

---

➤ **Asignatura:** Optimización Financiera

---

➤ **Módulo 2:** Renta Fija

---

➤ **Lección 2:** Mercado de Bonos

---

## Introducción

La conformación de un portafolio de renta fija de acuerdo a las necesidades y expectativas de la empresa además de las diferentes alternativas que ofrece el mercado, permite maximizar los recursos de la empresa. Sin embargo, solo la óptima planeación de estos recursos permitirá llegar al máximo beneficio para la empresa.

Tip:

Los bonos, a diferencia de otros activos financieros, permiten obtener mayores rendimientos. Por tanto el conocimiento de este instrumento financiero, facilitará la conformación de su portafolio de acuerdo a las necesidades propias de la empresa.

## Tema 1: El Mercado de Bonos

Un bono es un contrato que concede al inversionista el derecho a percibir un flujo de pagos periódicos en el futuro, a cambio de entregar hoy una cantidad de dinero. A diferencia de los préstamos, los activos financieros o títulos de renta fija, permiten la participación de un mayor número de inversionistas, ya que a estos les representa la oportunidad de obtener rendimientos más altos, que los que podrían encontrar invirtiendo en alternativas como los bancos. Los títulos de renta fija se diferencian de los otros instrumentos de inversión, porque el rendimiento que otorgan está definido desde el momento de su emisión.

Para poder trabajar con un bono se debe conocer el cupón y la tasa del cupón, el plazo y la periodicidad del mismo. El cupón de un título es el valor de lo que se recibirá si se adquiere el título. El plazo, es el periodo de tiempo durante el cual el título estará vigente. La periodicidad es cada cuanto tiempo pagarán los rendimientos del cupón.

Los títulos de renta fija como los bonos, pueden ser emitidos de tres maneras: a la par, con prima o con descuento. La emisión a la par dice que se tiene que pagar el valor nominal para recibir, al vencimiento, el valor nominal más el rendimiento que generen. Las emisiones con prima son aquellas por las cuales, además de pagar el valor nominal, se tiene que pagar una cantidad adicional. El descuento es lo contrario a la emisión con prima, en éste se paga por el título, el valor nominal menos una cantidad predeterminada

Las razones por las cuales se hacen las emisiones con descuento o con prima son dos: la primera es para aprovechar las ventajas fiscales que se puedan presentar y la segunda es para unificar las emisiones de un tiempo (t) y anteriores (t-1) y así facilitar la liquidez.

## PROCESO DE EMISIÓN DE LOS BONOS EN COLOMBIA

Para describir el proceso de emisión de los bonos es conveniente definir algunos conceptos:

**EMISOR:** Es la entidad originadora de los títulos; quien hace la promesa de pago de los títulos y recibe los recursos de la emisión.

- Pueden emitir títulos privados: Las sociedades por acciones, sociedades limitadas, cooperativas y entidades sin ánimo de lucro.
- Pueden emitir títulos públicos: La Nación, las entidades territoriales, las empresas industriales del Estado y sociedades de economía mixta.

**ESTRUCTURADOR o BANCA DE INVERSIÓN:** Es la entidad que se encarga de realizar la oferta.

En Colombia son estructuradores las Fiduciarias, las Corporaciones Financieras, las Comisionistas de Valores y Bancas de Inversión. Dichas entidades se encargan de hacer el prospecto de Colocación, que es el documento base del proceso y hacer los análisis técnicos, financieros y legales requeridos en el proceso.

**OPERACIONES UNDERWRITING (Colocaciones):** Después de los trámites legales de la emisión, es necesario colocar o suscribir (vender) los títulos en el mercado. Esta colocación se debe hacer por medio de un agente colocador o comisionista que ofrece el servicio de Comercialización.

Este servicio se puede hacer a través de tres modalidades:

- **Underwriting en Firme:** El comisionista compra toda la emisión y después la vende en el mercado de valores y por consiguiente asume todos los riesgos de la colocación.
- **Underwriting Garantizado:** El comisionista se compromete a comprar la parte de la

emisión que no se coloca inmediatamente en el mercado.

- Underwriting al Mejor Esfuerzo: Simplemente se compromete a hacer todo lo posible por colocar la emisión.

El proceso de emisión de bonos y sus costos asociados se ilustran en las siguientes figuras:

## LA CALIFICACIÓN DE RIESGO

La calificación es una opinión de una entidad independiente especializada en estudios de riesgo sobre la calidad crediticia de una emisión de títulos. De esta manera las sociedades calificadoras de valores promueven la eficiencia y estabilidad en el mercado de valores. La evaluación se realiza sobre la capacidad de la entidad emisora de cumplir puntualmente los compromisos financieros derivados de la emisión. Cabe señalar, que tal opinión se concibe sobre la calidad crediticia de la deuda de un emisor, más no de la empresa y no puede interpretarse como una garantía de pago.

La evaluación del riesgo crediticio se basa en el análisis de la interrelación de los elementos tanto cualitativos como cuantitativos que pueden afectar el cumplimiento de los compromisos financieros adquiridos por un emisor. Entre los cualitativos se encuentran factores tales como: entorno macroeconómico, sector en que desarrolla su actividad, posición competitiva a nivel nacional e internacional, planes y estrategias, calidad de la administración, innovaciones tecnológicas oportunidades de mercado y políticas de control y auditoría. La calificación también implica el análisis cualitativo que evalúa aspectos contables, financieros, de mercado, proyecciones, flujos de ingresos y egresos, productividad, proveedores y clientes, entre otros.

Hasta el momento la Superintendencia financiera ha autorizado el funcionamiento de tres agencias calificadoras que brindan a los agentes el servicio de evaluación del riesgo que ha fomentado la adquisición de muchos de los títulos existentes en el mercado. Dicha calificación es un instrumento que permite ponderar la seguridad de los títulos frente a la rentabilidad que ofrecen sus emisores. Las agencias internacionales calificadoras de riesgo son Fitch Ratings, Standard & Poor`s y Moody`s Investor Service.

### Escala de calificación:

La opinión emitida por las sociedades calificadoras se orienta a distinguir entre dos grados:

- De inversión: Se considera que la emisión no representa mayores riesgos de incumplimiento.
- Especulativo: Se presentan factores de riesgo que podrían llevar al incumplimiento en el pago de intereses o del capital.

Figura 3: Escala de calificación de bonos desde las empresas evaluadoras de riesgo S&P, Moody`s, Fitch.

	S & P Moody`s Fitch		
	AAA	Aaa	AAA
	AA+	Aa1	AA+
	AA	Aa2	AA
	AA-	Aa3	AA-
GRADO DE INVERSIÓN	A+	A1	A+
	A	A2	A
	A-	A3	A-
	BBB+	Baa1	BBB+
	BBB	Baa2	BBB
	BBB-	Baa3	BBB-
	BB+	Ba1	BB+
	BB	Ba2	BB
	BB-	Ba3	BB-
	B+	B1	B+
GRADO ESPECULATIVO	B	B2	B
	B-	B3	B-
	CCC+	Caa1	CCC
	CCC	Caa2	CC
	CCC-	Caa3	C

Una breve descripción de cada una de las categorías se aprecia en la siguiente figura.

Figura 4: Descripción de las calificaciones de riesgo de crédito.

CALIFICACIÓN	DESCRIPCIÓN
AAA	Emisiones con la más alta calidad crediticia. Prácticamente no tienen riesgo.
AA+, AA, AA-	Emisiones con alta calidad crediticia y con fuertes factores de protección. Riesgo modesto.
A+, A, A-	Emisiones con buena calidad crediticia y con factores de protección adecuados. Sin embargo, en períodos de bajas económicas, los riesgos son mayores y más variables.
BBB+, BBB, BBB-	Los factores de protección al riesgo son inferiores al promedio; no obstante, se consideran suficientes para una inversión prudente. Son vulnerables a los ciclos económicos.
BB+, BB, BB-	Emisiones situadas por debajo del grado de inversión, pero se estima probable que cumplan sus obligaciones al vencimiento.
B+, B, B-	Emisiones situadas por debajo del grado de inversión. Existe el riesgo de que no puedan cumplir con sus obligaciones. Los factores de protección

CCC

financiera fluctúan ampliamente con los ciclos económicos. Se emiten situaciones muy por debajo del grado de inversión. Se caracterizan por tener alto riesgo en su pago oportuno. Los factores de protección son escasos.

## Tema 2: Tipo de Bonos

### TIPOLOGÍA DE LOS BONOS

Los bonos tienen varias clasificaciones de acuerdo con sus características:

Clasificación por emisor:

- Público.
- Privado.

Clasificación por su amortización:

- Cupón cero: Sin cupones periódicos de interés
- Bullet: Abona periódicamente intereses, pero son amortizables al vencimiento.
- Amortizing: Se abona periódicamente interés y amortización.
- A perpetuidad: No amortizan nunca (pagan solo renta, son difíciles de encontrar).

Clasificación por características especiales:

- Bonos rescatables (callable bond): El emisor puede solicitar recompra del bono.
- Bonos convertibles en acciones (boceas).
- Bonos con warrants: Posee la opción de adquirir determinada cantidad de acciones.
- Bonos con garantías: Incluye una garantía que cubre los pagos de capital y/o intereses.

Clasificación por tasa de interés:

- Tasa fija.
- Tasa variable (DTF, UVR, prime, libor).

### GARANTÍAS

Los títulos de renta fija pueden ser emitidos y respaldados con base en algún tipo de

garantía, como:

## REALES

### a) Prenda (muebles)

I. Con tenencia: Los CDTs

II. Sin tenencia: La pignoración de vehículos.

### b) Hipoteca (inmuebles)

I. Por naturaleza: Finca, predio.

II. Por adhesión: Nueva escalera forjada en hierro.

III. Por destinación: Tractor de finca.

## PERSONALES

a) Avalistas: Garantiza el pago de un título valor. Solidarios.

b) Codeudores: Solidario, no tiene que ser sobre título valor.

c) Fiadores: Beneficio de exclusión (artículo 2383 y 2384 código civil). Por ejemplo una garantía bancaria.

## EL MENOR RIESGO

- En tiempos de incertidumbre, la alternativa de la renta fija le permite cubrirse de asumir riesgos innecesarios y obtener una rentabilidad atractiva.
- El perfil del riesgo del inversionista determina su actitud hacia ciertas inversiones en momentos de turbulencia. La situación nacional aún es de incertidumbre, por lo que algunos expertos consideran que lo mejor es ir a la fija y en apostarles en el corto plazo a inversiones que no involucren altos niveles de riesgos.
- La renta fija es el instrumento ideal para aquellos inversionistas que prefieren en un momento como el actual permanecer a la espera de un indicio más claro, sobre el rumbo de la economía.

Aunque los papeles de renta fija pueden ser no los más rentables, representan inversiones cautelosas, eso sí, siempre y cuando se hagan con entidades que tengan una buena calificación de riesgo de crédito.

## **Tema 3: Principios de fijación de precios de los bonos**

Los cinco teoremas que se enuncian a continuación, hacen referencia a cómo varían los

precios de los bonos en respuesta a las variaciones de su rendimiento hasta el vencimiento. Se deben conocer a fondo estas propiedades de los bonos, debido a su importancia en la previsión de la variación del precio de mercado de los títulos, con respecto a los cambios en los tipos de interés.

Si el precio de mercado de un bono coincide con su valor nominal, entonces el rendimiento del mismo coincidirá con el tipo de interés del cupón. Ahora bien, si el precio de mercado es inferior (superior) a su valor nominal, el rendimiento hasta el vencimiento será mayor (menor) que el tipo de interés prometido por el emisor.

A continuación se enuncian y comentan los cinco teoremas de la valoración de los bonos. La expresión general para determinar el precio de un bono se presenta en la expresión siguiente:

- Principio 1: El precio de los bonos se mueve en forma inversa a las tasas de interés:
- Principio 2: Mientras más lejos se encuentre el vencimiento de un bono, más sensible es su precio a un cambio en las tasas de interés, si los demás factores se mantienen constantes:
- Principio 3: La sensibilidad del precio de un bono aumenta con el vencimiento, pero a una tasa decreciente (necesita menos tiempo):
- Principio 4: Mientras más baja la tasa de cupón, más sensible es su precio a un cambio en tasas de interés, manteniendo los demás factores constantes, excepto para perpetuidades:
- Principio 5: Para un determinado bono, la ganancia de capital ocasionada por una disminución en rendimiento es mayor en magnitud que la pérdida de capital ocasionada por un aumento en rendimiento de igual magnitud:

## **Tema 4: Determinación de las tasas de rendimientos del mercado**

Determinantes teóricos de la curva de rendimientos

El rendimiento al vencimiento de los activos puede diferir por una variedad de razones, incluyendo distintas probabilidades de incumplimiento y diversos patrones en las fluctuaciones de los retornos esperados, pero también dicho rendimiento puede diferir según el vencimiento de los activos. Las tasas de interés difieren sistemáticamente en bonos de distinto vencimiento, aún si todas las otras características de estos son las mismas.

La representación gráfica de la estructura a plazo de las tasas de interés, es decir, entre el

rendimiento al vencimiento de activos financieros de la misma calidad crediticia y sus respectivos períodos de vencimiento, es la curva de rendimientos. Por su parte, la forma o pendiente de la curva de rendimientos, está determinada por diferentes características y fuerzas económicas. Generalmente, la curva de rendimientos tiene pendiente positiva, esto es, las tasas a plazo más corto son menores que las de plazo más largo, véase:

Existen ocasiones en las que la curva de retorno tiene pendiente negativa, lo que implica que las tasas de corto plazo son más altas que las de largo plazo; esto se designa como una curva de rendimientos invertida. Los trabajos de Arango, Melo, & Vasquez (2002) y los de Julio, Mera & Revéiz Hérault (2002), constituyen las primeras estimaciones de la curva de rendimientos en Colombia.

La teoría de las expectativas y la teoría de la segmentación del mercado constituyen las principales explicaciones de la forma de la curva de rendimientos. A su vez, dependiendo de los supuestos subyacentes, la teoría de las expectativas puede dividirse en teoría pura de las expectativas, teoría de la liquidez y teoría del hábitat preferido.

Según la teoría pura de las expectativas, la forma de la curva de rendimientos se determina por las expectativas de los agentes acerca de la trayectoria futura de las tasas de interés, las cuales, debido al proceso de arbitraje entre las diferentes opciones de inversión, constituyen el mejor estimador disponible en el mercado. Los orígenes de esta explicación se encuentran en Fisher (1896) y Hicks (1939).

Suponiendo que los agentes son neutrales al riesgo e indiferentes a la liquidez de los títulos, que no existe segmentación de mercado, que no hay costos de transacción y que las expectativas sobre las tasas de interés futuras son óptimas e insesgadas, la teoría pura de las expectativas sugiere que la tasa de interés de largo plazo es el promedio aritmético de las tasas de corto plazo vigente y esperadas. Así, por ejemplo, la tasa de interés de un título con vencimiento en seis meses, debe ser igual al promedio de la tasa de interés actual de un título con vencimiento en tres meses y el pronóstico óptimo de la tasa de interés de un título con vencimiento en tres meses. Por lo tanto, un inversionista debe ganar lo mismo invirtiendo en un título con vencimiento en seis meses o tres meses y reinvertiendo el producto de la primera inversión en otro título con vencimiento en tres meses. En consecuencia, según la teoría pura de las expectativas, en el futuro próximo todos los activos financieros de la misma calidad crediticia, sin importar sus fechas de vencimiento, deberían ofrecer la misma rentabilidad debido a que los inversionistas, buscando oportunidades para hacer ganancias, eliminan todos los diferenciales de rentabilidad entre títulos, lo cual hace que la curva de rendimientos sea más plana.

Si, por ejemplo, los agentes esperan una mayor inflación y con ello, unas mayores tasas de interés futuras, los inversionistas se concentrarán en instrumentos de corto plazo, los cuales les permitirán reinvertir posteriormente sus recursos a tasas de interés mayores, mientras que los prestamistas contratarán préstamos a largo plazo para asegurar la menor tasa de interés vigente. Esta interacción de los agentes generará un exceso de



demanda de fondos de largo plazo y un exceso de oferta de fondos de corto plazo, desequilibrios que serán corregidos a través de cambios en la tasa de interés: la tasa de corto plazo caerá, mientras que la de largo plazo aumentará, generando un empinamiento en la curva de rendimientos.

De acuerdo con lo anterior, la teoría pura de las expectativas sugiere que cuando el mercado espera que la tasa de interés de corto plazo futura aumente (disminuya), la tasa de interés corriente de largo plazo deberá incrementarse (reducirse), ya que ésta es un promedio de las tasas de corto plazo vigente y esperadas. Por lo tanto, si la curva de rendimientos no es plana, es decir, dos o más bonos ofrecen rentabilidades diferentes, se puede deducir que el mercado espera un cambio en las tasas de interés futuras.

Sin embargo, la teoría de expectativas puras ignora dos riesgos inherentes a las inversiones en títulos de igual riesgo crediticio con diferentes plazos de maduración. El riesgo de precio, según el cual el precio del activo financiero podría ser menor que el esperado al finalizar el horizonte de inversión y el riesgo de inversión, según el cual la tasa de interés a la que se reinvertirían los recursos recibidos periódicamente por concepto del pago de intereses podría ser diferente. Esta debilidad observada en la teoría pura de las expectativas llevó a un nuevo planteamiento teórico que incorpora la incertidumbre presente en el mercado y la preferencia de liquidez de los agentes.

La teoría de preferencia de liquidez, impulsada por Hicks (1939), acepta la capacidad de las expectativas para influenciar la forma de la curva de rendimientos. Sin embargo, plantea que, en un ambiente de incertidumbre y aversión al riesgo, los agentes prefieren los bonos de menor madurez por tener una mayor liquidez. Por lo tanto, los inversionistas aceptarán tener en sus portafolios, títulos de largo plazo únicamente si dichos activos ofrecen una compensación (prima de liquidez) representada en una tasa de interés mayor, la cual debe hacer que su rendimiento sea mayor que el promedio de las tasas de corto plazo esperadas. Por tal razón, la prima de liquidez ofrecida siempre será una función creciente del plazo al vencimiento.

Si los títulos de largo plazo no reconocen una prima de liquidez, los inversionistas preferirán mantener un portafolio de instrumentos de corto plazo para minimizar la variabilidad en su valoración, mientras que, por su parte, los prestamistas preferirán contratar préstamos a largo plazo para garantizar su flujo de recursos. Eventuales desequilibrios entre oferta y demanda de fondos se corrigen mediante la incorporación de una prima de liquidez a la tasa de interés de cada título. De esta manera, la teoría de la liquidez plantea que la curva de rendimientos normalmente exhibirá una pendiente positiva, incluso si el mercado no espera cambios en las tasas de interés invalidando parcialmente la teoría pura de las expectativas, en el sentido que la tasa de interés implícita en la curva deje de ser un predictor óptimo e insesgado de la tasa de interés futura.

La teoría planteada por Modigliani & Sutch (1966) acerca del hábitat preferido, establece

que los agentes con aversión al riesgo eliminan todo riesgo sistemático al situarse en su hábitat preferido: el tramo de la curva de rendimientos en el que la vida de sus activos coincide con la de sus pasivos. Es decir, el rendimiento para cada plazo de inversión es función de la oferta y la demanda de recursos para dicho horizonte temporal. Sin embargo, debido a la segmentación del mercado, en aquellos vencimientos donde la demanda de fondos es insuficiente, los emisores de bonos deberán ofrecer tasas de interés mayores que incorporen una prima de riesgo para lograr así que los agentes abandonen sus hábitats preferidos y viceversa. Dicha prima puede ser positiva o negativa y representa la remuneración al riesgo de desequilibrio de la curva de rendimientos, la cual depende tanto del horizonte de inversión como de la importancia relativa de los inversionistas.

Finalmente, la teoría de Culbertson (1957) sobre la segmentación del mercado, al igual que la teoría del hábitat preferido, establece que los inversionistas tienen hábitat preferidos en los cuales ajustan perfectamente los vencimientos de los pasivos con los de sus activos. Sin embargo, esta teoría sostiene que prestamistas y prestatarios se limitan a ciertos segmentos de la curva de rendimientos de acuerdo con la regulación, el costo de información, etc, siendo indiferentes a las primas de riesgo ofrecidas por los diferentes activos financieros. De esta forma, las tasas de interés de los títulos con diferentes plazos de maduración se determinarán independientemente por las condiciones de la oferta y la demanda en cada segmento del mercado. Los determinantes de la estructura a plazo de la tasa de interés son fundamentales en el diseño y ejecución de la política monetaria.

Así, por ejemplo, el aumento de las tasas de interés de corto plazo podría reducir las expectativas de inflación y las tasas de interés de largo plazo, lo cual abriría un mayor espacio para la inversión. De los determinantes teóricos de la estructura a plazo, la literatura ha dedicado un mayor espacio a la hipótesis de expectativas, ya que la capacidad de predicción de la curva de rendimientos pasa por la tasa de interés, la cual, una vez insertada en distintos modelos, postulados y mecanismos de transmisión, permite distintas lecturas de la curva. Entre estas se destacan su capacidad de liderar el comportamiento futuro de otras variables como las expectativas de inflación, tasas de interés, actividad económica y su asociación con el déficit fiscal.

## INTERPRETACIONES DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS

### Expectativas de inflación

Las expectativas de inflación son una variable no observable, por lo cual se busca estimarlas a partir de otras variables observables, como la estructura a plazo de las tasas de interés, debido a que las tasas de interés nominales incorporan, entre otros posibles elementos, una prima que representa el pronóstico del mercado sobre la inflación futura.

En consecuencia, los cambios en la pendiente de la estructura a plazo pueden contener información acerca de la trayectoria futura de la inflación esperada por los agentes. Así,

una pendiente más inclinada de la curva podría estar reflejando mayores expectativas de inflación y al mismo tiempo, un menor compromiso del banco central por mantener la estabilidad de precios.

Varios trabajos empíricos de las aproximaciones al estudio de la relación entre la estructura a plazo de la tasa de interés nominal y la trayectoria futura de la inflación, en los que se postula como conclusión general que es el tramo largo de la estructura a plazo el que mayor cantidad de información contiene acerca de los cambios futuros de la inflación.

#### Expectativas de tasa de interés

Según la hipótesis de expectativas de la curva de rendimientos, la pendiente de esta curva es un reflejo "óptimo e insesgado" de las expectativas del mercado sobre la trayectoria futura de la tasa de interés de corto plazo. De acuerdo con dicha hipótesis, cuando la pendiente de la curva de rendimientos es empinada, se espera que las tasas de interés de corto, mediano y largo plazo se incrementen en un futuro y viceversa.

Los determinantes de la estructura a plazo de la tasa de interés son fundamentales en el diseño y ejecución de la política monetaria.

La revisión de trabajos empíricos para varios países industrializados, tras los cuales se puede concluir que la hipótesis de expectativas de la curva de rendimientos permite inferir el comportamiento futuro de las tasas de interés siempre y cuando, la autoridad monetaria no esté comprometida en una política específica de estabilización de tasas de interés.

#### Expectativas de actividad económica

Dado que la tasa de interés nominal tiene un componente real que se encuentra relacionado con el nivel de actividad económica y otro de expectativas de inflación, entonces, si estas últimas se encuentran bien formuladas, es posible esperar que la estructura a plazo contenga información adecuada, acerca de las expectativas de la actividad económica futura. Desde esta perspectiva, es posible asociar un empinamiento en la pendiente de la curva con una expansión económica futura y viceversa.

Al menos dos hipótesis sustentan la asociación positiva entre la estructura a plazo y el nivel de actividad económica. La primera está relacionada con la postura de la política monetaria, mientras que la segunda asigna un papel protagónico a las expectativas. La primera hipótesis establece que si el banco central decide ejecutar una política monetaria contraccionista, las tasas de interés a todos los plazos aumentarán restringiendo la demanda de crédito, disminuyendo el gasto de la economía y generando un menor ritmo de crecimiento económico. Sin embargo, la política monetaria restrictiva tiene efectos diferentes sobre las tasas de interés de corto y largo plazos. Debido a que las tasas de largo plazo dependen de las tasas de interés de corto plazo y estas, a su vez, de las

expectativas de inflación y la tasa de interés real; las primeras aumentarán pero en menor medida que las tasas de interés de corto plazo, logrando que la estructura a plazo se aplane o inclusive se torne negativa.

La segunda hipótesis resalta el papel de las expectativas de mercado. Cuando los agentes esperan que la economía disminuya su ritmo de crecimiento, asimismo prevén una reducción en las tasas de interés de corto plazo. Esta reducción esperada en los tipos de interés podría ser consecuencia de expectativas de una política monetaria contra cíclica, o bien, podría reflejar la caída esperada en las tasas de retorno real de sus inversiones.

Alternativamente, si los agentes esperan que al reducirse el crecimiento de igual modo lo hará la inflación, entonces esta última descenderá significativamente durante la recesión, hecho que induciría a unas menores tasas de interés nominales. En cualquiera de estos dos casos, si la hipótesis de las expectativas se mantiene, las tasas de interés de largo plazo caerán (ante las menores tasas de interés de corto plazo) haciendo que la pendiente de la curva de rendimientos se aplane antes de la recesión económica. Por lo tanto, se espera que los movimientos de la curva de rendimientos den señales anticipadas acerca del desempeño futuro de la economía. La evidencia empírica analizada por Arosemena y Arango sugiere que la curva de rendimientos constituye una herramienta muy valiosa a la hora de pronosticar la actividad económica futura o la probabilidad de una recesión.

### Déficit fiscal

El debate sobre la existencia de una relación positiva entre déficit fiscal y tasas de interés se centra en los efectos directos e indirectos de las acciones fiscales sobre la inversión privada, el consumo de los hogares, el tipo de cambio, la balanza de pagos y sobre el margen de maniobra que deja para la política monetaria.

La curva de rendimientos constituye una herramienta muy valiosa a la hora de pronosticar la actividad económica futura o la probabilidad de una recesión.

Un mayor déficit fiscal produce una escasez relativa de fondos para la inversión privada y ésta se manifiesta en un desbalance entre la oferta y la demanda de recursos. Dicho desbalance induce al incremento en las tasas de interés de largo plazo que se manifiesta en la estructura a plazo de la tasa de interés: el incremento en el déficit fiscal influye marginalmente sobre las tasas de corto plazo. Sin embargo, como los agentes anticipan que los niveles de deuda pública se incrementarán para financiar el déficit, las tasas de interés futuras de corto plazo deberán ser mayores, lo cual, a su vez, por la hipótesis de las expectativas, hace que las tasas de interés corrientes de largo plazo se incrementen.

La evidencia empírica analizada por los autores sugiere que los mayores déficits fiscales incrementan la pendiente de la curva de rendimientos. Esta interpretación es válida debido a que los resultados no muestran una relación entre el déficit y las tasas de corto plazo, mientras que sugieren la existencia de una relación directa con las tasas de interés

de largo plazo.

En conclusión, los trabajos empíricos muestran que los datos en varios países desarrollados confirman la hipótesis de expectativas de inflación. Sin embargo, los datos no confirman las otras hipótesis tan contundentemente. Esto sugiere que un aumento en la pendiente de la curva de rendimientos debe señalarle a la autoridad monetaria, ante todo, un riesgo de que las expectativas de inflación están aumentando.

## CÁLCULO DE LAS CURVAS DE RENDIMIENTO

El surgimiento y crecimiento del mercado de deuda pública y la aceptación de papeles a plazos mayores de tres y cuatro años, comienza a cambiar la mentalidad cortoplacista de los inversionistas y se desarrolla un mercado de más largo plazo, lo que implica desarrollar técnicas más avanzadas para su análisis como son las curvas de rendimientos, la estructura temporal de las tasas de interés y la curva cero cupón. De acuerdo con Arango, Melo & Vasquez (2002) solo hasta el 2002, se inicia la adopción de una metodología por parte de la banca central y la Bolsa de Valores, para manejar el mercado secundario de deuda pública.

En los años 2001-2002 se desarrollan trabajos relacionados con el estudio de metodologías que permitieran estimar la curva de rendimientos. Las entidades encargadas del mercado, Bolsa de Valores, Superintendencia de Valores y Banco de la República, desarrollaron documentos en forma individual y conjuntamente para establecer y aplicar una metodología para el mercado.

La Subgerencia de estudios económicos del Banco de la República elaboró dos trabajos sobre la estimación de la estructura a plazos utilizando las metodologías, cubic spline y Nelson y Siegel. El departamento de investigaciones de la Subgerencia Monetaria y de Reservas del Banco de la República desarrolló la metodología de Fisher, Nychka y Zervos la cual estima la curva cero cupón a través de Cubics Splines Suavizados. Después de evaluar los diferentes estudios se autoriza por resolución del Ministerio de Hacienda y Crédito Público y la Superintendencia de Valores (Resolución 1004 de Diciembre de 2002) la utilización de la metodología Nelson y Siegel. A manera de ilustración y en forma lúdica se expone el cálculo de la Curva de rendimientos por el método Nelson y Siegel en la hoja electrónica Excel.

## CÁLCULO DE LAS CURVAS DE RENDIMIENTO MÉTODO NELSON Y SIEGEL

El método de interpolación no lineal de Nelson y Siegel empieza a ser adoptado en Colombia en el año 2002 para determinar la tasa de rendimiento de los títulos de largo plazo. Ambos constituyen los parámetros para estimar el modelo.

El objetivo de ambas metodologías, la de Nelson y la de Siegel, es minimizar la suma de las desviaciones al cuadrado de los precios de los títulos que se utilizan para hacer el cálculo de los parámetros de la función propuesta. No obstante, la optimización se hace a

partir de un proceso iterativo en donde se utilizan las tasas spot dadas por la función en la determinación de los precios estimados y luego, se procede a realizar la minimización de la suma de los errores al cuadrado entre los precios estimados y los precios observados en el mercado.

El modelo de Nelson y Siegel tiene cuatro parámetros:

A continuación se desarrolla un ejemplo ilustrativo:

## **Tema 5: Portafolios Óptimos de Bonos**

La conformación de portafolios de inversión con bonos, permite mitigar el riesgo relacionado con la tasa de rendimiento del mercado. La conformación de portafolios busca disminuir el flujo de caja improductivo y maximizar la rentabilidad obtenida al final del horizonte de tiempo del portafolio de inversión, reduciendo el monto de capital invertido.

Se consideran los portafolios de inversión que buscan maximizar la rentabilidad del portafolio, portafolios con la intención de disminuir el capital mínimo requerido en el periodo inicial para atender los compromisos de desembolsos futuros. De igual manera entran en esta clasificación los portafolios con mínimo costo de transacción, cuando se han invertido en diferentes divisas y los portafolios con base en la convexidad.

Los portafolios se resuelven de acuerdo a la siguiente metodología: Formular el problema a resolver, construir el modelo matemático que incluye la función objetivo (maximizar o minimizar), la red del modelo financiero inicial, construir el modelo en Excel, establecer los parámetros para optimizar el modelo a través del complemento Solver para Excel, solucionar el modelo, describir la red solución obtenida y explicar los resultados obtenidos.

### **Portafolio de Bonos - Problema de Flujo de Caja Multiperiodico**

Según Ragsdale (2007) las empresas con frecuencia toman decisiones que repercuten en el comportamiento futuro de los negocios. Son muchas las decisiones financieras que involucran múltiples periodos de tiempo, porque el capital invertido en un momento en el tiempo afecta los recursos monetarios disponibles para invertir en los periodos subsiguientes. En los problemas de inversión multiperiodico, pueden resultar complejos de resolver sin herramientas adecuadas de programación lineal.

A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo que se presenta con alta frecuencia en los negocios. La empresa XYZ enfrenta dos problemas iniciales:

- Determinar la inversión total en el portafolio, de manera que, el flujo de caja del portafolio coincida con el flujo de caja de los pagos previstos.

- Determinar la inversión en cada título individualmente.

Para resolverlos, se conforma un portafolio de bonos de tal forma que se establezca una provisión inicial para cumplir con el total de pagos. Para hacer esto se plantea un problema de programación lineal multiperiodico, como el presentado a continuación:

La empresa XYZ tiene un plan de pagos de 800 millones en las fechas acordadas que se muestran a continuación. Uno de los problemas a resolver en esta sección es determinar la cantidad de dinero disponible en la fecha inicial, de modo que se minimice la inversión y no se requieran desembolsos adicionales durante el horizonte de inversión.

Flujo de Egresos:

1	2	3	4	5	6	7
	250		250		300	

La empresa XYZ tiene cuatro alternativas de títulos para establecer su fondo de financiación; éstas son las más representativas del mercado y están resumidas en la tabla siguiente. Según esta tabla, la inversión A estará disponible al comienzo de cada uno de los siete meses siguientes y los fondos invertidos de esta forma vencen en un mes a una tasa del 1%. Los fondos pueden ser invertidos en la opción B en el mes 1 y vencen cada bimestre a una tasa de interés de 2.1%. Los fondos pueden ser ubicados en la inversión C sólo al comienzo del mes 1 y vencen al final de los tres meses con una tasa de interés del 3,2%. Los recursos pueden ser invertidos en la opción D a seis meses, a una tasa de interés de 6,4%.

Inversiones:

INVERSIÓN	DISPONIBLE EN LOS MESES	MADURACIÓN EN LOS MESES	RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO
A	1, 2,3,4,5,6	1	1%
B	1,3,5	2	2.1%
C	1,4	3	3.2%
D	1	6	6.4%

La administración de XYZ necesita determinar el plan de inversión en los títulos que les permita cumplir el cronograma de pagos requeridos, mientras disponen de la mínima cantidad de dinero en un fondo de financiamiento. Este es un problema multiperiodico, debido a que el horizonte de planeación es de siete meses. Esto es, XYZ debe planear cuáles alternativas de inversión usar en varios momentos durante los próximos siete meses.

DEFINICIÓN DE LAS VARIABLES DE DECISIÓN

La decisión básica enfrentada por la administración de XYZ es qué tanto dinero invertir

en cada alternativa de inversión en cada periodo, cuando las oportunidades de inversión estén disponibles. Para modelar este problema, se necesitan diferentes variables para representar cada combinación periodo inversión/tiempo. Eso puede ser hecho como:

- $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  = La cantidad de dinero (en millones) puesta en la inversión A al comienzo de los meses 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente.
- $B_1, B_3, B_5$  = La cantidad de dinero (en millones) puesta en la inversión B al comienzo de los meses 1, 3 Y 5, respectivamente.
- $C_1, C_4$  = La cantidad de dinero (en millones) puesta en la inversión C al comienzo de los meses 1 y 4, respectivamente.
- $D_1$  = La cantidad de dinero (en millones) puesta en la inversión D al comienzo del mes 1.

Nótese que todas las variables son expresadas en millones de pesos para mantener una escala razonable para este problema. Entonces, cuando se refiere a la cantidad de dinero representada por las variables, se quiere decir la cantidad en millones de pesos. Los diagramas de flujo de los desembolsos frente a la maduración de las inversiones a realizar desde el momento inicial se presentan en la siguiente figura, de tal forma que se halle el equilibrio entre los ingresos y los egresos con una inversión mínima:

#### DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

EL objetivo de la gestión financiera es minimizar la cantidad de dinero que inicialmente se debe poner en el fondo de financiamiento para cubrir los pagos que deben ser hechos bajo el contrato. Al comienzo del mes 1, la empresa quiere invertir una parte de dinero, que junto con las ganancias obtenidas de la inversión, cubrirá los pagos requeridos sin inyección adicional de efectivo de la empresa XYZ . Debido a que  $A_1, B_1, C_1$  y  $D_1$  representan las cantidades iniciales invertidas por la empresa XYZ en el mes 1, la función objetivo para el problema es:

Definiendo la función objetivo:

Minimizar el efectivo total invertido en el mes 1.

MIN:  $A_1 + B_1 + C_1 + D_1$

Efectivo total invertido al comienzo del mes 1.

#### DEFINICIÓN DE LAS RESTRICCIONES

Para formular las restricciones de flujo de caja de este problema es importante identificar claramente:

- Cuándo pueden ser realizadas las diferentes inversiones.



- Cuándo se vencerán dichas inversiones
- Qué tanto dinero estará disponible cuando cada una de las inversiones venzan. La siguiente tabla, resume esta información.

Flujo de caja resumen de oportunidades de inversión:

INVERSIÓN	1	2	3	4	5	6	7
A1	-1	1.01					
B1	-1		1.021				
C1	-1			1.032			
D1	-1						1.064
A2		-1	1.01				
A3			-1	1.01			
B3			-1		1.021		
A4				-1	1.01		
C4				-1			1.032
A5					-1	1.01	
B5					-1		1.021
A6						-1	1.01
DESEMBOLSOS REQUERIDOS		250		250			300

Los valores negativos, representados por -1 en la tabla, indican las salidas de caja hacia las inversiones. Los valores positivos indican qué tanto valdrán esos mismos recursos cuando la inversión venza o cuando los recursos salgan de cada inversión. Por ejemplo, la tercera fila de la tabla (Inversión C1), indica que cada peso puesto en la inversión C al comienzo del mes 1, valdrá \$1.032 cuando esta inversión madure tres meses después, al comienzo del mes 4. (Nótese que el comienzo del mes 4 ocurre virtualmente al mismo instante que el final del mes 3). De esta forma, no hay diferencia práctica entre el comienzo de un periodo y el final del periodo previo.

Asumiendo que la empresa invierte las cantidades representadas por A1, B1, C1, y D1 al comienzo del mes 1, ¿qué tanto dinero estará disponible para reinvertir o hacer los pagos requeridos al comienzo de los meses 2, 3, 4, 5, 6 y 7? La respuesta a esta pregunta permite generar el conjunto de restricciones de flujo de caja requeridas para este problema.

Como es indicado por la segunda columna de la tabla, los únicos fondos que vencen al comienzo del mes 2 son aquellos puestos en la inversión A, al comienzo del mes 1 (A1). El valor de los fondos que vencen al comienzo del mes 2 es \$1.01A1. Debido a que se requieren pagos al comienzo del mes 2, todos los fondos que vencen deben ser reinvertidos. Pero la única nueva oportunidad de inversión disponible al comienzo del mes 2 es la inversión en A (A2). De esta forma, la cantidad de dinero puesta en la inversión A al comienzo del mes 2 debe ser \$1.01A1. Esto es expresado por la restricción:

Flujo de caja para el mes 2  $1.01A1=A2+250$

Esta restricción indica que la cantidad total de dinero que vence al comienzo del mes 2 (1.01A1) debe ser igual a la cantidad de dinero reinvertida al comienzo del mes 2 (A2) más cualquier pago requerido en el mes 2 (\$250).

Ahora se consideran los flujos de caja que sucederán durante el mes 3. Al comienzo del mes 3, cualquier recurso que fuera puesto en la inversión B al comienzo del mes 1 (B1) vencerá y valdrá un total de \$1.021B1. Similarmente, cualquier recurso puesto en la inversión A al comienzo del mes 2 (A2) vencerá y valdrá un total de \$1.01A2. Los fondos remanentes sean puestos en las oportunidades de inversión disponibles al comienzo del mes 3 (A3 y B3). Ese requerimiento puede ser establecido algebraicamente como:

Flujo de caja para el mes 3  $1.021B1 + 1.01A2=A3+B3$

Esta restricción indica que la cantidad total de dinero que vence al comienzo del mes 3 (1.021B1 + 1.01A2) debe ser igual a la cantidad de dinero reinvertida al comienzo del mes 3 (A3 + B3).

La misma lógica que se aplica para generar las restricciones de flujo de caja para los meses 2 y 3 puede ser también usada para generar restricciones de flujo de caja para los meses restantes. Hacer esto produce una restricción de flujo de caja para cada mes que toma la forma general:

Cantidad Total en \$ que vence al comienzo del mes = Cantidad total en \$ reinvertida al comienzo del mes + Pago requerido al comienzo del mes

Nótese que las restricciones planteadas en este modelo, implican que en cada periodo se dispone del efectivo en la forma de pago de las obligaciones y reinversión de los fondos, de tal forma que no quedan recursos ociosos "esperando a ser invertidos o gastados" y que esto implícitamente es una condición de optimización.

Usando esta definición general de las relaciones de flujo de caja, las restricciones para los años restantes son representadas por:

Restricciones de Flujo de caja:

Restricciones Flujo de Caja

Mes 2	$1.01A1 - 1A2 = 250$
Mes 3	$1.021B1 + 1.01A2 - 1A3 - 1B3 = 0$
Mes 4	$1.032C1 + 1.01A3 - 1A4 - 1C4 = 250$
Mes 5	$1.021B3 + 1.01A4 - 1A5 - 1B5 = 0$
Mes6	$1.01A5 - 1A6 = 0$
Mes 7	$1.064D1 + 1.032C4 + 1.021B5 + 1.01A6 = 300$

Para implementar estas restricciones en una hoja de cálculo, se deben expresar en una forma ligeramente diferente (pero algebraicamente equivalente). De manera específica, para conformar la definición general de una restricción de igualdad se necesita reescribir las restricciones de flujo de caja tal, que todas las variables en cada una de las restricciones aparezca al lado izquierdo del signo igual y una constante numérica aparezca al lado derecho del signo igual.

Diseño de la Plantilla del Modelo Matemático con Solver del Excel

En los vídeos de flujo de caja multiperiodico que se encuentran en los recursos, se presenta la solución del modelo matemático a través de solver-excel:

## **Tema 6: Redes de costo mínimo**

Para explicar la solución del portafolio de bonos, se utiliza la red de flujo de costo mínimo. Los modelos de redes son aplicables a una extensa variedad de problemas de decisión, los cuales pueden ser modelados como problemas de optimización de redes que pueden ser eficientemente y efectivamente resueltos. Algunos de estos problemas de decisión son realmente físicos, como el transporte o flujo de bienes materiales. Sin embargo, muchos problemas de redes son más que una representación abstracta de procesos o actividades, tales como el camino crítico en las actividades entre las redes de un proyecto gerencial.

La familia de redes de los problemas de optimización incluye los siguientes prototipos de modelos: Problemas de asignación, camino crítico, flujo máximo, camino más corto, transporte y costo mínimo de flujos. Los problemas son establecidos fácilmente mediante el uso de arcos de redes y de los nodos.

### CONCEPTOS ELEMENTALES DE UNA RED

Los conceptos fundamentales de una red son los siguientes:

**Red:** Una red es un conjunto de nodos (vértices o puntos) conectados por un conjunto de arcos (líneas, ramas o bordes). Existen arcos dirigidos de un nodo a otro y existen arcos que no tienen dirección. A las redes cuyos arcos no tienen dirección se les llama adireccionales.

**Nodo:** Es usualmente llamado vértice o punto. Es con frecuencia representado por un círculo. En las redes de transporte, estos deberían ser las localidades o las ciudades en un mapa. En los portafolios de inversión son los periodos de tiempo: meses, bimestres, trimestres, años, entre otros.

**Arco:** Es usualmente llamado borde o flecha. Este podría ser directo o indirecto. En las redes de transporte, los arcos podrían ser los caminos, los canales de navegación en un

río o los patrones de vuelo de un avión. En los portafolios de inversión los arcos lo conforman las tasas de interés de la inversión elegida. Los arcos proporcionan la conectividad entre los nodos. Una calle de una sola dirección podría ser representada por un arco, mientras que una calle de dos direcciones podría representada por un arco sin dirección o por dos arcos que apuntan a direcciones opuestas.

Cadena (Ruta): de NI a NK es una serie de nodos y arcos que unen los nodos NI y NK. Por ejemplo, en la figura, la cadena formada por los nodos 2,5 y 6 y los arcos (2,5), (5,3) y (3,6) une a los nodos 2, 5, 3 y 6.

Una red con  $n$  nodos podría tener tantos arcos como  $n!/[(n-2)! 2!] = n(n-1)/2$ . Si están dirigidos, este número pudiese ser doble. Este enorme número de arcos posibles es una de las razones del por qué existen soluciones de algoritmos especiales para problemas de redes particulares.

### Problema de Flujo de Costo Mínimo

El problema de flujo de costo mínimo tiene una posición medular entre los problemas de optimización de redes; primero, abarca una clase amplia de aplicaciones y segundo, su solución es muy eficiente. Igual que el problema del flujo máximo, toma en cuenta un flujo en una red con capacidades limitadas en sus arcos. Igual que el problema de la ruta más corta, considera un costo (o distancia) para el flujo a través de un arco. Igual que el problema de transporte o el de asignación, puede manejar varios orígenes (nodos fuente) y varios destinos (nodos demandas) para el flujo, de nuevo con costos asociados. De hecho, estos cuatro problemas son casos especiales del problema de flujo de costo mínimo.

A continuación se describe el problema del flujo de costo mínimo:

La red es una red dirigida conexa.

- Al menos uno de los nodos es nodo fuente.
- Al menos uno de los nodos es nodo demanda.
- El resto de los nodos son nodos de trasbordo.
- Se permite el flujo a través de un arco sólo en la dirección indicada por la flecha, donde la cantidad máxima de flujo está dada por la capacidad del arco. (Si el flujo puede ocurrir en ambas direcciones, debe representarse por un par de arcos con direcciones opuestas.)
- La red tiene suficientes arcos como suficiente capacidad para permitir que todos los flujos generados por los nodos fuente lleguen a los nodos demanda.
- El costo del flujo a través del arco es proporcional a la cantidad de ese flujo, donde

se conoce el costo por unidad.

- El objetivo es minimizar el costo total de enviar el suministro disponible a través de la red para satisfacer la demanda dada. (Un objetivo alternativo es maximizar la ganancia total del envío.)

El problema es minimizar el costo total sujeto a la disponibilidad y la demanda de algunos nodos, y de la conexión superior de flujo a través de cada arco. Como ejemplo:

Min:  $4X_{12}+4X_{13}+2X_{23}+2X_{24}+6X_{25}+1X_{34}+3X_{35}+2X_{45}+X_{53}$

Sujeto a:

$$\begin{array}{ll} X_{12}+X_{13} \leq 20 & \text{Nodo Origen} \\ X_{12}-X_{24}-X_{25}-X_{23} = 0 & \text{Nodo Transporte} \\ X_{13}+X_{23}+X_{35}-X_{34}-X_{35} = 0 & \\ X_{24}+X_{34}-X_{45} = 5 & \text{Nodo Destino} \\ X_{35}+X_{25}+X_{45}-X_{53} = 15 & \text{Nodo Destino} \\ X_{12} \leq 15 & \\ X_{13} \leq 8 & \\ X_{35} \leq 5 & \\ X_{24} \leq 4 & \\ X_{34} \leq 15 & \\ X_{25} \leq 10 & \\ X_{53} \leq 4 & \\ X_{ij} \geq 0 & \end{array}$$

La solución óptima es:

$X_{12} = 12, X_{13} = 8, X_{23} = 8, X_{24} = 4, X_{34} = 11, X_{35} = 5, X_{45} = 10$ , todos los demás  $X_{ij} = 0$ .

El costo óptimo es \$150.

En los casos de resolver los portafolios de inversiones en bonos, los nodos se refieren a los periodos de tiempo y los arcos a los costos financieros. En cada nodo (periodo de tiempo) se presentan los flujos de caja a favor que corresponden al capital mínimo requerido disponible, maduración de inversiones y los rendimientos obtenidos de las inversiones que han vencido. Asimismo, en cada nodo o periodo se presentan los desembolsos requeridos, los impuestos de los rendimientos obtenidos, los requerimientos o erogaciones proyectadas durante el periodo del portafolio y el stock de seguridad para tener recursos para los gastos imprevistos.

Para el ejemplo de la empresa XYZ, expuesto y resuelto anteriormente con Solver de Excel, se presenta la red inicial y la red final resultante. En este caso permite explicar cómo se colocan los flujos para responder a las necesidades de capital.

## MODELO DE RED INICIAL DEL FLUJO DE CAJA MULTIPERIÓDICO

La red inicial del flujo de caja multiperiodico se presenta en la en la siguiente figura:

Como resultado de la optimización se presenta la red resultante:

### ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN

El valor de la celda objetivo (E25) en la Figura 107, indica que un total de \$771.46 millones debe ser invertido para cumplir con los pagos del proyecto de financiamiento.

Las variables A, B, C y D contenidas en el rango de celdas E13:E24 indican que se deben invertir 247.52 en la alternativa A y \$523.93 en la alternativa C, en el primer periodo. En la alternativa de inversión C, Se deben reinvertir 290.70 en el periodo 4. La solución encontrada cumple con las restricciones del modelo: las inversiones son mayores o iguales a cero. En los casos de las alternativas de inversión en B y D es cero, es decir, no se requiere invertir en estas dos alternativas. La segunda restricción también se cumple porque los saldos finales son iguales a las necesidades de desembolsos en cada periodo. Se determina que el valor de la celda es óptimo ya que no hay excedentes de caja que sean improductivos.

---

## Palabras clave

Bonos

Renta Fija

Solver

## Bibliografía

- HICKS, J. R. (1939). Value and Capital. Londres: Oxford University Press
- Julio, J. M., Mera, S. J., & Revéiz Hérault, A. (2002). Estimación con Splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos. marzo de 2002, de Banco de la República en sitio web: <http://www.banrep.gov.co/es/contenidos/publicacion/curva-spot-cero-cup-n-estimaci-n-con-splines-c-bicos-suavizados-usos>
- ARANGO, L. MELO, L. & VÁSQUEZ, D. (2002). Borrador de economía número 196. marzo de 2002, de Banco de la República en sitio web: <http://www.banrep.gov.co/es/borrador196>
- VÁSQUEZ, D.& MELO, L. (2002). Borrador de Economía número 210. Mayo de 2002, de Banco de la República en sitio web: <http://www.banrep.gov.co/es/borrador-210>
- FISHER, I. (1939). Appreciation and interest. En I. Fisher, Appreciation and interest. New York: the American economic association by the Macmillan company, (págs. 33

1-442)

- MODIGLIANI, F. & SUTCH, R. (1966). Innovations in interest rate policy. The American economic review, 7, pp 178-197.
- CULBERTSON, J. (1957). The term structure of interest rates. The Quarterly Journal of Economics, 46, pp 178-197.
- RAGSDALE, C. (2007). Spreadsheet Modeling & Decision Analysis: A Practical Introduction to Management Science. Natorp Boulevard Mason: Cengage Learning