CALCOLO PROBABILITÀ E STATISTICA

Prof. DE GREGORIO

- INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ - Orsingher - Beghin
- CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - Dall'Aglio (2003)

$\boxed{1933}$ ASSIOMI DI KOLMOGOROV

PROVA O ESPERIMENTO

Ω = SPAZIO CAMPIONARIO $\Rightarrow$ insieme di tutti i possibili risultati della prova.

- PROVA: LANCIO DADO $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- PROVA: LANCIO 2 MONETE $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$
- PROVA: DERBY ROMA - LAZIO $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$
- PROVA: INCREMENTO RELATIVO ~~DI INCREMENTO~~ DI UN TITOLO TRA OGGI E LUNEDÌ $\Omega = [-1, +\infty)$
- PROVA: GUASTO DI UN COMPONENTE ELETTRICO $\Omega = [0, +\infty)$

EVENTO = affermazioni che facciamo sui risultati di una prova

- EVENTO: $A = \{\text{esce un numero pari}\} = \{2, 4, 6\}$
- EVENTO: $A = \{\text{esce croce al primo lancio}\}$, $B = \{\text{esce almeno una Testa}\}$
- EVENTO: $A = \{\text{vince la Lazio}\}$, $B = \{\text{una delle due squadre vince con 2 gol di scarto}\}$

se $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \Rightarrow \{\omega_i\}$ = ~~elem~~ evento elementare

Un evento ~~A~~ si verifica se il risultato della prova $\omega \in A$.

- Ω = <u>EVENTO CERTO</u>
- $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} \Rightarrow$ complementare di A
- $\emptyset$ = insieme vuoto $= \Omega^c$
- Eventi A, B:
  - almeno uno si verifica $\Rightarrow A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ o } \omega \in B\}$
  - si verificano entrambi $\Rightarrow A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$
  - A implica B $\Rightarrow A \subseteq B = \{\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$

LEGGI DUALI - LEGGI DI DE MORGAN

- $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
- $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

EVENTI INCOMPATIBILI

A e B sono incompatibili se non si possono verificare contemporaneamente $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$

EVENTI NECESSARI

$A_1, A_2, \dots, A_n$ sono necessari se almeno un evento si verifica certamente $\Rightarrow \cancel{A \cup B} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono incompatibili ~~[illegible]~~ a due a due se $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono incompatibili e necessari allora formano una partizione di Ω

PROPRIETÀ

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ASSOCIATIVA

~~[illegible]~~

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

DISTRIBUTIVE

- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. Infatti: $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

- Se $B_1, B_2, \dots, B_n$ partizioni di $\Omega \Rightarrow A = \bigcup_{j=1}^{n} (A \cap B_j)$

$\boxed{\text{CONCETTO DI } \sigma\text{-ALGEBRA}} \Rightarrow \mathcal{A}$

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (chiusa rispetto al complemento)
3. $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (chiusa rispetto all'unione numerabile)

La mia famiglia di eventi deve essere una σ-ALGEBRA

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow \sigma$-ALGEBRA BANALE

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \sigma$-ALGEBRA POTENZA $\Rightarrow$ insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di Ω oppure INSIEME DELLE PARTI

- Una successione di eventi è crescente se $A_n \subset A_{n+1}$ $(A_n \uparrow)$
- Una successione di eventi è decrescente se $A_n \supset A_{n+1}$ $(A_n \downarrow)$

– Se A_n crescente $\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

– Se A_n decrescente $\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

<u>ES</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(-\infty, 1-\frac{1}{n}\right)}_{A_n \uparrow} = \lim_{n\to+\infty} \left\{x : x < 1-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, 1-\frac{1}{n}\right) = (-\infty, 1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(-\infty, 1+\frac{1}{n}\right)}_{A_n \downarrow} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, 1+\frac{1}{n}\right) = (-\infty, 1]$$

A_n non crescente e non decrescente

– $\lim_{n\to+\infty} A_n = ?$

– $\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ LIMITE INFERIORE $\in \mathcal{A}$

– $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{K} A_k$ LIMITE SUPERIORE $\in \mathcal{A}$

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n^- \uparrow} \subset \lim_{n\to+\infty} A_n \subset \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n^+ \downarrow}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{\text{lim inf}} \subset \lim_{n\to+\infty} A_n \subset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{\text{lim sup}}$$

Se lim inf = lim sup allora $\lim_{n\to+\infty} A_n$ = lim sup = lim inf

LA PROBABILITÀ

$\boxed{\text{ASSIOMI DI KOLMOGOROV}}$ [P funzione d'insieme]

① La funzione P ammette come dominio una σ-ALGEBRA $\mathcal{A}$ su Ω
② $P(A) \geq 0$ (A un evento)
③ $P(\Omega) = 1$
④ $A, B \in \mathcal{A}$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ADDITIVITÀ
⑤ $A_n \downarrow \emptyset$ (→ decresce all'insieme vuoto: $\lim_{n \to +\infty} A_n = \emptyset$) $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$ CONTINUITÀ

IMPOSTAZIONE / INTERPRETAZIONE CLASSICA

$$P(E) = \frac{\text{NUMERO CASI FAVOREVOLI AD } E}{\text{NUMERO CASI POSSIBILI}} = \frac{\#E}{\#\Omega}$$

- CASI POSSIBILI ⇒ tutti equiprobabili
- EVENTI ELEMENTARI EQUIPROBABILI ⇒ SPAZI UNIFORMI
- SI PUÒ APPLICARE SU SPAZI FINITI ED UNIFORMI

IMPOSTAZIONE FREQUENTISTA

$$P(E) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\text{NUM VOLTE CHE SI VERIFICA } E}{\text{NUMERO DI PROVE}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n_E}{n}$$

CONDIZ.: TUTTE LE PROVE SIANO SVOLTE SOTTO LE STESSE CONDIZIONI

~~LANCIO DI DUE DADI~~
~~E = {somma 8}~~

IMPOSTAZIONE SOGGETTIVA

- Vedi LIBRO

P(E) = prezzo che una persona è disposta a scommettere

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \Rightarrow$ SPAZIO DI PROBABILITÀ

PROPRIETÀ

① $P(A) = 1 - P(A^c)$ A evento

Infatti $1 \overset{③}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{④}{=} P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$

② $P(\emptyset) = 0$

Infatti $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 0$

③ Se $A \subset B$

$P(A) \leq P(B)$ ← MONOTONIA

$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = A \cup (A^c \cap B)$

$P(B) = P(A \cup (A^c \cap B)) \overset{④}{=} P(A) + P(A^c \cap B) \Rightarrow P(A) = P(B) - P(A^c \cap B) \overset{②}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow P(A) < P(B)$

④ $P(A) \leq 1$

$P(A) \leq P(\Omega) = 1$

PROBABILITÀ = FUNZIONE D'INSIEME $P: \mathcal{A} \to [0,1]$

ESEMPIO

DERBY ROMA-LAZIO

$\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$

$R = \{(x,y) : x > y\}$

$L = \{(x,y) : x < y\}$

$X = \{(x,y) : x = y\}$

$\mathcal{A} = \{R, L, X, R \cup L, R \cup X, L \cup X, \Omega, \emptyset\}$ ← possibile σ-ALGEBRA

Se $\Omega = \mathbb{R}$ e siamo interessati a $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$

$S = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$ una $\mathcal{A}$ che contiene S e che sia la più piccola possibile:

$\sigma(S) = \mathcal{B} \Rightarrow$ σ-ALGEBRA DI BOREL

i suoi elementi sono detti BORELIANI

① $(-\infty, x) \in \mathcal{B} \Rightarrow$ ② $[x, -\infty) = (-\infty, x)^c \in \mathcal{B}$

③ $[a, b)$ con $a < b$ $= (-\infty, b) \cap [a, +\infty) \in \mathcal{B}$

④ $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{[x, x+\frac{1}{n})}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$

⑤ $[a,b] = [a,b) \cup \{b\} \in \mathcal{B}$

CALCOLO COMBINATORIO

<u>REGOLA FONDAMENTALE</u>

$I = \{a_1, \dots, a_n\}$
$J = \{b_1, \dots, b_m\}$

Tutti i modi per scegliere un elemento da I e uno da J sono: $n \times m$, ovvero $I \times J = n \times m$

Se prendo **N** insiemi di cardinalità $n_1, n_2, \dots n_N$ avrò $N_1 \times N_2 \times N_3 \dots N_n = n_1 \times \dots n_n$

PERMUTAZIONI

Una permutazione di n oggetti = una delle possibili configurazioni (ordinamento) degli n oggetti:

Se consideriamo **n** oggetti distinti ⇒ PERMUTAZIONI SEMPLICI

$P_n = n!$, $P_0 = 0! = 1$ ⇐ PERMUTAZIONI SEMPLICI

<u>ES.</u> 18 persone siedono a caso su 18 sedie. In quanti modi si possono sedere?

$\boxed{18!}$

Se le persone sono divise in 3 gruppi da **6** qual è la probabilità che non ci siano infiltrati tra i gruppi?

$$P(E) = \frac{3!(6!)^3}{18!} = \frac{\#\text{CASI FAVOREVOLI}}{\#\text{CASI POSSIBILI}}$$

Se ho n OGGETTI di cui k sono uguali e $n-k$ distinti ⇒ PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONI

$$\hat{P}_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$$

Più ~~ge~~ in generale se ho n OGGETTI di cui $k_1, k_2, \dots, k_r$ gruppi di oggetti uguali

$$\hat{P}_n^{(k_1, \dots, k_n)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

DISPOSIZIONI di n OGGETTI E CLASSE k

è un raggruppamento <u>ordinato</u> di k degli n OGGETTI

Se gli oggetti non possono ripetersi

→ DISPOSIZIONI SEMPLICI

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\{a,b,c\}$ considero $D_{3,2} = \{a,b\},\{b,a\},\{a,c\},\{c,a\},\{b,c\},\{c,b\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_{3,2} = \frac{3!}{1!} = 6$$

<u>ES</u>

25 membri di una società

→ bisogna eleggere presidente e segretario

$$D_{25,2} = \frac{25!}{23!} = 25 \cdot 24$$

→ DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONI

$$\hat{D}_{n,k} = n^k$$

<u>ES</u>

Tutte le colonne possibili al TOTOCALCIO

$$\hat{D}_{n,k} = 3^{13}$$

COMBINAZIONI

Una combinazione di n oggetti di classe k è un raggruppamento <u>non ordinato</u> di k degli n oggetti

→ COMBINAZIONI SEMPLICI

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad 0 \leq k \leq n$$

① $C_{n,1} = D_{n,1}$

② $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = C_{n,n-k}$

③ $C_{n,0} = C_{n,n}$

④ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \Rightarrow$ IDENTITÀ DI TARTAGLIA

• $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

<u>DIM</u>

X INDUZIONE ① PASSO BASE, $n=1 \Rightarrow a+b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a+b$

② PASSO INDUTTIVO $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \Rightarrow (a+b)^n (a+b) = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right](a+b) =$

$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{n} a b^n + \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^{n+1} =$ ↳ vedi dietro

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right]a^n b + \dots + \left[\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} =$$

$$= \cancel{\binom{n}{0}} a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \dots + \binom{n+1}{n}ab^n + b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \dots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. QUANTI SONO I POSSIBILI SOTTOINSIEMI DI Ω? $= P(\Omega) = ?$

$$\# P(\Omega) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n$$

applico binomio di Newton

ES

BRIDGE, 52 CARTE, 13 CARTE A 4 GIOCATORI

PROBABILITÀ CHE UN GIOCATORE ABBIA LE STESSE CARTE DELLA MANO PRECEDENTE?

$\cancel{\frac{\#\text{CASI POSSIBILI}}{\#\text{CASI FAVOREVOLI}}}$ $\qquad \frac{\#\text{ CASI FAVOREVOLI}}{\#\text{ CASI POSSIBILI}}$

$\#$CASI POSSIBILI $= C_{52,13} = \binom{52}{13}$ $\qquad$ $\#$CASI FAVOREVOLI $= 1$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{\binom{52}{13}}$$

ES.

COMMISSIONE DI 5 PERSONE. VIENE ESTRATTA CASUALMENTE DA 6 UOMINI E 9 DONNE.

PROBABILITÀ CHE LA COMMISSIONE SIA COMPOSTA DA 3 UOMINI E 2 DONNE.

$\#$CASI POSSIBILI $= C_{15,5} = \binom{15}{5}$

$\#$CASI FAVOREVOLI $= \binom{6}{3}\binom{9}{2}$

→ COMBINAZIONI CON RIPETIZIONI

$\hat{C}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$ con k qualunque

DIM

Prendiamo n urne e k palline indistinguibili. In quanti modi si possono distribuire le k palline nelle n urne?

| ** | ** | * |

n = bastoncini
k = palline

$$\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

	ORDINE SI	ORDINE NO
RIPETIZIONE SI	$\hat{D}_{n,k}$	$\hat{C}_{n,k}$
RIPETIZIONE NO	$D_{n,k}$	$C_{n,k}$

~~SUPPONIAMO DI DISTRIBUI~~

Supponiamo di distribuire n palline distinte in r scatole

$n_1, n_2, n_3, \dots, n_r \Rightarrow n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

1° scatola $\binom{n}{n_1}$

2° scatola $\binom{n-n_1}{n_2}$

3° scatola $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$

- - - - - -

n° scatola $\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}$

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\cdots\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}}_{\text{COEFFICIENTE MULTINOMIALE}} = \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \cdots \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-\dots-n_{r-1})!}}{n_r!(0!)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$$

$\downarrow$ $\hat{P}$ permutazioni con ripetizione

$$(x_1 + x_2 + \dots x_r)^n = \sum_{n_1, n_2 \dots n_r} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!} (x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r})$$

n palline distinte

PROB. r scatole ci stiano $n_1, n_2, \dots, n_r$ RISPETTIVAMENTE

$\#$CASI FAVOREVOLI $= \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$ $\quad$ $\#$CASI POSSIBILI $= r^n$

$$P = \frac{\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}}{r^n} \Leftarrow \text{DISTRIBUZIONE MULTINOMIALE}$$

ES

BRIDGE 52 carte

A, B, C, D giocatori

- PROBABILITÀ CHE TUTTI I GIOCATORI ABBIANO LE STESSE CARTE DELLA MANO PRECEDENTE

- $\#$CASI FAVOREVOLI $= (13!)^4$ $\quad$ $\#$CASI POSSIBILI $= 52!$

- $\#$CASI POSSIBILI $= \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ $\quad$ $\#$CASI FAVOREVOLI $= 1$

$$\frac{(13!)^4}{52!} = \frac{1}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = \frac{1}{\frac{52!}{13!13!13!13!}} = \frac{(13!)^4}{52!}$$

ES

PROB. CHE IL GIOCATORE A ABBIA 7 PICCHE (BRIDGE)

$\# CP = \binom{52}{13}$ $\quad \# CF = \binom{13}{7}\binom{39}{6}$ $\quad P = \frac{\binom{13}{7}\binom{39}{6}}{\binom{52}{13}}$

PROB. CHE 1 GIOCATORE RICEVA 13 PICCHE

$\# CP = \binom{52}{13}$ $\quad \# CF = 4$

QUAL È LA PROB. CHE OGNI GIOCATORE RICEVA UN ASSO

$\# CP = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ $\quad \# CF = \binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}4!$

PROB. TRA 7 PERSONE TUTTE SIANO NATE IN GIORNI DIVERSI DELLA SETTIMANA

$\# CP = 7^7$ $\quad \# CF = 7!$

PROB CHE ALMENO 2 SIANO NATE NELLO STESSO GIORNO

~~$\# CP = 7^7$~~ ~~$\# CF =$~~ $A = ($2 NATE NELLO STESSO GIORNO$)$ $A^c =$

$P(A) = 1 - \frac{7!}{7^7}$

PROB CHE 2 PERSONE SIANO NATE DI DOMENICA E 2 MARTEDÍ × CASA

5 CARTE DA UN MAZZO DI 40

PROB. DI AVERE 3 ASSI E ALTRE DUE CARTE DIVERSE DALL'ASSO E TRA DI LORO

$\# CP = \binom{40}{5}$ $\quad \# CF = \binom{4}{3}\binom{9}{2}4^2$

PROB. DI AVERE 3 ASSI, 2 CARTE UGUALI?

$\# CP = \binom{40}{5}$ $\quad \# CF = \binom{4}{3}$

LANCIO DI DUE DADI REGOLARI

$$\Omega = \{ (k,j) : 1 \le k \le 6 ; 1 \le j \le 6 \}$$

evento $A_i = \{ \text{SOMMA} = i \} = \{ (k,j) \in \Omega \mid k+j = i \}$

$i = 2, 3, \dots 12$

$$P(A_i) = \frac{\# A_i}{\# \Omega} = \frac{\# A_i}{36}$$

- $A_2 = \{(1,1)\}$ • $A_{12} = \{(6,6)\}$

$P(A_2) = P(A_{12}) = \frac{1}{36}$ • $A_3 = \{(1,2);(2,1)\}$ • $A_{11} = \{(5,6);(6,5)\}$

$P(A_3) = P(A_{11}) = \frac{1}{18}$ • $A_4 = \{(1,3);(3,1);(2,2)\}$ • $A_{10} = \{(4,6);(6,4);(5,5)\}$

$P(A_4) = P(A_{10}) = \frac{1}{12}$ • $A_5 = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$ • $A_9 = \{(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)\}$

$P(A_5) = P(A_9) = \frac{1}{9}$ • $A_6 = \{(1,5),(5,1),(4,2),(2,4),(3,3)\}$

• $A_8 = \{(5,3),(3,5),(4,4),(6,2),(2,6)\}$

$P(A_6) = P(A_8) = \frac{5}{36}$ • $A_7 = \{(4,3),(3,4),(5,2),(2,5),(6,1),(1,6)\}$

$P(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{ \text{SOMMA ALMENO } 5 \} = \{ (k,j) \in \Omega \mid k+j \ge 5 \} = A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup \dots A_{12}$

$$P(B) = P(A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup \dots \cup A_{12}) = \cancel{\Sigma} P(A_5) + P(A_6) + \dots + P(A_{12}) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - P(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 + (P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

- Se $A \cap B \neq \emptyset$ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ⇐ FORMULA DI POINCARÉ

DIM

$$A \cup B = A \cup (A^c \cap B) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \qquad P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \blacksquare$$

LANCIO DI 2 DADI

$A = \{\text{ALMENO 1 DADO DIA 6}\} = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{\text{IL 1° DADO DA 6}\}$, $A_2 = \{\text{IL 2° DADO DA 6}\}$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(6,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

$$P(\text{NESSUN DADO DIA 6}) = P(B) = 1 - P(A) = \frac{25}{36}$$

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

DIM $P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ ■

ES

3 GIORNALI **a**, **b**, **c**

LETTORI **a** $= 20\%$ **b** $= 16\%$ **c** $= 14\%$ **a** e **b** $= 8\%$ **a** e **c** $= 5\%$ **b** e **c** $= 4\%$

a e **b** e **c** $= 2\%$

$P(\underbrace{\text{CITTADINO NON LEGGA ALCUN GIORNALE}}_{E}) = ?$ $A =$ legge a $B =$ legge b $C =$ legge c

$E = A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$ $P(E) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$

$= 20\% + 16\% + 14\% - 8\% - 5\% - 4\% + 2\% = 35\% = 0{,}35$

$P(E) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 0{,}65.$

- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

DIM X INDUZIONE $P(A_1 \cup A_2) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ $\boxed{n=2}$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup A_{n+1}\right) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + P(A_{n+1}) \leq$

$\leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k)$

Se B evento t.c. $P(B)=0$ [QUASI IMPOSSIBILE]

① $P(A\cap B)=0$

② $P(A\cup B)=P(A)$

DIM

① $A\cap B\subset B \Rightarrow P(A\cap B)\le P(B)=0 \Rightarrow 0\le P(A\cap B)\le 0$

② ~~$P(A\cup B)=P(A)+P(B$~~ $A\cup B = A\cup(A^c\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)+P(A^c\cap B)=$
$=P(A)$

Se C evento t.c. $P(C)=1$ [QUASI CERTO]

① $P(A\cap C)=P(A)$

② $P(A\cup C)=1$

DIM

① $P(A)=P(A\cap C)+P(A\cap C^c)$ oss. $P(C)=1 \Rightarrow P(C^c)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A)=P(A\cap C)$

② $P(A\cup C)\ge P(C)$
$1\ge P(A\cup C)\ge P(C)=1 \Rightarrow P(A\cup C)=1$

TEOREMA

La PROBABILITÀ è una funzione d'insieme continua.

Presa una successione di eventi A_n convergente ad A

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = P(A)$$

DIM ① $A_n \downarrow A$ ② $A_n \uparrow A$ ③ $A_n \to A$

① $A_n \downarrow A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ $\quad A_n = A_n\cap\Omega = A_n\cap(A\cup A^c) = (A_n\cap A)\cap(A_n\cap A^c) =$

poiché $A_n\supset A \Rightarrow A_n = A\cup(A_n\cap A^c) \Rightarrow P(A_n) \overset{*}{=} P(A)+P(A_n\cap A^c)$

* infatti $A_n\cap A^c\cap A=\emptyset$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(A)+\lim_{n\to+\infty} P(A_n\cap A^c)$ $\qquad A_n\cap A^c \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A^c) = A^c\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$
$= A^c_n\cap A = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(A) + P(\underbrace{\lim_{n\to+\infty} A_n\cap A^c}_{\to 0}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(A)$ ■

② $A_n\uparrow A \Rightarrow A_n^c \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = A^c$ $\qquad P(A_n) = 1-P(A_n^c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 1-\lim_{n\to+\infty} P(A_n^c) = 1-P(A^c) = P(A)$ ■

↳ vedi dietro

(3) $A_n \to A \quad A = \liminf A_n = \limsup A_n$

$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A$

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \leq \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\lim_{n\to+\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \leq P\left(\lim_{n\to+\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{A}\Big) \leq \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \leq P\Big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n}_{A}\Big) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(A) \quad \blacksquare$$

(5) ASSIOMA $\Rightarrow$ P CONTINUA

(4) ASSIOMA $\Rightarrow$ ADDITIVITÀ

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \text{ se } A_k \cap A_j = \emptyset \quad k \neq j \Rightarrow \text{ADDITIVITÀ FINITA}$$

DIM
X INDUZIONE

(1) $n = 2 \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ per il 4° assioma

(2) HP enunciato vero per n generico

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) =$$

PASSAGGIO IMPORTANTE

$$\text{poiché } \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{(A_k \cap A_{n+1})}_{\emptyset} = \emptyset \text{ per 4° assioma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + P(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \quad \blacksquare$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \text{ se } A_k \cap A_j \neq \emptyset \quad k \neq j \Rightarrow \text{ADDITIVITÀ COMPLETA}$$

DIM

$$\lim_{n\to+\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n\to+\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

ADDITIVITÀ FINITA $\not\Rightarrow$ COMPLETA

ADDITIVITÀ COMPLETA $\Rightarrow$ FINITA

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Dati due eventi A, B

$P(A|B) \Rightarrow$ la probabilità che si verifichi A sapendo che si è verificato B.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

IMPOSTAZIONE CLASSICA

$$P(A|B) = \frac{\#(A\cap B)/\#\Omega}{\#B/\#\Omega} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Es

$\Omega = \{(k,j) : 1 \le k \le 6, 1 \le j \le 6\}$

$A_4 = \{(2,2),(1,3),(3,1)\} \quad P(A_4) = \frac{1}{12}$

$B (\subset \Omega) = \{$ IL PRIMO DADO DA 2 $\} = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$

$$P(A_4|B) = \frac{P(A_4\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6}$$

SPAZIO DI PROBABILITÀ CONDIZIONATO $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|B))$

$P(A|B)$ è una probabilità. Infatti soddisfa gli assiomi di Kolmogorov

① $\mathcal{A}$

② $P(A|B) \ge 0 \ \forall A \in \mathcal{A} \quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \ge 0$

③ $P(\Omega|B) = 1 \quad P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

④ Presi $A, B \mid A\cap B = \emptyset \quad P(A\cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$

$$P(A\cup B|C) = \frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)} = \frac{P((A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(C)} \overset{④}{=}$$

$$= \frac{P(A\cap C) + P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} + \frac{P(B\cap C)}{P(C)}$$

⑤ $A_n \downarrow \emptyset \quad \lim_{n\to+\infty} P(A_n|B) = 0 \Rightarrow \frac{P(A_n\cap B)}{P(B)} \Rightarrow$ poiché $A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow A_n \cap B \downarrow \emptyset \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{P(A_n\cap B)}{P(B)} \overset{⑤}{=} \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$$

PROPRIETÀ

① $A\cap B=\emptyset \quad P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=0$

② $P(\Omega|B)=1=P(B|B)$

③ $P(A|\Omega)=P(A)$

④ $A\subset B \Rightarrow P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}$

$B\subset A \Rightarrow P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=1$

⑤ LEGGE DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE

- $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)=P(B|A)\cdot P(A)$

⑥ FORMULA DELLA CATENA

$$\cancel{P(\ldots)}\ P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\ldots\ldots P\left(A_n\Big|\bigcap_{k=1}^{n-1}A_k\right)$$

DIM
X INDUZIONE

FARE A CASA XESAME

⑦ FORMULA DI POINCARÉ

$$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(A\cap B|C)$$

DIM

$$P(A\cup B|C)=\frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}=\frac{P((A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}+\frac{P(B\cap C)}{P(C)}-\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=$$

$$=P(A|C)+P(B|C)-P(A\cap B|C) \blacksquare$$

ES

URNA $\begin{cases} b \text{ palline bianche} \\ r \text{ palline rosse} \\ a \text{ palline arancioni}\end{cases}$ $\quad n=b+r+a$ $\Rightarrow$ estratta una pallina e messa da parte $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ estratta una seconda pallina

$\underbrace{P(\text{SECONDA PALLINA ESTRATTA SIA BIANCA})}_{B_2}=?$ $\quad B_1=$ estratta bianca $R_1=$ estratta rossa $A_1=$ estratta arancioni

$B_1\cup R_1\cup A_1=\Omega \qquad P(B_1)=\frac{b}{n} \quad P(R_1)=\frac{r}{n} \quad P(A_1)=\frac{a}{n}$

$P(B_2)=P(B_2\cap\Omega)=P(B_2\cap(B_1\cup R_1\cup A_1))=P((B_2\cap B_1)\cup(B_2\cap R_1)\cup(B_2\cap A_1))\Rightarrow$

poiché $B_2\cap B_1\neq\emptyset,\ B_2\cap R_1\neq\emptyset\ B_2\cap A_1\neq\emptyset \Rightarrow P((B_2\cap B_1)\cup(B_2\cap R_1)\cup(B_2\cap A_1))=\cancel{P(B)}$
$=P(B_2\cap B_1)+P(B_2\cap R_1)+P(B_2\cap A_1)=P(B_1)P(B_2|B_1)+P(R_1)P(B_2|R_1)+P(A_1)P(B_2|A_1)=$
$=\frac{b}{n}\frac{b-1}{n-1}+\frac{r}{n}\frac{b}{n-1}+\frac{a}{n}\frac{b}{n-1}=\frac{b(b-1+r+a)}{n(n-1)}=\frac{b(n-1)}{n(n-1)}=\frac{b}{n}$

ES

5 PALLINE NUMERATE DA 1 a 5

2 ESTRAZIONI SENZA REIMBUSSOLAMENTO

$P(E) = ?$ $A =$ i due numeri estratti siano pari
$B =$ i due numeri estratti siano dispari
$C =$ il secondo estratto sia pari.

$P_1 = \{\text{PRIMO PARI}\}$ $P_2 = \{\text{SECONDO PARI}\}$

$A = P_1 \cap P_2$ $P(A) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P(P_2|P_1) = \cancel{P(P_1)}\, \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$B \Rightarrow D_1 = \{\text{PRIMO DISPARI}\}$ $D_2 = \{\text{SECONDO DISPARI}\}$

$B = D_1 \cap D_2$ $P(B) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2|D_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

$C \Rightarrow \Omega = P_1 \cup D_1 \Rightarrow P(C) = P(C \cap \Omega) = P(C \cap P_1) + P(C \cap D_1) =$
$= P(P_2 \cap P_1) + P(P_2 \cap D_1) = \frac{1}{10} + P(D_1)P(P_2|D_1) = \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

$\boxed{\text{TEOREMA (BAYES)}}$

① $E : P(E) > 0$
② A_j INCOMPATIBILI
③ $E \subset \bigcup_j A_j$

$$\underbrace{P(A_r|E)}_{\text{a posteriori}} = \frac{P(E|A_r)\overbrace{P(A_r)}^{\text{a priori}}}{\sum_j P(A_j)\underbrace{P(E|A_j)}_{\text{VEROSIMIGLIANZA}}}$$

DIM

- $$P(A_r|E) = \frac{P(A_r \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A_r)P(E|A_r)}{P(E)} \overset{③}{=} \frac{P(A_r)P(E|A_r)}{P(E \cap \bigcup_j A_j)} =$$

$$= \frac{P(A_r)P(E|A_r)}{P(\bigcup_j (E \cap A_j))} \overset{*}{=} \frac{P(A_r)P(E|A_r)}{\sum_j P(E \cap A_j)} =$$

$$* (E \cap A_1) \cap (E \cap A_2) = E \cap \underbrace{A_1 \cap A_2}_{\emptyset} = \emptyset$$

$$= \frac{P(A_r)P(E|A_r)}{\sum_j P(A_j)P(E|A_j)}$$

Es

3 scrivanie indistinguibili
↳ 2 cassetti

$\Rightarrow$ 1ª: 1 moneta d'oro in ogni cassetto
2ª: 1 moneta d'oro e 1 d'argento
3ª: 2 monete d'argento (1 in ogni cassetto)

APRIAMO A CASO UN CASSETTO $\Rightarrow$ MONETA D'ORO $\Rightarrow$ PROB. CHE ANCHE L'ALTRO CASSETTO CONTENGA UNA MONETA D'ORO?

$A_1 =$ IL CASSETTO SCELTO $\in 1^a$ $B =$ CASSETTO SCELTO CON MONETA D'ORO
$A_2 =$ " " " $\in 2^a$
$A_3 =$ " " " $\in 3^a$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{1/3 \cdot 1}{1/3\left(1 + \frac{1}{2} + 0\right)} = \frac{2}{3}$$

Es

STRUMENTO RILEVA UN DIFETTO CON PROB. 0,999 IN UNA COMP. DIFETTOSA
" " " CON PROB. 0,002 IN UNA COMP. BUONA

1% DI COMPONENTI È DIFETTOSO

PROB. COMPONENTE RILEVATA SIA REALMENTE DIFETTOSA?

$D =$ (COMPONENTE DIFETTOSA) $\quad D^c =$ (COMPONENTE NON DIFETTOSA)

$R =$ (STRUMENTO SCARTA COMP)

$$P(D|R) = \frac{P(R|D)P(D)}{P(D)P(R|D)+P(D^c)P(R|D^c)} = \frac{0{,}999 \cdot 0{,}01}{0{,}999 \cdot 0{,}01 + 0{,}002 \cdot 0{,}99} = 0{,}83$$

OSS

Se ~~P~~ per noi $P(A) = 1 \Rightarrow P(A^c) = 0$

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{\underbrace{P(E|A)P(A)}_{1}+\underbrace{P(E|A^c)P(A^c)}_{0}} = 1 = P(A)$$

DEF

Presi due eventi A e B si dicono INDIPENDENTI o STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI se

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A)P(B)} \Rightarrow P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B)$$

Se B quasi IMPOSSIBILE $P(A\cap B) = 0 = P(B)\cdot P(A)$

Se B quasi CERTO $P(A\cap B) = P(A) = P(B)\cdot P(A)$

Es

LANCIO 2 VOLTE 1 MONETA

$\left.\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix}\right\}$ SONO IND? $\quad P(T_1\cap T_2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = P(T_1)\cdot P(T_2)$

Es

LANCIO DEL DADO

$\left.\begin{matrix} A = \{5,6\} \\ B = \{3,5,6\} \end{matrix}\right\}$ SONO IND? $\quad P(A\cap B) = \frac{1}{6} = P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Se $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{5\}) = \frac{1}{10}$ e $P(\{6\}) = \frac{1}{2}$

$$P(A\cap B) = P\{6\} = \frac{1}{2} \neq \underbrace{P(A)}_{\frac{6}{10}}\cdot\underbrace{P(B)}_{7/10} = \frac{42}{100}$$

A, B INDIPENDENTI $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} A, B^c \\ A^c, B \\ A^c, B^c \end{array}\right\}$ INDIPENDENTI

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

- $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$
- $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) =$

$= 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^c)P(B^c)$

Dati gli eventi A, B, C essi sono STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI SE:

$$\begin{cases} ① \; P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \\ ② \; P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ ③ \; P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \\ ④ \; P(A \cap C) = P(A)P(C) \end{cases}$$

LANCIO 3 VOLTE UNA MONETA

$$\Omega = \{TTT, CCC, TCC, CTC, CCT, CTT, TCT, TTC\}$$

$T_i =$ (ESCE TESTA ALL'i-ESIMO LANCIO) $\quad i = 1, 2, 3$

$$P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(TTT) = \frac{1}{8} = P(T_1)P(T_2)P(T_3)$$

$$P(T_1 \cap T_2) = P(TTT \cup TTC) = \frac{1}{4} = P(T_1)P(T_2) \ldots$$

ESEMPIO DADO A 4 FACCE $\Rightarrow$ GIALLO, ROSSO, VERDE, GRV – COLORE DELLA FACCIA SUL PIANO DI APPOGGIO

$$P(G) = \frac{1}{2} = P(R) = P(V)$$

$$\underset{P(G)P(R)}{\underset{\parallel}{P(G \cap R) = \frac{1}{4}}} \qquad \underset{P(G)P(V)}{\underset{\parallel}{P(G \cap V) = \frac{1}{4}}} \qquad \underset{P(V)P(R)}{\underset{\parallel}{P(V \cap R) = \frac{1}{4}}}$$

$$P(G \cap R \cap V) = \frac{1}{4}$$
$$\neq$$
$$P(G)P(R)P(V) = \frac{1}{8}$$

LANCIO 3 VOLTE UNA MONETA

$\emptyset$ è pari

$A_1 = \{$ALMENO 2 TESTE$\}$ $A_2 = \{$NUMERO PARI DI TESTE$\}$

$A_3 = \{$CROCE AL PRIMO LANCIO$\}$

- $A_1, A_2, \dots, A_m$ SONO INDIPENDENTI se:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_m) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_m) \dots$$

$\vdots$

$i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k \quad 1 \leq k \leq m$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$$

CONSIDERO N LANCI INDIPENDENTI DI UNA MONETA

$P(T) = p$

(PROB. CHE ESCA TESTA NEI PRIMI 3 ed ESCA CROCE NEGLI ULTIMI 3) =

$$= (T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_{m-2}^c \cap T_{m-1}^c \cap T_m^c)$$

$$P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_{m-2}^c \cap T_{m-1}^c \cap T_m^c) = P(T_1)P(T_2)P(T_3)P(T_{m-2}^c)P(T_{m-1}^c)P(T_m^c) = p^3(1-p)^3$$

- INDIPENDENZA CONDIZIONATA:

A, B sono condizionatamente indipendenti se:

$$P(A \cap B | C) = P(A|C)P(B|C)$$

INDIPENDE

- ESTRAZIONE DALL'URNA CON RIPETIZIONE

K PALLINE ARANCIONI
$N-K$ PALLINE BIANCHE } N PALLINE

ESTRAZIONI SUCCESSIVE DI UNA PALLINA DALL'URNA CON REINSERIMENTO.

$P(\text{pallina arancione}) = \frac{K}{N} = p$

$P(\text{pallina bianca}) = 1-p$

CONSIDERO 5 ESTRAZIONI $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \mid \omega_i = A \text{ o } \omega_i = B\}$

$E_1 = (\text{DELLE 5 PALLINE ESTRATTE 1 È ARANCIONE}) = \{(\underbrace{ABBBB}_{\bar\omega_1}, \underbrace{BABBB}_{\bar\omega_2}, \underbrace{BBABB}_{\bar\omega_3}, \underbrace{BBBAB}_{\bar\omega_4}, \underbrace{BBBBA}_{\bar\omega_5})\}$

$P(E_1) = P(\bar\omega_1) + P(\bar\omega_2) + P(\bar\omega_3) + P(\bar\omega_4) + P(\bar\omega_5)$

$P(\bar\omega_1) = P(ABBBB) = P(\underbrace{A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c}_{\text{SONO INDIPENDENTI}}) = P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c)P(A_4^c)P(A_5^c) = p(1-p)^4$

$P(E_1) = 5p(1-p)^4$

CONSIDERO ORA n ESTRAZIONI $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_j = A \text{ o } \omega_j = B\}$

$E_1 = (A\underbrace{B, \dots, B}_{n-1} ; BA\underbrace{B \dots B}_{n-2} ; \dots B \dots ; \underbrace{B \dots B}_{n-1}A)$

$P(E_1) = P(\bar\omega_1) + P(\bar\omega_2) + \dots + P(\bar\omega_n)$

$P(\bar\omega_1) = P(A, \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \cancel{P(A_1)} P(A_1 \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c) = P(A_1)P(A_2^c)\dots P(A_n^c) = p(1-p)^{n-1}$

$P(E_1) = n p (1-p)^{n-1}$

CASO IN CUI

$E_k = (\text{ESCONO } k \text{ PALLINE ARANCIONI SE } n \text{ ESTRAZIONI}) \quad 0 \le k \le n$

$P(E_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ← FORMULA DI BERNOULLI

↳ DISTRIBUZIONE BINOMIALE

SCHEMA (FORMULA?) DI BERNOULLI dà la probabilità di ottenere k successi su n prove.

Dati $A_1, A_2, \dots A_n$ INDIPENDENTI $P(A_i) = p$ per $i = 1, 2, \dots n$

$P(\text{ESATTAMENTE } k \text{ SUCCESSI SU } N \text{ PROVE}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \le k \le n$

CONSIDERO n estrazioni ma senza ~~estrazioni~~ reinserimento

$$P(\text{estrarre } k \text{ palline } A \text{ su } n \text{ estrazioni}) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} = \#\text{CASI FAVOREVOLI}}{\binom{N}{n} = \#\text{CASI POSSIBILI}}$$

con $0 \leq k \leq n$
$0 \leq n-k \leq N-K$
$0 \leq n \leq N$

DISTRIBUZIONE IPER-GEOMETRICA

ESERCIZI

① I bulloni di una ditta sono difettosi con PROB 0,2
Confezioni con 3 bulloni.
Prob. che in una conf. ci sia al più un pezzo difettoso?

② 8 ROSSE, 4 BIANCHE — 4 senza reins.
Prob. estrarne al più 2 ROSSE?

ESERCIZI

4 BIANCHE

3 NERE

2 ESTRAZIONI CON RIMPIAZZO

① PROB CHE LE PALLINE ESTRATTE SIANO DELLO STESSO COLORE?

② PROB. CHE ALMENO UNA PALLINA ESTRATTA SIA NERA?

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2)\} \quad B_1, B_2, B_3, B_4, N_1, N_2, N_3$$

$$P(\omega) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{D_{7,2}} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$A = (\text{LE PALLINE SONO DELLO STESSO COLORE}) = \{(\text{DUE BIANCHE}) \cup (\text{DUE NERE})\}$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4^2+3^2}{7^2} = \frac{25}{49}$$

$B = (\text{ALMENO UNA PALLINA NERA}) \qquad B^c = (\text{TUTTE E DUE BIANCHE})$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{4^2}{7^2} = \frac{33}{49}$$

OPPURE

$Z_1 = \{1° \text{ ESTRATTA BIANCA}\} \qquad W_1 = \{1° \text{ ESTRATTA NERA}\}$
$Z_2 = \{2° \text{ '' } \text{ '' }\} \qquad W_2 = \{2° \text{ '' } \text{ '' }\}$

$$A = (Z_1 \cap Z_2) \cup (W_1 \cap W_2)$$

$$P(A) = P((Z_1 \cap Z_2) \cup (W_1 \cap W_2)) = P(Z_1 \cap Z_2) + P(W_1 \cap W_2) = P(Z_1)P(Z_2) + P(W_1)P(W_2) =$$

$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7} + \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} = \frac{25}{49}$$

$P(B) = P(W_1 \cup W_2) = P(W_1) + P(W_2) - P(W_1 \cap W_2) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} - \frac{9}{49} = \frac{33}{49}$

ESERCIZIO

LANCIO COPPIA DI DADI FINCHÉ NON APPARE UNA SOMMA **PARI** A 5 O 7.

PROB $D = \{5 \text{ PRIMA } 7\}$? $A_i = \{(5 \text{ LANCIO } i\text{-esimo})\}$
$B_i = \{(7 \text{ LANCIO } i\text{-esimo})\}$

$C_i = \{(\text{NÉ } 5 \text{ NÉ } 7 \text{ LANCIO } i\text{-esimo})\} = A_i^c \cap B_i^c$ $\quad E_i = \{5 \text{ PRIMA } 7 \text{ nel lancio } i\text{-esimo}\} =$
$= C_1 \cap C_2 \cap \dots C_{i-1} \cap A_i$

$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

$$P(D) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{i-1} \cap A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(C_1)P(C_2)\dots P(C_{i-1})P(A_i) \qquad P(C_i) = P(A_i^c \cap B_i^c) = P((A_i \cup B_i)^c) =$$

$$= 1 - P(A_i \cup B_i) = 1 - P(A_i) + P(B_i) = 1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36} = \frac{26}{36}$$

$$P(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \frac{4}{36} = \frac{4}{36} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1}} = \frac{4}{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{26}{36}} = \frac{4}{36} \cdot \frac{1}{\frac{10}{36}} = \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{10}_5} = \frac{2}{5}$$

ESERCIZIO

URNA A 6 BIANCHE, 5 ROSSE $\qquad$ URNA B 4 BIANCHE, 8 ROSSE

SI ESTRAGGONO DUE PALLINE IN BLOCCO DA B e LE METTIAMO IN A. SI ESTRAE UNA PALLINA DA A.

PROB (ESTRARRE UNA PALLINA BIANCA DA A) = **C**

$\Omega_B = T_{20} \cup T_{11} \cup T_{02}$

$$P(C) = P(C \cap \Omega_B) = P(C \cap (T_{20} \cup T_{11} \cup T_{02})) = P(C \cap T_{20}) + P(C \cap T_{11}) + P(C \cap T_{02}) =$$

$$= P(T_{20})P(C|T_{20}) + P(T_{11})P(C|T_{11}) + P(T_{02})P(C|T_{02})$$

$$P(T_{20}) = \frac{\binom{8}{0}\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} \qquad P(C|T_0) = \frac{8}{13} \ \dots$$

$$P(C) = \frac{\binom{8}{0}\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} \frac{8}{13} + \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} \frac{7}{13} + \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{0}}{\binom{12}{2}} \frac{6}{13} = \frac{220}{429}$$

PROB (ALMENO UNA PALLINA BIANCA SIA STATA ESTRATTA DA B, DATO CHE LA PALLINA ESTRATTA A È BIANCA) = D

$D = (\text{ALMENO UNA BIANCA da } B) = T_{20} \cup T_{11}$

$$P(D|C) = P(T_{20} \cup T_{11}|C) = P(T_{20}|C) + P(T_{11}|C) = \frac{P(C|T_{20})P(T_{20})}{P(C)} +$$

$$+ \frac{P(C|T_{11})P(T_{11})}{P(C)} = \frac{\frac{1}{11} \cdot \frac{8}{13} + \frac{16}{33} \cdot \frac{7}{13}}{\frac{220}{429}}$$

ESERCIZIO

URNA a ARANCIONI
b BIANCHE

~~si estrae una~~ pallina e la si rimette nell'urna insieme a c palline dello stesso colore di quella estratta (procedura iterata n volte)

$A_n = \{$la pallina estratta alla n-esima estrazione è arancione$\}$

- $P(A_2) = ?$ • $P(A_1 | A_2) = ?$ • $P(A_n) = ?$

$$P(A_2 \cap \Omega) = P(A_2 \cap (A_1 \cup B_1)) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1) =$$

$$= P(A_1) P(A_2|A_1) + P(B_1) P(A_2|B_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{a+b}$$

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{a}{a+b}\frac{c+a}{a+b+c}}{\frac{a}{a+b}} = \frac{c+a}{a+b+c}$$

$$P(A_n) = P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_3 \cap \Omega) = \cancel{P(A_3 \cap ((A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)))} =$$

$$\cancel{P(A_3 | A_1 \cap B_1) + P(A_3 | A_1 \cap}$$ $\Omega = (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap A_2)$

ESERCIZIO

P(BULLONE DIFETTOSO) $= 0,2$

CONF. DA 3 PEZZI

PROB. CHE IN UNA CONF CI SIA AL PIÙ UN PEZZO DIFETTOSO

$E_k = $ (k PEZZI DIFETTOSI SU 3), ~~$0 \le k \le 3$~~ $k = 0, 1, 2, 3$

BERNOULLI

$$P(E_0 \cup E_1) = P(E_0) + P(E_1) = \binom{3}{0}(1-0,2)^3 + \binom{3}{1}(0,2)(1-0,2)^2 =$$

$$= (0,8)^3 + (0,8)^2(0,6)$$

ESERCIZIO

A, B LANCIANO A TURNO UNA MONETA REGOLARE

COMINCIA A

VINCE CHI PER PRIMO T

P(A VINCE)

$A_i = $ (A vince al suo lancio i-esimo lancio) $= (\overbrace{\underbrace{CC\ldots C}_{2i-2}T}^{2i-1})$

$$(A \text{ VINCE}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow P(A \text{ VINCE}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\overbrace{\underbrace{CC\ldots C}_{2i-2}T}^{2i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i-1}} = \cancel{\ldots}$$

$B^c = A \cup N$ non vince nessuno

ma $P(N) = 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}$

$$= \cancel{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} 2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

ESERCIZIO

LANCIO UNA MONETA REGOLARE

$A_n = (T \text{ nei primi } n \text{ LANCI})$

$\lim_{n\to\infty} P(A_n) \quad A_1 = (T) \quad A_2 = (TT) \quad A_3 = (TTT) \dots A_n = (\underbrace{TT\dots T}_{n \text{ volte}})$

poiché $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \Rightarrow A_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (TT\dots T\dots) = (\text{SEMPRE } T)$

$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to+\infty} A_n) = P(\text{SEMPRE } T) = 0$

OPPURE $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(\underbrace{TT\dots T}_{n \text{ volte}}) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

ESERCIZIO

LANCIO MONETA TRUCCATA

$P(T_i) = p$

$A = (1^a\ T \text{ esce al } 3^\circ \text{ lancio})$

$P(A) = (1-p)^2 p = P(C)P(C)P(T)$

$B = (4^\circ\ T \text{ esce all'} 8^\circ \text{ lancio})$

$P(B) = \binom{7}{3} p^3 (1-p)^4 p = P((3\,T \text{ nei primi } 7 \text{ lanci}) \cap (T \text{ ALL'} 8^\circ))$

$C = (\text{ESCONO ESATTAMENTE } 2\,T \text{ FRA IL } 5^\circ \text{ e IL } 9^\circ \text{ LANCIO})$

$P(C) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$

~~ESERCIZIO~~ CALCOLARE PROB. CHE LA 3^a TESTA esce al $(h+k)$ LANCIO sapendo che la prima T esce all'h-esimo lancio.

$$\frac{P((T \text{ al lancio } h) \cap (3^\circ \text{ teste al lancio } h+k))}{P(T \text{ al lancio } h)} = \frac{\cancel{(1-p)^{h-1} p} \binom{k-1}{1} p (1-p)^{k-2} p}{\cancel{(1-p)^{h-1} p}} =$$

$$= \binom{k-1}{1} p (1-p)^{k-2} p$$

ESERCIZIO:

P_K = PROB UNA FAMIGLIA ABBIA K FIGLI

$$P_K = \begin{cases} a & K = 0,1 \\ \frac{1-2a}{2^{K-1}} & K = 2,3,\dots \end{cases} \qquad a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

SUPPONENDO CHE NELLA FAMIGLIA CI SIANO 2 MASCHI

PROB. CHE LA FAMIGLIA ABBIA 2 FIGLI? $\quad X$ = n° figli

$$P(2\text{ FIGLI} \mid 2M) = P(X=2 \mid 2M) = \frac{P((X=2)\cap(2M))}{P(2M)} =$$

$$= \frac{P(X=2)\,P(2M \mid X=2)}{P(2M)} = \frac{P(X=2)\,P(2M\mid X=2)}{P(2M \cap \underbrace{\bigcup_{k=0}^{\infty} X=k}_{\Omega})} =$$

$$= \frac{P(X=2)\,P(2M\mid X=2)}{\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\,P(2M\mid X=k)} = \frac{\frac{1-2a}{2}\,\frac{1}{4}}{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-2a}{2^{k-1}}\binom{k}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k} = \frac{1}{2^3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}\,\frac{k(k-1)}{2}\,\frac{1}{2^k}} =$$

$$\left[P(2M\mid X=k) = \binom{k}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \qquad = \frac{1}{2^3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-2)}{2^{2k-1}\cdot 2}} = \frac{2}{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}} =$$

$$= (k-2=i) = \frac{2}{\sum_{k=0}^{\infty} (i+2)(i+1)\left(\frac{1}{4}\right)^i} = \frac{\frac{2}{2}}{(1-\frac{1}{4})^3} = \frac{27}{64}$$

ESERCIZIO

Giocatore, ad ogni partita, gioca 1 gettone su DISPARI alla ROULETTE (0...36)

smette di giocare quando possiede 3 gettoni oppure se perde tutto

PROB. di vittoria e perdita

$$D_r = (\text{DISPARI } r\text{-esima puntata}) \qquad P(D_r) = \frac{18}{37} = p$$

$$P(V) \qquad V = (D_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap D_2^c \cap D_3 \cap D_4) \cup (D_1 \cap D_2^c \cap D_3 \cap D_4^c \cap D_5 \cap D_6) \dots$$

$$P(V) = P(D_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap D_2^c \cap D_3 \cap D_4) + P(D_1 \cap D_2^c \cap D_3 \cap D_4^c \cap D_5 \cap D_6) + \dots =$$

$$= p^2 + p^3(1-p) + p^4(1-p)^2 + \dots = p^2\left(1 + p(1-p) + p^2(1-p^2) + \dots\right) =$$

$$= p^2 \sum_{k=0}^{\infty} [p(1-p)]^k = p^2 \cdot \frac{1}{1-p(1-p)} \ *$$

$P(R)$ $\quad R = (D_1^c) \cup (D_1 \cap D_2^c \cap D_3^c) \cup (D_1 \cap D_2^c \cap D_3 \cap D_4^c \cap D_5^c)$

$$P(R) = P(D_1^c) + P(D_1 \cap D_2^c \cap D_3^c) + P(D_1 \cap D_2^c \cap D_3 \cap D_4^c \cap D_5^c) + \dots =$$

$$= (1-p) + p(1-p)^2 + p^2(1-p)^3 + \dots = (1-p)\sum_{k=0}^{\infty}(p(1-p))^k = \frac{1-p}{1-p(1-p)}$$

ESERCIZIO

$p = \frac{K}{N}$ $\quad (T_k = n) = (k\text{-esimo successo } n^\circ \text{ prova})$

① CON REINS. $\quad (T_k = n) = (k-1 \text{ successi } n-1 \text{ prove}) \cap (\text{successo } n^\circ \text{ prova})$

$$P(T_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}\, p$$

② SENZA REINS. $\quad P(T_k = n) = P((k-1 \text{ successi } n-1 \text{ prove}) \cap (\text{successo } n^\circ \text{ prova})) =$

$= P(k-1 \text{ successi } n-1 \text{ prove})\, P(\text{successo ultima prova} \mid k-1 \text{ succ. } n-1 \text{ prove}) =$

$$= \frac{\binom{K}{k-1}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n-1}} \cdot \frac{K-k+1}{N-n+1}$$

ESERCIZIO

3 PALLINE DA 1 a 3 $\quad$ concordanza fra num pall. estratte e num sulla pallina

$A_k = (k\text{-esima concordanza}) \quad k = 1, 2, 3$

$C = (\text{almeno una concordanza}) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$$P(C) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) -$$

$$P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3\frac{2!}{3!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2!}{3!}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3!}$$

VARIABILE ALEATORIA

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

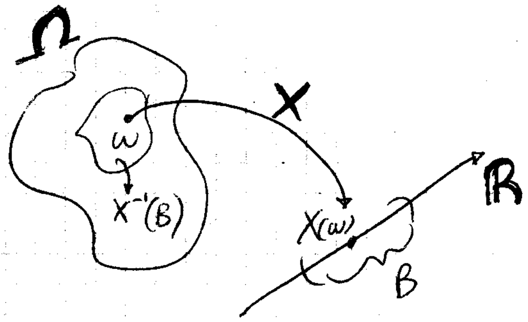
$X: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{CLASSE DI BOREL}})$

$X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P^*)$

dato $B \in \mathcal{B} \Rightarrow P_X^*(B) = P(X \in B) = P(\underbrace{\{\omega : \Omega : X(\omega) \in B\}}_{X^{-1}(B)}) = P(X^{-1}(B))$

$X^{-1}(B)$ deve $\in \mathcal{A}$, ovvero

X deve essere misurabile



PROPRIETÀ

1. $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$
2. $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
3. $B \subset C \Rightarrow X^{-1}(B) \subset X^{-1}(C)$
4. $X^{-1}(B^c) = (X^{-1}(B))^c$
5. $X^{-1}(\bigcap_k A_k) = \bigcap_k X^{-1}(A_k)$
6. $X^{-1}(\bigcup_k A_k) = \bigcup_k X^{-1}(A_k)$
7. $B \cap C = \emptyset \Rightarrow X^{-1}(B) \cap X^{-1}(C) = \emptyset$

Dim 5 $\Rightarrow$ $\omega \in X^{-1}(\bigcap_k A_k) \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_k X^{-1}(A_k)$ infatti:

$(\Rightarrow)$ $\omega \in X^{-1}(\bigcap_k A_k) \Rightarrow X(\omega) \in \bigcap_k A_k \Rightarrow X(\omega) \in A_k \ \forall k \Rightarrow \omega \in X^{-1}(A_k) \ \forall k \Rightarrow$
$\Rightarrow \omega \in \bigcap_k X^{-1}(A_k)$

$(\Leftarrow)$ $\omega \in \bigcap_k X^{-1}(A_k) \Rightarrow \omega \in X^{-1}(A_k) \ \forall k \Rightarrow X(\omega) \in A_k \Rightarrow X(\omega) \in \bigcap_k A_k \Rightarrow$
$\Rightarrow \omega \in X^{-1}(\bigcap_k A_k)$

P^* e ASSIOMI DI KOLMOGOROV

① $\mathcal{B}$ σ-ALGEBRA DI BOREL

② $P^*(B) \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}$

③ $P^*(\mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$

④ dati $B \cap C = \emptyset \quad B, C \in \mathcal{B}$

$$P^*(B \cup C) = P(X^{-1}(B \cup C)) = P(X^{-1}(B) \cup X^{-1}(C)) = P(X^{-1}(B)) + P(X^{-1}(C)) =$$
$$= P^*(B) + P^*(C)$$

⑤ $B_n \downarrow \emptyset \quad \lim_{n \to +\infty} P^*(B_n) = \lim_{n \to +\infty} P(X^{-1}(B_n))$ poiché $B \subset C \Rightarrow X^{-1}(B) \subset X^{-1}(C) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left(\lim_{n \to +\infty} X^{-1}(B_n)\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)\right) = P\Big(X^{-1}\big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n}_{\emptyset}\big)\Big) = P(\emptyset) = 0$$

$P^*(B) = P(X \in B)$

$\hookrightarrow$ DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

<u>ESEMPIO</u>

$X =$ "numero di palline arancioni"

$\Omega = \{ \omega : \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \}$

se $\omega = (A, B, B, B, B) \Rightarrow X(\omega) = 1$

- $P^*(\{1\}) = P(X = 1) = P(X^{-1}(\{1\}))$ $\quad X^{-1}(\{1\}) = \{(A,B,B,B,B), (B,A,B,B,B) \ldots\} =$

$= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\} = E_1$

$\Rightarrow P(X^{-1}(\{1\})) = 5p(1-p)^4$

- $P^*([0,2)) = P(X \in [0,2)) = P(0 \leq X < 2) = P(X^{-1}([0,2)))$

$X^{-1}([0,2)) = E_0 \cup E_1$

$P(E_0 \cup E_1) = P(E_0) + P(E_1) = \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 + \binom{5}{1} p (1-p)^4$

LA VARIABILE ALEATORIA X PUÒ ESSERE: DISCRETA / ASSOLUTAMENTE CONTINUA

<u>DEF</u> X V.A DISCRETA se $\exists$ un insieme finito o al più numerabile $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots\}$ t.c. $P^*(S) = P(X \in S) = 1$, e S è detto SPETTRO di X.

- $P_k = P(X = x_k) \Rightarrow \sum_{x_k \in S} P(X = x_k) = P\left(\bigcup_{x_k \in S} \{X = x_k\}\right) = P(X \in S) = 1$
- $P_k \geq 0$, $\sum_{x_k \in S} P_k = 1 \Rightarrow$ DISTRIBUZIONE PROBABILITÀ di $X = \{x_k, P_k, k \in S\}$

- se X V.A DISCRETA, $B \in \mathcal{B}$
  - $P(X \in B) = \sum_{x_k \in B} P_k$

<u>ESEMPIO</u>

LANCIO DI 2 DADI

$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2)\} = ((i,j) : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6)$

$\cancel{X = i+j}$ $X(\omega) = i+j \Rightarrow S = \{2, 3, \dots, 12\}$

$X^{-1}(\{2\}) = \{(1,1)\}$, $X^{-1}(\{3\}) = \{(1,2), (2,1)\}$

$P_2 = P(X=2) = \frac{1}{36}$, $P_3 = P(X=3) = \frac{2}{36}$, ...

DISTR. PROB. $X = \{k, P_k, k = 1, 2, \dots 12\}$

$P(X \leq 5) \Rightarrow B = (-\infty, 5] \Rightarrow P(X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

IN GENERALE $P(X \in S^c) = 0$

DATO $a \in \mathbb{R} \Rightarrow X$ è V.A DEGENERE se $S = \{a\}$ e $P(X=a) = 1$

DATO $B \in \mathcal{B} \Rightarrow$ se X DEGENERE $P(X \in B) = I_B(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \notin B \\ 1 & \text{se } a \in B \end{cases}$

funzione indicatrice

$X, \ S = \{1, 2, 3, \dots, k\}$

$P(X=j) = \frac{1}{k}, \ \forall j \Rightarrow X$ UNIFORME E DISCRETA SU $\{1, 2, 3, \dots, k\}$

X V.A BERNOULLI $\quad S = \{0, 1\} \quad p \in (0, 1)$

$$X = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases} \qquad \begin{aligned} P(X=0) &= 1-p \\ P(X=1) &= p \end{aligned}$$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

$A_1, A_2, \dots, A_n$ IND. $P(A_i) = p$

$P_k = P(k \text{ eventi}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \dots, n$

$X \sim B(n, p) \qquad X = \{k, P_k, k = 0, 1, \dots, n\} \quad S = \{0, 1, \dots, n\}$

$\hookrightarrow$ CONTA IL N° DI SUCCESSI SU N PROVE INDIPENDENTI

V.A IPERGEOMETRICA

$$P_k = P(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad S = \{0, 1, \dots, K\}$$

$\hookrightarrow$ N° PALLINE A estratte in blocco

V.A GEOMETRICA, LANCIO di una moneta

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad P(T) = p \quad \Omega = \{T, CT, CCT, \dots, C\dots CT, C\dots C\}$

X = "TEMPO D'ATTESA PER T" $\qquad X = k, \ k = 1, 2, 3, \dots$

$S = \{1, 2, 3, \dots\} \qquad P_k = P(T=k) = P(\underbrace{C\dots C}_{k-1}T) = p(1-p)^{k-1}$

$X = \{k, p(1-p)^{k-1}, k \geq 1\}$

$X(\omega) =$ "TEMPO D'ATTESA"

$$X \sim G(p) \quad P(X = k+a \mid X > a) = \frac{P(\{X = k+a\} \cap \{X > a\})}{P(X > a)} = \frac{P(X = k+a)}{P(X > a)} =$$

$$= \frac{p(1-p)^{k+a-1}}{\sum_{j=a+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1}} \underset{\substack{\text{pongo} \\ i = j-a-1}}{=} \frac{p(1-p)^{k+a-1}}{\sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^{i+a}} = \frac{p(1-p)^{k+a+1}}{p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i}} = \frac{(1-p)^{k+1}}{\frac{1}{1-(1-p)}} = p(1-p)^{k+1} = P(X=k)$$

GIOCO DEL LOTTO

5 PALLINE IN BLOCCO

$$p = P(67) = \frac{\binom{1}{1}\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$$

P(DOPO 30 ESTRAZIONI IL 67 NON USCITO) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow X \sim B(30, p) \Rightarrow P(X=0) = \binom{30}{0} p^0 (1-p)^{30} = (1-p)^{30}$$

oppure

$$\Rightarrow T \sim G(p) \Rightarrow P(T>30) = \sum_{k=31}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=31}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p\sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^{j+30} =$$

$$= p(1-p)^{30} \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = (1-p)^{30}$$

ora $P(T=101 \mid T>100) = P(T=1) = p = \frac{1}{18}$

oppure $P(T>130 \mid T>100) = P(T>30) = (1-p)^{30}$

P(67 ESCA 6 VOLTE NELLE PRIME 50 ESTRAZIONI)

$$X \sim B(50, p)$$

$$P(X=6) = \binom{50}{6} p^6 (1-p)^{50-6}$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X<6) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k} = 0,06$$

X V.A di POISSON

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \qquad P_k = P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \ \lambda > 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$X \sim P(\lambda)$$

$$X = \left\{ k, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

$$P_k \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI UNA V.A X

$x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X < x) = P(X^{-1}(-\infty, x))$

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

<u>OSS</u> $F_X(a^+) = \lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \downarrow a} F(x) = \lim_{h \to 0} F(a+h)$

$F_X(a^-) = \lim_{x \to a^-} F(x) = \lim_{x \uparrow a} F(x) = \lim_{h \to 0} F(a-h)$

TEOREMA

Se F è una funzione di ripartizione

① è non decrescente : $x < x'$, $F(x) \leq F(x')$

② è continua a sinistra : $F(x^-) = F(x)$

③ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ e $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

<u>DIM</u>

① $(-\infty, x') = (-\infty, x) \cup [x, x') \Rightarrow F_X(x') = P(X < x') =$

$= P((X < x) \cup (X \in [x, x'))) =$

$= P(X < x) + P(x \leq X < x') \geq P(X < x) = F(x)$ ■

② $F(x^-) = \lim_{n \to +\infty} F(x - \frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} P^*((-\infty, x - \frac{1}{n})) = P^*(\lim_{n \to +\infty} (-\infty, x - \frac{1}{n})) =$

$= P^*(-\infty, x) = P(X < x) = F(x)$ ■

③ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} P(X < x) = P(\lim_{x \to +\infty} (X < x)) = P(X \in \mathbb{R}) = P^*(\mathbb{R}) = 1$ ■

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X < x) = P(\lim_{x \to -\infty} (X < x)) = P(X \in \emptyset) = P^*(\emptyset) = 0$ ■

• $P(X \in [a, b)) = F_X(b) - F_X(a)$ infatti

$(-\infty, b) = (-\infty, a) \cup [a, b) \Rightarrow F_X(b) = P(X < b) = P(X < a) + P(X \in [a, b)) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X \in [a, b)) = F_X(b) - F_X(a)$

$\bullet\ P(X=a) = P\left(\lim_{n\to+\infty}\left\{X\in\left[a,a+\frac{1}{n}\right]\right\}\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(X\in\left[a,a+\frac{1}{n}\right]\right) =$

$a\in\mathbb{R}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[F_X\left(a+\frac{1}{n}\right) - F(a)\right] = F_X(a^+) - F_X(a)$$

$\bullet\ P(X\in(a,b)) \Rightarrow [a,b) = (a,b)\cup\{a\} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X\in[a,b)) = P(X\in(a,b)) + P(X=a) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X\in(a,b)) = P(X\in[a,b)) - P(X=a) = F_X(b) - \cancel{F_X(a)} - F_X(a^+) + \cancel{F_X(a)} =$

$= F_X(b) - F_X(a^+)$

$\bullet\ P(X\in(a,b]) = P(X\in(a,b)) + P(X=b) = \cancel{F_X(b)} - F_X(a^+) + F_X(b^+) - \cancel{F_X(b)} =$

$= F_X(b^+) - F_X(a^+)$

$\bullet\ P(X\in[a,b]) = P(X\in[a,b)) + P(X=b) = \cancel{F_X(b)} - F_X(a) + F_X(b^+) - \cancel{F(b)} =$

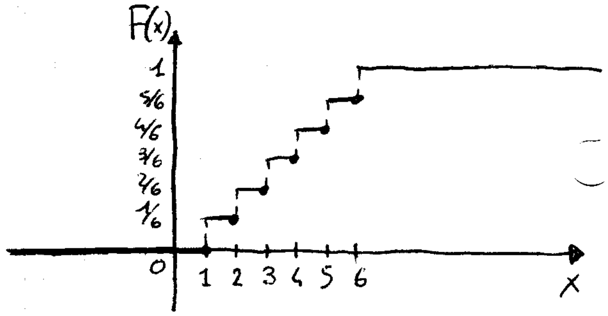
$= F_X(b^+) - F(a)$

<u>ES</u>

LANCIO DEL DADO $\quad X(\omega)=\omega$

$F(x) = P(X<x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(x) = P(X<x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\le 1 \\ 1/6 & 1<x\le 2 \\ 1/3 & 2<x\le 3 \\ 1/2 & 3<x\le 4 \\ 2/3 & 4<x\le 5 \\ 5/6 & 5<x\le 6 \\ 1 & x>6 \end{cases}$$



IN GENERALE se X DISCRETA

$$F_X(x) = P(X<x) = \sum_{x_k<x} \underbrace{P(X=x_k)}_{p_k} = \sum_{x_k<x}\left[F_X(x_k^+) - F_X(x_k)\right]$$

$P(X=a)=1$

X V.A. DEGENERE in a $\qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x\le a \\ 1 & x>a \end{cases} = \mathbb{1}_{(-\infty,a)}(x)$

X V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA, $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \text{ DENSITÀ}$$

f È UNA FUNZIONE DI DENSITÀ $\Leftrightarrow$

① $f(x) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

- $$P(x \leq X \leq x+dx) = F_X(x+dx) - F_X(x) = \int_{-\infty}^{x+dx} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$$
$$= \int_{x}^{x+dx} f(t)\,dt = f(x)\,dx$$

se X ASSOLUTAMENTE CONTINUA

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$$

- la DENSITÀ individua la distribuzione di probabilità della v.A. X.
- la FUNZIONE DI DENSITÀ non è unica in generale ma è unica quasi certamente o quasi ovunque.

$\cancel{F'_X(x)=f}$ $\boxed{F' = f \text{ quasi ovunque.}}$

se X v.A. assolutamente continua

$$P(X \in [a,b)) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)\,dt \overset{*}{=} P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) \; * \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(a \leq X < b) - P(a < X \leq b) = P(X = a) = 0$$

- $f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0<x<1 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$

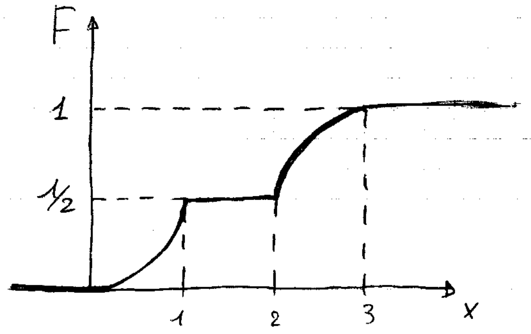
$$P\left(-2< X \leq \tfrac{1}{2}\right) = \int_{-2}^{1/2} f(x)dx = \cancel{\int_{-2}^{0} f(x)dx} + \int_{0}^{1/2} f(x)dx = \int_{0}^{1/2} (2-2x)dx = \frac{3}{4}$$

~~F(x)~~

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 & x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} (2-2t)dt & 0<x\leq 1 \\ 1 & x>1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ 2x-x^2 & 0<x\leq 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

- $f(x) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 3-x & 2<x<3 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \int_{0}^{x} t\,dt = \frac{x^2}{2} & 0<x\leq 1 \\ \int_{0}^{1} t\,dt + \int_{1}^{2} 0\,dt & 1<x\leq 2 \\ \int_{-\infty}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} f(t)dt & 2<x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0<x\leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1<x\leq 2 \\ \frac{1}{2} + \int_{2}^{x}(3-t)dt & 2<x\leq 3 \\ 1 & x>3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0<x\leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1<x\leq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{7}{2} & 2<x\leq 3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$



X V.A. CAUCHY

$$f(x;\mu,\gamma) = \frac{\overset{\text{SCALA}}{\gamma}}{\pi\left(\gamma^2+(x+\underset{\text{POSIZIONE}}{\mu})^2\right)} \qquad f(x;0;1) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

CAUCHY STANDARD

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

MISTURE DI V.A.

se X è una mistura di v.A.

$$F = \alpha F_d + (1-\alpha) F_a \qquad \alpha \in (0,1)$$

$$P(X \in [a,b)) = \alpha \sum_{x_k \in [a,b)} P_k + (1-\alpha) \int_a^b f(x)\,dx$$

$\boxed{\text{VETTORI ALEATORI}}$

$X: \Omega \to \mathbb{R}^k, \quad k \geq 1$

$X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)) \qquad F(x): \mathbb{R}^k \to [0,1] \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

$\hookrightarrow = P(X_1 < x_1, \ldots, X_k < x_k)$

$X: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k) \qquad \mathcal{B}^k$ ~~in~~ INTERVALLI K-DIMENSIONALI
SE $K=2 \Rightarrow$ RETTANGOLI
SE $K=3 \Rightarrow$ PARALLELEPIPEDI

$P^*(B) \quad B \subset \mathbb{R}^k$

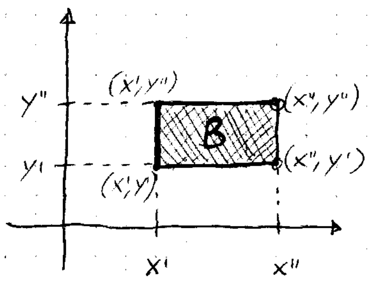
$P^*(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)) \in B\}) =$
$= P(X^{-1}(B))$

CASO BIDIMENSIONALE

$k=2 \quad \cancel{X: \Omega \to \mathbb{R}^2} \qquad (X,Y) = $ v.A.

$F(x,y) = P(X<x, Y<y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x, Y(\omega) < y\}) =$
$= P((X<x) \cap (Y<y)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) < y\})$

$P(x' \leq X < x'', y' \leq Y < y'') =$
$(B = [x', x'') \times [y', y''))$



~~$P(x' \leq X < x'', Y < y'') =$~~

$= P(x' \leq X < x'', Y < y'') - P(x' \leq X < x'', Y < y') = P(X < x'', Y < y'') - P(X < x', Y < y'') -$
$P(X < x'', Y < y') + P(X < x', Y < y') = F(x'', y'') - F(x', y'') - F(x'', y') + F(x', y')$

OPERATORE DI ITERAZIONE

$$\Delta_{x=x'}^{x''} F(x,y) = F(x'',y) - F(x',y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x'',y'') - F(x',y'') - F(x'',y') + F(x',y') =$$

$$= \Delta_{x=x'}^{x''} \Delta_{y=y'}^{y''} F(x,y)$$

$F(x,y)$ PROPRIETÀ

1. ~~posti~~ $x'<x''$, $y'<y''$, $\Delta_{x=x'}^{x''} \Delta_{y=y'}^{y''} F(x,y) \geq 0$

2. CONTINUA A SINISTRA SIA IN X CHE IN Y

3. $\lim_{x\to-\infty} F(x,y)=0$, $\lim_{y\to-\infty} F(x,y)=0$, $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y)=1$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{x\to-\infty} P((X<x)\cap(Y<y)) = P(\lim_{x\to-\infty} (X<x)\cap(Y<y)) = P(\emptyset \cap (Y<y)) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = P\Big(\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \underbrace{(X<x)}_{\Omega} \cap \underbrace{(Y<y)}_{\Omega}\Big) = P(\Omega\cap\Omega) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x,y) = P\Big(\underbrace{\lim_{x\to+\infty} (X<x)}_{\Omega} \cap (Y<y)\Big) = P(Y<y)$$

$$\lim_{y\to+\infty} F(x,y) = P\Big(\lim_{y\to+\infty} (X<x)\cap\underbrace{(Y<y)}_{\Omega}\Big) = P(X<x)$$

V.A. DISCRETA (X,Y)

$$S = \{(x_r, y_s),\ r=1,2,\dots,\ s=1,2,\dots\}$$

FINITO DI PUNTI O INFINITÀ NUMERABILE

$$P((X,Y)\in S) = 1 \qquad P((X,Y)\in S^c) = 0$$

$$P_{r,s} = P(X=x_r, Y=y_s) = P((X,Y)\in\{(x_r,y_s)\})$$

$P_{r,s} \geq 0$, $\sum_r \sum_s P_{rs} = 1$ $\quad \{(x_r, y_s); P_{r,s};\ \ r=1,2,\dots;\ s=1,2,\dots\} \Rightarrow$ DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

$$P(X,Y)\in B = \sum_{(x_r,y_s)\in B} P_{r,s} \qquad P_{r,\bullet} = \sum_s P(X=x_r, Y=y_s) = \sum_s P_{r,s} = P(X=x_r, \bigcup_{s\geq 1} Y=y_s) = P(X=x_r)$$

$$P_{\bullet,s} = \sum_r P_{r,s} = P(Y=y_s)$$

$\{x_r, P_{r,\bullet}, r\geq 1\}^*$ $\{y_s, P_{\bullet,s}, s\geq 1\}^*$ DISTRIBUZIONI ~~[illegible]~~ MARGINALE

ESEMPIO ①

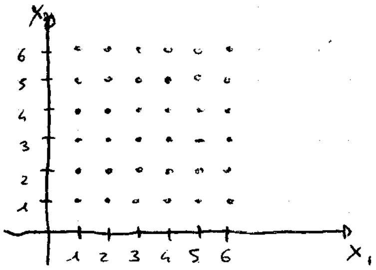
6 PALLINE NUMERATE DA 1 A 6
NE ESTRAGGO 2 CON REINSERIMENTO

$X_1(\omega)$ = RISULTATO PRIMA ESTRAZIONE

$X_2(\omega)$ = " SECONDA "

$\boxed{X = (X_1, X_2)}$ $\quad X(\omega) = \left(X_1(\omega), X_2(\omega)\right) = (i, j) \quad 1 \le i \le 6 \quad 1 \le j \le 6$

$S = \left\{ (i,j) \,;\, 1 \le i \le 6,\ 1 \le j \le 6 \right\}$



$P_{i,j} = P(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{1}{36}$

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6	$P_{i,\cdot} = P(X_1 = C)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	...	...	...	$\frac{1}{36}$	$1/6 = P(X_1 = 1)$
2	$\frac{1}{36}$	$\ddots$	...	...	...	$\vdots$	$1/6$
3	...	...	$\ddots$	...	...	$\vdots$	...
4	...	...	...	$\ddots$	...	$\vdots$	...
5	...	...	...	...	$\ddots$	$\vdots$	...
6	$\frac{1}{36}$	...	...	...	...	$\frac{1}{36}$	$1/6$
$P_{\cdot,i} = P(X_2 = C)$	$1/6$	...	...	...	...	$1/6$	1

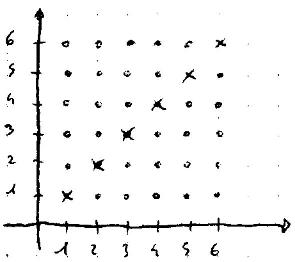
$P(X_1 = 6) = \sum_{j=1}^{6} P(X_1 = 1, X_2 = j)$

ESEMPIO ②

6 PALLINE NUMERATE DA 1 A 6
NE ESTRAGGO 2 SENZA REINSERIMENTO

$Y = (\underset{1^\circ \text{ estr.}}{Y_1}, \underset{2^\circ \text{ estr.}}{Y_2})$

$S = \left\{ (i,j),\ 1 \le i \le 6,\ 1 \le j \le 6,\ i \ne j \right\}$



$Y_1 \backslash Y_2$	1	2	3	4	5	6	
1	0	$1/30$	$1/30$	$1/30$	$1/30$	$1/30$	$1/6$
2	$1/30$	0	...	...	...	$\vdots$	$1/6$
3	$\vdots$	...	0	...	...	$\vdots$	$\vdots$
4	$\vdots$	...	...	0	...	$\vdots$	$\vdots$
5	$\vdots$	...	...	...	0	$\vdots$	$\vdots$
6	$1/30$	...	...	...	...	0	$1/6$
	$1/6$	$1/6$	...	...	...	$1/6$	1

$$P(X_1 \le 2, X_2 \le 2) = P(X_1=1, X_2=1) + P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=1) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(Y_1 \le 2, Y_2 \le 2) = P(Y_1=1, Y_2=2) + P(Y_1=2, Y_2=1) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

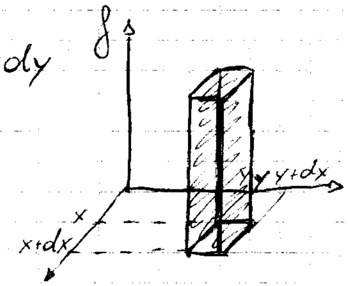
(X,Y) V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$$

$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty) \iff$ ① $f(x,y) \ge 0$ ② $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

↑ densità

$$P(x \le X < x+dx, y \le Y < y+dy) \simeq f(x,y)\,dx\,dy$$



$$P((X,Y) \in B_2) = \iint_{B_2} f(x,y)\,dx\,dy, \; B_2 \in \mathcal{B}_2$$

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx, \quad X, Y \text{ V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUE}$$

PROPRIETÀ

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y) \quad \text{QUASI OVUNQUE}$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI X MARGINALE

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F_{XY}(x,y) = \lim_{y\to+\infty}\left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv\right) = \int_{-\infty}^{x}\left(\lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\right)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv\right)du = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du, \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

↑ densità marginale di X

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \leftarrow \text{densità marginale di } Y$$

ESEMPIO

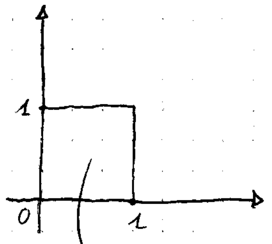
$$f(x,y)=\begin{cases} K & (x,y)\in R\ ,\ R\in\mathbb{R}^2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$$

affinché f sia densità:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = K\iint_R dy\,dx = K\cdot area(R) \iff K=\frac{1}{area(R)}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{area(R)} & (x,y)\in R,\ R\in\mathbb{R}^2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME SU R



$R=(0,1)\times(0,1)$

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{ALTROVE}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy = 1 \qquad 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 1 \qquad 0<y<1$$

- $$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{ALTROVE}\end{cases}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\{(x,y):\ x>0,y>0\}} e^{-x-y}\,dy\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x-y}\,dy\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\Big(\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy}_{1}\Big)dx =$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^{+\infty} = 1$$

$$P((X,Y)\in C),\ C=\{(x,y):\ x+y>1\}$$

$$P((X,Y)\in C) = \iint_C f(x,y)\,dy\,dx = \iint_{\{(x,y):\ x+y>0,\ x>0,y>0\}} e^{-x-y}\,dy\,dx = 1-P((X,Y)\in C^c) =$$

$$=1-\iint_{\{(x,y):\ x+y\le 1,\ x>0,y>0\}} e^{-x-y}\,dy\,dx = 1-\int_0^1 e^{-x}\left(\int_0^{1-x} e^{-y}\,dy\right)dx = 1-\int_0^1 e^{-x}\Big[-e^{-y}\Big]_0^{1-x}dx = 1-\int_0^1 -e^{-x+x-1}+e^{-x}\,dx =$$

$$=1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}-1=\frac{2}{e}$$

DATE V.A. X, Y si ha che $X = Y \Leftrightarrow X(\omega) = Y(\omega)\ \forall \omega \in \Omega$

ovvero $X = Y \Leftrightarrow \{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = \Omega$

$X \overset{q.c.}{=} Y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(X = Y) = 1$

$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$

X e Y sono uguali in DISTRIBUZIONE $X \overset{d}{=} Y \Leftrightarrow F_X(x) = F_Y(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow P(X \in A) = P(Y \in A),$
$\forall A \in \mathcal{B}$

$X = Y \Rightarrow X \overset{d}{=} Y$ ma $X \overset{d}{=} Y \not\Rightarrow X = Y$

Infatti

ESEMPIO $\Omega = \{T, C\}$

$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = T \\ 0 & \omega = C \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = T \\ 1 & \omega = C \end{cases}$

$P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2} \quad P(Y=0) = P(Y=1) = \frac{1}{2}$

$X \overset{d}{=} Y$ ma $X \neq Y$

DATE V.A. X, Y, $A, B \subset \mathcal{B}$

$P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B) \Leftrightarrow X, Y$ sono INDIPENDENTI

$\Rightarrow X, Y$ indipendenti, allora $F_{XY}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)$

Infatti $F(x,y) = P(X \in (-\infty, x), Y \in (-\infty, y)) = P(X \in (-\infty, x))\, P(Y \in (-\infty, y)) =$

$= F_X(x) F_Y(y)$ ∎

In particolare X, Y indipendenti $\Leftrightarrow F_{XY}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

In generale $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono indipendenti se

$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$

con $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}$

X, Y, Z INDIPENDENTI se $P(X\in A, Y\in B, Z\in C) = P(X\in A)P(Y\in B)P(Z\in C)$

$$P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A, Y\in B, \underbrace{Z\in\mathbb{R}}_{\Omega}) = P(X\in A)P(Y\in B)\underbrace{P(Z\in\mathbb{R})}_{1} = P(X\in A)P(Y\in B)$$

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ INDIPENDENTI $\Leftrightarrow F(X_1, X_2, \dots, X_n) = F(x_1)F(x_2)\dots F(x_n)$
$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ASSOLUTAMENTE CONTINUE E INDIPENDENTI $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ DISCRETE E INDIPENDENTI $\Leftrightarrow P(X_1 = x_{r_1}, X_2 = x_{r_2}, \dots X_n = x_{r_n}) =$
$= P(X_1 = x_{r_1})P(X_2 = x_{r_2})\dots P(X_n = x_{r_n})$

se $n = 2$ $\quad P_{r,s} = P_{r,\cdot} \cdot P_{\cdot,s} \Leftrightarrow X_1, X_2$ DISCRETE E INDIPENDENTI

ESEMPIO

- $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ALTRIMENTI} \\ 1 & 0<x<1;\ 0<y<1 \end{cases} \qquad f_Y(x) = 1 \quad 0<y<1 \qquad f_X(x) = 1 \quad 0<x<1$

  $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{matrix} \Rightarrow X, Y$ indipendenti

-

X \ Y	0	1	2	
2	0.30	0	0	0.30
5	0.10	0.10	0	0.20
7	0	0.20	0.30	0.50
	0.40	0.30	0.30	1

$P(X=2, Y=0) = 0.30 \neq P(X=2)P(Y=0) = 0.12 \Rightarrow$

$\Rightarrow X, Y$ NON SONO INDIPENDENTI

DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA

(X,Y) V.A. DISCRETA $\{(x_r, P_s), P_{r,s}, r\geq 1, s\geq 1\}$

$$P(X=x_r \mid Y=y_s) = \frac{P(X=x_r \cap Y=y_s)}{P(Y=y_s)} = \frac{P_{r,s}}{P_{\cdot,s}} \quad , \quad P_{\cdot,s}\neq 0$$

FISSATO y_s $\{x_r, P(X=x_r \mid Y=y_s), r\geq 1\}$ ← DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA

1. $P(X=x_r \mid Y=y_s) \geq 0$
2. $\sum_{x_r} P(X=x_r \mid Y=y_s) = 1$

X,Y INDIPENDENTI $\Leftrightarrow P(X=x_r \mid Y=y_s) = P_{r,\cdot} = P(X=x_r)$

ESEMPIO

$(X,Y) \quad S=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$P(X=0, Y=0)=\frac{4}{10}, P(X=0,Y=1)=\frac{2}{10}, P(X=1, Y=0)=\frac{1}{10}, P(X=1, Y=1)=\frac{3}{10}$

$P(X=r \mid Y=1) = ? \quad r=0,1$

$$\frac{P(X=x \cap Y=1)}{P(Y=1)} \qquad P(Y=1)=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}=\frac{1}{2}$$

$\cancel{P(X=x)}$ $\quad \frac{P(X=0, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{3/10}{1/2}=\frac{2}{5} \qquad \frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{3/10}{1/2} = 3/5$

DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA $= \{0,1; \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\}$

CASO VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

$$P(X<x \mid Y=y) = \lim_{h\to 0} P(X<x \mid y<Y<y+h) = \lim_{h\to 0}\frac{P(X<x, y<Y<y+h)}{P(y<Y<y+h)} = *$$

$f(x,y)$ CONTINUA $\Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du$ ← continua come funzione di y

$$* = \lim_{h\to 0} \frac{\int_y^{y+h}\left(\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\right)dv}{\int_y^{y+h} f_Y(v)\,dv} \overset{H}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\,du \Rightarrow$$

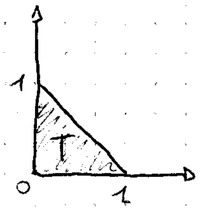
$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_Y(y) \neq 0$$

DENSITÀ CONDIZIONATA

<u>ESEMPIO</u>

UNIFORME NEL TRIANGOLO

$(0,0) \quad (0,1) \quad (1,0)$



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{area}(T)} & (x,y) \in T \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases} = \begin{cases} 2 & 0<x<1,\ 0<y<1-x \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 2\,dy = 2(1-x) \qquad 0<x<1$$

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2\,dx = 2(1-y) \qquad 0<y<1$$

$$0<x<1 \Rightarrow f(Y|X) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2(1-x)} = \frac{1}{1-x} \qquad 0<y<1-x$$

TRASFORMAZIONI

$X, \; g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, g MISURABILI $(\Leftrightarrow g^{-1}(A) \in \mathcal{B}^n,\ A \in \mathcal{B}^m)$

$Y = g(X)$, Y ancora V.A.; $Y: \Omega \to \mathbb{R}^m$

$$P(Y \in B) = P(g(X) \in B) = P(X \in g^{-1}(B))$$

caso $m=1$

$Y: \Omega \to \mathbb{R}$

$$P(Y<y) = P(g(x)<y) = P(g(x) \in (-\infty, y)) \ast$$

$$P(X<g^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f(x)\,dx$$

$X \sim Un(0,1) \quad X \in (0,1)$ quasi certamente

$Y = -\frac{1}{\lambda} \log X \quad \lambda > 0$

$\log(X) \in (-\infty, 0) \Rightarrow Y \in (0, +\infty)$ quasi certamente

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ? & y > 0 \end{cases}$$

$F_Y(y) = P(Y < y) = P(-\frac{1}{\lambda}\log(X) < y) = P(X > e^{-\lambda y}) = 1 - P(X \leq e^{-\lambda y}) = 1 - F_X(e^{-\lambda y}) =$

$= 1 - e^{-\lambda y}$ $\left(\text{ricordando che } F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}\right)$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & y > 0 \end{cases}$$ ⇐ DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO λ.

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$

$g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$Y = g(X)$ con X v.a. an. cont. $f_X(x)$, $X \in \mathbb{R}$

$P(aX + b < y) = \begin{cases} a = 0 \\ a < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ se $a = 0 \Rightarrow Y = b$ $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq b \\ 1 & y > b \end{cases}$

se $a > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(aX + b < y) = P(X < \frac{y-b}{a}) = F_X(\frac{y-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f_X(t)\,dt = (t = \frac{u-b}{a}) =$

$= \int_{-\infty}^{y} f_X(\frac{u-b}{a}) \frac{1}{a}\,du \Rightarrow f_Y(y) = f_X(\frac{u-b}{a}) \frac{1}{a}$

$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(\frac{u-b}{a}) \frac{1}{a}\,du$

se $a < 0 \Rightarrow$

$P(Y < y) = P(aX + b < y) = P(X > \frac{y-b}{a}) = 1 - P(X < \frac{y-b}{a}) = 1 - F_X(\frac{y-b}{a})$

$= \int_{\frac{y-b}{a}}^{\infty} f_X(t)\,dt = (t = \frac{u-b}{a}) = \int_{y}^{-\infty} f_X(\frac{u-b}{a}) \frac{1}{a}\,du = -\int_{y}^{-\infty} f_X(\frac{u-b}{a}) \frac{1}{|a|}\,du = \int_{-\infty}^{y} f_X(\frac{u-b}{a}) \frac{1}{|a|}\,du$

$f_Y(y) = f_X(\frac{u-b}{a}) \frac{1}{|a|} \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(\frac{u-b}{a}) \frac{1}{|a|}\,du$

se $g(x) = ax+b$ $\;Y = g(X) \Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$ con $a \neq 0$

TEOREMA

X ASSOLUTAMENTE CONTINUA

g MONOTONA E DERIVABILE (q.c.) CON DERIVATA $\neq 0$

ALLORA

$Y = g(X)$ V.A. ASS. CONT. e $f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)|$ con $h(y) = g^{-1}(y) = x$

DIM caso g CRESCENTE

$$F_Y(y) = P(g(X)<y) = \int_{\{x: g(x)<y\}} f_X(x)dx = \int_{\{x: x<g^{-1}(y)\}} f_X(x)dx = \int_{\{x: x<h(y)\}} f_X(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx = (x = h(t)) = \int_{-\infty}^{y} f_X(h(t))h'(t)dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow Y$ ASS. CONT. e $f_Y(y) = f_X(h(y))\,h'(y)$ con $h(y) = g^{-1}(y)$

$Y = X^2$ con $X \sim N(0,1)$

$$F_Y(y) = P(X^2<y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = P(X<\sqrt{y}) - P(X<-\sqrt{y}) =$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right] = \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y}) =$$

poichè f simmetrica

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) = \frac{1}{\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y/2}, \quad y>0$$

$$\int_{-\infty}^{y} f_Y(u)du = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u/2}du$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad Y = aX+b$ con $a \neq 0$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{y-b-\mu a}{2a^2\sigma^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}}e^{-\left(\frac{y-b-\mu a}{2a^2\sigma^2}\right)^2} \quad y \in \mathbb{R}$$

$Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

se $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

TRASFORMAZIONI CASO DISCRETO

X DISCRETA $\Rightarrow Y$ DISCRETA

$Y = g(X) \quad \{y_s\}$

$$P(Y = y_s) = P(g(X) = y_s) = P(X \in g^{-1}(y_s)) = \sum_{x_r \in g^{-1}(y_s)} P(X = x_r)$$

<u>OSS</u>

Date $X_1, X_2, \dots, X_n$ INDIPENDENTI

$\Rightarrow Y_1 = g(X_1),\ Y_2 = g(X_2), \dots, Y_n = g(X_n)$ INDIPENDENTI

Infatti $P(Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2, \dots, Y_n \in B_n) = P(X_1 \in g^{-1}(B_1)) \cdots P(X_n \in g^{-1}(B_n)) =$
$= P(g(X_1) \in B_1) \cdots P(g(X_n) \in B_n) = P(Y_1 \in B_1) \cdots P(Y_n \in B_n)$

se $Y = X^2$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \Leftarrow \chi_1^2 \, *$$

$$* \quad \chi_1^2 \sim \text{GAMMA}\left(\lambda = \tfrac{1}{2}, \nu = \tfrac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{\lambda^\nu e^{-\lambda x} x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \quad x > 0$$

SE X V.A. $\text{Exp}|\lambda| \Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$Y = \lfloor X \rfloor + 1$ con $\lfloor X \rfloor = n \Leftrightarrow n \le x < n+1 \quad \Rightarrow Y$ V.A. DISCRETA ≥ 1

$$P(Y = y) = P(\lfloor X \rfloor + 1 = y) = P(\lfloor X \rfloor = y - 1) =$$
$$= P(y - 1 \le X < y) = P(X < y) - P(X < y - 1) = F_X(y) - F_X(y-1) =$$
$$= 1 - e^{-\lambda y} - (1 - e^{-\lambda(y-1)}) = e^{-\lambda(y-1)} - e^{-\lambda y} = e^{-\lambda(y-1)}(1 - e^{-\lambda}) =$$
$$= \underbrace{(1 - e^{-\lambda})}_{p} \underbrace{(e^{-\lambda})}_{1-p}{}^{y-1} = p(1-p)^{y-1} \Rightarrow Y \sim \text{Geo}(1 - e^{-\lambda})$$

TRASFORMAZIONI IN PIÙ DIMENSIONI

$Z = g(X,Y)$ ~~X, Y INDIPENDENTI~~

ESEMPIO

$U = \frac{X}{X+Y}$ X, Y INDIPENDENTI e $Esp(\lambda)$ $\Rightarrow U \in (0,1)$ q.c.

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ ? & 0<u<1 \\ 1 & u \geq 1 \end{cases} \longrightarrow F_U(u) = P(U<u) = P\left(\frac{X}{X+Y} < u\right) =$$

$$= P(X < u(X+Y)) = P\left(Y > \frac{1-u}{u} X\right) =$$

$$= \iint_{\{(x,y):\, g(x,y)<u\}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\{(x,y):\, y > \frac{1-u}{u}x,\, y>0,\, x>0\}} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}\,dx\,dy = \int_0^\infty \left(\int_{\frac{1-u}{u}x}^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left(-e^{-\lambda y} \Big|_{\frac{1-u}{u}x}^\infty \right) dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda\left(\frac{1-u}{u}\right)x}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x\left(1+\frac{1-u}{u}\right)} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \frac{x}{u}} dx = -u e^{-\lambda \frac{x}{u}} \Big|_0^\infty = +u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_U(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ u & 0<u<1 \\ 1 & u \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f_U(u) = \begin{cases} 1, & 0<u<1 \\ 0, & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$U \sim Un(0,1)$

~~ESEMPIO~~

X, Y ASS. CONT. E INDIPENDENTI

$Z = X+Y$

$$P(Z<z) = P(X+Y<z) = \iint_{\{(x,y):\, x+y<z\}} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \iint_{\{(x,y):\, x<z-y\}} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)\,dx \right) f_Y(y)\,dy = [t = x+y] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} f_X(t-y)\,dt \right) f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y) f(y)\,dy \right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy$$

$f_X * f_Y(z)$ = PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

ESEMPIO

X_1, X_2 INDIPENDENTI $Un(0,1)$

$Y = X_1 + X_2 \in (0,2)$ q.c.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-x) f(x)\, dx = \int_{\{(x,y):\, 0<x<1,\, 0<y-x<1\}} 1\, dx = \int_{\{x:\, 0<x<1,\, y-1<x<y\}} 1\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y & 0<y<1 \\ 2-y & 1<y<2 \\ 0 & y \ge 2 \end{cases} \Leftarrow \text{DENSITÀ TRIANGOLARE}$$

PRENDO $X_1, X_2, \dots, X_n$ INDIPENDENTI ED IDENTICAMENTE DISTRIBUITE

$Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$P(Y<y) = P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n)<y) = P(X_1<y, X_2<y, \dots, X_n<y) =$$

$$= P(X_1<y)P(X_2<y)\dots P(X_n<y) = F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y) = (F_X(y))^n$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = n\left[F_X(y)\right]^{n-1} f_X(y)$$

ESEMPIO

$X_i \sim Un(0,1)$ $\quad Y = \max(X_i) \in (0,1)$ q.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y^n & 0<y<1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases} \qquad f_Y(y) = n y^{n-1}, \ 0<y<1.$$

CONSIDERO ORA

$Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$P(Z<z) = P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n)<z) = 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \ge z) =$$

$$= 1 - P(X_1 \ge z, X_2 \ge z, \dots, X_n \ge z) = 1 - \left[P(X_1 \ge z) \dots P(X_n \ge z)\right] =$$

$$= 1 - \left[(1-P(X_1<z)) \cdots (1-P(X_n<z))\right] = 1 - \left[(1-F_{X_1}(z)) \cdots (1-F_{X_n}(z))\right] =$$

$$= 1 - \left[1-F_X(z)\right]^n \Rightarrow f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = n\left(1-F_X(z)\right)^{n-1} \cdot f_X(z)$$

ESEMPIO

$X_i \sim Un(0,1)$ $\quad Z = \min(X_i) \in (0,1)$ q.c.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1-(1-z)^n & 0<z<1 \\ 1 & z \ge 1 \end{cases} \qquad f_Z(z) = n(1-z)^{n-1}, \ 0<z<1$$

PRENDO $X_1, X_2, \dots X_n$ INDIPENDENTI, se $X_i \sim GAMMA(\lambda, \nu_i) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim GAMMA\left(\lambda, \sum_{i=1}^{n} \nu_i\right)$$

poiché se $X_i \sim Esp(\lambda) = GAMMA(\lambda, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim GAMMA(\lambda, n)$$

se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

DIM. per $X_{1,2} \sim GAMMA(\lambda, \nu_i)$

$S = X_1 + X_2$, $S > 0$ q.c.

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\, dx = \text{poiché } x > 0 \text{ e } \substack{s-x>0 \\ s>x} \Rightarrow$$

$$= \int_0^s \frac{\lambda^{\nu_1} e^{-\lambda x} x^{\nu_1 - 1}}{\Gamma(\nu_1)} \cdot \frac{\lambda^{\nu_2} \cdot e^{-\lambda(s-x)} (s-x)^{\nu_2 - 1}}{\Gamma(\nu_2)}\, dx =$$

$$= \frac{\lambda^{\nu_1+\nu_2} e^{-\lambda s}}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^s x^{\nu_1 - 1}(s-x)^{\nu_2 - 1}\, dx = (t = x/s) =$$

$$= \frac{\lambda^{\nu_1+\nu_2} e^{-\lambda s}}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 (ts)^{\nu_1 - 1}(s - ts)^{\nu_2 - 1} s\, dt =$$

$$= \frac{\lambda^{\nu_1+\nu_2} e^{-\lambda s}}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \cdot s^{\nu_1+\nu_2-1} \underbrace{\int_0^1 t^{\nu_1 - 1}(1-t)^{\nu_2 - 1}\, dt}_{\text{è noto che } = \frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}} =$$

$$= \frac{\lambda^{\nu_1+\nu_2} e^{-\lambda s} \cdot s^{\nu_1+\nu_2-1}}{\cancel{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}}{\Gamma(\nu_1+\nu_2)} =$$

$$= \frac{\lambda^{\nu_1+\nu_2} e^{-\lambda s} s^{\nu_1+\nu_2-1}}{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}$$ ■

PRENDO X, Y DISCRETE E INDIPENDENTI

$$P(X+Y=j) = P(X+Y=j, \Omega) = P\Big(X+Y=j, \bigcup_k (X=k)\Big) =$$

$$= \sum_k P(X+Y=j, X=k) = \sum_k P(Y=j-k, X=k) =$$

$$= \sum_k P(Y=j-k)\, P(X=k)$$

se $X \sim Poi(\lambda)$, $Y \sim Poi(\mu)$, X, Y indipendenti

$$P(X+Y=j) = \sum_{\substack{k\geq 0 \\ j-k\geq 0}} P(Y=j-k)P(X=k) = \sum_{k=0}^{j} P(Y=j-k)P(X=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\mu}\frac{\mu^{j-k}}{(j-k)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!(j-k)!}\lambda^k \mu^{j-k} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \lambda^k \mu^{j-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{j!}(\lambda+\mu)^j \quad \text{con } j=0,1,2,3,\dots$$

$$(X+Y) \sim Poi(\lambda+\mu)$$

DATE $X_1, X_2, \dots, X_m$ INDIPENDENTI, $X_i \sim Poi(\lambda_i) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (X_1+X_2+\dots+X_m) \sim Poi\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\Big)$$

DATE $X_1, X_2, \dots, X_m$ INDIPENDENTI, $X_i \sim BIN(m_i, p) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (X_1+X_2+\dots+X_m) \sim BIN\Big(\sum_{i=1}^{m} m_i, p\Big)$$

VALORE MEDIO (O VALORE ATTESO)

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

$$E(X) = \begin{cases} \sum_r x_r P(X = x_r) & \text{se } X \text{ DISCRETA} \\ \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx & \text{se } X \text{ ASSOLUTAMENTE CONTINUA} \end{cases}$$

ESEMPIO

X v.a. per l'altezza, n INDIVIDUI, $p = \frac{1}{n}$

$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ $\Rightarrow$ in questo caso è proprio la media aritmetica

$E(x)$ ESISTE FINITO $\Leftrightarrow$ $E|X| < \infty$

quindi se X DISCRETA $\Leftrightarrow$ $\sum_r |x_r| P(X = x_r) < \infty$

se X ASS. CONT. $\Leftrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x)\,dx < \infty$

NELLE TRASFORMAZIONI:

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$Y = g(X)$ con $f_Y(y)$

se Y ASS. CONT. $E(x) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy$, se Y DISCRETA $E(x) = \sum_s y_s P(Y = y_s)$

oppure

- Y ASS. CONT. $E(g(x)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,dx$

- Y DISCRETA $E(g(x)) = \sum_r g(x_r) P(X = x_r)$

ESEMPIO

$Y = e^X, \quad X \sim Un(0,1)$

$E(Y) = E(e^X) = \int_0^1 e^X dx = e - 1$

oppure

$f_Y(Y) = f_X(\log y) \frac{1}{y}$ per $1 \le y \le e$ $\Rightarrow E(Y) = \int_1^e y \cdot \frac{1}{y}\,dy = e - 1$

VALORE MEDIO = MOMENTO

$E(X)$ = MOMENTO PRIMO

$$E(X^r) = \begin{cases} \int x^r f(x)\,dx \\ \sum_k x_k^r P(X=x_k) \end{cases}$$

$$E(X^r) = E\,g(X)$$

MOMENTO SECONDO

$X - EX$ = SCARTO

VARIANZA $\rightarrow$ $Var(X) = E(X-E(X))^2 \leftarrow$ momento secondo

~~PROPRIETÀ COVARIANZA~~

OSS $E(X-E(X)) = 0$

$$Var(X) = E(X-E(X))^2 = E(X^2 + (E(X))^2 - 2XE(X)) =$$

$$= E(X^2) + (E(X))^2 - 2(E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$Var(X) \geq 0 \Rightarrow E(X^2) \geq (E(X))^2$$

VARIANZA = indice di dispersione della distribuzione.

PROPRIETÀ VARIANZA

① $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

$$Var(aX+b) = E(aX+b-E(aX+b))^2 =$$

$$= E(aX + \cancel{b} - aE(X) - \cancel{b})^2 = E(a(X-EX))^2 = a^2 E(X-EX)^2 = a^2 Var(X) \blacksquare$$

② $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$, con $Cov(X,Y) = E\{(X-EX)(Y-EY)\}$ COVARIANZA

$$Var(X+Y) = E(X+Y-E(X+Y))^2 = E((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2 =$$

$$= E(X-EX)^2 + E(Y-EY)^2 + 2E\{(X-EX)(Y-EY)\} =$$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) \blacksquare$$

- $X \sim Esp(\lambda)$

$$E(X^k) = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x}\,dx = (t = \lambda x) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k \cdot \cancel{\lambda} e^{-t} \frac{dt}{\cancel{\lambda}} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k e^{-t} = \frac{1}{\lambda^k}\int_0^\infty t^k \cdot e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k} = \frac{k!}{\lambda^k}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \; ; \; E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

- $X \sim$ CAUCHY STANDARD $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\log(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty - \infty$$ $\Rightarrow$ CAUCHY non ammette momento finito

- $X \sim Un(a,b)$

$$E(X^k) = \int_a^b \frac{x^k}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}$$

$$E(X) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \; ; \; E(X^2) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+a^2+2ab}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- $X \sim Bin(n,p)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = (k-1 = j) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j-1)!} p^{j+1} (1+p)^{n-j-1} =$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} p^j (1-p)^{n-j-1} = np \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-j-1}}_{=1} = np$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = (k-1 = j) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{n!}{j!(n-j-1)!} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} j \frac{n!}{j!(n-j-1)!} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} + np = \sum_{j=1}^{n-1} j \frac{n!}{j!(n-j-1)!} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(j-1)!(n-j-1)!} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} + np =$$

$$= ((j-1) = r) = \sum_{r=0}^{n-2} \frac{n!}{r!(n-r-2)!} p^{r+2} (1-p)^{n-r-2} + np = n(n-1)p^2 \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-2}{r} p^r (1-p)^{n-2-r} =$$

DISEGUAGLIANZA DI CEBICEV

$a>0,\ r>0,\ E(X)=0$, qualunque X, discreta o continua

- $P(|X|\geq a)\leq \frac{\{E|X|\}^r}{a^r} \equiv P(|X|<a)\geq 1-\frac{\{E|X|\}^r}{a^r}$

caso $r=2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(|X|\geq a)\leq \frac{\{E|X|\}^2}{a^2} \overset{\text{poiché } E(X)=0}{=} \frac{Var(X)}{a^2}$$

se $E(X)\neq 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(|X-E(X)|\geq a)\leq \frac{\{E[X-E(X)]\}^r}{a^r}$$ $\Leftarrow$ diseguaglianza di Cebicef generale

DIM caso $E(X)=0$, X ASS. CONT.

$$\{E|X|\}^r=\int_{\mathbb{R}}|x|^r f(x)dx=\int_{\{x:|x|\geq a\}}|x|^r f(x)dx+\int_{\{x:|x|<a\}}|x|^r f(x)dx\geq$$

$$\geq\int_{\{x:|x|\geq a\}}|x|^r f(x)dx\geq\int_{\{x:|x|\geq a\}}a^r f(x)dx = a^r\int_{\{x:|x|\geq a\}}f(x)dx=a^r P(X\geq a) \blacksquare$$

CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE (O IN LEGGE) (O DEBOLE)

$X_n,\ n\geq 1$ $\quad F_n(x)$, X_n successione di v.a.

$$\lim_{n\to+\infty}F_n(x)=F(X)$$

prendiamo $X_n,\ n\geq 1$ a valori in $\mathbb{R}^k$, e X v.a. in $\mathbb{R}^k$
$\quad\ \hookrightarrow F_n \qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow F$

DEF X_n converge in DISTRIBUZIONE ad X se

$$\lim_{n\to+\infty}F_n(x)=F(x),\ \forall x=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k,$$ PUNTO DI CONTINUITÀ PER $F(x)$

NOTAZIONE: $X_n\xrightarrow{d}X$

• TEOREMA (caratterizzazione convergenza in distribuzione)

$X_n, n \geq 1$ $\quad F_n(x)$

X $\quad F(X)$

g continua e limitata

Allora $X_n \xrightarrow{d} X \iff E(g(X_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} E(g(X))$

• TEOREMA (continuità)

h CONTINUA, $X_n \xrightarrow{d} X$ allora $h(X_n) \xrightarrow{d} h(X)$

DIM se h continua, g continua e limitata $\Rightarrow z(x) = g(h(x))$ continua e limitata

$E\, z(X_n) = E g(h(X_n)) \longrightarrow E\, z(X) = E g(h(X)) \Rightarrow$ per TEO CARATTERIZZAZIONE $\Rightarrow$

$\Rightarrow h(X_n) \xrightarrow{d} h(X)$ ∎

• TEOREMA

$(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y) \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X,\ Y_n \xrightarrow{d} Y$

(N.B: $X_n \xrightarrow{d} X,\ Y_n \xrightarrow{d} Y \not\Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$)

OSS se X_n, Y_n, X, Y INDIPENDENTI Allora
$(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y) \iff X_n \xrightarrow{d} X,\ Y_n \xrightarrow{d} Y$

ES X_n, Y_n IND, $X_n \sim ESP(\lambda_n)$, $Y_n \sim ESP(\mu_n)$

$Z_n = \frac{X_n}{X_n + Y_n}$ studiare convergenza in distribuzione per $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 0$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = +\infty$

$$F_{Z_n}(z) = P\left(\frac{X_n}{X_n + Y_n} < z\right) = P\left(Y_n > \frac{1-z}{z} X_n\right) = \int_0^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n x} \left(\int_{\frac{1-z}{z}x}^{+\infty} \mu_n e^{-\mu_n y} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n x} \left(-e^{-\mu_n y} \Big|_{\frac{1-z}{z}x}^{+\infty} \right) dx = \int_0^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n x} e^{-\mu_n \frac{1-z}{z} x} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda_n e^{-\left(\lambda_n + \mu_n \frac{1-z}{z}\right) x} dx = - \frac{\lambda_n e^{-\left(\lambda_n + \mu_n \frac{1-z}{z}\right)x}\Big|_0^{+\infty}}{\lambda_n + \mu_n \frac{1-z}{z}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n \frac{1-z}{z}} = \frac{\lambda_n / \mu_n}{\lambda_n/\mu_n + \frac{1-z}{z}}$$

CONVERGENZA IN PROBABILITÀ

$X_n, X \quad \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0$

$$\left.\begin{aligned} &P(|X_n - X| < \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \\ &P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{aligned}\right\} X_n \xrightarrow{P} X \iff X_n - X \xrightarrow{P} 0$$

se $X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(k)})$, $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(k)})$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} |X_n^{(j)} - X^{(j)}| < \varepsilon\right) \to 1$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff X_n^{(j)} \xrightarrow{P} X^{(j)}$$

Infatti: $1 \geq P(|X_n^{(j)} - X^{(j)}| < \varepsilon) \geq P\left(\bigcap_{j=1}^{k} (|X_n^{(j)} - X^{(j)}| < \varepsilon)\right) =$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^{k} |X_n^{(j)} - X^{(j)}| \geq \varepsilon\right) \geq \overbrace{1 - \sum_{j=1}^{k} \underbrace{P(|X_n^{(j)} - X^{(j)}| \geq \varepsilon)}_{\to 0}}^{\to 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$$\boxed{X_n \xrightarrow{P} X \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} X_n \xrightarrow{d} X}$$

Se però $X = a$ q.c., $X_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} a$

TEOREMA

$X_n \xrightarrow{P} X$, g CONTINUA $\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

DIM $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

$X \xrightarrow{P} X \Rightarrow X \xrightarrow{d} X$

prendo $\underset{\text{CONTINUA}}{h}(X_n, X) = g(X_n) - g(X) \xrightarrow{d} h(X, X) = g(X) - g(X) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{g_n}\ g(X_n) - g(X) \xrightarrow{P} g(X) - g(X) = 0 \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X) \ \blacksquare$$

ES Y_n

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{y} & y \geq 1 \end{cases} \qquad X_n = \frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} ? \quad P(|X_n| < \varepsilon) = P(|Y_n| < n\varepsilon) =$$

$$= P(Y_n < n\varepsilon) - P(Y_n \leq -n\varepsilon) = 1 - \frac{1}{n\varepsilon} - 0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$$

METODO MONTECARLO

$f:[0,1]$, $\int_0^1 f(x)dx < +\infty$

$\alpha = \int_0^1 f(x)dx$

prendo $(U_K)_{K\geq 1}$ V.A. IND e $UN(0,1)$

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_k) \underset{LGN}{\xrightarrow{P}} E(f(U)) = \int_0^1 f(x)dx = \alpha$$

$X \sim Esp(1)$ $Y_n = \left|1 - \frac{X}{n}\right|^n$, $n \in \mathbb{N}$ $Y_n \in (0,+\infty)$ q.c. $F_X = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1-e^{-x} & x > 0 \end{cases}$

$Y_n \xrightarrow{d} ?$ $F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = P\left(\left|1-\frac{X}{n}\right|^n < y\right) =$

$= P\left(-y^{1/n} < 1 - \frac{X}{n} < y^{1/n}\right) = P\left(n(1-y^{1/n}) < X < n(1+y^{1/n})\right) =$

$= P\left(X < n(1+y^{1/n})\right) - P\left(X < n(1-y^{1/n})\right) = F_X\left(n(1+y^{1/n})\right) - F_X\left(n(1-y^{1/n})\right) =$

$$= \begin{cases} \exp(-n(1-y^{1/n})) - \exp(-n(1+y^{1/n})) & 0 < y \leq 1 \\ 1 - \exp(-n(1+y^{1/n})) & y > 1 \\ 0 & y < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \exp\left(\frac{y^{1/n}-1}{1/n}\right) - \exp\left(-\frac{y^{1/n}+1}{1/n}\right) & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y^{1/n}-1}{1/n}\right) & y > 1 \end{cases} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Y_n \xrightarrow{d} Y$, $Y \sim UN(0,1)$

$$F_{Z_n}(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ z^n/2 & 0<z\le 1\\ 1-\frac{1}{2z^n} & z>1\end{cases}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{cases}0 & z<0\\ 0 & 0<z\le 1\\ 1 & z>1\end{cases}=\begin{cases}0 & z\le 1\\ 1 & z>1\end{cases}\Rightarrow$$

per $z\neq 1$

$$\Rightarrow Z_n \xrightarrow{d} Z,\ Z\sim DEG(1) \Rightarrow Z_n \xrightarrow{P} Z,\ Z\sim DEG(1)$$

ESERCIZIO

X_n INDIPENDENTI

$$F_{X_n}(x)=\begin{cases}e^{nx} & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}\qquad Y_n=n^2\max(X_1,\dots,X_n)\xrightarrow{d}?\quad Y_n\in \cancel{(0,+\infty)\ q.c.}(-\infty,0)\ q.c.$$

$$F_{Y_n}(y)=P(Y_n<y)=P\left(n^2\max(X_1,\dots,X_n)<y\right)=$$

$$=P\left(\max(X_1,\dots,X_n)<\frac{y}{n^2}\right)=P\left(X_1<\frac{y}{n^2}\right)\cdots P\left(X_n<\frac{y}{n^2}\right)=$$

$$=e^{y/n^2}\cdots e^{\frac{y}{n^2}\cdot n}=e^{\frac{y}{n^2}(1+2+\dots+n)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{y}{n^2}(1+2+\dots+n)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{y}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{y}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)}=e^{y/2}\ \text{per } y<0$$

$$\cancel{F_{Y_n}(y)=\begin{cases}e^{y/2} & y\le 0\\ 1 & y>0\end{cases}}\qquad F_{Y_n}(y)=\begin{cases}e^{\frac{y}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)} & y\le 0\\ 1 & y>0\end{cases}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{cases}e^{y/2} & y\le 0\\ 1 & y>0\end{cases}$$

$$Y_n\xrightarrow{d}Y,\ F_Y(y)=\begin{cases}e^{y/2} & y\le 0\\ 1 & y>0\end{cases}$$

ESERCIZIO

$$Y_n=n\left(X^{1/n}-1\right)\qquad X\sim Esp(\lambda)\qquad F_X=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & x>0\end{cases}$$

$Y_n\in(-n,+\infty)$ q.c.

$$F_{Y_n}(y)=P\left(n(X^{1/n}-1)<y\right)=P\left(X^{1/n}-1<\frac{y}{n}\right)=P\left(X^{1/n}<\frac{y}{n}+1\right)=$$

$$=P\left(X<\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right)=F_X\left(\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right)=1-e^{-\lambda\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}=$$

$$F_{Y_n}(y)=\begin{cases}0 & y\le -n\\ 1-e^{-\lambda\left(1+\frac{y}{n}\right)^n} & y>-n\end{cases}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ \text{DEFINITIVAMENTE}\ 1-e^{-\lambda\left(1+\frac{y}{n}\right)^n},\ y\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{}1-e^{-\lambda e^y},\ y\in\mathbb{R}\qquad Y_n\xrightarrow{d}Y,\ F_Y(y)=1-e^{-\lambda e^y}$$

STATISTICA

POPOLAZIONE DI RIFERIMENTO
$\uparrow$
CAMPIONE — INFERENZA

$\Rightarrow$ STATISTICA INFERENZIALE

CAMPIONE $= X_1, X_2, \dots, X_n$ V.A. INDIPENDENTI estratte da una distribuzione F.

CAMPIONE $= (X_1, X_2, \dots, X_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \leftarrow$ DATI

$F = F(\theta) \Rightarrow \theta$ incognita $\Rightarrow$ caso $N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \theta = (\mu, \sigma^2)$

$T(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow$ STATISTICA = funzione dei dati

ESEMPIO di STATISTICA

$$\bar{X} = \frac{\sum^{i} X_i}{n} \leftarrow \text{media campionaria} \Rightarrow \bar{X} = \hat{\mu}$$ ovvero la media campionaria stima il valore medio.

Supponiamo di avere un ~~capione~~ campione $X_1, X_2, \dots, X_n$ con parametri μ, σ^2.

$$E(\bar{X}) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + \dots + Var(X_n)\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Uso il TEOREMA del LIMITE CENTRALE

$$\bar{X} \overset{d}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

ES

POPOLAZIONE OPERAI MASCHI, $\mu = 167$; $\sigma = 27$

(1) CAMPIONE $n = 36$, PROB $163 < \bar{X} < 171$

$$P(163 < \bar{X} < 171) = P\left(\frac{163 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{171 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

$Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$

$$= P\left(\frac{163 - 167}{27/\sqrt{36}} < Z_n < \frac{171 - 167}{27/\sqrt{36}}\right) = P(-0{,}8889 < Z_n < 0{,}8889) \simeq P(-0{,}8889 < Z < 0{,}8889) =$$

$$= P(Z < 0{,}8889) - P(Z < -0{,}8889) = P(Z < 0{,}8889) - 1 + P(Z > -0{,}8889) =$$

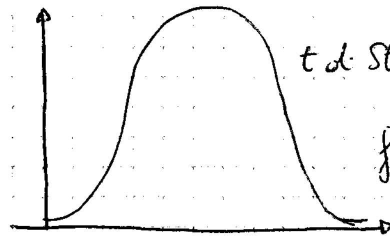
$$= 2P(Z < 0{,}8889) - 1 = 2\Phi(0{,}8889) - 1 = 0{,}63$$

funzione di partizione della normale standard.

Z, C_n INDIPENDENTI

$Z \sim N(0,1)$, $C_n \sim \chi^2_n$

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{C_n}{n}}} \sim t_n \text{, t di Student}$$



t di Student

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{n/2}}$$

per $n \to +\infty$ t di Student tende ad una normale standard $N(0,1)$. Infatti:

$$\frac{C_n}{n} = \frac{\chi^2_1 + \dots + \chi^2_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} E(\chi^2_i) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} e^{-x/2} x^{1/2-1} x \, dx = 1$$

TEOREMA

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \ * \quad \text{con campioni } X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$\bar{X}$, $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ sono V.A. INDIPENDENTI con $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$* \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 + n(\bar{X}-\mu)^2 - 2(\bar{X}-\mu)\overbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}^{n(\bar{X}-\mu)} =$$

$$= \sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2_n \qquad (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \qquad (N(0,1))^2 \Downarrow \chi^2_1$$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$\text{Infatti } \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\mu/\sigma/\sqrt{n}}{S/\sqrt{n} \ \sqrt{n}/\sigma} = \frac{\overbrace{\bar{X}-\mu/\sigma/\sqrt{n}}^{\sim N(0,1)}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{\underbrace{\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)}_{\sim\chi^2_{n-1}}/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} \Rightarrow \sim t_{n-1} \ \blacksquare$$

METODO (2)

preso un campione $X_1, X_2, \dots, X_n \sim F_\theta$, $X_1, \dots, X_n$ INDIPENDENTI

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n ; \theta) = \begin{cases} \text{PROBABILITÀ CONGIUNTA} & \text{caso DISCRETO} \\ \text{DENSITÀ CONGIUNTA} & \text{caso ASSOLUTAMENTE CONTINUO} \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n ; \theta) = f(x_1 ; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n ; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \theta) = L(\theta ; x_1, \dots, x_n)$$

funzione di VEROSIMIGLIANZA (LIKELIHOOD)

$f(x_i ; \theta)$ = DISTRIBUZIONE MARGINALE DI X_i

STIMA DI MAX VEROSIMIGLIANZA $\hat{\theta} = \arg\left(\max_{\theta \in \Theta} \{L(\theta)\} \right)$

insieme di definizione di θ

se $\hat{\theta}(\underbrace{X_1, \dots, X_n}_{\text{campioni}}) \Rightarrow$ STIMATORE

se $\hat{\theta}(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{campioni osservato}}) \Rightarrow$ STIMA

<u>ES</u>

$X_1, X_2, \dots, X_n$ campioni

$X_i \sim BER(p)$, $\theta = p$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\log L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log(1-p)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \log L(p) = \frac{\sum_i x_i}{p} - \frac{n - \sum_i x_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) / n = \bar{X}$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial p^2} \log L(p) \right|_{p=\hat{p}} < 0 \quad \text{supponendo } 0 < \sum_i x_i < n \Rightarrow \hat{p} = \bar{X}$$

STIMA MAX VEROSIMIGLIANZA

ES $\underset{\text{sorgente}}{A} \longrightarrow \underset{\text{destinazione}}{B}$

μ segnali da A a B

segnali $\sim N(\mu, 4)$, 9 osservazioni del segnale su B $= 5; 8,5; 12; 15; 7; 9; 7,5; 6,5; 10,5$

$\bar{x} = \frac{81}{9} = 9$

INTERVALLO DI CONFIDENZA PER μ al 95% $= \left(9 - 1{,}96\,\frac{2}{3},\ 9 + 1.96\,\frac{2}{3}\right) =$

$= (7{,}69;\ 10{,}31)$

questo tipo di intervalli sono BILATERALI

INTERVALI UNILATERALI

$$0.95 = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.05}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.645\right) = P\left(\bar{X}-\mu < 1.645\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(\cancel{\mu >} \bar{X} - 1.645\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu\right) \quad \text{stimando } \bar{X} = \bar{x} \quad \mu \in \left(\bar{X} - 1.645\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty\right)$$

INTERVALLO DI CONFIDENZA DESTRO AL 95% PER μ

IL PROCEDIMENTO È SIMMETRICO PER INTERVALLI DI CONFIDENZA SINISTRA

ES SEGNALE con $1-\alpha = 0{,}99$, $\bar{x} = 9$

$$\left(9 - z_{0{,}005}\,\frac{2}{3},\ 9 + z_{0{,}005}\,\frac{2}{3}\right) \quad z_{0{,}005} = 2{,}58 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (7{,}28;\ 10{,}72) \ni \mu$ con un livello di fiducia del 99%

CASO σ^2 NON NOTO $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

~~utilizzo~~ al posto di $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ uso $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$$1-\alpha = P\left(-t_{\alpha/2, n-1} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2, n-1}\right) = P\left(-t_{\alpha/2, n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < t_{\alpha/2, n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

stimando $\bar{X} = \bar{x}$, $S = s$ $\Rightarrow$ $\mu \in \left(\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1}\,\frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1}\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

INTERVALLO DI CONFIDENZA AL LIVELLO $1-\alpha$