Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Automatica

Corso di RICERCA OPERATIVA

PROVA di AUTOVALUTAZIONE N.9

ESERCIZI

1. Scrivere il problema duale e le condizioni di complementarità del seguente problema di Programmazione Lineare:
$$\begin{cases} \min 2x_1 - 7x_2 - 13x_3 - x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 \leq 2 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 1 \\ x_2 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

2. Scrivere il problema duale e le condizioni di complementarità del seguente problema di Programmazione Lineare:
$$\begin{cases} \min 4x_1 - x_3 + 2x_4 \\ 2x_2 - 3x_3 - x_4 \leq 3 \\ x_1 + 2x_3 - 9x_4 = 10 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_4 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

3. Un'industria possiede quattro catene di montaggio (C1, C2, C3, C4) ognuna delle quali può produrre un modello di automobile pronto per la vendita. Per il corretto funzionamento delle catene di montaggio è prevista la presenza di alcuni operai addetti al controllo. Poiché le catene di montaggio sono di dimensioni diverse, il numero degli operai addetti al controllo (che naturalmente sono assegnati ad un catena di montaggio se e solamente se questa è funzionante) è diverso ed è riportato nella tabella che segue insieme alla capacità massima produttiva settimanale di ciascuna catena di montaggio (espressa in numero di automobili) e al costo di produzione di un'automobile (in migliaia di euro):

	C1	C2	C3	C4
numero operai addetti	15	17	19	18
massima capacità produttiva	1000	1200	1500	1300
costo unitario	5000	5200	5800	5750

Si vuole pianificare la produzione settimanale di questa industria, ovvero si vuole decidere quali catene di montaggio attivare nella settimana e determinare il numero di automobili da produrre settimanalmente su ciascuna delle catene di montaggio attivate in modo da produrre complessivamente almeno 2000 automobili la settimana, minimizzando il costo complessivo dato dal costo di produzione e dal costo degli operai eventualmente addetti al controllo delle catene di montaggio attivate e sapendo che ciascun operaio effettivamente assegnato ad una catena di montaggio viene retribuito con un salario settimanale di 300 euro. Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione settimanale di questa industria.

4. Un'industria produce biciclette e dispone di quattro reparti di lavorazione (R1, R2, R3, R4) ciascuno dei quali è in grado di produrre biciclette pronte per la vendita. La pianificazione della produzione di questa industria è mensile, e ogni mese ciascuno dei reparti può essere funzionante o può rimanere chiuso a seconda delle esigenze. Se un reparto viene aperto in un certo mese, è necessario assumere per quel mese del personale addetto alla sorveglianza. In particolare, il reparto R1 richiede 8 persone addette alla sorveglianza, i reparti R2 e R4 ne richiedono 10 ciascuno e il reparto R3 ne richiede 12. Ciascuna delle persone addette alla sorveglianza viene retribuita con un salario mensile di 2 miloni di lire se e solamente se è effettivamente assunta per quel mese. Il costo di produzione unitario (in migliaia di lire per ciascuna bicicletta) varia a seconda del reparto ed è riportato nella tabella che segue insieme al numero massimo di biciclette che possono essere fabbricate da ciascun reparto ogni mese:

	costo unitario	produzione massima
R1	350	1700
R2	400	2000
R3	450	2800
R4	410	2100

Costruire un modello lineare che permetta di decidere quali reparti attivare in un mese e il numero di biciclette che ciascun reparto attivato deve produrre nel mese in modo da minimizzare il costo complessivo (dato dai costi di produzione e dai costi delle persone addette alla sorveglianza) sapendo che per esigenze di mercato devono essere fabbricate mensilmente almeno 3500 biciclette.

QUESTIONARIO

1. Sia dato il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} \max c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$$

   (a) Il suo duale è

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u = -c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

   (b) Se (P) è inammissibile, allora il suo duale non può essere inammissibile.

   (c) Data una coppia primale/duale e due punti $\bar{x}$ e $\bar{u}$ ammissibili per i rispettivi problemi, allora la funzione obiettivo del primale calcolata in $\bar{x}$ coincide con la funzione obiettivo calcolata in $\bar{u}$.

   (d) Se un problema di PL ammette almeno una soluzione ammissibile, allora anche il suo duale è ammissibile.

2. Siano $(P) : \min\{c^\top x : Ax \geq b\}$ e $(D) : \max\{b^\top u : A^\top u = c, u \geq 0_m\}$ con $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Siano $\bar{x}$ e $\bar{u}$ due soluzioni ammissibili per (P) e (D), rispettivamente.

   (a) (P) può essere illimitato inferiormente.

   (b) (P) ammette soluzione ottima x^* e risulta $b^\top \bar{u} \leq c^\top x^* \leq c^\top \bar{x}$.

   (c) (D) potrebbe non ammettere soluzione ottima.

   (d) Certamente si ha $b^\top \bar{u} \leq c^\top \bar{x}$.