



# 电磁场与电磁波

## • 第八章 电磁辐射

- 产生电磁波的振荡源一般为天线。随着振荡源频率的提高使电磁波的波长与天线尺寸可相比拟时，就会产生显著的辐射。
- 对于天线，我们关心的是它的辐射场强、方向性、辐射功率和效率。
- 天线的形式可分为线天线和面天线。
- 本章由滞后位的概念出发，求解元电流的辐射场。再利用叠加原理求解线天线和阵列天线的辐射问题。

### 本章内容

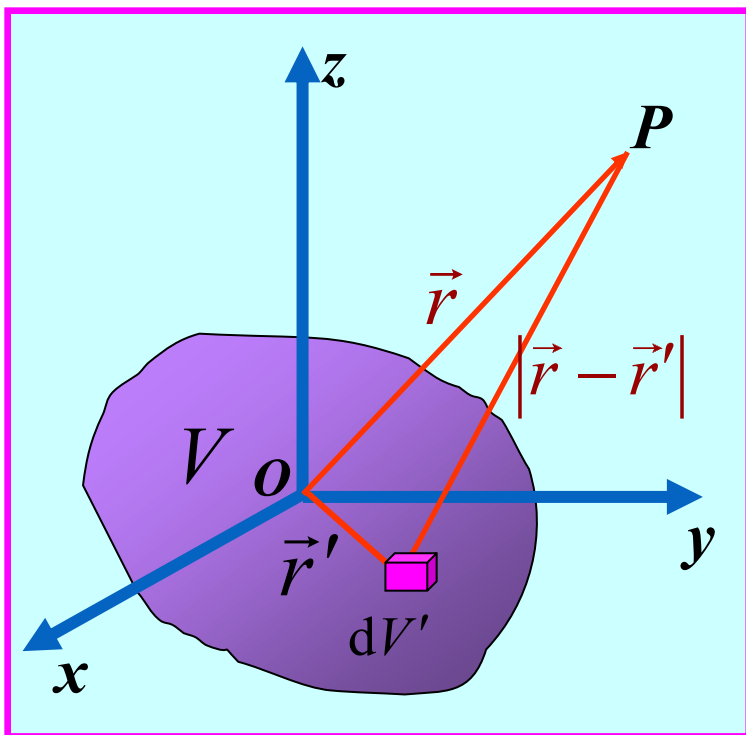
- 8.1 滞后位
- 8.2 电偶极子的辐射
- 8.3 电与磁的对偶性
- 8.4 磁偶极子的辐射
- 8.5 天线的基本参数
- 8.6 对称天线
- 8.7 天线阵
- 8.8 口径场辐射

## 8.1 滞后位

在第4章引入了动态矢量位和动态标量位： $\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$      $\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \nabla \varphi$

在洛仑兹条件下，其方程为：

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\mu \vec{\mathbf{J}} \\ \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$



滞后位

其解为：

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{v}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{1}{v}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \end{cases}$$

**物理意义：**

时刻  $t$  空间任意一点  $r$  处的位函数并不取决于该时刻的电流和电荷分布，而是取决于比  $t$  较早的时刻  $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'| / v$  的电流或电荷分布。时间  $|\vec{r} - \vec{r}'| / v$  正好是电磁波以速度  $v = 1 / \sqrt{\mu\epsilon}$  从源点  $\vec{r}'$  传到场点  $\vec{r}$  所需的时间。

换言之，观察点处位函数随时间的变化总是滞后于源随时间的变化。滞后的时间是电磁波从源所在位置传到观察点所需的时间，故称为**滞后位**或**推迟位**。

**例如：**日光是一种电磁波，在某处某时刻见到的日光并不是该时刻太阳所发出的，而是在大约8分20秒前太阳发出的，8分20秒内光传播的距离正好是太阳到地球的平均距离。

## ■ 时谐电磁场的位函数

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\varphi$$

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

### 8.2 电偶极子的辐射

- ❖ 电磁辐射系统最简单的形式是电偶极子和磁偶极子。
- ❖ 电偶极子为长度远小于波长的载流线元，也称元天线。
- ❖ 电偶极子辐射是天线工程中最基本的问题。

#### 本节内容

8.2.1 电偶极子的电磁场

8.2.2 电偶极子的近区场和远区场

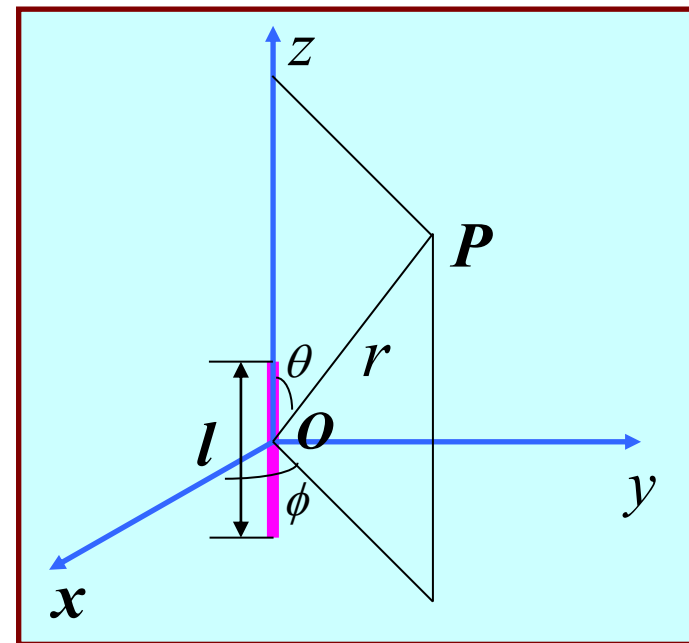
## 8.2.1 电偶极子的电磁场

设电偶极子电流为 $I$ ，长度为 $l$ ，电流为 $z$ 方向，则

$$\vec{J}dV' = \vec{e}_z \frac{I}{S} \cdot Sdz' = \vec{e}_z Idz'$$

代入  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}e^{-jkr}}{r} dV'$  得电偶极子的矢量位

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_C \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{e}_z Idz' = \vec{e}_z \frac{\mu Il}{4\pi r} e^{-jkr}$$



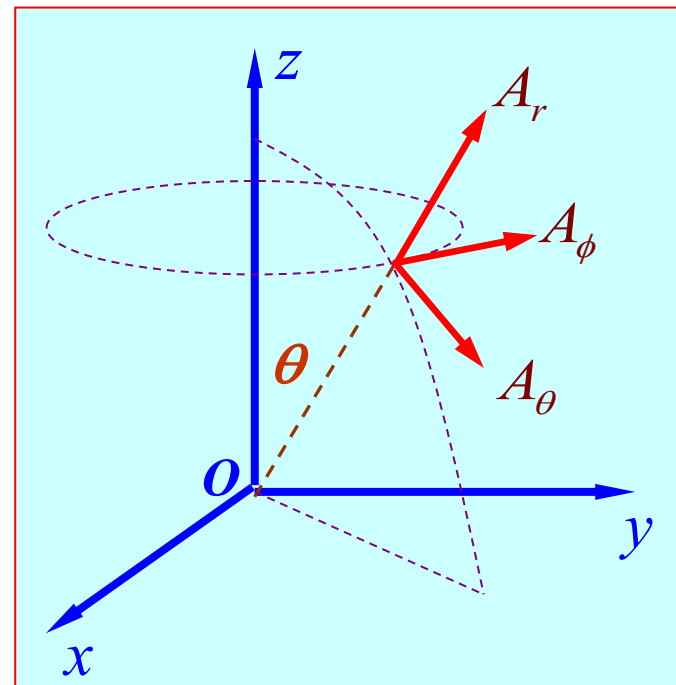


在球坐标系中

$$A_r(\vec{r}) = \vec{A} \cdot \vec{e}_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu I l}{4\pi r} \cos \theta e^{-jk r}$$

$$A_\theta(\vec{r}) = \vec{A} \cdot \vec{e}_\theta = -A_z \sin \theta = -\frac{\mu I l}{4\pi r} \sin \theta e^{-jk r}$$

$$A_\phi(\vec{r}, t) = \vec{A} \cdot \vec{e}_\phi = 0$$



由此得到电偶极子的电磁场：

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\mu r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} = \vec{e}_\phi \frac{k^2 I l \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ H_r & rH_\theta & r \sin \theta H_\phi \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_r \frac{k^3 I l \cos \theta}{2\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} + \vec{e}_\theta \frac{k^3 I l \sin \theta}{4\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \end{aligned}$$

写成分量形式

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\phi = \frac{k^2 I l \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{k^3 I l \cos \theta}{2\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \\ E_\theta = \frac{k^3 I l \sin \theta}{4\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

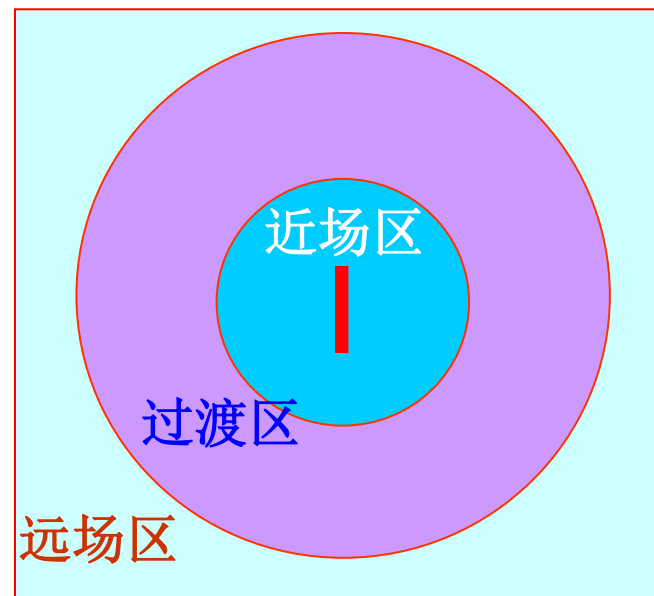
### 8.2.2 电偶极子的近区场和远区场

电偶极子周围的空间划分为三个区域：

近场区：  $kr \ll 1$

远场区：  $kr \gg 1$

过渡区：



1. 近区场:  $kr \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{kr} \ll \frac{1}{(kr)^2} \ll \frac{1}{(kr)^3}$ ,  $e^{-jkr} \approx 1$

$$\begin{cases} E_r = \frac{k^3 Il \cos \theta}{2\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \\ E_\theta = \frac{k^3 Il \sin \theta}{4\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \\ H_\phi = \frac{k^2 Il \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_r = -j \frac{Il \cos \theta}{2\pi\epsilon\omega r^3} \\ E_\theta = -j \frac{Il \sin \theta}{4\pi\epsilon\omega r^3} \\ H_\phi = \frac{Il \sin \theta}{4\pi r^2} \end{cases}$$

准静态场  $\rightarrow$

$$\begin{cases} E_r = \frac{ql \cos \theta}{2\pi\epsilon r^3} = \frac{p_e \cos \theta}{2\pi\epsilon r^3} \\ E_\theta = \frac{ql \sin \theta}{4\pi\epsilon r^3} = \frac{p_e \sin \theta}{2\pi\epsilon r^3} \\ H_\phi = \frac{Il \sin \theta}{4\pi r^2} \end{cases}$$

$$I = j\omega q$$

## ■ 近区场的特点:

(1) 电场表达式与静电偶极子的电场表达式相同；磁场表达式与用毕奥-萨伐定律计算的恒定电流元产生的磁场表达式相同。因此称其为**似稳场或准静态场**。

(2) 电场和磁场存在 $\pi / 2$ 的相位差，能量在电场和磁场以及场与源之间交换，没有辐射，所以近区场也称感应场。

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = 0$$

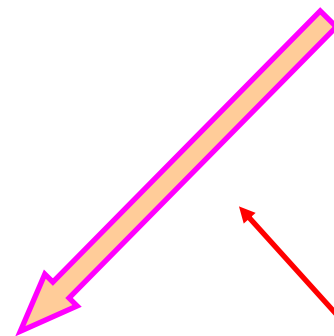
2. 远区场（辐射场）： $kr \gg 1 \Rightarrow \frac{1}{kr} \gg \frac{1}{(kr)^2} \gg \frac{1}{(kr)^3}$

$$\begin{cases} E_r = \frac{k^3 I l \cos \theta}{2\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \\ E_\theta = \frac{k^3 I l \sin \theta}{4\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \\ H_\phi = \frac{k^2 I l \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr} \end{cases}$$



$$\begin{cases} E_\theta = j \frac{I l k^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon\omega r} e^{-jkr} \\ H_\phi = j \frac{I l k \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_\theta = j \frac{I l \sin \theta}{2\lambda r} \eta e^{-jkr} \\ H_\phi = j \frac{I l \sin \theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \end{cases}$$



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

## ■ 远区场的特点:

(1) 远区场是横电磁波, 电场、磁场和传播方向相互垂直;

(2) 远区电场和磁场的相位相同;

(3) 电场振幅与磁场振幅之比等于媒质的本征阻抗, 即

$$\frac{E_{\theta}}{H_{\phi}} = \frac{k}{\omega\epsilon} = \eta$$

(4) 远区场是非均匀球面波, 电场、磁场的振幅与 $1/r$ 成正比;

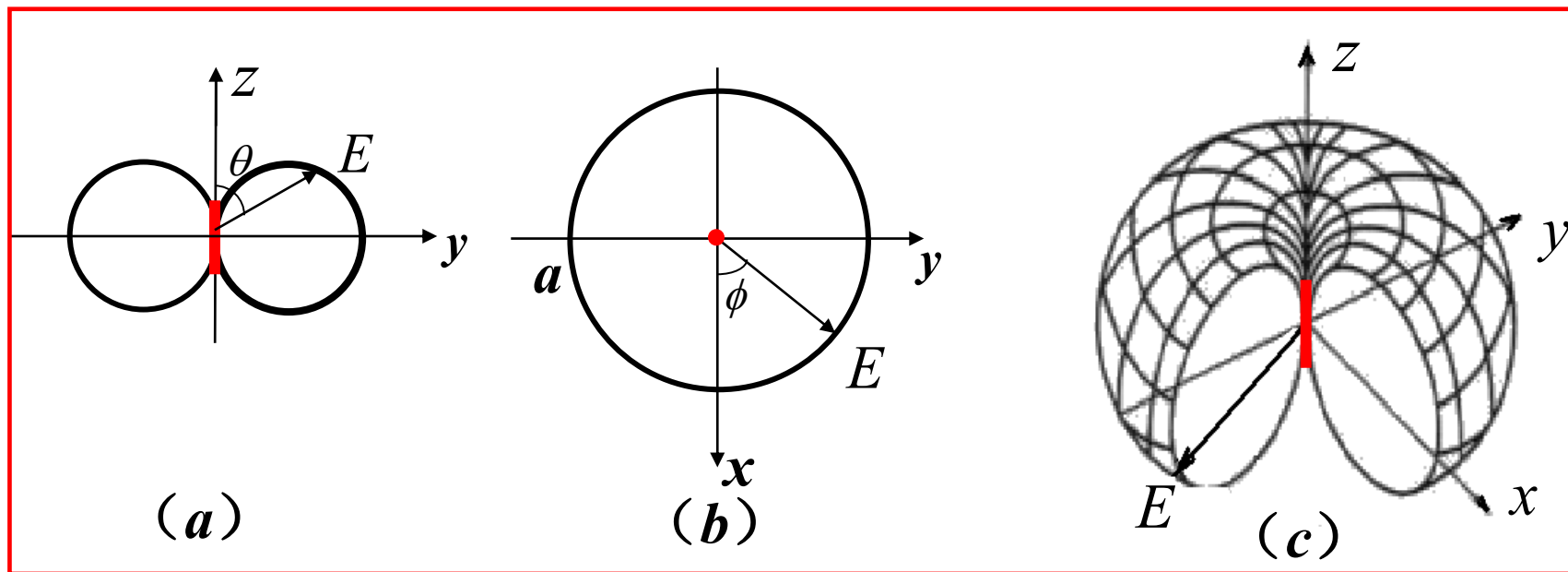
(5) 远区场具有方向性, 按  $\sin\theta$  变化。场量随角度变化的函数  $f(\theta, \phi) = \sin\theta$  称为电偶极子的方向图因子。



## 电偶极子的方向图

在工程上，常用方向图来形象地描述远区场的方向性。将  $f(\theta, \phi) = \sin \theta$  用极坐标画出来，即得到电偶极子的方向图。

图 $a$  是  $E$  面（电场矢量所在并包含最大辐射方向的平面）方向图；图 $b$  是  $H$  面（磁场矢量所在并包含最大辐射方向的平面）方向图；图 $c$  是立体方向图。



## 远区场的辐射功率

平均功率流密度:

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{e}_\theta E_\theta \times \vec{e}_\phi H_\phi^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{e}_r E_\theta H_\phi^*] = \vec{e}_r \frac{E_\theta^2}{2\eta} = \vec{e}_r \frac{\eta}{2} H_\phi^2 = \vec{e}_r \frac{\eta}{2} \left| \frac{Il \sin \theta}{2\lambda r} \right|^2$$

辐射功率: 
$$P_r = \oint_S \vec{S}_{\text{av}} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{e}_r \frac{\eta}{2} \left( \frac{Il \sin \theta}{2\lambda r} \right)^2 \cdot \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\pi \eta}{3} \left( \frac{Il}{\lambda_0} \right)^2$$

$$= 40\pi^2 I^2 \left( \frac{l}{\lambda_0} \right)^2$$

辐射电阻: 
$$R_r = \frac{2P_r}{I^2} = 80\pi \left( \frac{l}{\lambda_0} \right)^2 \quad \text{—— 辐射电阻低}$$

**例8.2.1** 频率为10 MHz 的功率源馈送给电偶极子的电流为25 A，设电偶极子的长度为50 cm，试计算：（1）赤道平面上离原点10 km 处的电场和磁场；（2） $r=10$  km 处的平均功率密度；（3）辐射电阻。

**解：**（1）  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} f = \frac{\pi}{15} \text{ rad/m}$        $kz = \frac{\pi}{15} \times 10 \times 10^3 = \frac{2\pi}{3} \times 10^3 \gg 1$  —— 远区场

$$E_{\theta} = j \frac{Ilk^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r} e^{-jkr} = -j7.854 \times 10^{-3} e^{-j2.1 \times 10^3} \text{ V/m}$$

故

$$H_{\phi} = j \frac{Ilk \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} = j20.83 \times 10^{-6} e^{-j2.1 \times 10^3} \text{ A/m}$$

$$(2) \quad \vec{S}_{av} = \vec{e}_r \frac{\eta}{2} \left| \frac{Il \sin \theta}{2\lambda r} \right|^2 = \vec{e}_r 81.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$$

$$(3) \quad R_r = 80\pi \left( \frac{l}{\lambda_0} \right)^2 = 0.22 \text{ } \Omega$$

## 8.3 电与磁的对偶性

## 1. 磁流与磁荷

迄今为止，在自然界中还没有发现真实的磁荷、磁流。

磁流、磁荷是人为引入的假想源（等效源）。

■ 如：介质磁化 → 引入等效磁荷： $\rho_m = \mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$ 、 $\rho_{mS} = \mu_0 \vec{e}_n \cdot \vec{M}$

■ 又如：由某种局外场等效而得：

设  $\vec{B}_0$  是局外磁场，激发的磁场为  $\vec{B}_m$ ，则  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$

$$\text{由 } \nabla \cdot \vec{B}_m + \nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B}_m = -\nabla \cdot \vec{B}_0 = \rho_m$$

$$\text{则 } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} - \frac{\partial \vec{B}_m}{\partial t} = -\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}_m}{\partial t}$$

等效磁荷

$$\text{其中 } \vec{J}_m = \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \text{ 为等效磁流} \quad \text{且 } \nabla \cdot \vec{J}_m = \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{B}_0)}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$$

## 引入磁荷与磁流的意义

引入磁荷与磁流的概念，将一部分原来由电荷和电流产生的电磁场用能够产生同样电磁场的等效磁荷和等效磁流来取代，即将“电源”换成等效“磁源”，有时可大大简化问题的分析计算。

引入磁荷和磁流的概念以后，麦克斯韦方程组就以对称的形式出现：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J}_m \\ \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \end{array} \right.$$

等式右边为正，表示电流与磁场之间有右手螺旋关系

等式右边为负，表示磁流与电场之间有左手螺旋关系

下标m 表示磁量

下标e 表示电量

## 2. 对偶原理

源	电荷 $\rho_e$ 、电流 $\vec{J}_e$	磁荷 $\rho_m$ 、磁流 $\vec{J}_m$
场	$\vec{E}_e$ 、 $\vec{D}_e$ 、 $\vec{H}_e$ 、 $\vec{B}_e$	$\vec{E}_m$ 、 $\vec{D}_m$ 、 $\vec{H}_m$ 、 $\vec{B}_m$
则有	$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}_e = \frac{\partial \vec{D}_e}{\partial t} + \vec{J}_e \\ \nabla \times \vec{E}_e = -\frac{\partial \vec{B}_e}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B}_e = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D}_e = \rho_e \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}_m = \frac{\partial \vec{D}_m}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}_m}{\partial t} - \vec{J}_m \\ \nabla \cdot \vec{B}_m = \rho_m \\ \nabla \cdot \vec{D}_m = 0 \end{cases}$

对偶关系:	$\vec{E}_e$	$\vec{H}_e$	$\vec{D}_e$	$\vec{B}_e$	$\vec{J}_e$	$\rho_e$	$\mu$	$\varepsilon$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
	$\vec{H}_m$	$-\vec{E}_m$	$\vec{B}_m$	$-\vec{D}_m$	$\vec{J}_m$	$\rho_m$	$\varepsilon$	$\mu$

## 3. 位函数的对偶关系

对应于矢量磁位  $\vec{A}$  有矢量电位  $\vec{A}_m$ ;

对应于标量电位  $\varphi$  有标量磁位  $\varphi_m$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_e = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E}_e = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_e(\vec{r}', t - R/v)}{R} dV' \\ \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho_e(\vec{r}', t - R/v)}{R} dV' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_m = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{A}_m \\ H_m = -\nabla \varphi_m - \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} \\ \vec{A}_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t - R/v)}{R} dV' \\ \varphi_m = \frac{1}{4\pi\mu} \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}', t - R/v)}{R} dV' \end{array} \right.$$

## 8.4 磁偶极子的辐射

磁偶极子又称磁流元，其实际模型是一个小电流圆环，如图所示。它的周长远小于波长，且环上载有的时谐电流处处等幅同相，表示为

$$i(t) = I \cos(\omega t) = \operatorname{Re}[I e^{j\omega t}]$$

讨论小环电流的远区场，满足  $r \gg a$ ，故可把小环电流看成一个时变的磁偶极子，磁偶极子上的磁荷分别为

$$q_m = \mu_0 i S / l$$

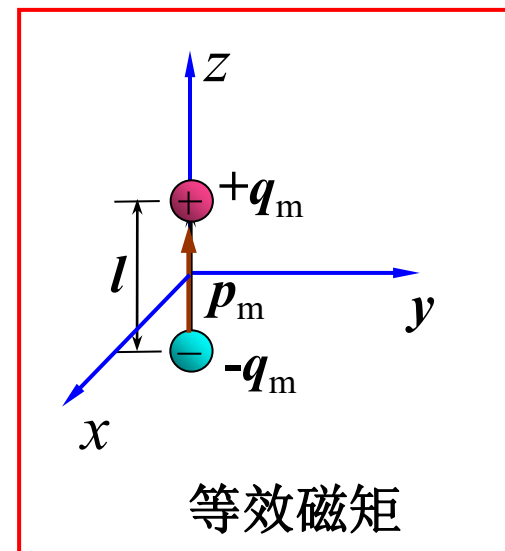
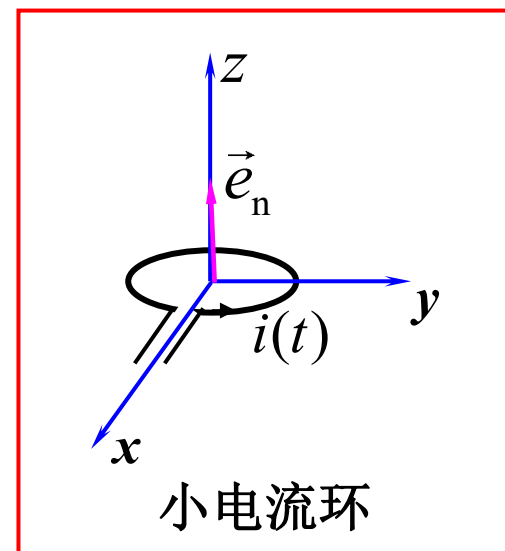
小电流圆环的面积

磁极间的假想磁流

$$I_m = \frac{dq_m}{dt} = \frac{\mu_0 S}{l} \frac{di}{dt}$$

表示为复数形式

$$I_m = j\omega\mu_0 SI / l$$





根据电磁对偶原理，自由空间的磁偶极子与自由空间的电偶极子存在如下的对偶关系：

$$H_{m\theta} \leftrightarrow E_{e\theta}, -E_{m\phi} \leftrightarrow H_{e\phi}, I_m l \leftrightarrow Il, \mu_0 \leftrightarrow \varepsilon_0$$

根据对偶关系,由电偶极子的远区场可得出磁偶极子的远区场

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{e\theta} = j \frac{Il}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sin \theta e^{-jkr} \\ H_{e\phi} = j \frac{Il}{2\lambda r} \sin \theta e^{-jkr} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{对偶}} \left\{ \begin{array}{l} H_{m\theta} = j \frac{I_m l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sin \theta e^{-jkr} \\ -E_{m\phi} = j \frac{I_m l}{2\lambda r} \sin \theta e^{-jkr} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{m\phi} = \frac{\omega \mu_0 SI}{2\lambda r} \sin \theta e^{-jkr} \\ H_{m\theta} = -\frac{\omega \mu_0 SI}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sin \theta e^{-jkr} \end{array} \right.$$

$I_m l = j \omega \mu_0 SI$

说明:

- 磁偶极子的远区辐射场也是非均匀球面波;
- 波阻抗也等于媒质的本征阻抗;
- 辐射也有方向性。磁偶极子的E面方向图与电偶极子的H面方向图相同, 而H面方向图与电偶极子的E面方向图相同。

磁偶极子的总的辐射功率为:

$$P_r = \oint_S \vec{S}_{av} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_S \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \cdot d\vec{S} = 160\pi^4 I^2 \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$$

辐射电阻为:  $R_r = \frac{2P_r}{I^2} = 320\pi^4 \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2 \quad \Omega$

## 8.5 天线的基本参数

1. 方向性系数 $D$ 

定义：在相同辐射功率下，某天线产生最大辐射强度与点源天线在同一点处产生的辐射强度的比值，称为该天线的方向性系数，即

$$D = \frac{E^2}{E_0^2}$$

相等辐射功率

被考察天线最大辐射方向一点的电场强度

理想点源天线在同一点的电场强度

方向性系数也可定义为

$$D = \frac{P_0}{P}$$

相等电场强度

理想点源天线的总辐射功率

被考察天线的总辐射功率

天线的方向性系数表征天线集中辐射的程度。

元天线的方向性系数为1.5。

## 2. 天线效率 $\eta$

天线效率定义为天线的辐射功率与输入功率之比，即

$$\eta = \frac{P_r}{P_{in}} = \frac{P_r}{P_r + P_L}$$

天线的总损耗辐射功率

由于存在损耗，实际天线的效率不可能为100%。

## 3. 增益系数 $G$

在相同输入功率的条件下，被考察天线在最大辐射方向上某点产生功率密度与理想无方向性天线在同一点产生功率密度的比值，称为该天线的增益，即

$$G = \frac{S_{\max}}{S_0} \bigg|_{P_{in} = P_{in0}} = \frac{E_{\max}^2}{E_0^2} \bigg|_{P_{in} = P_{in0}} = \eta D$$

被考察天线的输入功率

理想无方向性天线的输入功率

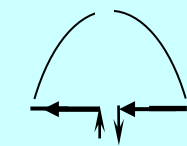
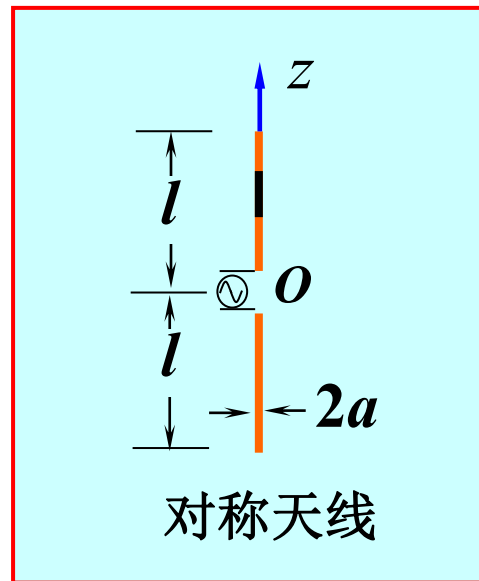
## 8.6 对称天线

对称天线由两臂长各为 $l$ 、半径为 $a$ 的金属导体构成。

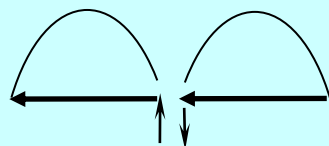
## 8.6.1 对称天线上的电流分布

对称天线上的电流近似成驻波分布

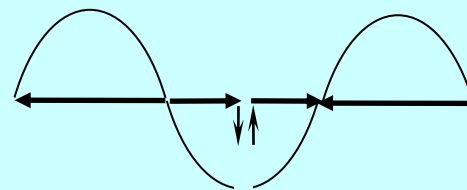
$$I(z) = \begin{cases} I \sin[k(l-z)] & 0 < z < l \\ I \sin[k(l+z)] & -l < z < 0 \end{cases}$$



(a)  $2l = \lambda / 2$



(b)  $2l = \lambda$



(c)  $2l = 3\lambda / 2$

对称天线上的电流分布

## 8.6.2 对称天线的辐射场

根据电偶极子辐射场公式，对称天线上的电流元  $I(z)dz$  在观察点产生的辐射电场为

$$dE_{\theta} = j \frac{60\pi I \sin[k(l - |z|)] dz}{\lambda r'} \sin \theta e^{-jkr'}$$

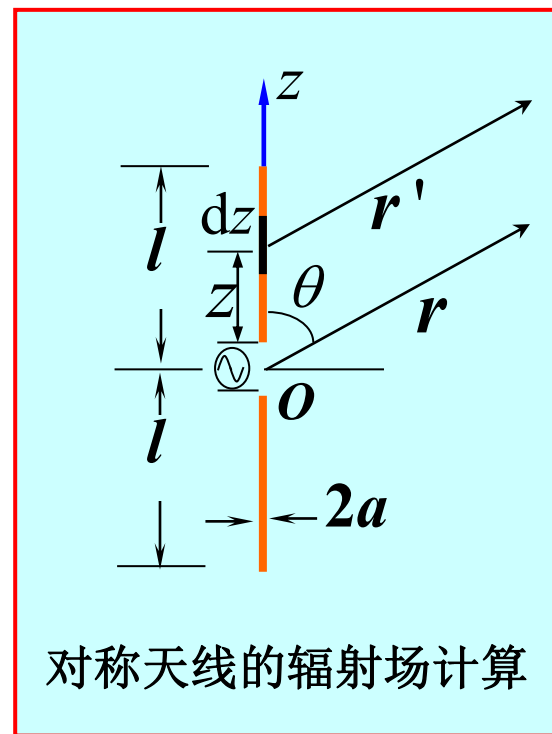
对于远区场：

$$1 / r' \approx 1 / r$$

$$e^{-jkr'} \approx e^{-jkr} e^{jkz \cos \theta}$$

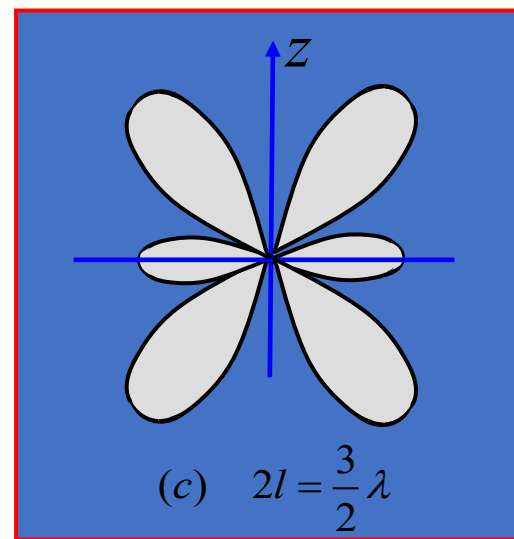
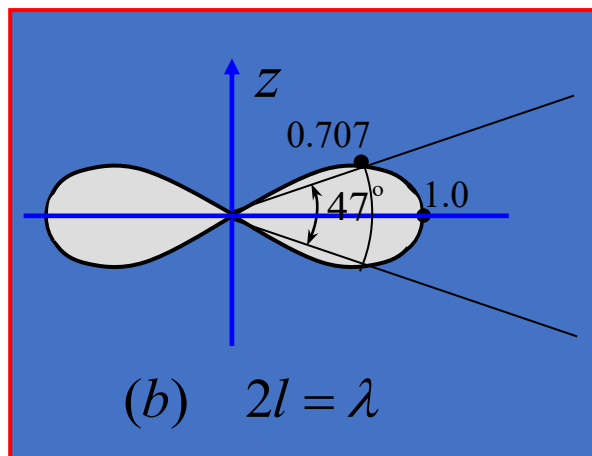
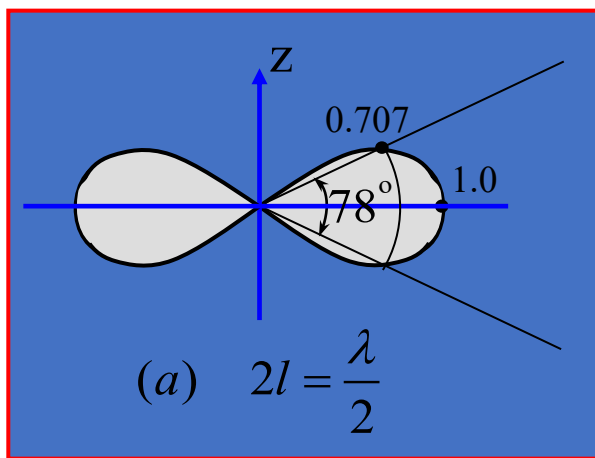
故对称天线的辐射场为：

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= \int_{-l}^l dE_{\theta} = j \frac{60\pi I e^{-jkr}}{\lambda r} \sin \theta \int_{-l}^l \sin[k(l - |z|)] e^{jkz \cos \theta} dz \\ &= j \frac{60I}{r} \left[ \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta} \right] e^{-jkr} \end{aligned}$$



对称天线的归一化方向性函数为

$$F(\theta, \phi) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta}$$



对称天线的E面方向图

## 8.6.3 半波天线

半波天线是对称天线中应用最广的。

半波天线的辐射场 
$$E_{\theta} = j \frac{60I}{r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} e^{-jkr}$$

半波天线的归一化方向性函数 
$$F(\theta, \phi) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}$$

半波天线的主瓣宽度  $2\theta_{0.5} = 78^{\circ}$

半波天线的辐射功率

$$P_r = \oint_S \vec{S}_{av} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2 \times 120\pi} \int_0^{2\pi} |E_{\theta}|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 36.54 I^2$$

半波天线的辐射电阻  $R_r = \frac{2P_r}{I^2} = 73.1 \quad \Omega$

半波天线的方向性系数  $D = 1.64$  或  $D = 2.15 \text{ dB}$



### 8.7 天线阵

天线阵是将若干个天线按一定规律排列组成的天线系统。

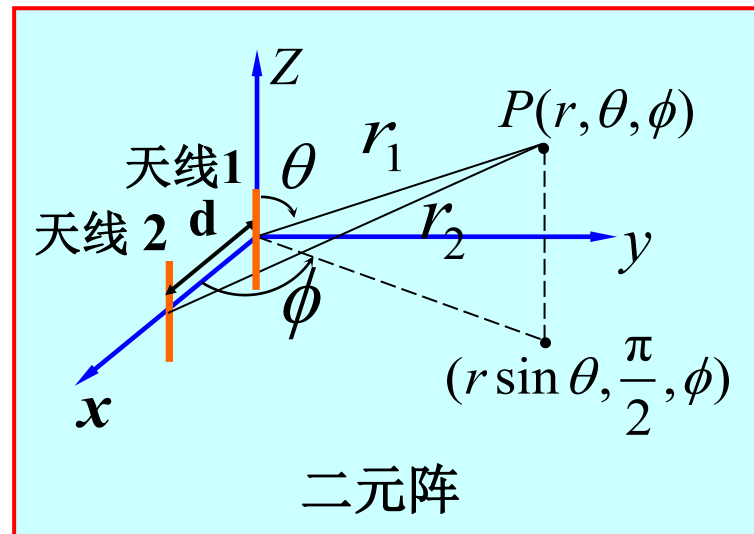
利用天线阵可以获得所期望的辐射特性，诸如更高的增益、需要的方向性图等。

组成天线阵的独立单元称为阵元，排列的方式有直线阵、平面阵等。

天线阵的辐射特性取决于阵元的型式、数目、排列方式、间距以及各阵元上的电流振幅和相位等。

## 8.7.1 方向图相乘原理

如图所示两个沿  $z$  轴取向、沿  $x$  轴排列的对称天线构成的二元阵，间距为  $d$ 。设阵元1的激励电流为  $I_1$ ，阵元2的激励电流为



$$I_2 = m I_1 e^{j\xi}$$

两阵元激励电流的相位差

两阵元激励电流的振幅比

二元阵的辐射场等于两个阵元的辐射场的矢量和。

两个阵元在观察点产生的电场

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_\theta j \frac{60I_1}{r_1} F_1(\theta, \phi) e^{-jk r_1} \quad \vec{E}_2 = \vec{e}_\theta j \frac{60I_2}{r_2} F_2(\theta, \phi) e^{-jk r_2}$$

其中

$$F_1(\theta, \phi) = F_2(\theta, \phi) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta}$$

对于远离天线阵的观察点，可作如下近似：

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r_2} \text{ (对振幅项)} \quad r_2 \approx r_1 - d \sin \theta \cos \phi \text{ (对相位项)}$$

因此

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \vec{e}_\theta j \frac{60mI_1 e^{j\xi}}{r_1} F_1(\theta, \phi) e^{-jk(r_1 - d \sin \theta \cos \phi)} \\ &= \vec{e}_\theta j \frac{60I_1 m e^{j\xi}}{r_1} F_1(\theta, \phi) e^{-jk r_1} e^{jkd \sin \theta \cos \phi} = m \vec{E}_1 e^{j\psi} \end{aligned}$$

式中  $\psi = \xi + kd \sin \theta \cos \phi$  是观察点  $P$  处的电场  $E_1$  和  $E_2$  的相位差。

观察点 $P$ 的合成电场为

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_1(1 + me^{j\psi}) = \vec{e}_\theta j \frac{60I_1}{r_1} F_1(\theta, \phi) e^{-jkr_1} (1 + me^{j\psi})$$

$$|\vec{E}| = \frac{60I_1}{r_1} F_1(\theta, \phi) [1 + m^2 + 2m \cos \psi]^{1/2}$$

$$= \frac{60I_1}{r_1} F_1(\theta, \phi) \cdot F_{ar}(\theta, \phi)$$

二元阵的方向性函数等于阵因子和元因子的乘积，这就是方向图相乘原理。

$$F_{ar}(\theta, \phi) = [1 + m^2 + 2m \cos \psi]^{1/2}$$

$$= [1 + m^2 + 2m \cos(\xi + kd \sin \theta \cos \phi)]^{1/2}$$

元因子，只与阵元本身的结构和取向有关

阵因子，仅与各阵元的排列、激励电流的振幅和相位有关，而与阵元无关

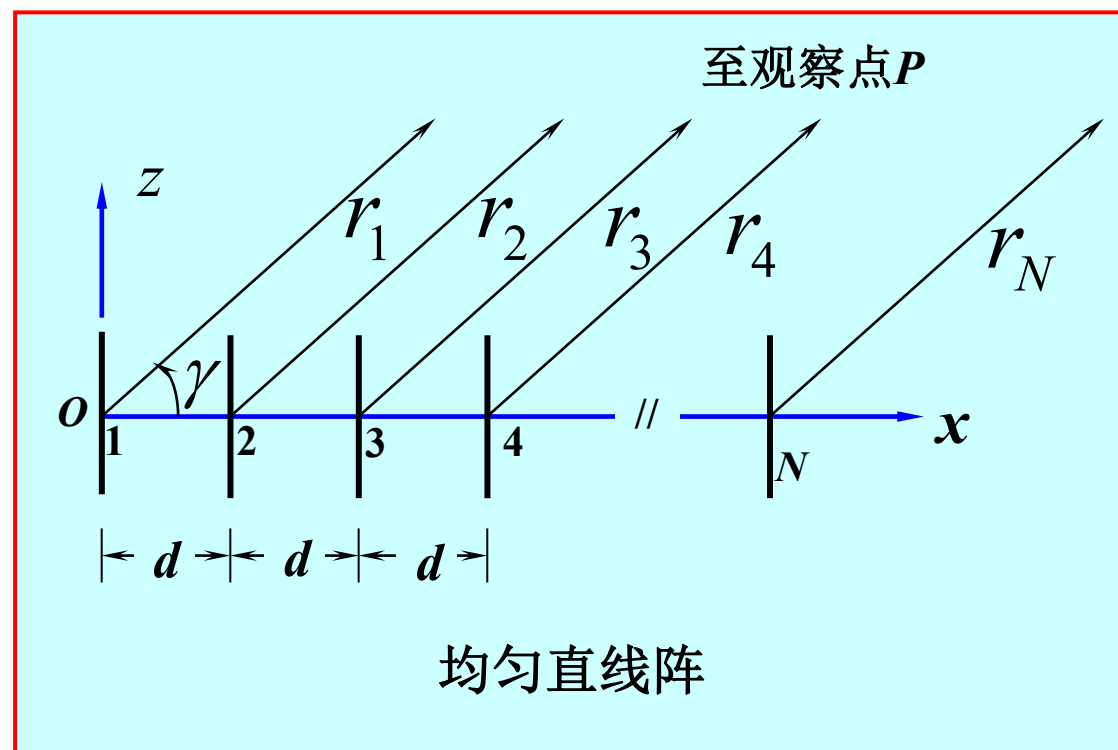
方向图相乘原理对 $N$ 元相似阵也适用。

## 8.7.2 均匀直线式天线阵

均匀直线阵是指天线阵的各阵元结构相同，并以相同的取向和相等的间距排列成直线，各个阵元的激励电流振幅相等、相位则沿阵的轴线以相同的比例递增或递减的天线阵。

$N$ 个阵元沿  $x$  轴排列，两相邻阵元的间距为  $d$ ，激励电流相位差为  $\xi$ ，则相邻两阵元辐射场的相位差为

$$\psi = \xi + kd \cos \gamma$$



以阵元1为参考，则阵元 2 的辐射场的相位差为 $\psi$ ，阵元3的辐射场的相位差为 $2\psi$ ，依此类推。天线阵的辐射场为

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots + \vec{E}_N \\ &= \vec{E}_1 \left[ 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{j(N-1)\psi} \right]\end{aligned}$$

则  $|\vec{E}| = |\vec{E}_1| \left| \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}} \right| = |\vec{E}_1| f_N(\psi) \quad f_N(\psi) = \sin \frac{N\psi}{2} / \sin \frac{\psi}{2}$

因  $f_{N\max} = \lim_{\psi \rightarrow 0} \left( \sin \frac{N\psi}{2} / \sin \frac{\psi}{2} \right) = N$

$N$  元均匀直线  
阵的阵因子

故  $N$  元均匀直线阵的归一化阵因子  $F_N(\psi) = \frac{1}{N} \sin \frac{N\psi}{2} / \sin \frac{\psi}{2}$

### 8.8 口径场辐射

#### 本节内容

8.8.1 惠更斯元的辐射

8.8.2 平面口径的辐射

## 8.8.1 惠更斯元的辐射

惠更斯元是分析口径场辐射的基本元。将口径面 $S$ 分割成许多面元，这些面元就是惠更斯元。

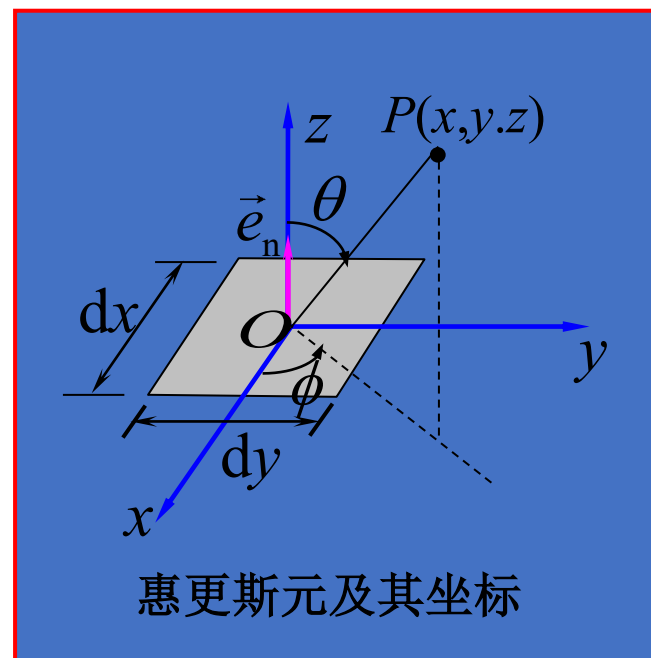
如图所示，面元  $d\vec{S} = \vec{e}_n dx dy$  位于 $xOy$ 平面上，设面元上有均匀分布的切向电场  $E_y$  和切向磁场  $H_x$ 。

根据电磁场的等效原理，面元的磁场  $H_x$  可等效为一电流密度  $J_S$ ，电场  $E_y$  可等效为一磁流密度  $J_{mS}$ ，且

$$\vec{J}_S = \vec{e}_n \times \vec{H} = \vec{e}_z \times \vec{e}_x H_x = \vec{e}_y H_x$$

$$\vec{J}_{mS} = -\vec{e}_n \times \vec{E} = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y E_y = \vec{e}_x E_y$$

$$I = H_x dx \quad I_m = E_y dy$$





沿  $y$  轴放置的电偶极子  $I dy = H_x dx dy$  的远区场

$$\begin{cases} d\vec{E}_e = -j \frac{H_x dx dy}{2\lambda r} \eta (\vec{e}_\theta \cos \theta \sin \phi + \vec{e}_\phi \cos \phi) e^{-jkr} \\ d\vec{H}_e = -j \frac{H_x dx dy}{2\lambda r} (-\vec{e}_\theta \cos \phi + \vec{e}_\phi \cos \theta \sin \phi) e^{-jkr} \end{cases}$$

沿  $x$  轴的磁偶极子  $I_m dx = E_y dy dx$  的远区场

$$\begin{cases} d\vec{E}_m = j \frac{E_y dx dy}{2\lambda r} (\vec{e}_\theta \sin \phi + \vec{e}_\phi \cos \theta \cos \phi) e^{-jkr} \\ d\vec{H}_m = j \frac{E_y dx dy}{2\eta \lambda r} (-\vec{e}_\theta \cos \theta \cos \phi + \vec{e}_\phi \sin \phi) e^{-jkr} \end{cases}$$

叠加即得惠更斯元的远区辐射场 (利用  $E_y / H_x = -\eta$ )

$$d\vec{E} = d\vec{E}_e + d\vec{E}_m = j \frac{E_y dS}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) (\vec{e}_\theta \sin \phi + \vec{e}_\phi \cos \phi) e^{-jkr}$$

在E面（即  $yOz$  平面）上， $\phi = 90^\circ$ ，则惠更斯元的辐射场

$$d\vec{E}\Big|_E = \vec{e}_\theta j \frac{E_y dS}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) e^{-jkr}$$

在H面（即  $xOz$  平面）上， $\phi = 0^\circ$ ，则惠更斯元的辐射场

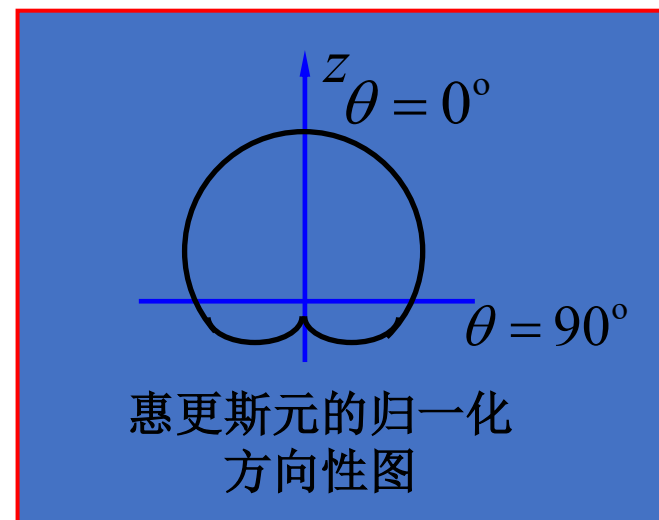
$$d\vec{E}\Big|_H = \vec{e}_\phi j \frac{E_y dS}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) e^{-jkr}$$

可见，惠更斯元的两个主平面上的归一化方向性函数均为

$$F(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$$

根据上式画出归一化方向性图如图所示。

可见，惠更斯元的最大辐射方向与面元相垂直。



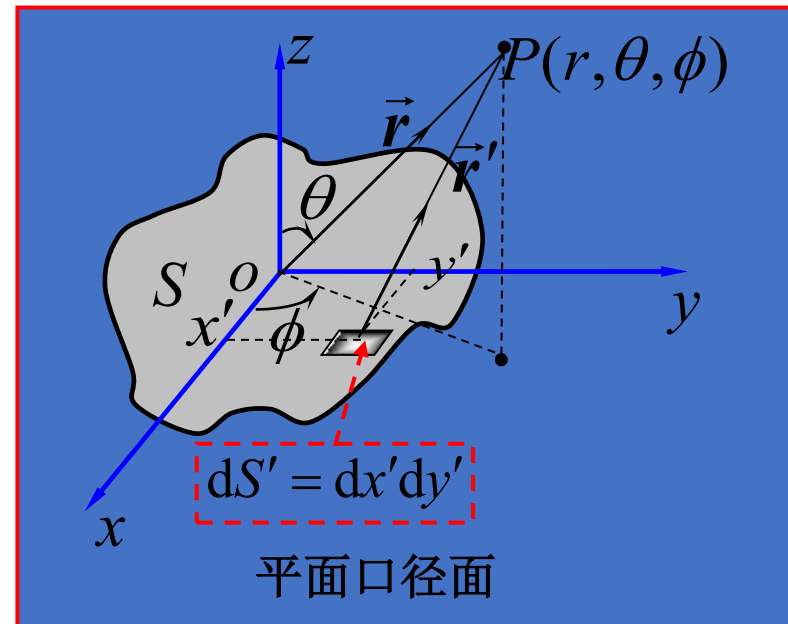
## 8.8.2 平面口径的辐射

实际应用中的面天线，其口径面多为平面，例如喇叭天线、抛物面天线等。

如图所示，平面口径面位于 $xOy$ 平面上，口径面积为 $S$ 。远区观察点为 $P(r, \theta, \phi)$ ，面元 $dS$ 至观察点的距离为 $r'$ 。

在E面和H面，将辐射场沿整个口径面积分，即得到平面口径面的远区辐射场

$$E_P = j \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) \int_S E_y e^{-jkr'} dS$$



对于远区的观察点 $P$ （即当 $r$ 远远大于口径尺寸），可以认为

$$r' \approx r - x' \sin \theta \cos \phi - y' \sin \theta \sin \phi$$

故得 
$$E_P = j \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) e^{-jkr} \int_S E_y e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy'$$

在E面（即 $yOz$ 平面）上， $\phi = 90^\circ$ ，则

$$E_P|_E = E_\theta = j \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) e^{-jkr} \int_S E_y e^{jky' \sin \theta} dx' dy'$$

在H面（即 $xOz$ 平面）上， $\phi = 0^\circ$ ，则

$$E_P|_H = E_\phi = j \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) e^{-jkr} \int_S E_y e^{jkx' \sin \theta} dx' dy'$$

根据给定的口径面形状及口径面上的场分布计算出远区辐射场。

## 1. 矩形口径面

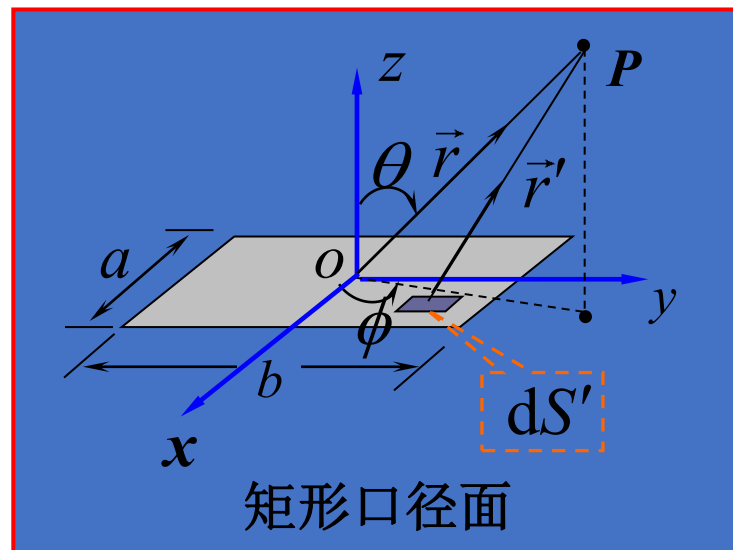
如图所示，矩形口径面的尺寸为  $a \times b$ ，  
口径面上的电场沿  $y$  轴方向且均匀分布，  
即  $E_y = E_0$ ，则

$$E_P|_E = E_\theta$$

$$= j \frac{E_0}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) e^{-jkr} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-b/2}^{b/2} e^{jky' \sin \theta} dy'$$

$$= j \frac{aE_0}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) e^{-jkr} \int_{-b/2}^{b/2} e^{jky' \sin \theta} dy'$$

$$E_P|_H = E_\phi = j \frac{bE_0}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) e^{-jkr} \int_{-a/2}^{a/2} e^{jkx' \sin \theta} dx'$$



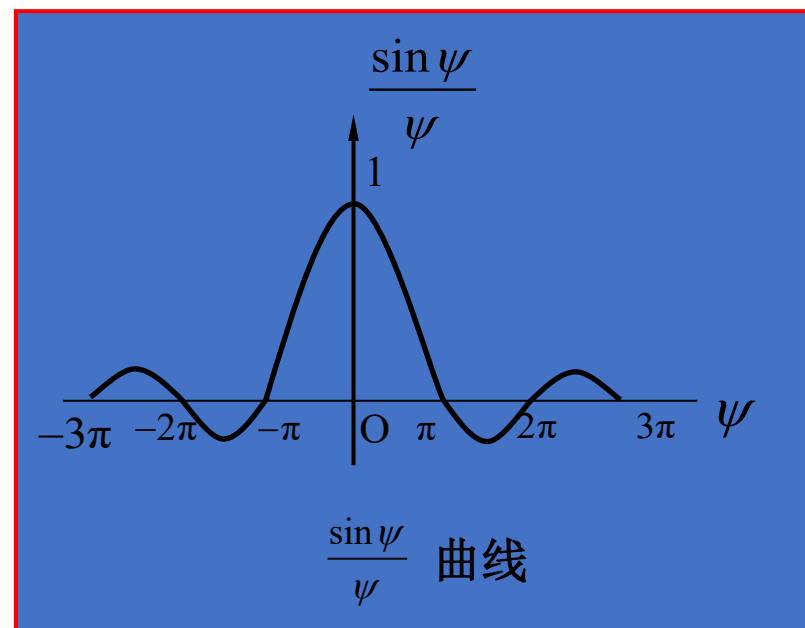
均匀矩形口径面辐射场的归一化方向性函数分别为

$$F_E(\theta) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \frac{\sin \psi_1}{\psi_1} \quad F_H(\theta) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \frac{\sin \psi_2}{\psi_2}$$

$$\text{其中} \quad \psi_2 = \frac{ka \sin \theta}{2} \quad \psi_1 = \frac{kb \sin \theta}{2}$$

如图表示  $\frac{\sin \psi}{\psi}$  随  $\psi$  变化的曲线，可见最大辐射方向在  $\psi = 0$  处，即在  $\theta = 0^\circ$  处。

当  $a/\lambda$  和  $b/\lambda$  都较大时，均匀矩形口径面辐射场能量集中在  $\theta$  角较小的圆锥形区域内。



## 2. 圆形口径面

如图所示，面元  $dS'$  的坐标  $(x', y')$  换成极坐标变量表示

$$x' = \rho' \cos \phi'$$

$$y' = \rho' \sin \phi'$$

$$dS' = dx' dy' = \rho' d\phi' d\rho'$$

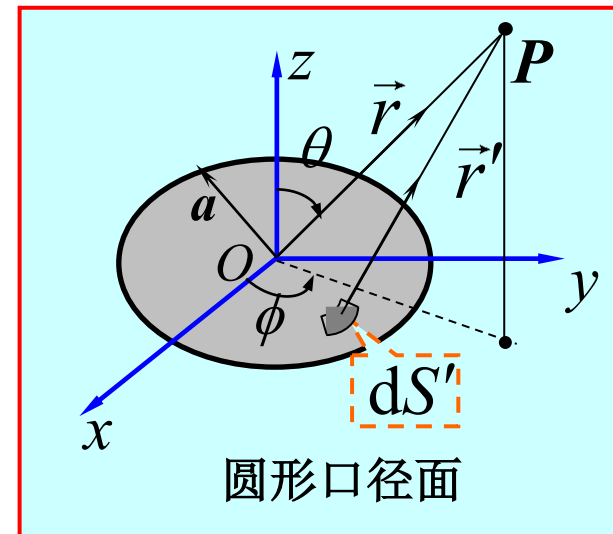
则  $r' = r - \rho' \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi')$

对于E面， $\phi = 90^\circ \Rightarrow r' \approx r - \rho' \sin \theta \cos \phi'$

则  $E_P|_E = E_\theta = j \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) \int_s E_y e^{-jk\rho' \sin \theta \sin \phi'} \rho' d\phi' d\rho'$

对于H面， $\phi = 0^\circ \Rightarrow r' \approx r - \rho' \sin \theta \sin \phi'$

则  $E_P|_H = E_\phi = j \frac{1}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) \int_s E_y e^{-jk\rho' \sin \theta \cos \phi'} \rho' d\phi' d\rho'$



假设口径面上的电场沿y轴方向，且在半径为 $a$ 的圆面积上场均匀分布，即  $E_y = E_0$ 。

利用

$$\int_0^{2\pi} e^{-jk\rho'\sin\theta\sin\phi'} d\phi' = 2\pi J_0(k\rho'\sin\theta)$$

$$\int_0^a t J_0(t) dt = a J_1(a) \quad t = k\rho'\sin\theta$$

其中 $J_0(t)$ 、 $J_1(a)$ 分别为零阶和一阶贝塞尔函数。

由此可得，均匀圆形口径面辐射场的归一化方向性函数

$$F_E(\theta) = F_H(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2} \cdot \frac{2J_1(\psi_3)}{\psi_3}$$

式中  $\psi_3 = ka \sin\theta$