

9

Modelli di Programmazione Lineare Intera

9.1 MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA

Esercizio 9.1.1 Una compagnia petrolifera dispone di 5 pozzi (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) dai quali può estrarre petrolio. Le quantità massime di petrolio estraibili giornalmente da ciascuno dei pozzi e il costo di estrazione (in migliaia di lire) di un ettolitro di petrolio è riportato nella seguente tabella

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
quantità massime	1100	870	950	1500	800
costo unitario	150	130	135	180	125

La compagnia deve pianificare giornalmente l'estrazione del petrolio scegliendo quali dei pozzi utilizzare e la quantità di petrolio da estrarre da ciascuno di essi dovendo soddisfare esattamente una richiesta giornaliera di 3000 ettolitri di petrolio minimizzando il costo complessivo dato dal costo di estrazione e dal costo giornaliero degli operai addetti; quest'ultimo costo è differenziato a seconda dei pozzi ed è riportato nella tabella seguente in migliaia di lire

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
costo operai	5000	4500	4800	5200	4300

Costruire un modello lineare che rappresenti il problema di pianificazione descritto tenendo conto che il costo degli operai è legato all'utilizzazione di un determinato pozzo cioè tale costo esiste solo se il corrispondente pozzo è effettivamente utilizzato.

Formulazione.

Si tratta di un problema di costo fisso e può essere rappresentato mediante un modello di Programmazione Lineare Intera come segue.

– *Variabili.* Indichiamo con x_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, la quantità in ettolitri estratta giornalmente rispettivamente dal pozzo P_i ed inoltre introduciamo le variabili binarie δ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, così definite:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se il pozzo } P_i \text{ è utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data dal costo complessivo e quindi si può esprimere nella forma

$$150x_1 + 130x_2 + 135x_3 + 180x_4 + 125x_5 + 5000\delta_1 + 4500\delta_2 + 4800\delta_3 + 5200\delta_4 + 4300\delta_5.$$

– *Vincoli.* Si devono considerare il vincolo dovuto alla richiesta giornaliera

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3000,$$

e i vincoli derivanti dalla presenza dei costi fissi:

$$\begin{aligned} x_1 - 1100\delta_1 &\leq 0 \\ x_2 - 870\delta_2 &\leq 0 \\ x_2 - 950\delta_3 &\leq 0 \\ x_3 - 1500\delta_4 &\leq 0 \\ x_4 - 800\delta_5 &\leq 0. \end{aligned}$$

Infine devono essere esplicitati i vincoli

$$x_i \geq 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Quindi la formulazione completa può essere così riassunta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 150x_1 + 130x_2 + 135x_3 + 180x_4 + 125x_5 + \\ \quad 5000\delta_1 + 4500\delta_2 + 4800\delta_3 + 5200\delta_4 + 4300\delta_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3000 \\ x_1 - 1100\delta_1 \leq 0 \\ x_2 - 870\delta_2 \leq 0 \\ x_2 - 950\delta_3 \leq 0 \\ x_3 - 1500\delta_4 \leq 0 \\ x_4 - 800\delta_5 \leq 0 \\ x_i \geq 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 5. \end{array} \right.$$

□

Esercizio 9.1.2 Una casa automobilistica produce quattro modelli differenti di automobili (*Mod1, Mod2, Mod3, Mod4*) disponendo di tre catene di montaggio (*C1, C2, C3*). Per ottenere un modello finito di ciascun tipo di automobile è necessaria la lavorazione su una sola catena di montaggio. La tabella che segue riporta per ciascuna catena di montaggio i costi (in milioni di lire) necessari per produrre un modello di automobile insieme ai costi di attivazione (in milioni di lire) e alla quantità minima di automobili che devono essere prodotte.

	C1	C2	C3	quantità minima di automobili
Mod1	10	12	11	15000
Mod2	9	10.5	9.5	10000
Mod3	13	14.5	12.5	7500
Mod4	15	16	15.5	5000
costi attivazione	50	60	55	

Costruire un modello lineare che permetta di determinare le quantità di ciascun modello da fabbricare su ciascuna catena di montaggio minimizzando i costi complessivi di produzione, tenendo conto che per motivi tecnici possono essere utilizzate al più due catene di montaggio e che le tre catene di montaggio hanno rispettivamente le seguenti capacità massime di produzione: 10000 automobili *C1*, 20000 automobili *C2* e 25000 automobili *C3*.

Formulazione.

Si tratta di un problema di pianificazione della produzione in cui sono presenti anche costi fissi di attivazione delle catene di montaggio.

– *Variabili.* Si introducono le variabili x_{ij} per rappresentare il numero di automobili del modello i -esimo da produrre sulla catena di montaggio j -esima ($i = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2, 3$). Inoltre si introducono le variabili binarie δ_1 , δ_2 e δ_3 ad indicare l'attivazione o la non attivazione della catena di montaggio j -esima, $j = 1, 2, 3$ e quindi così definite:

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{se la catena di montaggio } C_i \text{ è attivata} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal costo complessivoe quindi può essere scritta

$$10x_{11} + 12x_{12} + 11x_{13} + 9x_{21} + 10.5x_{22} + 9.5x_{23} + 50\delta_1 + 60\delta_2 + 55\delta_3.$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli sulla quantità minima di automobili da produrre che possono essere scritti

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 15000$$

$$\begin{aligned}x_{21} + x_{22} + x_{23} &\geq 10000 \\x_{31} + x_{32} + x_{33} &\geq 7500 \\x_{41} + x_{42} + x_{43} &\geq 5000.\end{aligned}$$

Ci sono poi i vincoli dovuti alla presenza dei costi fissi:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} - 10000\delta_1 &\leq 0 \\x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} - 20000\delta_2 &\leq 0 \\x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} - 25000\delta_3 &\leq 0.\end{aligned}$$

Per esprimere la condizione che al piú due catene di montaggio possono essere utilizzate è sufficiente introdurre il vincolo

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2.$$

Infine devono essere esplicitati i vincoli

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{intere} \quad \delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3.$$

Quindi il modello complessivo è dato da

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 10x_{11} + 12x_{12} + 11x_{13} + 9x_{21} + 10.5x_{22} + 9.5x_{23} + 50\delta_1 + 60\delta_2 + 55\delta_3 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 15000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 10000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 7500 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 5000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} - 10000\delta_1 \leq 0 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} - 20000\delta_2 \leq 0 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} - 25000\delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2 \\ x_{ij} \geq 0, \quad \text{intere} \quad \delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

□

Esercizio 9.1.3 Un'azienda produce fertilizzanti e possiede quattro depositi distribuiti in un'area geografica. In ogni deposito si ha la seguente domanda fissata di fertilizzanti (in quintali).

Dep. 1	Dep. 2	Dep. 3	Dep. 4
400	500	250	350

Tale azienda vuole costruire alcune fabbriche che producono il fertilizzante e deve decidere dove costruirle in modo da poter rifornire tutti depositi soddisfando esattamente le richieste. Per ragioni economiche, pur avendo a disposizione tre possibili luoghi (A, B, C) dove costruire le fabbriche, non può costruirne più di due.

I costi necessari per costruire una fabbrica in ciascuno dei tre luoghi possibili sono riportati nella seguente tabella (in milioni di lire) insieme alla quantità massima di fertilizzante che si può produrre in ciascuna fabbrica se questa fosse costruita nel luogo A, B o C.

	A	B	C
Costo costr.	50	40	30
quantità max	9000	6500	2000

I costi unitari di trasporto da ciascuna delle possibili fabbriche a ciascun deposito sono i seguenti (in migliaia di lire)

	Dep. 1	Dep. 2	Dep. 3	Dep. 4
A	12	14	9	15
B	18	9	7	12
C	8.5	11	10	15

Formulare un modello lineare che permetta di decidere dove costruire le due fabbriche e di pianificare i trasporti in modo da minimizzare i costi complessivi.

Formulazione.

Si tratta di un problema di localizzazione di impianti che può essere formulato come segue.

– *Variabili.* Si introducono le variabili x_{ij} per rappresentare il quantitativo di fertilizzante da trasportare dalla fabbrica i -esima ($i = A, B, C$), al deposito j -esimo ($j = 1, 2, 3, 4$). Inoltre si introducono le variabili δ_A , δ_B e δ_C ad indicare la costruzione della fabbrica nei luoghi A, B, C e quindi così definite:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se una fabbrica è costruita nell'area } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = A, B, C.$$

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data da

$$12x_{A1} + 14x_{A2} + 9x_{A3} + 15x_{A4} + 18x_{B1} + 9x_{B2} + 7x_{B3} + 12x_{B4} + \\ + 8.5x_{C1} + 11x_{C2} + 10x_{C3} + 15x_{C4} + 50000\delta_A + 40000\delta_B + 30000\delta_C.$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli di domanda

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &= 400 \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &= 500 \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &= 250 \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &= 350, \end{aligned}$$

i vincoli dei costi fissi

$$\begin{aligned} x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} - 9000\delta_A &\leq 0 \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} - 6500\delta_B &\leq 0 \\ x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} - 9000\delta_C &\leq 0, \end{aligned}$$

e il vincolo sul massimo numero di fabbriche costruibili

$$\delta_A + \delta_B + \delta_C \leq 2;$$

inoltre devono essere esplicitati i vincoli

$$x_{ij} \geq 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = A, B, C, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Quindi il modello complessivo può essere scritto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(12x_{A1} + 14x_{A2} + 9x_{A3} + 15x_{A4} + 18x_{B1} + 9x_{B2} + 7x_{B3} + 12x_{B4} \\ \quad + 8.5x_{C1} + 11x_{C2} + 10x_{C3} + 15x_{C4} + 50000\delta_A + 40000\delta_B + 30000\delta_C) \\ x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} = 400 \\ x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} = 500 \\ x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} = 250 \\ x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} = 350 \\ x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} - 9000\delta_A \leq 0 \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} - 6500\delta_B \leq 0 \\ x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} - 9000\delta_C \leq 0 \\ \delta_A + \delta_B + \delta_C \leq 2 \\ x_{ij} \geq 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = A, B, C, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right.$$

□

Esercizio 9.1.4 Un'industria dispone di quattro magazzini dislocati in regioni diverse del territorio nazionale e riceve ordini da cinque clienti differenti (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) che deve essere soddisfatto esattamente. Ciascuno dei quattro magazzini già dispone di un quantitativo di merce, ma a causa di una carenza di personale solo due dei quattro magazzini possono essere usati per prelevare la merce da destinare ai cinque clienti. La tabella che segue riporta i costi unitari (in migliaia di lire) per il trasporto della merce da ciascuno dei quattro magazzini a ciascuno dei clienti, insieme ai costi necessari per rendere operativi i magazzini (in milioni di lire), e alle loro disponibilità (in quintali); si riportano inoltre i quantitativi di merce ordinati da ciascun cliente:

	C1	C2	C3	C4	C5	costi attivazione	disponibilità
MAG1	20	40	30	25	21	8.5	3500
MAG2	50	25	15	45	30	9	4500
MAG3	20	15	25	40	10	20	4000
MAG4	10	20	50	35	18	25	3000
ordini dei clienti	1000	1500	900	800	1200		

Costruire un modello lineare che permetta di determinare quali magazzini usare dei quattro disponibili e i quantitativi di merce da trasportare in modo da minimizzare il costo complessivo dato dalla somma dei costi di attivazione dei magazzini necessari per renderli operativi e i costi dei trasporti.

Formulazione.

Il problema può essere formulato come segue:

- *Variabili.* Introduciamo le variabili x_{ij} per indicare il quantitativo di merce da trasportare da magazzino i -esimo al cliente j -esimo ($i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 5$). Inoltre, introduciamo le variabili binarie

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se il magazzino } i\text{-esimo è utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 4.$$

- *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dal costo complessivo ed è quindi esprimibile come

$$20x_{11} + 40x_{12} + 30x_{13} + 25x_{14} + 21x_{15} + 50x_{21} + 25x_{22} + 15x_{23} + 45x_{24} + 30x_{25} + 20x_{31} + 15x_{32} + 25x_{33} + 40x_{34} + 10x_{35} + 10x_{41} + 20x_{42} + 50x_{43} + 35x_{44} + 18x_{45} + 8500\delta_1 + 9000\delta_2 + 20000\delta_3 + 25000\delta_4.$$

- *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli dovuti agli ordini dei clienti che assumiamo debbano essere soddisfatti esattamente:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1500 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 900 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 800 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 1200. \end{aligned}$$

Si devono poi considerare i vincoli dovuti alla presenza dei costi fissi:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} - 3500\delta_1 &\leq 0 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} - 4500\delta_2 &\leq 0 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} - 4000\delta_3 &\leq 0 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} - 3000\delta_4 &\leq 0. \end{aligned}$$

Poiché solo due dei magazzini sono utilizzabili deve risultare

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \leq 2.$$

Infine devono essere esplicitati i vincoli

$$x_{ij} \geq 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Quindi il modello complessivo si può riassumere nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left(20x_{11} + 40x_{12} + 30x_{13} + 25x_{14} + 21x_{15} + 50x_{21} + 25x_{22} + \right. \\ \quad + 15x_{23} + 45x_{24} + 30x_{25} + 20x_{31} + 15x_{32} + 25x_{33} + 40x_{34} \\ \quad + 10x_{35} + 10x_{41} + 20x_{42} + 50x_{43} + 35x_{44} + 18x_{45} + \\ \quad \left. + 8500\delta_1 + 9000\delta_2 + 20000\delta_3 + 25000\delta_4 \right) \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1500 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 900 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 800 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1200 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} - 3500\delta_1 \leq 0 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} - 4500\delta_2 \leq 0 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} - 4000\delta_3 \leq 0 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} - 3000\delta_4 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \leq 2 \\ x_{ij} \geq 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{array} \right.$$

□

Esercizio 9.1.5 Un'industria produce computer utilizzando due fabbriche (F_1 , F_2) dislocate in due differenti regioni. Si prende in considerazione un particolare modello di computer per la cui produzione queste due fabbriche hanno le seguenti caratteristiche (costo di produzione unitario in euro), numero massimo di computer che si possono produrre settimanalmente)

	F_1	F_2
costo di produzione	450	490
capacità massima	800	100

Ogni computer dopo la fabbricazione viene trasportato a centri di imballaggio dove viene preparato per la vendita. L'industria dispone di 3 centri di imballaggio (C_1 , C_2 , C_3) che possono essere utilizzati. La tabella che segue riporta i costi di trasporto di un computer da ciascuna fabbrica a ciascun centro di imballaggio (in euro), insieme al numero di operai necessari in ogni centro, al numero di ore necessarie per imballare un computer e alla capacità massima di ciascun centro:

	<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>C3</i>
<i>F1</i>	10	9.5	8
<i>F2</i>	7.5	8.5	9
<i>numero operai</i>	10	8	9
<i>ore per l'imballaggio</i>	1.5	1.1	1.2
<i>capacità massima</i>	400	500	450

I centri di imballaggio hanno una capacità limitata in quanto ogni operaio lavora 35 ore settimanali. Costruire un modello lineare che permetta di formulare un piano settimanale della produzione di questa industria che permetta di decidere settimanalmente quali centri di imballaggio attivare in modo da massimizzare il profitto netto complessivo sapendo che tutti i computer trasportati ai centri settimanalmente vengono venduti nella settimana stessa e che il prezzo di vendita è di euro 900 ogni computer. Tenere inoltre conto del fatto che al più due dei tre centri possono essere attivati in una stessa settimana.

Scrivere in forma parametrica i file *.mod* e *.dat* che realizzano un'implementazione in AMPL di questo problema. Risolvere quindi il problema riportando il valore ottimo ottenuto.

Soluzione

Si riportano di seguito i file *computer.mod* e *computer.dat*.

computer.mod

```

set FABBRICHE;
set CENTRI;

param costo_prod{FABBRICHE};
param capacita_max_fab{FABBRICHE};

param costo_trasp{FABBRICHE,CENTRI};
param capacita_max_centri{CENTRI};
param dispon_oraria{CENTRI};
param tempo_imball{CENTRI};
param prezzo;

var x{FABBRICHE,CENTRI}>=0, integer;
var d{CENTRI} binary;

maximize profitto : prezzo*sum{i in FABBRICHE, j in CENTRI}
    x[i,j]-sum{i in FABBRICHE} (costo_prod[i]*sum{j in CENTRI}
        x[i,j])-sum{i in FABBRICHE, j in CENTRI}
        costo_trasp[i,j]*x[i,j];

```

```

s.t. capacita_fab{i in FABBRICHE} : sum{j in CENTRI} x[i,j]
      <= capacita_max_fab[i];
s.t. ore_disponibili{j in CENTRI} :
      tempo_imball[j]*sum{i in FABBRICHE} x[i,j]
      <= dispon_oraria[j];
s.t. vincoli_logici{j in CENTRI} : sum{i in FABBRICHE} x[i,j]-
      capacita_max_centri[j]*d[j]<=0;
s.t. numero_centri : sum{j in CENTRI} d[j]<=2;

```

computer.dat

```

set FABBRICHE := F1 F2;
set CENTRI C1 C2 C3;

param : costo_prod capacita_max_fab :=
F1 450 800
F2 490 100;

param costo_trasp : C1 C2 C3 :=
F1 10 9.5 8
F2 7.5 8.5 9
;

param : capacita_max_centri dispon_oraria tempo_imball :=
C1    400    350   1.5
C2    500    280   1.1
C3    450    315   1.2
;

param prezzo := 900;

```

10

Teoria della Programmazione Lineare Intera

Non sono disponibili esercizi relativi a questo capitolo.