Gennaio 2009

lunedì 17 gennaio 2022 19:52

1 (0.15)

Siano date le quattro matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = 3$$

A. Considerato il sistema a tempo continuo descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

a. determinarne i modi naturali e discuterne le proprietà di eccitabilità ed osservabilità ;

b. studiarne la stabilità (interna, esterna ed esterna nello stato zero).

B. Considerato il sistema a tempo discreto descritto dalle equazioni

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

determinarne i modi naturali e discuterne le proprietà di eccitabilità ed osservabilità .

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det = \lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = +\frac{1}{2}$

$\lambda_3 = -\frac{1}{2}$

$$\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = U^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{array}$$

$\det = 1$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; " = 0 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; " = 0 \qquad u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera ha questa forma: $x_l(t) = c_1 e^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ABBIAMO 3 MODI NATURALI APERIODICI DI CUI UNO COSTANTE (relativo a $\lambda_1 = 0$), UNO DIVERGENTE ($\lambda_2 = \frac{1}{2}$) E UNO CONVERGENTE ($\lambda_3 = -\frac{1}{2}$)

- STUDIAMO ECCITABILITÀ E OSSERVABILITÀ DEI 3 MODI

$$\lambda_1 = 0 \begin{cases} V_1 B = (1 \; -1 \; 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 & \text{NON ECC.} \\ C u_1 = (-1 \; 1 \; 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 & \text{OSS.} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \begin{cases} V_2 B = (0 \; 1 \; -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 & \text{NON ECC} \\ C u_2 = (-1 \; 1 \; 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 & \text{NON OSS} \end{cases}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} \begin{cases} v_3 B = (0 \; 0 \; 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 & \text{ECC.} \\ C u_3 = (-1 \; 1 \; 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 & \text{OSS} \end{cases}$$

$$\Lambda_E = \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \quad \Lambda_O = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}, \quad \Lambda_{E,O} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

- STUDIAMO STABILITÀ DEL SISTEMA

Il sistema non è stabile internamente né asintoticamente né semplicemente perché presenta un autoval. a parte reale positiva ($\lambda_2 = \frac{1}{2}$).

Il sistema è stabile esternamente sia nello stato $x_0 = 0$ sia $\forall x_0$ infatti sono rispettate le condizioni di stabilità esterna:

$Re(\Lambda_{OE}) < 0$ ✓

$Re(\Lambda_O^1) \leq 0$ ✓

---

1 (0.15)

Siano date le quattro matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = 3$$

A. Considerato il sistema a tempo continuo descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

a. determinarne i modi naturali e discuterne le proprietà di eccitabilità ed osservabilità ;

b. studiarne la stabilità (interna, esterna ed esterna nello stato zero).

B. Considerato il sistema a tempo discreto descritto dalle equazioni

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

determinarne i modi naturali e discuterne le proprietà di eccitabilità ed osservabilità .

$A_D = e^{At}$

$B_D = \int_0^1 \ldots$

e quando affitt.

3 (0.2)

Si traccino i diagrammi di Bode relativi alla funzione di trasferimento

$$W(s) = K\frac{(s-1)(s^2-1)}{s(s^2+1)(s-10)}$$

con $K|_{dB} = 23$.

$$W(s) = K\,\frac{(-)(1-s)(-)(1-s^2)}{s(1+s^2)(-10)\left(1-\frac{s}{10}\right)}$$

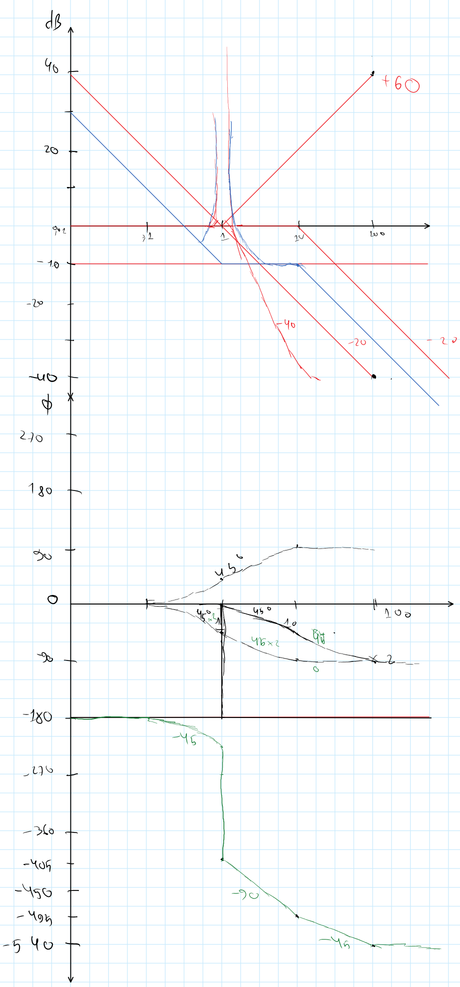
$$= -\frac{K}{10}\,\frac{(1-s)(1-s)(1+s)}{s\left(1-\frac{s}{10}\right)(1+s^2)}$$

$K_{dB} = 23$

$K_{dB} = +20\log(|K|)$

$e^{\frac{K_{dB}}{+20}} = |K| = 3{,}16$

$K_{NEW} = -0{,}316 \rightarrow K_{dB\,NEW} = -10$



2 (0.45)

Sia dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + u(t)$$

- ✓ studiarne la raggiungibilità e l'osservabilità ed effettuare, se necessario, la scomposizione di Kalman;
- ✓ fornirne una rappresentazione in forma esplicita;
- ✓ fornirne una rappresentazione nel dominio di Laplace;
- ✓ calcolarne la risposta forzata e, se esiste, quella a regime permanente, per l'ingresso

$$u(t) = 2t^2 - t + 5$$

Ritaglio schermata acquisito: 19/01/2022 13:14

$$R = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow Rg(R) = 1 \qquad \mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ C^2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Rg(O) = 1 \qquad \mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$O_x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\}$$

È NECESSARIO KALMAN PER LO STUDIO DEGLI AUTOVALORI

$$X_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} \quad \{\}$$

$$T^{-1} = \begin{array}{c} \quad\ \ X_2 \ \ X_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t \left(Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta_{-1}(t-\tau)\right)u(\tau)\,d\tau \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(\\ y(\end{cases}$$

$$(\lambda I - A) \quad \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & -3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^{u_1}$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{u_2}$$

$$\lambda = -2 \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{u_3}$$

RAPP ESPLICITA

$$) = e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} t} X(0) + \int_0^t e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} (t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

$$t) = (1\ -1\ 0)\, e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} t} X(0) + \int_0^t \left((1\ -1\ 0)\, e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \right) u(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{array}{cc} U & V^T \\ \begin{matrix} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \Bigg) \to & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_3$$

$X_1 = R \cap \lambda = \{\}$

$X_2 = R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$X_3 = \lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$X_4 = \{\}$

$$T^{-1} = \begin{array}{c} \quad\ x_2 \quad x_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & \\ & 0 & A_{33} & A_{34} \\ & & & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{23} \\ 0 & A_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ RAG. E NON OSS

$\lambda_2 = -1$ NON RAG. E NON OSS

$\lambda_3 = -2$ // // // //

$Y_f(t)$, $Y_r(t)$?? → NON ESISTE PERCHÉ NON TUTTI λ SONO $Re(\lambda) < 0$.

$$\begin{array}{c} U \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} V^T \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_f(t) = e^{At} B = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \underbrace{(1\ -1\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_1 B = 1} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{(0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_2 B = 0} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{(1\ -1\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_3 B = 0}$$

NON RICHIESTO

$$= e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (1)$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D = (1\ -1\ 0) \begin{pmatrix} s-1 & 2 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 3 & -3 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 = (1\ -1\ 0) \frac{\begin{pmatrix} (s+1)(s+2) & -2(s+2) & 0 \\ 0 & (s-1)(s+2) & 0 \\ -3(s+1) & 3(s-1)-6 & (s-1)(s+1) \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1$$

$$= \frac{s}{s-1}$$

$$(1\ -1\ 0) \begin{pmatrix} (s+1)(s+2) \\ 0 \\ -3s-3-s^2+1 \end{pmatrix} + (s-1)(s+1)(s+2) = \frac{\cancel{(s+1)}\left(s+2+(s-1)(s+2)\right)}{(s-1)\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{\cancel{(s+2)}(1+s-1)}{(s-1)\cancel{(s+2)}} = \frac{s}{s-1}$$

$$Y_f(s) = W(s)\, u(s)$$

$$u(t) = 2t^2 - t + 5 \rightarrow u(s) = 4\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{5}{s} \qquad 1 \pm \sqrt{1-20}$$

$$Y_f(s) = \frac{s}{s-1} \cdot \frac{4 - s + 5s^2}{s^{\cancel{3}\,2}} = \frac{5s^2 - s + 4}{s^2(s-1)} \rightarrow Y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s^2 - s + 4}{s^2(s-1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_{11}}{s^2} + \frac{R_{12}}{s} \quad \frac{R_{13}}{s-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{4}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{8}{s-1}\right]$$

$$-\frac{4}{s^2} \quad -\frac{3}{s} \quad + \frac{8}{s-1}$$

$$-4t \quad -3\delta_{-1}(t) \quad 8e^{-t}$$

$$R_{11} = \lim_{s \to 0} \frac{5s^2 - s + 4}{s-1} = -4$$

$$R_{12} = \lim_{s \to 0} d_s \frac{5s^2 - s + 4}{s-1} = \frac{(10s-1)(s-1) - (5s^2 - s + 4)}{(s-1)^2} = 1 - 4 = -3$$

$$R_2 = \lim_{s \to 1} \frac{5s^2 - s + 4}{s^2} = 5 - 1 + 4 = 8$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

----

domenica 12 giugno 2022 19:49

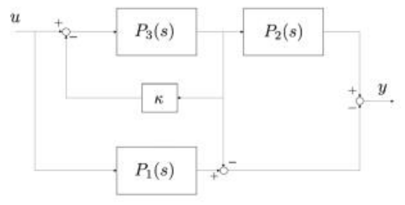


Figura 1: Grafico Problema 1

$$P_1(s) = \frac{1}{s+3}, \quad P_2(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad P_3(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \quad \kappa = 1$$

(a) individuare una rappresentazione con lo stato;
(b) calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$;
(c) studiare la stabilità interna ed esterna (nello stato zero e in ogni stato);
(d) calcolare se esiste la risposta a regime permanente a $u(t) = sen(t)$;
(e) calcolare una realizzazione della funzione di trasferimento $W(s)$.

Ritaglio schermata acquisito: 29/06/2022 11:33

RAPP. CAN. RAG.

$A = -3 \quad B = 1 \quad C = 1$

$$P_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases} \qquad u_1 = u$$

$A = -2 \quad B = 1 \quad C = -1 \quad D = 1$

$$P_2 = \frac{s+1}{s+2} = \frac{-1}{s+2} + 1 : \begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 + u_2 = -2x_2 + y_3 = -2x_2 + (1\ 0)\,x_3 \\ y_2 = -x_2 + u_2 = -x_2 + y_3 = -x_2 + (1\ 0)\,x_3 \end{cases}$$

$$P_3 : \begin{cases} \dot{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u - y_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 0)\, x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ y_3 = (1\ 0)\, x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + (1\ 0)\,x_3 \\ \dot{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = y_2 - y_1 + y_3 = -x_2 + \cancel{(1\,0)\,x_3} - x_1 + \cancel{(1\,0)}\,x_3 = (-1\ 1\ 2\ 0)\ x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \ ;\ 1 \ ;\ 2\ 0)\ x \end{cases}$$

$$u(t) = \delta(t-1) \to u(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

b) $y = y_2 - y_1 + y_3 = P_2 u_2 - P_1 u + P_3 u_3$

$$P_2 y_3 - P_1 u + \frac{P_3}{1-P_3} u$$

$$P_2 \frac{P_3}{1-P_3} u - P_1 u + \frac{P_3}{1-P_3} u$$

$$y_3 = P_3 u - P_3 y_3$$

$$y_3 = \frac{P_3}{1+P_3} u$$

$$\frac{P_2 P_3 + P_3 - P_1(1+P_3)}{1-P_3} u = \frac{P_2 P_3 + P_3 + P_1 - P_1 P_3}{1-P_3} u$$

$$\frac{\dfrac{s+1}{s(s+2)^2} + \dfrac{1}{s(s+2)} + \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{1}{s(s+3)(s+2)}}{\dfrac{s^2+2s+1}{s(s+2)}}$$

)4

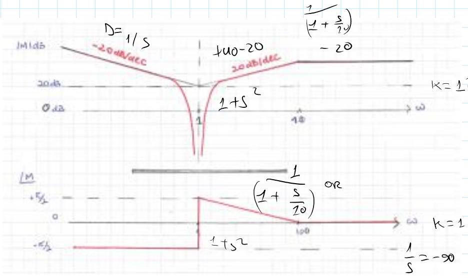


Figura 1: Grafico Problema 1

1. A partire dai diagrammi di Bode asintotici in Figura 1, calcolare
   (a) una rappresentazione con lo stato del sistema;
   (b) la risposta forzata in uscita all'ingresso $u(t) = \sin t$;
   (c) se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$.

$$W(s) = 20\frac{1+s^2}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)} = 100\frac{1+s^2}{s(10+s)} = 100\frac{1+s^2}{s(10+s)} = \frac{100s^2+100}{s(s+10)} = \frac{As+B}{s(s+10)} + D = 100$$

$$As+B+Ds^2+Ds10 = 100s^2+$$

$D = 100$
$A + 10D = 0 \rightarrow A = -1000$
$B = 100$

$$W_s = 100\frac{1-10s}{s^2+10s} + 100$$

RAPR. CON RAG;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 100 & -1000 \end{pmatrix} \quad D = 100$$

$$y_f = \mathcal{L}^{-1}\left[W(s)U(s)\right] = 100\frac{\cancel{1+s^2}}{s(10+s)\cancel{(s^2+1)}} = \frac{100}{s(10+s)} = \left(\frac{10}{s} + \frac{-10}{10+s}\right) \rightarrow y_f(t) =$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda+10 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+10)$$

$$u(t) = \sin t \rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$R_1 = \lim_{s\to 0} \frac{100}{10} = 10$$

$$R_2 = \lim_{s\to -10} \frac{100}{-10} = -10$$

YRP NON ESISTE PERCHE NON TUTTI $Re(s_i) < 0$

2. Assegnato il sistema lineare e stazionario con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

studiare le proprietà di raggiungibilità, osservabilità e stabilità al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

SIAMO IN PRESENZA DI UNA REALIZZAZIONE CANONICA OSSERVABILE
QUESTO SIGNIFICA CHE TUTTI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA HANNO MODI NATURALI OSSERVABILI

$$W(s) = \frac{s+1}{s^5 + ks^4 + 5s^3 + 5ks^2 + 4s + 4k}$$

$$R = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5k \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-k \end{pmatrix}$$

$$\det = 1 - k + 5 - 5k + 4 - 4k = 9 - 9k = 0$$

$k = 1$
1 AUTOVAL IRR

$k = 1$

$$W(s) = \frac{s+1}{s^5 \ldots} = \frac{s+1}{(s+k)(s^4+5s^2+4)} = \frac{s+1}{(s+1)(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \quad \sqrt{-4} = 2i \quad \sqrt{-1} = i$$

$$W(s) = \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1)}(s^2+4)(s^2+1)}$$

$s = -1$ È IRR. E OSS

3. Assegnato il sistema massa-molla-smorzatore rappresentato dalla seguente equazione al secondo ordine

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

in cui $y = y(t)$ denota la posizione della massa $m > 0$ all'istante $t \geq 0$ e $b, k \geq 0$ sono, rispettivamente, i coefficienti dell'attrito viscoso e della forza elastica
   (a) calcolare un modello lineare e stazionario;
   (b) scegliendo opportunamente i valori dei parametri b, k, m illustrarne i diversi comportamenti effettuando l'analisi modale.

$x_1 = \dot{y} \qquad \dot{x}_2 = x_1$
$x_2 = y$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{y} = \frac{u - ky - b\dot{y}}{m} = \frac{u}{m} - \frac{k}{m}x_2 - \frac{b}{m}x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

$+100$

$$\frac{1-10s}{s^2+10s}+100$$

$$\left(10-10\,e^{-10t}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{b}{m} & +\frac{k}{m} \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda + \frac{b}{m}\right) + \frac{k}{m}$$

$$m\lambda^2 + \lambda b + k = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

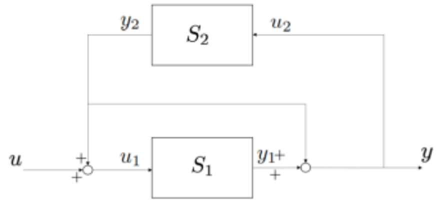


Figura 1: Grafico Problema 1

1. Assegnato il sistema in Figura 1 con

$$S_1 : W_1(s), \quad (A_1, B_1, C_1)$$
$$S_2 : W_2(s), \quad (A_2, B_2, C_2, D_2)$$

(a) calcolare una rappresentazione con lo stato;

(b) calcolare la funzione di trasferimento $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

(c) fissate $W_1(s) = \frac{1}{s}$, $W_2(s) = \frac{2s+1}{s+1}$

i. verificare la perdita di raggiungibilità o osservabilità;

ii. studiare la stabilità interna ed esterna.

Ritaglio schermata acquisito: 13/06/2022 09:51

$$S_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \qquad u_1 = y_2 + u \qquad u_2 = y = y_1 + y_2$$

$$S_2 = \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

$$S : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 (u + y_2) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (y_1 + y_2) \\ y_1 = C_1 x_1 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 (y_1 + y_2) \end{cases} \rightarrow y_2 = C_2 x_2 + D_2 (C_1 x_1 + y_2)$$

$$\downarrow$$

$$y_2 - D_2 y_2 = C_2 x_2 + C_1 D_2 x_1$$

$$y_2 = \frac{C_2 x_2 + C_1 D_2 x_1}{1 - D_2}$$

$$S: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + B_1 \left(\frac{C_2 x_2 + C_1 D_2 x_1}{1 - D_2} \right) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 \left(\frac{C_2 x_2 + C_1 D_2 x_1}{1 - D_2} \right) \\ y_1 = C_1 x_1 \\ y_2 = \frac{C_2 x_2 + C_1 D_2 x_1}{1 - D_2} \end{cases} \qquad y = y_1 + y_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 + \frac{B_1 C_1 D_2}{1 - D_2} & \frac{B_1 C_2}{1 - D_2} \\ B_2 C_1 + \frac{B_2 C_1 D_2}{1 - D_2} & A_2 + \frac{B_2 C_2}{1 - D_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} C_1 + \frac{C_1 D_2}{1 - D_2} & \frac{C_2}{1 - D_2} \end{pmatrix} x \end{cases}$$

$$y = y_1 + y_2 = S_1 (u + y_2) + y_2 = S_1 u + y_2 (1 + S_1) = S_1 u + S_2 y (1 + S_1) = S_1 u + (S_2 + S_1 S_2) y$$

$$y = \frac{S_1}{1 - (S_2 + S_1 S_2)} u \quad \rightarrow W(s) = \frac{S_1}{1 - (S_2 + S_1 S_2)}$$

$$S_1 = \frac{1}{s}$$

$$S_2 = \frac{2s+1}{s+1}$$

$$S_2 = -\frac{1}{s+1} + 2$$

$$\frac{1}{s} \Big/ 1 - \left(\frac{2s+1}{s+1} + \frac{2s+1}{s(s+1)} \right) = \frac{1}{s} \Big/ 1 - \left(\frac{2s^2 + 3s + 1}{s^2 + s} \right) = \frac{1}{s} \Big/ \left(\frac{s^2 + s - 2s^2 - 3s - 1}{s^2 + s} \right)$$

$$\frac{1}{s} : \frac{-s^2 - 2s - 1}{s(s+1)} = \frac{1}{\cancel{s}} \cdot - \frac{\cancel{s}(s+1)}{(s+1)^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{s+1}$$

S HA AVUTO UNA CANCELLAZIONE

S+1 è RAG e OSS

REALIZZIAMO S_1 ed S_2 PER STUDIARE LE PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI F. CAN. RAG.

$$A_1 = (0) \quad B_1 = 1 \quad C_1 = 1$$

$$A_2 = (-1) \quad B_2 = 1 \quad C_2 = -1 \quad D_2 = 2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 + \frac{B_1 C_1 D_2}{1-D_2} & \frac{B_1 C_2}{1-D_2} \\ B_2 C_1 + \frac{B_2 C_1 D_2}{1-D_2} & A_2 + \frac{B_2 C_2}{1-D_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} C_1 + \frac{C_1 D_2}{1-D_2} & \frac{C_2}{1-D_2} \end{pmatrix} x \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{-1} & \frac{-1}{-1} \\ 1 + \frac{2}{-1} & -1 + \frac{-1}{-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ y = \begin{pmatrix} 1 + \frac{-2}{-1} & \frac{-1}{-1} \end{pmatrix} x \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = (B \;\; AB) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det = -1 \quad \text{RAG}$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det = 0 \rightarrow \text{UN AUTOVAL INOSS}$$

$\rightarrow s = 0$ RAG, INOSS

$\rightarrow s = -1$ RAG, OSS

SISTEMA È STABILE SEMPLICEMENTE MA NON ASINTOTICAMENTE $\{ Re(\lambda_i) \leq 0 \; mg = 1$

" " STABILE ESTERNAMENTE $\forall x_0$ $\begin{cases} Re(\lambda_i^{\bar{R}, O}) < 0 \\ Re(\lambda_i^{O}) \leq 0 \; mg = 1 \end{cases}$

2. Assegnato il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

dimostrare che la risposta forzata verifica $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)U(s)\}(t)$ in cui $W(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema e $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}(s)$.

3. Assegnato il sistema $\dot{x} = Ax + b$ con $x, b \in \mathbb{R}^n$.
   (a) calcolare gli stati di equilibrio;
   (b) come si studia la stabilità di questi?

4. **Solo TdS.** È noto che il campionamento, con periodo $T > 0$, della risposta indiciale di un sistema dinamico LTI è pari a $(Tk)\delta_{-1}(k)$. Calcolare una rappresentazione con lo stato del sistema.

5. **Solo TdS.** Definizione di: costante di tempo, pulsazione naturale e smorzamento.

Ritaglio schermata acquisito: 13/06/2022 10:32

DATO IL SISTEMA IN FORMA IMPLICITA A t. continuo $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ CI RICONDUCIAMO ALLA SUA FORMA ESPLICITA

$$\begin{cases} x(t) = \overbrace{e^{A(t-t_0)}}^{\phi} x_0 + \int_{t_0}^{t} \overbrace{e^{A(t-\tau)} B}^{H} u(\tau)\, d\tau \\ y(t) = \underbrace{C e^{A(t-t_0)}}_{\psi} x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\left(C e^{A(t-\tau)} B + D\delta(t-\tau)\right)}_{W} u(\tau)\, d\tau \end{cases}$$ da cui ci ricaviamo

$\psi(t) = C e^{A(t-t_0)}$ RISPOSTA LIBERA IN USCITA

$W(t) = C e^{A(t-\tau)} B + D\delta(t-\tau)$ RISPOSTA FORZATA IN USCITA

La trasformata di Laplace $\mathcal{L}[W(t)] = C(sI - A)^{-1}B + D$ coincide proprio con $W(s)$

F. di trasferimento del sistema

3. Assegnato il sistema $\dot{x} = Ax + b$ con $x, b \in \mathbb{R}^n$

   (a) calcolare gli stati di equilibrio;

   (b) come si studia la stabilità di questi?

4. **Solo TdS.** È noto che il campionamento, con periodo $T > 0$, della risposta indiciale di un sistema dinamico LTI è pari a $(Tk)\delta_{-1}(k)$. Calcolare una rappresentazione con lo stato del sistema.

5. **Solo TdS.** Definizione di: costante di tempo, pulsazione naturale e smorzamento.

3) $A = A$, $B = 1$, $C = 0$ $\rightarrow$ x_e si definisce stato di equilibrio se

$\dot{x}(t) = f(x_e, u_e) = 0 \rightarrow f(x_e, b) = 0 \rightarrow Ax_e + b = 0 \rightarrow x_e = -\frac{b}{A}$

STAB. INTERNA LOCALE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \;\; \forall t > t_0$

" " ASINTOTICA $\forall \delta_d > 0 : \|x(t) - x_e\| < \delta_d \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \frac{b}{A}\| = 0$

$W_{-1}(k) = Tk\,\delta_{-1}(k) = Y_F \rightarrow Z[Y_F(k)] = T\frac{z}{(z-1)^k}$

4) $\delta_{-1}(k) = \frac{z}{z-1} = U(z)$

$\rightarrow W(z) = T\frac{z}{(z-1)^k}\frac{(z-1)}{z} = T\frac{z-1}{(z-1)^k}$

$Y_F = W(z)U(z) = T\frac{z}{(z-1)^k}$

es. $k = 2 \rightarrow W(z) = \frac{T}{z-1}$ $A = (1)$ $B = (1)$ $C = (1)$

Giugno 2020

domenica 5 giugno 2022 17:41

1. Assegnato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

✓ (a) individuare e studiare le proprietà dei modi naturali e loro analisi;

(b) effettuare la scomposizione di Kalman;

(c) calcolare la risposta in uscita e, se esiste, la risposta a regime permanente per $x_0 = (1\ 1\ 1)^\top$ e $u(t) = \delta_{-1}(t-2) + \cos t\,\delta_{-1}(t)$.

(d) studiare la stabilità interna ed esterna.

(e) (**Solo TdS**) Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente su intervallo di campionamento e di tenuta $T_s = 1$ secondo.

Ritaglio schermata acquisito: 05/06/2022 17:47

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda+1)\left[(\lambda+2)^2 - 1\right] + \left(-(\lambda+2) - 1\right)$$

$$\lambda+1 \left[\lambda^2 + 4\lambda + 3\right] - \lambda - 3 =$$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + \lambda^2 + 4\lambda + 3 - \lambda - 3$$

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda = 0 \qquad \lambda(\lambda^2 + 5\lambda + 6) = \lambda(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} (u_1) = 0 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = -3 \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} (u_2) = 0 \rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det = \underset{-3}{(-1-2)} - \underset{-3}{(1+2)} + (-1+1) = -6$$

$$V = U^{-1} = -1/6 \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0 \quad C u_1 = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ NON OSSERV.

$V_1 B = (1/2\ 1/3\ 1/6)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2/3$ ECC.

$\lambda_3 = -3 \quad C u_3 = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ OSS.

$V_3 B = (0\ 1/3\ 1/3)\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ ECC

$\lambda_2 = -2 \quad C u_2 = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$ OSS.

$V_2 B = (1/2\ 0\ -1/2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ NON ECC.

$$x(t) = \left(\underbrace{e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1/2\ \ 1/3\ \ 1/6)}_{\text{MOD NATURAL APER. ECC NON OSS}} + \underbrace{e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (1/2\ \ 0\ \ -1/2)}_{\text{M. N. AP. NON ECC OSS}} + \underbrace{e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ \ 1/3\ \ 1/3)}_{\text{M. N. AP. ECC. OSS}} \right) x_0$$

KALMAN

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow Rk(R) = 2 \rightarrow R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$O = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -9 & 5 \end{pmatrix} = 15 - 9 + (-10 + 4) = 0 \rightarrow Rk(O) = 2 \rightarrow N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$R \cap N \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$/R \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$/N \quad H_3 = \emptyset$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_T = TAT^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} \\ A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|l} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \end{array} \checkmark$$

~ ∩ ECC INOSS

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}$$

0 ECC INOSS

-3 ECC. OSS

-2 NON ECC OSS

$$Y_L = C(sI-A)^{-1} x_0$$

$$Y_F = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)] \to W(s) = C(sI-A)^{-1}B = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & s+2 & -1 \\ -1 & -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = (1\ -1\ 0)\frac{\begin{pmatrix} (s+2)^2-1 & (s+2) & 1 \\ (s+2)+1 & (s+1)(s+2) & s+1 \\ s+3 & (s+1)+1 & (s+1)(s+2)-1 \end{pmatrix}}{s(s+2)(s+3)}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = (1\ -1\ 0$$

Y_{RP} NON ESISTE PERCHÉ NON TUTTI I λ SONO $Re(\lambda) < 0 \to (\lambda_1 = 0)$

$$W(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$u(t) = (t-2)\,\delta_{-2} + \cos t\,\delta_2(t) \to U(s) = e^{-2s} + \frac{s}{s^2-1} \qquad \frac{(s^2-1)e^{-2s}+s}{s^2-1} \qquad \frac{1}{s+3}$$

c) STABILITÀ

INTERNA SEMPLICE? $Re(\lambda_i) \le 0$ ✓

ASINTOTICA? $Re(\lambda_i) < 0$ ✗

ESTERN. IN OGNI x_0 $Re(\lambda_i^{E,O}) < 0$ ✓ $\lambda_3 = -3$

$T_s = 1$

$$A_D = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} & 1 \\ e^{t} & e^{-2t} & e^{t} \\ e^{t} & e^{t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$B_D = \int_k^{k+1} A_D^{\xi} B \, d\xi \to \int_k^{k+1} \begin{pmatrix} e^{-t}+1 \\ 2e^{t} \\ e^{t}+e^{-2t} \end{pmatrix} \to \left|\begin{matrix} -e^{-\xi}+\xi \\ 2e^{\xi} \\ e^{\xi}-\frac{e^{-2\xi}}{2} \end{matrix}\right|_k^{k+1} = \begin{pmatrix} -e^{-(k+1)} + \cancel{k}+1 + e^{-k} - \cancel{k} \\ 2e^{k+1} - 2e^{k} \\ e^{k+1} - \frac{e^{-2(k+1)}}{2} - e^{k} + \frac{e^{-2k}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-(k+1)} + e^{-k} + 1 \\ 2e^{k+1} - e^{k} \\ \ \end{pmatrix} =$$

2. Calcolare una rappresentazione con lo stato e i diagrammi di Bode e Polare di un sistema avente un ingresso ed un'uscita sapendo che:

- la risposta a regime permanente in corrispondenza di $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$ è $y_r(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$;
- la risposta a regime permanente in corrispondenza di $u(t) = \delta_{-1}(t)$ è $y_r(t) = \frac{1}{2}$;
- il sistema ha un modo naturale con smorzamento $\zeta = \frac{1}{2}$ e pulsazione naturale $\omega_n = 1$.

$\to Y_r(t) = e^{-t}W(-1) = 0 \to W(-1) = 0 \to \frac{(s+1)N}{x} = 0$

$\to Y_r(t) = e^{0t}W(0) = \frac{1}{2} \to W(0) = \frac{1}{2} \to \frac{(s+1)}{2}$

$\to (1+s+s^2)$

$$W(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1+s}{1+s+s^2} \to \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

FORM. CAN. RAG.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$W(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1+s}{1+s+s^2}$$

NO POLI S $D_W > N_W \to$ PARTE DAL GUADAGNO

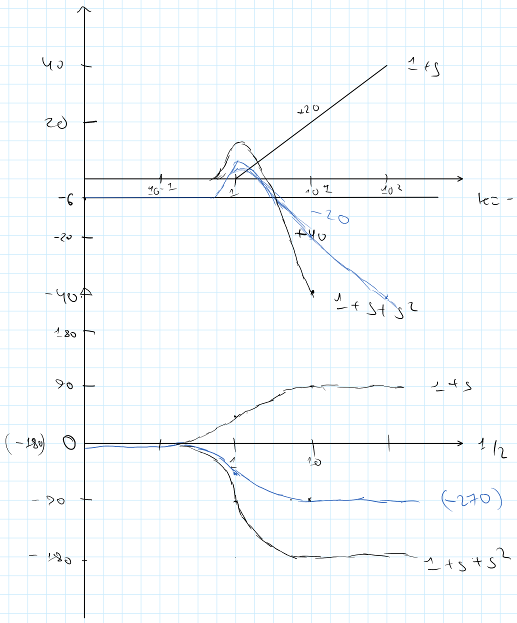
BODE

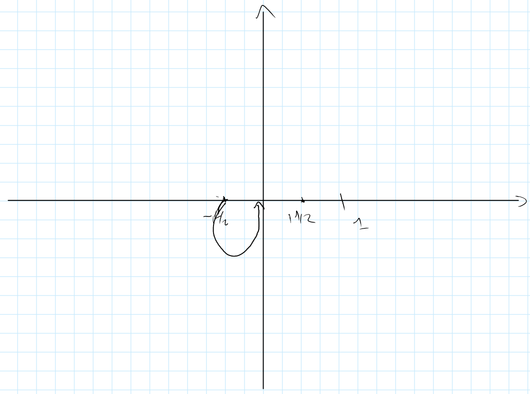
↑

$$) \begin{pmatrix} (s+2)^2 \\ 2(s+2) \\ s+3 \ldots \end{pmatrix} = \frac{(s+2)^2 - 2(s+2)}{s(s+2)(s+3)} = \frac{\cancel{(s+2)}\cancel{(s+2-2)}}{\cancel{s(s+2)}(s+3)} = \frac{1}{s+3}$$

$W(s) = \frac{1}{2} \, \frac{1+s}{1+s+s^2}$

BODE





3. (**Solo TdS 9 CFU**) Per un sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $y, u \in \mathbb{R}$, si denoti con $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$ il sottospazio degli stati inosservabili. Si dimostri che

$$\mathcal{I} \equiv \ker \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Luglio 2020

giovedì 2 giugno 2022 17:13

1)

1. Scrivere la funzione di trasferimento di un sistema lineare stazionario caratterizzato da:
   - un modo pseudoperiodico con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento $\zeta = 0,5$;
   - un modo aperiodico con costante di tempo $\tau = 1$;
   - guadagno $\kappa = -10$;
   - risposta a regime permanente ad ingresso $u(t) = \sin t$ pari a $y_r(t) = 10 \sin t$.

   Per tale funzione di trasferimento:
   (a) calcolare una realizzazione;
   (b) effettuare l'analisi dei modi naturali;
   (c) tracciare i diagrammi di Bode e polare;
   (d) discutere la dimensione della realizzazione; che dimensione ha quella calcolata? Ne esistono di dimensione maggiore? Ne esistono di dimensione minore? NO

Ritaglio schermata acquisito: 02/06/2022 17:25

$\to$ MODO: $\left(1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) = \left(1 + s + s^2\right)$

$\to (1+s)$

$k = -10$

$u(t) = \sin(t)$

$y_R(t) = 10 \sin(t) \to = |W(j\omega)| \sin(j\omega + \angle W(j\omega))$, $\angle W(j\omega) \to 0$

$\sin(t)$, $\sin(\omega t)$, $\omega = 1$

$\sqrt{a^2+b^2} = 10 \to \sqrt{b^2} = 10 \to b = \sqrt{10}$

$\tan\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \to a = 0$

SE $|W(j\omega)| = 10 \to \left| -10 \frac{x}{(1+j\omega)(1+j\omega+(j\omega)^2)} \right|_{\omega=1} = 10$

$\left| -10 \frac{x}{(1+j)(1+j-1)} \right| = 10$

$\left| -10 \frac{x}{-(1-j)} \right| = 10$

$\left| 10 \frac{x}{1-j} \right| = 10 \qquad x = 1 - j = 1 - j\omega = 1 - s$

$$W(s) = -10 \frac{1-s}{(1+s)(1+s+s^2)} = \frac{10s - 10}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \to \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

REALIZZAZIONE CANONICA RAGG dimensione $n = 3$

$\to$ È MINIMA? SI PERCHÉ È COMPLET. RAGG. E OSS.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = 10\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ANALISI MODALE

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to R_K(R) = 3 \qquad O = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -1\underbrace{(3+2)}_{-5} - 1 = -4 \to R_g(O) = 3$$

HA UN MODO NATURALE APERIODICO ASSOCIATO ALL' AUTOVALORE $\lambda = -1$

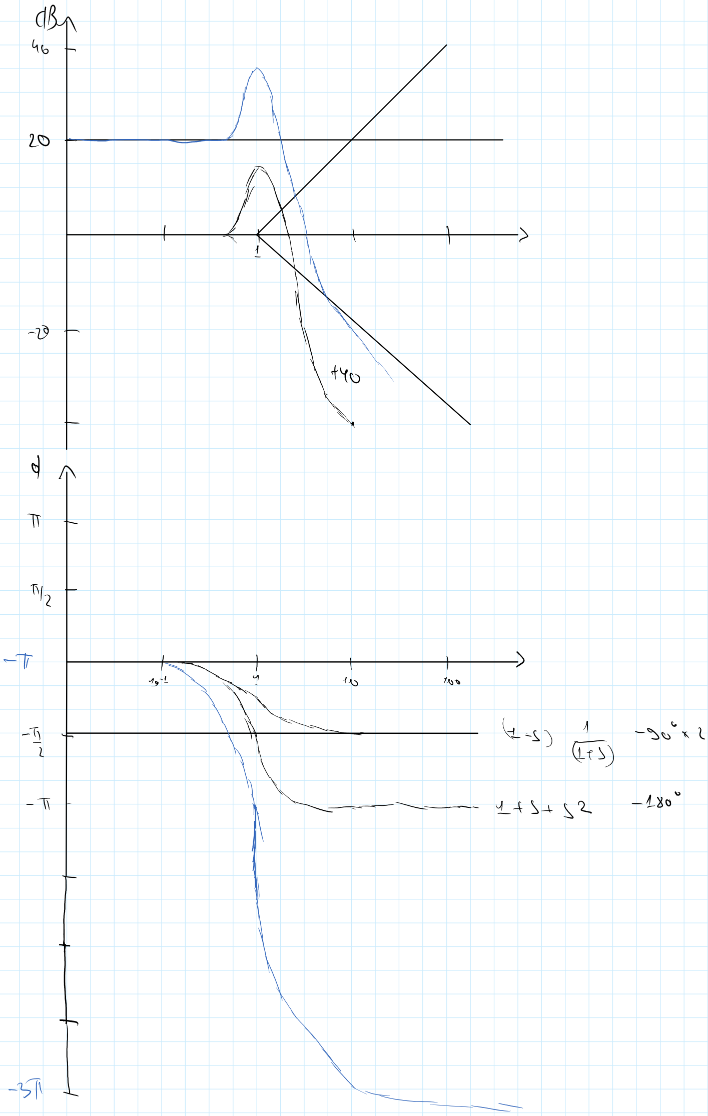
" 2 MODI NATURALI PSEUDO PERIODICI ASSOCIATI AI COMPLESSI CONIUGATI $\frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$ (s^2+s+1)

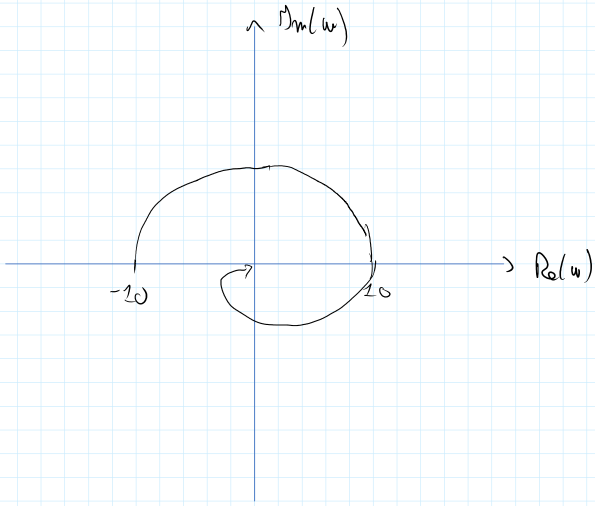
$$\boxed{W(s) = -10 \frac{1-s}{(1+s)(1+s+s^2)}}$$

$20 \log_{10} 10 = 20$

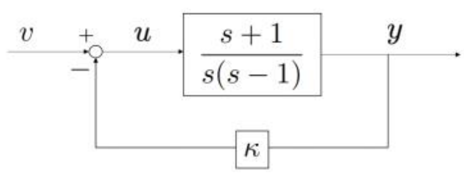
dB 40

$Im(\omega)$





2. Assegnato il sistema



esiste un valore di $\kappa \in \mathbb{R}$, sia $\kappa^\star$, in corrispondenza del quale tra v e y si ha una risonanza infinita? Per il sistema risultante si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$.

$$y = P(v - ky)$$

$$y(1+Pk) = Pv \rightarrow y = \frac{P}{1+Pk} v$$

$$W(s) = \frac{s+1}{k(s+1)+s(s-1)}$$

PER AVERE $M_r = \infty$ $W(s)$ deve avere MODO PSEUDOPERIODICO CON SMORZAMENTO $\zeta = 0$

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2+s(k-1)+k} \rightarrow k-1=0 \rightarrow k^* = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)\,U(s)] \qquad \frac{s+1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$$

$$u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t) \rightarrow U(s) = \frac{1}{s+1}$$

3. Assegnato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = x_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x$$

(a) **(Solo TdS 9 CFU)** si calcoli il sistema a tempo discreto equivalente con $T = 1$ secondo;

(b) **(Solo TdS 9 CFU)** si studi la stabilità interna ed esterna del sistema a tempo discreto ottenuto.

$$A_D = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$B_D = \int_k^{k+1} e^{A\xi} B \, d\xi = \int_k^{k+1} \begin{pmatrix} e^{\xi} & 1 \\ e^{2\xi} & e^{-\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\xi = \int_k^{k+1} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-\xi} \end{pmatrix} d\xi$$

$$C_D = C = (0 \ 1)$$

$$\left| \begin{matrix} \xi \\ -e^{-\xi} \end{matrix} \right|_k^{k+1} = \begin{pmatrix} k+1-k \\ -e^{-k-1} - e^{+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{e^{k+1}} - e^k \end{pmatrix}$$

STAB INTERNA

$$(\lambda I - A_D) = \begin{pmatrix} \lambda - e^t & -1 \\ -e^{2t} & \lambda - e^{-t} \end{pmatrix} = (\lambda - e^t)\left(\lambda - \frac{1}{e^t}\right) + e^{2t}$$

$$\lambda^2 - \lambda\left(e^t + \frac{1}{e^t}\right) + 1 + e^{2t}$$

----

venerdì 3 giugno 2022 19:27

1) PROBLEMA DELLA REALIZZAZIONE . . .

Ritaglio schermata acquisito: 14/01/2022 15:51

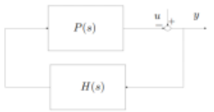


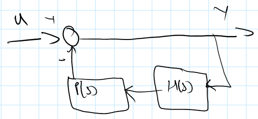
Figura 1: Esercizio 1

(a) Assegnato il sistema in Figura 1 con

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = K\frac{s+1}{s+2}$$

i. si calcoli una realizzazione del legame ingresso-uscita (u-y); quale è la sua dimensione? Si spieghi il risultato;

ii. si studi la stabilità asintotica al variare di $K \in \mathbb{R}$.



$$Y(s) = W(s)u(s)$$

$$Y(s) = u - P(s)H(s)Y(s) \to Y(s) = \frac{u}{1+PH} \to W(s) = \frac{1}{1+PH} = \frac{1}{1+\frac{K}{s+2}}$$

$$W(s) = \frac{s+2}{K+s+2} = D + \frac{R}{K+s+2} \to \frac{DK+2D+DS+R}{K+s+2} \to = s+2 \to \begin{cases} DS = s \to \boxed{D=1} \\ DK+2D+R = 2 \to K+R=0 \to \boxed{R=-K} \end{cases}$$

$$W(s) = 1 - \frac{K}{K+s+2}$$

$$D = 1$$

$$\tilde{W}(s) = -\frac{K}{K+s+2}$$

REALIZZIAMO LA FORMA CANONICA RAG.

$$A_R = (-K-2) \quad B_R = (1) \quad C_R = (-K)$$

la realizzazione ha dimensione 1 perché la dimensione del sistema complessivo è pari a 1. Infatti, nonostante nei sistemi interconnessi in serie la dimensione complessiva è pari alla somma dei sottosistemi, la dimensione è rimasta invariata per via di una cancellazione tra H e P.

STAB ASINTOTICA STUDIATA CON CRITERIO DI ROUTH

$$p(\lambda) = s + K + 2$$

$$\begin{matrix} 1 \\ K+2 \end{matrix} \to K+2 > 0 \begin{cases} K > -2 & \text{AS. STABILE} \\ K \geq 2 & \text{SEMP. STABILE} \end{cases}$$

2. Il problema della discretizzazione e il calcolo del modello a tempo discreto equivalente. Cosa rappresenta e come si calcola?

(a) Fissato il periodo di campionamento a $T_s = 1$ secondo, calcolare la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto equivalente a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = (1 \; -1) \qquad \xi = (K+1) - \tau$$

$$\begin{cases} x((K+1)T) = A_D x(KT) + B_D u(KT) \\ y(KT) = C_D x(KT) \end{cases}$$

$$A_D = e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi \, B = \int_0^1 e^{A[(K+1)-\tau]} d$$

$$C_D = c$$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = (1 \; -1)\begin{pmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \; -1)\frac{\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix}}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(s-1 \;\; 1-s)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s-1)} = \frac{s-1-s-1}{s^2-1} = -\frac{2}{s^2-1}$$

$$W(s) = \frac{-2}{s^2-1}$$

$$\downarrow$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s(s^2-1)}\right]\right] \qquad \frac{-2}{s(s^2-1)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1} + \frac{R_3}{s-1} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$$

$s \to 0 \quad R_1 = 2$

$s \to -1 \quad R_2 = -1$

$s \to 1 \quad R_3 = -1$

$$\frac{2}{s} \to 2\delta_{-1} \qquad -\frac{1}{s+1} \to -e^{-t} \qquad -\frac{1}{s-1} \to -e^{t}$$

$$\frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[2\delta_{-1} - e^{-t} - e^{t}\right] = \frac{z-1}{z}\left(\frac{2z}{z-1} + \frac{z}{z+\frac{1}{e}} + \frac{z}{z+e}\right)$$

$$W(z) = 2 + \frac{z-1}{z+\frac{1}{e}} + \frac{z-1}{z+e}$$

3. La risposta a regime permanente: definizione e condizioni di esistenza.

(a) Sapendo che la risposta a regime permanente corrispondente a $u(t) = \sin t$ è data da $y_r(t) = 10\sin(t - 45°)$, calcolare una possibile rappresentazione del sistema.

REALIZZARE

$$u(t) = \sin \omega t$$

$$y_r(t) = 10 \sin(t - 45°)$$

$$y_r(t) = |W(j\omega)| \sin(t + \angle W(j\omega))$$

$$|W(j\omega)| = \left|\frac{a}{j+b}\right| = \frac{|a|}{|j+b|} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{j^2+b^2}}$$

$$\angle W(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Im}{Re}\right) = tg(-45) = -1 = \frac{Im}{Re}$$

$$\to Im = -Re.$$

$$W(j\omega) = 10 e^{-\frac{\pi}{4}j} \to$$

$$W(j\omega) = 5\sqrt{2} - j5\sqrt{2} \to 5\sqrt{2}(1-j)$$

$$\hookrightarrow s$$

$$\frac{a^2}{j^2+b^2} = 100 \to a^2 = (j^2+b^2)100 \to a^2 = (-1+a^2)100 \to 99a^2 = 100$$

$$a = \sqrt{\frac{100}{99}}$$

$$Re^2 = 50$$

$$Re = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$$

plessivo

la

zero polo

$((k+1)-2)$ B

4. Assegnato il sistema avente funzione di trasferimento $P(s) = \frac{1}{s^2-1}$, si consideri una sua realizzazione e

   (a) immaginando di poter misurare lo stato, calcolare, se possibile, una legge di controllo dallo stato che renda il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile;

   (b) è possibile stabilizzare asintoticamente il sistema mediante una controreazione dall'uscita? Indicare come;

   (c) sapresti discutere il problema di costruire una controreazione dall'uscita che assegni al sistema complessivo una banda passante $B_3 > 10$?

FACCIAMO REALIZZAZIONE CANONICA RAG.

$$P(s) = \frac{1}{s^2-1} \sim \frac{b_1 s + b_0}{s^n + a_1 s + a_0} \rightarrow \begin{array}{ll} a_0 = -1 & b_0 = 1 \\ a_1 = 0 & b_1 = 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) DEFINIZIONE MODI NATURALI:

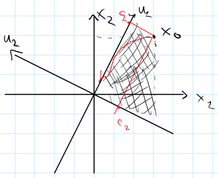
I modi naturali sono componenti dell'evoluzione libera. Si tratta di evoluzioni caratterizzate da una legge temporale esponenziale aperiodica $\{ce^{\lambda t}u\}$ o pseudoperiodica $\{me^{\alpha t}(\sin(\omega t+\phi)u_a + \cos(\omega t+\phi)u_b)\}$ che avvengono in predefiniti sottospazi dello spazio di stato associati agli autovettori.

Per specificare le leggi temporali dei modi vengono impiegati dei parametri diversi dagli autovalori. In particolare: COSTANTE DI TEMPO $\tau = -\frac{1}{\lambda_i}$ PER I MODI APERIODICI e PULSAZIONE NATURALE $\omega_n = \sqrt{\alpha^2+\omega^2}$ e SMORZAMENTO $\xi = -\frac{\alpha}{\omega_n} = \sin\phi$ PER PSEUDOPERIODICI

b) MOSTRARE CHE L'EVOLUZIONE LIBERA DI UN SIST. t.CONTINUO A PARTIRE DA STATO INIZ x_0 RIMANE CONFINATA AL SOTTOSPAZIO GENERATO DAGLI AUTOVETTORI RISPETTO A CUI x_0 HA COMPONENTE NON NULLA:

Avendo definito $x_L(t) = e^{At}x_0$ come EVOLUZIONE LIBERA possiamo mostrare con un esempio la suddetta affermazione. Poniamo $\dim(A)=2$. $\rightarrow x_L(t) = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t} u_i v_i' x_0 = (u_1\ u_2)\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2'\end{pmatrix} x_0$

$= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix}$



è possibile dimostrare graficamente che rispetto a x_0 l'evoluzione resta confinata al sottospazio generato dagli autovettori u_1, u_2

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

È in forma di Jordan con tutti gli autovalori uguali con $m_a = 2$ è formata da un blocco di ordine 2 e uno di ordine 1.

$A = \left(\begin{array}{c|c} J_{P_1}(0) & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ \ 0 & J_{P_2}(0) \end{array}\right) \rightarrow e^{At} = \left(\begin{array}{cc|c} e^{0t} & t & 0 \\ 0 & e^{0t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{0t} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$x_L(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_0$

3) PRENDIAMO $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -3 & \lambda+2 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda+2) + 3 - 3\lambda - 1 - 2\lambda - 4$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda^2 - 4\lambda + \lambda + \cancel{2} - 5\lambda - \cancel{2}$

$\lambda^3 - 8\lambda \rightarrow \lambda(\lambda^2 - 8) \rightarrow \lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = \sqrt{8}$
$\lambda_3 = -\sqrt{8}$

$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) PASSAGGIO DAL MODELLO IMPLICITO ALL'ESPLICITO

$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ $\rightarrow$ SAPENDO CHE $\dot{x}(t)$ è derivata di $x(t)$, se integriamo $\dot{x}(t)$ otteniamo $\rightarrow x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$

$\downarrow$ e conseguentemente, ponendo $u(t) = \int_{t_0}^{t}\delta(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$

$y(t) = C\left(e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) + D\int_{t_0}^{t}\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau$

$Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)\,u(\tau)d\tau$

quindi $\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \\ y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)\right)u(\tau)d\tau \end{cases}$

Sia $k(t)$ una realizzazione

Dimostrare che $k(t-\tau) = Q(t)P(\tau)$ detta FATTORIZZABILITÀ è condizione necessaria di realizzabilità

Se $k(t-\tau)$ è realizzabile allora $k(t-\tau) = W(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B = \underbrace{Ce^{At}}_{Q(t)} \underbrace{e^{-A\tau}B}_{P(\tau)}$ quindi l'uguaglianza è verificata se non lo fosse, non sarebbe fattorizzabile

5) PROBLEMA DELLA MODIFICA DELLE PROPRIETÀ DINAMICHE DI UN SISTEMA LINEARE MEDIANTE CONTROREAZIONE DALL'USCITA CHE IMPIEGA UN RICOSTRUTTORE DELLO STATO.

a) COSA CI ASSICURA IL PRINCIPIO DI SEPARAZIONE?

IL PROBLEMA IN QUESTIONE CI PERMETTE, IN PRESENZA DI UN SISTEMA TOTALMENTE RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE, CI PERMETTE DI ASSEGNARE IN MODO ARBITRARIO I $2n$ AUTOVALORI DEL SISTEMA DI CONTROLLO SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE K PER $(A-KC)$ (IMMAGINANDO DI COSTRUIRE UN OSSERVATORE AS. DELLO STATO) e F PER $(A+BF)$ (IMMAGINANDO DI ASSEGNARE GLI AUTOVALORI CON REAZIONE DALLO STATO).

b) IL SISTEMA SARÀ STABILE ASINTOTICAMENTE SE GLI AUTOVALORI IRRAGGIUNGIBILI E INOSSERVABILI DEL SISTEMA SONO A REC0

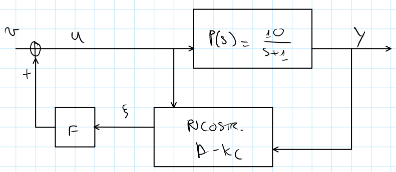
Sia $A = \begin{pmatrix} A & BF \\ KC & A+BF-KC \end{pmatrix}$ DEL SISTEMA IN QUESTIONE! $TAT^{-1} = \bar{A} = \begin{pmatrix} A-KC & 0 \\ KC & A+BF \end{pmatrix} \rightarrow \det\left((A-KC)(A+BF)\right)$ dimostrazione che i $2n$ autovalori sono in queste sottomatrici!

6)

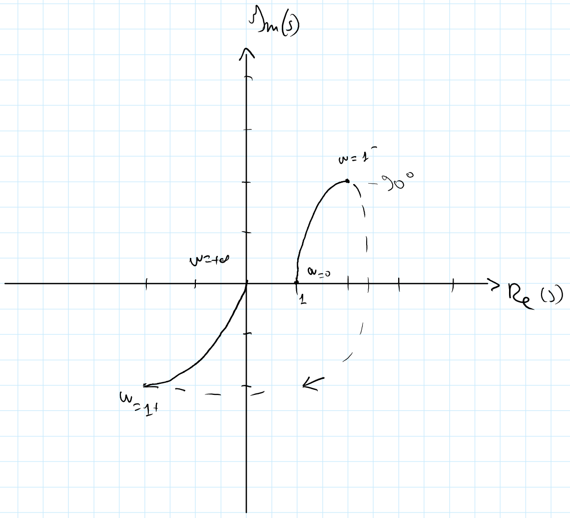
$P(s) = \dfrac{10}{s+1}$

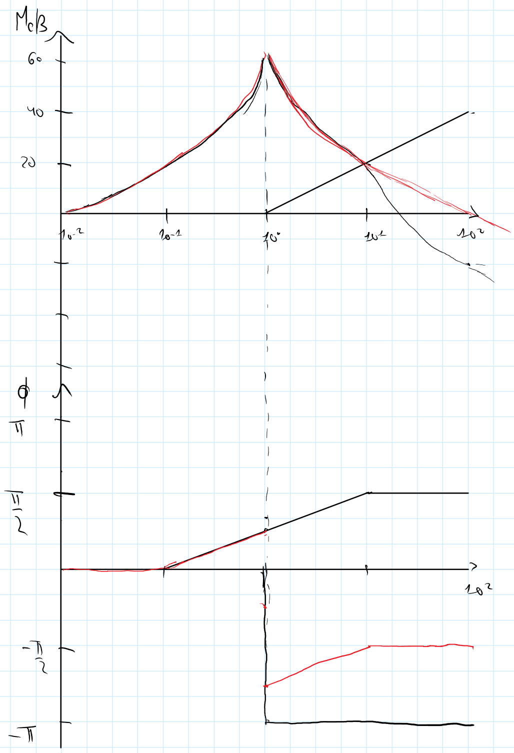
$B_3 = 1 \ \dfrac{r}{s}$

determinare F e K che assegnino $B_3 = 10 \ \dfrac{r}{s}$



Marzo 2021
venerdì 11 marzo 2022 20:29





DISCONTINUITÀ IN $\omega = 1 \rightarrow \frac{N}{1+s^2}$

È NECESSARIO CHE $N = 1+s$ ALTRIMENTI L'EVOLUZIONE SAREBBE TUTTA SU $Re(s)$, quindi...

$$W(s) = \frac{1+s}{1+s^2}$$

3) CALCOLARE LA RISPOSTA (LIBERA E FORZATA) AD INGRESSO $\begin{cases} u(t) = e^{(t-1)}\delta_{-1}(t-1) \\ x_0 = (1\ 1)^T \end{cases}$

RISPOSTA FORZATA

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)] \qquad Y(s) = \frac{1+s}{1+s^2}\frac{e^{-s}}{s-1} = \frac{e^{-s}(1+s)}{(s-1)(1+s^2)}$$

$$U(s) = \mathcal{L}[e^{(t-1)}\delta_{-1}(t-1)] = e^{-1s}\frac{1}{s-1} = \frac{e^{-s}}{s-1}$$

TIME SHIFTING PROPERTY

RESIDUI

$$Y_F(s) = \frac{R_1}{s-1} + \frac{R_2}{s+j} + \frac{R_3}{s-j}$$

$$R_1 = \lim_{s\to 1}(s-1)F(s) = \lim_{s\to 1}\frac{e^{-s}(1+s)}{1+s^2} = \frac{2}{2e} = \frac{1}{e}$$

$$R_2 = \lim_{s\to -j}(s+j)F(s) = \lim_{s\to -j}\frac{e^{-s}(1+s)}{(s-1)(s-j)} = \frac{e^{+j}(1-j)}{2j(1+j)} = \frac{e^{j}\cancel{(1-j)}}{-2\cancel{(1-j)}} = -\frac{e^{j}}{2}$$

$$R_3 = \lim_{s\to j}(s-j)F(s) = \lim_{s\to j}\frac{e^{-s}(1+s)}{(s-1)(s+j)} = \frac{e^{-j}(1+j)}{2j(j-1)} = \frac{e^{-j}\cancel{(1+j)}}{-2\cancel{(1+j)}} = -\frac{1}{2e^{j}}$$

$y_F(t) = 1 \dots e^{t}$

$2s(s-1) \qquad -2(\cancel{1+}3) \qquad 2e^3$

$$Y_f(s) = \frac{\frac{1}{e}}{s-1} - \frac{\frac{e^3}{2}}{s+3} - \frac{\frac{1}{2e^3}}{s-3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = (e^{-1} \cdot e^{t}) + \left(\frac{e^3}{2} \cdot e^{-3t}\right) + \left(-\frac{e^{-3}}{2} e^{3t}\right)$$

$$e^{t-1} + \frac{1}{2} e^{3(1-t)} - \frac{1}{2} e^{3(t-1)} = e^{t-1} + \frac{1}{2} e^3 \left(e^{1-t} - e^{t-1}\right)$$

RISPOSTA LIBERA

$Y_L(t) = C\, e^{At} x_0$

CALCOLIAMO FORMA CANONICA RAGG.

da $W(s) = \dfrac{1+s}{1+0s+s^2}$ $\quad A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad C_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

$a_0 = 1 \quad b_0 = 1$
$a_1 = 0 \quad b_1 = 1$

$x(1\ 1)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Y_L(s) = C(sI-A)^{-1} x_0 \to (1\ 1)\frac{\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}}{s^2+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(1\ 1)\begin{pmatrix} s+1 \\ s-1 \end{pmatrix}}{s^2+1} = \frac{s+1+s-1}{s^2+1} = \frac{2s}{s^2+1}$$

$$(sI-A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix} \to (sI-A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}}{s^2+1}$$

$$Y_L(s) = \frac{2s}{s^2+1} = \frac{1}{s+j} + \frac{1}{s-j} \qquad \mathcal{L}^{-1}[Y_L(s)] = e^{-jt} + e^{jt} = \cos(t) \cancel{- i \sin(t)} + \cos(t) \cancel{+ i \sin(t)}$$
$$= 2\cos(t)$$

$$Y_F(t) = e^{t-1} + \frac{1}{2} e^3 \left(e^{1-t} - e^{t-1}\right)$$

$$Y_L(t) = 2\cos(t)$$

4) CALCOLARE, SE ESISTE, Y_{RP} con $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$

Y_{RP} PER ESISTERE DEVE AVERE $\begin{cases} Re(\lambda_i) < 0 & \forall \lambda_i \text{ OSSERVABILE} \\ \begin{cases} Re(\lambda_i)_{=1} \le 0 \\ Re(\lambda_i)_{>1} < 0 \end{cases} & \forall \text{ gli altri } \lambda_i \end{cases}$ $\to$ POICHÉ $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = Re(0)$

QUINDI $m_g > 1 \to Y_{RP}$ NON ESISTE

- DEFINIZIONE DI STABILITÀ INTERNA ED ESTERNA e LE RELAZIONI TRA DI ESSE

Un sistema su cui agisce un ingresso costante fissato u e in presenza di uno stato x_e si definisce in condizioni di equilibrio se il sistema, trovandosi in quello stato x_e, vi permane nel tempo

Un sistema si dice stabile internamente semplicemente se sono soddisfatte $\begin{cases} Re(\lambda_i) < 0 & m_g > 1 \\ Re(\lambda_i) \le 0 & m_g = 1 \end{cases} \forall \lambda_i$

" " si dice stabile internamente asintoticamente se ha $Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall \lambda_i$ indipendentemente dalla m_g

= = si dice stabile esternamente in $x_0 = 0$ se ha $Re(\lambda_i^{e,o}) < 0$ $\forall \lambda_i$

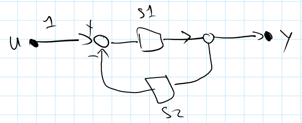
= = si dice stabile esternamente $\forall x_0$ se ha = = = $\cup \begin{cases} Re(\lambda_i^o) \leq 0 & mg = 1 \\ Re(\lambda_i^o) < 0 & mg > 1 \end{cases} \forall \lambda_i$

SE UN SISTEMA È STABILE INTERNAMENTE ALLORA QUESTO IMPLICA LA STABILITÀ ESTERNA E STAB. ESTERNA $\forall x_0$ IMPLICA STAB. ESTERNA IN $x_0 = 0$.

- DIMOSTRARE CHE IL SISTEMA A TEMPO DISCRETO EQUIVALENTE AD UN SIST. T. CONTINUO NON PUÒ AVERE $Re(\lambda_i) \leq 0$

Un sistema a t. discreto ottenuto dalla discretizzazione di un sistema a t. continuo equivalente non può assumere autovalori arbitrari, come ad esempio il valore nullo poiché sussiste quest equivalenza fra $\lambda_i^d = e^{\lambda_i T}$ e questo implica che eventuali modi naturali a cui sono associati nel t. discreto siano nulli. infatti $e^{At} = \sum e^{\lambda_i T} u_i v_i' = A_D = \sum \lambda_i^d u_i v_i'$

Inoltre possono essere negativi solo se corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi e coniugati ciò comporta l'eventuale presenza di modi alternanti necessariamente a coppie



$P_1 = u S_1$ $\qquad Y = \dfrac{u S_1}{1 + S_1 S_2}$

$D = 1 + S_1 S_2$

$D_1 = 1$

PER CALCOLARE UNA RAPPRESENTAZIONE CON LO STATO DOBBIAMO INNANZITUTTO TROVARE UNA REALIZZAZIONE DEL SISTEMA

$\dfrac{s+k}{s+1} \qquad \dfrac{k-1}{s+1} + 1 \qquad \dfrac{1}{s(s+2)}$

$a_0 = 1 \qquad A = (1)$

$b_0 = k-1 \qquad B = (1)$

$C = (k-1)$

$D = 1$

$a_0 = 0 \quad b_0 = 1$

$a_1 = 2 \quad b_1 = 0$

$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}$

$S_1 = \dfrac{s+k}{s+1}$

$S_2 = \dfrac{1}{s(s+2)}$

$$\frac{Y}{u} = \frac{\frac{s+k}{s+1}}{1 - \frac{s+k}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{s(s+2)(s+k)}{s(s+1)(s+2) + (s+k)} = \frac{s^3 + s^2(k+2) + 2ks}{s^3 + 3s^2 + 3s + k}$$

$\| $

$W(s)$

CANCELLAZ. ZERO POLO $s = 1$

NON È PROPRIA

$\rightarrow \dfrac{As^2 + Bs + C}{s^3 + 3s^2 + 3s + k} + D$

REALIZZIAMO

$b_0 = -k \qquad a_0 = -k$

$b_1 = 2k-3 \qquad a_1 = 3$

$b_2 = k-1 \qquad a_2 = 3$

$$As^2 + Bs + C + Ds^3 + D3s^2 + 3Ds + kD = s^3 + s^2(k+2) + 2ks$$

$$\begin{cases} D = 1 \\ A + 3D = k+2 \rightarrow A = k-1 \\ B + 3D = 2k \rightarrow B = 2k-3 \\ C + kD = 0 \quad C = -k \end{cases}$$

$$W(s) = \frac{s^2(k-1) + s(2k-3) - k}{s^3 + 3s^2 + 3s + k} + 1$$

FORMA CAN. RAG.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -k & 2k-3 & k-1 \end{pmatrix} \quad D = 1$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k & 3 & \lambda+3 \end{pmatrix}$$

$\lambda(\lambda(\lambda+3) + 3) - k$

$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + k = 0 \rightarrow$ gli autovalori del sistema si trovano risolvendo questa equazione

STUDIAMO LA STABILITÀ CON ROUTH

1	3
3	k
k-9	

IL SISTEMA È AS. STABILE PER

$\begin{cases} -\dfrac{k-9}{3} > 0 \rightarrow k < 9 \end{cases} \rightarrow 0 < k < 9$

$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$D = 1$

$$\begin{matrix} 3 & k \\ -\frac{k-9}{3} & \\ k & \end{matrix}
\qquad
\begin{cases} -\frac{k-9}{3} > 0 \to k < 9 \\ k > 0 \qquad k > 0 \end{cases} \to 0 < k < 9$$

LA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE ESISTE SE $\begin{cases} Re(\lambda_i^0) < 0 \\ Re(\lambda_i^x)_1 \leq 0 \\ Re(\lambda_i^x)_{>1} < 0 \end{cases}$

AD ESEMPIO POSTO $k=1$ ABBIAMO 3 AUTOVALORI in $\{-1\}$

INFATTI $(\lambda+1)^3 \longrightarrow W(s) = \dfrac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+3s+1}$

sia $u(t) = \delta_{-1}(t-1)\sin(t)$

$$Y_{RP} = |W(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(W(j\omega)))$$

$\omega = 1$

$$Y_{RP} = \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(t+0{,}46)\,\delta_{-1}(t-1)$$

$$W(j1) = \frac{j^3+3j^2+2j}{j^3+3j^2+3j+1} = \frac{-j-3+2j}{-j-3+3j+1} = \frac{j-3}{(2j-2)}\frac{(-2j-2)}{(-2j-2)}$$

$$= \frac{+2+4j+6}{+4+4} = \frac{4j+8}{8} = \frac{2+j}{2} = 1 + \frac{j}{2}$$

$$|W(j)| = \sqrt{1+\tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi(W(j)) = \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{2}\right) \sim 0{,}46$$

- DISCRETIZZAZIONE CON $k=2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = 1$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & e^t & 1 \\ 1 & 0 & e^t \\ e^{-2t} & e^{-3t} & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t = 1$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-3t} & -\frac{3}{2}(1+e^t) \\ 0 & e^t & 1 \\ 1 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}(1+e) \\ 1 \\ e \end{pmatrix}$$

$$A_D = e^{At} \longrightarrow A_D = \begin{pmatrix} 1 & e^t & 1 \\ 1 & 1 & e^t \\ e^{-2t} & e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$B_D = \int_0^1 e^{At}\, d\xi\, B$$

$$C_D = C \qquad \xi = (k+1) - 2$$

$$D_D = D$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & e^\xi & 1 \\ 1 & 1 & e^\xi \\ e^{-2\xi} & e^{-3\xi} & e^{-3\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\xi \qquad B_D = \begin{pmatrix} 1 \\ e-1 \\ -\frac{1}{3e^3} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ e^\xi \\ e^{-3\xi} \end{pmatrix} d\xi = \left|\begin{matrix} \xi \\ e^\xi \\ -\frac{e^{-3\xi}}{3} \end{matrix}\right|_0^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ e-1 \\ -\frac{e^{-3}}{3} - 1 \end{pmatrix}$$

2) RAGGIUNGIBILITÀ

- Uno stato $\bar{x}$ di un sistema si dice RAGGIUNGIBILE al tempo $\bar{t}$ dallo stato iniziale x_0 se esiste un $t_0 < \bar{t}$ e un ingresso u sull'intervallo $(t_0, \bar{t})$ che porta x_0 a $\bar{x}$. Ovvero $\exists\, t_0 < \bar{t},\ u(t_0, t)$ t.c. $\bar{x} = \varphi(\bar{t}, t_0, x_0, u)$
- A partire dalla rappresentazione esplicita con lo stato di un sistema:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau$$, posto $x_0 = 0$ otteniamo che

INSIEME STATI RAGGIUNGIBILI $R(\bar{t}) = \bar{x} = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau$ che è riconducibile a

$\longrightarrow \operatorname{Im}(B\ AB \ldots A^{n-1}B)$ sottospazio generato da colonne linearmente indipendenti che prende nome di MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ R.

se $\rho(R) = n$ allora il sistema è COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

altrimenti ($m < n$) è possibile definire $T^{n \times n}$ non singolare che definisce un cambio di base tale da generare una realizzazione che evidenzia due sottosistemi, uno completamente raggiungibile e uno no.

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \check{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

dove
$$T^{-1} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \text{BASE } R & \text{COMPLET.} \end{array} \right) \\ \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \end{array}$$

Luglio 2021

giovedì 17 marzo 2022 17:54

1) $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s - \frac{s^2}{\omega_n}$

- MODO PSEUDO PERIODICO con $\omega_n = 2$ e $\zeta = \frac{1}{2}$ $\qquad 1 + \frac{s^2}{4} + \frac{1}{2}s$

MODO APERIODICO con $\tau = 1$ $\qquad 1 \pm s\tau \qquad 1 \pm s$

$k = 1 \rightarrow W(0) = 1$

$W(s) = \dfrac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{4}\right)}$

$\begin{cases} y_n(t) = 0 \\ u(t) = e^t \delta_{-1}(t) \end{cases} \rightarrow y_R(t) = e^t W(1) = 0$

$\downarrow$

$W(1) = 0$

numeratore ci deve essere $1-s$

a) REALIZZAZ.

$W(s) = \dfrac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{4}\right)} = -\dfrac{s-1}{\frac{1}{4}(1+s)(s^2+2s+4)} = \dfrac{4-4s}{s^3+3s^2+6s+4}$

$a_0 = 4 \quad b_0 = 4$

$a_1 = 6 \quad b_1 = -4$

$a_2 = 3 \quad b_2 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

b) ANALISI MODI NATURALI

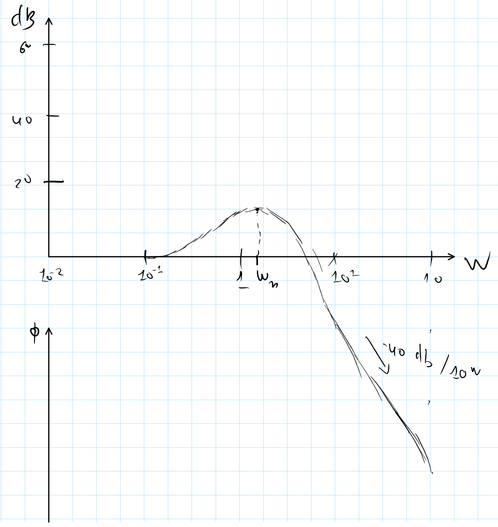
$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \rho_R = 3 \qquad O = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 16 & 24 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow -2+6+4 = 0 \rightarrow \rho_O = 2$

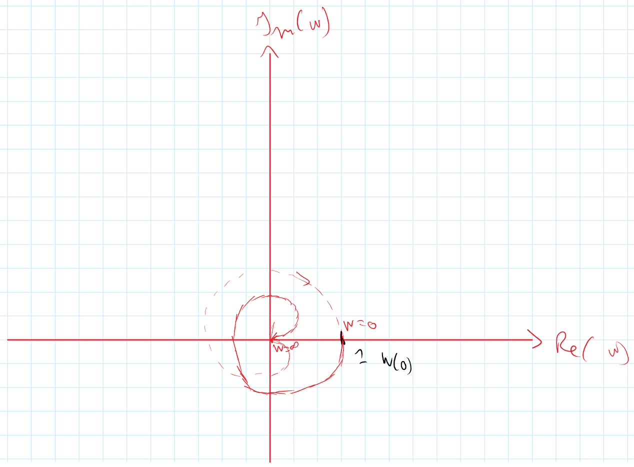
ABBIAMO UN MODO NATURALE APERIODICO ASSOCIATO ALL'AUTOVALORE REALE $\lambda = -1$

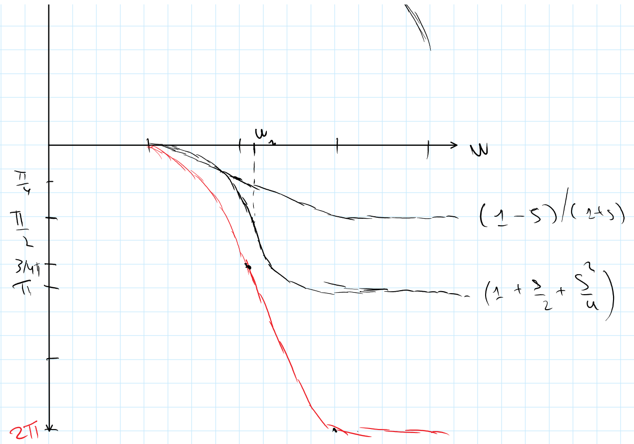
E UN " " PSEUDOPERIODICO ASSOCIATO A DUE AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI

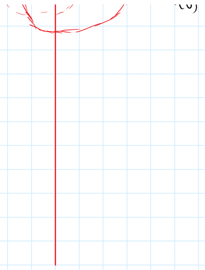
$(\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0) \rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 3j$

c) BODE E NYQUIST $\qquad W(s) = \dfrac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{4}\right)}$

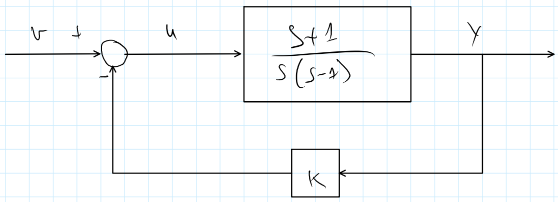








2)



$$Y = P(s)u(s) = P(s)(v - kY)$$

$$Y = Pv - PkY \rightarrow Y(1+Pk) = Pv$$

$$Y = \frac{Pv}{1+Pk}$$

$$W(s) = \frac{\frac{s+1}{s(s-1)}}{1+k\frac{s+1}{s(s-1)}} = \frac{\frac{s+1}{\cancel{s(s-1)}}\cdot \cancel{s(s-1)}}{s(s-1)+k(s+1)} = \frac{s+1}{s^2+s(k-1)+k}$$

$$k=1 \rightarrow W(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$$

calcolare un valore k tale per cui $M_r = \infty$

$M_r = \frac{M_{max}}{M(0)}$ PER ESSERE INFINITO CI DEVE ESSERE SMORZAMENTO $\zeta = 0 \rightarrow k-1=0$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)u(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\cancel{s+1}}{s^2+1}\,\frac{1}{\cancel{s+1}}\right] = \left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$$

$$u(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$$

3)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \;\; 0 \;\; -1)\,x$$

$$R = (B \;\; AB \;\; A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 1(-3) - 2(-2) + 2(-6)$$

$$-3 + 4 - 12 = -11 \quad \checkmark \quad R_g = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow R_g = 1 \rightarrow \mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

KALMAN

$$H_1 = R \cap \mathcal{I} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\}$$

$$H_2 = R = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

$$H_3 = \mathcal{I} = \{\}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & & A_{24} \\ & & A_{33} & A_{34} \\ & & & A_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$H_2 = OS = \{1\}$

$H_3 = M = \{\}$

$H_4 = \{\}$

x_4 λ_3 A_{34} A_{44}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{A} = T A T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ -1 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ RAG INOSS

$\lambda_2 = 1$ RAG INOSS

$\lambda_3 = -1$ RAG OSS

STABILITÀ INTERNA

NON È STABILE INTERNAMENTE PERCHÈ NON HA $\begin{cases} Re(\lambda)_{>1} < 0 \\ Re(\lambda)_{=1} \leq 0 \end{cases}$

È STABILE ESTERNAMENTE $\forall$ STATO INIZIALE

HA $Re(\lambda_3^0) < 0$ UNICO λ RAG E OSSERVABILE

$$W(s) = (1\ 0\ {-1}) \begin{pmatrix} s & 1 & -1 \\ -3 & s-1 & 2 \\ -1 & 1 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\,0\,1) \frac{\begin{pmatrix} s^2-s-2 & -s-2 & s+1 \\ 3s-2 & s^2-1 & -2s-3 \\ s-4 & -s-1 & s^2-s+3 \end{pmatrix}}{s^3-s^2+2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} s^2+s+2 \\ -2s^2+3s \\ 3s-2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{s^2+s+2+3s-2}{s^3-s^2+2} = \frac{s^2+4s}{s^3-s^2+2}$$

$$= \frac{s(s+4)}{(s+1)(s^2-2s+2)}$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s} \right]_{t=kT} \right] \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \frac{s(s+4)}{(s+1)(s^2-2s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{(s+1)(s-1+j)(s-1-j)} \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3/5}{s+1} + \frac{B}{s-1+j} + \frac{C}{s-1-j} \right]$$

$T=1$

$$A = -\frac{3}{(j-2)(j+2)} = \frac{3}{5}$$

$$B = \frac{5-j}{-2j(2-j)} = \frac{5-j}{(-4j-2)} \frac{(4j-2)}{(4j-2)} = \frac{4-10+28j}{20} = \frac{6(1+3j)}{20}$$

1) Le proprietà di osservabilità di un sistema riguardano il comportamento stato-uscita. Due stati x_a, x_b si dicono indistinguibili al tempo t_0 se, $\forall\, u(T)$ con $T \in [t_0, \infty)$, le uscite sono coincidenti $\rightarrow y_a = y_b$

L'indistinguibilità di due stati implica la loro INOSSERVABILITÀ.

$y_a = y_b \iff Ce^{At}x_a = Ce^{At}x_b \rightarrow Ce^{At}(x_a - x_b) = 0$

Si definisce dunque l'INSIEME DEGLI STATI IRRAGGIUNGIBILI, posto $t_0 = 0$:

$I = \{x \in \mathbb{R}^n : Ce^{At}x = 0 \;\; \forall t \geq 0\}$ che è equivalente a

$\ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C^{n-1}A \end{pmatrix} x = 0$ da ciò si definisce MATRICE DI OSSERVABILITÀ $O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C^{n-1}A \end{pmatrix}$

che permette di dire che un sistema è completamente OSSERVABILE se $\rho(O) = n$

altrimenti, tramite un opportuno cambio di base con l'inserimento di T matrice non singolare t.c. $T^{-1} = \begin{pmatrix} \text{BASE di } O & \text{COMPLEM.} \\ n-m & m \end{pmatrix}$, si ottiene una realizzazione

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ $C = (0 \;\; C_2)$ tale che si ottengono 2 SOTTOSISTEMI: uno completamente osservabile e l'altro no. (S_1) (S_2)

2) Dimostrare che se $\ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = 0$ allora dall'uscita in evoluzione si può ricostruire lo stato iniziale.

RAGGIUNGIBILITÀ NEL DISCRETO

3) In un sistema t. discreto è possibile dimostrare, studiando l'evoluzione della rappresentazione con lo stato al variare del tempo, che l'insieme degli stati raggiungibili $R(k) = Im(B \;\; AB \ldots A^{k-1}B)$ con $k = n$ dimensione della matrice dinamica.
(È sufficiente arrivare a $n-1$ per dimostrare la completa raggiungibilità di n stati secondo il teorema di CALEY HAMILTON).

Vi sono due importanti differenze dalla rag. in t. continuo:

1) Nel t. discreto è possibile misurare il tempo che impiega x_0 a raggiungere lo stato zero.
2) Mentre nel t. continuo la raggiungibilità coincide con la controllabilità di uno stato (ovvero se a tempo T esiste un ingresso che lo porta a 0), nel t. discreto la raggiungibilità $\Rightarrow$ controllabilità.

4) DIMOSTRAZIONE DI $\boxed{3,2}$:

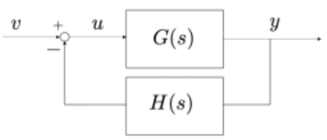
$$x(0) = \bar{x}$$
$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = A\bar{x} + Bu(0)$$
$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A(A\bar{x} + Bu(0)) + Bu(1)$$
$$\vdots$$
$$x(n) = A(Ax(n-2) + Bu(n-2)) + Bu(n-1) = A^{n-1}\bar{x} + B\left(\sum_{i=0}^{n-2} A^i u(i) + u(n-1)\right) = 0$$

$$A^{n-1}\bar{x} = -B\left(\sum_{i=0}^{n-2} A^i u(i) + u(n-1)\right)$$

SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE IL SEGMENTO DI INGRESSO $u|_{0,n-1}$

5)

5. Assegnato il sistema nella figura sottostante con $H(s) = \frac{1}{s-1}$ e $G(s) = \frac{s-1}{s(s+2)}$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 - B_1 C_2 x_2 + B_1 v \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} v \\ y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1) RAPPR. CON LO STATO

$$H(s) = \frac{b_0}{s+a_0} \qquad A_R = (1), \quad B_R = (1), \quad C_R = (1)$$

$$\bar{A}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + 0} \qquad A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+2) \; 1 - \lambda$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 2 + 1 - \lambda$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$R = (B \;\; AB \;\; A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 1(4-1) - 2(0+1) = 1 \rightarrow Rg = 3$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 1(-4-2) + 1(8+1) + 1(-4+1)$$

$$-6 + 9 - 3 = 0 \qquad Rg = 2$$

Ci sono 2 autovalori RAG e OSS e 1 autoval. RAG e INOSS

Procediamo con il cambio di base per studiare quale λ è INOSS.

$$T^{-1} = \left(\underset{3\times1}{\text{base } \lambda} \;\middle|\; \underset{3\times2}{\text{complem}} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -5/2 & -3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -16 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}}{2}$$

1)

$$\dot{X} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} u$$

$$y = (1\ -1)\ x$$

ANALISI MODALE

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix}\lambda+1 & -1\\ 0 & \lambda+2\end{pmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) \to \begin{array}{l}\lambda_1 = -1\\ \lambda_2 = -2\end{array}$$

$$\lambda_1 = -1 \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}(u_1) = 0 \to u_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -2 \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}(u_2) = 0 \to u_2 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad V^T = \frac{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{-1} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}v_1\\ v_2\end{array} \qquad \tilde{A} = U \Lambda V^T = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$x_L(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(1\ 1)\, x_0 + e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}(0\ 1)\, x_0$$

$\begin{cases} v_1 B = (1\ 1)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = 1 & \text{ECCITABILE}\\ C u_1 = (1\ -1)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = 1 & \text{OSSERVABILE}\end{cases}$

$\begin{cases} v_2 B = (0\ 1)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = 0 & \text{NON ECCITABILE}\\ C u_2 = (1\ -1)\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = -2 & \text{OSSERVABILE}\end{cases}$

L'EVOLUZIONE LIBERA PRESENTA 2 MODI NATURALI APERIODICI DI CUI
- MODO NAT. ECC. E OSS ASSOCIATO A $\lambda = -1$
- // // NON ECC. E OSS // A $\lambda = -2$

b) calcolare evoluzione in uscita $y(t)$ e se esiste y_{RP} associato a $x_0 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = (1\ -1)\frac{\begin{pmatrix}s+2 & 1\\ 0 & s+1\end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = (1\ -1)\begin{pmatrix}s+2\\ 0\end{pmatrix} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1}$$

$$y_L(t) = C e^{\tilde{A}t} x_0$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)u(s)]$$

$$e^{At} = T^{-1} e^{\Lambda t} T = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t} & e^{-t}\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$(1\ -1)\begin{pmatrix}e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = (1\ -1)\begin{pmatrix}e^{-2t}\\ -e^{-2t}\end{pmatrix} = 2e^{-2t}$$

$$u(s) = \begin{cases}\frac{1}{s}\\ -\frac{1}{s}\end{cases} \to Y_F(s) = \begin{cases}\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{-s(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\end{cases} \to y_F(t) = \begin{cases}1 - e^{-t}\\ -1 + e^{-t}\end{cases}$$

POICHÉ TUTTI I λ hanno $Re(\lambda) < 0$
E RISULTANO DI CONSEGUENZA LE C.E. di $y_{RP}(t)$

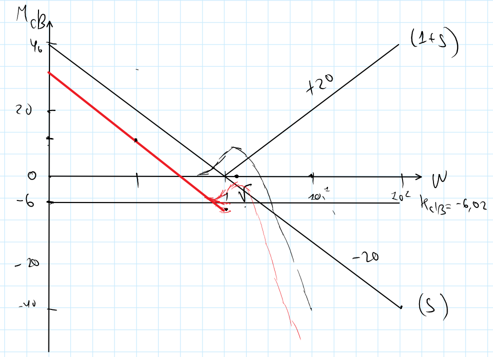
$$y_{RP} = \begin{cases}\lim_{t \to \infty}\int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\,1\, d\tau\\ \lim_{t \to \infty}\int_{0}^{t} W(t-\tau)(-1)\, d\tau\end{cases}$$

2)

$$W(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{2}\,\frac{1+s}{s\left(1+s+\frac{s^2}{2}\right)}$$

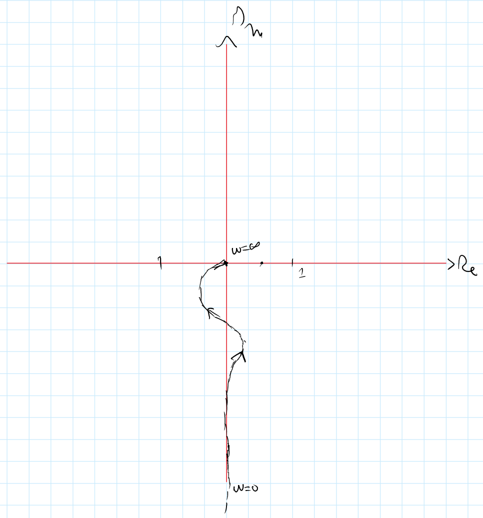
$$k = W(0) = \frac{1}{2}$$

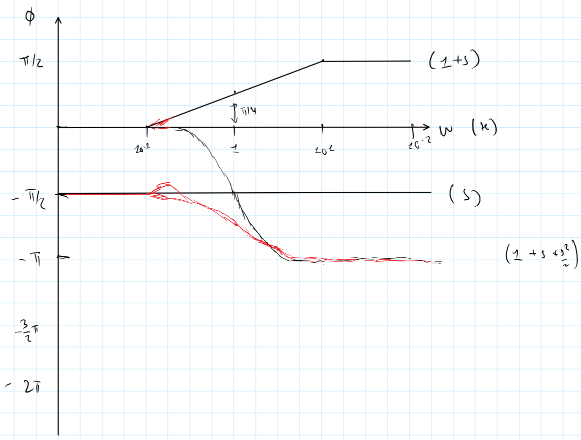
$$k_{dB} = 20 \log \frac{1}{2} = -6{,}02$$



$$\zeta = \frac{1}{2}$$

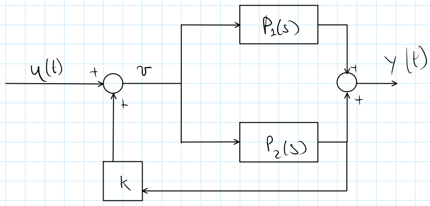
$$\omega_n = \sqrt{2}$$





Gennaio 2022

lunedì 21 marzo 2022 19:21



$$P_1(s) = \frac{1}{s+1} \qquad P_2(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

$$P_1(s) = \frac{b_0}{s+a_0} \quad A_1 = (\overset{-a_0}{-1}) \quad B_1 = (1) \quad C_1 = (\overset{b_0}{1})$$

$$P_2(s) = \frac{s0 + b_0}{s + a_1 s + 0} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = (2 \;\; 0)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 v = A_1 x_1 + B_1(u + k y_2) = A_1 x_1 + B_1 C_2 k x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 v = A_2 x_2 + B_2(u + k y_2) = A_2 x_2 + B_2 C_2 k x_2 + B_2 u \\ y_1 = C_1 x_1 \\ y_2 = C_2 x_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 k C_2 \\ 0 & A_2 + B_2 k C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \\ y = (C_1 \; C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

RAPPR. CON LO STATO

$$A_2 + B_2 k C_2 = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2k & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2k & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \; 2 \; 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -2k & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -2k & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2 + \lambda - 2k)$$

STABILITÀ INTERNA LOCALE

$$\begin{cases} Re(\lambda_i)_{m_g = 1} \leq 0 \\ Re(\lambda_i)_{m_g > 1} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8k}}{2} \end{matrix}$$

$$\nearrow \frac{-1 \pm \sqrt{1+8k}}{2} \leq 0 \quad k = -\frac{1}{8}$$

$$\searrow \frac{-1 \pm \sqrt{1+8k}}{2} < 0 \quad k \neq -\frac{1}{8}$$

STAB. INTERNA ASINTOTICA $Re(\lambda_i) < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8k}}{2} < 0 \end{cases}$

STAB. INTERNA $\Rightarrow$ STAB. ESTERNA $\longrightarrow Re(\lambda^{R,O}) < 0$

STUDIAMO RAG. E OSS

$$\boxed{\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2k & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \; 2 \; 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}}$$

$$R = (B \;\; AB \;\; A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+2k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1+2k \end{pmatrix} \rightarrow \det = 1 + 2k + 1 + 1(-1) + (1+2k)(-1)$$

$$= 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \rightarrow Rk(R) = 2$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2k & 2 \\ 1 & 2k & 2k-2 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 2k(2k-2) - 4k - 2(-2k + 2 - 2)$$

$$4k^2 - \cancel{4k} - 4k + \cancel{4k} \qquad 4k(k-1) \begin{matrix} \nearrow Rg(O) = 3 \rightarrow k = 0 \wedge k = 1 \\ \searrow Rg(O) = 2 \rightarrow k \neq 0 \vee k \neq 1 \end{matrix}$$

KALMAN

$k = 1$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad c\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix}}$$

$$R=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\qquad O=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&2&2\\1&2&0\end{pmatrix}\qquad \mathcal{I}=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}\qquad R=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

$Rk=2$ $\qquad$ $Rk=2$

$\mathcal{H}_1 = R\oplus\mathcal{I} = \left\{\begin{matrix}2\\-1\\2\end{matrix}\right\}$ RAG INOSS $\qquad T^{-1}\left(\mathcal{H}_1 \,\vdots\, \mathcal{H}_2 \,\vdots\, \mathcal{H}_4\right)=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}$ det $=1$

$\mathcal{H}_2 = R = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ RAG OSS $\qquad T=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_3 = \mathcal{I} = \{\ \}$ IRRAG INOSS

$\mathcal{H}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ IRRAG OSS

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cc|c|c}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\0&A_{22}&&A_{24}\\\hline &&A_{33}&A_{34}\\0&0&&A_{44}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{14}\\0&A_{22}&A_{24}\\0&0&A_{44}\end{pmatrix}\qquad \hat{B}=TB=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\cancel{0}\\0\end{pmatrix}\qquad C=CT^{-1}=\begin{pmatrix}0&C_2&\phi&C_4\end{pmatrix}$$

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&2&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$\to \lambda=-2$ RAG INOSS

$\to \lambda=1$ RAG OSS

$\to \lambda=-1$ IRRAG OSS

$$\tilde{B}=TB=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}B_1\\B_2\\0\end{array}\qquad C=CT^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}\\0\ \ C_2\ \ C_4\end{array}$$

$y_F(t)$

$k=1$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad c\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix}}$$

$$W(s)=c(sI-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+1&-2&0\\0&s&-1\\0&-2&s+1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix}\frac{\begin{pmatrix}(s-1)(s+2)&+2(s+1)&2\\0&(s+1)^2&(s+1)\\0&2(s+1)&s(s+1)\end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)(s-1)}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix}\frac{\begin{pmatrix}(s-1)(s+2)+2\\(s+1)\\s(s+1)\end{pmatrix}}{(s+1)(s-1)(s+2)}=\frac{(s-1)(s+2)+2+2(s+1)}{(s+1)(s-1)(s+2)}=s^2+s-\cancel{2}\cancel{+2}+2s+2=\frac{s^2+3s+2}{(s+1)(s-1)(s+2)}=\frac{\cancel{(s+1)}\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}\cancel{(s+2)}(s-1)}$$

$$W(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$u(t)=(2t-1)\delta_{-1}(t)\Rightarrow u(s)=\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}\qquad Y_F(s)=W(s)u(s)=\frac{2}{s^2(s-1)}-\frac{1}{s(s-1)}$$

$$Y_F(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s-1)}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s(s-1)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s-1)}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right]$$

$$\downarrow\quad 1-e^t$$

$$\frac{2}{s^2(s-1)}=\frac{R_{11}}{s^2}+\frac{R_{12}}{s}+\frac{R_2}{s-1}=-\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}+\frac{2}{s-1}\to\mathcal{L}^{-1}[\cdot]=-2t-3+2e^t\qquad Y_F(t)=(e^t-2t-2)\delta_{-1}(t)$$

$$R_{11}=\lim_{s\to0}s^2\frac{2}{s^2(s-1)}=-2$$

$$R_{12}=\lim_{s\to0}\frac{d}{ds}\frac{2}{s-1}=\frac{s-1-2}{(s-1)^2}=\frac{s-3}{(s-1)^2}\to-3$$

$$R_2=\lim_{s\to1}\frac{2}{s^2}=2$$

2)

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+1)} & \frac{s+2}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} s+1 & s & (s+2)^2 \\ (s+1)(s+2) & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} s+1 & s & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & s+2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= D}$$

NON È STRETT. PROPRIA

$$\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 & + \\ & & & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{pmatrix} = \begin{matrix} \frac{(1\ 1\ 0)s}{(s+1)(s+2)} + \frac{(1\ 0\ 0)}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} \end{matrix}$$

$a_0 = 2 \quad a_1 = 3$

$$A^0_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B^0_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^0_1 = (0\ 1)$$

$$A^0_2 = (-2) \quad B^0_2 = (0\ 1\ 0) \quad C^0_2 = 1$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^0 = (0\ 1\ 1)$$

TUTTI $Re(\lambda_i) < 0 \rightarrow$ REG. PERM. ESISTE

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t) \rightarrow u(s) = \begin{pmatrix} 1/s \\ 0 \\ 2/s \end{pmatrix}$$

$$\frac{-9 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-9 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{6}{4} \\ -3 \end{cases}$$

$$Y_F(s) = W(s)\,U(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+1)} & \frac{s+2}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/s \\ 0 \\ 2/s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s(s+2)} + \frac{2(s+2)}{s(s+1)} \\ 1/s \end{pmatrix} = \begin{matrix} \frac{s+1+2(s+2)^2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{2(s^2+4s+4)+s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{2s^2+9s+9}{s(s+1)(s+2)} \\ 1/s \end{matrix}$$

1. Sia dato il sistema rappresentato da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -\alpha & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} x(t) + \alpha u(t)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

A) MODI ECCIT. OSS. al variare di α

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 4 & 4 \\ -2 & \lambda+3 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda^2-9)(\lambda+1) + 8(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda^2-1) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \end{pmatrix} = 0 \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \end{array} \qquad U^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

PER $\lambda_1 = -1$ → $C u_1 = (-\alpha \;\; 2\alpha \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\alpha + 1$ → $\alpha = 1$ → MODO INOSS; $\alpha \neq 1$ → MODO OSS

↳ $v_1 B = (0 \; 0 \; 1)\begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \alpha$ MODO NON ECCIT

PER $\lambda_2 = -1$ → $C u_2 = (-\alpha \;\; 2\alpha \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → α → $\alpha = 0$ → MODO INOSS; → $\alpha \neq 0$ → MODO OSS

↳ $v_2 B = (-1 \; 2 \; 1)\begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → $\alpha - 2 + 2$ → $\alpha = 0$ MODO NON ECCIT; $\alpha \neq 0$ MODO ECCIT

PER $\lambda_3 = 1$ → $C u_3 \; (-\alpha \;\; 2\alpha \;\; 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → $-2\alpha + 2\alpha = 0$ MODO INOSS $\forall \alpha$

$v_3 B = (1 \; -1 \; -1)\begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → $2 - \alpha - 1 = 0$ → $\alpha = 1$ MODO NON ECCIT; $\alpha \neq 1$ MODO ECCIT

B) $x_L(t) = e^{At} x_0 = e^{-t} u_1 v_1 x_0 + e^{-t} u_2 v_2 x_0 + e^{t} u_3 v_3 x_0$ → PER ESSERE ILLIMITATA DEVE AVERE $c_3 = v_3 x_0 \neq 0$

$y_L(t) = C e^{At} x_0 = C u_1 e^{-t} c_1 + C u_2 e^{-t} c_2 + C u_3 e^{t} c_3$ → PER ESSERE LIMITATA DEVE AVERE

$C u_3 = 0 \rightarrow (-\alpha \;\; 2\alpha \;\; 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

o

$c_3 = 0$

C) STAB. INTERNA E ESTERNA in $x_0 = 0$

IL SISTEMA NON È MAI STAB. INTERNAMENTE PERCHÉ NON HA TUTTI $Re(\lambda_i) < 0$ o $\begin{cases} Re(\lambda_i)_{mg=1} \leq 0 \\ Re(\lambda_i)_{mg>1} < 0 \end{cases}$

IL SISTEMA È STAB. ESTERNAMENTE IN $x_0 = 0$ SE $Re(\lambda_i^{e,o}) < 0$

- λ_1 e λ_3 con $Re(\lambda_3) < 0$ NON PUÒ MAI AVERE MODI ECC. E OSS.
- λ_2 PUÒ AVERE MODO ECC. E OSS SE $\alpha \neq 0$
- COMUNQUE IL SISTEMA È SEMPRE STAB ESTERNAMENTE IN $x_0 = 0$ $\forall \alpha$

IL SISTEMA È STAB ESTERNAMENTE $\forall x_0 = 0$ se $\begin{cases} Re(\lambda_i^{e,o}) < 0 \\ Re(\lambda_i^{o})_{mg=1} \leq 0 \\ Re(\lambda_i^{o})_{mg>1} < 0 \end{cases}$

- VALGONO CONDIZIONI DI PRIMA E
- λ_3 NON È MAI OSS.
- λ_1, λ_2 entrambi $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ POSSONO ESSERE OSS se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$

D)

1. Sia dato il sistema rappresentato da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} -\alpha & 2\alpha & 1 \end{pmatrix} x(t) + \alpha u(t)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$R = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2-3\alpha & 2-\alpha \\ 1 & 1-2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(2-\alpha)(1-2\alpha) + 3\alpha - 2 = \cancel{2} - 5\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha - \cancel{2} = -2\alpha^2 2\alpha = \alpha(\alpha+1) = 0$

$2 - 3\alpha - (2-\alpha)(1-2\alpha) = 2 - 3\alpha - (-2\alpha^2 - 5\alpha + 2)$

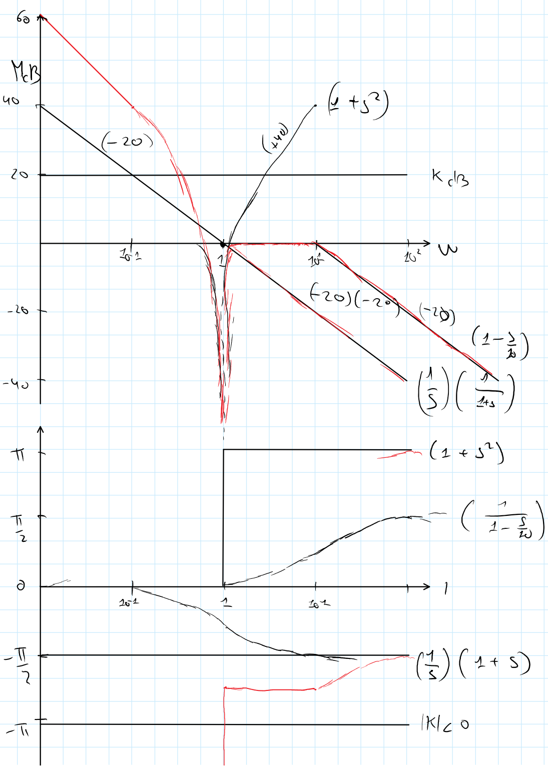
$\cancel{2} - 3\alpha + 2\alpha + 5\alpha - \cancel{2} = 2\alpha(\alpha+1) = 0$

$Rg(R) = 2 \rightarrow \alpha \neq 0 \vee \alpha \neq 1$

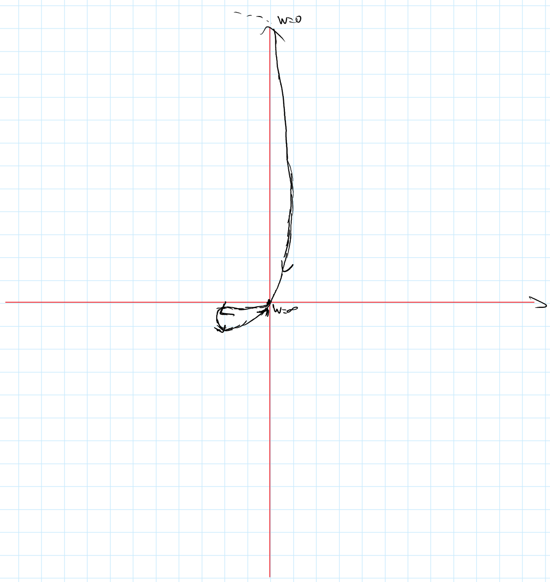
$Rg(R) = 1 \rightarrow \alpha = 0 \wedge \alpha = 1$

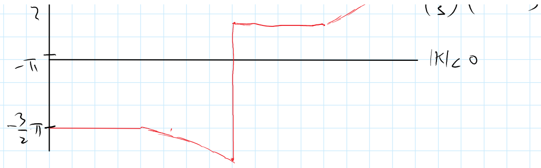
2) $W(s) = \dfrac{s^2+1}{s(s+1)(s-10)} \rightarrow -\dfrac{1}{10} \dfrac{1+s^2}{s(1+s)(1-\frac{s}{10})}$

$k = -\dfrac{1}{10}$ $\quad k_{dB} = -20 \log\left|\frac{1}{10}\right| = 20$ dB



$|K|$





3) CALCOLARE RISPOSTA INDICIALE PER SISTEMA t. discreto con $T_c = 0,1\,s$

RISP. IMPULSIVA: $w(t) = t e^{-t} + \delta(t) \to \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a) \to \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1}{(s+1)^2} + 1$

$$W_D(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]_{t=kT} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2} + \frac{1}{s}\right]_{t=kT} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s} + \frac{R_{21}}{(s+1)^2} + \frac{R_{22}}{(s+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \to \delta_{-1}(kT)$$

$$R_1 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(s+1)^2} = 1$$

$$R_{21} = \lim_{s \to -1} \cancel{(s+1)^2} \frac{1}{s\cancel{(s+1)^2}} = -1$$

$$\lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \frac{1}{s} = -\frac{1}{x^2} = -1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)}\right]$$

$$\parallel$$

$$\delta_{-1}(kT) - kT e^{-kT} - e^{-kT} + \delta_{-1}(kT)$$

$$-e^{-\frac{k}{10}}\left(\frac{k}{10} + 1\right) + 2\delta_{-1}\left(\frac{k}{10}\right) = W_D\left(\frac{k}{10}\right)$$

4) $x(0) = 10 u_a = m_0 (\sin(0 + \phi) u_a + \cos(0 + \phi) u_b)$

$x(4) = 5 u_a = m_4 |\lambda|^4 | (\sin(\theta 4 + \phi) u_a + \cos(\theta 4 + \phi) u_b)$

$$|\lambda|^4 \to \left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\right)^4$$

$$\frac{m(\sin(\phi) u_a + \cos(\phi) u_b)}{2} = m |\lambda|^4 | (\sin(4\theta + \phi) u_a + \cos(4\theta + \phi) u_b)$$

$\theta = 0 \qquad \lambda^4 = \frac{1}{2} \to \lambda = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

$x_L(8) = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^8 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} u_a$

Marzo 2022 (no)

giovedì 24 marzo 2022 13:34

1. Si consideri il sistema a tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{\lambda}{2}-1 & -\frac{\lambda}{2}-1 \\ -1 & -\frac{\lambda}{2}-1 & \frac{\lambda}{2}-1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b+1 \\ b-1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1-\frac{c}{2} & \frac{c}{2} & -\frac{c}{2} \end{pmatrix} x$$

in cui $\lambda, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Studiare la stabilità interna ed esterna del sistema al variare dei parametri $\lambda, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Studiare la raggiungibilità e l'osservabilità al variare dei parametri $\lambda, b, c \in \mathbb{R}$.

(c) Fissato $\lambda = -1$, calcolare $b, c \in \mathbb{R}$, se possibile, in modo che la risposta a regime permanente rispetto l'ingresso $u(t) = 4$ sia $y_r(t) = 4$.

(d) Fissato $\lambda = -1$ calcolare, se possibile, $b, c \in \mathbb{R}$ tali che la risposta forzata in presenza di un qualunque ingresso sia identicamente nulla. Per i valori fissati operare, se necessario, la scomposizione di Kalman.

Ritaglio schermata acquisito: 24/03/2022 13:34

$$\begin{pmatrix} \gamma & -1 & -1 \\ 1 & \gamma - \frac{\lambda}{2} + 1 & \frac{\lambda}{2} + 1 \\ 1 & \frac{\lambda}{2} + 1 & \gamma - \frac{\lambda}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

$$|\gamma I - A| = \gamma^3 + \gamma^2(2-\lambda) + \gamma(2-2\lambda) - 2\lambda = (\gamma - \lambda)(\gamma^2 + 2\gamma + 2) = (\gamma - \lambda)(\gamma + 1 + i)(\gamma + 1 - i)$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2-\lambda & 2-2\lambda & -2\lambda \\ \lambda & & +\lambda & +2\lambda & +2\lambda \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

IL SISTEMA HA 1 AUTOVALORE REALE $\gamma_1 = \lambda$

E 2 COMPLESSI CONIUGATI $\gamma_{2,3} = -1 \pm i$

$$\gamma_1 = \lambda \quad \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \frac{\lambda}{2} + 1 & \frac{\lambda}{2} + 1 \\ 1 & \frac{\lambda}{2} + 1 & \frac{\lambda}{2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = -1 + i \quad \begin{pmatrix} -1+i & -1 & -1 \\ 1 & i - \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} + 1 \\ 1 & \frac{\lambda}{2} + 1 & i - \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$(-1+i) \quad 1$$
$$(-1) \quad (1-i)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -1 & -1 \\ 1 & \gamma - \frac{\lambda}{2} + 1 & \frac{\lambda}{2} + 1 \\ 1 & \frac{\lambda}{2} + 1 & \gamma - \frac{\lambda}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

STAB. INTERNA LOCALE $\rightarrow Re(\lambda_i) \leq 0 \rightarrow Re(\gamma_{2,3}) = -1 \leq 0$ ✓

$Re(\gamma_1) = \lambda \rightarrow \lambda \leq 0$

STAB. INTERNA ASINTOTICA $Re(\lambda_i) < 0 \rightarrow Re(\gamma_{2,3}) = -1 < 0$ ✓

$Re(\gamma_1) = \lambda \rightarrow \lambda < 0$

1)

1. Si traccino i diagrammi di Bode e polare per

$$F(s) = \frac{s-10}{(s^2+3s+2)(s^2+1)}$$

Si calcoli inoltre la risposta forza e se esiste a regime permanente per l'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-2)$

$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$

n^4	1	3	2
n^3	3	3	$\cancel{0}$
n^2	2	2	$\cancel{0}$
n	0	$\cancel{0}$	
1	0	$\cancel{0}$	

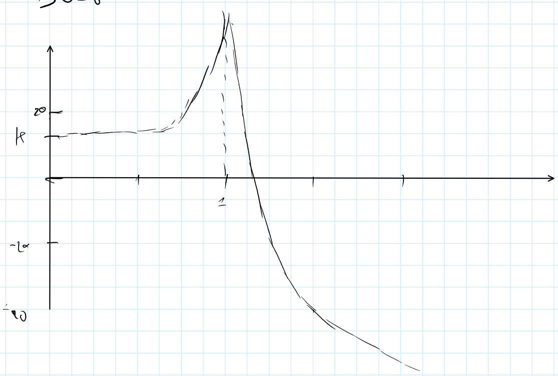
3 3

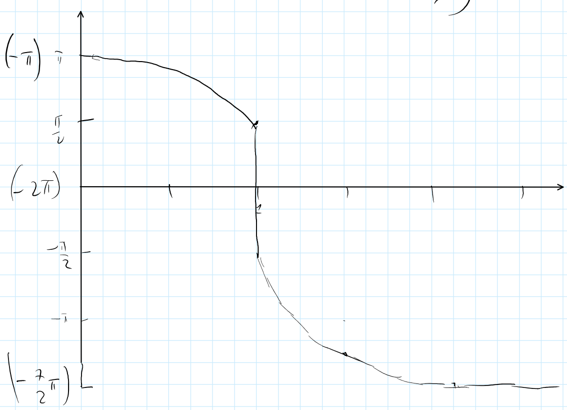
2 2

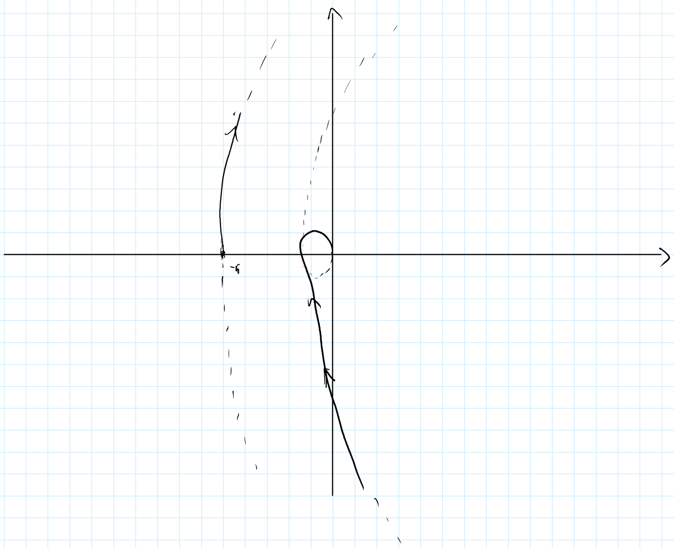
$$F(s) = -10\,\frac{\left(1-\frac{s}{10}\right)}{(s+2)(s+1)(s^2+1)} = -5\,\frac{\left(1-\frac{s}{10}\right)}{\left(1+\frac{s}{2}\right)(1+s)(1+s^2)}$$

BODE

$k = -5 \rightarrow 13{,}99$







$$u(t) = \delta_{-1}(t-2) \rightarrow u(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$Y_f(s) = F(s)\,u(s) = \frac{-5\left(1-\frac{s}{10}\right)e^{-2s}}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)(s+1)(s+j)(s-j)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{1+\frac{s}{2}} + \frac{R_3}{1+s} + \frac{R_4}{s+j} + \frac{R_5}{s+j}$$

$s = 0 \quad R_1 = -5$

$$s = -2 \quad R_2 = \frac{(-5+1)\,e^{10}}{-2(-1)(5} = \frac{-4\,e^{10}}{10}$$

Y_{RP} NON ESISTE PERCHÉ $s^2+1 = (s+1)(s-1)$ -> NON TUTTI $Re(s_i) < 0$

2)

2. Dato il sistema descritto da

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima;
b. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{sen}(2t)\delta_{-1}(t)$$

Ritaglio schermata acquisito: 19/06/2022 13:00

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W(s) = \frac{\begin{pmatrix} -(s+1) & s-1 & s+2 \\ (s+1)(s+2) & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$$

$$R_1 = \lim_{s \to -1} \frac{\begin{pmatrix} -(s+1) & s-1 & s+2 \\ (s+1)(s+2) & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{s+2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to Rank = 1$$

$$R_2 = \lim_{s \to -2} \frac{\begin{pmatrix} -(s+1) & s-1 & s+2 \\ (s+1)(s+2) & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{s+1} = \begin{pmatrix} -1 & +3 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} \to Rank = 2$$

$$\underset{2\times1 \ 1\times3}{C_1B_1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times2 \ 2\times3}{C_2B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_{RP} = |W(j2)| \sin(2t + \angle W(j2))$$

$$W(2j) = \begin{pmatrix} \frac{2j+1}{2j+2} & \frac{2j-1}{(2j+2)(2j+2)} & \frac{1}{2j+1} \\ 1 & \frac{1}{2j+2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|W(2j)| = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\angle W(2j) = \begin{pmatrix} \frac{\text{arctg}(2)}{\text{arctg}(1)} & \frac{\text{arctg}(-2)}{\text{arctg}(2)\,\text{arctg}(1)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

3)

3. Dato un processo descritto dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

Determinare una rappresentazione con lo spazio di stato associata al processo in cui y(t) e u(t) rappresentino rispettivamente l'uscita e l'ingresso del sistema. Studiare inoltre i modi naturali che caratterizzano il processo, tracciando i grafici che ne rappresentano il comportamento nel piano cartesiano, per generiche condizioni iniziali $y(0) = a$ e $\dot{y}(0) = b$ al variare di a e b.

Ritaglio schermata acquisito: 19/06/2022 13:09

$$y = x_2$$
$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_1$$
$$\ddot{y} = \dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2 + u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda+3 & +2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+3)+2 = \lambda^2+3\lambda+2 = \begin{cases}\lambda=-2\\ \lambda=-1\end{cases}$$

$\lambda=-2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} u = 0 \rightarrow \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} u = 0 \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det = 3$

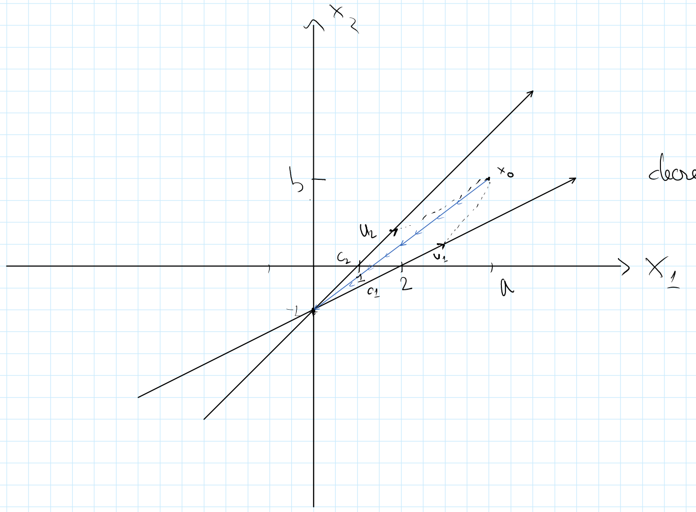
$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

MODI NATURALI APERIODICI DECRESCENTI

$y(0) = a = x_2$

$\dot{y}(0) = b = x_1$



decresce al passare del tempo

1. Un sistema rappresentato da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, ha un autovalore $\lambda_1 = -1$, con autovettore associato $u_1 = (1\ 1\ 0)'$ e $\lambda_2 = -2$ con autovettore $u_2 = (1\ 0\ 1)'$.

A. Sapendo che per $x_0 = (0\ 0\ 1)'$ l'evoluzione libera è tale che $x_L(t) = x_0\ \forall t \geq 0$, determinare la matrice dinamica A;

B. Determinare, successivamente, le due matrici B e C in modo tale che nella risposta impulsiva nello stato compaia solo la legge temporale e^{-t} mentre nella risposta libera in uscita ci siano solo le leggi temporali e^{-t} e e^{-2t};

C. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = (1+3\sin 2t)\delta_{-1(t)}$.

Ritaglio schermata acquisito: 05/07/2022 19:31

$u_1 = (1\ 1\ 0)'\quad \lambda_1 = -1$

$u_2 = (1\ 0\ 1)'\quad \lambda_2 = -2$

$u_3 = ?\quad \lambda_3 = ?$

$x_L(t) = e^{At}x_0 = x_0 \to \begin{pmatrix} * & * & 0\\ * & * & 0\\ e^{*} & e^{*} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$e^{0} \to \lambda_3 = 0$

$$V = \frac{\begin{pmatrix} -b & a-c & b\\ -c & c & a-b\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}}{a-b-c}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a\\ 1 & 0 & b\\ 0 & 1 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} & a\\ e^{-t} & 0 & b\\ 0 & e^{-2t} & c\end{pmatrix}\frac{\begin{pmatrix} -b & a-c & b\\ -c & c & a-b\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}}{a-b-c}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} & a\\ e^{-t} & 0 & b\\ 0 & e^{-2t} & c\end{pmatrix}\frac{\begin{pmatrix} b\\ a-b\\ -1\end{pmatrix}}{a-b-c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \to \begin{aligned} b&=0\\ a&=0\\ c&=1\end{aligned}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} & 0\\ e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1\\ B_2\\ B_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} *\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0\end{pmatrix}$$

$B_2 = * \to$ ps. $B = 1$

$B_1 - B_2 = 0 \to B_1 = 1$

$-B_1 + B_2 + B_3 = 0 \to B_3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad B = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$C_1 + C_2 = *$

$C_1 + C_3 = *$

$C_3 = 0$

pos$_{T1}$ $C_1 = 1$, $C_2 = 1$

$C = (1\ 1\ 0)$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} s+2 & -1 & 0\\ 0 & s+1 & 0\\ 2 & -2 & s\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = (1\ 1\ 0)\frac{\begin{pmatrix} s(s+1) & s & 0\\ 0 & s(s+2) & 0\\ -2(s+1) & 2(s+2)+2 & (s+1)(s+2)\end{pmatrix}}{s(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{(1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} s(s+1)+s\\ s(s+2)\\ *\end{pmatrix}}{s(s+1)(s+2)}$$

$$W(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$Y_F(s) = \left(\frac{2}{s(s+1)} + \frac{24}{(s^2+4)(s+1)}\right)$$

$u(t) = (1+3\sin 2t)\delta_{-1}(t)$

$$\left(\frac{1}{s} + 3\,\frac{4}{s^2+4}\right)$$

$$y_F(t) = \left(2\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] + 24\left[\frac{1/5}{s+1} + \frac{?}{s+2i} + \frac{?}{s-2i} \dots\right]\right)$$

2)

2. Tracciare i diagrammi di Bode e polare per il sistema rappresentato da

$$W(s) = \frac{s-1}{(s^2+1)^2}$$

2)

2. Tracciare i diagrammi di Bode e polare per il sistema rappresentato da
$$W(s) = \frac{s-1}{(s^2+1)^2}$$

WOLFRAM

3)

3. In un sistema a tempo continuo con $u \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}^3$, ponendo $x_0 = 0$, per ingresso $u(t) = \begin{pmatrix} \delta_{-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha $y(t) = \begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 1 \end{pmatrix}$ mentre per ingresso $u(t) = \begin{pmatrix} \delta(t) \\ \delta_{-1}(t) \end{pmatrix}$ si ha $y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \\ \delta(t) + 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$. Determinare la funzione di trasferimento, la matrice delle risposte impulsive (in uscita) e, se esiste, la risposta a regime permanente per l'ingresso $u(t) = \begin{pmatrix} t+2 \\ 1 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t)$.

$U_1(t) = \begin{pmatrix} \delta_{-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \to U_1(s) = \begin{pmatrix} 1/s \\ 0 \end{pmatrix}$

$Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \\ \delta(t) + 1 - e^{-t} \end{pmatrix} \to Y_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+2} \\ 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \\ W_5 & W_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+2} \\ 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \frac{W_1}{s} = \frac{1}{s+1} \to \boxed{W_1 = \frac{s}{s+1}} \\ \frac{W_3}{s} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)} \to \frac{2(s+2)(s \ldots}{4s(\ldots} \\ \frac{W_5}{s} = 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \to \frac{s(s \ldots}{} \end{cases}$

$U_2(t) = \begin{pmatrix} t+2 \\ 1 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t) \to U_2(s) \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix}$

$Y_2(s) = \Big(\; e^{-t}$

4)

4. Si calcolino le Z–trasformate delle seguenti funzioni, definite per $t \in Z$, $t \geq 0$:
$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \text{ pari} \\ 0 & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } t \text{ pari} \end{cases}$$
$$f_3(t) = 2^t \delta_{-1}(t-3) \qquad f_4(t) = 2^{t-3}\delta_{-1}(t)$$
$$f_5(t) = -\left(\frac{1}{2}\right)^t \delta_{-1}(t) \qquad f_6(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)^t \delta_{-1}(t)$$
Quali di queste funzioni potrebbe essere la risposta impulsiva di un sistema (esternamente) stabile e quali no? Motivare ciascuna risposta.

Ritaglio schermata acquisito: 05/07/2022 23:59

$$4s^2+4s+4 = 4(s^2+s+1)$$

$$\frac{\ldots s+2) - 4s(s+2) + 6s(s+1)}{\ldots s+1)(s+2)} = \frac{2s^2+6s+4 - 4s^2 - 8s + 6s^2 + 6s}{4s(s+1)(s+2)} = \boxed{\frac{s^2+s+1}{\cancel{s}(s+1)(s+2)}} \cancel{s} = W_3$$

$$\frac{\ldots +1) + s+1 - s}{s(s+1)} = \boxed{\frac{s^2+s+1}{\cancel{s}(s+1)}} \cancel{s} = W_5$$