Teoria dei Sistemi (9 CFU, Canale 1)
13/01/2021

Nome e Cognome: ____________________________

Matricola: ____________________________

Docente: Prof. Salvatore Monaco

---

1. Descrivere il problema della realizzazione e le condizioni di realizzazione.

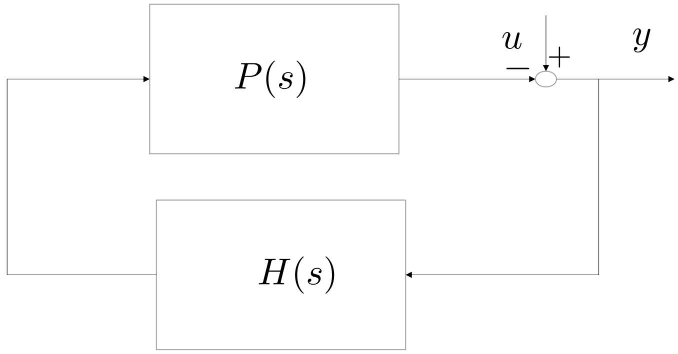


Figura 1: Esercizio 1

   (a) Assegnato il sistema in Figura 1 con

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = K\frac{s+1}{s+2}$$

      i. si calcoli una realizzazione del legame ingresso-uscita (u-y); quale è la sua dimensione? Si spieghi il risultato;

      ii. si studi la stabilità asintotica al variare di $K \in \mathbb{R}$.

2. Il problema della discretizzazione e il calcolo del modello a tempo discreto equivalente. Cosa rappresenta e come si calcola?

   (a) Fissato il periodo di campionamento a $T_s = 1$ secondo, calcolare la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto equivalente a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x.$$

3. La risposta a regime permanente: definizione e condizioni di esistenza.

   (a) Sapendo che la risposta a regime permanente corrispondente a $u(t) = \sin t$ è data da $y_r(t) = 10 \sin(t - 45°)$, calcolare una possibile rappresentazione del sistema.

4. Assegnato il sistema avente funzione di trasferimento $P(s) = \frac{1}{s^2-1}$, si consideri una sua realizzazione e

   (a) immaginando di poter misurare lo stato, calcolare, se possibile, una legge di controllo dallo stato che renda il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile;

   (b) è possibile stabilizzare asintoticamente il sistema mediante una controreazione dall'uscita? Indicare come;

   (c) sapresti discutere il problema di costruire una controreazione dall'uscita che assegni al sistema complessivo una banda passante $B_3 > 10$?

Teoria dei Sistemi (6 CFU)
13/01/2021

Nome e Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Docente: ______________________________

---

1. Descrivere il problema della realizzazione e le condizioni di realizzazione.

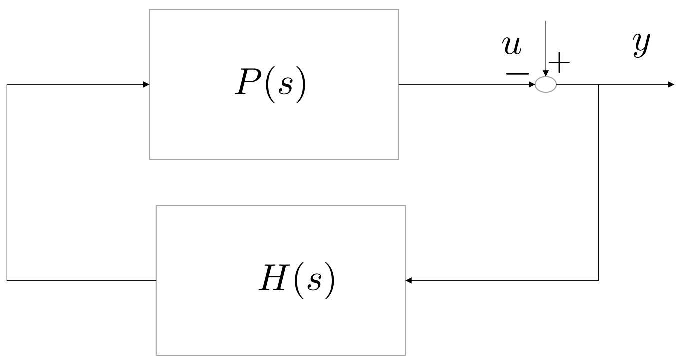


Figura 1: Esercizio 1

   (a) Assegnato il sistema in Figura 1 con

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = K\frac{s+1}{s+2}$$

      i. si calcoli una realizzazione del legame ingresso-uscita (u-y); quale è la sua dimensione? Si spieghi il risultato;
      ii. si studi la stabilità asintotica al variare di $K \in \mathbb{R}$.

2. Il problema della discretizzazione e il calcolo del modello a tempo discreto equivalente. Cosa rappresenta e come si calcola?

   (a) Fissato il periodo di campionamento a $T_s = 1$ secondo, calcolare la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto equivalente a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x.$$

3. La risposta a regime permanente: definizione e condizioni di esistenza.

   (a) Sapendo che la risposta a regime permanente corrispondente a $u(t) = \sin t$ è data da $y_r(t) = 10 \sin(t - 45°)$, calcolare una possibile rappresentazione del sistema.

Febbraio 2021

1. **Modi naturali:**
   (a) definizione e parametri caratteristici;
   (b) mostrare che l'evoluzione libera di un sistema a tempo continuo a partire da uno stato iniziale x_0 rimane confinata al sottospazio generato dagli autovettori rispetto ai quali x_0 ha componente non nulla.

2. Studiare come avviene l'evoluzione libera nel caso in cui la matrice dinamica sia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Mostrare che una matrice che ha la proprietà di avere nulla la somma degli elementi di ogni riga ha un autovalore in zero. Qual è il corrispondente autovettore destro?

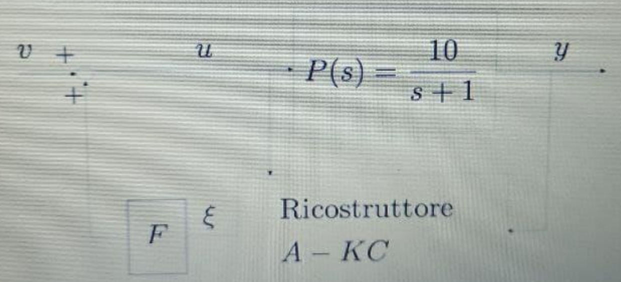
4. Collegare il modello implicito di un sistema lineare stazionario a dimensione finita tempo continuo al suo modello esplicito. Mostrare che se esiste una realizzazione di $K(t)$ allora è vero che $K(t-\tau) = Q(t)P(\tau)$ dove $Q(t)$ è una matrice $q \times n$ e $P(\tau)$ è una matrice $n \times p$, dove p è il numero di ingressi e q il numero di uscite, n un intero opportuno.
   Questa relazione si chiama fattorizzabilità.
   Quanto asserito equivale a dire che la fattorizzabilità è condizione necessaria di realizzabilità?

5. Discutere brevemente il problema della modifica delle proprietà dinamiche di un sistema lineare stazionario a dimensione finita mediante controreazione dall'uscita con uno schema che impiega un ricostruttore dello stato
   (a) cosa ci assicura il principio di separazione
   (b) sotto quali condizioni è possibile assegnare gli autovalori al comportamento ingresso uscita quali sono gli argomenti che condizionano la selezione degli autovalori da assegnare

6. Con riferimento al sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento

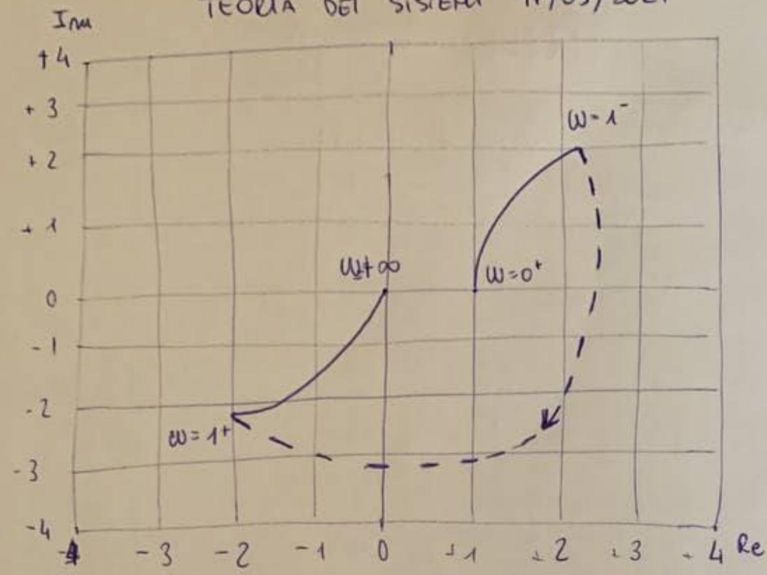
$$\frac{10}{s+1} \qquad B_3 = 1r/sec$$

   progettare un controllore con reazione dall'uscita che assegni la banda passante a $10r/sec$.
   Calcolare inoltre la funzione di trasferimento tra v ed u nello schema in Figura.



Marzo 2021

TEORIA DEI SISTEMI 17/03/2021



a)

1) TRACCIARE I DIAGRAMMI DI BODE CORRISPONDENTI

2) INDICARE UNA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $W(s)$ CHE AMMETTE SUDDETTE RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE

3) CALCOLARE LA RISPOSTA ALL'INGRESSO $u(t) = e^{(t-1)}\delta_{-1}(t-1)$ da $x_0 = (1 \quad 1)^T$

4) CALCOLARE, SE ESISTE, LA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE ALL'INGRESSO $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$

b) DEFINIZIONE DI STABILITÀ INTERNA ED ESTERNA E RELAZIONI TRA DI ESSE

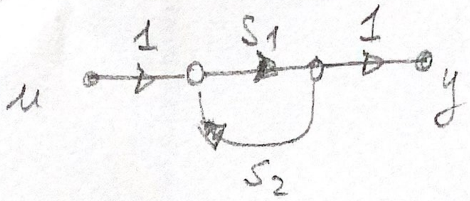
c) 9CFU DIMOSTRARE CHE IL SISTEMA A TEMPO-DISCRETO EQUIVALENTE AD UN SISTEMA A TEMPO CONTINUO NON PUÒ AVERE AUTOVALORI A PARTE REALE NEGATIVA O NULLA

d) 6CFU e FdA DATO UN SISTEMA LTI CHE AMMETTE LA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE, CALCOLARE L'INGRESSO AL QUALE CORRISPONDE LA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE $y_R(t) = CA^{-1}B$

TdS 4.6.2021

Matricola ______ studente ______

1. Assegnato il sistema:



$S_1 \doteq \frac{s+k}{s+1}$

$S_2 \doteq \frac{1}{s(s+2)}$

- calcolare una rappresentazione con lo stato e studiarne le proprietà al variare di k;
- studiare la stabilità al variare di k;
- calcolare, per un eventuale valore di k per il quale esiste, la $y_r(t)$ all'ingresso

$$u(t)=\delta_{-1}(t-1)\sin t$$

- calcolare, per $k=2$, una rappresentazione a t-discreto equivalente (discretizzazione) con $T = 1$.

2. La proprietà di raggiungibilità degli stati; caratterizzazione dell'insieme degli stati raggiungibili; collegamento con l'eccitabilità dei modi naturali.

3. La stabilità interna ed esterna: collegamento tra le due proprietà.

Luglio 2021

Teoria dei Sistemi

01/07/2021

1. Scrivere la funzione di trasferimento di un sistema lineare stazionario caratterizzato da:
   - un modo pseudoperiodico con pulsazione naturale $\omega_n = 2$ e smorzamento $\zeta = \frac{1}{2}$;
   - un modo aperiodico con costante di tempo $\tau = 1$;
   - guadagno $\kappa = 1$;
   - risposta a regime permanente ad ingresso $u(t) = e^t\delta_{-1}(t)$ pari a $y_r(t) = 0$.

   Per tale funzione di trasferimento:

   (a) calcolare una realizzazione;

   (b) effettuare l'analisi dei modi naturali;

   (c) tracciare i diagrammi di Bode e polare;

   (d) discutere la dimensione della realizzazione; che dimensione ha quella calcolata? Ne esistono di dimensione maggiore? Ne esistono di dimensione minore?

2. Assegnato il sistema

   esiste un valore di $\kappa \in \mathbb{R}$, sia κ^*, in corrispondenza del quale tra v e y si ha una risonanza infinita? Per il sistema risultante si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$.

3. Assegnato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

   (a) **(Solo TdS 9 CFU e FdA)** effettuare la scomposizione di Kalman;

   (b) **(Solo TdS 9 CFU e FdA)** studiare stabilità interna ed esterna;

   (c) **(Solo TdS 9 CFU)** calcolare la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto equivalente per $T = 1$ s.

4. Il problema della realizzazione. Dimostrare che condizione necessaria di realizzabilità di un nucleo $K(s)$, $s \in \mathbb{C}$ è che sia una matrice di funzioni proprie.

5. Modi naturali per sistemi a tempo continuo. Definizioni e parametri caratteristici.

Teoria dei Sistemi
1/9/2021

Nome e Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

Crediti e Docente: ______________________

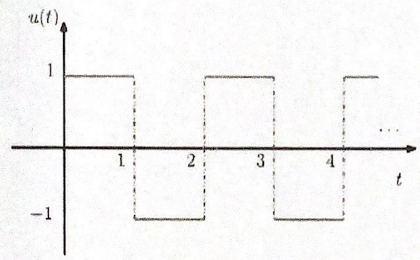


Figura 1:

1. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x.$$

   (a) Effettuare l'analisi modale.

   (b) Calcolare l'evoluzione in uscita e, se esiste, la risposta a regime permanente a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   e in corrispondenza all'ingresso in Figura 1 definita come

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [2i, 2i+1), i = 0, 1, \dots \\ -1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   (c) Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente per $T = 1$ secondo.

2. Tracciare il diagramma di Bode e polare della funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}$$

3. La stabilità interna ed esterna.

4. Definizione di guadagno e interpretazione fisica.

5. I modi naturali: definizione e parametri caratteristici per sistemi a tempo continuo.

6. Per sistemi a tempo discreto, dimostrare che se rango $\begin{pmatrix} B & \vdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$ esistono un tempo $\bar{K} > 0$ e una sequenza di ingressi $\{u(0), \dots, u(\bar{K})\}$ opportuni tale che $x(\bar{K}) = 0$ a partire da ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Esercitazione di Teoria dei Sistemi
10/11/2021

1. Dato il sistema a tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

   (a) Calcolare $\Phi(s)$, $H(s)$, $\Psi(s)$ e $W(s)$ e discutere l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi

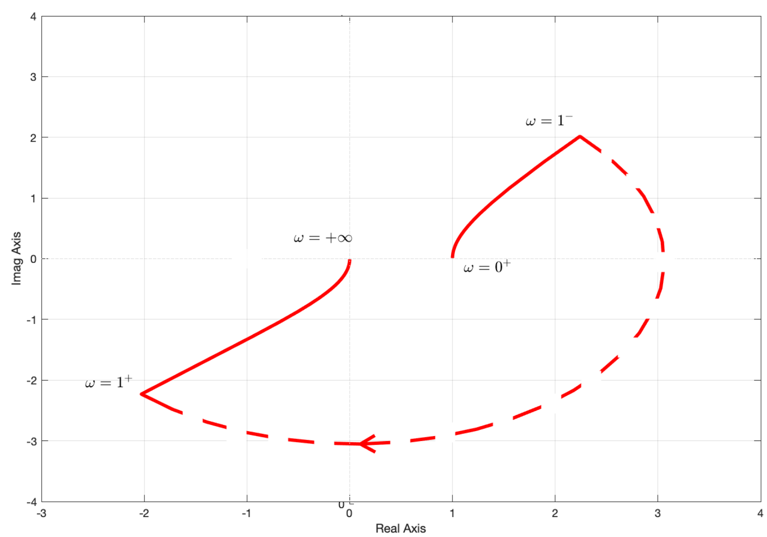
   (b) Calcolare la risposta forzata e a regime permanente in uscita all'ingresso

$$u(t) = \delta_{-1}(t-2) + sen(2t)\delta_{-1}(t-1)$$

2. Tracciare i diagrammi di Bode e polare per

$$F(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s+10)(s-100)}$$

3. Dato il diagramma Polare in Figura



   (a) tracciare i diagrammi di Bode corrispondenti;

   (b) indicare una funzione di trasferimento $W(s)$ che ammette le suddette rappresentazioni grafiche.

   Per il sistema avente funzione di trasferimento $W(s)$ calcolata al punto precedente

   (a) calcolare la risposta all'ingresso $u(t) = e^{(t-1)}\delta_{-1}(t-1)$ da $x_0 = (1\ 1)^\top$;

   (b) calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$.

4. Ricavare la risposta a regime permanente in uscita ad un ingresso sinusoidale per un sistema con funzione di trasferimento $W(s)$, dimostrando anche sotto quali condizioni l'espressione è valida

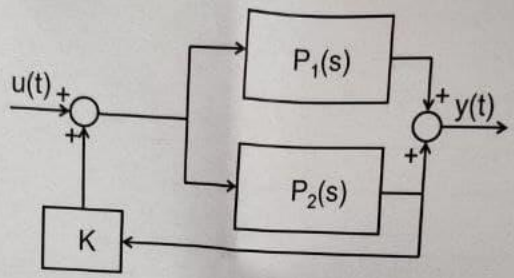
Gennaio 2022

Teoria dei Sistemi

20/1/2022

Cognome e nome ....

1. Sia dato il sistema illustrato nello schema



con

$$P_1(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad P_2 = \frac{2}{s(s+1)}$$

a. fornirne una rappresentazione con lo spazio di stato;
b. Studiarne la stabilità interna, quella esterna e quella esterna nello stato zero al variare di $K \in I\!R$;
c. studiarne le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità al variare di $K \in I\!R$;
d. posto $K = 1$,
   i. effettuarne la scomposizione di Kalman;
   ii. calcolarne la risposta forzata all'ingresso $u(t) = (2t-1)\delta_{-1}(t)$.

2. Dato il sistema descritto da

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+2}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima;
b. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t)$$

3. Giustificare o smentire la seguente affermazione: "in un sistema non completamente osservabile, la somma di due stati osservabili può fornire uno stato inosservabile mentre la somma di due stati inosservabili non può mai essere pari ad uno stato osservabile".

4. Illustrare il problema della realizzazione.

Febbraio 2022

Teoria dei Sistemi

11/2/2022

Cognome e nome ....

1. Sia dato il sistema rappresentato da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} -\alpha & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} x(t) + \alpha u(t) \end{aligned}$$

con $\alpha \in I\!R$.

A. Determinarne i modi naturali e studiarne le proprietà di eccitabilità e di osservabilità al variare di α;

B. se esiste, determinare, al variare di α, una condizione iniziale x_0 tale che l'evoluzione libera nello stato non sia limitata ma lo sia l'evoluzione libera in uscita;

C. studiarne la stabilità interna, esterna ed esterna nello stato zero al variare di α;

D. studiare le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità dello spazio di stato al variare di α;

E. posto $\alpha = 1$

   a. effettuare la scomposizione di Kalman;

   b. usando la rappresentazione in forma di Kalman, determinare $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$;

   c. determinare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = (t-1)\delta_{-1}(t) - t\delta_{-1}(t-1)$, dopo averlo graficato.

2. Tracciare il diagramma di Bode e quello polare per il sistema rappresentato da

$$W(s) = \frac{s^2+1}{s(s+1)(s-10)}$$

3. Calcolare la risposta indiciale per il sistema a tempo discreto ottenuto campionando, con tempo di campionamento $T_c = 0.1\,s$, il sistema a tempo continuo avente risposta impulsiva

$$w(t) = te^{-t} + \delta(t)$$

4. Fornire l'espressione di un modo naturale pseudoperiodico per un sistema a tempo discreto, illustrando il significato di ciascun termine che vi compare.
Successivamente, determinarne una espressione in modo tale che, se in $t = 0$ esso assume il valore $10u_a$, in $t = 4$ abbia valore $5u_a$. Che valore ha per $t = 8$?.

Teoria dei Sistemi
23/03/2022

Studente ____________________

Matricola ____________________

---

1. Si consideri il sistema a tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{\lambda}{2}-1 & -\frac{\lambda}{2}-1 \\ -1 & -\frac{\lambda}{2}-1 & \frac{\lambda}{2}-1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b+1 \\ b-1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1-\frac{c}{2} & \frac{c}{2} & -\frac{c}{2} \end{pmatrix} x$$

in cui $\lambda, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Studiare la stabilità interna ed esterna del sistema al variare dei parametri $\lambda, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Studiare la raggiungibilità e l'osservabilità al variare dei parametri $\lambda, b, c \in \mathbb{R}$.

(c) Fissato $\lambda = -1$, calcolare $b, c \in \mathbb{R}$, se possibile, in modo che la risposta a regime permanente rispetto l'ingresso $u(t) = 4$ sia $y_r(t) = 4$.

(d) Fissato $\lambda = -1$ calcolare, se possibile, $b, c \in \mathbb{R}$ tali che la risposta forzata in presenza di un qualunque ingresso sia identicamente nulla. Per i valori fissati operare, se necessario, la scomposizione di Kalman.

2. **[Solo TdS 9 CFU]** Calcolare una realizzazione minima del sistema a tempo discreto avente risposta indiciale

$$w_{-1}(k) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \delta_{-1}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 2^k \delta_{-1}(k) + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k)$$

e, se esiste, la corrispondente risposta a regime permanente.

3. Tracciare i diagrammi di Bode e il diagramma Polare della funzione di trasferimento

$$L(s) = 10 \frac{s+10}{s(s^2+10s+100)}$$

4. La risposta indiciale dei sistemi a tempo continuo: definizione e parametri caratteristici.

5. I modi naturali dei sistemi a tempo discreto.

[120 minuti (6 CFU), 135 minuti (9 CFU), libri chiusi]

Giugno 2022

Teoria dei Sistemi

15/6/2022

Cognome e nome ....

1. Si traccino i diagrammi di Bode e polare per

$$F(s) = \frac{s-10}{(s^2+3s+2)(s^2+1)}$$

Si calcoli inoltre la risposta forza e se esiste a regime permanente per l'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-2)$

2. Dato il sistema descritto da

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima;

b. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{sen}(2t)\delta_{-1}(t)$$

3. Dato un processo descritto dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

Determinare una rappresentazione con lo spazio di stato associata al processo in cui y(t) e u(t) rappresentino rispettivamente l'uscita e l'ingresso del sistema. Studiare inoltre i modi naturali che caratterizzano il processo, tracciando i grafici che ne rappresentano il comportamento nel piano cartesiano, per generiche condizioni iniziali $y(0) = a$ e $\dot{y}(0) = b$ al variare di a e b.

4. La discretizzazione di un sistema lineare a tempo continuo.

Teoria dei Sistemi

1/7/2022

Cognome e nome ....

1. Un sistema rappresentato da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, ha un autovalore $\lambda_1 = -1$, con autovettore associato $u_1 = (1\ \ 1\ \ 0)'$ e $\lambda_2 = -2$ con autovettore $u_2 = (1\ \ 0\ \ 1)'$.

A. Sapendo che per $x_0 = (0\ \ 0\ \ 1)'$ l'evoluzione libera è tale che $x_L(t) = x_0\ \forall t \geq 0$, determinare la matrice dinamica A;

B. Determinare, successivamente, le due matrici B e C in modo tale che nella risposta impulsiva nello stato compaia solo la legge temporale e^{-t} mentre nella risposta libera in uscita ci siano solo le leggi temporali e^{-t} e e^{-2t};

C. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = (1 + 3\sin 2t)\delta_{-1(t)}$.

2. Tracciare i diagrammi di Bode e polare per il sistema rappresentato da

$$W(s) = \frac{s-1}{(s^2+1)^2}$$

3. In un sistema a tempo continuo con $u \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}^3$, ponendo $x_0 = 0$, per ingresso $u(t) = \begin{pmatrix}\delta_{-1}(t)\\ 0\end{pmatrix}$ si ha $y(t) = \begin{pmatrix}1 - e^{-t}\\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\\ 1\end{pmatrix}$ mentre per ingresso $u(t) = \begin{pmatrix}\delta(t)\\ \delta_{-1}(t)\end{pmatrix}$ si ha $y(t) = \begin{pmatrix}e^{-t}\\ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\\ \delta(t) + 1 - e^{-t}\end{pmatrix}$. Determinare la funzione di trasferimento, la matrice delle risposte impulsive (in uscita) e, se esiste, la risposta a regime permanente per l'ingresso $u(t) = \begin{pmatrix}t+2\\ 1\end{pmatrix}\delta_{-1}(t)$.

4. Si calcolino le Z–trasformate delle seguenti funzioni, definite per $t \in Z$, $t \geq 0$:

$$f_1(t) = \begin{cases}1 & \text{per } t \text{ pari}\\ 0 & \text{per } t \text{ dispari}\end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases}1 & \text{per } t \text{ dispari}\\ 0 & \text{per } t \text{ pari}\end{cases}$$

$$f_3(t) = 2^t\delta_{-1}(t-3) \qquad f_4(t) = 2^{t-3}\delta_{-1}(t)$$

$$f_5(t) = -\left(\frac{1}{2}\right)^t\delta_{-1}(t) \qquad f_6(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)^t\delta_{-1}(t)$$

Quali di queste funzioni potrebbe essere la risposta impulsiva di un sistema (esternamente) stabile e quali no? Motivare ciascuna risposta.