4.3 Determinazione di una nuova base ammissibile

Data una soluzione di base ammissibile

$$\bar{x} : \begin{cases} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0_{n-m} \end{cases}$$

del problema (7.3.1), nel caso in cui i criteri di ottimalità ed illimitatezza, applicati ad \bar{x} , non siano soddisfatti, il metodo del simpleso cerca di determinare una nuova soluzione di base ammissibile o, almeno, una nuova base ammissibile del problema.

Nel seguito, per semplicità, le colonne della matrice $B^{-1}N$ saranno indicate da $\{\pi_1, \dots, \pi_{n-m}\}$, cioè:

$$B^{-1}N = (\pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Come già osservato se il criterio di ottimalità non è soddisfatto si ha:

$$\left\{ i \in \{1, \dots, n-m\} : \gamma_i < 0 \right\} \neq \emptyset. \quad (7.4.6)$$

Mentre se non è soddisfatto il criterio di illimitatezza, allora per ogni indice $h \in \{1, \dots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$ si ha:

$$\left\{ k \in \{1, \dots, m\} : (\pi_h)_k > 0 \right\} \neq \emptyset. \quad (7.4.7)$$

Perciò in questa sezione si considererà il caso in cui sia la (7.4.6) sia la (7.4.7) sono sempre verificate.

Falliti i due criteri, il metodo del simplesso cerca di costruire una nuova soluzione di base ammissibile del problema (7.3.1), cioè un punto

$$\tilde{x} : \begin{cases} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{cases}$$

che, per essere diverso da \bar{x} , *deve avere almeno una componente del vettore \tilde{x}_N è diversa da zero*. Infatti, se $\tilde{x}_N = 0_{n-m}$, allora $\tilde{x}_B = B^{-1}b$ ed $\tilde{x} = \bar{x}$.

L'idea base del Metodo del Simplexso è quella di modificare *una sola componente del vettore x_N* , ad esempio l' h -esima (ricordando la definizione di x_N si ha $(x_N)_h = x_{j_{m+h}}$), portandola da zero ad un valore positivo ρ . Formalmente viene considerata la seguente semiretta di punti:

$$x(\rho) : \begin{cases} x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho B^{-1}N e_h \\ x_N(\rho) = \rho e_h \end{cases} \quad (7.4.8)$$

dove ρ è un numero reale non negativo, e_h è l' h -esimo vettore unitario con $n-m$ componenti e l'espressione del sottovettore $x_B(\rho)$ è data dalla (7.4.2) che nasce dalla necessità di soddisfare i vincoli di uguaglianza del problema originario.

Dopo aver definito il generico punto $x(\rho)$ rimangono da risolvere le due seguenti questioni:

- quale variabile fuori base modificare, cioè come scegliere l'indice h ;
- quanto variare la variabile fuori base scelta, cioè quale valore assegnare allo scalare ρ .

Scelta dell'indice h

Per quanto riguarda la scelta dell'indice h , ovvero di quale variabile fuori base modificare, il Metodo del Simplex fa riferimento al fatto di cercare di determinare dei nuovi punti in cui la funzione obiettivo sia diminuita (o, al peggio non sia aumentata). In particolare il seguente teorema indica una scelta opportuna per l'indice h

Teorema 7.4.3 *Data una matrice di base ammissibile B del problema (7.3.1). Sia \bar{x} la soluzione di base ammissibile associata e sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice $h \in \{1, \dots, n - m\}$ è tale che*

$$\gamma_h \leq 0,$$

allora, il punto $x(\rho)$ definito dalla (7.4.8) con $\rho \geq 0$, ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello di \bar{x} , cioè

$$c^T x(\rho) \leq c^T \bar{x}.$$

Dimostrazione: Utilizzando l'espressione di $x_B(\rho)$ e di $x_N(\rho)$ date dalla (7.4.8), si ha:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \gamma^T e_h,$$

ricordando che $\gamma^T e_h = \gamma_h$ e che, per ipotesi, $\gamma_h \leq 0$, si ottiene:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \gamma_h \leq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}$$

e quindi che il valore della funzione obiettivo in $x(\rho)$ è minore o uguale al valore della funzione obiettivo in \bar{x} . \square

Una semplice conseguenza del precedente teorema è il seguente corollario.

Corollario 7.4.5 *Data una matrice di base ammissibile B del problema (7.3.1). Sia \bar{x} la soluzione di base ammissibile associata e sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice $h \in \{1, \dots, n - m\}$ è tale che*

$$\gamma_h < 0,$$

allora, il punto $x(\rho)$ definito dalla (7.4.8) con $\rho > 0$, ha un valore della funzione obiettivo inferiore a quello di \bar{x} , cioè

$$c^T x(\rho) < c^T \bar{x}.$$

Scelta del valore dello scalare ρ

Il valore dello scalare ρ , oltre ad indicare il valore della variabile fuori base scelta, influenza anche il valore delle variabili di base. Perciò nello scegliere il valore di ρ si deve prima di tutto tener conto della ammissibilità del punto prodotto $x(\rho)$. Il passo successivo è quello di far vedere che esiste un valore $\bar{\rho}$ che permette di identificare un punto $x(\bar{\rho})$ che è una soluzione di base ammissibile (e quindi un vertice) del problema (7.3.1).

Il teorema che segue riporta la scelta dello scalare $\bar{\rho}$ sulla base del cosiddetto *criterio del rapporto minimo*.

Teorema 7.4.4 *Data una matrice di base ammissibile $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_m})$ del problema (7.3.1). Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e siano $\bar{\rho}$ lo scalare e k l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}. \quad (7.4.9)$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ (con $x(\rho)$ definito da (7.4.8)) è una soluzione di base ammissibile del problema (7.3.1) e la matrice di base ammissibile \tilde{B} associata è data da:

$$\tilde{B} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m}), \quad (7.4.10)$$

ovvero

$$\tilde{x} : \begin{cases} \tilde{x}_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1}b \\ \tilde{x}_{\tilde{N}} = 0_{n-m}, \end{cases}$$

dove

$$\tilde{x}_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{j_1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_{k-1}} \\ \tilde{x}_{j_{m+h}} \\ \tilde{x}_{j_{k+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_m} \end{pmatrix} \quad \tilde{x}_{\tilde{N}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_{m+h-1}} \\ \tilde{x}_{j_k} \\ \tilde{x}_{j_{m+h+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_n} \end{pmatrix}.$$

Omettiamo per brevità la dimostrazione di questo teorema.

Come già anticipato, la scelta dell'indice k secondo la (7.4.9) viene usualmente denominata scelta basata sul *criterio del rapporto minimo*.

Osservazione 7.4.6 L'interpretazione del Teorema 7.4.4 è la seguente: supponiamo di avere una base ammissibile B e supponiamo che non sia soddisfatto il criterio di ottimalità né quello di illimitatezza. Allora, se si considera una nuova soluzione di base corrispondente alla base \tilde{B} ottenuta facendo entrare nella base B una qualunque variabile alla quale è associato un costo ridotto negativo e facendo uscire una variabile scelta secondo il criterio del rapporto minimo (7.4.9) indicato dal Teorema 7.4.4, questa nuova soluzione è ammissibile e ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello della soluzione di base precedente.

Osservazione 7.4.7 Nel criterio del rapporto minimo (7.4.9) il minimo può essere raggiunto in corrispondenza a più di un indice, ovvero l'indice k può non essere univocamente determinato. In questo caso si può fare uscire dalla base una qualunque delle variabili in corrispondenza alle quali si è raggiunto il minimo. È facile verificare che in questo caso la nuova soluzione di base è degenera. Più precisamente saranno nulle tutte le componenti della soluzione di base corrispondenti agli indici per cui si è raggiunto il minimo nella (7.4.9) (oltre, ovviamente alle componenti non in base).

Osservazione 7.4.8 Dal criterio del rapporto minimo (7.4.9) si deduce facilmente che $\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k}$ è nullo se e solo se $(B^{-1}b)_k = 0$. Di conseguenza, una *condizione necessaria* per avere $\bar{\rho} = 0$ è che risulti $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i , ovvero che la soluzione \bar{x} associata alla base B sia *degenera*. In tal caso, si ha che la k -esima componente di \tilde{x}_B e l' h -esima componente di \tilde{x}_N hanno entrambe valore zero. Pertanto, il vettore \tilde{x} , ottenuto da \tilde{x} scambiando tali componenti, coincide con \bar{x} , ovvero

$$\tilde{x} = \bar{x}.$$

Si osservi inoltre che in questo caso la nuova soluzione di base ammissibile coincide con la vecchia mentre la nuova base ammissibile \tilde{B} è diversa dalla vecchia base B (si veda l'Osservazione 7.2.14).

A questo punto sorge naturale chiedersi se la condizione $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i , ovvero che la soluzione è degenera, è anche una *condizione sufficiente* affinché $\bar{\rho}$ sia nullo. La risposta è negativa: infatti è possibile che il valore $\bar{\rho}$ sia diverso da zero in corrispondenza ad una soluzione degenera. Dalla definizione di $\bar{\rho}$ data dalla (7.4.9) si deduce che tale situazione si verifica quando ad ogni componente nulla del vettore $B^{-1}b$, corrisponde una componente *non positiva* di π_h , ovvero $(\pi_h)_i \leq 0$.

Dalla precedenti osservazioni segue il seguente corollario del Teorema 7.4.4

Corollario 7.4.9 Sia B una matrice di base ammissibile del problema (7.3.1) associata ad un vertice \bar{x} non degenere. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e siano $\bar{\rho}$ lo scalare e k l'indice dati da:

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}.$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ (con $x(\rho)$ definito da (7.4.8)) è una soluzione di base ammissibile del problema (7.3.1) tale che:

$$c^T \tilde{x} < c^T \bar{x}.$$

7.4.4 Calcolo della nuova matrice $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ e del nuovo vettore $\tilde{B}^{-1}b$: operazione di pivot

I teoremi visti nel paragrafo precedente mostrano che, data una base ammissibile B , se non è verificato il criterio sufficiente di ottimalità né quello sufficiente di illimitatezza è sempre possibile determinare una nuova base ammissibile \tilde{B} , data dalla (7.4.10), a cui corrisponde un vertice con un valore della funzione obiettivo non superiore rispetto al valore precedente. In linea di principio possiamo a questo punto calcolare *ex novo* \tilde{B}^{-1} , e quindi $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ e $\tilde{B}^{-1}b$ che sono le quantità necessarie per calcolare il nuovo vertice ed per effettuare i nuovi test di ottimalità e di illimitatezza. Questa procedura non è però realizzabile in pratica se non per problemi di piccole dimensione. Infatti, per calcolare l'inversa di una matrice quadrata $m \times m$ (quale è la \tilde{B}) occorre eseguire un numero di moltiplicazioni approssimativamente proporzionale a m^3 , e questo numero diventa praticamente eccessivo per molti problemi che si incontrano nella pratica. Bisogna inoltre tenere conto che nel risolvere un problema di PL bisogna passare, in genere, per molte basi prima di arrivare l'ottimo; bisognerebbe cioè calcolare molte inverse per risolvere un singolo problema. Questa considerazione ci spingono a porci il problema se sia possibile calcolare in maniera più semplice, a partire da B^{-1} , $B^{-1}N$ e $B^{-1}b$, le analoghe quantità nell'iterazione successiva: \tilde{B}^{-1} , $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ e $\tilde{B}^{-1}b$. La risposta è affermativa, e per avere un'idea intuitiva di come ciò sia possibile si può notare che questo problema è equivalente a passare in maniera efficiente dalla *forma canonica* rispetto alla matrice di base ammissibile B del problema (7.3.1):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ I_m x_B + B^{-1}N x_N &= B^{-1}b \\ x_B &\geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{7.4.11}$$

alla *forma canonica* rispetto alla nuova matrice di base ammissibile \tilde{B} :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ I_m x_{\tilde{B}} + \tilde{B}^{-1} \tilde{N} x_{\tilde{N}} &= \tilde{B}^{-1} b \\ x_{\tilde{B}} \geq 0_m, \quad x_{\tilde{N}} &\geq 0_{n-m}. \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

in cui compaiono la matrice $\tilde{B}^{-1} \tilde{N}$ ed il vettore $\tilde{B}^{-1} b$.

Per notare meglio le differenze tra le due precedenti forme canoniche, conviene riscrivere la forma canonica (7.4.11) in funzione dei sottovettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$ (che, ricordiamo, si ottengono dai vettori x_B , x_N scambiando la k -esima componente in base con l' h -esima componente fuori base).

Indicando, come al solito, con e_i , con $i = 1, \dots, m$, i versori unitari m -dimensionali e con π_i , con $i = 1, \dots, n - m$, le colonne della matrice $B^{-1}N$, la forma canonica (7.4.11) può essere riscritta nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_m \end{pmatrix} x_B + \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_{n-m} \end{pmatrix} x_N &= B^{-1} b \\ x_B \geq 0_m, \quad x_N &\geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Esplicitando i prodotti matrici-vettori dei vincoli di uguaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ e_1 x_{j_1} + \dots + e_k x_{j_k} + \dots + e_m x_{j_m} + \\ & + \pi_1 x_{j_{m+1}} + \dots + \pi_h x_{j_{m+h}} + \dots + \pi_{n-m} x_{j_n} = B^{-1} b \\ x_B \geq 0_m, \quad x_N &\geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Scambiando le posizioni dei termini $e_k x_{j_k}$ e $\pi_h x_{j_{m+h}}$ si ha:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ e_1 x_{j_1} + \dots + \pi_h x_{j_{m+h}} + \dots + e_m x_{j_m} + \\ & + \pi_1 x_{j_{m+1}} + \dots + e_k x_{j_k} + \dots + \pi_{n-m} x_{j_n} = B^{-1} b \\ x_B \geq 0_m, \quad x_N &\geq 0_{n-m}, \end{aligned}$$

utilizzando i sottovettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_{k-1} & \pi_h & e_{k+1} & \cdots & e_m \end{pmatrix} x_{\tilde{B}} + \\ & + \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_{h-1} & e_k & \pi_{h+1} & \cdots & \pi_{n-m} \end{pmatrix} x_{\tilde{N}} = B^{-1} b \\ x_{\tilde{B}} \geq 0_m, \quad x_{\tilde{N}} &\geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Da questa formulazione si può ottenere la forma canonica (7.4.12), effettuando un'operazione sui vincoli di uguaglianza che permetta di ottenere un sistema lineare *equivalente* in cui le colonne e_i , con $i = 1, \dots, m$ e $i \neq k$, siano rimaste

immutate e la colonna π_h sia trasformata nel versore e_k . Come è noto premoltiplicando i termini di destra e di sinistra di un sistema di equazioni con un matrice invertibile si ottiene un sistema *equivalente*, ovvero un sistema che ha le stesse soluzioni.

Sulla base delle precedenti considerazioni, introduciamo la seguente matrice $m \times m$, detta *matrice di pivot* che è data da

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_1/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -(\pi_h)_2/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{k-1}/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{k+1}/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{m-1}/(\pi_h)_k & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_m/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.4.13)$$

\uparrow
 k - esima colonna

Notiamo che la matrice T è ottenuta dalla matrice identità $m \times m$, sostituendo alla k -esima colonna, una colonna ottenibile a partire dagli elementi della h -esima colonna della matrice $B^{-1}N$. L'elemento $(\pi_h)_k$ viene detto *elemento di pivot*.

Grazie alla sua espressione, la matrice T presenta interessanti proprietà. Alcune di queste sono descritte dal seguente teorema.

Teorema 7.4.5 *Sia T la matrice data dalla (7.4.13). La matrice T è invertibile ed è tale che:*

$$Te_i = e_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq k, \quad (7.4.14)$$

$$T\pi_h = e_k. \quad (7.4.15)$$

Dimostrazione: Il fatto che sia invertibile si può provare osservando che la sua

inversa è data da:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & (\pi_h)_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\pi_h)_m & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.4.16)$$

\uparrow
 k - esima colonna

Le proprietà (7.4.14) e (7.4.15), possono essere provate per verifica diretta. \square

Il prossimo teorema mostra che, attraverso la matrice T , si possono calcolare direttamente il vettore $\tilde{B}^{-1}b$ e la matrice $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ senza utilizzare (e quindi senza costruire e memorizzare) la matrice \tilde{B}^{-1} .

Teorema 7.4.6 *Sia T la matrice data dalla (7.4.13). Allora si ha:*

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}b &= T(B^{-1}b) \\ \tilde{B}^{-1}\tilde{N} &= T(\pi_1, \dots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \dots, \pi_{n-m}). \end{aligned}$$

Omettiamo per brevità la dimostrazione di questo teorema.

Una conseguenza immediata del precedente teorema e della proprietà (7.4.15) è il seguente corollario.

Corollario 7.4.10 *Sia T la matrice data dalla (7.4.13). Allora si ha:*

$$(e_k \mid \tilde{B}^{-1}\tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1}b) = T(\pi_h \mid \pi_1 \cdots \pi_{h-1} e_k \pi_{h+1} \cdots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b).$$

Il precedente corollario e la particolare struttura della matrice T mostrano che il vettore $\tilde{B}^{-1}b$ e la matrice $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ possono essere ottenute effettuando alcune semplici operazioni sulle righe della matrice:

$$M = (\pi_h \mid \pi_1 \cdots \pi_{h-1} e_k \pi_{h+1} \cdots \pi_{n-m} \mid B^{-1}b).$$

Infatti si verifica facilmente che l'applicazione della matrice T equivale al seguente procedimento: si parte dalla matrice M e si effettua la seguente *operazione di*

*pivot*¹ sull'elemento $(\pi_h)_k$:

(a) si divide la riga k -esima di M per $(\pi_h)_k$;

(b) si somma a ciascuna riga i -esima di M (con $i \neq k$), la riga k -esima ottenuta al precedente punto (a) moltiplicata per l'elemento $-(\pi_h)_i$

Al termine di questa operazione si ottiene la matrice

$$\left(e_k \mid \tilde{B}^{-1}\tilde{N} \mid \tilde{B}^{-1}b \right).$$

¹Lo studente riconoscerà in questa operazione la procedura base del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan per la soluzione di sistemi di equazioni lineari

7.4.5 Struttura dell'algoritmo ed esempi

Come abbiamo già ampiamente osservato, la Fase II del metodo del simplesso, a partire da una soluzione di base ammissibile, iterativamente effettua le seguenti operazioni:

1. verifica se la soluzione di base ammissibile corrente è una soluzione ottima e in caso affermativo si arresta;
2. verifica se il problema è illimitato (inferiormente) e in caso affermativo si arresta;
3. se nessuna delle precedenti verifiche ha avuto esito positivo, costruisce una nuova base ammissibile.

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito ed analizzato in dettaglio questi tre elementi costitutivi della Fase II del metodo del simplesso; infatti, nel paragrafo 7.4.1 è stato definito un criterio sufficiente per verificare l'ottimalità di una soluzione di base ammissibile; nel paragrafo 7.4.2 è stato definito un criterio sufficiente per verificare se un problema è illimitato inferiormente; infine, nel paragrafo 7.4.3 abbiamo esaminato come costruire una nuova base ammissibile e una nuova forma canonica. Ad ogni iterazione della Fase II, se i criteri di arresto non sono verificati, il metodo genera una nuova soluzione di base ammissibile alla quale corrisponde, per come è stata costruita, una decrescita (non crescita) del valore della funzione obiettivo.

Nel seguito riportiamo uno schema algoritmico di una iterazione della Fase II del metodo. Supponiamo quindi di avere un problema di Programmazione Lineare in forma standard e in forma canonica rispetto ad una base B

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Come già in precedenza, indichiamo con a_{j_i} , $i = 1, \dots, m$ le colonne della matrice B , e con $a_{j_{m+i}}$ le colonne della matrice N , ovvero

$$B = \begin{pmatrix} a_{j_1} & \cdots & a_{j_m} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} a_{j_{m+1}} & \cdots & a_{j_{n-m}} \end{pmatrix}.$$

Fase II del metodo del simplesso

Passo 1: *Calcolo del vettore dei costi ridotti*

- Calcolare il vettore $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N$

Passo 2: *Verifica del criterio di ottimalità*

- se per ogni $i \in \{1, \dots, n - m\}$, risulta $\gamma_i \geq 0$, allora la soluzione corrente
 $\bar{x}_B = B^{-1}b$, $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ è ottima. – STOP

Passo 3: *Verifica del criterio di illimitatezza*

- se per qualche $i \in \{1, \dots, n - m\}$, tale che $\gamma_i < 0$ risulta $\pi_i \leq 0$ allora il problema è illimitato inferiormente. – STOP

Passo 4: *Costruzione di una nuova base ammissibile*

- selezionare un indice $h \in \{1, \dots, n - m\}$ tale che $\gamma_h < 0$;
 l' h -esima variabile fuori base, ovvero $x_{j_{m+h}}$, entra in base.
- calcolare l'indice k attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1, \dots, m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\};$$

la k -esima variabile in base, ovvero x_{j_k} , esce dalla base.

- costruire le matrici \tilde{B} e \tilde{N} a partire da B e N scambiando fra loro l' h -esima colonna di N , ovvero $a_{j_{m+h}}$ con la k -esima colonna di B , ovvero a_{j_k} .
- costruire i nuovi vettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$, $c_{\tilde{B}}$ e $c_{\tilde{N}}$.

Passo 5: *Costruzione di una nuova forma canonica*

- calcolare le grandezze rilevanti, relative alla nuova base \tilde{B} , ovvero $\tilde{B}^{-1}b$ e $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ attraverso un'operazione di *pivot*, e definire la nuova forma canonica rispetto alla nuova base \tilde{B} ed effettuare una nuova iterazione.

Esempio 7.4.11 Risolvere applicando la Fase II del metodo del simplesso il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Il problema è in forma standard ed inoltre si dispone della base $B_0 = I$ data dalle colonne 4, 5, 6, quindi il problema è in forma canonica rispetto alle variabili x_4, x_5, x_6 , ovvero:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B_0^{-1}N_0$$

$$x_{B_0} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad x_{N_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 0

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_0^T = (1 \ 2 \ 1) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 1) - (4 \ 3 \ -3) = (-3 \ -1 \ 4)$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:

Poiché non risulta $\pi_1 \leq 0$, o $\pi_2 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:

Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo

minore ovvero $h = 1$ in quanto $\gamma_1 = -3 < -1 = \gamma_2$; quindi entra in base la prima variabile fuori base, ovvero x_1 .

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,3 \\ (\pi_1)_i > 0}} \left\{ \frac{(B_0^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{(B_0^{-1}b)_2}{(\pi_1)_2} = 1$$

si determina $k = 2$ e quindi la seconda variabile in base esce dalla base, ovvero x_5 .

Nuova base:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:

si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_1 \mid e_2 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \mid B_0^{-1}b)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_1)_2 = 2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & -1/2 & 5/2 & 11/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & 3/2 & 0 \end{array} \right)$$

ovvero

$$(e_2 \mid B_1^{-1}N_1 \mid B_1^{-1}b).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\min (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Iterazione 1

Calcolo dei costi ridotti:

$$\begin{aligned}\gamma_1^T &= (1 \ 2 \ 1) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 2 \ 1) - (-1/2 \ 9/2 \ 9/2) = (3/2 \ -5/2 \ -7/2)\end{aligned}$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:

Poiché non risulta $\pi_2 \leq 0$, o $\pi_3 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:

Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo minore ovvero $h = 3$ in quanto $\gamma_3 = -7/2 < -5/2 = \gamma_2$; quindi entra in base la terza variabile fuori base, ovvero x_3 .

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,3 \\ (\pi_3)_i > 0}} \left\{ \frac{(B_1^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{11/2}, \frac{0}{3/2} \right\} = \frac{(B_1^{-1}b)_3}{(\pi_3)_3} = 0 \quad (7.4.17)$$

si determina $k = 3$ e quindi la terza variabile in base esce dalla base, ovvero x_6 .

Nuova base:

$$\begin{aligned}B_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & N_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ x_{B_2} &= \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, & x_{N_2} &= \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Costruzione nuova forma canonica:

si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_3 \mid \pi_1 \ \pi_2 \ e_3 \mid B_1^{-1}b)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11/2 & | & -1/2 & 5/2 & 0 & | & 2 \\ -5/2 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & | & 1 \\ \mathbf{3/2} & | & -1/2 & 5/2 & 1 & | & 0 \end{array} \right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_3)_3 = 3/2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & | & 4/3 & -20/3 & -11/3 & | & 2 \\ 0 & | & -1/3 & 11/3 & 5/3 & | & 1 \\ 1 & | & -1/3 & 5/3 & 2/3 & | & 0 \end{array} \right)$$

ovvero

$$(e_3 \mid B_2^{-1}N_2 \mid B_2^{-1}b).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 2

Calcolo dei costi ridotti:

$$\begin{aligned} \gamma_2^T &= (1 \ 2 \ 1) - (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 1) - (2/3 \ -4/3 \ -4/3) = \\ &= (1/3 \ 10/3 \ 7/2) \end{aligned}$$

Verifica del criterio di ottimalità:

Poiché risulta $\gamma_2 > 0$ il criterio di ottimalità è soddisfatto e quindi la soluzione

$$\bar{x}^* = (1, 0, 0, 2, 0, 0)^T$$

è soluzione ottima del problema ed è l'unica soluzione ottima poichè il vettore dei costi ridotti ha tutte le componenti positive. \square

Osservazione 7.4.12 Nella prima iterazione del precedente Esempio 7.4.11, dal criterio del rapporto minimo (7.4.17) si è ottenuto il valore zero ($\bar{\rho} = 0$). In questo caso vale quanto discusso nella Osservazione 7.4.8, ovvero che $x_{B_1} = (2, 1, 0)^T$ è una soluzione base ammissibile *degenere* e che la successiva soluzione base ammissibile rimane invariata pur essendo stato effettuato un cambio di base; ed infatti si ha $x_{B_2} = (2, 1, 0)^T$. In questa situazione si parla di *iterazione degenere*.

Esempio 7.4.13 Risolvere applicando la Fase II del metodo del simplesso e utilizzando la costruzione esplicita della matrice di pivot T , il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ & x_1 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Si può applicare la Fase II del metodo del simplesso in quanto il problema è in forma canonica. Infatti si può scrivere:

$$\begin{aligned} \min \quad & (3 \ 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1 \ 1) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

La base iniziale è $B_0 = I$; $x_{B_0} = (x_1 \ x_2)^T$ e $x_{N_0} = (x_3 \ x_4)^T$.

Iterazione 0.

Calcolo dei costi ridotti.

Si calcolano i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Verifica del criterio di ottimalità.

Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$ e quindi il criterio è fallito.

Verifica criterio di illimitatezza.

La colonna $\pi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \not\leq 0$; il criterio è fallito.

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: c'è un unico costo ridotto negativo -3 , e quindi si sceglie $h = 2$ che corrisponde alla variabile x_4 che entra in base.

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_2)_i > 0}} \left\{ \frac{(B_0)^{-1}b)_i}{(\pi_2)_i} \right\} = \frac{5}{2}$$

che corrisponde alla variabile x_1 e $k = 1$.

I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad c_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c_{N_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} B_1^{-1}N_1 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ B_1^{-1}b &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 11/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Iterazione 1

Calcolo costi ridotti.

Si calcolano i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Verifica criterio di ottimalità.

Risulta $\gamma_1 \not\geq 0$ e quindi la verifica fallisce.

Verifica criterio di illimitatezza.

Risulta $\pi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \not\leq 0$ e quindi la verifica fallisce.

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: c'è un unico costo ridotto negativo $-3/2$, e quindi $h = 1$ che corrisponde alla variabile x_3 che entra in base.

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_1)_i > 0}} \left\{ \frac{((B_1)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \frac{((B_1)^{-1}b)_2}{(\pi_1)_2} = \frac{11}{3}$$

che quindi corrisponde a scegliere $k = 2$ e quindi la variabile x_2 esce dalla base. Quindi

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad c_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e le corrispondenti matrici di base e fuori base:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Si ottiene

$$(B_2)^{-1}N_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

e

$$(B_2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 11/3 \end{pmatrix}$$

Iterazione 2

Calcolo costi ridotti.

Si ha

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verifica criterio di ottimalità.

Poichè i costi ridotti sono tutti positivi, la soluzione trovata è ottima.

Si ha quindi

$$x_1^* = x_2^* = 0, \quad x_3^* = 11/3 \quad x_4^* = 13/3$$

con valore della funzione obiettivo $z(x^*) = 8$. La base ottima è $B^* = B^2$ e la soluzione trovata è unica poiché i costi ridotti sono strettamente positivi. \square