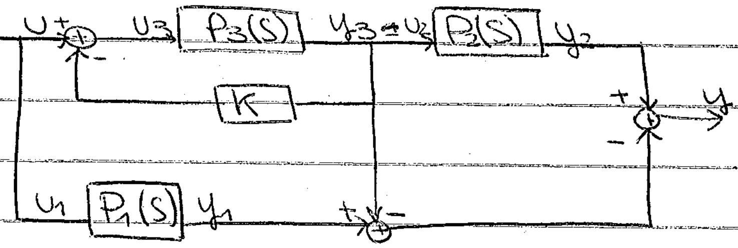
Esame Dicembre 2019

①



(*) $\begin{array}{l|l} S+1 & S+2 \\ -S-2 & 1 \\ \hline 0-1 & \end{array} = 1 - \frac{1}{S+2}$

$P_1 = \frac{1}{S+3}$ $\quad P_2 = \frac{S+1}{S+2}$ (*) $\quad P_3 = \frac{1}{S(S+2)}$ $\quad K = 1$

VINCOLI TOPOLOGICI

$$\begin{cases} y_3 = u_2 \\ y_3 = P_3 u_3 \\ y_1 = P_1 u_1 \\ y_2 = P_2 u_2 \\ u_3 = u - K y_3 \\ y = y_2 - (y_1 - y_3) \\ u = u_1 \end{cases}$$

$\cancel{y_3 = P_3 u_3}$ $\quad u_1 = u$

$\cancel{y_2 = P_2 u_2}$ $\quad y = y_2 - y_1 + y_3$

$\cancel{y_1 = P_1 u_1}$ $\quad u_2 = y_3$

$u_3 = u - K y_3$

RAPPRESENTAZIONE CON LO STATO (a.) = forma matriciale del sistema complessivo

$S_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$ $\quad S_2 = \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$ $\quad S_3 = \begin{cases} \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 u_3 \\ y_3 = C_3 x_3 \end{cases}$

Dopo i vincoli topologici

$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y_3 = A_2 x_2 + B_2 C_3 x_3 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 = C_2 x_2 + D_2 C_3 x_3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 (u - K y_3) \text{ (*)} \\ y_3 = C_3 x_3 \end{cases}$

(*) $\dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 u - K B_3 C_3 x_3$

Sistema complessivo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_3 x_3 \\ \dot{x}_3 = A_3 x_3 - K B_3 C_3 x_3 + B_3 u \\ y = -C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + D_2 C_3 x_3 \end{cases}$$

forma matriciale

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 C_3 \\ 0 & 0 & A_3 - K B_3 C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} -C_1 & C_2 & C_3 + D_2 C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

canonica raggiungibile

Per calcolare le matrici A_i, B_i, C_i realizzo le singole funzioni di trasferimento in forma V:

$P_1 = \frac{1}{s+3} \rightarrow A_1 = (-3) \quad B_1 = (1) \quad C_1 = (1)$

$P_2 = \frac{s+1}{s+2} = D_2 + \frac{R}{s+2}$: per identità tra polinomi $\rightarrow P_2 = 1 - \frac{1}{s+2}$

$s+1 = D_2 s + 2D_2 + R$

$$\begin{cases} D_2 = 1 \\ 2D_2 + R = 1 \rightarrow R = -1 \end{cases}$$

$A_2 = (-2) \quad B_2 = (1) \quad C_2 = (+1) \quad D_2 = (1)$

$P_3 = \frac{1}{s^2+2s} \rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_3 = (1 \ \ 0)$

$\rightarrow B_2 C_3 = 1 (1 \ \ 0) = (1 \ \ 0) \qquad D_2 C_3 = (1)(1 \ \ 0) = (1 \ 0) + C_3$

$B_3 C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A_3 - K B_3 C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -K & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 0) x \end{cases}$$

b. risposta forzata a $u(t) = \delta_{-1}(t-1) \rightarrow U(s) = e^{-s}/s$

$W = C(sI - A)^{-1} B$ oppure, guardando il sistema e l'uscita y

$y = y_2 - y_1 + y_3 = U_2 P_2 - U_1 P_1 + U_3 P_3 = y_3 P_2 - U P_1 + (U - K y_3) P_3$

$= y_3 P_2 - U P_1 + P_3 U - K P_3 y_3$

y_3 è a catena chiusa

$W_3 = \frac{P_3}{1+KP_3} = \frac{Y_3}{U_3} \rightarrow Y_3 = \frac{P_3 U}{1+KP_3}$

$Y(s) = Y_3 P_2 - U P_1 + U P_3 - K P_3 Y_3 = \frac{P_3 U}{1+KP_3} P_2 - U P_1 + U P_3 - \frac{K P_3 P_3}{1+KP_3} U$

$= \left(\frac{P_3 P_2}{1+KP_3} - P_1 + P_3 - \frac{K P_3 P_3}{1+KP_3} \right) U = \left(\frac{P_3 P_2 - P_1 - K P_1 P_3 + P_3 + K P_3 P_3 - K P_3 P_3}{1+KP_3} \right) U$

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{P_3P_2-P_1-KP_1P_3+P_3}{1+KP_3}=\frac{\frac{1}{s(s+2)}\cdot\frac{s+1}{s+2}-\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s(s+2)}+\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{1}{s(s+2)}}$$

$$=\left(\frac{s+1}{s(s+2)^2}-\frac{1}{s+3}-\frac{1}{(s+3)s(s+2)}+\frac{1}{s(s+2)}\right)\cdot\frac{s(s+2)}{s(s+2)+1}$$

$$=\frac{(s+1)(s+3)-s(s+2)^2-(s+2)+(s+3)}{\cancel{s}(s+2)\cancel{(s+2)}(s+3)}\cdot\frac{\cancel{s}\cancel{(s+2)}}{s(s+2)+1}$$

$$=\frac{s^2+3s+s+3-s(s^2+4s+4)-\cancel{s}-2+\cancel{s}+3}{s^2+2s+3s+6}\cdot\frac{1}{s^2+2s+1}$$

$$=\frac{s^2+\cancel{4s}+4-s^3-4s^2-\cancel{4s}}{(s^2+5s+6)(s^2+2s+1)}=-s^3-3^2s+4$$

$$=\left(\frac{s+1}{s(s+2)^2}-\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s(s+2)}-\frac{1}{s(s+3)(s+2)}\right)\cdot\frac{s(s+2)}{s(s+2)+1}$$

$$=\frac{(s+1)(s+3)-s(s+2)^2+(s+2)(s+3)-(s+2)}{\cancel{s}(s+2)\cancel{(s+2)}(s+3)}\cdot\frac{\cancel{s}\cancel{(s+2)}}{s^2+2s+1}\Rightarrow s_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-1$$

$$=\frac{s^2+3s+s+3-s(s^2+4s+4)+s^2+2s+3s+6-s-2}{(s+3)(s+2)(s+1)^2}$$

$$=\frac{s^2+8s+7-s^3-4s^2-4s}{(s+3)(s+2)(s+1)^2}=\frac{-s^3-2s^2+4s+7}{(s+3)(s+2)(s+1)^2}$$

moltiplicato per U(s) e antitrasformato è la risposta forzata

$$y_f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y_f(s)=W(s)U(s)\right]$$

c. Stabilità interna e esterna

Interna: denominatore $W(s) = (s+2)(s+3)(s+1)^2$ è stabile ~~perché ha un~~ ~~...~~ asintoticamente e dunque anche esternamente, in zero e in ogni stato

d. risposta a regime permanente a $u(t) = \text{sen}(t)$

I poli di $W(s)$ sono tutti a $Re<0$ perciò $y_r(t)$ esiste e ha la forma

$y_r = M(W(j\omega))\,\text{sen}(\omega t + \phi(W(j\omega)))$

$$W(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{-s^3-2s^2+4s+7}{\underbrace{(s+3)(s+2)}_{(s^2+5s+6)}\underbrace{(s+1)^2}_{(s^2+2s+1)}}\Bigg|_{s=j\omega=j} = \frac{-(j)^3-2(j)^2+4j+7}{(j+3)(j+2)(j+1)^2}$$

$$= \frac{+j+2+4j+7}{(-1+5j+6)(-1+2j+1)} = \frac{7(1+j)}{(5j+5)2j} = \cancel{\frac{7(1+j)}{-10+10j}\cdot\frac{-12-10j}{-12-10j}}$$

$$\cancel{= (7+7j)(-12-10j)}$$

$$\cancel{= \frac{7(1+j)}{10(-1+j)}\cdot\frac{-1-j}{-1-j} = \frac{7(-1-j-j-1)}{10(1+1)} = \frac{7(-2-2j)}{20} =}$$

$$\cancel{= \frac{14}{20}(-1-j) = \frac{-7-7j}{10}}$$

$$= \frac{5j+9}{(5j+5)2j} = \frac{5j+9}{10(-1+j)}\cdot\frac{(-1-j)}{(-1-j)} =$$

$$= \frac{-5j+5-9-9j}{10(1+1)} = \frac{-14j-4}{20} = -\frac{2+7j}{10}$$

$$M(W(j\omega)) = \left|\frac{2+7j}{10}\right| = \sqrt{\frac{4}{100}+\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{53}}{10}$$

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{arctg}\left(\frac{7}{2}\right) \cong 74,05°$$

$$y_r = \frac{\sqrt{53}}{10}\,\text{sen}(t + \text{arctg}(7/2))$$

e. realizzazione di $W(s) = \dfrac{-s^3-2s+4s+7}{s^4+2s^3+s^2+5s^3+10s^2+5s+6s^2+12s+6}$

$$= \frac{\overset{b_3}{-s^3}\ \overset{b_2}{-2s}\ \overset{b_1}{+4s}\ \overset{b_0}{+7}}{s^4+\underset{a_3}{8s^3}+\underset{a_2}{17s^2}+\underset{a_1}{17s}+\underset{a_0}{6}}$$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -17 & -17 & -8 \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_R = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

TRINOMIO = $1+\frac{2\xi s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}$

② Diagrammi Bode e polari di $W(s)=\frac{s^2+1}{(s+1)^2(s+2)(s+3)}=\frac{s^2+1}{(s^2+2s+1)(s+2)(s+3)}$

Forma di Bode $\frac{1+s^2}{6\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{3}\right)\left(1+2s+s^2\right)}$ → TRINOMIO

GUADAGNO $K=1/6$ MODULO $M_{dB}=20\log_{10}(1/6)\cong-15{,}6$

FASE NULLA

TRINOMIO NUM $1+s^2$ $\omega_n=1$ $\xi=0$ antirisonanza (verso il basso)

fase salto $+180°$

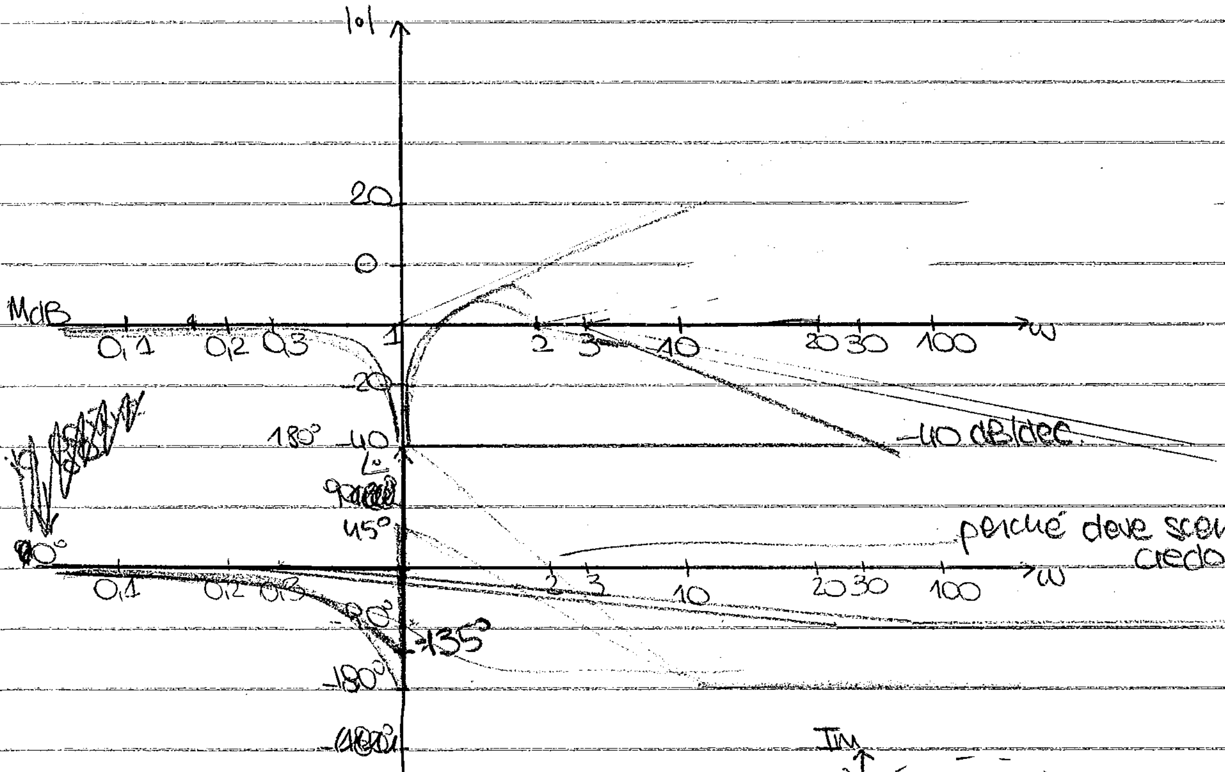
TRINOMIO DEN $1+2s+s^2$ $\frac{2\xi}{\omega_n}=2$ → $\xi=\omega_n=1$ piccola curva ($\xi=1$)

fase salto $-180°$ morbido

BINOMI $1+s/2$ → $\omega_n=\frac{1}{|T|}=2$ MODULO: scende da 2

FASE scende $-90°$ decade prima/dopo

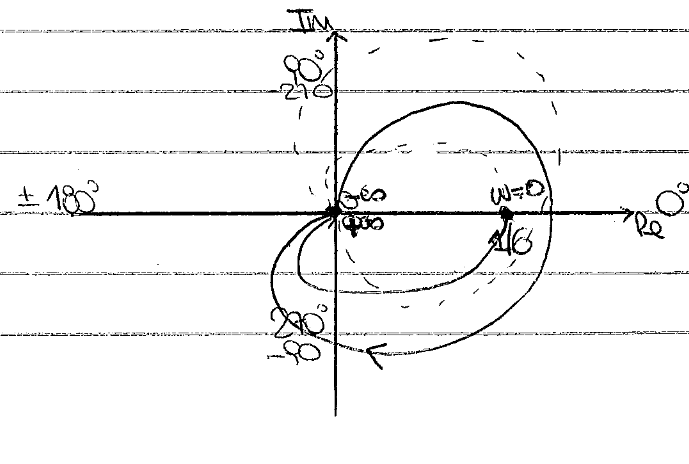
$1+s/3$ → $|T|=1/3$ → $\omega_n=3$ MODULO: scende da 3



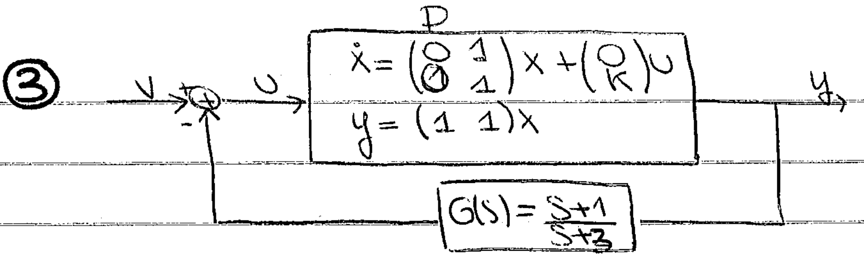
perché deve scendere così? credo siano i vari contributi

primo portato 1/6

arrivo nell'origine



③



STABILITÀ INTERNA E ESTERNA AL VARIARE DI K

~~Calcolo autovalori~~

Tutto in Laplace: $P(s) = C(sI-A)^{-1}B = (1 \ 1) \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$

$$= (1 \ 1) \frac{\begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}}{s(s-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(1 \ 1)\begin{pmatrix} k \\ sk \end{pmatrix}}{s(s-1)} = \frac{k+sk}{s(s-1)} = \frac{k(s+1)}{s(s-1)}$$

$$W_{TOT} = \frac{P}{1+PG} = \cancel{\frac{k(s+1)}{s(s-1)}} \quad \frac{\frac{k(s+1)}{s(s-1)}}{1+\frac{k(s+1)}{s(s-1)}\cdot\frac{s+1}{s+3}} = \frac{k(s+1)}{s(s-1)} \cdot \frac{\cancel{s(s-1)}(s+3)}{\underbrace{s(s-1)}_{(s^2-s)}(s+3)+k(s+1)^2}$$

$$= \frac{k(s+1)(s+3)}{s^3+\underbrace{3s^2-s^2}_{2s^2}-3s+\underbrace{k(s^2+2s+1)}_{ks^2+2ks+k}} = \frac{k(s+1)(s+3)}{s^3+(k+2)s^2+(2k-3)s+(k)}$$

Denominatore: Routh CN: $\begin{cases} k+2>0 \\ 2k-3>0 \\ k>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>-2 \\ k>+3/2 \\ k>0 \end{cases}$

Tabella

1	1	$2k-3$
2	$k+2$	k
3	$\frac{-2k^2+6}{k+2}$	
4	k	

$\begin{vmatrix} 1 & 2k-3 \\ k+2 & k \end{vmatrix} = k-(k+2)(2k-3)$
$= k-2k^2+3k-4k+6$
$= -2k^2+6$

$$\begin{cases} k+2>0 & k>-2 \\ \frac{2k^2-6}{k+2}>0 & k^2>3 \Rightarrow k=\pm 3 \text{ V.F} \\ k>0 & k>0 \end{cases}$$

-3 -2 0 3

$0<k<3$

Per $0<k<3$ le radici sono tutte a $Re<0$ perciò stab. interna asintotica $\to$ esterna in ogni stato.

Per $k=0, 3$ solo stabilità semplice e esterna?

④ $P(s) = \dfrac{10}{(s+10)(s+1)}$ parametri caratteristici della risposta indiciale

$$P(s) = \frac{10}{\underset{p_2}{(s+1)}\underset{p_1}{(s+10)}} \qquad p_2 > p_1 > 0$$

risposta forzata al gradino $y_f(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(s+10)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{C}{s+10}$

$$s^2 + 11s + 10$$

$$A(s+1)(s+10) + Bs(s+10) + Cs(s+1)$$

$$As^2 + 11As + 10A + Bs^2 + 10Bs + Cs^2 + Cs = 10$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 11A + 10B + C = 0 \\ 10A = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -C - 1 \\ 11 - 10C - 10 + C = 0 \rightarrow -9C + 1 = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$C = -\frac{1}{9}$$

$$B = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$$

$$y_f(s) = \frac{1}{s} - \frac{8}{9}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+10}$$

$$y_f(t) = \delta_{-1}(t) - \frac{8}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{-10t}$$

Poiché $p_2 > p_1$, il tempo di salita è determinato da p_1: $T_s \simeq \dfrac{2{,}2}{p_1} = 0{,}22$

(10)

Tempo di assestamento $T_a \simeq -\dfrac{\ln\left(\dfrac{m(-1+10)}{100(-1)}\right)}{-10} =$

$$= -\frac{\ln(m(+9)/100)}{-10}$$

$$\cong -0{,}24$$

⑤ DEF E CONDIZIONI PER LA STABILITÁ INTERNA

La stabilità è la capacità di reagire alle perturbazioni.

Uno stato è di equilibrio se il sistema vi permane con ingresso nullo ($f(x_e,0)=0$)

Uno stato di equilibrio x_e è stabile:

- localmente se una volta che x_e è stato perturbato nasce un moto che non si allontana troppo da x_e

  $\forall \varepsilon \ \exists \delta_\varepsilon : \|x(t_0)-x_e\| < \delta_\varepsilon \rightarrow \|x(t)-x_e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

- asintoticamente se oltre alla condizione precedente, si verifica anche la convergenza dell'evoluzione verso x_e

  $\exists \delta_a(\varepsilon) : \|x(t_0)-x_e\| < \delta_a \rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|x(t)-x_e\| = 0$

- globalmente se x_e è stabile e, comunque sia grande la perturbazione, nasce un transitorio che converge a x_e

  $\forall K>0 \quad \|x(t_0)-x_e\| < K \rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|x(t)-x_e\| = 0$

Le condizioni da verificare sono:

per la stabilità semplice $\|\Phi(t-t_0)\| < K$ limitatezza della matrice di transizione che si traduce in $\begin{cases} Re(\lambda_i^{1}) \leq 0 \\ Re(\lambda_i^{>1}) < 0 \end{cases}$

per la stabilità asintotica $\lim_{t\to+\infty} \|\Phi(t-t_0)\| = 0 \rightarrow Re(\lambda_i) < 0$

⑥ DEF RAGGIUNGIBILITÁ, INSIEME STATI RAGGIUNGIBILI

Uno stato $\bar{x}$ è raggiungibile al tempo T da x_0 se esiste un $t_0 \leq T$ e un ingresso $u \in [t_0, T)$ che porti lo stato da x_0 a $\bar{x}$

$R = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \int_{-\infty}^{T} e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \ u \in (-\infty, T)\} = Im(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$

Nel tempo ~~discreto~~ continuo lo raggiungibilità è una proprietà differenziale diverso [se uno stato non si riesce a raggiungere in n passi allora non si può più raggiungere] nel tempo continuo questo non accade, ~~a, ipot~~ uno stato, se raggiungibile lo è per qualsiasi intervallo di tempo, al limite anche istantaneo

⑦ [Ad Un autovalore di molteplicità algebrica / corrisponde un solo blocco di Jordan di dim $\mu \times \mu$ se è reale; al doppio di μ se è una coppia di complessi e coniugati] $m_g = 1$ → quanti blocchi di Jordan da assegnare a un autovalore

Esame Gennaio 2019

① $W(s) = \dfrac{s^2+s-2}{s^3+ks^2-s-k}$ $\quad k \in \mathbb{R} \quad = \dfrac{(s+2)(s-1)}{(s+k)(s+1)(s-1)}$

a. calcolare il guadagno

$W(s)|_{s=0} \rightarrow 2/k$

b. Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente rispetto a $u = \overset{M}{2}\, \text{sen}\, \overset{\omega}{3} t$

Poli $W(s)$: $s^3+ks^2-s-k = s(s^2-1) + k(s^2-1) = (s+k)(s^2-1)$

$$\begin{cases} s = -k & \text{neanche per } k=0 \\ s = \pm 1 \end{cases}$$

Non esiste perché è presente un polo in $+1$ $(Re > 0)$ indipendente dai valori di k

c. calcolare una realizzazione $\rightarrow$ forma canonica raggiungibile

$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & -k \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_R = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d. condurre l'analisi modale

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ k & 1 & -k-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-k-\lambda) + k + \lambda = -k\lambda^2 - \lambda^3 + k + \lambda$$
$$= k(1-\lambda^2) + \lambda(1-\lambda^2) =$$
$$= (k+\lambda)(1-\lambda^2)$$

AUTOVALORI $\lambda_1 = -k$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = -1$

AUTOVETTORI

$\lambda_1 = -k \rightarrow (A - \lambda_1 I)u_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} ka + b = 0 \\ kb + c = 0 \\ ka + b = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} b = -ka \\ c = -kb = +k^2 a \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ -ka \\ -ka \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ -k^2 \end{pmatrix}$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ -k^2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ k & 1 & -k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -a+b=0 \\ -b+c=0 \\ b+(-k-1)c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = a \\ c = b \end{cases} \quad b - kb - b = 0$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ ak+b+(1-k)c=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -b \\ c = -b \end{matrix}$

$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Modi naturali associati (tutti autovalori reali e distinti)

$\lambda_1 = -K$ $\begin{cases} \text{aperiodico convergente a zero per } K>0 \\ \text{aperiodico divergente per } K<0 \\ \text{aperiodico costante a 1 per } K=0 \end{cases}$

$\lambda_2 = 1$ modo aperiodico divergente

$\lambda_3 = -1$ modo aperiodico convergente

~~Eccitabilità~~

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -K & 1 & -1 \\ -K^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T = \frac{(cof(T^{-1}))^t}{det(T^{-1})}$$

$$det(T^{-1}) = 1-K+K^2+K^2+1+K = 2K^2+2$$

$$cof(T^{-1}) = \begin{pmatrix} +2 & -(-K+K^2) & +(-K-K^2) \\ -0 & +1+K^2 & -(1+K^2) \\ +(-2) & -(-1+K) & +1+K \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ K-K^2 & 1+K^2 & 1-K \\ -K-K^2 & -1-K^2 & -1-K \end{pmatrix}}{2(1+K^2)} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{1+K^2} & 0 & -\frac{1}{1+K^2} \\ \frac{K-K^2}{2(1+K^2)} & \frac{1}{2} & \frac{1-K}{2(1+K^2)} \\ -\frac{K+K^2}{2(1+K^2)} & -\frac{1}{2} & -\frac{1+K}{2(1+K^2)} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l}]V_1^T \\ ]V_2^T \\ ]V_3^T \end{array}$$

Eccitabilità $V_i^T B \neq 0$

$$V_1^T B = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+K^2} & 0 & -\frac{1}{1+K^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{1+K^2} \neq 0 \quad \forall K \quad \underline{ECC} \quad \lambda_1 = -K$$

$$V_2^T B = \begin{pmatrix} \frac{K-K^2}{2(1+K^2)} & \frac{1}{2} & \frac{1-K}{2(1+K^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1-K}{2(1+K^2)} \neq 0 \quad \text{per } \underset{K \neq \pm 1}{K \neq 1} \quad ECC.\ \lambda_2 = 1$$

$$V_3^T B = \begin{pmatrix} -\frac{K+K^2}{2(1+K^2)} & -\frac{1}{2} & -\frac{1+K}{2(1+K^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1+K}{2(1+K^2)} \neq 0 \quad \text{per } \underset{K \neq \pm 1}{K \neq -1} \quad ECC.\ \lambda_3 = -1$$

Osservabilità $Cu_i \neq 0$

$Cu_1 = (-2 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix}1\\-k\\-k^2\end{pmatrix} = -2-k-k^2 = 0$ mai $(k \in \mathbb{R})$ $\lambda_1 = -k$ OSSERV.

$k^2+k+2 = 0 \rightarrow k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$

$Cu_2 = (-2 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -2+1+1 = 0$ INOSSERV. $\lambda_2 = 1$

$Cu_3 = (-2 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = -2-1+1 = -2 \neq 0$ OSSERV. $\lambda_3 = -1$

Perciò:

$\lambda_1 = -k$ é eccitabile e osservabile $\rightarrow$ sarà presente in $W(t)$

$\lambda_2 = 1$ é eccitabile per $k \neq 1$ e inosservabile (cancellazione)

$\lambda_3 = -1$ é eccitabile per $k \neq -1$ é osservabile

e. Raggiungibilità e osservabilità

$R = (B \;\; AB \;\; A^2B) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -k\\1 & -k & 1+k^2\end{pmatrix}$ $rg = 3 \;\; \forall k \rightarrow$ sono tutti raggiungibili

$rg\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\k & -1 & 1-k\\k-k^2 & k+1-k & -1-k+k^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\k & -1 & 1-k\\k-k^2 & 1 & k^2-k-1\end{pmatrix}$ $\det = -2k^3 = 0$ per $k=0$ $rg=2$

2 autovalori osservabili

f. Stabilità interna e esterna

Il sistema non é stabile internamente perché c'é un autovalore positivo e non é neanche stabilizzabile

Esterna?

g. Sistema tempo discreto equivalente per $T_s > 0$

$A_D = e^{AT} = T^{-1}e^{Dt}T$ $\quad D =$ matrice con gli autovalori sulla diagonale

$D = \begin{pmatrix}-k & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-k & 1 & -1\\-k^2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-kt} & 0 & 0\\0 & e^t & 0\\0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{1+k^2} & 0 & -\frac{1}{1+k^2}\\ \frac{k-k^2}{2(1+k^2)} & \frac{1}{2} & \frac{1-k}{2(1+k^2)}\\ -\frac{k-k^2}{2(1+k^2)} & -\frac{1}{2} & -\frac{1+k}{2(1+k^2)}\end{pmatrix}$

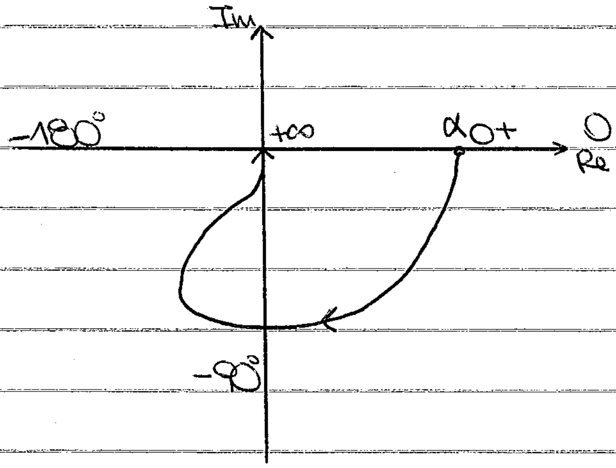
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & 1 & -1 \\ -k^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{-kt}}{1+k^2} & 0 & -\frac{e^{-kt}}{1+k^2} \\ e^t \frac{k-k^2}{2(1+k^2)} & \frac{e^t}{2} & e^t \frac{1-k}{2(1+k^2)} \\ -e^{-t} \frac{k-k^2}{2(1+k^2)} & -\frac{e^{-t}}{2} & -e^{-t} \frac{1+k}{2(1+k^2)} \end{pmatrix}$$

$=$

$$B_D = \int_0^T e^{A\xi} \, d\xi \cdot B$$

$$C_D = C$$

② Scrivere la funzione di trasferimento che ha diagramma polare.



Il diagramma parte da un punto finito sull'asse reale perciò non ci sono poli in zero ($K>0$, fase nulla)
Si va verso l'origine → andamento decrescente: strettamente propria
Passa per $-90°$ e poi arriva all'origine senza arrivare a $-180°$
Ha uno sfasamento di $-\pi$: • 2 termini monomi a denominatore
• termine trinomio a denominatore con $\xi > 0$
Il modulo cresce e poi decresce : termine trinomio a den con $|\xi| < 0{,}707$

$$W(s) = \frac{\alpha}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

③ $W(s) = \frac{K}{1+\tau s}$ $\quad K, \tau \in \mathbb{R}$

a. calcolare K, τ sapendo che: $y_{r_1}(t) = -3$ per $u_1(t) = 1$

$y_{r_2}(t) = ?$ $\Delta\varphi = -225° = -\frac{5}{4}\pi$ per $u_2(t) = 3 \operatorname{sen} \overset{\omega}{3}t$

$y_{r_1} = -3$ per $u_1 = 1$

$y_{r_2} = M \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ con $\omega = 3$, Me $W(j\omega) = \frac{K}{1+\tau j\omega} \cdot \frac{1-\tau j\omega}{1-\tau j\omega}$

$$M(W(j\omega)) = \left|\frac{1}{1+\tau j\omega}\right| = \left|\frac{1 - K\tau j\omega}{1+\tau^2}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{1+\tau^2} - \frac{K\tau}{1+\tau^2} j\omega\right|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(1+\tau^2)^2} + \frac{K^2\tau^2}{(1+\tau^2)^2}} = \frac{\sqrt{1+K^2\tau^2}}{1+\tau^2} = 3$$

$$\sqrt{1+K^2\tau^2} = 3 + 3\tau^2$$

$$1 + K^2\tau^2 = 9 + 9\tau^4 + 18\tau^2$$

$$9\tau^4 + (18 + K^2)\tau^2 + 8 = 0 \qquad \tau^2 = x$$

$$9x^2 + (18 + K^2)x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{(18+K^2) \pm \sqrt{(18+K^2)^2 - 288}}{18}$$

$\Delta\phi = -225°$

$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}(K^2\tau^2) = -225° \rightarrow K^2\tau^2 = -1$

$$W(j\omega)\Big|_{\omega=3} = \frac{K}{1+3\tau j} \cdot \frac{1-3\tau j}{1-3\tau j} = \frac{K-3K\tau j}{1+9\tau^2}$$

$$M(W(3j)) = \left| \frac{K-3K\tau j}{1+9\tau^2} \right| = \sqrt{\frac{K^2+9K^2\tau^2}{(1+9\tau^2)^2}} = \cancel{K\sqrt{1+9\tau^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{K^2(1+9\tau^2)}{(1+9\tau^2)^{\cancel{2}}}} = \frac{K}{\sqrt{1+9\tau^2}}$$

$$\Phi(W(3j)) = \text{arctg}(y/x) = \text{arctg}\left(\frac{-3K\tau}{K}\right) = \text{arctg}(-3\tau) = -\frac{5}{4}\pi$$

$$-3\tau = tg(-5/4\ \pi) = -1 \rightarrow \boxed{\tau = 1/3}$$

$u_1 = 1 = \delta_{-1}(t)$ gradino → non dovrebbe essere positivo?

$\underbrace{y_r = y_f}_{\text{POSSO DIRLO?}} = W(0)\ \delta_{-1}(t) = \boxed{K = -3}$

b. calcolare la risposta transitoria rispetto all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$

$u(t) = \delta_{-1}(t) \rightarrow U(s) = 1/s$

In questo caso considero $y_p = 0$ perché non ho informazioni

$y_r = y_f \Rightarrow Y_f(s) = W(s)\ U(s)$

$$W(s) = -\frac{3}{1+\frac{1}{3}s} = -\frac{3}{\frac{3+s}{3}} = -\frac{9}{3+s}$$

$$Y_f(s) = -\frac{9}{3+s} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{9}{s(s+3)}$$

$$Res\left(-\frac{9e^{st}}{s(s+3)}, 0\right) = \lim_{s\to 0} \frac{-9e^{st}}{s+3} = -3$$

$$Res\left(-\frac{9e^{st}}{s(s+3)}, -3\right) = \lim_{s\to -3} \frac{-9e^{st}}{s} = 3e^{-3t}$$

$$y_f(t) = 3(e^{-3t}-1)\ \delta_{-1}(t)$$

Da Lippiello

$y_f(t) = W_{-1}(t) = K_B(1-e^{-t/\tau})\delta_{-1}(t)$

④ Dimostrare la formula della risposta a regime permanente all'ingresso $u(k) = \operatorname{sen} \theta k$ per un sistema tempo discreto

La definizione di risposta a regime permanente ~~e quella~~ nel tempo discreto è:

$$y_r(k) = \lim_{k_0 \to -\infty} \sum_{i=k_0}^{k} W(k-i)\, u(i) \quad \Big\} \; k-i = \xi \quad + \text{ipotesi le funzioni siano sufficientemente regolari}$$

$$= \sum_{\xi=0}^{+\infty} W(\xi)\, u(k-\xi)$$

Non è detto che questa sommatoria converga: se ciò avviene, per gli ingressi per i quali questo si verifica si avrà una risposta a regime.

Nel caso in esame:

$$u(k) = \operatorname{sen} \theta k = \frac{e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}}{2j}$$

per la proprietà di linearità e ricordando che la risposta a regime permanente ad ingressi esponenziali è del tipo:

$$y_r = \sum_{\xi=0}^{+\infty} W(\xi)\, e^{(k-\xi)s} = e^{ks} \underbrace{\sum_{\xi=0}^{+\infty} W(\xi)\, e^{-\xi s}}_{\text{è la trasformata Z di } W(k) \text{ in } e^{s}}$$

$$= e^{ks} W(e^{s}) = e^{j\theta k} W(e^{j\theta})$$

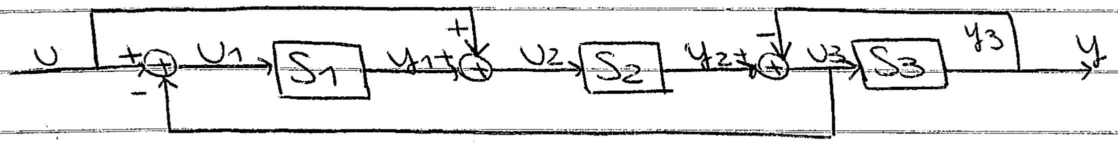
$$y_r(k) = \frac{e^{j\theta k} W(e^{j\theta}) - e^{-j\theta k} W(e^{-j\theta})}{2j}$$

Il modulo è una funzione pari, la fase è dispari

Si ottiene $y_r = M(W(e^{j\theta}))\, \operatorname{sen}(\theta k + \Phi(W(e^{j\theta})))$

Esame Febbraio 2019 / fila (A)

(1) Assegnato il seguente sistema



a. calcolare una rappresentazione con lo stato (A,B,C,D) + fdt W(s) totale

vincoli topologici

$$\begin{cases} u_1 = u - u_3 \\ u_2 = y_1 + u \\ u_3 = y_2 - y_3 \\ y = \cancel{y_1 + y_2 +} y_3 \end{cases}$$

$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + \cancel{D_1 u_1} \end{cases}$ $\quad S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + \cancel{D_2 u_2} \end{cases}$ $\quad S_3: \begin{cases} \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 u_3 \\ y_3 = C_3 x_3 + \cancel{D_3 u_3} + \overset{-1}{D_3 u_3} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 (u - \overbrace{C_2 x_2 + C_3 x_3}^{u_3}) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (C_1 x_1 + u) \\ \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 (C_2 x_2 - C_3 x_3) \\ y = \cancel{C_1 x_1 + C_2 x_2 +} C_3 x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 - B_1 C_2 x_2 + B_1 C_3 x_3 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 + B_2 u \\ \dot{x}_3 = B_3 C_2 x_2 + (A_3 - B_3 C_3) x_3 \\ y = \cancel{C_1 x_1 + C_2 x_2 +} C_3 x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 C_2 & +B_1 C_3 \\ B_2 C_1 & A_2 & 0 \\ 0 & B_3 C_2 & A_3 - B_3 C_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -C_3 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = (0 \;\; 0 \;\; -C_3)\begin{pmatrix} s-A_1 & B_1C_2 & -B_1C_3 \\ -B_2C_1 & s-A_2 & 0 \\ 0 & -B_3C_2 & s-A_3+B_3C_3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(0 \;\; 0 \;\; -C_3)$

b. assumi $W_1(s) = \frac{1}{s+1}$, $W_2(s) = k$, $W_3(s) = \frac{1}{s+2}$: rappresentazione con lo stato e $W(s)$ totale

Realizzazioni in forma canonica raggiungibile

$A_1 = (-1)$ $B_1 = (1)$ $C_1 = (1)$

$A_2 = (0)$ $B_2 = (1)$ $C_2 = (k)$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -k & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \;\; k \;\; -1) x \end{cases}$

$A_3 = (-2)$ $B_3 = (1)$ $C_3 = (1)$

$$W(s) = (1 \;\; k \;\; -1)\begin{pmatrix} s+1 & k & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -k & s+2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \;\; k \;\; -1)\frac{\begin{pmatrix} +s(s+2) & +s+2 & +k \\ -(k(s+2)+k) & (s+2)(s+1) & +k(s+1) \\ +s & -(-1) & (s+1)s+k \end{pmatrix}^{t}}{(s+1)\underbrace{s(s+2)}_{s^2+2s}-k+k(s+2)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow (s+1)s(s+2)+k(\overbrace{s+2-1}^{s+1})$

$\cancel{s^3+2s^2+s^2+2s-k+ks+2k}$ $(s+1)(s^2+2s+k)$

$\cancel{s^3+3s^2+(2+k)s+(2k-k)}$

$$= (1 \;\; k \;\; -1)\frac{\begin{pmatrix} s(s+2) & -k(s+3) & s \\ s+2 & (s+2)(s+1) & 1 \\ k & k(s+1) & s^2+s+k \end{pmatrix}}{(s+1)(s^2+2s+k)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{K(s+2)}{s^2+(2-K)s+(1-K)}$$

$$\begin{cases} 2-K>0 & K<2 \\ 1-K>0 & K<1 \end{cases}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 & K & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(s+2)-K(s+3) \\ (s+2)^2(s+1) \\ K+K(s+1) \end{pmatrix}}{(s+1)(s^2+2s+K)} = \frac{s(s+2)-K(s+3)+K(s^2+2)^2(s+1)-K-K(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+K)}$$

$$\rightarrow \frac{-K-K(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+K)} = \frac{K(\overbrace{-1-s-1}^{-s-2})}{(s+1)(s^2+2s+K)}$$

$$= s^2+2s-Ks-3K+(Ks+K)(s^2+4s+4)-K-Ks-K$$

$$= s^2+2s-2Ks-5K+Ks^3+4Ks^2+4Ks+Ks^2+4Ks+4K$$

$$= \frac{Ks^3+(5K+1)s^2+(2+6K)s-K}{(s+1)(s^2+2s+K)}$$

c. stabilità interna e esterna

$s=-1$

$s^2+2s+K=0 \rightarrow s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K}$ soluzioni reali per $1-K>0$ (*)
$K\leq 1$

Per $K<1$ il sistema è stabile asintoticamente $\Rightarrow$ stabilità esterna } basta?
Per $K=0$ solo interna semplice

(*) $K=0 \rightarrow s_1=-1+1=0 \rightarrow$ solo stabilità semplice
$s_2=-1-1=-2$

$K=1 \rightarrow s_{1,2}=-1$ OKAY

$\rightarrow$ magari prendere $K=-1$

d. $K\neq 0$: calcolare risposta a regime permanente per $u(t)=\text{sen}(t-\pi/4)$ $(\omega=1)$

$$W(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{K(j\omega)^3+(5K+1)(j\omega)^2+(2+6K)j\omega-K}{(1+j\omega)(\underbrace{(j\omega)^2}_{-1}+2j\omega+K)}$$

$$= \frac{-Kj-5K-1+2j+6Kj-K}{-1+\cancel{2j}+K-j-\cancel{2j}+Kj} = \frac{5Kj+2j-6K-1}{(K-1)+(K-1)j} = \frac{(2+5K)j-(6K+1)}{(K-1)(1+j)}$$

$$= \frac{5Kj+2j-6K-1}{(K-1)(1+j)} \cdot \frac{1-j}{1-j} =$$

$$W(s)\big|_{s=j} = \frac{5kj + 5k + 2j - 2 - 6k + 6kj - 1 + j}{(k-1)2} = \frac{14j + (-k-3)}{2(k-1)}$$

$$M(W(j)) = \left| \frac{(-k-3) + 14j}{2(k-1)} \right| = \sqrt{\frac{(-k-3)^2 + 14^2}{4(k-1)^2}} = \sqrt{\frac{k^2 + 6k + \overbrace{9 + 196}^{205}}{4(k-1)^2}}$$

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 205}$$

$$= \frac{\sqrt{k^2 + 6k + 205}}{2(k-1)}$$

$$\Phi(W(j)) = \operatorname{artg}(y/x) = \operatorname{artg}\left(\frac{14}{-k-3}\right) \qquad \text{con } k \neq -3$$

come lo metto il ritardo di $\pi/4$?

$$y_r = \frac{\sqrt{k^2 + 6k + 205}}{2(k-1)} \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4} + \operatorname{artg}\left(\frac{14}{-k-3}\right)\right)$$

e. Diagrammi di Bode per $k = 1$

$$W = \frac{s^3 + 6s^2 + 8s - 1}{(s+1)(s^2 + 2s + 1)}$$

$$\begin{array}{r|l} s^3 + 6s^2 + 8s - 1 & s + 1 \\ \hline - s^3 + s^2 & s^2 + 5s + 3 \\ 0 \quad 5s^2 + 8s & \\ 5s^2 - 5s & \\ 3s - 1 & \\ -3s - 3 & \\ -4 & \end{array}$$

$$= \frac{-4(s+1)(s^2 + 5s + 3)}{(s+1)(s^2 + 2s + 1)}$$

$$= -12 \frac{\left(1 + \frac{5}{3}s + \frac{s^2}{3}\right)}{1 + 2s + s^2}$$

guadagno $\quad -12 \cong 22$ dB $\qquad$ fase $-180°$

Num $\quad \omega_n = \sqrt{3} \qquad \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{5}{3} \rightarrow \xi = \frac{5}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}4$ NO
(ω_n: $\sqrt{3}$)

Den $\quad \omega_n = 1 \qquad 2\xi = 2 \quad \xi = 1$

② Dimostrare che, se esiste, la risposta a regime permanente a $u(t)=\delta_{-1}(t)$ è pari al guadagno del sistema PAG 91-92

La risposta a regime per un ingresso canonico di ordine K è pari a

$$y_r(t) = \sum_{i=0}^{K} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} c_i \qquad \text{con } c_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i(W(s))}{ds^i} \right|_{s=0}$$

Per l'ingresso gradino unitario $K=0$: $y_r(t) = c_0 \frac{t^0}{0} = c_0 = W(0)$

perciò la risposta indiciale è la funzione di trasferimento privata di eventuali poli nell'origine calcolata in $s=0$
va bene così?

③ Dimostrare che la $W(s)$ non dipende dalle coordinate

$W(t) = Ce^{At}B + D$ cambio di coordinate: $z = Tx$ con T matrice invertibile

$\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$, $\tilde{D} = D$

$$\tilde{W}(t) = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}\tilde{B} + \tilde{D}$$
$$= CT^{-1}e^{(TAT^{-1})t}TB + D = CT^{-1}T\, e^{At}T^{-1}TB + D = Ce^{At}B + D$$

e se non cambia $W(t)$ allora non cambia neanche $W(s)$.
Gli autovalori sono una proprietà strutturale del sistema, non si modificano con un cambio di coordinate

④ Dato un sistema con $W(s) = \frac{10}{s+2}$ è possibile che la risposta indiciale ammetta una sovraelongazione?
No, la sovraelongazione (ovvero lo scostamento rispetto al valore massimo normalizzato al valore di regime) è un parametro caratteristico che descrive qualitativamente l'andamento di sistemi al secondo ordine con una coppia di poli complessi e coniugati.

⑤ Calcolare la fne di trasferimento del sistema tempo discreto equivalente di un integratore tempo continuo

$$W(s) = \frac{1}{s}$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT}\right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{t=kT}\right]$$

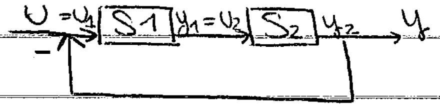
$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{st}}{s^2}, 0\right) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} e^{st} = \lim_{s\to 0} t e^{st} = t$$

$$= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\underbrace{t = kT}_{= k \cdot \delta_{-1}(k)}\right] = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{zT}{(z-1)^2} = \frac{T}{z-1}$$

Esame marzo 2019 fila (A)

(1) $S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_1 \\ y_1 = (2 \quad 1)\, x_1 \end{cases}$ $\qquad S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2 \\ y_2 = (-1 \quad 1)\, x_2 \end{cases}$

a. realizzazione del sistema



Vincoli topologici

$\begin{cases} u = u_1 - y_2 \\ y_1 = u_2 \\ y = y_2 \end{cases}$

$W_1 = C_1(sI-A_1)^{-1}B_1 = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \quad 1)\dfrac{\begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}}{s(s-1)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{(2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}}{s(s-1)} = \dfrac{2+s}{s(s-1)}$

$W_2 = C_2(sI-A_2)^{-1}B_2 = (-1 \quad 1)\begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad 1)\dfrac{\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}}{s(s+2)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{(-1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}}{s(s+2)} = \dfrac{s-1}{s(s+2)}$

$W_{TOT} = \dfrac{W_1 W_2}{1+W_1W_2} = \dfrac{\frac{s+2}{s(s-1)}\cdot\frac{s-1}{s(s+2)}}{1+\frac{s+2}{s(s-1)}\cdot\frac{s-1}{s(s+2)}} = \dfrac{\frac{1}{s^2}}{\underbrace{1+\frac{1}{s^2}}_{\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)}} = \dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{s^2}{s^2+1} = \dfrac{1}{s^2+1}$

Forma canonica raggiungibile

$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_R = (1 \quad 0)$ non serve, giusto?

b. Studiare la raggiungibilità e l'osservabilità + scomposizione Kalman

$R = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2$ ~~1 autovalore irraggiungibile~~

~~R = span$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$~~ span$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cancel{CA^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cancel{\quad} \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2$ ~~1 autovalore inosservabile~~

$\mathcal{Y} = \ker(O) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ \end{cases}$ $\quad \mathrm{span}(\mathcal{Y}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Consideriamo lo spazio di stato $\mathbb{R}^n$, al suo interno avremo un sottospazio vettoriale X_R degli stati raggiungibili e un sottospazio X_I degli stati inosservabili, definiamo quattro sottospazi che rappresentano tutta la decomposizione dello spazio di stato:

$X_1 = X_R \cap X_I \qquad R, I \quad = \Phi$

$X_2 \Rightarrow X_1 \oplus X_2 = X_R \qquad R, O \quad = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$X_3 \Rightarrow X_1 \oplus X_3 = X_I \qquad \mathbb{R}, I \quad = \Phi$

$X_4 \Rightarrow X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 = \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}, O \quad = \Phi$

Va bene?

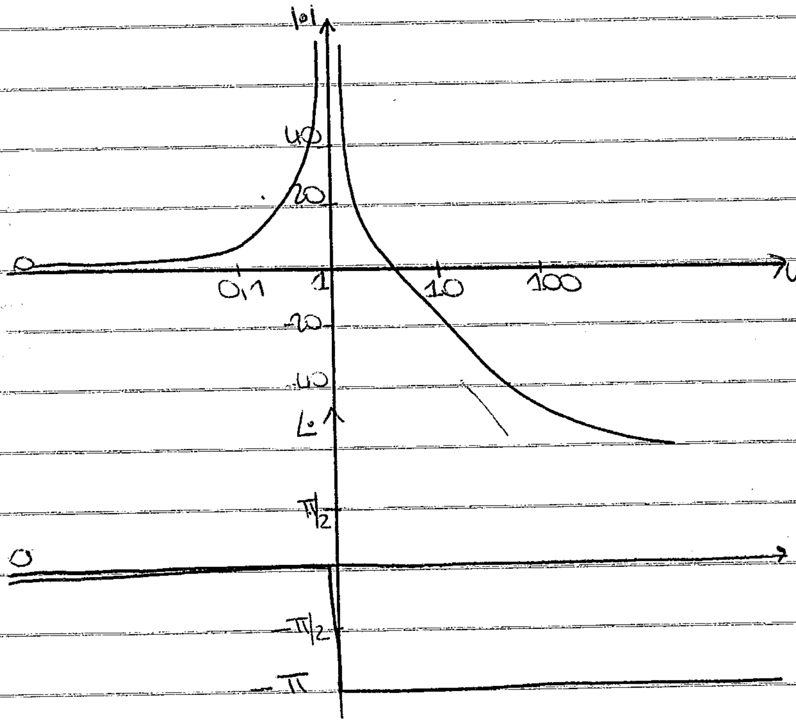
c. stabilità interna e esterna

$W(s) = \frac{1}{s^2+1}$ $s^2+1=0 \rightarrow s^2=-1 \rightarrow s=\pm i$ $Re=0$

si è effettuato una cancellazione di un polo a parte reale positiva (1) perciò il sistema non è stabile internamente e esternamente?

d. Diagrammi di Bode e polari

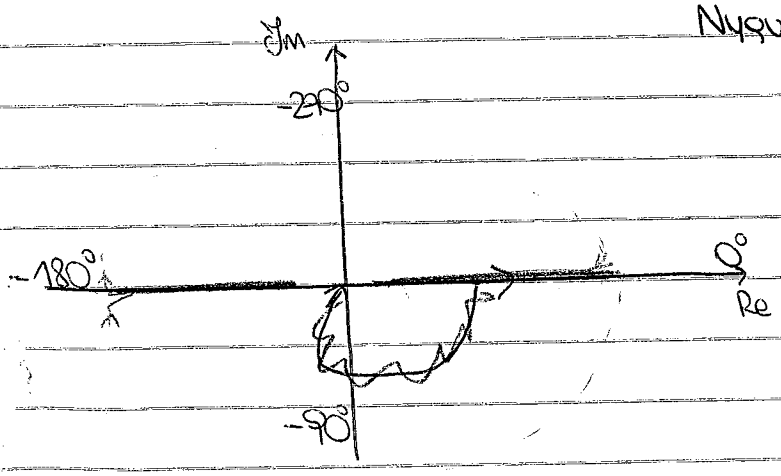
$W(s) = \frac{1}{1+s^2}$ $\xi=0,\ \omega_n=1$ termine trinomio a denominatore



Nyquist

la fase sta a zero e parte da 0 dB = 1

poi salta a -180°



② Per $K \in \mathbb{R}$, si consideri il sistema $\begin{cases} \dot{x} = -x + Ku \\ y = x \end{cases}$

a. calcolare la risposta forzata e, se esiste, a regime permanente per $u(t) = \delta_{-1}(t)$

$A = (-1) \quad B = (K) \quad C = (1)$

$W(s) = (1)(s+1)^{-1}(K) = \frac{1}{s+1} K = \frac{K}{s+1}$

$U(s) = 1/s$

$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{s(s+1)}$

$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{st}K}{s(s+1)}, 0\right) = \lim_{s \to 0} \frac{Ke^{st}}{s+1} = K$

$\mathrm{Res}\left(\frac{Ke^{st}}{(s+1)s}, -1\right) = \lim_{s \to -1} \frac{Ke^{st}}{s} = \frac{Ke^{-t}}{-1}$

$y_f(t) = K(1 - e^{-t})\delta_{-1}(t) \qquad \boxed{\tau = 1}$

La $W(s)$ ha un polo (-1) a $Re < 0$ perciò la risposta a regime esiste e tende a un valore costante pari al guadagno poiché siamo in presenza di un ingresso gradino unitario

$y_r(t) = c_0 = W(0) = K$

b. calcolare, se esiste, $K \in \mathbb{R}$ tale che il tempo di assestamento rispetto a $u(t) = \delta_{-1}(t)$ sia $T \leq 10^{-2}$

La risposta a gradino unitario di tutti i sistemi dinamici del primo ordine è di tipo aperiodico: si raggiunge il valore finale senza mai superarlo.

Dopo 3 costanti di tempo il sistema ha raggiunto il 95% del valore finale. Il tempo di assestamento del sistema è $T_a = 3\tau$

$K\tau \leq 10^{-2} \qquad \tau = 1$

$K \leq 10^{-2}$

?

③ Risposta a regime permanente per sistemi a tempo discreto

La risposta a regime permanente è quella funzione del tempo, se esiste, intorno alla quale tende ad assestarsi la risposta al crescere del tempo, in presenza di un ingresso persistente e indipendentemente dallo stato iniziale.
Imporre l'indipendenza dallo stato iniziale vuol dire fare in modo che $Ce^{A(k-k_0)}x(k_0) \to 0$ ovvero che i modi osservabili siano associati ad autovalori in modulo minori di 1

$$y(k) = \Big(\underbrace{Ce^{A(k-k_0)}}_{0} x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k} W(k-i)\,u(i)\Big)$$

$\lim k_0 \to -\infty$

$$= \lim_{k_0\to-\infty} \sum_{i=k_0}^{k} W(k-i)\,u(i) \xrightarrow{k-i=\xi} \sum_{\xi=0}^{+\infty} W(\xi)\,u(k-\xi)$$

Non è detto che questa serie converga, se accade, per gli ingressi per i quali questo si verifica si avrà una risposta a regime.
basta?

④ Definire ECCITABILITÀ di un modo naturale + dimostrare la condizione. PAG. 58-59
Legame tra eccitabilità e raggiungibilità. 147-148

Un modo naturale si dice eccitabile con impulsi in ingresso se, quando si applica un ingresso di tipo impulsivo, la risposta coincide con l'evoluzione libera che muove dallo stato iniziale $x_0 = B$ nel caso di sistemi a un solo ingresso e da uno stato iniziale pari ad una fissata combinazione lineare delle colonne di B nel caso di sistemi a più ingressi.
per la proprietà dell'impulso di Dirac

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\delta(\tau)\, d\tau = e^{At}B = H(t)$$

Perciò il modo i-esimo associato all'autovalore λ_i è eccitabile se la sua legge temporale compare in $H(t)$, ovvero se influenza l'evoluzione nello stato.
Scrivendo $e^{At}B = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T B$ si comprende che la legge temporale compare a secondo membro solo se è verificata la condizione geometrica $v_i^T B \neq 0$ ($v_{ia}B \neq 0$ o $v_{ib}B \neq 0$ per coppie di complessi e coniugati)
(se il prodotto $= 0$ per un certo i vuol dire che il modo i-esimo scompare).
Un sottosistema raggiungibile è caratterizzato da tutti e soli i modi

$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

eccitabili: analizzando la struttura della matrice $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ e ricordando che gli autovalori sono proprietà strutturali e quindi non cambiano se si effettua un cambio di coordinate, si nota che nel calcolo di $H(t) = e^{\tilde{A}t}\tilde{B} = \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ compare solo la matrice A_{11} che contiene gli autovalori del sistema S_1 tutto raggiungibile ma la $H(t)$ contiene solo i modi eccitabili perciò: i modi eccitabili non sono altro che i modi della parte raggiungibile del sistema

Esame giugno 2019

① Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1{,}5\\ 0 & 1 & 1{,}5\end{pmatrix}x(k)+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}u(k)\\ y(k)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}x(k)\end{cases}$$

a. calcolare le matrici del modello esplicito

$\Phi(k)$ matrice di transizione nello stato $= A^k$

$H(k-\tau)$ matrice delle risposte impulsive nello stato $= A^{k-1}B$

$\Psi(k)$ matrice di trasformazione in uscita $= CA^k$

$W(k)$ matrice delle risposte impulsive in uscita $=\begin{cases} CA^{k-1}B & k>0\\ D & k=0\end{cases}$

AUTOVALORI

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & -1{,}5\\ 0 & 1 & 1{,}5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1-\lambda)(1{,}5-\lambda)-(-1{,}5)(1-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(1{,}5-\lambda)+1{,}5\right]$$

$$=(1-\lambda)(-1{,}5+\lambda-1{,}5\lambda+\lambda^2+1{,}5)=(1-\lambda)(\lambda^2-0{,}5\lambda)$$

$$\lambda(\lambda-0{,}5)=0$$

$\lambda_1=1$

$\lambda_2=0$

$\lambda_3=0{,}5$

AUTOVETTORI

$$(A-\lambda_1 I)v_1=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1{,}5\\ 0 & 1 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\quad\begin{cases}b=0\\ -2b-1{,}5c=0\\ b+0{,}5c=0\end{cases}\rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)v_2=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1{,}5\\ 0 & 1 & 1{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\quad\begin{cases}a+b=0\\ -b-1{,}5c=0\\ b+1{,}5c=0\end{cases}\quad\begin{cases}a=-b\\ b=-1{,}5c\\ -1{,}5c+1{,}5c=0\end{cases}$$

$$v_2=\begin{pmatrix}1{,}5\alpha\\ -1{,}5\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5\\ -1{,}5\\ 1\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_3 I)v_3=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0{,}5 & 1 & 0\\ 0 & -1{,}5 & -1{,}5\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\quad\begin{cases}0{,}5a+b=0\\ -1{,}5b-1{,}5c=0\\ b+c=0\end{cases}\quad\begin{cases}a=-b/0{,}5\\ 1{,}5c-1{,}5c=0\\ b=-c\end{cases}$$

$$v_3=\begin{pmatrix}\alpha/0{,}5\\ -\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 2 \\ 0 & -1{,}5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(T^{-1}) = -1{,}5 + 1 = -0{,}5$$

$$T = \frac{(\mathrm{cof}(T^{-1}))^{-1}}{-0{,}5} = \frac{\begin{pmatrix} +(-0{,}5) & -0 & +0 \\ -(-0{,}5) & +1 & -1 \\ +1{,}5 & -(-1) & +(-1{,}5) \end{pmatrix}^{-1}}{-0{,}5}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & +2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l}]v_1^T \\ ]v_2^T \\ ]v_3^T \end{array}$$

$$A^k = T^{-1} \Lambda^k T = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 2 \\ 0 & -1{,}5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \cdot 0{,}5^k \\ 0 & 0 & -0{,}5^k \\ 0 & 0 & 0{,}5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+4 \cdot 0{,}5^k & -3+6 \cdot 0{,}5^k \\ 0 & -2 \cdot 0{,}5^k & -3 \cdot 0{,}5^k \\ 0 & 2 \cdot 0{,}5^k & 3 \cdot 0{,}5^k \end{pmatrix}$$

$$= \Phi(k)$$

basta fare così?

$$H(k) = A^{k-1} B = \begin{pmatrix} 1 & -1+4 \cdot 0{,}5^{k-1} & -3+6 \cdot 0{,}5^{k-1} \\ 0 & -2 \cdot 0{,}5^{k-1} & -3 \cdot 0{,}5^{k-1} \\ 0 & 2 \cdot 0{,}5^{k-1} & 3 \cdot 0{,}5^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 0{,}5^{k-1} \\ -2 \cdot 0{,}5^{k-1} \\ 2 \cdot 0{,}5^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(k) = C A^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1+4 \cdot 0{,}5^k & -3+6 \cdot 0{,}5^k \\ 0 & -2 \cdot 0{,}5^k & -3 \cdot 0{,}5^k \\ 0 & 2 \cdot 0{,}5^k & 3 \cdot 0{,}5^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \cdot 0{,}5^k & -3 \cdot 0{,}5^k \end{pmatrix}$$

$$W(k) = \begin{cases} CA^{k-1} B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \cdot 0{,}5^{k-1} & -3 \cdot 0{,}5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-2 \cdot 0{,}5^{k-1}\right) & k > 0 \\ D & k = 0 \end{cases}$$

b. Eccitabilità e osservabilità dei modi

Eccitabilità $v_i^T B \neq 0$

$\lambda_1 = 1 \quad (1 \ -1 \ -3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ non eccitabile

$\lambda_2 = 0 \quad (0 \ -2 \ -2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -2 \neq 0$ eccitabile

$\lambda_3 = 0{,}5 \quad (0 \ 2 \ 3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 2 \neq 0$ eccitabile

Osservabilità $C u_i \neq 0$

$\lambda_1 = 1 \quad (0 \ 1 \ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$ non osservabile

$\lambda_2 = 0 \quad (0 \ 1 \ 0)\begin{pmatrix}1{,}5\\-1{,}5\\1\end{pmatrix} = -1{,}5 \neq 0$ osservabile

$\lambda_3 = 0{,}5 \quad (0 \ 1 \ 0)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = -1 \neq 0$ osservabile

c. insieme stati iniziali per i quali la risposta in evoluzione libera nello stato tende a zero al crescere del tempo

evol. libera nello stato : $A^k x_0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^k u_i v_i^T x_0 =$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cancel{(1 \ -1 \ -3) x_0'} + 0 \cdot x_0'' + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}(0 \ 2 \ 3)\, x_0'''$$

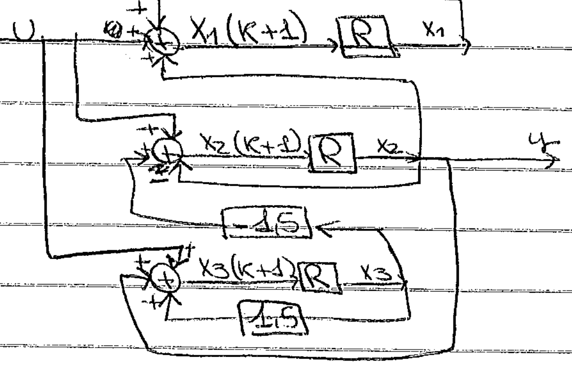
tende a zero in presenza di modi naturali associati ad autovalori reali ~~strettamente negativi: in questo caso sono a costanti ($\lambda_1=1$) o positivi ⇒ divergenti~~ e in modulo minori 1 : qui c'è $\lambda_1 = 1$ che resta costante, e non va bene

e che è NON ECC E NON OSS

forse l'unico stato in cui l'evoluzione libera va a zero è lo stato zero

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -x_2(k) - 1{,}5\,x_3(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) + 1{,}5\,x_3(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

d. Tracciare lo schema di simulazione → SCHEMA A BLOCCHI



e. Calcolare la risposta forzata in uscita e, se esiste, a regime permanente, all'ingresso $u(k) = \delta_{-1}(k) - \delta_{-1}(k-1)$

$$U(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{z-1}{z-1} = 1$$

$$W(z) = \cancel{C(zI-A)^{-1}B = (0\ 1\ 0)}\ \mathcal{Z}[W(k)] = \mathcal{Z}[(-2\cdot 0{,}5^k)] = \frac{-2z}{z-0{,}5}$$

$$Y_f(z) = W(z)\,U(z) = -\frac{2z}{z-0{,}5} \rightarrow y_f(k) = -2\cdot 0{,}5^k \text{ giusto?}$$

La risposta a regime permanente non esiste perché c'è un polo pari a 1 → devono essere tutti $|\lambda_i| < 1$.

② $F(s) = \dfrac{s^2+3s-4}{(s^2+100)(10s+1)} = \dfrac{s^2+3s-4}{10s^3+s^2+1000s+100}$

a. Realizzazione minima in forma canonica osservabile

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -100 \\ 1 & 0 & -1000 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B_o = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_o = (0\ 0\ 1)$$

b. Diagrammi Bode e polare $F(s) = \dfrac{-4\left(1 - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^2\right)}{100\left(1 + \frac{s^2}{100}\right)(1 + 10s)}$

GUADAGNO $\frac{-4}{100} = 20\log_{10}\left|\frac{-4}{100}\right| \simeq -28\,dB$. MODULO A -28 dB, FASE -180°

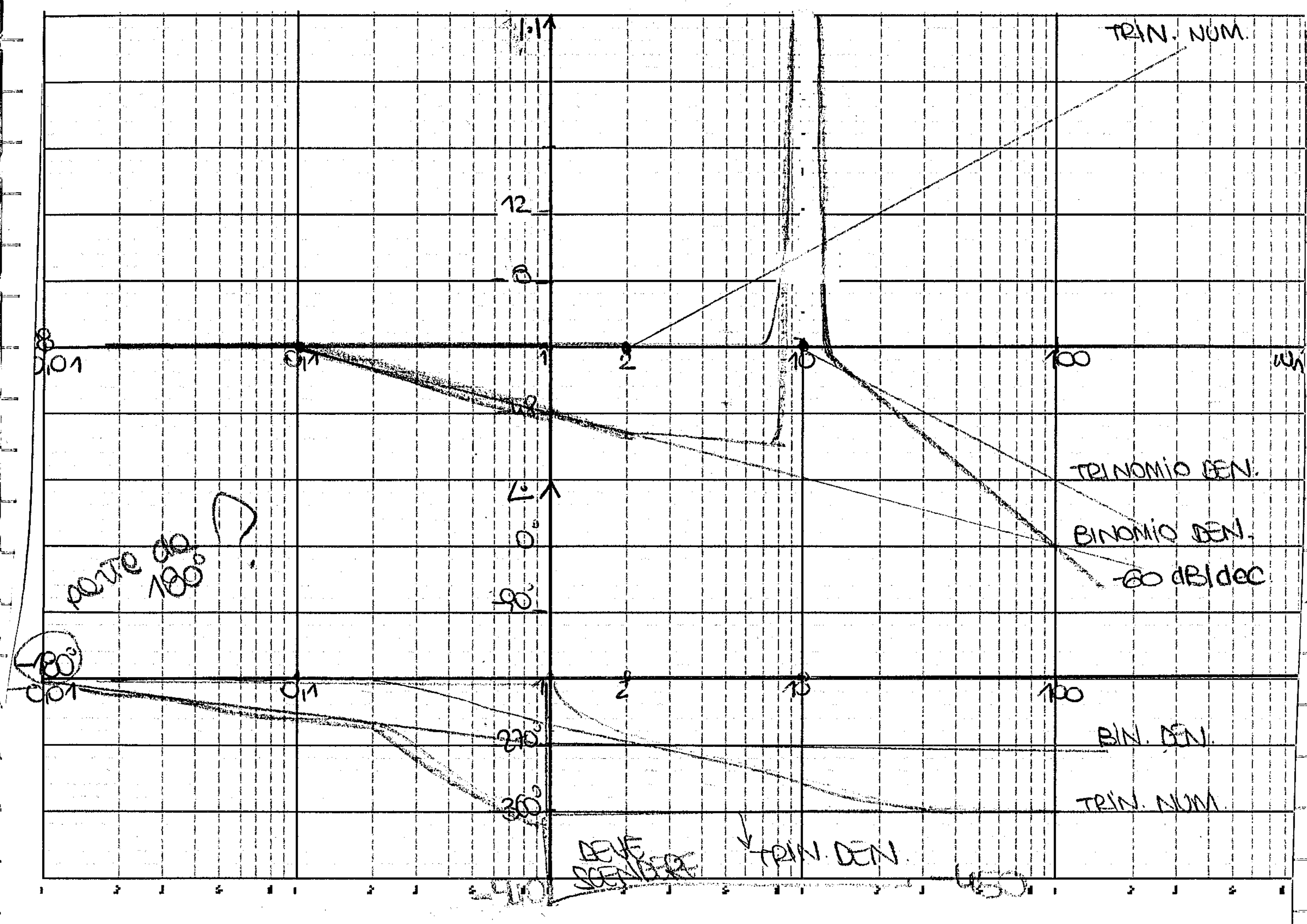
NUM. TRINOMIO $\omega_n^2 = 4 \rightarrow \omega_n = 2 \rightarrow \frac{2\xi}{\omega_n} = -\frac{3}{4} \rightarrow 2\xi = -\frac{3}{2} \rightarrow \xi = -\frac{3}{4}$

MODULO verso l'alto, FASE salto quasi retto verso il basso $= -0{,}75$

DEN. BINOMIO $1 + 10s$ $\tau = 10 \rightarrow \omega_n = 0{,}1$ scende modulo, fase -90°

TRINOMIO $1 + \frac{s^2}{100}$ $\xi = 0$ $\omega_n = 10$ risonanza (verso l'alto)

salto da 0 a -180°



fare Nyquist

③ Procedimento di calcolo delle matrici di ~~•~~ un sistema discretizzato, relazioni tra autovalori e autovettori tra sistema continuo e discretizzato

Un sistema ~~tempo~~ discretizzato di uno a tempo continuo si ottiene campionando l'uscita e lo stato quando l'ingresso è costante a tratti su intervalli della stessa ampiezza degli intervalli di campionamento sincroni con essi. PAG 288 E SEGUENTI

Partendo da un sistema tempo continuo e considerando l'ingresso costante tra gli istanti di campionamento:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

supponiamo l'ingresso costante a tratti

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau \qquad t_0 = KT, \quad t = (K+1)T$$

$$x((K+1)T) = e^{AT}x(KT) + \int_{KT}^{(K+1)T} e^{A((K+1)T-\tau)}\, d\tau\, Bu(KT) \qquad (K+1)T-\tau = \xi$$

$$x((K+1)T) = e^{AT}x(KT) + \int_{KT}^{(K+1)T} e^{A\xi}\, d\xi\, Bu(KT)$$

Assumendo l'intervallo temporale di ampiezza T coincidente con il passo unitario del sistema discreto che si considera, il sistema tempo discreto è rappresentato dalle matrici $A_D = e^{AT}$, $B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi\, B$, $C_D = C$.

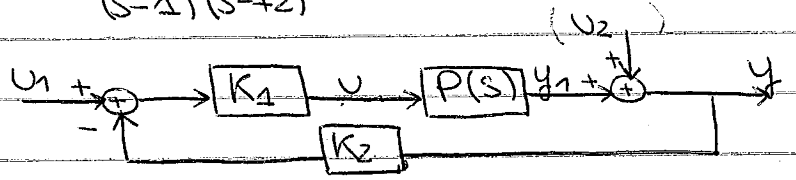
~~Le caratteristiche degli~~ autovalori di un sistema discretizzato non possono assumere valori arbitrari.

La relazione $\lambda_i^D = e^{\lambda_i^C T}$ mette in luce che ~~gli~~ i λ_i^D non possono essere nulli poiché l'esponenziale non può essere nullo (eventualmente si dovrebbe avere $\lambda^C = -\infty$) e possono essere negativi solamente in corrispondenza di una coppia di autovalori complessi e coniugati

e gli autovettori? Ricevimento Monaco

Esame Luglio 2019

① $P(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)(s^2+2)}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$



a. calcolare una realizzazione minima

$$y = y_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = P(s)\, u = P(s)\, K_1 \left[\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} - K_2 y \right] = P(s) K_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} - P(s) K_1 K_2 y$$

$$y = P(s) K_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} - P(s) K_1 K_2 y + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Dimensione non minima

e se faccio $\begin{pmatrix} P(s)K_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$?

$$y = \frac{P(s) K_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}}{1 + P(s) K_1 K_2}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\begin{pmatrix} P(s)K_1 & 1 \end{pmatrix}}{1 + P(s) K_1 K_2}}_{W(s)} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

per il principio di sovrapposizione degli effetti possiamo considerare un ingresso alla volta e poi farne la combinazione lineare

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{K_1(s+1)}{(s-1)(s^2+2)} & 1 \end{pmatrix}}{1 + \frac{K_1 K_2 (s+1)}{(s-1)(s^2+2)}} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{K_1(s+1)}{(s-1)(s^2+2)} & 1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s^2+2) + K_1K_2(s+1)} (s-1)(s^2+2)$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} K_1(s+1) & (s-1)(s^2+2) \end{pmatrix}}{(s-1)(s^2+2) + K_1 K_2 (s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} K_1 s + K_1 & s^3 - s^2 + 2s - 2 \end{pmatrix}}{s^3 - s^2 + 2s - 2 + K_1K_2 s + K_1 K_2}$$

$$\frac{s^3 - s^2 + 2s - 2}{s^3 - s^2 + (2 + K_1K_2)s + (K_1K_2 - 2)} \longrightarrow \overset{=1}{D} + \frac{As^2 + Bs + C}{\text{den}}$$

$$s^3 - s^2 + (2 + K_1K_2)s + K_1K_2 - 2 + As^2 + Bs + C =$$

$-1 = -1 + A \qquad A = 0$

$2 = (2 + K_1K_2) + B \quad \rightarrow B = -K_1K_2$

$-2 = K_1K_2 - 2 + C \quad \rightarrow C = -K_1K_2$

$$W(s) = \left(\frac{K_1 s + K_1}{\dots} \quad 1 + \frac{(-K_1K_2 s - K_1K_2)}{\dots} \right)$$

$$= \overset{D}{(0 \quad 1)} + \frac{(K_1 \quad -K_1K_2) + (K_1 \quad -K_1K_2)s + (0 \quad 0)s^2}{s^3 - s^2 + (2 + K_1K_2)s + (K_1K_2 - 2)}$$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 - K_1K_2 & -2 - K_1K_2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_R = \begin{pmatrix} K_1 & -K_1K_2 \\ K_1 & -K_1K_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ va bene? $D_R = (0 \quad 1)$

b. stabilità interna e esterna al variare di $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

Den.: $s^3 - s^2 + (2 + K_1K_2)s + (K_1K_2 - 2)$

Criterio di Routh per asintotica stabilità: la condizione necessaria (tutti coefficienti con lo stesso segno) non è verificata

finisco così? e quella esterna? studio ecc. loss AUTOVALORI

No stabilità semplice né asintotica: ci sarà almeno un autovalore a parte reale maggiore di zero → di conseguenza neanche stabilità esterna.

c. Calcolare, se possibile, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ in modo che la ~~la~~ risposta a regime permanente rispetto $u_2(t) = \text{sen}\sqrt{2}t$ e $u_1(t) = 0$ sia $y_r(t) = 0$

Il sistema non è asintoticamente stabile perciò la y_r non esiste!

d. fissati $K_1 = -18$ e $K_2 = 1$, tracciare Bode e polare di ~~W_1~~ di y rispetto a u_1

$$W_1 = \frac{u_1}{y} \Rightarrow W_1(s) = \frac{U_1(s)}{Y(s)} = \cancel{W_1(s)}$$

$u_2 = 0$

$$y = \frac{P(s)K_1\begin{pmatrix}u_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\u_2\end{pmatrix}}{1+P(s)K_1K_2} = \frac{P(s)K_1\begin{pmatrix}u_1\\0\end{pmatrix}}{1+P(s)K_1K_2} + \frac{\begin{pmatrix}0\\u_2\end{pmatrix}}{1+PK_1K_2}$$

$$y = y_1 = P(s)K_1(u_1 - yK_2)$$
$$= P(s)K_1u_1 - P(s)K_1K_2\,y$$

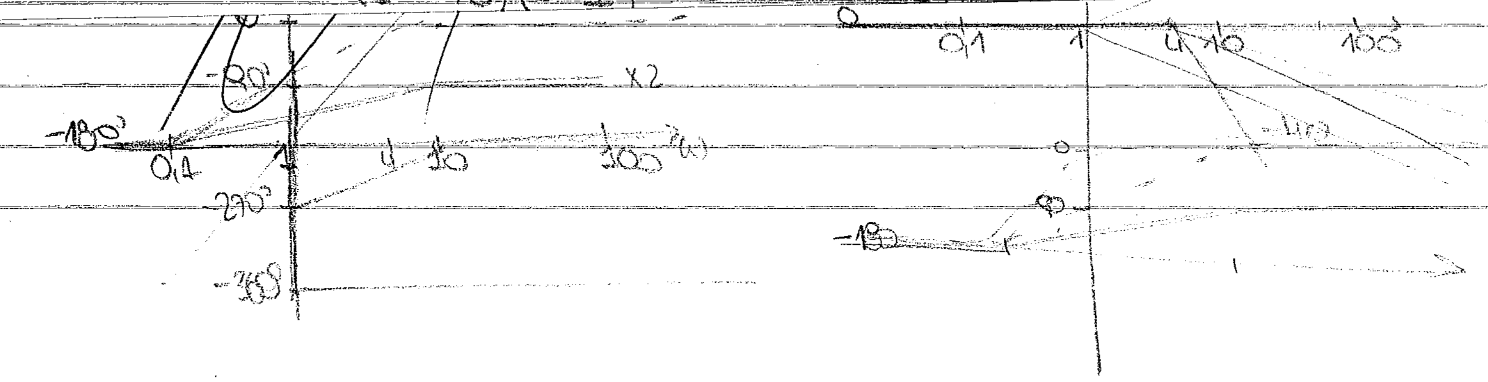
$$y = \underbrace{\frac{P(s)K_1}{1+P(s)K_1K_2}}_{W(s)}\,u_1$$

$K_1 = -18,\ K_2 = 1$

$$W(s) = \frac{\frac{s+1}{(s-1)(s^2+2)}K_1}{1+\frac{s+1}{(s-1)(s^2+2)}K_1K_2} = \frac{-18\,\frac{s+1}{(s-1)(s^2+2)}}{\frac{(s-1)(s^2+2) - 18(s+1)}{(s-1)(s^2+2)}}$$

$$= -18\,\frac{s+1}{s^3+2s-s^2-2-18s-18} = s^3-16s-s^2-16$$

Se fosse $-18\,\dfrac{s+1}{(s^2-16)(s-1)} = -18\,\dfrac{1+s}{-16(1-s^2)-1(1-s)}$



$1+P(s)k_1k_2$ $1+P(s)k_1k_2$ $1+Pk_1k_2$

$y = y_1 = P(s)k_1(u_1 - y k_2)$
$= P(s)k_1 u_1 - P(s)k_1k_2 y$

$$y = \underbrace{\frac{P(s)k_1}{1+P(s)k_1k_2}}_{W(s)} u_1$$

$k_1 = -18,\ k_2 = 1$

$$W(s) = \frac{\frac{s+1}{(s-1)(s^2+2)}k_1}{1+\frac{s+1}{(s-1)(s^2+2)}k_1k_2} \qquad \frac{-18\frac{s+1}{(s-1)(s^2+2)}}{\frac{(s-1)(s^2+2)-18(s+1)}{(s-1)(s^2+2)}}$$

$$= -18\frac{s+1}{s^3+2s-s^2-2-18s-18} = \frac{s+1}{s^3-16s-s^2-16}$$

se fosse $-18\dfrac{s+1}{(s^2-16)(s-1)}$ $= -18\dfrac{1+s}{-16\left(1-\frac{s^2}{16}\right)-1(1-s)}$

$(s+4)(s-4)$

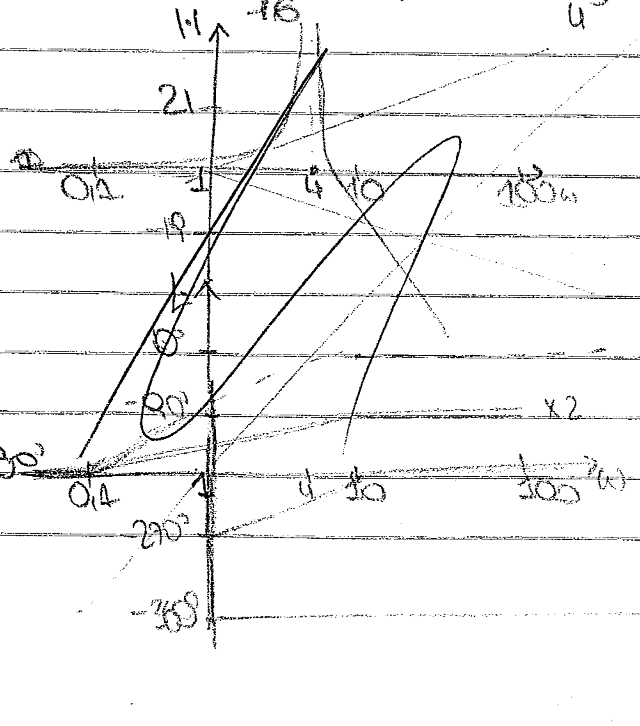
$$= -\frac{9}{8}\frac{1+s}{(1-s^2/16)(1-s)} = -18\frac{1+s}{4(1+s/4)\cdot(-4)(1-s/4)(1-s)}$$

guadagno $-9/8 \cong 1$ dB fase $-180°$

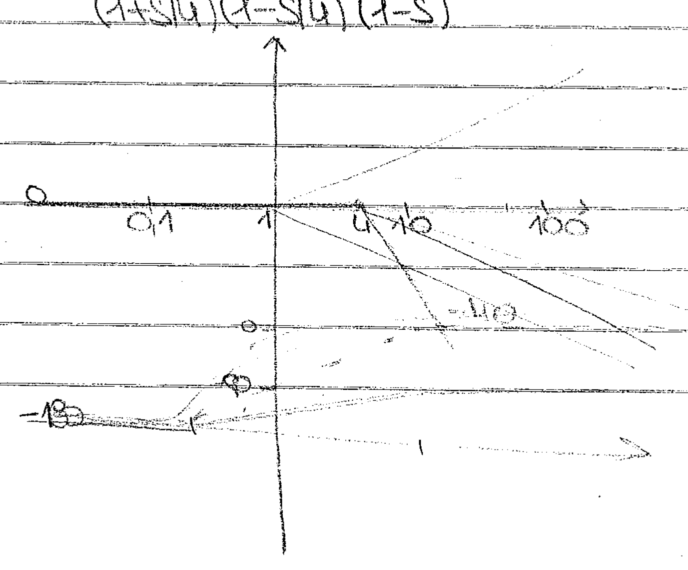
Num $1+s$ $T=1>0,\ \omega_n=1$ modulo sale, fase $+90°$ primaldopo

Den $1-s$ $T=-1<0,\ \omega_n=1$ modulo scende, fase $+90°$ primaldopo

$1-\frac{s^2}{16}$ $\omega_n=4$ $\frac{2\xi}{4}=0 \to \xi=0$ risonanza / fase $0\to-\pi$



$$-\frac{9}{8}\frac{1+s}{(1+s/4)(1-s/4)(1-s)}$$



② Definizione MODI NATURALI e PARAMETRI CARATTERISTICI

I modi naturali sono le evoluzioni nello spazio di stato attraverso le quali è possibile esprimere l'evoluzione libera.

Sono legati alla tipologia di autovalori: Vedere Lippiello

- modi naturali aperiodici in presenza di autovalori reali e distinti, il parametro caratteristico è λ che determina l'andamento temporale. Pokey?
  nel tempo continuo: $\lambda>0$ divergente, $\lambda=0$ costante a 1, $\lambda<0$ convergente;
  nel tempo discreto si hanno modi naturali aperiodici per $\lambda>0$, altrimenti per $\lambda \leq 0$ si hanno modi alternanti ⊗
- modi naturali pseudoperiodici associati a coppie di autovalori complessi e coniugati. I parametri caratteristici sono
  - α → ampiezza: $\alpha>0$ divergente spirale
    $\alpha=0$ ellisse → $\xi=0$
    $\alpha<0$ convergente spirale
  - ξ smorzamento $= \text{seno} = -\frac{\alpha}{\omega_n}$: al suo aumento corrisponde una maggiore attenuazione dell'inviluppo della fue oscillatoria
  - ω_n pulsazione naturale $=\sqrt{\alpha^2+\omega^2}$ → $\omega = \text{Im} =$ frequenza di attraversamento dello zero

⊗ in più si ha $\tau = -\frac{1}{\lambda}$ costante di tempo che nel caso $\lambda<0$ rappresenta il tempo ~~per~~ necessario affinché lo stato diventi 1/e del valore iniziale

~~I modi naturali aperiodici hanno la seguente forma $\sum_{i=1}^{n}$~~

L'evoluzione libera associata a modi naturali aperiodici ha la forma
$x_l(t) = e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i \underbrace{v_i^T x_0}_{=c_i}$ e le evoluzioni hanno luogo nei sottospazi a una dimensione generati dagli autovettori u_i

L'evoluzione libera associata a modi naturali pseudoperiodici avviene lungo piani generati da u_a, u_b; l'evoluzione temporale assume un inviluppo esponenziale con componenti seno e coseno:

$x_l(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k e^{\alpha_k t}(\text{sen}(\omega_k t + \varphi_k)u_a + \cos(\omega_k t+\varphi_k)u_b)$

con ~~m~~ $v^T x(t_0)=c$, $v_a^T x(t_0)=c_a$, $v_b^T x(t_0)=c_b$ $m=\sqrt{c_a^2+c_b^2}$

$\text{sen}\,\varphi = c_a/m$ $\cos\varphi = c_b/m$

③ Dimostrare che, per un sistema tempo continuo, $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$ l'insieme degli stati inosservabili coincide con l'insieme degli stati indistinguibili dallo stato zero.

Dim. Da Lippiello

Due stati x_a, x_b sono indistinguibili al tempo t_0 se e solo se l'uscita del sistema risulta indistinguibile:
$$\begin{cases} y_a = Ce^{At}x_a + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \\ y_b = Ce^{At}x_b + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

$$y_a = y_b \iff Ce^{A(t-t_0)}(x_a - x_b) = 0$$

Ponendo $x_a - x_b = \hat{x}$ si ottiene $Ce^{A(t-t_0)}\hat{x} = 0$ che è l'evoluzione libera a partire da un istante t_0 tale che $x(t_0) = \hat{x}$: $y_e(t)\big|_{x(t_0)=\hat{x}}$

Nel caso particolare in cui $\hat{x}=0$ la precedente relazione è vera $\forall t$ perciò si sta affermando che uno stato è inosservabile se la corrispondente risposta in evoluzione libera è nulla, ovvero se lo stato $\hat{x}$ è indistinguibile esternamente dallo stato nullo → se non si vede nulla in uscita questo potrebbe dipendere da condizioni di riposo del sistema o da un'evoluzione interna che non dà alcun contributo in uscita

④ Calcolare la fdt di trasferimento del tempo discreto (1 ingresso, 2 uscite) sapendo che l'uscita in corrispondenza al gradino è

$$y(k) = \begin{pmatrix} 2/3\,\delta_{-1}(k) - 2/3\,(-1/2)^k \\ 40/33\,\delta_{-1}(k) + 5/6\,(-1/2)^k - 45/22\,(-1/10)^k \end{pmatrix}$$

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{2}{3}\frac{z}{z+1/2} \\ \frac{40}{33}\frac{z}{z-1} + \frac{5}{6}\frac{z}{z+1/2} - \frac{45}{22}\left(\frac{z}{z+1/10}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{2}{3}\frac{2z}{2z+1} \\ \frac{40}{33}\frac{z}{z-1} + \frac{5}{6}\frac{2z}{2z+1} - \frac{45}{22}\frac{10}{10z+1} \end{pmatrix}$$

$$u(k) = \delta_{-1}(k) \rightarrow U(z) = z/(z-1)$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\frac{2(z-1)}{(2z+1)} \\ \frac{40}{33} + \frac{5}{6}\frac{2(z-1)}{(2z+1)} - \frac{45}{22}\frac{10(z-1)}{10z+1} \end{pmatrix}$$

Se esiste, determinare la risposta a regime permanente del sistema rispetto allo stesso ingresso

Esiste perché tutti i poli sono a $Re < 0$

Risposta a regime per ingressi canonici: $y_r(k) = \sum_{i=0}^{k} c_i \frac{t^{k-1}}{k-1}$

con $c_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i W(z)}{dz^i}\Big|_{z=1}$

In questo caso $i=0 \Rightarrow c_0 = W(z)\Big|_{z=1} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 40/33 \end{pmatrix}$ ed è pari al guadagno del sistema

$y_r(k) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 40/33 \end{pmatrix} \frac{k^{-1}}{-1}$ cos?

Esame Settembre 2019

① Calcolare la rappresentazione con lo stato del sistema tempo continuo il cui discretizzato ha funzione di trasferimento $W_d(z)=\frac{1}{z-1}$

$W_d(z)=\frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT}\right]$, per calcolare la W(s) prima si calcola

$\mathcal{Z}^{-1}\left[W(z)\cdot\frac{z}{z-1}\right]=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right]=k\,\delta_{-1}(k)$ e la calcolo in $kT=t \Rightarrow t\,\delta_{-1}(t)$

Faccio la trasformata di Laplace e poi moltiplico per s:

$\mathcal{L}[t\,\delta_{-1}(t)]\cdot s=\frac{1}{s^2}\,s=\frac{1}{s}$ è un integratore $\rightarrow W(s)=1/s$

Ora: realizzazione in forma canonica raggiungibile:

$A_R=(0)$ $B_R=(1)$ $C_R=(1)$ $\rightarrow \begin{cases}\dot{x}=(0)x+(1)u\\ y=(1)x\end{cases}$

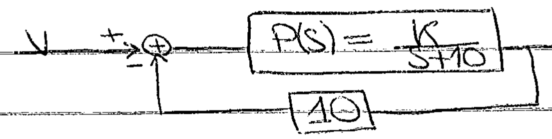
dim A = grado max denom.
(solo caso scalare al num)

si intende tutto il sistema?

② Assegnato il sistema con $P(s)=\frac{K}{s+10}$, $K\in\mathbb{R}$, si calcoli il guadagno in catena diretta sapendo che la risposta indiciale del sistema in retroazione è

$y(t)=W_{-1}(t)=\delta_{-1}(t)-e^{-\frac{10}{9}t}\,\delta_{-1}(t)$ $\quad -\frac{10}{9}t=-\frac{t}{\tau}\rightarrow\tau=\frac{9}{10}$

$=(1-e^{-\frac{10}{9}t})\,\delta_{-1}(t)$



$W(s)=\frac{P}{1+10P}=\frac{\frac{K}{s+10}}{1+\frac{10K}{s+10}}=\frac{K}{s+10}\cdot\frac{s+10}{s+10+10K}=\frac{K}{s+10+10K}$

$y_{f_{TOT}}(t)=W(0)\,\delta_{-1}=\frac{K}{10+10K}\,\delta_{-1}(t)$ → guadagno

$Y_f=W(s)\,U(s)=\frac{K}{s+10+10K}\cdot\frac{1}{s}=\frac{K}{s^2+(10+10K)s}$

Poli: $\begin{cases}s=0\\ s+10+10K=0\rightarrow s=-10-10K\end{cases}$

non va bene come approccio?

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{st}\,K}{s^2+(10+10K)s},\ 0\right)\quad \frac{e^{st}\,K}{s(s+10+10K)} = \lim_{s\to 0} \frac{e^{st}\,K}{s+10+10K} = \frac{K}{10+10K}$$ [illegible]

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{st}\,K}{s(s+10+10K)},\ -10-10K\right) = \lim_{s\to -10-10K} \frac{e^{st}\,K}{s} = \frac{e^{(-10-10K)t}\,K}{-10-10K}$$

$$y_f(t) = \frac{K}{10+10K} - \frac{e^{(-10-10K)t}\,K}{+10+10K} = \frac{K}{10+10K}\left(1-e^{(-10-10K)t}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$y_{f\,TOT} = y_f \rightarrow \quad 1-e^{(-10-10K)t} = 0$$

$$e^{(-10-10K)t} = 1$$

$$-10-10K = 0 \rightarrow K = -1$$

$\rightarrow$ è la risposta forzata al gradino

La risposta indiciale del sistema in retroazione in Laplace è $\Rightarrow Y_i(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{10}{9}}$

$$Y_i(s) = \frac{1}{s} - \frac{9}{9s+10} = \frac{9s+10-9s}{s(9s+10)} = \frac{10}{s(9s+10)}$$

$$W_i(s) = \frac{Y_i(s)}{\underbrace{U_i(s)}_{\text{gradino } \frac{1}{s}}} = \frac{10}{9s+10}$$

ma questa non è solo del sistema in retroazione?

Uguagliando $W(s)$ e $W_i(s)$ e calcolando in $s=0$: $\frac{K}{10+10K} = 1$

$$K = 10K+10$$

$$K = -\frac{10}{9}$$

Facendo la prova e sostituendo $K=-10/9$ in

$y_f(t) = \frac{K}{10+10K}\left(1-e^{(-10-10K)t}\right)\delta_{-1}(t)$ si ritrova $y_f(t) = \left(1-e^{-\frac{10}{9}t}\right)\delta_{-1}(t)$

è giusto perciò?

③ Dato un sistema a tempo discreto di dim $n>0$, caratterizzare l'insieme degli stati raggiungibili in due passi a partire da un generico stato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Da Lippiello ③D

$x(K-1) = Ax(K-2) + Bu(K-2)$

Si consideri un sistema del tipo $x(K+1) = Ax(K) + Bu(K)$ $\quad x_0 = 0,\ t_0 = 0$

poiché questa equazione vale per ogni K è possibile calcolare

$x(K) = Ax(K-1) + Bu(K-1)$

Supponiamo di variare a piacimento l'ingresso in $\mathbb{R}$ e che lo stato $x(K-1)=0$;

l'insieme degli stati raggiungibili all'istante K che si possono ottenere partendo da uno stato al passo precedente $x(K-1) = 0$ è pari a

$X_R = (\underset{\text{all'istante } K}{K}, x(K-1)=0) = \mathrm{Im}\{B\}$ $\quad$ perciò tutti gli stati di un sistema a tempo discreto che si possono raggiungere in un passo sono l'immagine della matrice B

se $\underbrace{Ax(K-1)}_{=0} + \underbrace{Bu(K-1)}_{B \cdot \text{proprio si vettore} \overset{D}{=} \mathrm{Im}\{B\}}$

Calcoliamo ora $x(K)$ in due passi ricorsivamente

$x(K) = A\underline{x(K-1)} + Bu(K-1) = AAx(K-2) + ABu(K-2) + Bu(K-1)$

Se si pone $x(K-2)=0$, ovvero due passi prima si parte con condizioni iniziali nulle e si suppone di voler applicare due campioni, l'insieme degli stati che si possono raggiungere in due passi variando a piacimento le quantità $u(K-2)$ e $u(K-1)$ è pari a $\underbrace{X_R(K, x(K-2)=0) = \mathrm{Im}\{B \,\vdots\, AB\}}_{\text{RISPOSTA}}$

Questo procedimento si può iterare fino a $x(K-n)$, ovvero si compiono n passi, e l'insieme degli stati raggiungibili risulta essere $X_R = (K, x(K-n+1)=0) = \mathrm{Im}\{B\ AB \ldots A^{n-1}B\}$ e non oltre per il teorema di Caley-Hamilton

Nel caso discreto, dunque, qualunque stato è raggiungibile al più in n passi perciò, se non si riesce a raggiungere uno stato in n passi, allora non si potrà più raggiungere.

(4) $n=2$ specie di batteri NON HO IDEA SE SIA GIUSTO O MENO

x_i = n° batteri specie i-esima ($i=1,2$) all'istante $t \geq 0$

a. calcolare un modello tempo continuo lineare e stazionario che descriva le evoluzioni della densità delle popolazioni

n° derivate

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha_{11} x_1(t) + \alpha_{12} x_2(t) + b_1 u_1(t) & \text{con } \alpha_{11}>0,\ \alpha_{12}<0,\ \alpha_{12}>0,\ \alpha_{22}<0 \\ \dot{x}_2(t) = \alpha_{21} x_1(t) + \alpha_{22} x_2(t) + b_2 u_2(t) \\ y(t) = x_1 + x_2 \to \text{combinazione delle due evoluzioni} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad C = (1 \quad 1)$$

b. caratterizzazione dell'evoluzione libera in termini dei modi naturali

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = ad - d\lambda - a\lambda + \lambda^2 - bc = \lambda^2 + (-a-d)\lambda + (ad-bc)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(-a-d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

$$= \frac{(a+d) \pm \sqrt{a^2+d^2+2ad-4ad+4bc}}{2}$$

$$= \frac{(a+d) \pm \sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}$$

$\lambda > 0$ evoluzione divergente → crescita popolazione

$\lambda = 0$ ev. costante → n° nati = n° morti

$\lambda < 0$ ev. convergente → decrescita

c. sotto quali condizioni l'evoluzione di ciascuna specie tende a non estinguersi qualunque sia la numerosità iniziale?

$Ce^{A(t-t_0)} \neq 0$ se $\lambda_{1,2} > 0$

d. Fissati $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{12} = -1$, $\alpha_{21} = 3$, $\alpha_{22} = -2$, si assuma un innesto esterno di 10 batteri al secondo ($u_1 = 10$) della prima specie a partire da $t = 1$ secondo. Calcolare il n° di batteri della seconda specie $x_2(t)$ per $t \geq 0$ sapendo che $x_1(0) = x_2(0) = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ~~BAM~~ $Bu(t) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 b_1 \\ b_2 u_2 \end{pmatrix}$

Evoluzione forzata ?nello stato $\int_{t_0}^{t} H(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

$= \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$

Devo calcolare $A = T^{-1} D T$? ?

Esame Novembre 2019 (A)

(1) $$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

a. ANALISI MODALE

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda)+2(-1-\lambda) = (-1-\lambda)[2\lambda+\lambda^2+2]$$

• $\lambda_1 = -1$ modo naturale aperiodico convergente a zero

• $\lambda_2 = -1 \pm i \Rightarrow \lambda_2 = -1+i$, $\lambda_3 = -1-i$ } modi pseudoperiodici convergenti ($\alpha<0$)

AUTOVETTORI

• u_1 $(A-\lambda_1 I)u_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ $\begin{cases} b+c=0 \\ a-2b-c=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b=-c \\ a+2c-c=0 \end{cases}$ $a=-c$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• $(A-\lambda_2 I)u_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 1 \\ 1 & -2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ $\begin{cases} -ia=0 \\ (1-i)b+c=0 \\ a-2b+(-1-i)c=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a=0 \\ c=-(1-i)b \\ -2b+(-1-i)(-1+i)b=0 \rightarrow -2b+(1+1)b=0 \rightarrow 0=0 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ (-1+i)\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

$$u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(T^{-1}) = 1$$

$$T = (\mathrm{cof}(T^{-1}))^t = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +0 \\ -0 & +1 & -(-1) \\ +0 & -0 & +1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix}]\,v_1^T \\ ]\,v_a^T \\ ]\,v_b^T \end{matrix}$$

ECCITABILITÀ $v_i^T B \neq 0$, OSSERVABILITÀ $C u_i \neq 0$

• $\lambda_1 = -1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ non eccitabile

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ osservabile

$$\bullet\ \lambda_2 = -1+i \qquad v_2^T B \neq 0 \begin{cases} \to v_{2a}^T B = (-1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 & \text{non eccitabile} \\ \to v_{2b}^T B = (0\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1 & \text{eccitabile} \end{cases}$$

È ECCITABILE E OSSERVABILE

$$C u_{2a} \neq 0 \begin{cases} \to (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 & \text{non osservabile} \\ \to (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1 & \text{osservabile} \end{cases}$$

$$\bullet\ \lambda_3 = -1-i \qquad u_{3a} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad u_{3b} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \to T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\-1 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad \det(T^{-1}) = -1$$

È ECC E OSS

$$T = -1\,(\mathrm{cof}(T^{-1}))^t = -\begin{pmatrix}+(-1) & +1 & +0\\-0 & +(-1) & +1\\+0 & -0 & +1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & -1\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ ]\,v_{3a}^T \\ ]\,v_{3b}^T\end{matrix}$$

$$v_3^T B \neq 0 \begin{cases} \to (-1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 & \text{non ecc.} \\ \to (0\ \ -1\ \ -1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -1 & \text{ecc} \end{cases}$$

$$C u_3 \neq 0 \begin{cases} \to (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 & \text{non ~~ecc~~ osservabile} \\ \to (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = -1 & \text{oss} \end{cases}$$

b. RISPOSTA FORZATA A $u(t) = e^{t}\,\delta_{-1}(t-2)$ ~~$\to U(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$~~

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)]$$

$$U(s) = \mathcal{L}\left[e^{t}\,\delta_{-1}(t-2)\right] = \frac{1}{s}\, e^{-2s}\Big|_{s+1} = \frac{e^{-2(s+1)}}{s+1}$$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}s+1 & 0 & 0\\0 & s & -1\\-1 & +2 & s+2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{(\mathrm{cof}(sI-A))^t}{|sI-A|}$$

$$|sI-A| = (s+1)s(s+2) + 2(s+1) = (s+1)(s^2+2s+2)$$

2)

$$(cof(SI-A))^t = \begin{pmatrix} +S(S+2)+2 & -(-1) & +(+S) \\ -0 & +(S+1)(S+2) & -2(S+1) \\ +0 & -(-1)(S+1) & +S(S+1) \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} S^2+2S+2 & 0 & 0 \\ 1 & (S+1)(S+2) & S+1 \\ S & -2(S+1) & S(S+1) \end{pmatrix}$$

$$W(S) = \frac{(1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} S^2+2S+2 & 0 & 0 \\ 1 & (S+1)(S+2) & S+1 \\ S & -2(S+1) & S(S+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(S+1)(S^2+2S+2)}$$

$$= \frac{(1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 \\ S+1 \\ S(S+1) \end{pmatrix}}{(S+1)(S^2+2S+2)} = \frac{(S+1)+S(S+1)}{(S+1)(S^2+2S+2)} = \frac{(S+1)\cancel{(S+1)}}{\cancel{(S+1)}(S^2+2S+2)} = \frac{S+1}{S^2+2S+2}$$

$$Y(S) = \frac{(S+\cancel{1})}{S^2+2S+2} \cdot \frac{e^{-2(S+1)}}{S+\cancel{1}} = \frac{e^{-2(S+1)}}{(S+1-i)(S+1+i)} \qquad \begin{array}{l} S^2+2S+2=0 \\ S_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i \end{array}$$

$$Res\left(\frac{e^{St-2(S+1)}}{\cdots}, -1+i \right) = \lim_{S \to -1+i} \frac{e^{St-2(S+1)}}{S+1+i} = \frac{e^{(-1+i)t-2(i)}}{2i}$$

$$Res\left(\frac{e^{St-2(S+1)}}{\cdots}, -1-i \right) = \lim_{S \to -1-i} \frac{e^{St-2(S+1)}}{S+1-i} = \frac{e^{(-1-i)t+2i}}{-2i}$$

$$y(t) = \frac{e^{-t+it-2i} - e^{-t-it+2i}}{2i} = \frac{e^{-t+(t-2)i} - e^{-t-(t-2)i}}{2i} = e^{-t}\, sen(t-2)$$

c. STABILITÁ INTERNA E ESTERNA → asintoticamente stabile (implica tutto) poiché i poli di $W(S)$ sono tutti a $Re<0$

d. Calcolare, se esiste, y_r a $u(t) = \cos(t)$ $\qquad \omega = 1$

$$W(j\omega) = \frac{j+1}{j^2+2j+2} = \frac{j+1}{2j+1} \cdot \frac{2j-1}{2j-1} = \frac{-2-j+2j-1}{-4-1} = \frac{j-3}{-5} = \frac{3-j}{5} \qquad \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}j\right)$$

$$M(W(j\omega)) = \left| \frac{3-j}{5} \right| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cong -0{,}32$$

$$\Phi(W(j\omega)) = arctg(y/x) = arctg(-1/3) \cong -0{,}32$$

$$y_r(t) = \frac{\sqrt{10}}{5} \cos(t + arctg(-1/3))$$

(2) Calcolare un sistema tempo discreto avente lo stesso comportamento ingresso-uscita di

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

con $t = kT$, $T = 1$ secondo, $k \geq 0$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 & 1 \\ -1 & s & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s(s+2) & s+2 & 0 \\ s+2 & s(s+2) & 0 \\ 1-s & -(s+1) & s^2-1 \end{pmatrix}^t}{s^2(s+2)-(s+2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s(s+2) & s+2 & 1-s \\ s+2 & s(s+2) & s-1 \\ 0 & 0 & s^2-1 \end{pmatrix}}{(s+2)(s^2-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} & -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} + e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} = A_D$$

$$B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi$$

=

DEVO FARE LE MATRICI!

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{2} \frac{z(z-e^2) - z(z-1)}{(z-1)(z-e^2)} = \frac{1}{2} \frac{z - e^2 - z + 1}{z - e^2} = \frac{1}{2} \frac{1-e^2}{z-e^2}$$

~~Realizzazione in forma canonica raggiungibile~~

$A_R =$ AUTOVALORI $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-2-\lambda) - (-2-\lambda)$

$= (\lambda^2-1)(-2-\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(-2-\lambda)$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = -2$

AUTOVETTORI

$(A-\lambda_1 I)u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} a+b-c=0 \\ a+b+c=0 \\ -c=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=-b \\ a=-b \\ c=0 \end{matrix} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_2 I)u_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -a+b-c=0 \\ a-b+c=0 \\ -3c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=b \\ a=b \\ c=0 \end{cases} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_3 I)u_3 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 2a+b-c=0 \\ a+2b+c=0 \\ 0=0 \end{cases}$

$a = -2b-c$

$-4b-2c+b-c=0 \rightarrow -3b-3c=0$

$b=-c \qquad u_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a = +2c-c = c$

$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det = -1-1 = -2$

$T^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} +1 & -1 & +0 \\ -1 & +(-1) & -0 \\ +(-2) & -0 & +(-2) \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_D = e^{At} = T^{-1} e^{Dt} T = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1/2\, e^{-t} & 1/2\, e^{t} & e^{-2t} \\ 1/2\, e^{-t} & 1/2\, e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (*)$

③ DIAGRAMMI BODE E POLARI DI $W(s) = \frac{s-1}{s^3+7s^2+16s+10}$, uno polo in $s=-1$

$$
\begin{array}{l|l}
s^3+7s^2+16s+10 & s+1 \\
-s^3+s^2 & s^2+6s+10 \\
0+6s^2+16s+10 & \\
6s^2+6s & \\
0+10s+10 & \\
10s+10 & \\
0\quad 0 &
\end{array}
$$

$\rightarrow W(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s^2+6s+10)}$

$= \frac{\overset{K}{(-1)}(1-s)}{(1+s)(10)\left(1+\frac{6}{10}s+\frac{s^2}{10}\right)}$

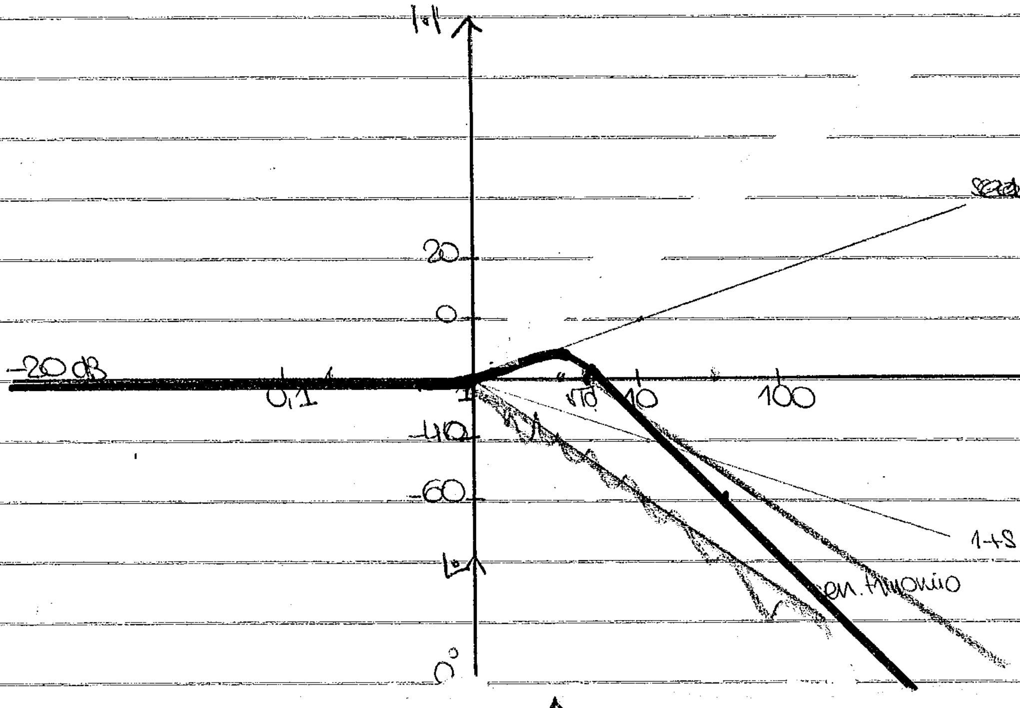
$\rightarrow -\frac{1}{10}$ guadagno MODULO $20\log_{10}(1/10) = -20$ FASE $-180°$

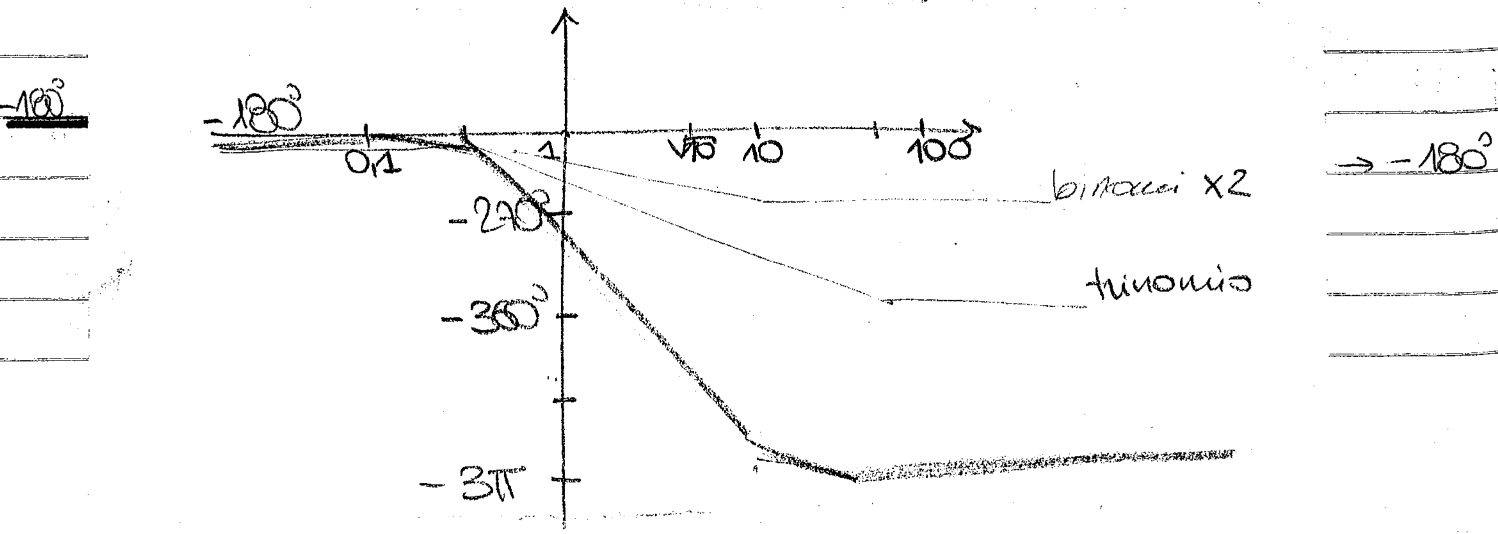
NUM binomio $T=-1 \rightarrow \omega_n = 1$ MODULO CRESCE 20 dB/decade FASE $-90°$

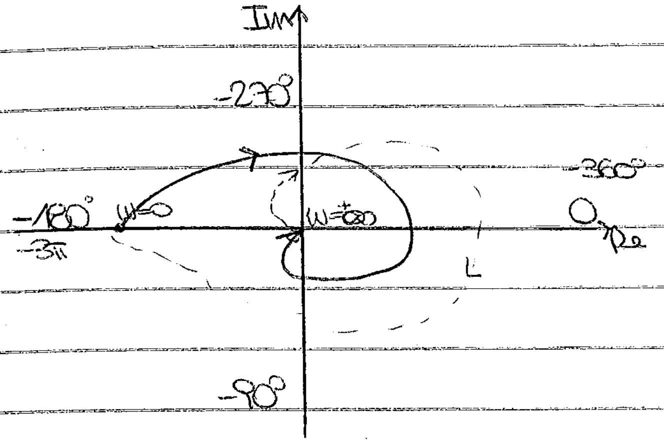
DEN • binomio $T=1 \rightarrow \omega_n = 1$ MODULO SCENDE FASE $-90°$

• trinomio $\omega_n = \sqrt{10}$

$\frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{6}{10} \rightarrow \xi = \frac{3}{10}\frac{\sqrt{10}}{1} = \frac{3}{10}\sqrt{10} \approx 0{,}9$







mi è venuto subito!!!!

(4) PROBLEMA DELLA REALIZZAZIONE CAP. (6)

Assegnato un legame funzionale lineare definito dall'integrale di convoluzione con un nucleo $K(t)$ $\left(y(t) = \int_0^t K(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \right)$, il problema della realizzazione consiste nell'individuare le condizioni sotto le quali il legame funzionale coincide con la risposta forzata di un sistema lineare, stazionario, causale, a dimensione finita.

Dato $K(s) = \mathcal{L}[K(t)]$, condizione necessaria e sufficiente per la realizzabilità è che $K(s)$ sia una matrice di funzioni strettamente proprie (solo proprie → divisione tra polinomi che mette in evidenza la matrice D):

$$K(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} + \underbrace{K_0}_{\text{eventualmente}}$$

da qui, per ispezione sui coefficienti, è possibile calcolare $n, A, B, C, D = K_0$ ottenendo due realizzazioni in forma canonica:

RAGGIUNGIBILE

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_R = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}) \quad \circledast$$

OSSERVABILE → nel caso SISO: DUALITÀ $A_O = A_R^T$, $B_O = C_R^T$, $C_O = B_R^T$

Nel caso SISO sono anche realizzazioni minime

$\circledast$ lo spazio di stato associato a questa realizzazione è tutto raggiungibile

5) Dato un sistema tempo continuo $A, B, C, D=0$, Λ = insieme autovalori del sistema. Λ_e e Λ_o = insieme autovalori eccitabili / osservabili.
Dimostrare che se $\Lambda_e \cap \Lambda_o = \phi$ allora la risposta impulsiva è nulla.
La matrice delle risposte impulsive (in uscita) $W(t)$ è caratterizzata da tutti i modi che sono simultaneamente eccitabili con impulsi in ingresso e osservabili.
Ricordando che:
- la forma spettrale della matrice esponenziale è $e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T$ ~~...~~ nel caso di modi naturali distinti
- i modi eccitabili sono quelli ~~...~~ in cui ~~cui~~ la legge temporale associata all'autovalore i-esimo compare in qualche colonna di $H(t)$
$H(t) = e^{At} B \longrightarrow$ condizione geometrica $e^{\lambda_i t} u_i v_i^T B \neq 0 \Rightarrow v_i^T B \neq 0$
- i modi osservabili sono quelli in cui la legge temporale associata all'autovalore i-esimo compare in $\Psi(t) = Ce^{At} \rightarrow$ condizione geometrica $Cu_i \neq 0$

Poiché $W(t) = Ce^{At}B = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} Cu_i v_i^T B$, se $\Lambda_e \cap \Lambda_o = \phi$, vuol dire che o $Cu_i = 0$ o $v_i^T B = 0$ o entrambi $= 0$ perciò non sono presenti modi simultaneamente ecc e oss e dunque la risposta impulsiva è nulla

basta?

Esame Gennaio 2018 canale 2

① Dato il sistema avente fne di trasferimento $W(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s-1)(s-2)}$ $s^2 - s$

a. calcolare una rappresentazione canonica:

$W(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^3-2s^2-s^2+2s} = \frac{s^2+3s+2}{s^3-3s^2+2s+0}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

per ispezione sui coefficienti si ottiene una realizzazione in forma canonica raggiungibile: $A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C_R = (2 \;\; 3 \;\; 1)$

linearmente dipendente

$A_R = I \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \dot{x} = \cancel{(\ldots)}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}u \\ y = (2\;3\;1)x \end{cases}$

$mg = rg(A) - rg(A - \lambda_1 I) = 3 - 0 = 3$

b. leggi di moto dei modi naturali

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ $\lambda = 1$ molteplicità 3 $mg(\lambda) = 3$: la matrice è diagonalizzabile e la forma canonica di Jordan presenta 3 blocchi di ordine 1

(A è già in forma di Jordan)

$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{J_1t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{J_2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$ legge di moto esponenziale

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

legge moto?

$e^{At} x_0 = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$? ?

$Te^{At}T^{-1}$?

② $W(t)$, $W(s)$, $W(j\omega)$: cosa rappresentano + significato fisico

$W(t)$ è la matrice delle risposte impulsive in uscita $= Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)$ e descrive il comportamento forzato ingresso-uscita

$W(s)$ è la trasformata di Laplace di $W(t)$ e prende il nome di funzione di trasferimento, è un modello del comportamento forzato di un sistema dinamico lineare stazionario CAP ④ pag 79

La conoscenza di $W(s)$ consente di calcolare una qualsiasi risposta forzata ad un assegnato ingresso mediante la relazione $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)]$

Entrambe $W(t)$, $W(s)$ rappresentano tutti e soli i modi che sono simultaneamente eccitabili e osservabili

$W(j\omega)$ è la risposta armonica (W(s) calcolata in $s=j\omega$) e descrive il comportamento in frequenza di un sistema dinamico lineare stazionario e allo stesso tempo consente di dare alla fdt di trasferimento un'interpretazione fisica equivalente PAG. 90
cioè? guadagno (?)

Il modulo e la fase della risposta armonica, per un fissato valore di pulsazione, rendono conto del comportamento a regime permanente a quella pulsazione, variando la pulsazione si hanno informazioni sul comportamento dinamico ingresso-uscita

③ GUADAGNO di un sistema tempo continuo e discreto: definizione e significato fisico

CONTINUO PAG. 101

Scrivendo la fne di trasferimento in forma di Bode la costante K è il guadagno del sistema ed è la W(s) calcolata in $s=0$ una volta che sono stati eliminati eventuali poli in zero.

Il significato fisico è associato al guadagno (cioè il valore a cui tende la risposta a regime permanente all'ingresso a gradino unitario, può essere attribuito soltanto in assenza di poli in zero e con tutti gli altri poli a parte reale strettamente negativa)

discreto PAG. 302

Al crescere del tempo, se i poli della W(z) hanno tutti modulo minore di 1, la risposta forzata al gradino unitario (risposta indiciale) si assesta intorno ad un andamento costante $K = \frac{W(z)}{z-1}(z-1)\Big|_{z=1} = W(1)$ detto guadagno del sistema tempo discreto

(guadagno = valore a cui tende la risposta al crescere del tempo quando la fne di trasferimento ha tutti i poli con modulo < 1)

④ È possibile che un sistema abbia fne di trasferimento uguale a zero? Se sì, sotto quali condizioni?

↓

no modi simultaneamente
ecc. / oss ?

5) Definizione di stabilità esterna e condizioni

Riguarda le condizioni sotto le quali un sistema a un ingresso limitato risponde con un'uscita limitata:

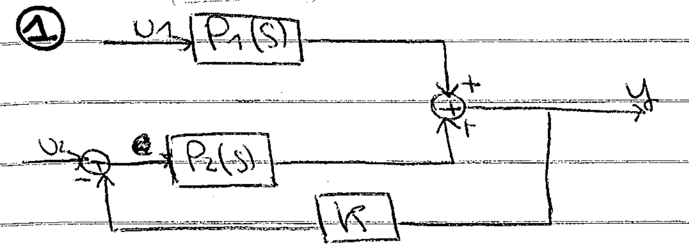
$\forall M \; \exists N_{x_0 M} : |u(t)| < M \Rightarrow \|y(t)\| < N_{x_0, M}$

La stabilità esterna (ingresso-uscita) può essere:

- nello stato zero $\rightarrow$ CNES $\int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < K \quad \forall t$, $Re(\lambda_E^0) < 0$
- in ogni stato $\rightarrow$ CNES $\begin{cases} \int_0^t \|W(\tau)\| d\tau \leq K \quad \forall t & Re(\lambda_1^0) \leq 0 \\ & , Re(\lambda_{>1}^0) < 0 \\ \|\Psi(t)\| < K_2 \quad \forall t & Re(\lambda_E^0) < 0 \end{cases}$

Esame giugno 2018 fila (A)

(1)



$P_1 = \frac{1}{s-1}$

$P_2 = \frac{s+2}{s^2-2s+1}$

a. calcolare una rappresentazione con lo stato

Realizzo singolarmente S_1, S_2 in forma canonica raggiungibile

$A_1 = (1) \quad B_1 = (1) \quad C_1 = (1)$

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = (2 \quad 1)$

$S_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$

Vincoli $\begin{cases} y = y_1 + y_2 \\ y_2 = P_2(u_2 - Ky) \\ y_1 = P_1 u_1 \end{cases}$

$S_2 = \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$

Sistema complessivo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2(u_2 - Ky) \\ y = y_1 + y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 - B_2 K(y_1 + y_2) \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 - B_2 C_1 K x_1 - B_2 C_2 K x_2 = -B_2 C_1 K x_1 + (A_2 - B_2 C_2 K) x_2 + B_2 u_2 \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ -B_2 C_1 K & A_2 - B_2 C_2 K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K & -1-2K & 2-K \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = (C_1 \quad C_2) = (1 \quad 2 \quad 1)$$

b. stabilità interna e esterna al variare di K

$W(s) = C(sI - A)^{-1} B =$

$$= \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ K & 1+2K & s+K-2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} +s(s+K-2)+1+2K & -(K) & +(-sK) \\ -0 & +(s-1)(s+K-2) & -(s-1)(1+2K) \\ +0 & +(s-1) & +s(s-1) \end{pmatrix}^{-1}$$

basta vedere il polinomio caratteristico (che coincide con il denominatore della W(s))

$$\begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k & 1+2k & s+k-2 \end{pmatrix} \rightarrow \det = (s-1)s(s+k-2)+(s-1)(1+2k)$$

$$(s-1)\underline{(s^2+(k-2)s+1+2k)}$$

Routh:

$$\begin{cases} k-2>0 & k>2 \\ 1+2k>0 & k>-1/2 \end{cases}$$

Sistema instabile $\forall k$: c'è un polo in 1

c. per $k=1$ risposta a regime $\rightarrow$ no!

d. per $k=1$: Raggiungibilità e osservabilità

$~~rg(B\ AB\ A^2B)\ rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-2k \\ 1 & 2-2k & 4k^2-11k+3 \end{pmatrix}~~$

$~~\text{determinante} = 4k^2-11k+3+2-2k-1-(2-2k)^2~~$

$~~= 4k^2-13k+4-4-4k^2+8k~~$

$~~= -5k~~$

$~~rg(B\ AB\ A^2B) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k & 2-k \\ 0 & 1 & -k & 2-k & (k^2-3k) & 4k^2-10k+3 \end{pmatrix}~~$

$$k=1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = (1\ 2\ 1)$$

$$rg(B\ AB\ A^2B) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} = 3 = n \text{ raggiungibile}$$

$$rg\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -3 & -9 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 0+0-18-9+27=0 \rightarrow rg\ 2 \text{ : un autovalore}$$

è non osservabile

e poi? basta

② Calcolare il sistema tempo discreto equivalente a $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$

per $T_s = 1$ secondo

Calcolare la risposta del sistema TD a $u(k) = \delta_{-1}(k-1)$ e $\underbrace{x_0 = (0\ \ 0)^{T}}_{(*)}$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda + \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$A_D = e^{AT}$

$B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi\, B$

$C_D = C = (0\ \ 1)$

AUTOVETTORI → PAG DOPO

~~$(A - \lambda_1 I) u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$~~

~~$\begin{cases} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} a + b = 0 \\ a + b - \frac{1+\sqrt{5}}{2} b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -a - \sqrt{5} a + 2b = 0 \\ 2a + 2b - b - \sqrt{5} b = 0 \end{cases}$ $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} a$~~

~~$2a + b - \sqrt{5} b = 0$~~

~~$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} b$~~

~~$b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) b = \frac{5-1}{2} b = 2b$ ... $b =$~~

~~$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} a$~~

~~$a = \frac{5-1}{2} a$~~

~~$a = 2a$ $a = 0, b = 0$~~ ?

(*) evoluzione libera nulla ?

$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \det = -2 + 2\sqrt{5} + 2 + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$T = \frac{(\mathrm{cof}(T^{-1}))^t}{4\sqrt{5}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & +1+\sqrt{5} \\ -2 & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}^t}{4\sqrt{5}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ +1+\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}}{4\sqrt{5}}$

$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2} t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2} t} \end{pmatrix}$

$e^{AT} = \{ T^{-1} e^{\Lambda t} T = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2} t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2} t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{4\sqrt{5}} & \frac{-2}{4\sqrt{5}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_1 I)v_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{2}a + b = 0 \\ a + b - \frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{5}}{2}b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -a - \sqrt{5}a + 2b = 0 \\ 2a + \underbrace{2b - b}_{b} - \sqrt{5}b = 0 \end{cases}$

$2a + b - \sqrt{5}b = 0 \qquad 2a + (1-\sqrt{5})b = 0$

$a = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}b$

$-\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}b\right) - \sqrt{5}\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}b\right) + 2b = 0$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}b + \frac{\sqrt{5}-5}{2}b + 2b = 0$

$b - \cancel{\sqrt{5}b} + \cancel{\sqrt{5}b} - 5b + 4b = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

$\alpha = 2 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_2 I)v_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}a + b = 0 \rightarrow -a + \sqrt{5}a + 2b = 0 \\ a + b - \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{5}}{2}b = 0 \rightarrow 2a + \underbrace{2b - b}_{b} + \sqrt{5}b = 0 \end{cases}$

$2a + (1+\sqrt{5})b = 0 \rightarrow a = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}b$

$-\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}b\right) + \sqrt{5}\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}b\right) + 2b = 0$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}b - \frac{\sqrt{5}+5}{2}b + 2b = 0$

$b + \sqrt{5}b - \sqrt{5}b - 5b + 4b = 0 \rightarrow 0 = 0 \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

$\alpha = 2 \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

③ Diagrammi Bode e polari

sarebbe -1 ma non posso disegnarlo...

$$W(s) = 2 \frac{s^2-1}{s^3+2s^2+2s+1} = \frac{s^2-1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$\frac{(1-s)(1+s)}{(s+1)(s-1)} = -2 \frac{(1-s^2)}{(1+s)(1+s+s^2)}$$

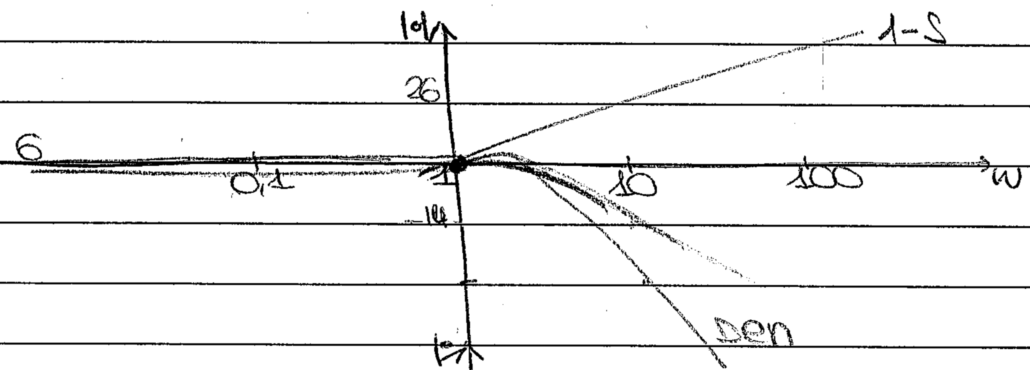
③ Diagrammi Bode e polare

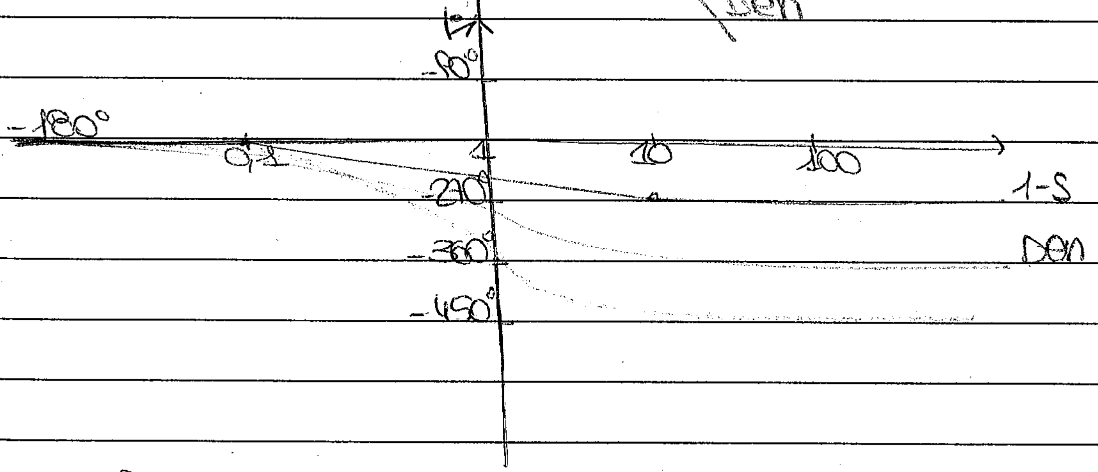
$$W(s) = 2 \frac{s^2-1}{(s^3+2s^2+2s+1)} = 2 \frac{(s+1)(s-1)}{(s+1)(s^2+s+1)} = -2 \frac{1-s}{1+s+s^2}$$

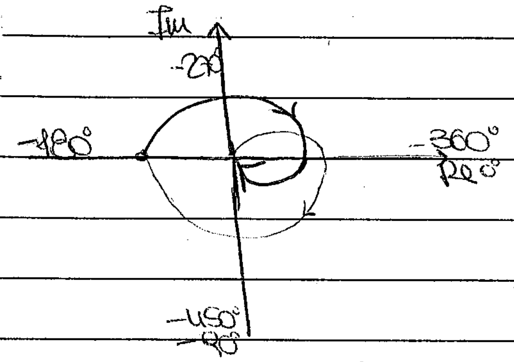
guadagno $-2 = 20\log_{10}(2) \simeq 6$ ← modulo, fase $-\pi$

binomio $1-s$ $\tau = -1$, $\omega_n = 1$ sale modulo 20 dB/dec, fase $-90°$ prima/dopo

trinomio $1+s+s^2$ $\omega_n = 1$, $\xi = 1/2$ modulo sale poco, fase $-\pi$ morbida







④ RISPOSTA A REGIME PERMANENTE: def + condizioni PAG. 85 e seguenti

La r.a.r.p. è una funzione del tempo, se esiste, intorno alla quale tende a stabilizzarsi la risposta di un sistema al crescere del tempo indipendentemente dallo stato iniziale e in presenza di un ingresso persistente

$$y_r = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

questa è la funzione alla quale tende la risposta forzata nel senso del limite: $\forall \varepsilon \ \exists T_a : \|y(t) - y_r(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T_a$

$\uparrow$ tempo di assestamento

Condizione necessaria per l'esistenza della risposta a r.p. è la limitatezza delle evoluzioni interne, ovvero che il sistema sia asintoticamente stabile (poli di $W(s)$ a $Re<0$) Basta?

⑤ RAGGIUNGIBILITÀ TEMPO DISCRETO: definizione + condizioni PAG. 324

Lo stato x_R è raggiungibile a partire da uno stato x_0 a t_0 se esiste un tempo $\bar{t}$ e un ingresso $\bar{u}_{(t_0,\bar{t})}$ tale che $\varphi(\bar{t} - t_0, x_0, \bar{u}_{(t_0,\bar{t})}) = x_R$

Quale funzione

$t_0 = 0, \ x_0 = 0$

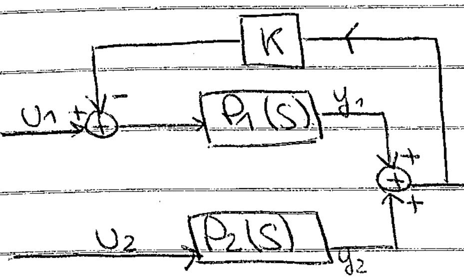
Per la struttura ricorsiva delle equazioni e per il teorema di Cayley-Hamilton, l'insieme degli stati raggiungibili in un intervallo di tempo fissato è $R(B \ AB \ A^{n-1}B)$

perciò uno stato può essere raggiunto in al più n passi

condizioni?

Esame Giugno 2018 fila (B)

1



$P_1 = \dfrac{1}{S+1}$

$P_2 = \dfrac{S-2}{S^2+2S+1}$

a. rappresentazione con lo stato

Realizzo singolarmente S_1, S_2 in forma canonica raggiungibile

$A_1 = (1) \quad B_1 = (1) \quad C_1 = (1) \quad // \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = (-2 \quad 1)$

$S_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$

Vincoli $\begin{cases} y = y_1 + y_2 \\ y_1 = P_1(u_1 - Ky) \\ y_2 = P_2 u_2 \end{cases}$

Sistema complessivo $\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1(u_1 - K(y_1 + y_2)) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 - B_1 C_1 K x_1 - B_1 C_2 K x_2 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 - B_1 C_1 K & -B_1 C_2 K \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} u \\ y = (C_1 \quad C_2) x \end{cases} \rightarrow \cancel{\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1-K & 2K \; K \\ 0 & \end{pmatrix} \\ y = (1 \quad -2 \quad 1) x \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1-K & 2K & -K \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \quad -2 \quad 1) x \end{cases}$$

b. stabilità al variare di K

polinomio caratteristico = denom $W(s) = |sI-A|$

$$(sI-A) = \begin{pmatrix} s-1+k & -2k & k \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & s+2 \end{pmatrix} = (s-1+k)s(s+2) + (s-1+k)$$

$$= (s-1+k)\,\underline{(s^2+2s+1)}$$

$$\downarrow \qquad = s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1 \text{ ok}$$

Routh $-1+k>0$

$k>1$

Per $k>1$ asintotica stabilità e tutte le altre, per $k=1$ semplice, instabile altrimenti ?

ecc.

c. Per $k=1$ risposta a regime → no, non c'è ASINT. STAB.

d. Per $k=1$: ragg./osserv.

$$\text{rg } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ \ -2 \ \ 1)$$

$$\text{rg}(B \ \ AB \ \ A^2B) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \text{ tutto raggiungibile}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} = 3 \text{ tutto osservabile} \quad ?$$

② Calcolare il sistema tempo discreto equivalente a $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$

con $T_s = 1$ secondo

Calcolare la risposta del sistema Discreto a $u(k) = \delta_{-1}(k-1)$ e $x_0 = (0\ \ 0)^T$

stesso esercizio di prima

③ Diagrammi di Bode e polari

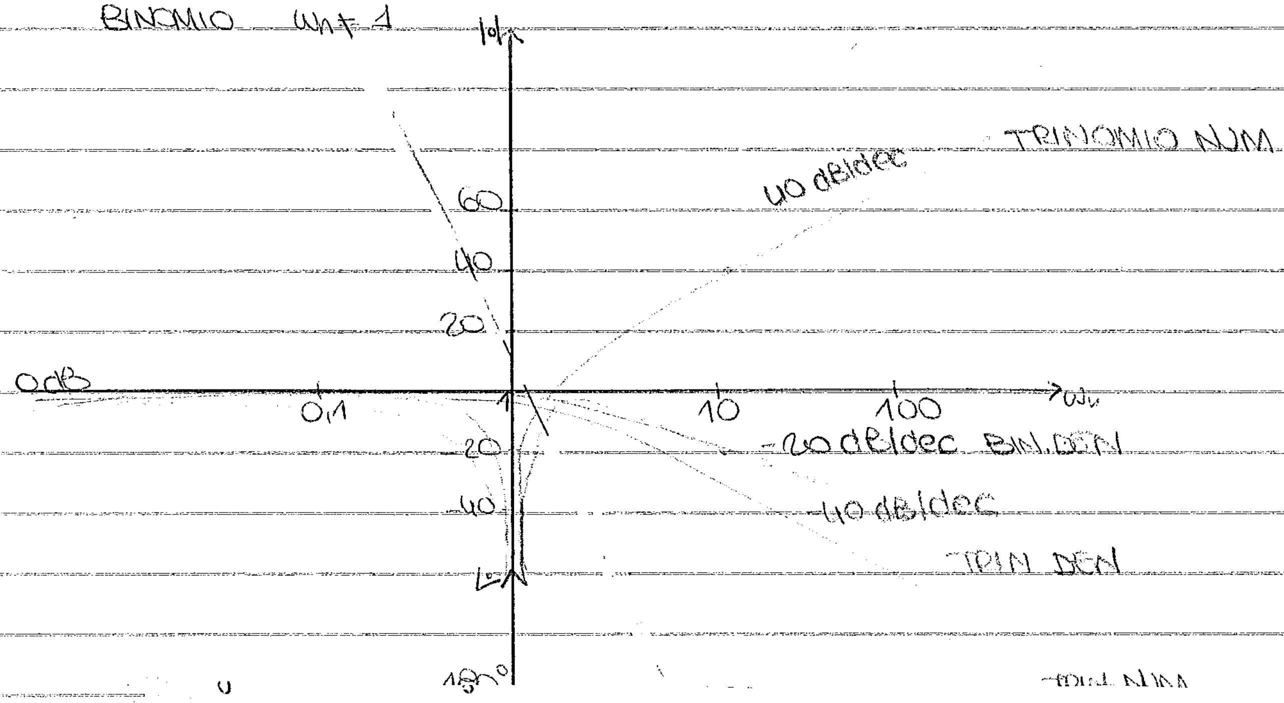
$$W(s) = \frac{1+s^2}{s^3+2s^2+2s+1} = \frac{1+s^2}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

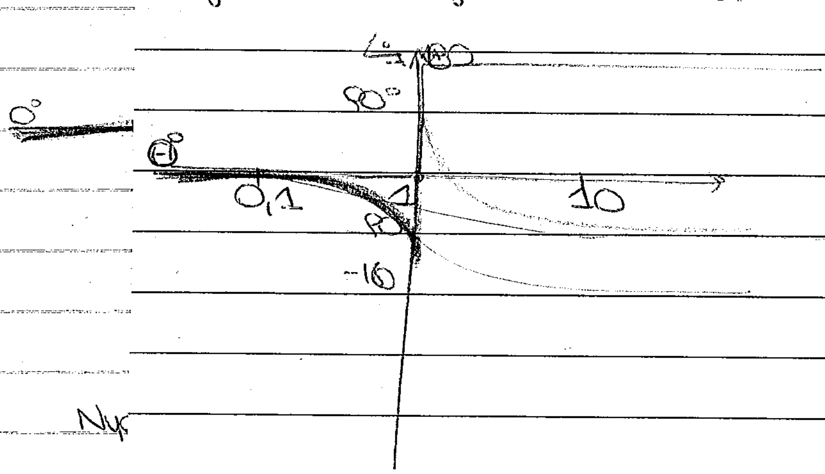
guadagno $1 = 0$ dB fase $0°$

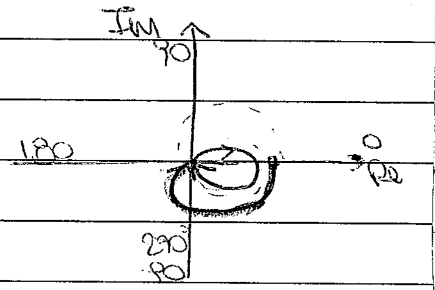
NUM. TRINOMIO $\xi = 0$, $\omega_n = 1$

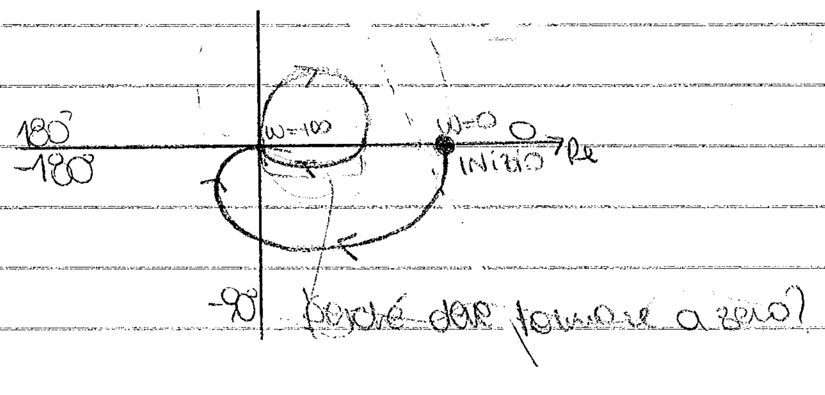
DEN. TRINOMIO $2\xi = 1 \Rightarrow \xi = 1/2$ $\omega_n = 1$

BINOMIO $\omega_n = 1$









perché deve tornare a zero?

④ Modi naturali sistemi lineari tempo continuo : def + parametri caratteristici

I modi naturali sono le evoluzioni nello spazio di stato attraverso le quali è possibile esprimere l'evoluzione libera

VEDI ES. 2 Esame Luglio 2018

⑤ OSSERVABILITÀ tempo DISCRETO : def + condizioni

L'osservabilità riguarda il comportamento stato-uscita e è una proprietà che si occupa di ricostruire l'evoluzione interna a partire dall'osservazione dell'uscita, si traduce perciò nell'assenza di stati indistinguibili

L'insieme degli stati inosservabili nel tempo discreto è

$\{x \in \mathbb{R}^n : CA^k x = 0, \forall k \geq 0\}$ (*) basta ?

Nel tempo discreto, se uno stato non è osservabile nei primi n passi, certamente dopo non sarà più osservabile.

(*) $= \ker\{O\} = \ker\left\{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}\right\}$

Esame 4 luglio 2018 fila (A)

(1) Dato il sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

a. STUDIO MODI NATURALI

AUTOVALORI $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda)(-\lambda)+(-1-\lambda)$

$= (-1-\lambda)(\lambda^2+1)$

- $\lambda_1 = -1$ modo aperiodico convergente $(\lambda<0)$
- $\lambda_{2,3} = \pm i$ modo pseudoperiodico costante $(\alpha=0)$

AUTOVETTORI

$(A-\lambda_1 I)u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} -b+c=0 \\ b-c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \begin{cases} c=b \\ 2c=0 \rightarrow c=0=b \end{cases}$

$u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_2 I)u_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1-i & -1 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} (-1-i)a - b + c = 0 \\ -ib - c = 0 \\ b - ic = 0 \rightarrow b = ic \end{cases}$

$-i(ic) - c = 0 \quad c - c = 0 \rightarrow 0 = 0$

$-1-ia - ic + c = 0$

$-ia = 1 \rightarrow a = -1/i = i$

$u_2 = \begin{pmatrix} i \\ i\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c = -ib$

$b - i(-ib) = 0 \rightarrow 2b = 0 \quad b = 0 \rightarrow c = 0 \quad (-1-i)a = 0 \rightarrow a = 0$

$b = ic \rightarrow -i(ic) - c = 0 \quad c - c = 0 \rightarrow 0 = 0 \quad , b = i\alpha$

$(-1-i)a - i\alpha + \alpha = 0 \rightarrow a = \frac{i-1}{-1-i} \cdot \frac{-1+i}{-1+i}\alpha = \cancel{\frac{2i}{2}\alpha}$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} -i\alpha \\ i\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\frac{-i-1+1-i}{1+1}\alpha = \frac{-2i}{2}\alpha = -i\alpha$

$u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det(T^{-1}) = -1$

$T^{\text{inv}} = (\text{cof}(T^{-1}))^t$

$$(\text{cof}(T^{-1}))^t = -\begin{pmatrix} +(-1) & -0 & +0 \\ -(1) & +0 & -1 \\ +0 & -1 & +0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l}]\,v_1^T \\ ]\,v_b^T \\ ]\,v_a^T \end{array}$$

ECCITABILITÀ $v_i^T B \neq 0$

- $\lambda_1 = -1$ $\quad v_1^T B = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ eccitabile
- $\lambda_{2a} = i$ $\quad v_b^T B = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ eccitabile (anche $v_a^T B = 1$)

OSSERVABILITÀ $Cu_i \neq 0$

- $\lambda_1 = -1$ $\quad Cu_1 = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ non osservabile
- $\lambda_2 = i$ $\quad Cu_a = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ osservabile

basta così?

b. Studiare stabilità:

Il sistema è semplicemente stabile internamente perché ha 2 autovalori a Re = 0

Per quanto riguarda la stabilità esterna

$\lambda_1 = -1$ E, NOSS $\rightarrow$

$\lambda_2 = \pm i$ E, O $\rightarrow$ ogni stato

$\Big\}$?

c. calcolare la risposta forzata a $u(t) = t\,\delta_{-1}(t-1)$

$$U(s) = \mathcal{L}[t\,\delta_{-1}(t-1)] = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[t\,\delta_{-1}(t)] = \frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} s+1 & 1 & -1 \\ 0 & s & 1 \\ 0 & -1 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} +s^2 & -0 & +0 \\ -(s-1) & +s(s+1) & +s+1 \\ +1+s & -(s+1) & (s+1)s \end{pmatrix}^t}{s^2(s+1)+(s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} s^2 & -(s-1) & s+1 \\ 0 & s(s+1) & -(s+1) \\ 0 & s+1 & s(s+1) \end{pmatrix}}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$(s+1)(s+1)$$

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 & s+1 & s(s+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{s+1 + s(s+1)}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{s+1}{s^2+1}$$

$$Y_f(s) = W(s)\,U(s) = \frac{s+1}{s^2+1} \cdot \frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{-s+st}}{s^2}\,\frac{s+1}{s^2+1}, 0\right) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\, \frac{e^{(t-1)s}}{s^2+1}(s+1) =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\left((t-1)e^{(t-1)s} + 1\right)(s^2+1) - \left((s+1)e^{(t-1)s}\right)2s}{(s^2+1)}$$

$$= \frac{(t-1) - 0}{1} = t-1$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{(t-1)s}}{s^2}\,\frac{s+1}{\underset{(s+i)(s-i)}{s^2+1}}, i\right) = \lim_{s\to i} \frac{e^{(t-1)s}}{s^2}\,\frac{s+1}{s+i} = \frac{e^{(t-1)i}}{-1} \cdot \frac{1+i}{2i}$$

$$= -e^{(t-1)i} \cdot \frac{2-2i}{4} = -e^{(t-1)i} \cdot \frac{(1-i)}{2}$$ → ci può stare i nell'antitrasformazione?

$$\text{Res}\left(\quad , -i\right) = \lim_{s\to -i} \frac{e^{(t-1)s}}{s^2}\,\frac{s+1}{s-i} = -e^{-i(t-1)} \cdot \frac{1-i}{-2i}$$

Devo usare le formule di Eulero

$$y_f(t) = (t-1) + (-)(1-i)\left(\frac{-e^{-i(t-1)} + e^{i(t-1)}}{2i}\right) = \cancel{(t-1) + (i-1)\,\text{sen}(t-1)}$$

$e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x$
$e^{-ix} = \cos x - i\,\text{sen}\,x$

$$= (t-1) - \frac{(1-i)}{2i}\left(-\left(\cos(t-1) - i\,\text{sen}(t-1)\right) + \cos(t-1) + i\,\text{sen}(t-1)\right) \circledast$$

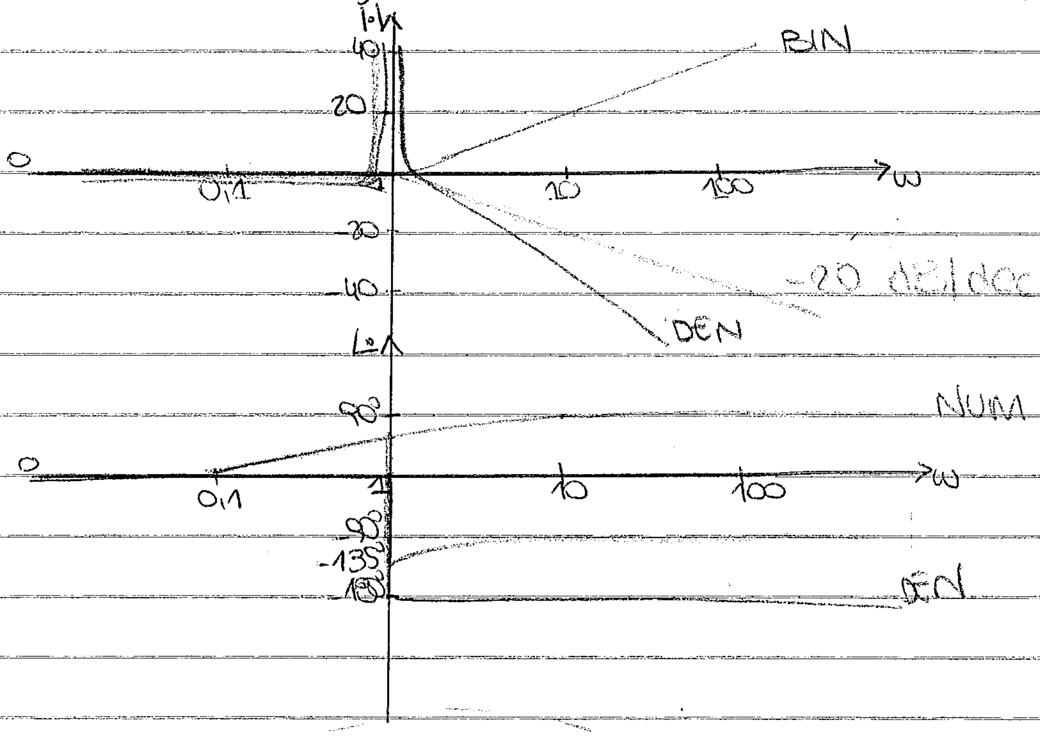
e. risposta a regime → no, non c'è stabilità asintotica!

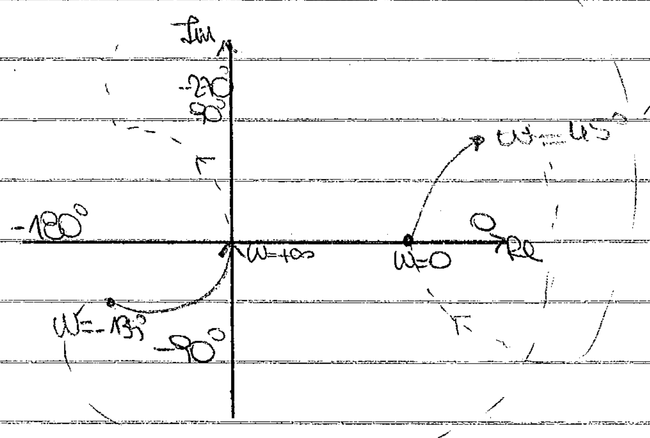
$$\circledast = (t-1) - \frac{(1-i)}{2i}\left(2i\,\text{sen}(t-1)\right)$$

d. Diagrammi di Bode e polari $W(s) = \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1+s}{1+s^2}$

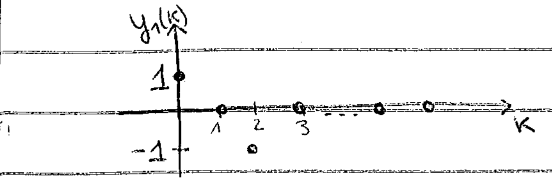
NUM. BINOMIO $\tau = 1$ FASE $+90°$

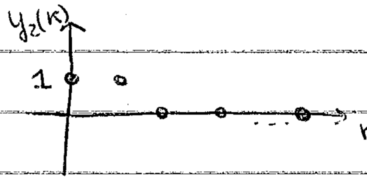
DEN. TRINOMIO $\xi = 0$ $\omega_n = 1$ salto fase $-180°$, modulo ~ -40 dB/dec





(2) Calcolare la rappresentazione con lo stato di un sistema a UN INGRESSO E DUE USCITE sapendo, rispetto all'ingresso a gradino unitario $u(k)=\delta_{-1}(k)$, la risposta forzata è:





$y_1(k)=\cancel{\delta_{-1}(k)+\delta_{-1}(k-1)}$ $\quad$ $\delta(k)-\delta_{-1}(k-2)$

$y_2(k)=\cancel{2\,\delta_{-1}(k)}$ $\quad$ $\delta(k)+\delta_{-1}(k-1)$ ← sono impulsi

$u(k)=\delta_{-1}(k) \qquad y(k)=\begin{pmatrix}y_1(k) & y_2(k)\end{pmatrix}$

$U(z)=\frac{z}{z-1} \qquad Y(z)=\left(1-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{z}{z-1} \quad 1+\frac{1}{z}\frac{z}{z-1}\right)=\left(1-\frac{1}{z(z-1)} \quad 1+\frac{1}{z-1}\right)$

$=\left(\frac{z^2-z-1}{z(z-1)} \quad \frac{z-1-1}{z-1}\right) = \left(\frac{z^2-1}{z^2} \quad \frac{z+1}{z}\right)\cdot\frac{z-1}{z}$

$=\left(\frac{z^2-z-1}{z(z-1)} \quad \frac{z-2}{z-1}\right)$

$W(z)=\frac{Y_f(z)}{U(z)}=\left(\frac{(z^2-1)(z-1)}{z^3} \quad \frac{(z^2-1)}{z^2}\right)$

$W(z)=\frac{Y_f(z)}{U(z)}=\left(\frac{z^2-z-1}{z(z-1)} \quad \frac{z-2}{z-1}\right)\cdot\frac{z-1}{z}=\left(\frac{z^2-z-1}{z^2} \quad \frac{z-2}{z}\right)$

~~Realizzazione in forma canonica osservabile~~

$\frac{z^2-z-1}{z^2}=\overset{=1}{D_1}+\frac{A_1z^2+B_1z+C_1}{z^2} \to \frac{z^2(\overset{1}{D_1+A_1})+B_1z+C_1}{z^2} \to A_1=0,\ B_1=-1,\ C_1=-1,\ D_1=0$

$W(z)=\left(1+\frac{-z-1}{z^2} \quad 1-\frac{2}{z}\right)$

$\frac{z-2}{z}=\overset{1}{D_2}+\frac{A_2z+B_2}{z}=\frac{z(D_2+A_2)+B_2}{z}$

$A_2=0,\ B_2=-2,\ D_2=1$

$=\overset{D}{(1 \quad 1)}+\frac{(-1 \quad 0)z+(-1 \quad -2)}{(1 \quad 0)z^2+(0 \quad 1)z}$ → è così?

Realizzazione in forma canonica osservabile

$A_o=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix} \qquad B_o=\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&0\end{pmatrix} \qquad C_o=(0 \quad 1)$

posso prendere $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$? NO

$$W(z) = \begin{pmatrix} \underbrace{\dfrac{z^3 - z^2 - z + 1}{z^3}} & \underbrace{\dfrac{z^2 - 1}{z^2}} \end{pmatrix}$$

$$= D_1 + \frac{R_1}{z} + \frac{R_2}{z^2} + \frac{R_3}{z^3} \qquad\qquad = D_2 + \frac{R_1}{z} + \frac{R_2}{z^2}$$

$$= \frac{D_1 z^3 + R_1 z^2 + R_2 z + R_3}{z^3} \qquad\qquad = \frac{D_2 z^2 + R_1 z + R_2}{z^2}$$

$D_1 = 1$ $\qquad\qquad$ $D_2 = 1$

$R_1 = -1$ $\qquad\qquad$ $R_1 = 0$

$R_2 = -1$ $\qquad\qquad$ $R_2 = -1$

$R_3 = 1$

$$W(z) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{-z^2 - z + 1}{z^3} & 1 + \dfrac{-1}{z^2} \end{pmatrix}$$

$$= \overset{D_R}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T} + \frac{(-1 \;\; 0) z^2 + (-1 \;\; 0) z + (1 \;\; -1)}{(1 \;\; 0) z^3 + (0 \;\; 1) z^2 + (0 \;\; 0) z + (0 \;\; 0)} = z^3 \text{ den. comune}$$

$$\cancel{A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_R =}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T + \frac{\begin{pmatrix} -z^2 - z + 1 & -z \end{pmatrix}}{z^3}$$

$$= \overset{D_R}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T} + \frac{(-1 \;\; 0)^T z^2 + (-1 \;\; -1)^T z + (1 \;\; 0)^T}{z^3}$$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_R = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono per colonna perché ci sono due uscite

matrice di trasferimento in colonna

ha dim $q \times p$

q: uscite, p: ingressi

2×1

③ PROBLEMA DELLA DISCRETIZZAZIONE PAG. (287)

A partire da un sistema tempo continuo si vuole ottenere il sistema tempo discreto equivalente che descrive in modo approssimato il comportamento campionato del sistema tempo continuo: assegnato un sistema tempo continuo in cui gli ingressi ~~ad~~ sono costanti a tratti su intervalli dello stesso ampiezza degli intervalli ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ di campionamento sincroni con essi si vuole rappresentare l'evoluzione campionata dell'ingresso e dell'uscita.

Partendo da un sistema tempo continuo nella forma $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$

si può riscrivere il sistema con un modello

esplicito:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

ponendo $t_0 = KT$, $t = (K+1)T$ e considerando l'ingresso costante sull'intervallo si ottiene

$$x((K+1)T) = e^{AT} x(KT) + \int_{KT}^{(K+1)T} e^{A((K+1)T-\tau)} d\tau \; Bu(KT)$$

$(K+1)T - \tau = \xi$

$$x((K+1)T) = e^{AT} x(KT) + \int_0^T e^{A\xi} d\xi \; Bu(KT)$$

Assumendo l'intervallo di tempo T coincidente con il passo unitario del sistema discreto che si considera allora il sistema tempo discreto che si considera è

$$\begin{cases} x(K+1) = A_D x(K) + B_D u(K) \\ y(K) = C_D x(K) \end{cases} \quad \text{con } A_D = e^{AT}, \quad B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi \, B \;, \; C_D = C$$

4) Definizione di GUADAGNO e significato fisico PAG. 101

~~Premessa: per~~

Per una fne di trasferimento in forma di Bode, il termine costante K è il guadagno del sistema, che corrisponde alla W(s) calcolata in s=0 una volta eliminati eventuali poli in zero.

In assenza di poli in zero, e con tutti gli altri poli a Re<0, è possibile attribuire al guadagno un significato fisico: valore a cui tende la risposta a regime permanente all'ingresso gradino unitario.

5) Può un sistema lineare essere caratterizzato da modi naturali aventi la stessa legge di moto? PAG. 54-55

Sì, se la matrice A ha autovalori coincidenti ma è regolare ($m_g = 1$) si hanno, in corrispondenza ad ogni autovalore con molteplicità algebrica maggiore di 1, altrettanti modi naturali semplici con leggi ~~di moto~~ temporali coincidenti.

In corrispondenza di ogni autovalore reale è possibile calcolare tanti autovettori quanto è la molteplicità algebrica dello stesso, e in corrispondenza di ogni coppia di autovalori complessi e coniugati è possibile calcolare tanti ~~autovettori~~ autospazi di dimensione 2 quanto è la m_a della coppia di autovalori.

$$(A-\lambda_3 I)v_3=0$$

$$\begin{pmatrix} -2-\frac{-3-\sqrt{5}}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1-\frac{-3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1-\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} -2a+\frac{3}{2}a+\frac{\sqrt{5}}{2}a+b+c=0 \\ a-b+\frac{3}{2}b+\frac{\sqrt{5}}{2}b=0 \\ a-c+\frac{3}{2}c+\frac{\sqrt{5}}{2}c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a+3a+\sqrt{5}a+2b+2c=0 \\ 2a-2b+3b+\sqrt{5}b=0 \\ 2a-2c+3c+\sqrt{5}c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-1+\sqrt{5})a+2b+2c=0 \\ 2a+(1+\sqrt{5})b=0 \\ 2a+(1+\sqrt{5})c=0 \end{cases}$$

$$b=c \rightarrow (-1+\sqrt{5})a=-4b \rightarrow \cancel{a=}$$

$$a=\frac{-4}{-1+\sqrt{5}}\cdot\frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}}b=\frac{4(1+\sqrt{5})}{24}b=\frac{1+\sqrt{5}}{6}b$$

$$v_3=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{6} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Esame 24 luglio 2018 — Da rifare

① $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x \end{cases}$

a. ECCITABILITÀ E OSSERVABILITÀ dei modi naturali

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-1-\lambda)^2 - (-1-\lambda) = \cancel{(-1-\lambda)(\ldots)}$$

$$= (-1-\lambda)(2+2\lambda+\lambda+\lambda^2-1)$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2+3\lambda+1)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

AUTOVETTORI

$(A-\lambda_1 I)u_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} b+c=1 \\ b=1-c \end{matrix}$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha=1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A-\lambda_2 I)u_2 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2-\frac{-3+\sqrt{5}}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1-\frac{-3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1-\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2a + \frac{3}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{2}a + b + c = 0 \\ a - b + \frac{3}{2}b - \frac{\sqrt{5}}{2}b = 0 \\ a - c + \frac{3}{2}c - \frac{\sqrt{5}}{2}c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4a+3a-\sqrt{5}a+2b+2c=0 \\ 2a-2b+3b-\sqrt{5}b=0 \\ 2a-2c+3c-\sqrt{5}c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1-\sqrt{5})a + 2b + 2c = 0 \\ 2a + (1-\sqrt{5})b = 0 \\ 2a + (1-\sqrt{5})c = 0 \end{cases}$$

$2a = (-1+\sqrt{5})b$

$(-1+\sqrt{5})b = (-1+\sqrt{5})c \rightarrow b=c$

$(-1-\sqrt{5})a + 2b + 2b = 0$

$$a = -\frac{4}{-1-\sqrt{5}}b = \frac{4}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} b = \cancel{\ldots}$$

$$= \frac{4(1-\sqrt{5})}{1-25}b = \frac{\sqrt{5}-1}{6}b$$

$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{6}\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha=6}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 6+6(\sqrt{5}-1)-6(\sqrt{5}+1)-36$$

$$= 30+6(\sqrt{5}-1)-6(\sqrt{5}+1)$$

$$= 6(5+\cancel{\sqrt{5}}-1-\cancel{\sqrt{5}}-1) = 6\cdot 3 = 18$$

$$\frac{(\mathrm{cof}(T^{-1}))^t}{\cancel{\sqrt{18}}} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} +0 & -(-6) & +(-6) \\ -(6(\sqrt{5}-1) - 6(\sqrt{5}+1)) & +6\sqrt{5}-1 & -(6-\sqrt{5}-1) \\ +6(\sqrt{5}-1) - 6(\sqrt{5}+1) & -6 & +6 \end{pmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -(6\sqrt{5}-6-6\sqrt{5}-6) & 5-\sqrt{5} & -5+\sqrt{5} \\ 6\sqrt{5}-6-6\sqrt{5}-6 & -6 & 6 \end{pmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 12 & -12 \\ 6 & 5-\sqrt{5} & -6 \\ -6 & -5+\sqrt{5} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & \frac{5-\sqrt{5}}{18} & -1/3 \\ -1/3 & \frac{-5+\sqrt{5}}{18} & 1/3 \end{pmatrix}$$

ECCITABILITÁ $\quad v_i^T B \neq 0$

$\lambda_1 = -1 \quad (0 \;\; 2/3 \;\; -2/3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = -2/3$ ECC.

$\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \quad (1/3 \;\; \frac{5-\sqrt{5}}{18} \;\; -1/3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ NON ECC.

λ_3 NON ECC.

OSSERVABILITÁ $\quad C u_i \neq 0$

$\lambda_1 = -1 \quad (1 \;\; 0 \;\; -1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ NON OSS.

$\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \quad (1 \;\; 0 \;\; -1)\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\6\\6\end{pmatrix} = \sqrt{5}-1-6 \neq 0$ OSS.

λ_3 OSS.

b. Stabilitá

Il sistema é asintoticamente stabile perché tutti gli autovalori sono a $Re<0$ $\Rightarrow$ tutte le altre stabilitá

c. calcolare $\lim_{t\to+\infty} x_\ell(t)$ per $x_0 = (2\ \ 3\ \ 1)^T$ con x_ℓ evoluzione libera nello stato

$$x_\ell = e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} v_i \underbrace{v_i^T x_0}_{c_i}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(0\ \ 2/3\ \ 2/3)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$+$$

$$e^{\left(\frac{-3+\sqrt5}{2}\right)t}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5-1}{6}\\6\end{pmatrix}\left(1/3\ \ \frac{5-\sqrt5}{18}\ \ -1/3\right)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$+$$

$$e^{\left(\frac{-3-\sqrt5}{2}\right)t}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5+1}{6}\\6\end{pmatrix}\left(-1/3\ \ \frac{-5+\sqrt5}{18}\ \ 1/3\right)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(2+2/3) + e^{\left(\frac{-3+\sqrt5}{2}\right)t}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5-1}{6}\\6\end{pmatrix}\left(\frac{7-\sqrt5}{6}\right) + e^{\left(\frac{-3-\sqrt5}{2}\right)t}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5+1}{6}\\6\end{pmatrix}\left(\frac{-7+\sqrt5}{6}\right)$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}8/3\\0\\8/3\end{pmatrix} + e^{\overset{-0{,}76}{\left(\frac{-3+\sqrt5}{2}\right)}t}\begin{pmatrix}(4\sqrt5-6)/3\\7-\sqrt5\\7-\sqrt5\end{pmatrix} + e^{\left(\frac{-3-\sqrt5}{2}\right)t}\begin{pmatrix}(-3\sqrt5-1)/3)\\-7+\sqrt5\\-7+\sqrt5\end{pmatrix}$$ così va bene?

$$\lim_{t\to+\infty} = 0$$

d. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente a $u(t) = \sin 2t\ \delta_{-1}(t)$

$W(s) = C(sI-A)^{-1}B$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 & -1\\ -1 & s+1 & 0\\ -1 & 0 & s+1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\det = (s+2)(s+1)^2 - (s+1) - (s+1)$$

$$= \cancel{(s+1)(s^2+3s+2-2)}$$

$$= (s+1)(s^2+3s+2-s-1)$$

$$= (s+1)(s^2+2s+1)$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} +(s+1)^2 & +(s+1) & +s+1\\ +s+1 & (s+2)(s+1)-1 & +1\\ +s+1 & +1 & (s+2)(s+1)-1\end{pmatrix}^t}{(s+1)(s^2+3s+2-2)} = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)^2 & s+1 & s+1\\ s+1 & s^2+3s+1 & 1\\ s+1 & 1 & s^2+3s+1\end{pmatrix}}{(s+1)s(s+3)}$$

$$(s+2)(s+1)-1 = s^2+3s+2-1 = s^2+3s+1$$

$$W(s) = (1\ \ 0\ \ -1)\ \ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= (1\ \ 0\ \ -1)\frac{\begin{pmatrix}(s+1)^2+(s+1)\\ s+1+1\\ \underbrace{s+1+s^2+3s+1}_{s^2+4s+2}\end{pmatrix}}{(s+1)s(s+3)} = \frac{(s+1)^2+(s+1)-s^2-4s-2}{(s+1)s(s+3)}$$

$$= \frac{s^2+2s+1+s+1-s^2-4s-2}{(s+1)s(s+3)} = \frac{-s-1}{(s+1)s(s+3)} = -\frac{1}{s(s+3)}$$

posso calcolare y_r?

invece di no...

$$W(s) = -\frac{1}{s^2+3s} \qquad \omega=2$$

$$W(2j) = -\frac{1}{(2j)^2+3\cdot 2j} = \frac{1}{-4+6j} \cdot \frac{-4-6j}{-4-6j} = \frac{4+6j}{16+36} = \frac{2(2+3j)}{52}$$

$$= \frac{2+3j}{26}$$

$$M(W(2j)) = \left|\frac{2+3j}{26}\right| = \sqrt{\frac{4}{676}+\frac{9}{676}} = \frac{\sqrt{13}}{26}$$

$$\phi(W(2j)) = \arctg(y/x) = \arctg(3/2) \simeq 56°$$

$$\Rightarrow y_r(t) = \frac{\sqrt{13}}{26} \operatorname{sen}(2t + \arctg(3/2))\, \delta_{-1}(t)$$

e. risposta forzata in uscita a $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s+1}$

$$Y_f(s) = W(s)\, U(s) = -\frac{1}{\underset{s(s+3)}{s^2+3s}} \cdot \frac{1}{s+1} = -\frac{1}{s^3+4s^2+3s}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{-e^{st}}{s(s+3)(s+1)}, 0\right) = \lim_{s\to 0} \frac{-e^{st}}{(s+3)(s+1)} = -1/3$$

$$\operatorname{Res}(\ldots, -3) = \lim_{s\to -3} \frac{-e^{st}}{s(s+1)} = \frac{-e^{-3t}}{-3\cdot(-2)} = -\frac{e^{-3t}}{6}$$

$$\operatorname{Res}(\ldots, -1) = \lim_{s\to -1} \frac{-e^{st}}{s(s+3)} = \frac{-e^{-t}}{-1(2)} = e^{-t}$$

$$y_f = -\frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{6} + e^{-t}$$

② Calcolare la risposta a regime permanente del sistema tempo discreto equivalente al sistema continuo con $W(s) = \frac{s}{s^2-1}$ e rispetto a $u(k)=\delta_{-1}(k)$ con $T=1$ secondo

$s^2 = 1 \rightarrow s = \pm i \rightarrow$ r.r.p. non esiste

$W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT}\right]$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-1}\right) = \cosh(\omega t) \overset{\omega=1}{=} \cosh(t)\Big|_k = \cosh(k)$

$\mathcal{Z}[\cosh(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \cosh(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cosh(k)}{z^k}$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right] = \operatorname{senh}(t)\Big|_{t=kT} = \operatorname{senh}(k)$

come continuo?

Se un sistema è instabile a TC lo è anche a TD? Sì

Come Esame Nov. 2019 A
es. ⑤

③ Assegnato un sistema lineare (A,B,C) di dim n, dimostrare che, se $CA^kB=0$ per $k=0,1,\dots,n-1$, allora la risposta impulsiva è identicamente nulla

La matrice delle risposte impulsive in uscita contiene tutti e soli i modi che sono simultaneamente eccitabili e osservabili, così come nel caso tempo continuo. [illegible] a meno della sostituzione di e^{At} con A^k

Poiché $W(k) = C A^{k-1} B = \sum_{i=1}^{m} C \lambda_i^{k} u_i v_i^T B$

se CA^kB è nullo vuol dire che $C u_i v_i^T B = 0 \Rightarrow W(k)=0 \quad \forall k$

basta?

④ Si consideri un sistema lineare di dim n e un ingresso. Quali sono le proprietà dell'insieme degli stati raggiungibili?

Si assuma, inoltre, che il sottospazio degli stati raggiungibili sia di dimensione $\nu < n$. Quando una combinazione lineare di qualsiasi $\nu+1$ stati è raggiungibile? es. ②

se $\nu+1$ linearmente dip.

PAG. 139

L'insieme degli stati raggiungibili coincide con il sottospazio generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}$ $(B \ \ AB \ \ A^{n-1}B)$

Esame Settembre 2018

① risposta indiciale $W_{-1}(t) = (\cos t + \text{sen}\, t - 1)\,\delta_{-1}(t)$

a. calcolare una rappresentazione con lo stato $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

$u(t) = \delta_{-1}(t) \rightarrow U(s) = 1/s$

$$W(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s} = \frac{s^s + s - s^2 - 1}{s(s^2+1)} = \frac{s-1}{s(s^2+1)} = \frac{-1+s}{s^3+s}$$

$$\left[Y(s) = W(s)\,U(s) = \frac{s-1}{s(s^2+1)} \cdot \frac{1}{s} \right]$$ serve? $\Rightarrow W(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s^2+1}$

Realizzazione in forma canonica raggiungibile

$$A_R = \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \phi & 0 & 1 \\ \phi & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \phi \end{pmatrix} \quad D = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \;\; 1 \;\; \phi)\, x \end{cases}$$

mica che in caso devo cancellare -1... → non devo cancellare niente!

e esterno?

b. stabilità: solo interna perché i poli ($s=0$, $s=\pm i$) sono tutti a $Re = 0$

c. diagrammi Bode

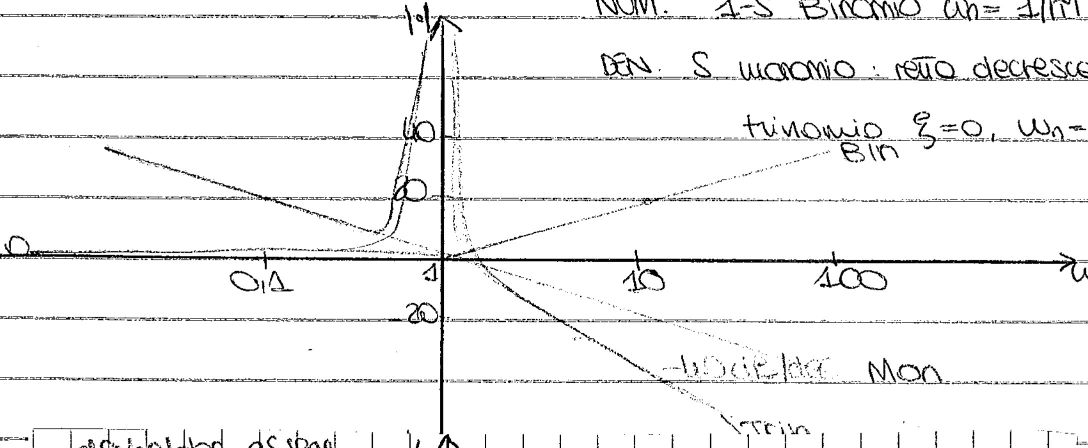
$$W(s) = -\frac{1-s}{s(1+s^2)}$$

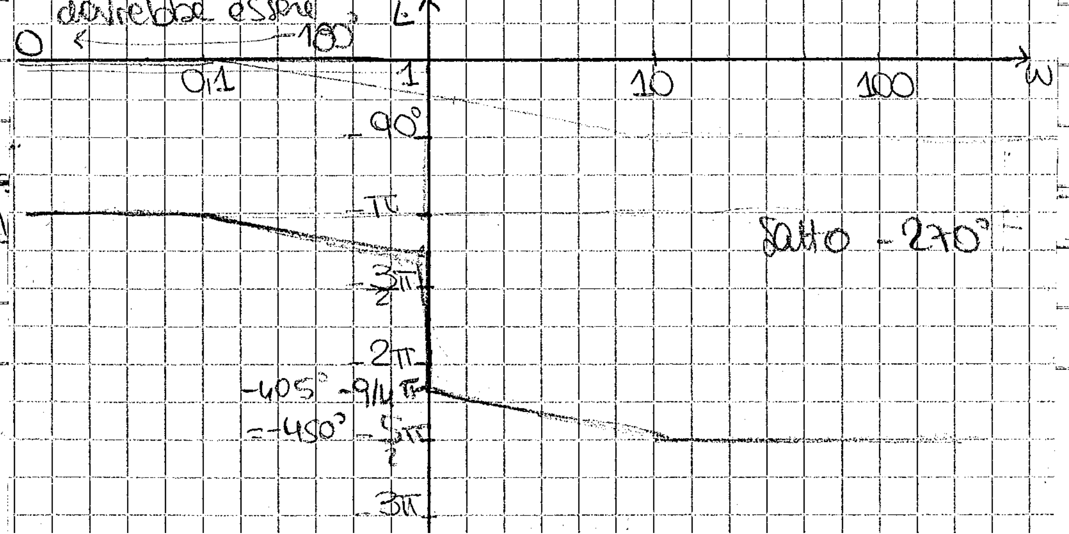
guadagno negativo → $-180°$ fase, $K_B = 20\log_{10}(1) = 0$

NUM. $1-s$ Binomio $\omega_n = 1/|\tau| = 1$: fase $-\pi/2$

DEN. s monomio: retta decrescente, fase $-90°$

trinomio $\xi = 0$, $\omega_n = 1$ antirisonanza, $-\pi$





② $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $C=(1\ \ 0\ \ 1)$

a. scomporre secondo Kalman

È possibile definire una trasformazione di coordinate che decompone il sistema in modo tale da evidenziare come le proprietà di raggiungibilità e osservabilità sono tra loro mutuamente verificate.

Intanto si studiano raggiungibilità e osservabilità.

$R\ (B\ \ AB\ \ A^2B) = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$\mathcal{J} = rg\begin{pmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} = 2$ → ~~$span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$~~

$\hookrightarrow Ker\{0\} \Rightarrow \begin{cases}a+c=0\\ b=0\\ -b=0\end{cases}$ $b=0$ $a=-c$

$span\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ $\begin{pmatrix}-c\\0\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

devo prendere un secondo quale

Decomposizione

$X_1 = R \cap I = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ R, NN

$X_2 \Rightarrow X_1 \oplus X_2 = R \Rightarrow X_2 = \phi$ R, O

$X_3 \Rightarrow X_1 \oplus X_3 = \mathcal{J} \Rightarrow span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ NR, NN

X_4 non c'è $\rightarrow n=3$

b. fdt di trasferimento

$T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & +1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \longrightarrow T = (cof(T^{-1}))^t$

~~TAT^{-1}~~

~~se $T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = T$~~

~~$TAT^{-1} = A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$~~

~~$TB = B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$~~

~~$CT^{-1} = (1\ 0)$~~

?

③ $W(t)$, $W(s)$, $W(j\omega)$ Def + significato fisico → Esame Gennaio 2018 canale 2 Es②

④ Discretizzazione del sistema avente $W(s) = \frac{1}{s}$ (integratore)

$A = (0) \quad B = (1) \quad C = (1) \quad D = (0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ y = x \end{cases}$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{t=kT}\right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\delta_{-2}(t)\Big|_{kT}\right] = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1}$$

$A_D = (1) \quad B_D = (1) \quad C_D = (1)$

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

basta?

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = (1 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} s & -1 & -1 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 & -1 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\mathrm{cof}(sI-A))^t = \begin{pmatrix} +(s+1)^2 & -0 & +0 \\ +s+1 & +s(s+1) & -0 \\ s+1 & -0 & +s(s+1) \end{pmatrix}^t$$

$\to \det = s(s+1)^2$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)^2 & s+1 & s+1 \\ 0 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{pmatrix}}{s(s+1)^2}$$

$$W(s) = \frac{(1 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} (s+1)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)^2} = \frac{(s+1)^2}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s}$$

Esame Ottobre 2018

① Circuito RLC descritto da $V(t) = RC\dot{V}_c(t) + LC\ddot{V}_c(t) + V_c(t)$

$V(t)$, $V_c(t)$

$\uparrow$ ingresso — compare derivato 2 volte = potenziale uscita

$$\begin{cases} \cancel{\alpha} = V(t) = u(t) \\ x_1 = V_c(t) = y(t) \\ x_2 = \dot{V}_c(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{V}_c = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{V}_c = -\frac{R\cancel{C}}{L\cancel{C}}\dot{V}_c - \frac{V_c}{LC} - \frac{e}{LC}V(t) - \frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{LC}x_1 + \frac{1}{LC}u(t) \\ y = x_1 \end{cases}$$

a. rappresentazione con lo stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u(t) \\ y = x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ +1/LC \end{pmatrix} u \\ y = (1 \quad 0)x \end{cases}$$

b. stabilità al variare di R, L, C

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1/LC & s + R/L \end{vmatrix} = s\left(s + R/L\right) + \frac{1}{LC} = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$$

$$\cancel{s_{1,2} = \frac{-R/L \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}} \qquad = LCs^2 + RCs + 1$$

$$\underline{s_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}} \qquad LC > 0$$

per stabilità asintotica: poli reali e distinti e Re<0 : $R^2C^2 - 4L\cancel{C} < 0$

? $\cancel{R^2C^2 < 0 \quad R < 0, R^2 < 0}$

$R^2C < 4L$

② $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&-1&0\end{pmatrix}$

a. analisi modale

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&-1-\lambda&1\\0&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)(-1-\lambda)^2-(-2-\lambda)$$
$$=(-2-\lambda)(\cancel{1}+\lambda^2+2\lambda-\cancel{1})$$
$$=(-2-\lambda)\lambda(\lambda+2)$$

$rg(A+2I)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix}\lambda_1=-2\\\lambda_2=-2\\\lambda_3=0\end{matrix}\right\}$ $\lambda_1=-2$ con $m_a=2$ cambia qualcosa? $m_g=2-1=1$

AUTOVETTORI

$(A-\lambda_1 I)u_1=0\to\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$ $\begin{cases}b+c=0\\+b+c=0\end{cases}$ $\begin{cases}b=-c\\-c+c=0\end{cases}$ $u_1=\begin{pmatrix}\beta\\-\alpha\\\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$(A-\lambda_3 I)u_3=0\to\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$ $\begin{cases}-2a+b+c=0\\\cancel{b+c=0}\\b-c=0\end{cases}$ $\begin{cases}-2a+2b=0\\b=c\end{cases}$ $a=b$ $u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$T=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow T^{-1}=\dfrac{(cof(T^{-1}))^t}{-1-1+1+1-1+1}$

③ RISPOSTA A REGIME PERMANENTE: def + condizioni

È ~~la~~, se esiste, la funzione del tempo intorno alla quale ~~[illegible]~~ tende la risposta di un sistema in presenza di un ingresso persistente e indipendentemente dallo stato iniziale: si può scrivere che $y_r = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$ (dunque le leggi di moto che compaiono in $Ce^{A(t-t_0)} \to 0$ per $t \to \infty$)

oppure, nel senso del limite, $\forall \varepsilon \ \exists \ T_0 : \|y_p(t) - y_r(t)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq T_0$

T_0 = tempo di assestamento

Un'ulteriore proprietà è la limitatezza delle evoluzioni interne, ovvero la stabilità interna asintotica → poli $W(s)$ tutti a $Re<0$.

④ Dato un sistema lineare e stazionario si discuta il legame tra gli autovalori della matrice dinamica e i poli della fne di trasferimento.

~~Gli autovalori di A sono tutti~~ → sono un sottoinsieme degli autovalori del sistema

La matrice dinamica A contiene tutti gli autovalori del sistema e ~~[illegible]~~, attraverso l'analisi modale, vengono messe in luce le loro proprietà di eccitabilità e osservabilità.

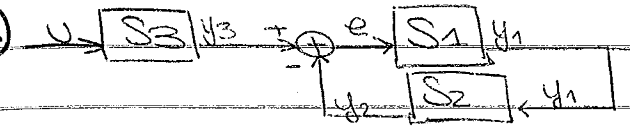
La fne di trasferimento è un modello del comportamento forzato ingresso-uscita, i suoi poli sono un sottoinsieme degli autovalori del sistema e contiene soltanto quelli che risultano essere simultaneamente eccitabili e osservabili.

basta così? serve qualche formula?

prima di eventuali semplificazione, il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ e il denominatore di $W(s)$ coincidono

Esame Dicembre 2018 fila (A)

(1)



$P_1 = \frac{K}{s+1}$ $P_2 = \frac{1}{s^2+1}$ $P_3 = \frac{1}{s+1}$

a. RAPPRESENTAZIONE CON LO STATO = forma matriciale

Realizzazioni in forma canonica raggiungibile

$A_1 = (-1)$ $B_1 = (1)$ $C_1 = (K)$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 = C_1x_1 \end{cases}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C_2 = (1 \ \ 0)$ $\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 = C_2x_2 \end{cases}$

$A_3 = (-1)$ $B_3 = (1)$ $C_3 = (1)$ $\begin{cases} \dot{x}_3 = A_3x_3 + B_3u_3 \\ y_3 = C_3x_3 \end{cases}$

Vincoli

$$\begin{cases} u_3 = u & y_3 = P_3 u \\ u_1 = e = y_3 - y_2 & y_2 = P_2 u_2 = P_2 y_1 \\ u_2 = y_1 & y_1 = P_1 u_1 = P_1(y_3 - y_2) \\ y = y_1 \end{cases}$$

Sistema complessivo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1(C_3x_3 - C_2x_2) = A_1x_1 + B_1C_3x_3 - B_1C_2x_2 \\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 \\ \dot{x}_3 = A_3x_3 + B_3u \\ y = C_1x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 & B_1C_3 \\ B_2C_1 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix} u \\ y = (C_1 \quad 0 \quad 0)\, x \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ K & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = (K \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)$$

b. stabilità interna al variare di $K \in \mathbb{R}$

Se $K = -1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

lin. dip.

b. stabilità interna al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ k & -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

a_{44}

$$= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ k & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(\lambda^2) - k + (-1-\lambda)\right] = (-1-\lambda)\left[\cancel{\quad}\right]$$

$$= (-1-\lambda)\cancel{\quad}(-\lambda^2 - \lambda^3 - k - 1 - \lambda)$$

AUTOVALORI $\lambda_1 = -1$

$$-\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - k - 1 = 0 \rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + k + 1 = 0$$

CN. $+k+1 > 0$ $\quad k > -1$

CNES

3	1	1
2	1	$k+1$
1	$-k$	
0	$k+1$	

$$-\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix} = -\left[(k+1)-1\right] = -k$$

no variazioni: $\begin{cases} -k > 0 & k < 0 \\ k+1 > 0 & k > -1 \end{cases}$ $\quad \boxed{-1 < k < 0}$ asintotica stabilità

Per $k = -1$ OR $k = 0$ → stabilità semplice

c. Raggiungibilità e osservabilità

$$rg\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 4 & k \neq 0 \\ 2 & k = 0 \end{cases}$$

$$rg\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ -k & -k & 0 & k \\ k & k & -k & -2k \\ -k+k^2 & 0 & k & 3k \end{pmatrix} = \begin{cases} 4 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \\ 3 & k = \pm 1 \end{cases}$$

d. Per $K=-1$, calcolare la risposta in uscita e, se esiste, a regime permanente per $x_0=(0\ 0\ 0)^T$ e $u(t)=2\sin(t-1)\,\delta_{-1}(t)$

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad C=(-1\ \ 0\ \ 0)$$

cancello la riga 3 $(-1\ 0\ 0)$ che si può ottenere $(-1\ 0\ 1)+(0\ 0\ -1)$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{(\mathrm{cof}(sI-A)^{-1})^t}{|sI-A|}=\frac{\left(\mathrm{cof}\begin{pmatrix}s+1&0&-1\\0&s-1&0\\0&0&s+1\end{pmatrix}\right)^t}{(s+1)^2(s-1)}$$

$$=\frac{1}{(s+1)^2(s-1)}\begin{pmatrix}(s+1)(s-1)&-0&+0\\-0&(s+1)^2&-0\\s-1&-0&(s+1)(s-1)\end{pmatrix}^t$$

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B=(-1\ \ 0\ \ 0)\frac{\begin{pmatrix}(s+1)(s-1)&0&s-1\\0&(s+1)^2&0\\0&0&(s+1)(s-1)\end{pmatrix}}{(s+1)^2(s-1)}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1\\0&0&1&0\\-1&-1&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad C=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$$

$$(sI-A)=\begin{pmatrix}s+1&1&0&-1\\0&s&-1&0\\1&1&s&0\\0&0&0&s+1\end{pmatrix}$$

$$W(s)=(-1\ \ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}&&&\\&&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{s^2+1}{s^4+2s^3+2s^2+s}$$

$$\det.\ (s+1)\begin{vmatrix}s&-1&0\\1&s&0\\0&0&s+1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&0&-1\\s&-1&0\\0&0&s+1\end{vmatrix}$$

$$=(s+1)\left(s^2(s+1)+(s+1)\right)+\left(-(s+1)\right)$$

$$=\frac{(s+1)\left((s+1)(s^2+1)\right)-(s+1)}{(s+1)^2}\quad\rightarrow (s+1)\left((s+1)(s^2+1)-1\right)$$

$$(s+1)(s^3+s^2+s)$$

$$(s+1)\,s\,\underbrace{(s^2+s+1)}_{s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}}$$

polo in zero, no risposta a regime

$$=(s^2+2s+1)(s^2+1)-s-1$$

$$=s^4+s^2+2s^3+2s+s^2+1-s-1$$

$$=s^4+2s^3+2s^2+s$$

$$W(s) = -\frac{s^2+1}{s^4+2s^3+2s^2+s} = -\frac{s^2+1}{s(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$U(s) = 2\,\frac{e^{-s}}{s^2+1}$$

$$Y_f(s) = \frac{W(s)}{U(s)} = -\frac{e^{s}}{s(s+1)(s^2+s+1)}$$ da antitrasformare.

e. per $K=-1$ → Bode e polare

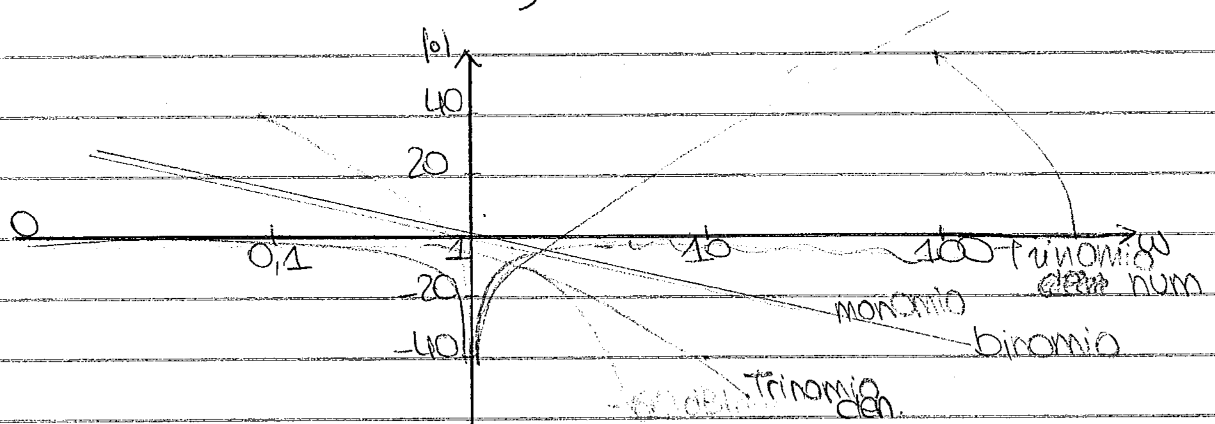
NUM: • guadagno modulo 0, fase $-180°$

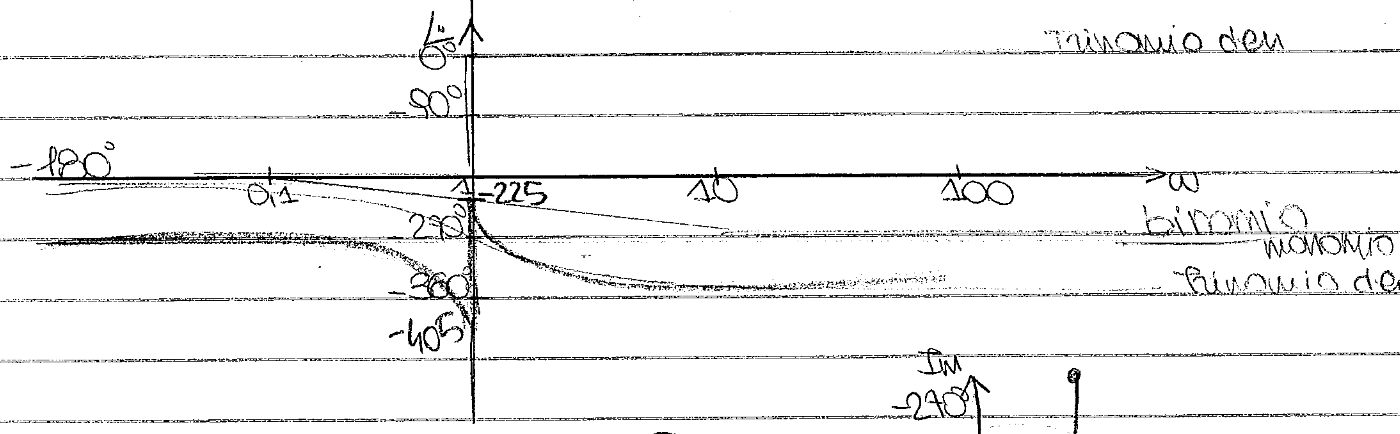
• TRINOMIO $\xi=0$, $\omega_n=1$ antirisonanza, fase salto $0°+180°$

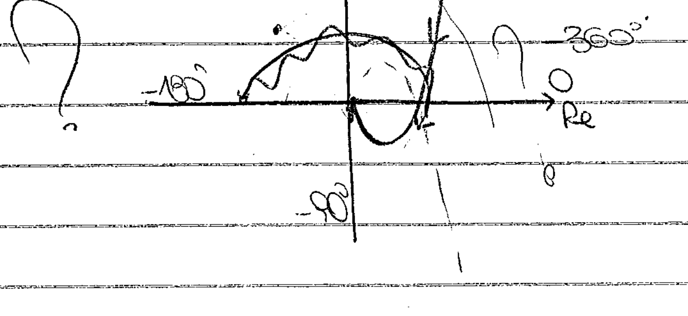
DEN: • monomio decrescente, fase $-90°$

binomio $\tau=1$, $\omega_n=1$ → modulo decresce, fase $-90°$ da $\frac{0,1}{|\tau|}$ a $\frac{10}{|\tau|}$

trinomio $\omega_n=1$, $\xi=1/2$







② $u = (u_1 \quad u_2)^T$ uscita y

a. per $x_0 = 0 \rightarrow$ o $u^1(k) = (u_1^1(k) \quad u_2^1(k))^T$
$u^2(k) = (u_1^2(k) \quad u_2^2(k))^T$

$$y^1(k) = (-1)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) + \frac{4}{3}(-0,5)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) + \frac{1}{3}\delta_{-1}(k-1)$$

$$y^2(k) = (0,1)^{k-2}\delta_{-1}(k-2) + (0,1)^{k-3}\delta_{-1}(k-3)$$

$u_1^1(k)$ = scalino traslato $= \delta_{-1}(k-1)$
$u_2^1(k)$ = nullo $= 0$
$u_2^1(k)$ = nullo $= 0$
$u_2^2(k) = \delta_{-1}(k-1) + \delta_{-1}(k-2)$ = scalini traslati

$$u^1(k) = (\delta_{-1}(k-1) \quad 0)^T \rightarrow \mathcal{U}^1(z) = \left(\frac{1}{z}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1} \quad 0\right)^T$$

$$u^2(k) = (0 \quad \delta_{-1}(k-1) + \delta_{-1}(k-2))^T \rightarrow \mathcal{U}^2(z) = \left(0 \quad \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z(z-1)}\right)^T$$

$$y^1(k) \ldots \rightarrow Y^1(z) = \frac{z}{z-(-1)}\cdot\frac{1}{z} + \frac{4}{3}\frac{z}{z-(-0,5)}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{z+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{(z+0,5)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)}$$

$$y^2(k) \ldots \rightarrow Y^2(z) = \frac{z}{(z-0,1)^2}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{z}{(z-0,1)^3}\frac{1}{z^3} = \frac{1}{z(z-0,1)^2} + \frac{1}{z^2(z-0,1)^3}$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{\mathcal{U}(z)} = \frac{\left(\frac{1}{z+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{z+0,5} + \frac{1}{3}\frac{1}{z-1} \qquad \frac{1}{z(z-0,1)^2} + \frac{1}{z^2(z-0,1)^3}\right)}{\begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z(z-1)} \end{pmatrix}}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti posso considerare nullo prima un ingresso e poi l'altro.

$$W^1(z) = \frac{Y^1(z)}{\mathcal{U}^1(z)} = \left(\frac{3(z+0,5) + 3(z-1) + 4(z+1) + 12(z-1) + (z+1) + 3(z+0,5)}{(z+1)\,3(z+0,5)\,3(\cancel{z-1})}\right)(\cancel{z-1})$$

$$= \frac{6(z+0,5) + 15(z-1) + 5(z+1)}{9(z+1)(z+0,5)} = \rightarrow$$

$$= \frac{6z+3+15z-15+5z+5}{9(z+1)(z+0{,}5)} = \frac{26z \cancel{a} -7}{9(z+1)(z+0{,}5)} = \frac{26z-7}{9(z^2+z+0{,}5z+0{,}5)}$$

$$W^2(z) = \left(\frac{1}{z(z-0{,}1)^2} + \frac{1}{z^2(z-0{,}1)^3}\right) \frac{1}{\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z(z-1)}} = \frac{z+1}{z(z-1)}$$

$$= \left(\frac{\overbrace{z(z-0{,}1)+1}^{z^2-0{,}1z+1 \ \circledast}}{z^2(z-0{,}1)^3}\right) \frac{z(z-1)}{z+1} = \frac{z^3-0{,}1z^2+z-z^2+0{,}1z-1}{\underbrace{(z-0{,}1)^3}_{(z^3 \cancel{+} -0{,}3z^2+0{,}03z-0{,}001)}(z+1)}$$

$$\circledast \ z_{1,2} = \frac{0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01-4}}{2}$$

$$W(z) = \left(\frac{26z-7}{9z^2+13{,}5z+4{,}5} \quad \frac{z^3-1{,}1z^2+1{,}1z-1}{z^4-0{,}3z^3+0{,}03z^2-0{,}001z+z^3-0{,}3z^2+0{,}03z-0{,}001}\right)$$

$$z^4+0{,}7z^3-0{,}27z^2+0{,}029z-0{,}001$$

?

③ MODI NATURALI TC: def + parametri

④ Rappresentazione con lo stato della CASCATA (serie) di due RITARDATORI TD + stabilità interno e esterno

$$u(k) \xrightarrow{x(k+1)} \boxed{R_1} \xrightarrow{x_1(k)} \boxed{R_2} \xrightarrow{x_2(k)} = y$$

generale

$$\begin{cases} u(k) = x(k+1) \\ x_1(k) = x_2(k+1) = u_2(k) \\ x_2(k) = y(k) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(k+1) = A_1 x_1(k) + B_1 u_1(k) \\ x_2(k+1) = A_2 x_2(k) + B_2 u_2(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = A_1 x_1(k) + B_1 u(k) \\ x_2(k+1) = A_2 x_2(k) + B_2 x_1(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) \end{cases}$$

matrice triangolare (inferiore)

Stabilità → autovalori di A_1 e A_2 a $|\lambda_i| < 1$ → asintotico

cosa devo dire in più?

Domanda ①

Risposta impulsiva e fne di trasferimento possono essere calcolate sperimentalmente?

Se sì, come? cercare su libro e Lippiello

Internet

Attraverso metodi grafici per la rappresentazione della fne di risposta armonica, è possibile mettere in diretta relazione l'andamento (sperimentale) della fne di risposta armonica con la posizione di zeri/poli della fne di trasferimento.

La risposta impulsiva di un sistema è la risposta che il sistema presenta quando come ingresso viene applicato un impulso unitario con condizioni iniziali nulle.

La conoscenza della risposta impulsiva permette di prevedere la risposta a qualunque ingresso, attraverso l'integrale di convoluzione tra il segnale di ingresso e la risposta impulsiva: $y_f(t) = \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

La fne di trasferimento — scatola nera: sapendo ingresso-uscita $W(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$

— scatola trasparente: manipolazione grafi

impedenze complesse (teoria dei circuiti)

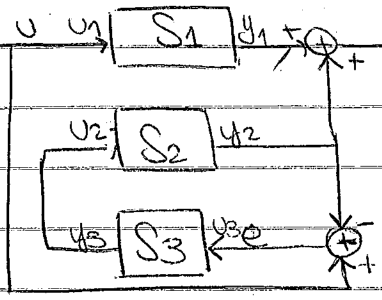
Domanda ②

Stabilità, raggiungibilità, osservabilità dipendono dalla rappresentazione?

No, essendo legate agli autovalori (che sono una proprietà interna del sistema) non subiscono modifiche se si opera un cambio di coordinate.

Esame Dicembre 2018 fila ©

1



$P_1 = \frac{2}{s}$ $\quad A_1 = (0) \quad B_1 = (1) \quad C_1 = (2)$

$P_2 = \frac{1}{s^2+1}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = (1 \; 0)$

$P_3 = \frac{K}{s+1}$ $\quad A_3 = (-1) \quad B_3 = (1) \quad C_3 = (K)$

Vincoli

$$\begin{cases} u = u_1 & y_1 = P_1 u_1 \\ y = y_1 + y_2 & y_2 = P_2 u_2 \\ u_2 = y_3 & y_3 = P_3 u_3 \\ u_3 = u - y_2 \end{cases}$$

a. RAPPRESENTAZIONE CON LO STATO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_3 x_3 \\ \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 (u - y_2) = A_3 x_3 + B_3 u - B_3 C_2 x_2 \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 C_3 \\ 0 & -B_3 C_2 & A_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix} u \\ y = (C_1 \quad C_2 \quad 0) x \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & K \\ 0 & -1 & 0 & K \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

b. stabilità interna al variare di $K \in \mathbb{R}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & K \\ 0 & -1 & 0 & K-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & K \\ -1 & 0 & K-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left(\lambda^2 (K - \lambda) - \cancel{K} + \cancel{K} - \lambda \right) = -\lambda (\lambda^2 K - \lambda^3 - \lambda)$$

$$= \lambda^4 - K\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2 \underbrace{(\lambda^2 - K\lambda + 1)}_{\text{CNES. Routh} \quad -K > 0 \; \to \; K < 0}$$

c. Raggiungibilità e osservabilità

$$R \Rightarrow rg(B\ AB\ A^2B\ A^3B) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k^2 \\ 0 & k & k^2 & -k+k^3 \\ 1 & k & k^2 & -k+k^3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 3 & k=1 \\ 2 & k=-1 \end{cases}$$

$$k=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow det = -1$$

$$1\ 1\ 0 - 0\ 1\ 0 = 1\ 0\ 0$$

$$k=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1 = 0$$

$$rg\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & k \\ 0 & -k & -1 & k^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & k=0 \\ 2 & k=\pm 1 \end{cases}$$

$$k=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$k=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$k=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$u(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$U(s) = \frac{1}{2}\,\frac{(s+1/2\quad)\,e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \quad ?$$

d. $k=-1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = (2\ 1\ 0\ 0)$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & 0 & s+1 \end{pmatrix} \Rightarrow det = s(s^2(s+1) - 1 + (s+1))$$

$$= s(s^3+s^2-1+s+1) = s^2(s^2+s+1)$$

$\otimes$ a_{44}

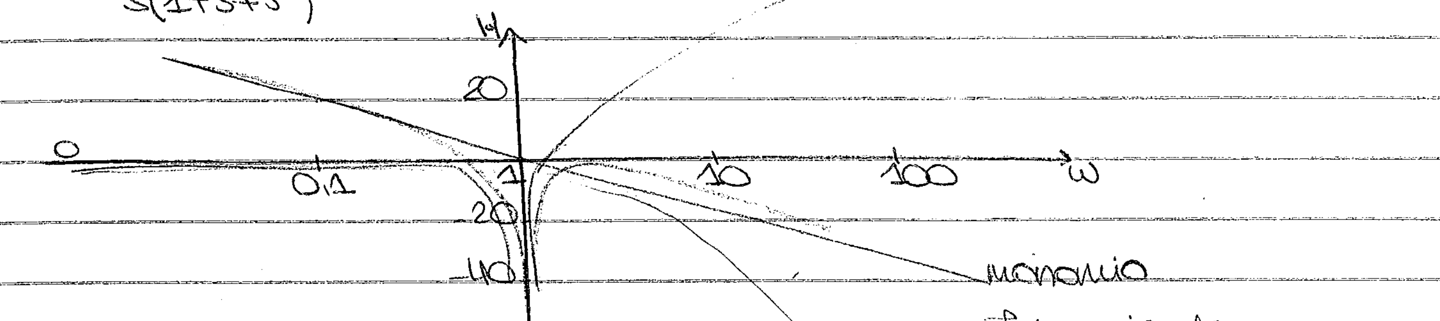
$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = (2\ 1\ 0\ 0)\left(\frac{s(s^2+1)}{s^2(s^2+s+1)}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s^2+1}{s(s^2+s+1)}$$

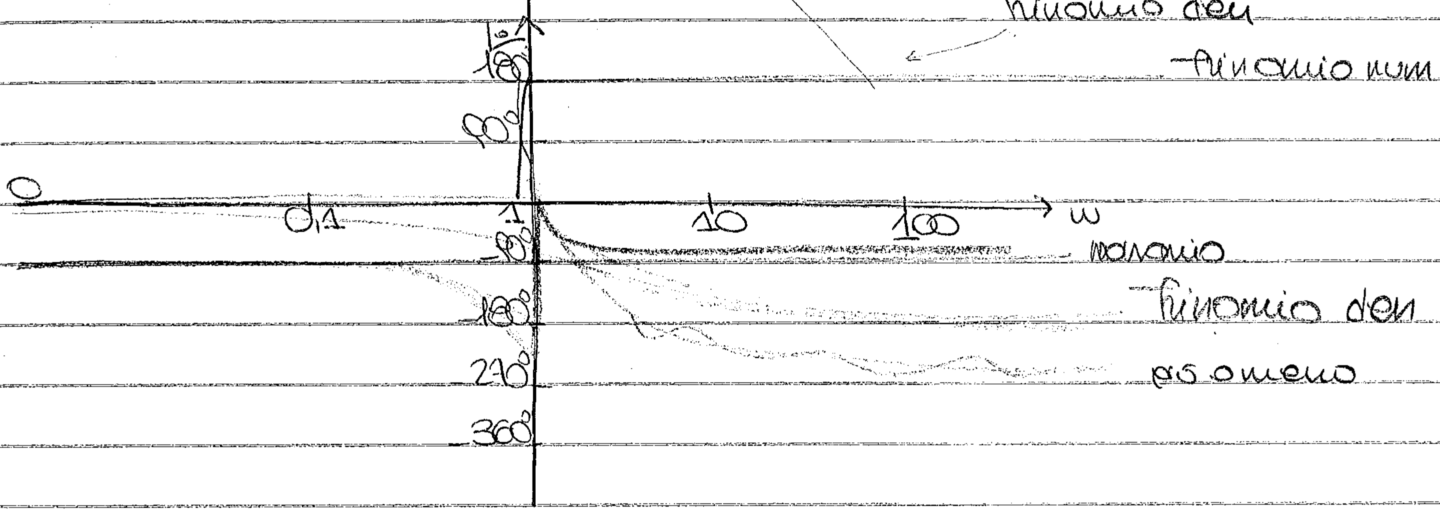
$$\otimes + \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & s \end{vmatrix} = s^3+s = s(s^2+1)$$

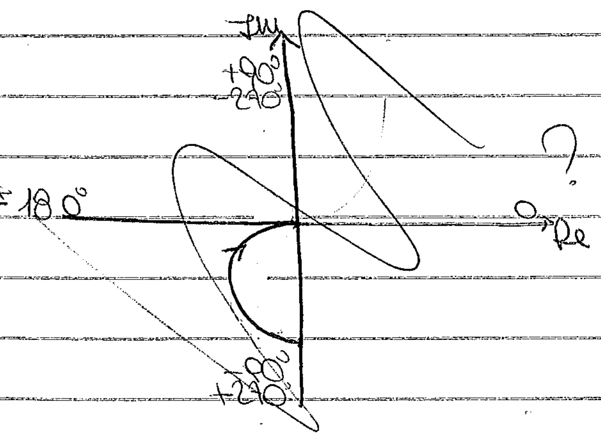
risposta libera $=0$, risposta forzata $= \mathcal{L}^{-1}[W(s)\,U(s)]$

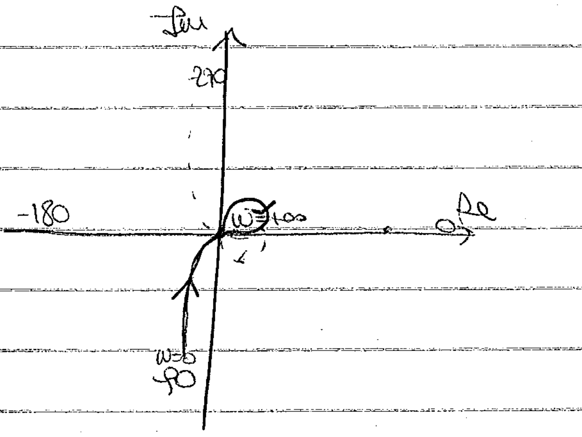
e. Per K=-1 →Bode e polare

$$W(s)=\frac{s^2+1}{s(1+s+s^2)}$$









parte da infinito con fase -90°

③ La risposta armonica può essere intesa a rappresentare il guadagno di un sistema dinamico lineare e stazionario?

~~La risposta armonica è la fne di trasferimento W(s) calcolata in $s=j\omega$. In un sistema LTI, la frequenza ω del segnale in ingresso non viene modificata~~

Da Wikipedia

La risposta armonica è la fne di trasferimento W(s) calcolata in $s=j\omega$.

I sistemi lineari sono caratterizzati dal fatto che la loro risposta ad un segnale periodico in ingresso avente una certa ampiezza, ha la stessa forma e la stessa frequenza dell'input ma con fase e ampiezze diverse.

Dato un sistema lineare stabile, applicando un segnale sinusoidale $u(t)=U_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ di ampiezza U_0 e frequenza ω si ha che, una volta esaurito il transitorio, il segnale in uscita risulta sinusoidale e della stessa frequenza di quello d'ingresso, ovvero del tipo $y(t)=Y_0 \operatorname{sen}(\omega t+\phi)$ dove l'ampiezza Y_0 e lo sfasamento ϕ sono fun del tempo → il rapporto tra ampiezze è detto guadagno per la frequenza ω $(= Y_0(\omega)/U_0(\omega))$.

Se l'ingresso è un'oscillazione del tipo $u=\bar{u}\, e^{j\omega t}$ con $\bar{u}$ vettore arbitrario, lasciando evolvere il sistema l'uscita avrà la forma

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \underbrace{[D+C(j\omega I-A)^{-1}B]}\bar{u}\, e^{j\omega t}$$

dove ... è il fattore guadagno per il quale è stato amplificato l'ingresso

DA VERIFICARE → vedere ricevimento

4) sistema TC dim = 1 $e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

TD approssimato secondo Eulero + stabilità

$A = a\lambda$, $B = 1$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + u \\ y = x \end{cases}$ $\rightarrow$ legge di moto $e^{\lambda t}$

$C = 1$ $D = 0$

$\begin{cases} x(k+1) = T\lambda x(k) + T u(k) \\ y(k) = T x(k) \end{cases}$

$W(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s-\lambda}$ è asintoticamente stabile per $\lambda < 0$.
stabile semplicemente per $\lambda \leq 0$

?

Domanda 1: PROBLEMA DELLA REALIZZAZIONE CAP. 6

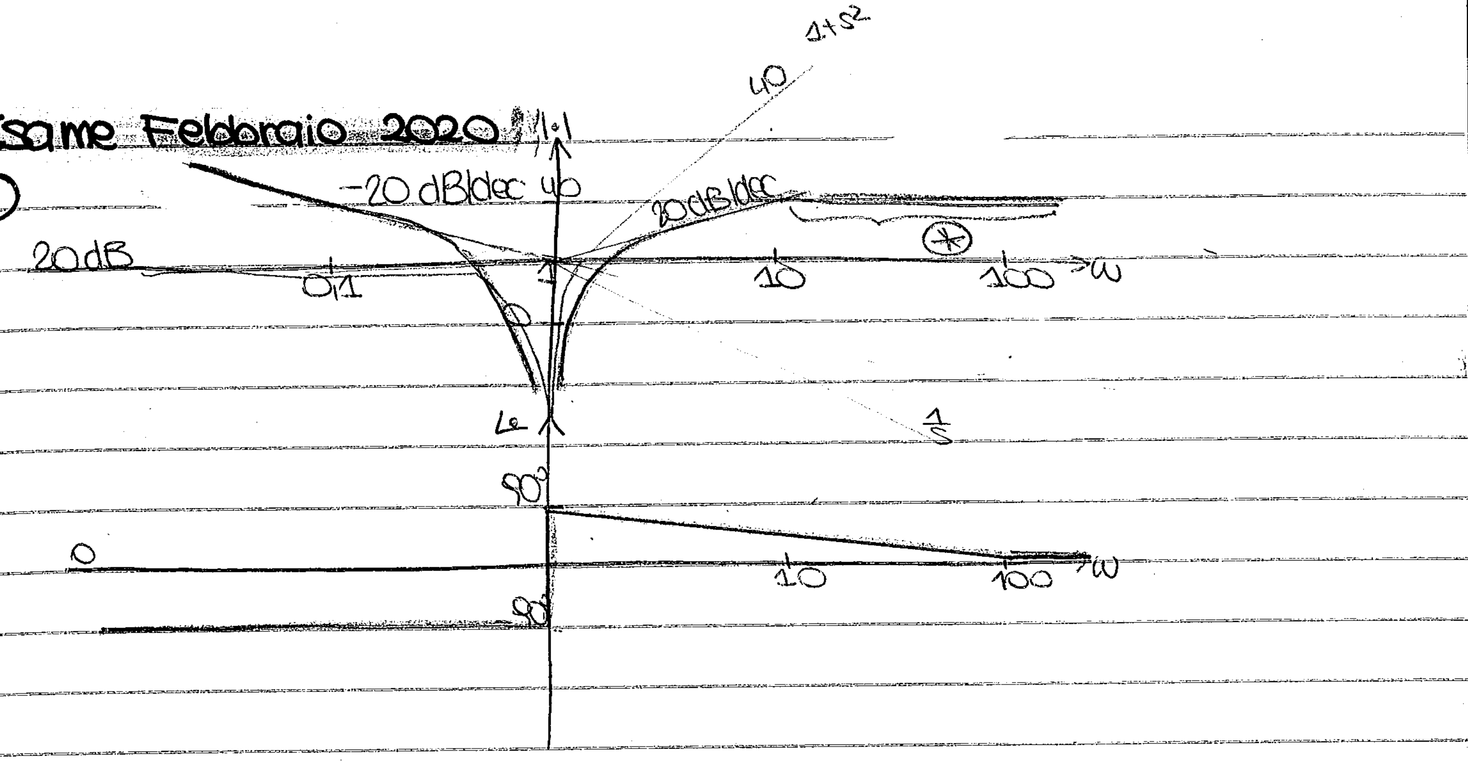
Assegnato un legame funzionale lineare definito dall'integrale di convoluzione con un nucleo $K(t)$ $\rightarrow$ $y(t) = \int_0^t K(t-\tau) u(\tau) d\tau$, ci si chiede sotto quali condizioni coincide con la risposta forzata di un sistema lineare, stazionario causale, a dimensione finita. Il problema della realizzazione ammette soluzione se il nucleo $K(t)$ coincide con la matrice delle risposte impulsive $W(t)$.
Assegnato un nucleo $K(s)$, condizione necessaria e sufficiente per la realizzabilità è $K(s)$ sia una matrice di funzioni razionali proprie.
Questo problema consiste nell'individuare la rappresentazione ISU corrispondente ad una assegnata fdt di trasferimento

Domanda 2: sistema dinamico stazionario lineare TD, n=4

no: se uno stato non è osservabile (raggiungibile) in n passi allora non potrà mai esserlo ?

Esame Febbraio 2020

①



NUM. Termine trinomio → antirisonanza : $\xi = 0$, $\omega_n = 1$ $\quad 1+s^2$ → salto fase π

guadagno $K = 10 = 20$ dB

DEN. Termine monomio s → fase $-90°$

Termine binomio con $\frac{1}{|\tau|} = 10 \rightarrow |\tau| = 0{,}1 = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{1 + 1/10\, s}{10+s}$

modulo scende -20 dB/dec

fase -90° dec prima/dopo

$$W(s) = 100 \frac{1+s^2}{s(10+s)} = 100 \frac{1+s^2}{10\, s\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

Dovrebbe essere corretto ma non mi torna. (*) : È IL GUADAGNO

$$= 10 \frac{1+s^2}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

a. RAPPRESENTAZIONE CON LO STATO

$$W(s) = \frac{100 s^2 + 100}{s^2 + 10 s} = D + \frac{As+B}{s^2+10s} = Ds^2 + 10Ds + As + B$$

$D = 100$

$$W(s) = \frac{-1000 s + 100}{s^2 + 10 s} + 100$$

$100 + A = 0 \rightarrow A = -1000$

$B = 100$

Realizzazione in forma canonica raggiungibile

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_R = \begin{pmatrix} 100 & -1000 \end{pmatrix} \quad D_R = \begin{pmatrix} 100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 100 & -1000 \end{pmatrix} x + 100\, u \end{cases}$$

b. risposta forzata in uscita per $u(t) = \sin t \rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$W(s) = 100 \frac{1+s^2}{s(s+10)}$$

$$Y_f(s) = W(s)\,U(s) = \frac{100}{s(s+10)} \longrightarrow y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)]$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{st} \cdot 100}{s(s+10)}, 0\right) = \lim_{s \to 0} \frac{100\, e^{st}}{s+10} = 10$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{st}\, 100}{s(s+10)}, -10\right) = \lim_{s \to -10} \frac{100 e^{st}}{s} = \frac{100\, e^{-10t}}{-10} = -10 e^{-10t}$$

$$y_f(t) = 10(1 - e^{-10t})\, \delta_{-1}(t)$$

c. se esiste, ~~y~~ la risposta a regime a $u(t) = \delta_{-1}(t)$

Non esiste perché c'è un polo in zero

② sistema lineare stazionario

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k \end{pmatrix} \begin{matrix} -a_0 \\ \\ \\ \\ -a_{n-1} \end{matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

È in forma canonica osservabile, perciò lo spazio di stato associato è tutto osservabile

~~Raggiungibilità~~

Ricavo la fdt di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+1}{s^5 + ks^4 + 5s^3 + 5ks^2 + 4s + 4k}$$

Stabilità Routh

5	1	5	4
4	k	5k	4k
3			
2			
1			
0			

$$-\frac{1}{c_{i+1,1}}\begin{vmatrix} c_{i+2,1} & c_{i+2,k+1} \\ c_{i+1,1} & c_{i+1,k+1} \end{vmatrix}$$

IL DET DI SI-A COINCIDE CON IL DEN DELLA FNE DI TRASFERIMENTO giusto?

$$\cancel{\frac{1}{k}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ k & 5k \end{vmatrix} = 0}$$

$$W(s) = \frac{s+1}{s(s^4+5s^2+4)+k(s^4+5s^2+4)} = \frac{s+1}{(s+k)(s^4+5s^2+4)}$$

$t = s^2$

$$t^2+5t+4=0 \rightarrow t_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5\pm3}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} s^2=-2 \rightarrow s=\pm i\sqrt{2} \\ s^2=-1 \rightarrow s=i \end{matrix}$$

$$W(s) = \frac{s+1}{(s+k)\cancel{(s+2)(s+1)}(s^4+5s^2+4)}$$

$k=1$ semplifica

$s=-k=-1$

stabilità asintotica per $k>0$

instabile per $k<-1$?

semplicem. stabile $k=1$

o devo fare Routh?

hanno parte reale nulla

solo stabilità semplice?

Raggiungibilità

$$rg(B\ AB\ A^2B\ A^3B\ A^4B) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5k \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-k \end{pmatrix}$$

(più o meno) in questo caso sì

vero?

Il sistema perde di raggiungibilità per i valori di k che semplificano il num di W(s)

$$k=+1 \quad R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la 5ª colonna posso scriverla come $-4\,1^a - 5\,3^a$

giusto?

③ sistema massa-molla-smorzatore $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$

a. modello lineare stazionario

$$x_1 = \dot{y} \quad x_2 = y \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{y} = \frac{u}{m} - \frac{b}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -b/m & -k/m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/m \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

b. in base ai valori di b, k, m → analisi modale

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -b/m - \lambda & -k/m \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{b}{m} - \lambda\right)(-\lambda) + \frac{k}{m}$$

$$= \frac{b}{m}\lambda + \lambda^2 + \frac{k}{m} = m\lambda^2 + b\lambda + k$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}$$

se $\cancel{\sqrt{}}\, b^2 - 4km = 0$ autovalori reali e ~~distinti~~ coincidenti
> 0 autovalori reali e distinti
< 0 coppia autovalori complessi e coniugati

$b \geq 0,\ k \geq 0,\ m > 0$ Tabella

b	k	m	$b^2 - 4km$
$=0$	$=0$	>0	0
$=0$	>0	>0	$-4km < 0$
>0	$=0$	>0	b^2
>0	>0	>0	$b^2 - 4km$: >0 se $b^2 > 4km$; <0 se $b^2 < 4km$; $=0$ se $b^2 = 4km$

SOTTO RADICE

- $b=0, k=0, m>0 \rightarrow b^2-4km=0$ autovalori reali e coincidenti $\lambda_{1,2}=0$
  modo naturale aperiodico costante a 1

- $b=0, k>0, m>0 \rightarrow -4km<0$ autovalori complessi e coniugati $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{4km}$; con $\alpha=0 \rightarrow$ modi naturali pseudoperiodici costanti (ellisse)

- $b>0, k=0, m>0 \rightarrow b^2$ autovalori $\lambda_1=-b+b=0$, $\lambda_2=-b-b=-2b<0$
  modi naturali aperiodici: uno costante a 1 (λ_1) e un convergente a zero (λ_2)

- $b>0, k>0, m>0 \rightarrow b^2-4km$

  - $b^2>4km$ la radice è positiva $\lambda_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-4km}$ autovalori reali e distinti, modi naturali aperiodici:
    - divergenti se $-b\pm\sqrt{b^2-4km}>0$
    - convergenti se $-b\pm\sqrt{b^2-4km}<0$
    - costanti se $-b\pm\sqrt{b^2-4km}=0$

  - $b^2<4km$ la radice è negativa $\lambda_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-4km}$; autovalori complessi e coniugati, modi naturali pseudoperiodici ($\alpha=-b<0$) con traiettoria convergente (spirale)

  - $b^2=4km$ la radice è nulla $\lambda_{1,2}=-b$ autovalori coincidenti e reali, modi naturali aperiodici convergenti a zero.

④ MODELLO IMPLICITO E ESPLICITO

a. vantaggi e svantaggi (post-it sugli appunti)

Il modello implicito ha una struttura del tipo $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ nel tempo continuo e permette una simulazione in tempo reale del modello del sistema, è ~~però~~ più completo da analizzare in quanto permette di condurre l'analisi modale con tutti gli autovalori e di analizzare le proprietà del sistema come eccitabilità e osservabilità ma non fornisce le espressioni dello stato e dell'uscita.

Il modello esplicito ha una struttura del tipo $\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) = \Psi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{cases}$ sempre nel tempo continuo e permette di ~~esprimere lo stato e l'uscita come somma~~ analizzare il comportamento complessivo, quello forzato e quello libero, la convoluzione della matrica delle risposte impulsive in uscita W con un qualsiasi ingresso, consente di calcolare tutte le risposte forzate

svantaggi: solo autovalori e, o?

b. passaggi nel tempo discreto   Lippiello lezione ⑭

Partendo da questo modello implicito $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & x(k_0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

Supponiamo di assegnare l'ingresso da k_0 a $+\infty$ e di calcolare $x(k)$:

$$x(k_0+1) = \underbrace{Ax(k_0)}_{x_0} + Bu(k_0)$$

dipende solo dallo stato iniziale

$$x(k_0+2) = Ax(k_0+1) + Bu(k_0+1) = A^2x(k_0) + ABu(k_0) + Bu(k_0+1)$$

⋮ per sostituzioni successive si ~~ottiene~~ ottengono le formule di Lagrange nel td

$$\begin{cases} x(k) = A^{k-k_0}x_0 + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) \\ y(k) = CA^{k-k_0}x_0 + C\sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) + Du(k) \end{cases}$$

dove ~~ha~~ il ruolo principale è rivestito dalla matrice potenza A^k

Possiamo dunque definire le matrici:

$\Phi(k-k_0) = A^{k-k_0}$

$H(k-i) = A^{k-i-1} B$ passo?

$\Psi(k-k_0) = C A^{k-k_0}$

$W(k-i) = \begin{cases} C A^{k-i-1} B & k>0 \\ D & k=0 \end{cases}$

(5) Calcolare un modello del primo ordine di un sistema TC con costante di tempo $\tau = 1$ sec e guadagno $K=10$ $\quad \tau = -\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = -1$

Calcolarne il sistema TD equivalente per periodo di campionamento $T_s = 0,1$ sec

$\lambda = -1$

$W(s) = \frac{10}{s+1}$ $\quad A = (-1) \quad B = (1) \quad C = (10)$

$I + TA,\ TB$

TC

$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = 10x \end{cases}$ $\quad$ cos(?)

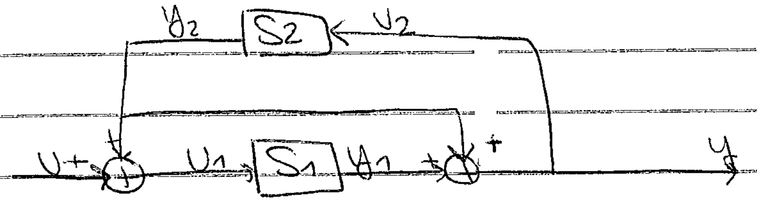
TD $\quad A_D = e^{AT} = e^{-0,1} \simeq 0,9$

$B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi\, B = \int_0^{0,1} e^{-0,1\xi} d\xi = -0,1\, e^{-0,1\xi}\Big|_0^{0,1} = 0,1\, e^{-0,1 \cdot 0,1} + 0,1 \simeq 0,199$

$C_D = C = 10$

Esame Maggio 2020

①



$$S_1: \begin{cases} \dot x_1 = A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 = C_1x_1 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot x_2 = A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 = C_2x_2 + D_2u_2 \end{cases}$$

a rappresentare con lo stato   Vincoli $u_1 = u + y_2$ $u = u_1 - y_2$

$y = y_1 + y_2 = u_2$

$\cancel{\dot x_1 = A_1x_1 + B_1u_1 = A_1x_1 + B_1u + B_1C_2x_2 + B_1D_2u_2 = y_1}$

$$\begin{cases} \dot x_1 = A_1x_1 + B_1(u+y_2) = A_1x_1 + B_1u_1 \cancel{+ B_1C_2x_2 + B_1D_2u_2} \\ \quad B_1u_1 + B_1C_2x_2 + B_1D_2u_2 \\ \dot x_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2C_2x_2 + B_2D_2u_2 \\ y = y_1 + y_2 = C_1x_1 + C_2x_2 + D_2u_2 \end{cases}$$

?

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 + B_2C_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_1D_2 \\ 0 & B_2D_2 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot x_1 = A_1x_1 + B_1(u+y_2) = A_1x_1 + B_1u + B_1y_2 \\ \dot x_2 = A_2x_2 + B_2y \\ y_1 = C_1x_1 \\ y_2 = C_2x_2 + D_2(y_1+y_2) = C_2x_2 + D_2y_1 + D_2y_2 \to y_2 = \dfrac{C_2x_2 + D_2C_1x_1}{1-D_2} \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x_1 = A_1x_1 + B_1u + \dfrac{B_1C_2x_2}{1-D_2} + \dfrac{B_1D_2C_1}{1-D_2}x_1 \\ \dot x_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + \dfrac{B_2C_2x_2}{1-D_2} + \dfrac{B_2D_2C_1}{1-D_2}x_1 \\ y = C_1x_1 + \dfrac{C_2x_2 + D_2C_1x_1}{1-D_2} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 + \dfrac{B_1D_2C_1}{1-D_2} & \dfrac{B_1C_2}{1-D_2} \\ B_2C_1 + \dfrac{B_2D_2C_1}{1-D_2} & A_2 + \dfrac{B_2C_2}{1-D_2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_1 + \dfrac{D_2C_1}{1-D_2} & \dfrac{C_2}{1-D_2} \end{pmatrix}$$

b. calcolare la $W(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$

$$\begin{cases} Y_1(s) = W_1 U_1 = W_1(U + Y_2) = W_1 U + W_1 Y_2 = W_1 U + W_1 W_2 Y \\ Y_2(s) = W_2 U_2 = W_2 Y \end{cases}$$

$Y = Y_1 + Y_2 = W_1 U + W_1 W_2 Y + W_2 Y$ $\cancel{Y = \frac{W_1 U + W_1 W_2}{1 - W_2}}$

$$Y = \underbrace{\frac{W_1}{1 - W_1 W_2 - W_2}}_{W} U$$

c. fissate $W_1 = 1/s$ $\quad W_2 = \frac{2s+1}{s+1} = D + \frac{A}{s+1} = \frac{sD + D + A}{} = 2 - \frac{1}{s+1}$

$$\begin{cases} D + A = 1 \quad A = -1 \\ D = 2 \end{cases}$$

① raggiungibilità / osservabilità

$$W = \frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{1}{s} \cdot \frac{2s+1}{s+1} \; \frac{2s+1}{s+1}} = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{s(s+1) - (2s+1) - s(2s+1)}{s(s+1)}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{s}} \frac{\cancel{s}(s+1)}{s^2 + \cancel{s} - 2s \mp 1 - 2s^2 - \cancel{s}}$$

$$= \frac{s+1}{-s^2 - 2s \mp 1} \quad = -(s+1)(s+1) \quad s_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{-1} = -1$$

$$= -\frac{1}{s+1}$$

c'è ~~sono~~ ~~due~~ cancellazioni perciò ~~due~~ un autovalore non ~~sono~~ è simultaneamente R, O ~~corretti~~

Realizzo singolarmente i due sottosistemi

$A_1 = (0) \quad B_1 = (1) \quad C_1 = (1)$

$A_2 = (-1) \quad B_2 = (1) \quad C_2 = (-1) \quad D_2 = (2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 - 2 & \frac{1}{-1} \\ 1 - 2 & -1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ora posso studiare

$R\,(B\ AB) \Rightarrow rg\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$ rg max $\rightarrow$ tutti raggiungibili

$\mathcal{O}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \Rightarrow rg\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow$ perdita di osservabilità

(ii) stabilità interna e esterna $\rightarrow$ polo a Re<0 $\rightarrow$ interna asintotica quindi tutte

② Assegnato $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ dimostrare che la risposta forzata verifica $y_f = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)]$

$y_f(t) = \int_{t_0}^{t} C e^{A(t-\tau)}$ Appunto lezione ⑰ DA CHIEDERE SE VA BENE ⊛

Consideriamo un certo segnale di ingresso $u(t)$ e campionandolo con periodo fisso $T \rightarrow \tilde{u}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_T(t - iT)\, T\, u(t)$ impulso rettangolare

la risposta a questo segnale, in un sistema lineare, sarà

$\tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} T u(iT)\, W_T(t - iT)$, se facciamo il limite per $T \rightarrow 0$ di $\tilde{y}(t)$ la sommatoria discreta diventa un integrale $\int_0^{+\infty} W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$ = integrale di convoluzione

$= \int_0^t W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \triangleq y_f(t)$

per $T \rightarrow 0$ l'impulso rettangolare diventa l'impulso di Dirac $\Rightarrow$ risposta all'impulso

facendo la trasformata di Laplace e ricordando che la trasformata del prodotto di convoluzione è pari al prodotto delle trasformate si ha che $Y_f(s) = W(s)\,\mathcal{U}(s)$

⊛ Basta fare i passaggi con la trasformata di Laplace, th derivazione e linearità

manca una u o va bene così?

③ Assegnato $\dot{x} = Ax + b$ $x, b \in \mathbb{R}^n$

a calcolare gli stati di equilibrio pag. ⑱③

Uno stato è di equilibrio se il sistema vi permane con ingresso nullo e dunque soddisfa la condizione $f(x_e, 0) = 0$

$$Ax_e + b = 0$$

$$x_e = -b A^{-1}\ ?$$

b stabilità di questi

boh.

Dovrebbe essere con gli autovalori di A però qui ho $Ax_e + b = 0$?

④ Il campionamento della risposta indiciale di un sistema dinamico LTI è pari a $(Tk)\delta_{-1}(k)$ con periodo $T>0$. Calcolare una rappresentazione con lo stato

ingresso gradino: $\delta_{-1}(k) \rightarrow \frac{z}{z-1}$

risposta (uscita): $y_r = y_f = (Tk)\delta_{-1}(k) \rightarrow T\frac{z}{(z-1)^2}$

$$W(z) = \frac{Y_f(z)}{U(z)} = \frac{Tz}{(z-1)^2} \frac{(z-1)}{z} = \frac{T}{z-1}$$

$A=(1) \quad B=(1) \quad C=(T) \quad D=(0)$?

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u(k) \\ y(k) = T\,x(k) \end{cases}$$

⑤ Costante di tempo, smorzamento, ~~[illegible]~~ pulsazione naturale: definizioni

già fatto

Esame Giugno 2020

1) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$

a. proprietà modi naturali e analisi

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)^2 + 1 - (-1-\lambda) - (-2-\lambda)$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4) + 1 + 1 + \lambda + 2 + \lambda$$

$$= -\lambda^2 - 4\lambda - \cancel{4} - \lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + \cancel{4} + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 6\lambda = \lambda(-\lambda^2 - 5\lambda - 6) \qquad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

$$= -\lambda(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$\lambda_1 = 0$ modo naturale aperiodico costante a 1

$\lambda_2 = -2$ " " " convergente e^{-2t}

$\lambda_3 = -3$ " " " " e^{-3t}

AUTOVETTORI

$(A-\lambda_1 I)u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -a+b=0 \\ a-2b+c=0 \\ a+b-2c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=a \\ b-2b+c=0 \end{cases} \quad c=b \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_2 I)u_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-a \\ c=-a \end{cases} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_3 I)u_3 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \quad b=-2a \quad a-2a+c=0 \rightarrow c=a \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(T^{-1}) = -1 - 1 - 2 + \cancel{1} - 2 - \cancel{1} = -6$

$$T = \frac{(\mathrm{cof}(T^{-1}))^t}{-6} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} +(-3) & -3 & +0 \\ -2 & +0 & -(-2) \\ +(-1) & -(-3) & +(-2) \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix}]v_1^T \\ ]v_2^T \\ ]v_3^T \end{matrix}$$

Eccitabilità $v_i^T B \neq 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ ECC.

$\lambda_2 = -2 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ NON ECC

$\lambda_3 = -3 \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$ ECC.

Kalman fatto bene

OSSERVABILITÀ $\quad Cu_i \neq 0$

$\lambda_1 = 0 \quad (1 \ -1 \ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$ NON OSSERV. (ECC)

$\lambda_2 = -2 \quad (1 \ -1 \ 0)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 1+1$ OSSERV. (NON ECC)

$\lambda_3 = -3 \quad (1 \ -1 \ 0)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 1+2$ OSSERV. (ECC)

b. Scomposizione Kalman

$R = rg(B \ AB \ A^2B) = rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 2 & -6\\1 & -1 & 3\end{pmatrix} = 2$ lin. dip.

$X_R = Im\{R\} = Im\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ come differenza

$X_{\bar{R}}: \begin{cases}(a \ b \ c)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0\\ (a \ b \ c)\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = 0\end{cases} \quad \begin{cases}a + c = 0\\ -a + 2b - c = 0\end{cases} \quad \begin{matrix}a = -c\\ -a+2b+a = 0\\ b = 0\end{matrix}$

$X_{\bar{R}} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$

$O = rg\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-2 & 3 & -1\\4 & -9 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow det = 15+4-9-10 = 0 \rightarrow rg = 2$

$\begin{matrix}1 & 0\\-2 & -1\\-4 & 5\end{matrix} \quad rg = 2$

$X_I = Ker\{O\} = \begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases}a - b = 0\\ -2a + 3b - c = 0\\ 4a - 9b + 5c = 0\end{cases} \quad \begin{matrix}a = b\\ -2a + 3a - c = 0 \rightarrow a = c\end{matrix}$

$= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$X_O: \begin{cases}(a \ b \ c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\ (a \ b \ c)\end{cases} \rightarrow a + b + c = 0 \quad a = -b - c \quad X_O = \left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$

~~c. risposta in uscita e, se esiste, a regime per $x_0 = (1 \ 1 \ 1)^T$ e $u(t) = \delta_{-1}(t-2) + \cos(4t)\delta_{-1}(t)$~~

4 sottosistemi

$X_1 = X_R \cap X_I = \phi \ [\ ]$ $\quad R, I \quad \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $det = 0$ $\quad \phi$

$X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2 = X_R \quad X_2 = \{[\ ]\}$ $\quad R, O \quad \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $det = 0$

$X_3 \oplus X_1 = X_I \Rightarrow \phi$ $\quad NR, I \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \phi$

$X_4 = \{[\ ]\}$ complemento $\quad NR, O \quad \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} =$

$T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} & 1 & 1\\ & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{array}\right)$

è solo la forzata

c risposta in uscita e se esiste a regime per $x_0=(1\ 1\ 1)^T$ e $u(t)=\delta_{-1}(t-2)+\cos t\,\delta_{-1}(t)$

$W(s)=C(sI-A)^{-1}B$ se avessi fatto il punto b $W(s)=C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2$!

$$(sI-A)=\begin{pmatrix} s+1 & -1 & 0\\ -1 & s+2 & -1\\ -1 & -1 & s+2\end{pmatrix} \qquad \det=(s+1)(s+2)^2+1-(s+1)-(s+2)$$

$$=(s+1)(s^2+4s+4)+\cancel{1}-s-\cancel{1}-s-2$$

$$=s(s+2)(s+3)$$

$$\begin{pmatrix} +(s+2)^2-1 & -(-(s+2)-1) & +1+s+2\\ +s+2 & (s+1)(s+2) & -(-(s+1)-1)\\ +1 & (s+1) & (s+1)(s+2)-1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} s^2+4s+3 & s+3 & s+3\\ s+2 & (s+1)(s+2) & s+2\\ 1 & s+1 & s^2+3s+1\end{pmatrix}^t$$

$$W(s)=(1\ \ -1\ \ 0)\,\frac{\begin{pmatrix} s^2+4s+3 & s+2 & 1\\ s+3 & (s+1)(s+2) & s+1\\ s+3 & s+2 & s^2+3s+1\end{pmatrix}}{s(s+2)(s+3)}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\left(s^2+4s+\cancel{3}-s-\cancel{3} \quad (s+2)-(s+1)(s+2) \quad \cancel{1}-s-\cancel{1}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{s^2+3s-s}{s(s+2)(s+3)}=\frac{s^2+2s}{\ldots}=\frac{s(s+2)}{s(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+3}$$

$$U(s)=\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{s}{s^2+1}=\frac{(s^2+1)e^{-2s}+s^2}{s(s^2+1)}$$

$$y_f=W(s)U(s)=\frac{s^2(1+e^{-2s})+e^{-2s}}{s(s+3)(s^2+1)}=\cancel{\frac{s(1+e^{-2s})}{(s+3)(s^2+1)}+e^{-2s}}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{st}(\ldots)}{\ldots},0\right)=\lim_{s\to0}\frac{e^{st}(s^2(1+e^{-2s})+e^{-2s})}{(s+3)(s^2+1)}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Res}\left(\ldots,-3\right)=\lim_{s\to-3}\frac{e^{st}(s^2(1+e^{-2s})+e^{-2s})}{s(s^2+1)}=\frac{e^{-3t}(9(1+e^{6})+e^{6})}{-30}\quad (9+9e^6+e^6)$$

$$=\frac{e^{-3t}(9+10e^{6})}{-3(9+1)=-30}=\frac{9e^{-3t}+10e^{6-3t}}{-30}+$$

$$\mathrm{Res}(\ldots,-i)=\lim_{s\to-i}\frac{e^{st}(s^2(1+e^{-2s})+e^{-2s})}{s(s+3)(s-i)}=\frac{e^{-it}(-(1+e^{+2i})+e^{+2i})}{\underbrace{(-i)(3-i)(-2i)}_{-2}=-2(3-i)}\cdot\frac{(3+i)}{(3+i)}$$

$$=\frac{-e^{-it}(3+i)}{-2(9+1)}=\frac{+(3+i)e^{-it}}{+20}$$

$$\mathrm{Res}(\ldots,i)=\lim_{s\to i}\frac{e^{st}(s^2(1+e^{-2s})+e^{-2s})}{s(s+3)(s+i)}=\frac{e^{it}(-(1+e^{-2i})+e^{-2i})}{\underbrace{i(3+i)(2i)}_{=-2}}\cdot\frac{(3-i)}{3-i}$$

$$=\frac{-e^{it}(3-i)}{-2(9+1)}=\frac{+e^{it}(3-i)}{+20}$$

$$y_f(t) = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}e^{-3t} - \frac{1}{3}e^{6-3t} + \underbrace{\frac{(3+i)}{20}(\cos t + i\,\text{sen}\,t) + \frac{(3-i)}{20}(\cos t - i\,\text{sen}\,t)}$$

$$\frac{1}{20}\left(3\cos t + 3i\,\cancel{\text{sen}\,t} + \cancel{i\cos t} - \cancel{\text{sen}\,t} + 3\cos t - 3i\,\cancel{\text{sen}\,t} - \cancel{i\cos t} - \text{sen}\,t\right)$$

$$\frac{1}{20}\left(6\cos t - 2\,\text{sen}\,t\right) = \frac{3\cos t - \text{sen}\,t}{10}$$

risposta libera $\rightarrow$ $C(SI-A)^{-1}x_0 = \frac{\left(s^2+3s \quad (s+2)(\cancel{1}-s-\cancel{1}) \quad -s\right)}{s(s+2)(s+3)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$Y_\ell(s) = \frac{s^2+3s + (s+2)(-s) - s}{s(s+2)(s+3)} = \frac{s^2+3s-s^2-2s-s}{} = 0$$

$$\cancel{= \frac{3-3s}{s(s+2)(s+3)}} =$$

No risposta a regime permanente perché c'è un polo in zero

d. stabilità:

interno semplice (polo in zero) e esternamente stabile ~~asintoticamente~~ in zero e in ogni stato

e. ~~il~~ sistema TD equivalente

$A_D = e^{AT}$ $\qquad B_D = \int_0^T e^{A\xi}d\xi\, B$ $\qquad C_D = C$

$\downarrow$

$e^{AT} = T^{-1}e^{Dt}T$ $\quad$ con $D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix} \rightarrow e^{Dt} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&e^{-2t}&0\\0&0&e^{-3t}\end{pmatrix}$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&e^{-2t}&0\\0&0&e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-2&-1\\-3&0&3\\0&2&-2\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-2&-1\\-3e^{-2t}&0&3e^{-2t}\\0&2e^{-3t}&-2e^{-3t}\end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3-3e^{-2t}&-2+2e^{-3t}&-1+3e^{-2t}-2e^{-3t}\\-3+3e^{-2t}&-2-4e^{-3t}&-1-3e^{-2t}+4e^{-3t}\\-3+3e^{-2t}&-2+2e^{-3t}&-1-3e^{-2t}-2e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$\tilde{A} = I + TA + \cancel{\frac{T^2A^2}{2}}$ $\qquad \tilde{B} = TB$ $\qquad \tilde{C} = C$

$\uparrow$ intervallo campionamento

② Rappresentazione con lo stato + Diagrammi Bode e polare per sistema SISO con:

⊛ $y_{r_1}(t) = 0 \;\; \forall t \geq 0$ a $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$ $\quad U(s) = \frac{1}{s+1}$ ingresso esponenziale

$y_{r_2}(t) = \frac{1}{2}$ a $u(t) = \delta_{-1}(t)$ $\rightarrow$ risposta indiciale $= W(0) =$ guadagno $= 1/2$

un modo naturale con smorzamento $\xi = \frac{1}{2}$, $\omega_n = 1$ $\rightarrow$ $\frac{2\frac{1}{2}}{\omega_n} = \frac{2\xi}{\omega_n}$ $\quad (1+s+s^2)$

$y_{r_1} = \underbrace{\int_0^{+\infty} W(\xi)\, e^{-\xi}\, \delta_{-1}(\xi)\, d\xi}_{\text{è la trasformata di Laplace di } W(t)} = W(1)$ $\quad$ ingresso: $e^{-1 t} \rightarrow y_r = e^{-t}\, W(-1) = 0$

$W(-1) = e^{t}$

se fosse stata risposta forzata allora mi diceva che c'era uno zero in -1

come faccio!?

$U_1(s) = \frac{1}{s+1}$

$Y_1(s) = W_1 U_1 = \frac{W_1}{s+1} = W(-1) = e^{t} \xrightarrow{T.L.} 1$ $\quad$ alcuni hanno messo $s+1$ a num.

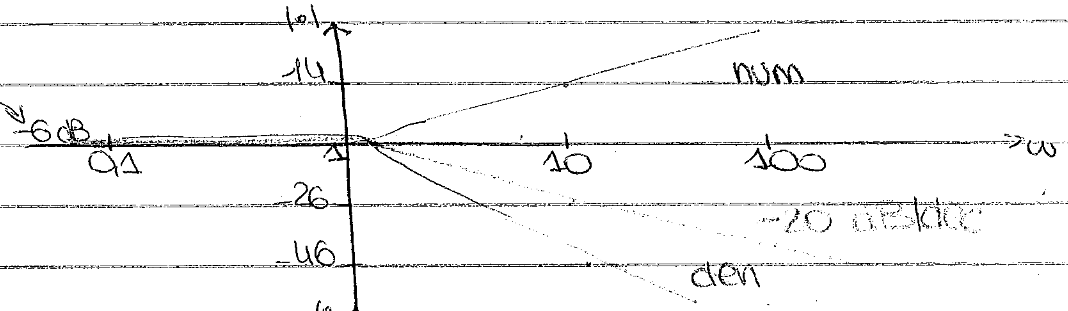
$W(s) = \frac{1}{2}\,\frac{(s+1)}{1+s+s^2}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

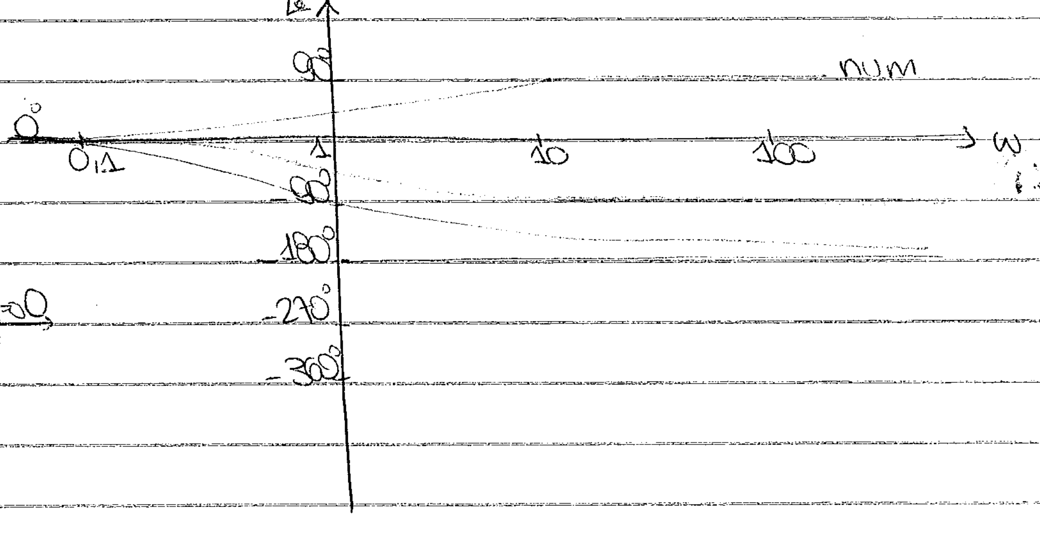
⊛ "dice che non deve esserci un monomio a denominatore così non c'è guadagno con ingresso e^{t}, perché se c'è un fattore $1/s$ con il th del valor finale viene che il regime è diverso" da Telegram

Segue da Telegram:

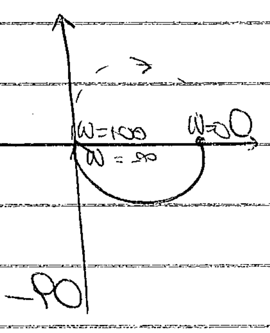
$y_f(s) = W(s)\, U_1(s)$

$W(s) = \frac{1}{2}\,\frac{s+1}{1+s+s^2}$





Nyquist



③ Per un sistema tempo discreto $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio stati inosservabili, si dimostri che

$\mathcal{I} = \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ PAG. 131

Se $Ce^{At}x = 0 \Rightarrow \left(\frac{d^k}{dt^k} Ce^{At}x \right)_{t=0} = 0$ ma $\frac{d^k}{dt^k} Ce^{At}x = CA^k e^{At} x$

e quindi $\frac{d^k}{dt^k} Ce^{At}x \Big|_{t=0} = CA^k e^{At}\Big|_{t=0} x = CA^k x$ per $k = 0, 1, \dots$

dunque se $Ce^{At}x = 0$ allora $CA^k x = 0$ $\forall k$ e $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow I = \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

Se, viceversa, $CA^k x = 0$ $k = 0, 1, \dots, n-1$ ~~allora~~ dal th di Caley-Hamilton : $CA^k x = 0$ $\forall k \geq n$

Da Appello:

Se consideriamo l'evoluzione del sistema $y_\ell(k) = CA^k x(0)$, affinché lo stato $x(0)$ sia inosservabile $y_\ell(k) = 0$ $\forall k$.

Consideriamo prima il caso $k=0$: $CA^0 x(0) = CI\,x(0) = Cx(0) = 0 \Rightarrow x(0) \in \ker\{C\}$

quindi tutti i vettori di stato che non riesco a osservare in un passo sono quelli che stanno nel $\ker\{C\}$

Per $k = 1$ $\rightarrow CAx(0) = 0$ tutti gli stati che rispettano la condizione sono $x(0) \in \ker\{CA\}$

iterando fino a ~~k~~ $k = n-1 \rightarrow CA^{n-1}x(0) = 0 \rightarrow x(0) \in \ker\{CA^{n-1}\}$

Gli stati inosservabili sono quelli che appartengono all'unione di tutti i kernel:

$K \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \ker\{O\} = X_I$

matrice osservabilità

④ già fatto

Esame Luglio 2020

① Fne di trasferimento

- modo pseudoperiodico con $\omega_n = 1$, $\xi = 0{,}5 = 1/2$ $\quad \frac{2\xi}{\omega_n} \to 2\xi = \frac{1}{2}$
- modo aperiodico con $\tau = 1$
- guadagno $K = -10$
- $y_r(t) = \underbrace{10}_{M(W(j\omega))} \operatorname{sen} t$ a $u(t) = \operatorname{sen} t$

$$W(j\omega) = W(j) = \frac{1}{(1+s)(1+s+s^2)}\bigg|_{s=j}$$

$$= \frac{1}{(1+j)(1+j-1)} = \frac{1}{j-1}\,\frac{j+1}{j+1} = \frac{j+1}{-1-1} = \frac{(j+1)}{-2}$$

$$M(W(j)) = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Phi(W(j)) = \operatorname{arctg}(1) = \pi/4$$ $\quad \operatorname{arctg}(\tfrac{y}{x}) = 0 \quad \tfrac{y}{x} = 0$

Devo ottenere $M = 10$ e $\Phi = 0$:

se al numeratore avessi $a + bs$ → come ci arrivo? per tentativi

$$W(j) = \frac{(a+bj)(j+1)}{-2} = \frac{aj+a-b+bj}{-2} = \frac{(a-b)+(a+b)j}{-2}$$

$$M = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{(a+b)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2-2ba+a^2+b^2+2ba}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2+2b^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} = 10 \to a^2+b^2 = 200$$

$$a^2 + a^2 = 200 \qquad b = 10$$

$$a = \sqrt{100} = 10 \qquad a = -10$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}(y/x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a+b}{a-b}\right) = 0 \to a+b = 0 \to a = -b$$

$$b = -a$$

$$W(s) = \frac{-10+10s}{(s+1)(s^2+s+1)} = -10\,\frac{(1-s)}{(1+s)(1+s+s^2)}$$

a. realizzazione → forma canonica raggiungibile

$W(s) = \frac{+10s-10}{s^2+s+1+s+s^2+s^3} = \frac{10s-10}{s^3+2s^2+2s+1}$

d. $n=3$ e la dim min → no realizz. più piccole, sì più grandi ma non saranno minime

↑ giusto?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = (-10 \quad 10 \quad 0)$

b. analisi modi naturali

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) - 1 - 2\lambda = -2\lambda^2 - \lambda^3 - 1 - 2\lambda$

$= -\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 1 = -(1+\lambda)\underline{(1+\lambda+\lambda^2)}$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $\lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

AUTOVETTORI

$(A-\lambda_1 I)u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ $\begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ -a-2b-c=0 \end{cases}$ $a=-b$ $b=-a$ $c=-b$ $b=-c$

$u_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_2 I)u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ -1 & -2 & -2-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{3}i}{2}a + b = 0 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}b + c = 0 \\ -a - 2b - 2c - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a - \sqrt{3}ia + 2b = 0 \\ b - \sqrt{3}ib + 2c = 0 \\ -2a - 4b - 4c + c - \sqrt{3}ic = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (1-\sqrt{3}i)a + 2b = 0 \\ (1-\sqrt{3}i)b + 2c = 0 \\ -2a - 4b - (3+\sqrt{3}i)c = 0 \end{cases}$ $b = -\frac{1-\sqrt{3}i}{2}a$

$-(1-\sqrt{3}i)\frac{1-\sqrt{3}i}{2}a + 2c = 0$

$-\frac{1-3-2\sqrt{3}i}{2}a + 2c = 0$

$$c = \frac{a-2-2\sqrt{3}i\,a}{2\cdot 2} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}a$$

$$-2a-4\left(-\frac{1-\sqrt{3}i\,a}{2}\right)+(3+\sqrt{3}i)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}a\right)=0$$

$$-2a+2(1+\sqrt{3}i)a+\frac{1}{2}(\cancel{3}+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-\cancel{3})a=0$$

$$-4a+\cancel{4a}+4\sqrt{3}ia+\cancel{4a}+4\sqrt{3}ia=0 \rightarrow 8\sqrt{3}ia=0 \quad a=0$$

$$(A-\lambda_2 I)v_2=0 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ -1 & -2 & -2-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} -\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a+b=0 \\ -\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}b+c=0 \\ -a-2b-2c-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1-\sqrt{3}i}{2}a+b=0 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}b+c=0 \\ -a-2b-2c+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{3}i)a+2b=0 \\ (1-\sqrt{3}i)b+2c=0 \\ -2a-4b\underbrace{-4c+c}_{-3c}-\sqrt{3}ic=0 \end{cases}$$

$$b=-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}a$$

$$c=-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}b=\left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}a\right)$$

$$=\left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)a$$

$$=+\frac{1-3-2\sqrt{3}i}{4}a=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}a$$

$$=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}a$$

$$=\frac{\cancel{1}-3-2\sqrt{3}i}{2}a \;(-2) \qquad =(-1-\sqrt{3}i)a$$

$$\cancel{-2a-4\left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}a\right)-4\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}a\right)}$$

$$-2a-4b-3c-\sqrt{3}ic=0$$

$$-2a-4b-(3+\sqrt{3}i)c=0$$

$$-2a-4\left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}a\right)-(3+\sqrt{3}i)\left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}a\right)=0$$

$$-\cancel{2a}+\cancel{2a}-2\sqrt{3}ia+\left(\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}\sqrt{3}ia+\frac{\sqrt{3}}{2}ia-\frac{3}{2}a\right)=0$$

$$-4\sqrt{3}ia+4\sqrt{3}ia=0 \rightarrow 0=0 \qquad v_2=\begin{pmatrix} \alpha \\ -\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha \\ (-1-\sqrt{3}i)\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\alpha \\ (-1+\sqrt{3}i)\alpha \\ (-2-2\sqrt{3}i)\alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha=1 \rightarrow v_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{3}i \\ -2-2\sqrt{3}i \end{pmatrix} \qquad v_a=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad v_b=\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \det(T^{-1}) = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$(\mathrm{cof}(T^{-1}))^t = \begin{pmatrix} +2\sqrt{3}+2\sqrt{3} & -(-2\sqrt{3}-\sqrt{3}) & +(-2+1) \\ -(-4\sqrt{3}) & +(+2\sqrt{3}) & -(+2-2) \\ +2\sqrt{3} & -(-\sqrt{3}) & +(1-2) \end{pmatrix}^t$$

$-3\sqrt{3}$

$$= \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 3\sqrt{3} & -1 \\ 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^t$$

$$T = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3/2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{matrix}]\,v_1^T \\ ]\,v_2^T \\ ]\,v_3^T \end{matrix}$$

ECCITABILITÀ $v_i^T B \neq 0$

$\lambda_1 = -1 \qquad (2\ 2\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ ECC.

$\lambda_{2} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \qquad \left(\frac{3}{2}\ 1\ \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/2$ ECC

OSSERVABILITÀ $Cv_i \neq 0$

$\lambda_1 = -1 \qquad (-10\ 10\ 0)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10+10$ OSS.

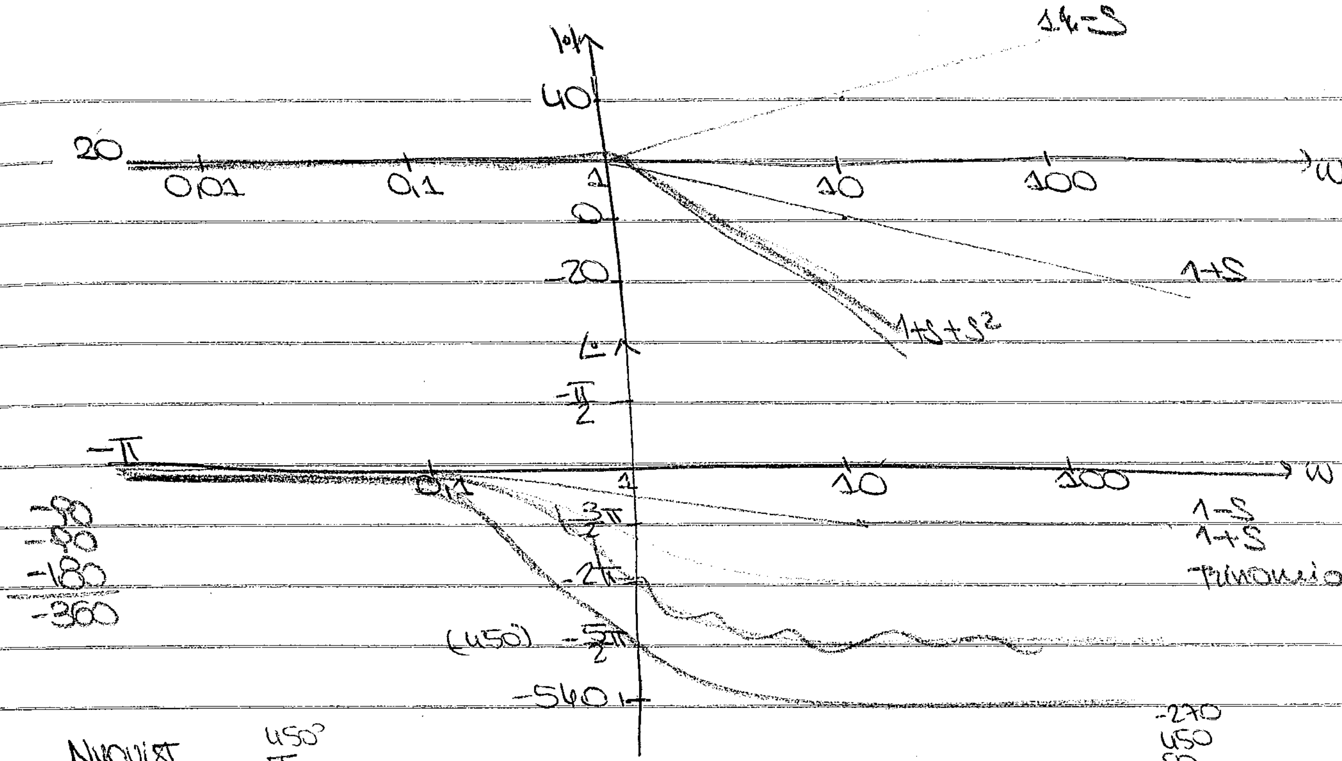
$\lambda_2 \qquad (-10\ 10\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -20-10$ OSS.

c. Bode e polare

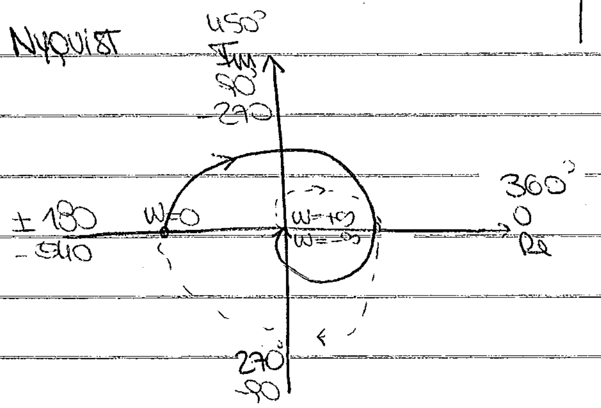
$$W(s) = 10 \frac{1-s}{(1+s)(1+s+s^2)}$$

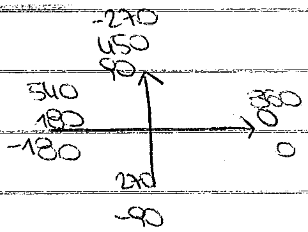
- guadagno $20\log 10 = 20\,dB$, fase $-\pi$
- NUM binomio $\tau = -1$ $\omega_n = 1$ modulo sale, fase scende $-90°$
- DEN binomio $\tau = 1$ $\omega_n = 1$ modulo scende, fase scende $-90°$

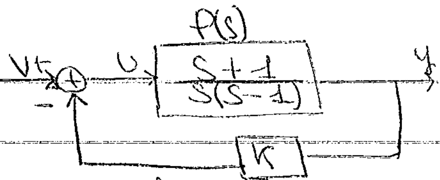
  trinomio $\xi = 0.5$ $\omega_n = 1$ modulo cunetta, fase $-180°$


|G|
40
20
0,01
0,1
1
10
100
ω
0
-20
1+S
1+S+S²
∠
-π/2
-π
-90
-90
-180
-360
-3π/2
-2π
(450) -5π/2
-540
1-S / 1+S
Trinomio

Nyquist


450°
Im
90
-270
±180
-540
ω=0
ω=+∞
ω=-∞
360°
0
Re
270°
-90


-270
450
90
540
180
-180
360
0
270
-90

② Assegnoto  esiste un valore k^* in corrispondenza del quale tra v e y si ha una risonanza infinita?

Calcolare poi la risposta forzata a $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$

Funzione di trasferimento di un sistema a controreazione è:

$$W(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)\cdot k} = \frac{\frac{s+1}{s(s-1)}}{1+\frac{k(s+1)}{s(s-1)}} = \frac{s+1}{s(s-1)}\,\frac{s(s-1)}{s(s-1)+k(s+1)} =$$

$$= \frac{s+1}{s^2-s+ks+k} = \frac{s+1}{s^2+\underbrace{(k-1)s}_{ks-s}+k} = \frac{1+s}{k\left(1+s-\frac{s}{k}+\frac{s^2}{k}\right)}$$

affinché si abbia una risonanza infinita ⊛ $\qquad k\left(1+\left(\frac{k-1}{k}\right)s+\frac{s^2}{k}\right)$

$|\xi| < 0{,}707 \qquad \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{k-1}{k}$

$\left|\frac{k-1}{2}\right| < 0{,}707 \qquad \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{k-1}{k} \rightarrow 2\xi = k-1$

$\xi = \frac{k-1}{2}$

$|k-1| < 1{,}414$

$|k| < 2{,}414$ giusto

Per esempio: $k=2 \rightarrow W(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2} = \frac{1+s}{2\left(1+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{2}\right)} \qquad \xi = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

⊛ $\xi = 0 \qquad \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{k-1}{k}$

$2\xi = k-1 \rightarrow \xi = \frac{k-1}{2}$

$\xi = \frac{k-1}{2} = 0 \qquad k = 1$

$$W(s) = \frac{1+s}{s^2+1}$$

$$U(s) = \frac{1}{s+1}$$

$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad$ Poli $s = \pm i$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Res}\left(\frac{e^{st}}{(s+i)(s-i)}, i\right) = \lim_{s\to i} \frac{e^{st}}{s+i} = \frac{e^{it}}{2i} \\ &\mathrm{Res}\left(\ \ , -i\right) = \lim_{s\to -i} \frac{e^{st}}{s-i} = \frac{e^{-it}}{-2i} \end{aligned}\right\} \rightarrow y_f(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin t$$

③ $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (0 \ \ 1) x \end{cases}$ $\tilde{A} = I + TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a. sistema TD equivalente con T=1 secondo

AUTOVALORI $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$e^{AT} = T^{-1} e^{DT} T$ con $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

~~λ_1~~

AUTOVETTORI $(A - \lambda_1 I) u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$ $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases}$ $a = b$ $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda_2 I) u_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$ $\begin{cases} 2a = 0 \\ 2a = 0 \end{cases}$ $a = 0$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A_D = e^{AT=1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} e & 1 \\ 1+e & 1+e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 & 1 \\ 1+e-1-e^{-1} & 1+e^{-1} \end{pmatrix}}$

$= \cancel{\begin{pmatrix} e-1 & 1 \\ e-e^{-1} & 1+e^{-1} \end{pmatrix}}$ $\hookrightarrow \begin{pmatrix} e & 0 \\ e & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ e-e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}7 & 0 \\ 2{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

$B_D = \int_0^1 e^{A\xi} d\xi B = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{\xi} & 0 \\ e^{\xi} - e^{-\xi} & e^{-\xi} \end{pmatrix} d\xi B = \begin{pmatrix} e^{\xi} & 0 \\ e^{\xi} + e^{-\xi} & -e^{-\xi} \end{pmatrix} \Big|_0^1 B = ⊛$

$\cancel{\left(\begin{pmatrix} e^{\xi} - \xi & \xi \\ e^{\xi} + e^{\xi} & \xi - e^{\xi} \end{pmatrix} \Big|_0^1 B = \begin{pmatrix} e-1-1 & 1 \\ 2e-2 & 1-e+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-e \end{pmatrix} \right)}$

$2e^{\xi}$

$⊛ \begin{pmatrix} e-1 & 0 \\ e+e^{-1}-1-1 & -e^{-1}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-1}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

$C_D = C = (0 \ \ 1)$

b. stabilità interna e esterna

$\cancel{W(z) = (0 \ \ 1) \begin{pmatrix} e-1 & 0 \\ e-e^{-1} & 1+e^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-e \end{pmatrix} = (0 \ \ 1) \frac{\begin{pmatrix} 1+e^{-1} & -1 \\ e^{-1}-e & e-1 \end{pmatrix}}{(e-1)(1+e^{-1}) + (e^{-1}-e)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-e \end{pmatrix}}$

$\cancel{= \frac{(e^{-1}-e \quad e-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2-e \end{pmatrix}}{e+1-1-e^{-1}-e+e^{-1}}}$ mi viene zero.

$$W(z) = C(zI-A)^{-1}B = (0 \;\; 1)\begin{pmatrix} z-e & 0 \\ e^{-1}-e & z-e^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-e^{-1} \end{pmatrix} = (0 \;\; 1)\frac{\begin{pmatrix} z-e^{-1} & 0 \\ e-e^{-1} & z-e \end{pmatrix}}{(z-e)(z-e^{-1})}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} e-e^{-1} & z-e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-e^{-1} \end{pmatrix}}{(z-e)(z-e^{-1})} = \frac{\cancel{(z-e)}(1-e^{-1})}{\cancel{(z-e)}(z-e^{-1})} = \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}$$

Polo $z=e^{-1} > 0$ non stabilità e non stabilizzabile

Esame Dicembre 2020

① Definizione RAGGIUNGIBILITÀ E INOSSERVABILITÀ, caratterizzazione e proprietà degli insiemi di tali stati CAP ⑤

L'OSSERVABILITÀ è una proprietà che riguarda il legame stato-uscita e si concretizza nell'assenza di stati indistinguibili (stati diversi a cui corrispondono le stesse uscite per ogni ingresso). Uno stato si dice inosservabile se a quello stato corrisponde un'evoluzione libera in uscita identicamente nulla (stati indistinguibili dallo stato zero).

L'insieme degli stati inosservabili $I = \{x \in \mathbb{R}^n : Ce^{At}x = 0, \forall t \geq 0\}$ coincide con il kernel della matrice di osservabilità $I = \ker\{O\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = 0 \right\}$.

Il sistema risulta essere tutto osservabile se la matrice di osservabilità ha rango pieno, in caso contrario si può procedere con una scomposizione interna e attraverso un cambio di coordinate ottenere una terna A_{11}, B_1, C_1 tutta osservabile (che caratterizza il legame forzato ingresso-uscita).

La RAGGIUNGIBILITÀ è una proprietà che riguarda il legame ingresso-stato e analizza la possibilità di ~~modificare~~ raggiungere prefissati stati e dunque modificare il comportamento dinamico del sistema. Uno stato $\bar{x}$ è detto raggiungibile a T da x_0 se esiste un $t_0 < T$ e un ingresso definito sull'intervallo $[t_0, T)$ che porta lo stato da x_0 a $\bar{x}$. ~~[illegible]~~

L'insieme degli stati raggiungibili $R(T) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \int_{\infty}^{T} e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau, u_{(-\infty,T)}\}$ coincide con il sottospazio generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità $(B \; AB \ldots A^{n-1}B)$ (immagine della matrice $(B \; AB \ldots)$)

Il sistema risulta essere tutto raggiungibile se la matrice di raggiungibilità ha rango pieno, in caso contrario si può effettuare una scomposizione interna che evidenzia una parte raggiungibile caratterizzata dalle matrici A_{11}, B_1, C_1 (che caratterizzano il legame forzato ingresso-uscita).

Con riferimento a un sistema TEMPO DISCRETO mostrare che:

a. se $\bar{x} \in Im(B\ AB \dots A^{n-1}B)$ allora può essere forzato a zero al più in n passi (è controllabile) PAG. 323 E SEGUENTI 141

Uno stato $\bar{x}$ è controllabile a T se esiste un ingresso che lo porta a zero al tempo T; per sistemi lineari stazionari sono controllabili tutti e soli gli stati raggiungibili: se infatti uno stato x_T è raggiungibile a T, essendo l'insieme degli stati raggiungibili un sottospazio dello spazio di stato invariante rispetto a A, anche lo stato $-e^{AT}x_T$ è raggiungibile → quindi esiste un ingresso u_T tale che $e^{AT}x_T + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = 0$, il che prova la controllabilità di x_T.

Nei sistemi tempo discreto questa equivalenza tra raggiungibilità e controllabilità si verifica solo se la matrice A è invertibile (no autovalori in zero).

b. se $Ker\begin{pmatrix} CA \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \{0\}$ o a zero? annullamento allora dall'uscita in evoluzione libera si può ricostruire lo stato iniziale.

La condizione di esistenza di un osservatore asintotico (/ricostruttore) è che gli eventuali autovalori inosservabili siano a parte reale negativa (dato che non si possono modificare, se sono negativi si può comunque ricostruire lo stato, anche se non si potrà assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza a zero). Se dunque il Kernel della matrice di osservabilità è nullo?, allora non ci sono stati inosservabili e possiamo assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori in modo tale che, assegnata una coppia di matrici A,C, scegliendo opportunamente una matrice G, gli autovalori della matrice A−GC coincidono con gli autovalori scelti ad arbitrio.

Risolvere con riferimento a:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Per verificare la raggiungibilità di uno stato bisogna vedere se appartiene alla matrice di raggiungibilità:

$R = \operatorname{Im}(B \ \ AB) = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dato che $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si può ottenere come combinazione lineare delle colonne di R_1, è raggiungibile

b. $C = (1 \ \ 1)$ espressione di x_0? ?

$(A-KC)$

② Definizione di STABILITÀ INTERNA E ESTERNA; condizioni e implicazioni, metodi di verifica delle condizioni CAP. ⑦

Un sistema è detto stabile internamente se a piccole perturbazioni dello stato iniziale corrispondono variazioni contenute dell'evoluzione libera.

Si consideri x_e uno stato di equilibrio (stato in cui il sistema permane con ingresso nullo), questo può essere:

- LOCALMENTE STABILE: una volta che x_e è stato perturbato nasce un moto che non si allontana troppo da x_e

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta_\varepsilon : \|x(t_0)-x_e\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x(t)-x_e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

- ASINTOTICAMENTE STABILE: oltre alla condizione precedente si verifica anche la convergenza dell'evoluzione verso x_e

$$\exists \delta_a(\varepsilon): \|x(t_0)-x_e\| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|x(t)-x_e\| = 0$$

- GLOBALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE: se x_e è stabile e $\forall k>0 \quad \|x(t_0)-x_e\|<k$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|x(t)-x_e\| = 0$$

comunque grande sia la perturbazione dello stato di equilibrio, nasce un transitorio che converge a x_e

Per i sistemi lineari stazionari le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità riguardano la limitatezza della matrice di transizione:

- semplice: $\|\Phi(t-t_0)\| < k$
- asintotica: $\lim_{t\to+\infty} \|\Phi(t-t_0)\| = 0$

Che, in termini di autovalori, si traduce in		TC	TD
	• semplice	$Re(\lambda_i^{=1}) \leq 0$	$\|\lambda_i^{=1}\| \leq 1$
		$Re(\lambda_i^{>1}) < 0$	$\|\lambda_i^{>1}\| < 1$
	• asintotica	$Re(\lambda_i) < 0$	$\|\lambda_i\| < 1$

Un criterio per lo studio della stabilità asintotica è il criterio di Routh, che, dato un polinomio, consente di stabilire se tutte le radici sono a $Re<0$; e in caso ci fossero delle radici a $Re>0$, queste saranno pari al numero di variazioni di segno dei coefficienti nella prima colonna

(criterio di Jury per il tempo discreto)

La stabilità esterna riguarda le condizioni sotto le quali a un ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata, ovvero: $\forall M \ \exists N_{x_0,M}: |u(t)|<M \Rightarrow \|y(t)\|<N_{x_0,M}$.

Si possono verificare due casi:

- STABILITÀ NELLO STATO ZERO relativa alla risposta forzata quando $x_0=0$

$$\int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < K \quad \forall t$$

- STABILITÀ IN OGNI STATO ② $\int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < K_2 \ \forall t$

① $\|\Psi(t)\| < K_1 \quad \forall t$ → limitatezza delle evoluzioni interne

In termini di autovalori: • stato zero $Re(\lambda^o_E)<0$

• ogni stato
$$\begin{cases} Re_1(\lambda^o_1) \le 0 \\ Re(\lambda^o_{>1})<0 \\ Re(\lambda^o_E)<0 \end{cases}$$

<u>Relazioni</u>

La stabilità asintotica implica tutte le altre; la stabilità esterna in ogni stato implica ovviamente quella esterna nello stato zero e implica interna

$$\begin{cases} \text{semplice se } \lambda^o \equiv \Lambda \\ \text{asintotica se } \lambda^o_E \equiv \Lambda \end{cases}$$

Assegnata la rappresentazione con lo stato $\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx \end{cases}$ si assume che esista la risposta a regime permanente all'ingresso (a gradino) $\delta_{-1}(t)$.

- mostrare che se $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$ allora, fissata una coppia (x_e, u_e) di equilibrio, x_e è asintoticamente stabile rispetto alle perturbazioni di x_e:

Per la stabilità asintotica deve risultare limitata la matrice di transizione $\Phi(t) = e^{At}$ che tende a zero solo se $\lambda_i < 0$

- collegare la stabilità asintotica globale di x_e con l'esistenza della risposta a regime permanente all'ingresso costante

La stabilità asintotica globale garantisce la convergenza allo stato di equilibrio indipendentemente dall'ampiezza della perturbazione, questo vuol dire che ci si stabilizzerà intorno a un valore di "regime", valore al quale tende la risposta al crescere del tempo indipendentemente dallo stato iniziale e in presenza di un ingresso persistente

- collegare con il valore di regime in uscita ?

- quale è il valore di guadagno in funzione delle matrici

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

è pari al valore di regime della risposta a gradino $y_f(t) = W(0)\,\delta_{-1}(t) = K\delta_{-1}(t)$

$$W(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

③ Definizione di RISPOSTA A REGIME PERMANENTE e condizioni di esistenza CAP ①

La risposta a regime permanente a un assegnato ingresso persistente è quella funzione del tempo, se esiste, intorno alla quale tende ad assestarsi la risposta al crescere del tempo, indipendentemente dallo stato iniziale:

$\forall \varepsilon, \exists T_0 : \|y(t) - y_r(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > T_0$ con T_0 tempo di assestamento

Affinché esista la risposta a regime le evoluzioni interne devono essere limitate, il sistema deve perciò essere asintoticamente stabile → la risposta a regime permanente è quella funzione che si ottiene facendo il limite per $t_0 \to -\infty$ della risposta del sistema $\lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} W(\xi) u(t-\xi) d\xi$, se una tale funzione esiste per un fissato u, diremo che questa è la risposta a regime permanente corrispondente all'ingresso fissato. $y_r = \lim_{t_0 \to -\infty} \left(C e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right)$ $\to 0$

• com'è definita e cosa rappresenta la RISPOSTA ARMONICA* PAG (69)

Per ingressi periodici puri la risposta a regime permanente è una funzione dello stesso tipo dell'ingresso con la stessa pulsazione ω ma amplificato/attenuato e sfasato di quantità che sono il modulo e la fase di $W(s)$ calcolata in $s = j\omega$. Il modulo e la fase di $W(j\omega)$ caratterizzano, al variare di ω e nell'ipotesi di stabilità della rappresentazione, il comportamento del sistema a regime per ingressi periodici puri, la $W(j\omega)$ prende il nome di risposta armonica e descrive il comportamento in frequenza di un sistema dinamico lineare stazionario e allo stesso tempo consente di dare alla funzione di trasferimento un'interpretazione fisica come guadagno del sistema
giusto?

?

• La fase di $W(j\omega) = \operatorname{arctg}(y/x)$ è una funzione dispari e rappresenta l'angolo di sfasamento con cui viene modificata la fase dell'uscita.

*Lippiello (23)

La $W(j\omega)$ è la restrizione all'asse immaginario della fne di trasferimento, caratterizza il comportamento in frequenza del sistema: fornisce informazioni su come viene modificato in ampiezza e fase, un segnale periodico puro quando passa attraverso un sistema che ha funzione di trasferimento $W(s)$ e si osserva la risposta a regime permanente.

BOH ?

- massimo ritardo con il quale un segnale periodico puro si può ripresentare in uscita se $W(s)$ ha n poli e m zeri?

- BANDA PASSANTE E MODULO ALLA RISONANZA PAG. 97

La banda passante indica la pulsazione a partire dalla quale si ha una attenuazione della risposta a regime permanente superiore a 0,707 rispetto al valore in $\omega = 0$ (-3dB rispetto a 0 dB) → nel dominio del tempo è collegata al tempo di salita t_s dalla relazione $B_3 t_s \simeq$ costante

~~Il modulo alla~~ È un indicatore della rapidità della risposta: b.p. più ampia = maggiore prontezza nella risposta.

Il modulo alla risonanza è un indicatore del "picco" della funzione modulo ed è pari al valore massimo del modulo diviso il valore del modulo in zero, indica la reattività a sollecitazioni in un certo intervallo di frequenze

Nel dominio del tempo è legato alla sovraelongazione s^* dalla relazione

$\frac{1+s^*}{M_r} \simeq$ costante $\Rightarrow 1+s^* \simeq 0{,}85\, M_r$

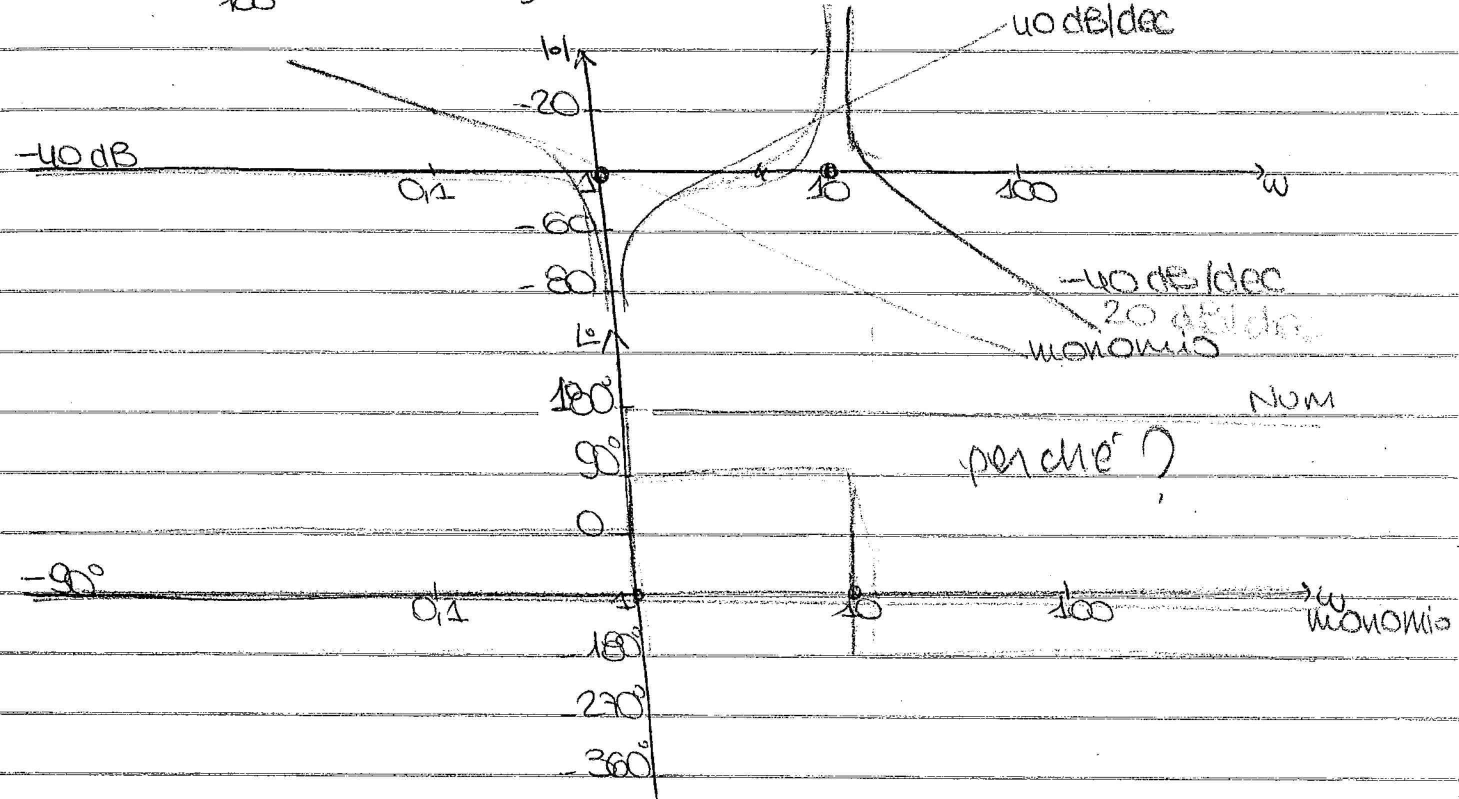
• Bode e polare $W(s) = \frac{1+s^2}{s(100+s^2)} = \frac{1}{100} \frac{1+s^2}{s\left(1+\frac{s^2}{100}\right)}$

GUADAGNO $\frac{1}{100} = -40\,dB$ modulo, fase 0°

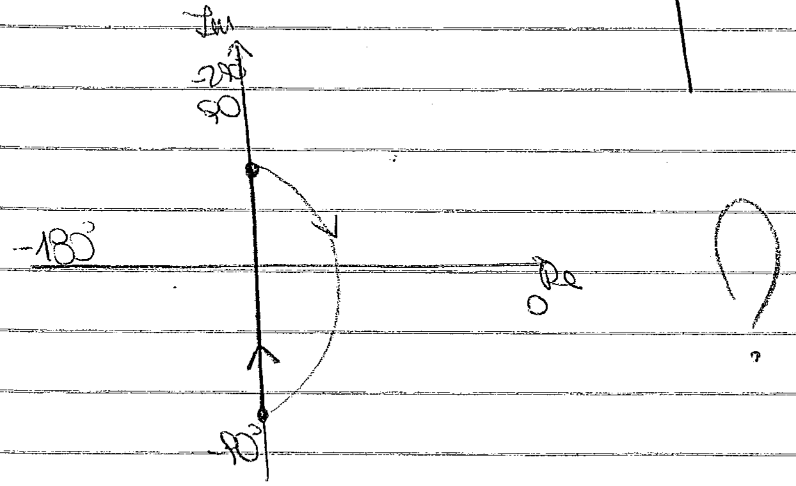
NUM. $1+s^2$ trinomio $\xi=0$, $\omega_n=1$ antirisonanza, salto $-\pi$

DEN. s monomio $-20\,dB/dec$, fase $-90°$ fisso

$1+\frac{s^2}{100}$ trinomio $\xi=0$, $\omega_n=10$ risonanza, salto $-\pi$



Nyquist



Esame gennaio 2021

(1) Descrivere il problema della realizzazione + condizioni

Assegnato un legame funzionale lineare definito dall'integrale di convoluzione con un nucleo $K(t)$ ($y(t)=\int_0^t K(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$), il problema della realizzazione studia sotto quali condizioni questo coincide con la risposta forzata di un sistema lineare, stazionario, causale, a dimensione finita.

Il problema ammette soluzione se il nucleo $K(t)$ coincide con la matrice delle risposte impulsive $W(t)$.

Dato $K(s)=\mathcal{L}[K(t)]$, condizione necessaria e sufficiente affinché per la realizzabilità è che $K(s)$ sia una matrice di funzioni strettamente proprie (se fossero funzioni proprie, attraverso la divisione tra polinomi, si può mettere in evidenza un termine costante pari alla matrice D e ricondursi al caso precedente).

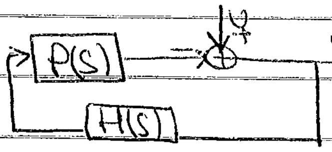
$$K(s)=\frac{b_0+b_1 s+\dots+b_{n-1}s^{n-1}}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0}+b_n=D$$

Da qui, per ispezione sui coefficienti, si possono calcolare le matrici A,B,C ottenendo realizzazioni in forma canonica raggiungibile o osservabile (nel caso SISO godono della proprietà di dualità: $A_R=A_O^T$, $B_R=C_O^T$, $C_R=B_O^T$) e sono

$$A_R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B_R=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_R=(b_0\ b_1\ \dots\ b_{n-1})$$

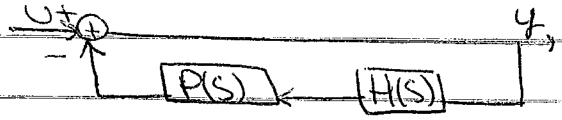
realizzazioni minime (dimensione più piccola possibile)

a. Assegnato



$P(s)=\frac{1}{s+1}$ $\quad H(s)=K\,\frac{s+1}{s+2}$

questo sistema è equivalente a



$$W(s)=\frac{1}{1+PH}=\frac{1}{1+\frac{1}{s+1}\cdot K\frac{s+1}{s+2}}=\frac{1}{1+\frac{K}{s+2}}=\frac{s+2}{s+2+K}$$

$$=D+\frac{R}{s+2+K}=\frac{Ds+(2+K)D+R}{}=s+2 \rightarrow \begin{cases} D=1 \\ 2+K+R=2 \rightarrow R=-K \end{cases}$$

$$=1-\frac{K}{s+2+K}$$

$A_R=(-2-K)$ $\quad B_R=(1)$ $\quad C_R=(-K)$ $\quad D=(1)$

La dimensione della realizzazione è $n=1$: in un sistema interconnesso la dimensione del sistema complessivo è pari alla somma delle dimensioni dei sottosistemi.
Qui entrambi i sottosistemi hanno dimensione 1, perciò ci si aspetterebbe $n=2$, poiché però si è verificata una cancellazione polo-zero $\Rightarrow$ la dim $= 1$.

Stabilità asintotica al variare di $K \in \mathbb{R}$
Routh $s+2+K \rightarrow 2+K>0$ $K>-2$
$K=-2$ solo stabilità semplice vero??

(3) Problema della discretizzazione e calcolo del modello a TD equivalente.
Dato un sistema tempo continuo si vuole ottenere un modello tempo discreto che rappresenti l'evoluzione campionata dell'uscita e dello stato quando l'ingresso è costante a tratti su intervalli della stessa ampiezza degli intervalli di campionamento sincroni con essi.
Il modello discreto descrive in modo approssimato il comportamento campionato del sistema a tempo continuo.
Per ~~poter~~ effettuare la discretizzazione si parte da un sistema tempo continuo nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t) & x(t_0)=x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

si può scrivere $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$
ponendo $t_0 = KT$ e $t=(K+1)T$ si ottiene

$$x((K+1)T) = e^{AT}x(KT) + \int_{KT}^{(K+1)T} e^{A((K+1)T-\tau)}\,d\tau\, \overbrace{Bu(KT)}^{\text{ingresso costante}}$$

ponendo $(K+1)T-\tau = \xi$:

$$x((K+1)T) = e^{AT}x(KT) + \int_0^T e^{A\xi}d\xi\, Bu(KT)$$

Assumendo l'intervallo temporale di ampiezza T coincidente con il passo unitario del sistema a tempo discreto che si considera si ha:

$$\begin{cases} x(K+1) = A_D x(K) + B_D u(K) \\ y(K) = C_D x(K) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} A_D &= e^{AT} \\ B_D &= \int_0^T e^{A\xi}\,d\xi\, B \\ C_D &= C \end{aligned}$$

a. fissato $T_s = 1$ secondo, calcolare la funzione tempo discreto equivalente a
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = (1 \ -1)$

Si possono seguire ~~le~~ le formule appena dimostrate oppure si può procedere con la discretizzazione della funzione di trasferimento:

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = (1 \ -1) \frac{\begin{pmatrix} s & +1 \\ +1 & s \end{pmatrix}}{s^2-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(s-1 \quad 1-s)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{s^2-1} = 0$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\Big|_{t=kT}\right]\right] = 0$$ → no modi simultaneamente ecc/oss

③ Risposta a regime permanente: def e condizioni

La risposta a regime permanente a un dato ingresso persistente è quella funzione ~~alla quale tende la risposta~~ intorno alla quale tende ad assestarsi la risposta al crescere del tempo, indipendentemente dallo stato iniziale (ovvero l'evoluzione interna è limitata: $Ce^{At} \to 0$ per $t \to +\infty$):

$\forall \varepsilon \ \exists T_0 : \|y(t) - y_r(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T_0$ con T_0 tempo di assestamento.

Affinché esista la risposta a regime, il sistema deve essere asintoticamente stabile (poli della fdt di trasferimento a $Re<0$)

non posso $\mathcal{L}^{-1}[\ldots]$ e poi $W = \frac{Y_r}{U}$ perché

a. $u(t) = \sin t \to y_r(t) = \underbrace{10}_{} \sin(t - \underbrace{45°}_{})$, calcolare una possibile rappresentazione del sistema $M(W(j\omega))$ $\Phi(W(j\omega))$

$\omega = 1$

$$M(W(j\omega)) = \sqrt{Re^2 + Im^2} = 10 \to Re^2 + Im^2 = 100$$

$$\Phi(W(j\omega)) = \arctan(Im/Re) = -\frac{\pi}{4} \to \frac{Im}{Re} = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \to Im = -Re$$

$(a - ja)$

$a^2 + a^2 = 100$

$2a^2 = 100 \to a = \pm\sqrt{50}$

~~$a^2 + (a-ja)^2 = 100$~~
~~$a^2 + a^2 - a - 2ja^2 = 100$~~
~~$2(1-j)a^2 - a = 100$~~ $\quad a = 100$
~~$a[(2-2j)a - 1] = 100$~~
~~$2a - 2ja - 1 = 100$~~
~~$2(1-j)a = 101$~~
~~$a = \frac{101}{2(1-j)} \frac{1+j}{1+j}$~~
~~$= 101(1+j)$~~

vedere sul Federico ma non capisco perché mette $\frac{\alpha}{1+j\omega}$?

$W(j) = a - ja \xrightarrow{a=1} 1-j$ se ~~è~~ razionalizzo al numeratore

$= \frac{(1-j)(1+j)}{1+j} = \frac{1+1}{1+j} = \frac{2}{1+j}$

perché la scrivo così ?

$a = \pm\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$W(j\omega) = \frac{\alpha}{5\sqrt{2}(1-j)} = \frac{\alpha(1+j)}{5\sqrt{2}(1-j)(1+j)} = \frac{\alpha+\alpha j}{5\sqrt{2}(1+1)} = \frac{\alpha+\alpha j}{10\sqrt{2}}$

così va bene?

$M(W(j)) = \sqrt{\frac{\alpha^2+\alpha^2}{200}} = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{200}} = \frac{\alpha}{10} = 10 \rightarrow \alpha = 100$

$\Phi(W(j)) = \arctg(-x/x) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Realizzazione $W(j\omega) = \frac{\cancel{100}^{20}}{\cancel{5\sqrt{2}}(1-s)}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow W(s) = \frac{20\sqrt{2}}{2(1-s)} = -\frac{10\sqrt{2}}{s-1}$

$A_R = (1) \quad B_R = (-1) \quad C_R = (-10\sqrt{2})$

controllare

④ $P(s)=\frac{1}{s^2-1}$ → realizzazione $A_R=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $B_R=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $C_R=(1\ \ 0)$

a. ~~perché~~ si tratta d'un problema di stabilizzazione mediante reazione dallo stato: si tratta di determinare una matrice K tale che gli autovalori della matrice A+BK coincidono con m autovalori scelti ad arbitrio, mentre i restanti n−m (che sono quelli irraggiungibili → devono essere a Re<0) coincidono con gli n−m autovalori IRR di A,B ∀K.

AUTOVALORI

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-1 \Rightarrow \lambda^2=1 \to \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$

Test Hautus posso farlo? Se no, come faccio?

$rg(A-\lambda_1 I\ \cancel{B}) = rg\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=1$ → $\lambda_1=1$ è IRR ma è a Re>0 perciò
il sistema non è stabilizzabile con reazione dallo stato

b. è possibile stabilizzare asintoticamente il sistema mediante una controreazione dall'uscita? Come?

NO, autovalore IRR a Re>0 .. ?

Il sistema è tutto raggiungibile perciò è stabilizzabile con reazione dallo stato:

la matrice dinamica è $A+BK = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(K_1\ \ K_2)$

$= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\K_1&K_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1+K_1&K_2\end{pmatrix}$

polinomio da imporre ← perché questo?

$p(\lambda)=(\lambda+1)^2=\lambda^2+2\lambda+1$

$(B\ \ AB)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad \gamma=(1\ \ 0)$ → ~~K=−γp(λ)~~

$p(A)=A^2+2A+I = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$

$K=-\gamma\, p(A) = -(1\ \ 0)\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix} = (-2\ \ -2)$

?

b. È possibile stabilizzare asintoticamente il sistema mediante controreazione dall'uscita? Come? Foto telegram

È possibile progettando un ~~controllore~~ ricostruttore che ricostruisce lo stato a partire da ingressi e uscite e applicando poi una legge di controllo al ricostruttore

Non mi piace così...

c. Costruire una controreazione dall'uscita che assegni al sistema complessivo una banda passante $B_3 > 10$

La banda passante B_3 è la pulsazione in corrispondenza della ~~qual~~ quale si ha una attenuazione di 3dB rispetto al valore 0 dB

Per ottenere $B_3 > 10$ si deve innanzitutto analizzare la funzione di trasferimento del sistema complessivo $W_F(s) = C(sI-(A+BK))^{-1}B$, tracciare il diagramma del modulo normalizzato di K e analizzare le variazioni al variare di F fino a quando si raggiunge che per $\omega = 10$ $\overline{M}(\omega) > 0.7$ PERCHÉ?

dove lo prendo?

Esame Febbraio 2021

1. MODI NATURALI

a. definizione + parametri caratteristici

Sono le evoluzioni nello spazio di stato attraverso le quali è possibile esprimere l'evoluzione libera

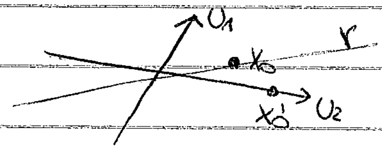
Domanda già fatta: luglio 2019

b. mostrare che l'evoluzione libera TC da x_0 rimane confinata al sottospazio generato dagli autovettori rispetto ai quali x_0 ha componente non nulla.

~~Si consideri~~

Le evoluzioni nello spazio di stato avvengono nella direzione degli autovettori con leggi temporali esponenziali $e^{\lambda_i t}$ nel caso di modi naturali aperiodici o con leggi temporali di tipo periodico (seno e coseno) inviluppate da un esponenziale nel caso di modi naturali pseudo-periodici.

Considerando lo spazio generato da due autovettori u_1, u_2



se lo stato x_0 si trova su r, la sua evoluzione sarà confinata a quella retta, se invece si considera lo stato x_0' questo evolverà soltanto lungo la retta su cui giace poiché ha componente nulla rispetto all'altro asse. Va bene?

$$x_\ell = \sum_i e^{\lambda_i t} u_i c_i$$

(2) Evoluzione libera nel caso in cui la matrice dinamica ha la forma

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: APPUNTI YOUMATH SU LIBRO

Questa matrice è in forma di Jordan con tutti gli autovalori in zero: la molteplicità algebrica pari a tre ma molteplicità geometrica uguale a due, questo vuol dire che ci saranno due blocchi: uno di ordine 1 e uno di ordine 2. La matrice esponenziale sarà una matrice che avrà sulla diagonale l'esponenziale dei singoli blocchi

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} \end{pmatrix} = \underbrace{e^{\lambda t}}_{1} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera si ottiene moltiplicando per lo stato iniziale $x_0 \Rightarrow x_l = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_0$

(3) Mostrare che una matrice che ha la proprietà di avere nulla la somma degli elementi di ogni riga ha un autovalore in zero. Corrispondente autovettore destro?

Senza perdita di generalità, si consideri una matrice quadrata di dim=2

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} \rightarrow \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -a \\ b & -b-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(-b-\lambda) + ab$$

$$= -ab - a\lambda + b\lambda + \lambda^2 + ab = \lambda^2 + (b-a)\lambda$$

$$= \lambda(\lambda + b - a)$$

AUTOVALORI $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a-b$

AUTOVETTORE DX PER $\lambda_1=0$: $(A-\lambda I)u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} ax - ay = 0 \\ bx - by = 0 \end{cases} \quad x = y \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vettore colonna con tutti 1

④ Collegamento tra modello implicito e esplicito TC.

Nel tempo continuo il modello IMPLICITO di un sistema lineare stazionario a dimensione finito è del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

e suggerisce uno schema fisico attraverso il quale realizzare il sistema impiegando sommatori, integratori, moltiplicatori per una costante.

Per passare al modello ESPLICITO si devono ricavare le equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} H(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = \Psi(t-t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

(sono la soluzione di un qualunque ⊛ sistema di eq. differenziali che governano un sistema dinamico)

Definita la funzione di matrice $I + At + \frac{At^2}{2} + \ldots = \sum_{0}^{+\inf} \frac{A^k t^k}{k!} := e^{At}$, se si deriva termine a termine si ottiene

$\frac{d}{dt} e^{At} = A(I + At + At^2 + \ldots) = Ae^{At}$ e da questo segue che $\dot{x}(t) = Ax(t)$ $x(0) = x_0$ ammette come (unica, nel caso lineare in esame) soluzione $x(t) = e^{At} x_0$.

Si possono dunque definire le matrici

$\Phi(t) = e^{At}$

$H(t) = \Phi(t)B = e^{At}B$

$\Psi(t) = C\Phi(t) = Ce^{At}$

$W(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$

⊛ si deve risolvere il problema di Cauchy del sistema di eq. differenziali

- Mostrare che, se esiste una realizzazione di $K(t)$ allora è vero che $K(t-\tau) = \overset{q \times n}{Q(t)}\,\overset{n \times p}{P(\tau)}$ con p ingressi e q uscite. Questa relazione si chiama FATTORIZZABILITÀ

Quanto asserito equivale a dire che la fattorizzabilità è CN per la realizzabilità? (Da orale)

Se $K(t)$ è realizzabile allora $K(t) = W(t) = Ce^{At}B + \overbrace{D\delta(t)}^{0}$

$K(t-\tau) = W(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B = Ce^{At}e^{-A\tau}B$ dove $C = q \times n$, $B = n \times p$

possiamo porre $Ce^{At} = Q(t)$ e $e^{-A\tau}B = P(\tau)$ e abbiamo così verificato l'espressione

La fattorizzabilità è dunque CN per la realizzabilità infatti, se, per assurdo, non fosse così, $K(t-\tau)$ non potrebbe essere scritto come $Q(t)P(\tau)$ ma questo vorrebbe dire che il nucleo che abbiamo non è uguale a $Ce^{A(t-\tau)}B$ ma ciò non è ammissibile. Va bene?

VEDERE SE VA BENE

(5) PROBLEMA DELLA MODIFICA DELLE PROPRIETÀ DINAMICHE DI UN SISTEMA lineare stazionario tempo invariante a dim finito mediante controreazione dall'uscita con ricostruzione dello stato.

a. cosa assicura il principio di separazione

Il problema della stabilizzazione mediante reazione dall'uscita sfrutta l'osservatore asintotico e un controllore statico dallo stato stimato.

Il sistema complessivo sarà stabile asintoticamente se e solo se tutti i 2n autovalori della matrice dinamica $\begin{pmatrix} A & BK \\ GC & A+BK-GC \end{pmatrix}$ sono a $Re<0$

$= \begin{pmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-GC \end{pmatrix}$.

~~Il principio di separazione~~

È stabilizzabile con reazione dall'uscita solo quando tutti gli autovalori nascosti (IR, IN) sono a $Re<0$

Il principio di separazione mette in luce come, nel determinare i 2n autovalori, il problema si sia diviso in due sottoproblemi indipendenti: gli autovalori del sistema complessivo sono quelli di $(A+BK)$ e $(A-GC)$ perciò, se il sistema è tutto R,O sarà possibile, scegliendo opportunamente le matrici K, G, fissare ad arbitrio gli autovalori del sistema di controllo.

b. È possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori solo se quelli irraggiungibili e inoss? sono a $Re<0$, questo limiterà la velocità di convergenza ma il sistema sarà stabilizzabile

e reazione dallo stato?

? come assegno la banda passante

(6) $P(s) = \frac{10}{1+s}$ $B_3 = 1$ r/sec $\rightarrow$ progettare un controllore con reazione dall'uscita che assegni la banda passante a 10 r/sec

Realizzazione di P(s) in forma canonica raggiungibile

$A=(-1)$ $B(1)$ $C=(10)$ $\begin{cases} \dot{x} = -x+B \\ y = 10x \end{cases}$

poiché $\rho=\rho=1$ il sistema è tutto raggiungibile e osservabile.

Utilizzando le formule di Ackerman

(F) $K = -\gamma\, p^*(A)$ $(B\ AB) = (1\ \ -1)$ $\gamma = -1$

$= 1 \cdot (-\lambda)$ $p(\lambda) = -\lambda$

(K) $G = p^*(A)\,\beta^T$ β^T è l'ultima colonna dell'inversa della matrice

$= \frac{-\lambda}{10}$ di osservabilità $\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}^T = (10\ \ -10)$

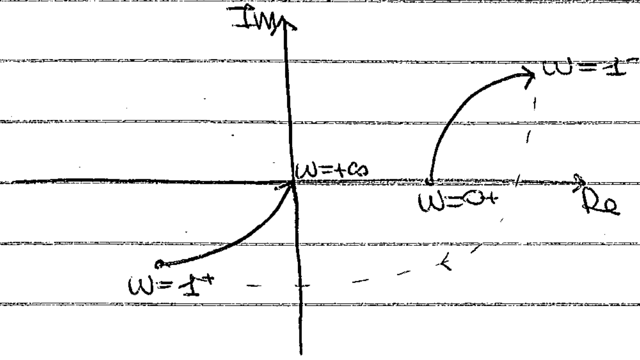
$\beta^T = \frac{1}{10}$

La matrice A+BK

?

Esame Marzo 2021

(1)

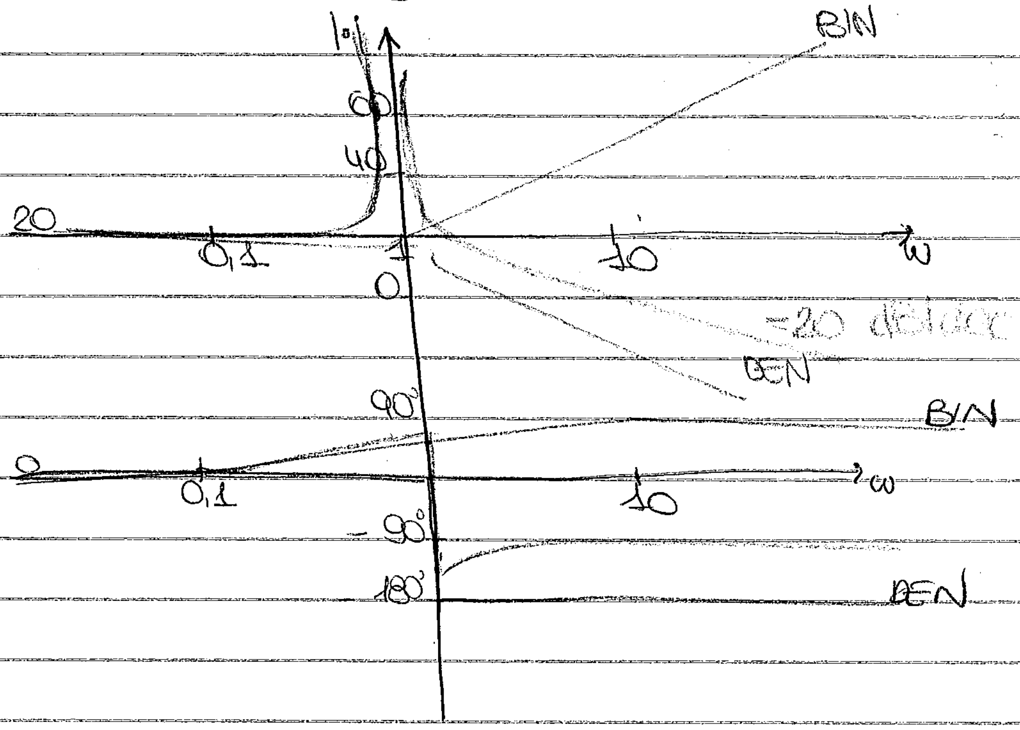


a. Tracciare i diagrammi di Bode corrispondenti e fne di trasferimento b.

c'è una discontinuità di tipo asintoto in $\omega=1$ → termine trinomio a denominatore con $\xi=0$: se ci fosse solo lui avremmo un'evoluzione confinata sull'asse reale

serve un fattore che aumenti la fase e il modulo: $1+s$

$$W(s)=\frac{1+s}{1+s^2}$$



c. calcolare la risposta all'ingresso $u(t)=e^{t-1}\delta_{-1}(t-1)$ da $x_0=(1\ \ 1)^T$

La risposta di un sistema è data dalla somma di due componenti: una libera che dipende dallo stato iniziale e non dall'ingresso, e una forzata che dipende dall'ingresso ma non da x_0

$$U(s)= \mathcal{L}\left[e^{t-1}\delta_{-1}(t-1)\right]=\left.\frac{e^{-s}}{s}\right|_{s-1}=\frac{e^{1-s}}{s-1}$$

Per la risposta libera è necessario calcolare e^{At} → per ispezione sui coefficienti di $W(s)$ ottengo una forma canonica raggiungibile

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

AUTOVALORI

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 1 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

AUTOVETTORI

$(A - \lambda_1 I)u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -ia + b \\ -a - ib = 0 \end{cases} \begin{cases} b = ia \\ -a + a = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = 0 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$(A - \lambda_2 I)u_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} ia + b = 0 \\ -a + ib = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -ia \\ -a + a = 0 \end{cases} \rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

considero $u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T \rightarrow v_a^T = (1 \ \ 0)^T \quad v_b^T = (0 \ \ 1)^T$

$e^{At} = T^{-1} e^{\Lambda t} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\omega t & e^{\alpha t}\operatorname{sen}\omega t \\ -e^{\alpha t}\operatorname{sen}\omega t & e^{\alpha t}\cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \omega = 1 \end{matrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$

$y_e(t) = e^{At} x_0 = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos t + \operatorname{sen} t \quad -\operatorname{sen} t + \cos t)$? giusto?

Per la risposta forzata

$Y_f(s) = W(s)\,U(s) = \dfrac{1+s}{1+s^2}$

(2) Stabilità interna e esterna e relazioni

già fatto: esame Dicembre 2020 o prima   VEDERE SE C'È ALTRO DA DIRE

(3) Dimostrare che il sistema tempo-discreto equivalente ad un sistema TC non può avere autovalori a $Re \leq 0$ PAG (294)

Gli autovalori ~~che provengono~~ di un sistema tempo discreto ottenuto dalla discretizzazione di un sistema tempo continuo non possono assumere valori arbitrari poiché $\lambda_i^D \Leftrightarrow e^{\lambda_i^C t} \to \lambda_i^D$ ~~e un esponenziale non può essere nullo perché λ_i^C non può essere $-\infty$, e non può essere neanche negativo~~ non possono essere nulli perché eventualmente ciò corrisponderebbe a $\lambda = -\infty$, e possono essere negativi solo in corrispondenza di autovalori complessi e coniugati poiché in questo caso l'esponenziale assume un significato diverso $e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$

(4) 6 CFU e FdA

Dato un sistema LTI che ammette la risposta a regime permanente, calcolare l'ingresso al quale corrisponde la risposta a regime $y_r(t) = CA^{-1}B$

Per ~~il~~ th del valor finale sappiamo che $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$

$sW(s)U(s)$

$CA^{-1}B = \cancel{\lim_{s\to 0}} C(\cancel{sI}-A)^{-1} B \, U(s)$

se $U(s) = -\frac{1}{s}$ l'uguaglianza è verificata.