COMBINATORIA

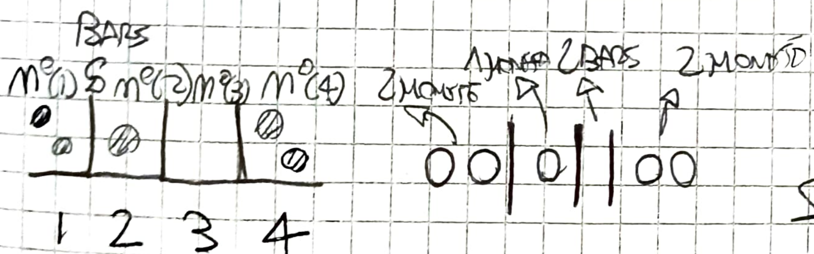
O OGGETTI C SCELTE

ORDINE	RIPETIZ	SENZA RIPETIZ
L'ORDINE CONTA SI: DISPOSIZ.	O^C	$\frac{O!}{(O-C)!}$
NO: COMBINAZ	$\binom{O+C-1}{C}$	$\binom{O}{C}$

ESEMPIO:

O SCATOLE E C MONETE

IN QUANTI MODI POSSO DISPORRE 5 MONETE IN 4 SCATOLE? INDISTINGUIBILI



SCELGO LE 5 MONETE TRA 8 CASI

$$\binom{O+C-1}{C} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$$

PROBABILITÀ DI INSIEMI FINITI

$$A \subset \Sigma \longmapsto |A|$$

DIVIDO IN PARTIZIONI

$$\{A_n\} \quad n \neq m \qquad A_n \cap A_m = \emptyset \qquad \left|\bigcup_n A_n\right| = \sum_n |A_n|$$

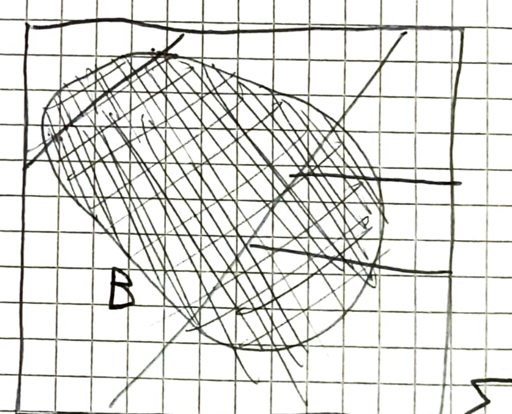
$$P(A) \triangleq \frac{|A|}{|\Sigma|} \geq 0$$

INSIEME DELLE PARTI

$$P : \mathcal{P}(\Sigma) \longrightarrow [0,1] \, :$$

i) $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$ SE $\overset{n \neq m}{A_n \cap A_m = \emptyset}$

ii) $P(\Sigma) = 1$



OSSERVAZIONE:

$\{A_n\}$ PARTIZIONE DI Σ

$$\sum_n P(A_n) = 1$$

$\{B \cap A_n\}$ É UNA PARTIZIONE DI B

$$B = B \cap \Sigma = B \cap \left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n (B \cap A_n)$$

IN GENERALE, PRESA UNA QUALUNQUE PARTIZIONE FINITA DI $B - \{A_n\}$

$$P(B) = \sum_{n} P(B \cap A_i) = \sum_{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

FUNZIONE DI MASSA ELEMENTARE

$\forall \omega \in \Sigma$ È DEFINITO $\{\omega\}$ "SINGOLETTO"

$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$ $\quad \omega \longmapsto P(\{\omega\})$ FUNZIONE DI MASSA

$\sum_{\omega \in \Sigma} P(\{\omega\}) = 1$ $\quad P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Sigma|}$

EVENTI INDIPENDENTI

(TABELLE A DOPPIA ENTRATA)

A \ B	B	B^c	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \setminus B)$	$P(A)$
A^c	$P(B \setminus A)$	$P(A^c \cap B^c)$	$P(A^c)$
	$P(B)$	$P(B^c)$	

$A \cap B^c = A \setminus B$

$A^c \cap B = B \setminus A$

DIPENDENTI

A \ B	B	B^c	
A	$P(A)P(B)$	$P(A)P(B^c)$	$P(A)$
A^c	$P(A^c)P(B)$	$P(A^c)P(B^c)$	$P(A^c)$
	$P(B)$	$P(B^c)$	

INDIPENDENTI

INDIPENDENZA DELLE COPPIE $\not\Rightarrow$ INDIPENDENZA TRIPLA

CONTROESEMPIO: LANCIO DUE MONETE

$A = \{\text{PRIMO LANCIO TESTA}\}$ $B = \{\text{SECONDO LANCIO TESTA}\}$ $C = \{\text{UN SOLO LANCIO TESTA}\}$

$$P(A \cap C) = P(B \cap C)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C) \qquad P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

PERÒ $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

"CONDIZIONANTE" ↔ "CHE SI È REALIZZATO" → $P(B) \neq 0$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

RIDUZIONE DELLO SPAZIO CAMPIONARIO IN B

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Sigma|}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Sigma|}$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|\Sigma|} \cdot \frac{|\Sigma|}{|B|} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = P_B(A)$$

SE A E B INDIPENDENTI

$$P(A|B) = P(A)$$

Formula Probabilità Composte

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$$

DA CUI

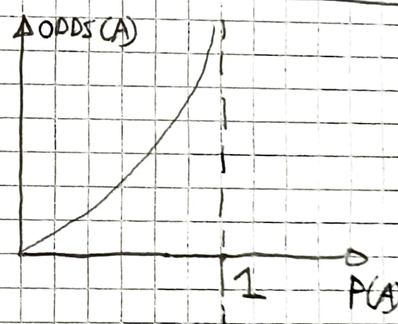
$$P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

SI OTTIENE

Formula di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A)$$

Odds

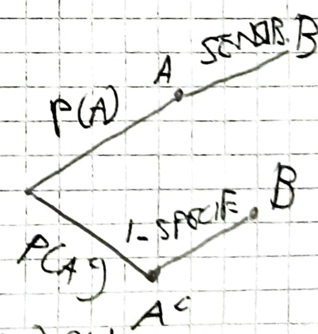


$$ODDS(A) = \frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{1-P(A)}$$

$$P(A) = \frac{ODDS(A)}{1+ODDS(A)}$$

Rapporto di Verosimiglianza

(ES. SU VACCINO)



$$RV(A) = \frac{P(B|A)}{P(B|A^c)}$$

$$RV(A) = \frac{SENS.}{1-SPEC} = 9{,}5 \rightarrow P(A) = 0{,}1 \rightarrow P(A|B) \simeq \frac{1}{2}$$

ESS. VACCINO $1 - \frac{P(A|B^c)}{P(B|A)} = 1 - \frac{1}{RV(A)} \simeq 0{,}89$

SCHEMA DI BERNOULLI (BINOMIALE)

$\Sigma = \{0,1\}^m$ m LANCI $p \in (0,1)$ PROBABILITÀ DI SUCCESSO
$q = 1-p$ PROB DI INSUCC.

$$P(\{h_1, h_2, h_3, \dots, h_m\}) = p^{\#\text{SUCCESSI}} \, q^{\#\text{INSUCCESSI}} = p^{\sum_{i=1}^{m} h_i} \cdot q^{m-\sum_{i=1}^{m} h_i}$$

$$P\binom{K \text{ SUCCESSI}}{\text{IN } m \text{ PROVE}} = \binom{m}{K} p^K q^{m-K}$$

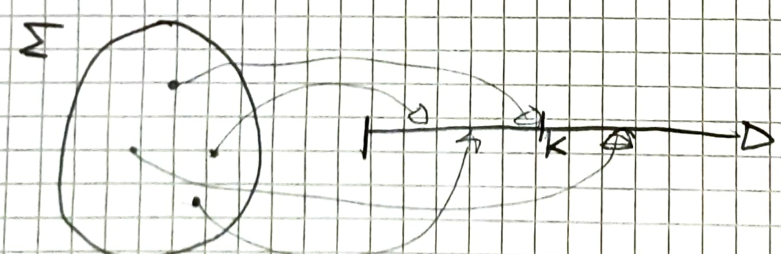
$$q^m = 1 - (p + pq + \dots q^{m-1}p)$$

$$\underset{(q<1)}{\lim_{m \to \infty} q^m} \to 1 - \lim_{m\to\infty} (p + qp + \dots q^{m-1}p)$$

$$\lim_{m\to\infty} q^m = 0 \qquad \lim_{m\to\infty} (p + qp + \dots q^{m-1}p) = 1$$

DI CONSEGUENZA $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} pq^k = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE



NEL CASO BINOMIALE $K = 0, 1, \dots, m$

$$P(X = K) \Longleftrightarrow P(X = K) = \binom{m}{K} p^K q^{m-K}$$

MODA = VALORE DI MASSIMA PROBABILITÀ

MEDIANA = P.T IN CUI $P(X \leq K) = P(X \geq K)$

$X \sim \mathrm{Binom}(m, p) \qquad m - X \sim \mathrm{Binom}(m, q)$

ESTRAZIONI SENZA REIMISSIONE
LEGGE IPERGEOMETRICA

N PALLINE, R ROSSE, $N-R$ ALTRI COLORI, m ESTRATTE

$X \sim \mathrm{Hypg}(N, R, m)$ "ESTRAZIONE" IN BLOCCO

$$P(X=k) = \frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

NUMERO DI MODI PER PALLINE ROSSE

NUMERO DI MODI RESTANTI PALLINE

NUMERO DI MODI DI TUTTE LE PALLINE

LEGGE DEGLI EVENTI RARI (POISSON)

SI PONE $\lambda = mp$ $\quad X \sim \mathrm{Binom}\left(m, \frac{\lambda}{m}\right)$

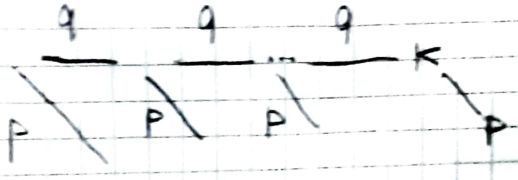
RACCOLGO m^k

$$P(X=k) = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-k+1) \cdot \cancel{(m-k)!}}{k! \, \cancel{(m-k)!}} \cdot \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-k}$$

$$= \frac{\cancel{m^k} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}_{\to 1} \cdot \lambda^k \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^m}_{\to e^{-\lambda}}}{k! \, \cancel{m^k} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^k}_{\to 1}} \qquad m \to \infty$$

$$= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$ PMF POISSON DI MEDIA λ

LEGGE GEOMETRICA



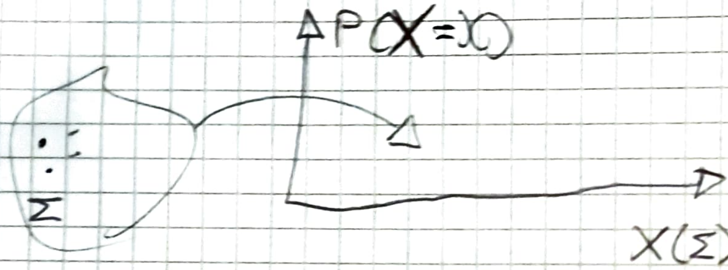
$\Sigma = (\underbrace{0 \ldots 0}_{m \text{ VOLTE}} 1, m \geq 0)$

$X : \Sigma \to \mathbb{R}$ $\quad P(X = k) = p q^{k-1}$ PMF

$P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - q^k$

SPAZI DI PROBABILITÀ NUMERABILI (CENNI)

$X : \Sigma \to \mathbb{R}$



VALORE ATTESO E VARIANZA

$E[X] = \sum_{x \in X(\Sigma)} x P(X = x)$ DEVE CONVERGERE ASSOLUTAMENTE

$E[g(x)] = \sum_{x \in X(\Sigma)} g(x) P(X = x)$ (LOTUS)

LEGGI DI SIMMETRIA

RISPETTO A ZERO

$X \stackrel{L}{=} -X$

$P(X = x) = P(-X = x)$

$E[-X] = -E[X]$

RISPETTO A C

$X - c \stackrel{L}{=} c - X$

$P(X - c = k) = P(X = c - k)$

$E[X] - c = c - E[X] \to E[X] = c$

FORMULA ALTERNATIVA PER LOTUS

$$i = \sum_{j=1}^{i} 1 \qquad E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i P(X=i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} P(X=i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X \geq j)$$

SI RICORDA PER DEFINIZIONE

$X - E[X]$ "SCARTO" UNA V.A CON MEDIA NULLA

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-E[X])^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E[X])^2 P(X=x)$$

$$E[(X-c)^2] = E[(X - E[X] + E[X] - c)^2] = E[\underbrace{(X-E[X])^2}_{\mathrm{Var}(X)} + (E[X]-c)^2]$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E^2[X] \quad \text{SE } \mathrm{Var}(X) = 0 \iff X = E[X]$$

VETTORI ALEATORI

$X \backslash Y$	0	1	...	j	...	m
0						
1						
...						
i				$P(X=i, Y=j)$		
...						
m						

$$E[g(X,Y)] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g(i,j) P(X=i, Y=j)$$

SE X E Y SONO INDIPENDENTI

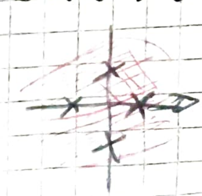
$$g(x,y) = f(x) h(y)$$

$$E[g(X,Y)] = E[f(X) h(Y)] \; E[f(X)] \; E[h(Y)]$$

$$E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = \mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

SE X E Y INDIP. CON MEDIA FINITA $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

$\not\Leftarrow$



(NO MASSA FUORI DAGLI ASSI, COV = 0)

STANDARDIZZAZIONE

μ_x MEDIA

σ_x^2 VARIANZA

$$X^\circ = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$$

$E[X^\circ]=0$

$VAR(X^\circ)=1$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE

$$CORR(X,Y) = \rho_{XY} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{VAR(X)\,VAR(Y)}} = COV(X^\circ, Y^\circ)$$

$\rho_{XY} \in [-1,1]$

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV

SIA X UNA V.A. NON NEGATIVA CON MEDIA μ_x FINITA

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{\mu_x}{\alpha}$$

DIMOSTRAZ. $X : \Omega \to \mathbb{R}^+_0$ E $I = \begin{cases} 1 \iff X \geq \alpha \\ 0 \iff X < \alpha \end{cases}$

$$P(X \geq \alpha) = E[I]$$

$$E[I] \overset{LOTUS}{=} \underset{\underset{P(X \geq \alpha)}{\parallel}}{P(I=1)} \leq E\left[\frac{X}{\alpha}\right] \to P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha} \quad \blacksquare$$

$$I \leq \frac{X}{\alpha} \to E[I] \leq E\left[\frac{X}{\alpha}\right]$$

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSCHEV

X UNA V.A NON NEGATIVA CON MEDIA μ_x E VARIANZA σ_x^2 FINITE

$$P(|X-\mu_x| \geq \gamma) \leq \frac{\sigma_x^2}{\gamma^2} \qquad \gamma \geq 0$$

DIMOSTRAZ: USANDO MARKOV PONIAMO $Y = [X - E[X]]^2$

$$P(Y \geq \gamma^2) \leq \frac{E[Y]}{\gamma^2}$$

$$\|$$

SAPENDO CHE $[X-\mu_x]^2 \geq \alpha^2 \Leftrightarrow |X-\mu_x| \geq |\alpha|$

$$P([X-\mu_x]^2 \geq \gamma^2) \leq \frac{VAR(X)}{\gamma^2} = P(|X-\mu_x| \geq \gamma) \leq \frac{VAR(X)}{\gamma}$$

$\blacksquare$

VARIANZA E MEDIA CAMPIONARIA

$X(1), X(2), \dots, X(m)$ iid $E[X^2(i)] < +\infty$

$\sigma^2 = VAR(X(i)) \qquad \mu = E[X(i)]$

$$\overline{X}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X(i) \qquad E[\overline{X}_m] = \mu \qquad VAR(\overline{X}_m) = \frac{\sigma^2}{m}$$

$$S^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X(i) - \overline{X}_m) \qquad E[S^2] = \sigma^2$$

LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI

$\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0 \leq \gamma \qquad \text{SE } \gamma \geq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to n \geq \frac{\sigma^2}{\gamma\varepsilon^2}$$

ε CI DA L'ACCURATEZZA DELLA MEDIA A PARTIRE DALLA MEDIA CAMPIONARIA

$$\bar{X}_n \xrightarrow{n\to\infty} \mu$$

LEGGE FORTE DEI GRANDI NUMERI

$$P(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu) = 1$$

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

SIANO $X_1, X_2, \dots, X_n$ V.A i.i.d CON MEDIA μ E VARIANZA σ^2

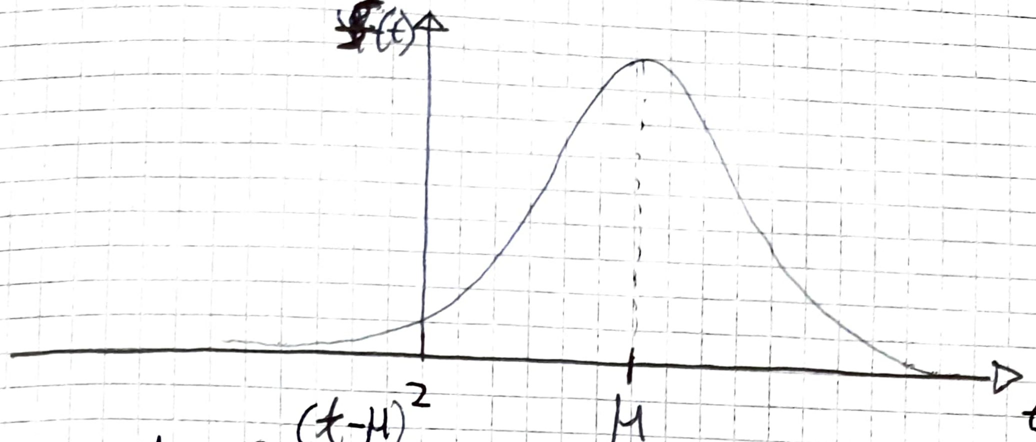
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(a < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - n\mu)}{\sigma} < b\right) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

CLT $\to$ LLN

LIM. CENTRALE   GRANDI NUMERI

DISTRIBUZIONE NORMALE $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \stackrel{L}{=} N(0,1)$$

CON PDF $\varphi(t)$
E CDF $\Phi(t)$
NELLE TABELLE

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

DEFINIZIONI NEL CONTINUO

PDF, FUNZIONE DI DENSITÀ T.C

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

CDF, FUNZIONE DI RIPARTIZIONE T.C (NON DECRESCENTE)

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \qquad \frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

LOTUS

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \qquad VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{t - E[X]\}^2 f(t) dt$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

$X \sim Unif(a, b) \quad f_X(x) = \frac{1}{b-a}$

U-QUANTILI

MEDIANA $U^* = \frac{1}{2} \rightarrow X = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

1° QUARTILE $X = F^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

3° QUARTILE $X = F^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

INDICE DI DISPERSIONE $F^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - F^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

$X \sim Exp(\lambda) \quad \mu = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

PDF $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x > 0$

CDF $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

PROPRIETÀ MEMORYLESS

$s, t > 0$

$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$

DENSITÀ CONGIUNTA DI 2 O PIÙ V.A

CASO DISCRETO

X, Y V.A SI HA $K = X+Y$

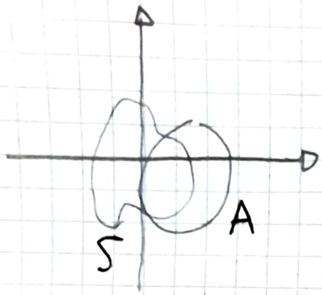
$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(Y=y \mid X=x)\,P(X=x)$$
$$= P(X=x \mid Y=y)\,P(Y=y)$$

$$P(K=t) = P(X+Y=t) = \sum_j P(X+Y=t, Y=j)$$
$$= \sum_j P(X=t-j, Y=j)$$

DA CUI SI OTTENGONO LE MARGINALI

$$f_X(x) = \sum_j f(x,j) \qquad f_Y(y) = \sum_i f_{XY}(i,y)$$

DENSITÀ DI 2 V.A CONTINUE



(X,Y) È UNIFORME SU UN SOTTOINSIEME $S \in \mathbb{R}^2$ DI AREA FINITA

$$P((X,Y)\in A) = \frac{AREA(A\cap S)}{AREA(S)}$$

$$Z = f(X,Y)$$

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

MARGINALE

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

CONVOLUZIONE

$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,g_Y(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\,g_Y(y)\,dy$$

$$F_Z(z) = F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\,dx\right)dy$$

$$\frac{\partial^2 F_Z(z)}{\partial x \partial y} = f_Z(z) \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\right)dx$$

Processo di Poisson

- Analogo dello Schema di Bernoulli in Tempo Continuo

$Bern(p)$ $\quad S(n) \sim Bin(n, p)$ $\quad n$ prove indipendenti

Se vediamo i successi dopo n prove notiamo che non influisce ciò che è successo prima

$S(n+m)-S(n) \overset{L}{=} S(m)$, indipendentemente da $S(l)$ con $l \leq n$

Definiamo $Y(r)$ la prova in cui si verifica l'r-esimo successo

$Y(r+k)-Y(k) \overset{L}{=} Y(r)$ indipen. da $Y(w)$ con $w \leq k$

Si nota anche

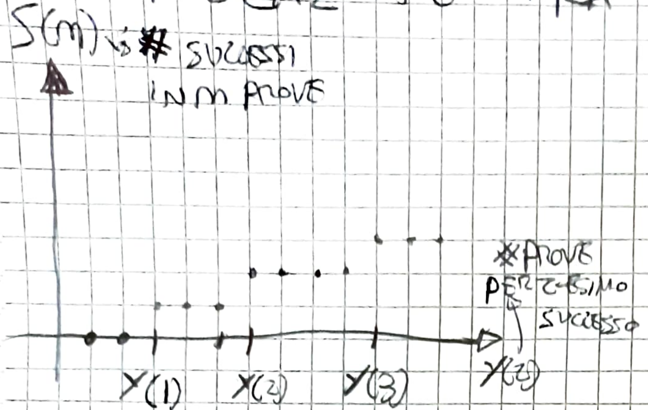
$Y(r+S(m))-S(m) \overset{L}{=} Y(r)$ indipen. $S(l)$ $l \leq r$

Con le funzioni di massa

$P(S(n)=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ | Convoluzione di Bernoulliane

$P(Y(r)=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$ | Convoluzione di geometriche

RELAZIONE TRA S E Y



$$S(m) \overset{\text{PER } m \to \infty}{\stackrel{L}{=}} \text{POISSON}$$

PRENDIAMO INTERVALLO TEMPORALE $(0,1)$

$N(1) \sim \text{Poisson}(\lambda)$, IN $(0,t)$ ABBIAMO mt PROVE CON MEDIA λt

$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

SI NOTA UGUALMENTE ALLA BINOMIALE

$N(s+t) - N(t) \stackrel{L}{=} N(s) \sim \text{Poiss}(\lambda s)$ INDIPEN. DA $0 < s_1 < s_2 \ldots < t$

CALCOLIAMO IL TEMPO DEL PRIMO SUCCESSO

$Y(m) \to \frac{1}{m} Y(1) \quad Y(1) \sim \text{Geom}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$

$$P\left(\frac{Y(1)}{m} > s\right) = \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{sm} \to \lim_{m \to \infty} P(Y(1) > sm) = \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{sm}$$

$$\longrightarrow e^{-\lambda s} \to \lim_{m \to \infty} P(Y(1) < sm) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{sm} = 1 - e^{-\lambda s}$$

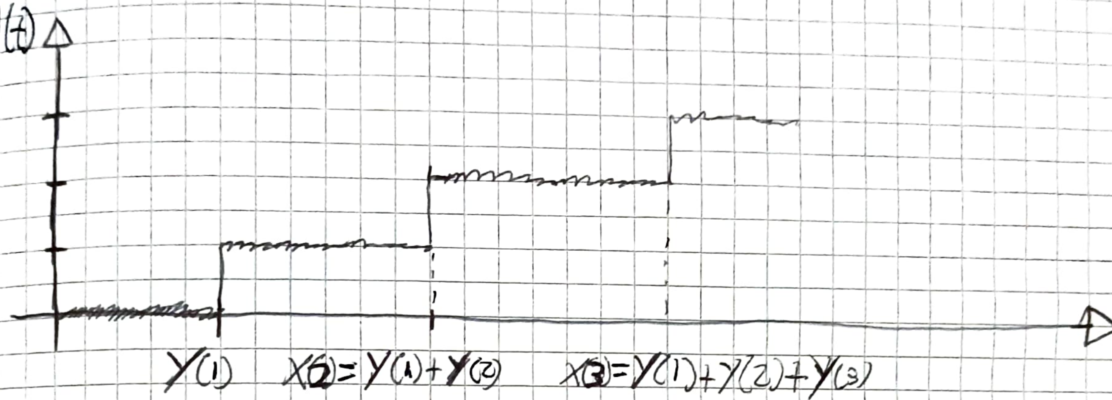
$s > 0$

SI OTTIENE LA CDF ESPONENZIALE DI HAZARD RATE λ

SAPENDO CHE NON C'É STATO IL GUASTO FINO AL TEMPO t

$$P(Y(1) > t+\Delta \mid Y(1) > t) = \frac{P(Y(1) > t+\Delta)}{P(Y(1) > t)} = P(Y(1) > \Delta)$$

MEMORYLESS PROPERTY



DEFINIAMO $N(t)$ GLI ARRIVI AL TEMPO t

$$\{N(t) \geq z\} = \{X(z) \leq t\} \qquad Y(1), Y(2) \ldots \sim Exp(\lambda)$$

$$Y(1) = \frac{E(1)}{\lambda} \qquad E(1) \sim EXP(1)$$

$$h_z(x) \triangleq \frac{x^{z-1}}{(z-1)!} e^{-x} = f^{*z}(x)$$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

$m=2$

$$(f*f)(t) = \int_0^t f(x) f(t-x) dx = e^{-t} \int_0^t dx = t e^{-t}$$

PASSO $z+1$:

$$[(f^{*z}) * f](t) = \int_0^t \frac{x^{z-1}}{(z-1)!} e^{-x} e^{-t+x} dx = \frac{e^{-t}}{(z-1)!} \int_0^t x^{z-1} dx = h_{z+1}(t)$$

LEGGE DI ERLANG

$Y_r \sim \text{ERLANG}(r,\lambda)$ $\begin{cases}\mu = \frac{r}{\lambda}\\ \sigma^2=\frac{r}{\lambda^2}\end{cases}$ $f_{Y_r}(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$

$Y_r = Y(1)+Y(2)+Y(3)+\dots+Y(r)$ TUTTE EXP i.i.d CON RATE λ

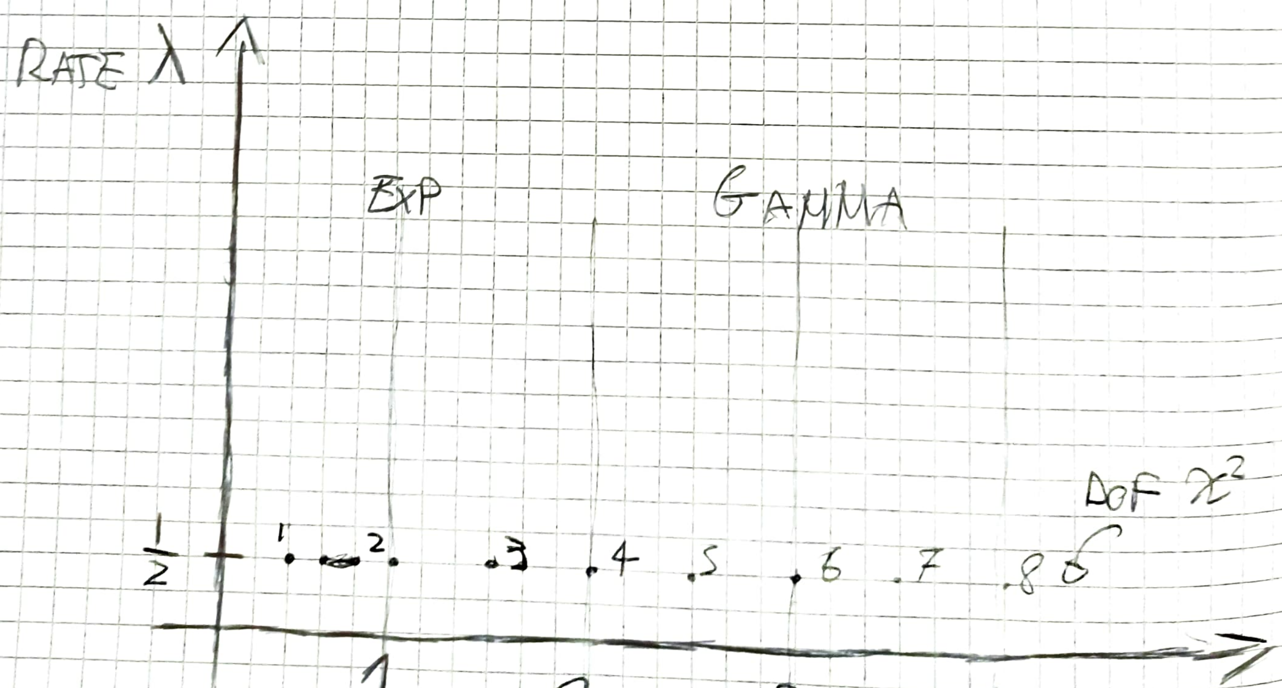
PRENDE IL NOME DI GAMMA PER $r \in \mathbb{R}$

LEGGE CHI QUADRATO

SIANO $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ NORMALI STANDARD INDIPEN.

$$\chi^2_{2m} = \underbrace{Z_1^2+Z_2^2}_{\sim EXP(\frac{1}{2})} + \dots + Z_{2m}^2 \sim \text{GAMMA}\left(m, \frac{1}{2}\right)$$

PER GRADO PARI



RIASSUNTO

SCHEMA DI BERNOULLI (p)		PROCESSO POISSON (λ)	
PROVE RIPETUTE	$\text{BIN}(n, p)$	$\text{POISSON}(\lambda t)$	
PRIMO SUCCESSO	$\text{GEOM}(p)$	$\text{EXPO}(\lambda)$	(TEMPO 1° SUCC)
r-ESIMO SUCCESSO	$\text{BINEG}(r, p)$	$\text{ERLANG}(r, \lambda)$	(r-ESIMO SUCCESSO)

$$\chi^2_{2n} \equiv \text{GAMMA}\left(n, \tfrac{1}{2}\right) \qquad (r, \lambda)$$

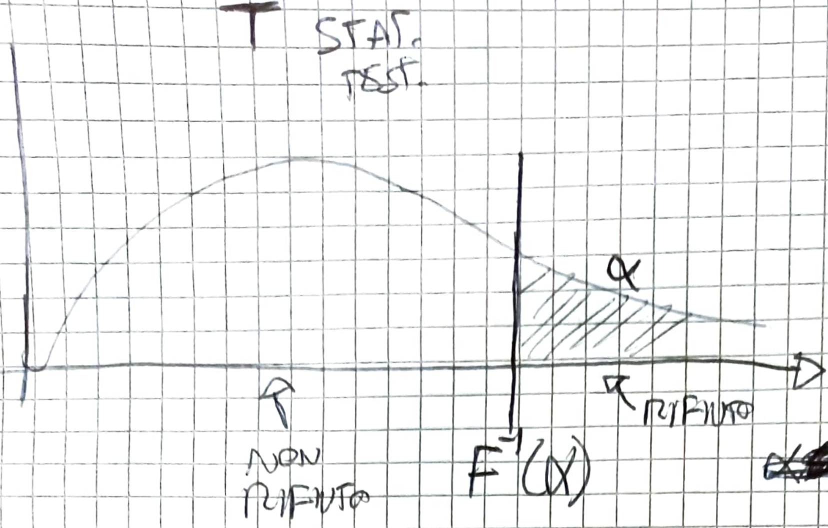
$$\mu = \frac{\lambda}{r} \qquad \sigma^2 = \frac{\lambda}{r^2}$$

STATISTICA INFERENZIALE

MODELLIZZARE IN BASE AI DATI

SI PONE UN IPOTESI NULLA H_0 E SI CERCANO PROVE PER CONFUTARLO RISPETTO L'IPOTESI ALTERNATIVA H_A

SI CERCA QUINDI UNA STATISTICA TEST ADATTO IN BASE AL MODELLO, CERCANDO DI PROVARE CHE NON SIA POSSIBILE DIRE CHE H_0 SIA ERRATA



~~[illegible]~~

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_A : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

P-VALUE $>$ α SI ACCETTA

P-VALUE $\leq \alpha \Leftrightarrow T \geq F^{-1}(\alpha)$ SI RIFIUTA

~~[illegible]~~

$1-\alpha$ INTERVALLO DI CONFIDENZA

$\alpha \to$ LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÀ

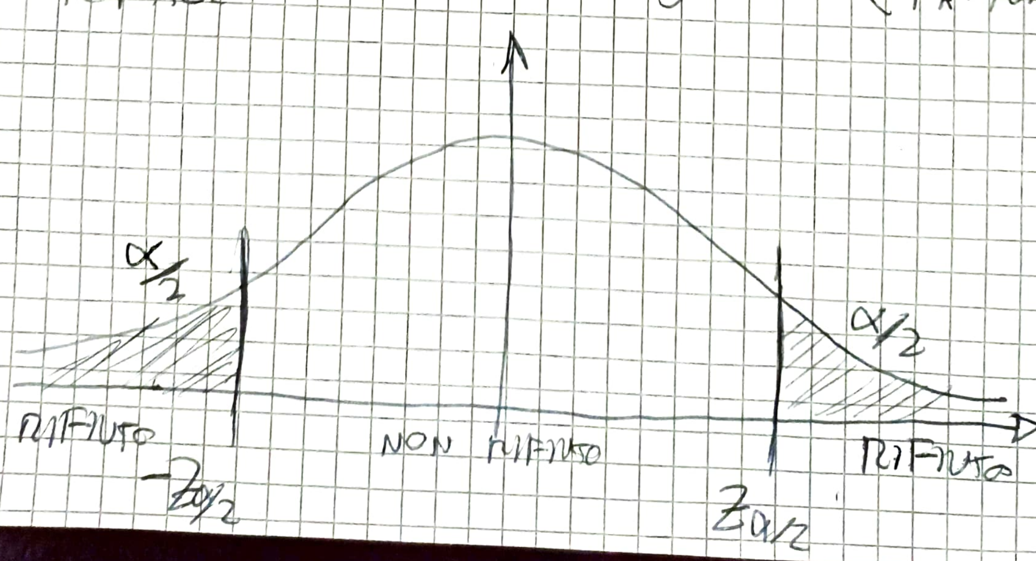
$\alpha =$ PROB. DI RIFIUTARE L'IPOTESI H_0 IN REALTÀ VERA (ERRORE I SPECIE)

$\beta =$ PROB DI ACCETTARE H_0 IN REALTÀ FALSA (II ERR SPECIE)

TEST NORMALE (O T DI STUDENT)

BILATERALE

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_A : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



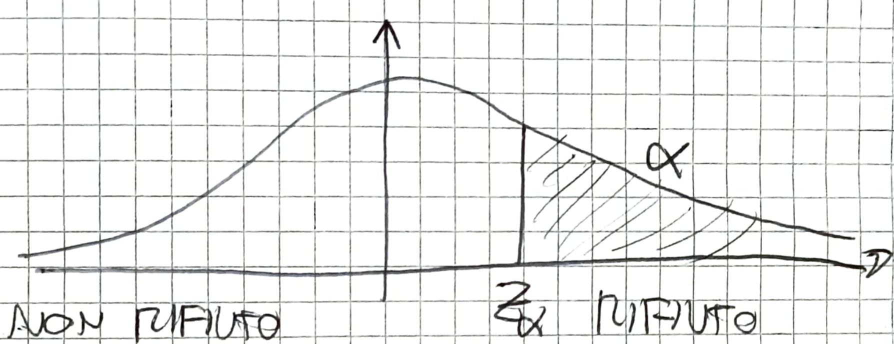
T STAT. TEST, SI USA $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

SI RIFIUTA H_0 SE $|T| > Z_{\alpha/2}$

$P(-Z_{\alpha/2} < T < Z_{\alpha/2}) = 1 - \overset{P.VAL.}{\alpha}$

$\rightarrow P.VAL = 2P(Z > |T|)$

TEST UNILATERALE (SINISTRO O DESTRO)



SI RIFIUTA H_0 SE $|T| > Z_\alpha$

~~$P(|T| < Z_\alpha) = 1 - P.V \rightarrow P.VAL = P(|Z| > |T|)$~~

$P(Z < |T|) = 1 - P.V \quad P.VAL = P(Z > |T|)$

CON σ^2 NON NOTA SI USA LA VAR CAMP. S^2

CON LA T DI STUDENT CON $n-1$ DOF

TEST CHI-QUADRATO (SOLO UNILATERALE)

$P_i =$ PROBABILITÀ ATTESA $\quad \hat{P}_i =$ PROBABILITÀ MISURATA

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n\hat{P}_i - nP_i)^2}{nP_i} = T^{\alpha} \text{ STAT. TEST}$$ CON $m-1$ GRADI DI LIBERTÀ

(SE IL NUMERO n DI TIRI È ALEATORIO, ALLORA DOF $= m$)

ACCETTIAMO SE $\chi^2_{m-1,\alpha} < T$

DIMOSTRAZIONI VARIE

ERLANG CON PARAMETRO λ $\quad f = \lambda e^{-\lambda x}$

$$(f*f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(t-x)\, dx \cdot 1\{x>0\} \cdot 1\{t-x>0\}$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda t + \lambda x}\, dx = \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t}\, \cancel{dx} = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

$$f^{*r} = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}$$

$$[(f^{*r}) * f](t) = \int_0^t \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda t + \lambda x}\, dx = \frac{\lambda^{r+1}}{(r-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t x^{r-1}\, dx$$

$$= \frac{\lambda^{r+1}}{r!} \cancel{x}^{r} e^{-\lambda t} = f^{*r+1}$$

DIMOSTRAZIONE POISSON

$X \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$

$\lambda = np$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} = \frac{n^k\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{n^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k k!}$$

$$\frac{\lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

DIMOSTRAZIONE SOMMA POISSON

$X \sim Poiss(\lambda_1)$ $\quad Y \sim Poiss(\lambda_2)$ $\quad Z = X+Y$

$$P(X=x) = \frac{\lambda_1^x e^{-\lambda_1}}{x!} \qquad P(Y=y) = e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^y}{y!}$$

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^i}{i!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{(k-i)!\, i!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{k!} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{(k-i)!\, i!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1+\lambda_2)^k$$

DIMOSTRAZIONE MARKOV

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

X NON NEG. CON MEDIA FINITA

$$I \begin{cases} 1 & \text{SE } X \geq \alpha \\ 0 & \text{SE } X \leq \alpha \end{cases}$$

$$P(X \geq \alpha) = P(I = 1) = E[I]$$ PER LOTUS

$$E[I] \leq \frac{E[X]}{\alpha} = E\left[\frac{X}{\alpha}\right]$$

DIMOSTRAZIONE CHEBYSHEV

$$Y = [X - E[X]]^2$$

$$P(Y \geq \gamma^2) \leq \frac{E[Y]}{\gamma^2}$$

$$\Downarrow$$

$$P(|X - E[X]| \geq \gamma) \quad \frac{VAR(X)}{\gamma^2}$$

DIMOSTRAZ FORMULA V. AL ATTESO

$P(X=k), k=0,1,2,m$

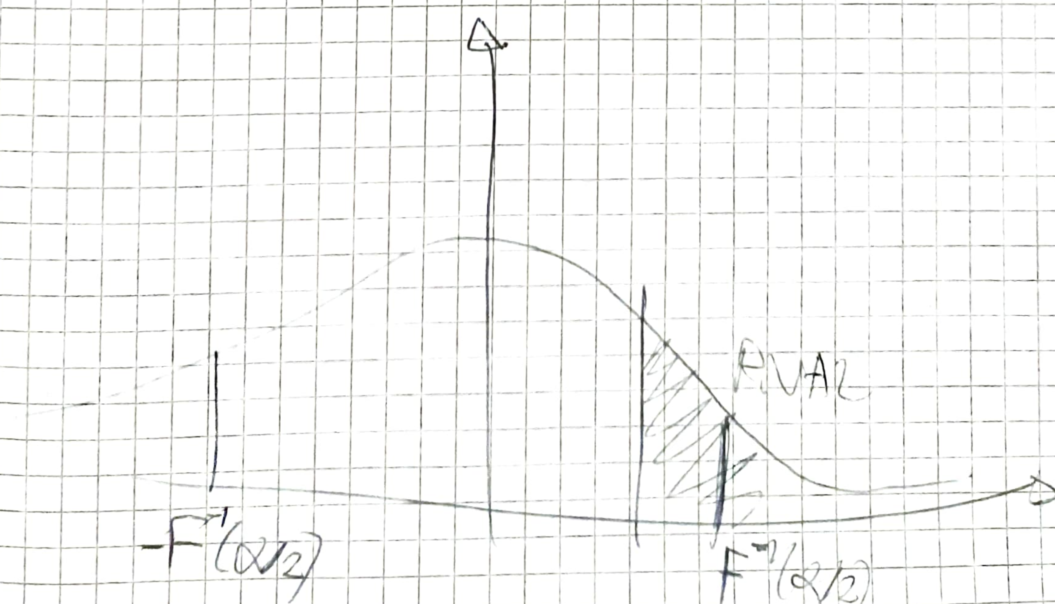
$$E[X] = \sum_{i=0}^{m} k\,P(X=k)$$

$$= P(X=1) + 2P(X=2) + \dots + mP(X=m)$$

SI NOTA $P(X>k) = P(X=k+1) + \dots P(X=m)$

DA ~~K~~ M VOLTE

$$P(X>1) + P(X>2) + \dots + P(X>m)$$



VALORE ATTESO GEOMETRICA

$X \sim GEOM(P)$

$$P(X > K) = q^K$$

$$E[X] = \sum_{K=0}^{\infty} q^K = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{P}$$