Клбничная штангелина

1 Комплексные числа и действия с ними. Расширенная комплексная плоскость. Интерпретация Римана комплексных чисел.

Комплексные числа представляют собой расширение вещественных чисел и имеют вид $z = a + bi$, где a и b – вещественные числа, а i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$. Комплексные числа можно интерпретировать как точки на комплексной плоскости, где ось абсцисс (x-ось) соответствует вещественной части a, а ось ординат (y-ось) – мнимой части b.

Действия с комплексными числами включают:

- **Сложение и вычитание**: если $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, то $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ и $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.
- **Умножение**: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$.
- **Деление**: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$.
- **Модуль**: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Сопряжённое число**: $\overline{z} = a - bi$.

Комплексное число z также можно представить в *тригонометрической форме*:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа, а $\varphi = \arg(z)$ – аргумент, или угол, образованный радиус-вектором числа z с положительным направлением вещественной оси.

Показательная форма комплексного числа использует экспоненциальную функцию:

$$z = re^{i\varphi}$$

где $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ согласно формуле Эйлера.

Расширенная комплексная плоскость включает обычную комплексную плоскость и точку на бесконечности, обозначаемую как ∞. С введением этой точки комплексная плоскость превращается в тсферу Римана, что позволяет естественным образом описывать бесконечное удаление в любом направлении. Сфера Римана образуется при стереографической проекции комплексной плоскости на поверхность сферы.

Стереографическая проекция заключается в следующем: рассмотрим единичную сферу, касающуюся комплексной плоскости в точке $z = 0$ и расположенную над плоскостью. Проекция точки z на комплексной плоскости осуществляется из северного полюса N сферы на её поверхность. Точка на бесконечности ∞ при этом проецируется в северный полюс.

2 Открытые и замкнутые множества на расширенной комплексной плоскости. Граница. Связность. Односвязные и многосвязные множества.

Открытые множества на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ – это множества, которые для каждой своей точки содержат окрестность, полностью принадлежащую этому множеству. Формально, множество $G \subset \mathbb{C}$ называется открытым, если для любой точки $z \in G$ существует *окрестность* $U(z, r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\} \subset G$.

Замкнутые множества – это множества, содержащие все свои предельные точки. Множество $F \subset \mathbb{C}$ называется замкнутым, если для любой сходящейся последовательности $\{z_n\} \subset F$ её предел $\lim_{n\to\infty} z_n \in F$. Эквивалентно, множество F замкнуто, если его дополнение $\mathbb{C} \setminus F$ открыто.

На *расширенной комплексной плоскости*, включающей точку на бесконечности ∞, понятия открытых и замкнутых множеств модифицируются. Расширенная комплексная плоскость представляется как сфера Римана $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Окрестностью точки ∞ считается множество вида $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ для достаточно большого R.

Граница множества $A \subset \mathbb{C}$ определяется как множество точек, каждая окрестность которых содержит как точки множества A, так и точки, не принадлежащие A. Формально, граница ∂A множества A состоит из точек $z \in \mathbb{C}$, для которых любая окрестность $U(z, r)$ содержит как точки из A, так и точки из $\mathbb{C} \setminus A$.

Связное множество – это множество, которое нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств. Интуитивно, множество является связным, если его нельзя "разорвать"на две части без потери связи. Множество $D \subset \mathbb{C}$ называется связным, если любые две точки из D можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в D.

Односвязное множество – это связное множество, в котором любая замкнутая кривая может быть непрерывно стянута в одну точку. Формально, множество $D \subset \mathbb{C}$ односвязно, если для любой замкнутой кривой $\gamma : [0,1] \to D$ существует непрерывное отображение $H : [0,1] \times [0,1] \to D$, такое что $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(t,1) = \gamma(0)$ и $H(0,s) = H(1,s) = \gamma(0)$ для всех $t \in [0,1]$ и $s \in [0,1]$.

Многосвязное множество – это связное множество, которое не является односвязным. В многосвязном множестве существуют замкнутые кривые, которые нельзя стянуть в одну точку. Примерами многосвязных множеств являются кольцо $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$ и область с удалёнными несколькими точками или контурами.

3 Последовательности и ряды комплексных чисел

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ – это функция $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, которая каждому натуральному числу n сопоставляет комплексное число z_n. Последовательность $\{z_n\}$ называется *сходящейся* к $z \in \mathbb{C}$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n - z| < \epsilon$. В этом случае пишут $z_n \to z$ при $n \to \infty$.

Критерий Коши для последовательности комплексных чисел: последовательность $\{z_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $m, n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n - z_m| < \epsilon$.

Ряд комплексных чисел – это выражение вида $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, где $\{z_n\}$ – последовательность комплексных чисел. Частичная сумма ряда $S_N = \sum_{n=0}^{N} z_n$ представляет собой сумму первых $N+1$ членов ряда. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $\{S_N\}$ сходится к некоторому комплексному числу S. В этом случае пишут $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$.

Абсолютная сходимость ряда: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ сходится. Абсолютная сходимость ряда комплексных чисел влечет его обычную сходимость.

Критерий сравнения: если для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами a_n такой, что $|z_n| \leq a_n$ для всех n, и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ также сходится.

4 Однозначные функции. Предел по Коши и по Гейне. Непрерывность и равномерная непрерывность

Однозначная функция – это функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, которая принимает одно и то же значение в каждой точке своей области определения. Формально, функция $f(z)$ однозначна, если для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, таких что $z_1 = z_2$, выполняется $f(z_1) = f(z_2)$.

Предел по Коши функции $f(z)$ в точке z_0 определяется следующим образом: $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех z, удовлетворяющих $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \epsilon$.

Предел по Гейне функции $f(z)$ в точке z_0 определяется через последовательности: $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$, если для любой последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к z_0 (то есть $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$), последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к A (то есть $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$).

Непрерывность функции $f(z)$ в точке z_0 означает, что предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке: $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Равномерная непрерывность функции $f(z)$ на множестве $D \subset \mathbb{C}$ означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $z_1, z_2 \in D$, удовлетворяющих $|z_1 - z_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$. В отличие от обычной непрерывности, здесь значение δ зависит только от ϵ и не зависит от выбора точек z_1 и z_2.

5 Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Теорема Вейерштрасса о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда

Функциональный ряд – это ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, где $f_n(z)$ – последовательность функций, определенных на множестве $D \subset \mathbb{C}$. Частичная сумма ряда $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ представляет собой сумму первых $N+1$ членов ряда.

Равномерная сходимость функционального ряда на множестве $D \subset \mathbb{C}$ означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $n \geq N$ и всех $z \in D$ выполняется неравенство $|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(z)| < \epsilon$.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости (М-Признак): если существует последовательность неотрицательных чисел $\{M_n\}$, такая что $|f_n(z)| \leq M_n$ для всех $z \in D$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в области D.

Теорема Вейерштрасса о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда: если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на множестве $D \subset \mathbb{C}$ и все функции $f_n(z)$ непрерывны на D, то сумма ряда $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ также является непрерывной функцией на D.

6 Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Формула Коши – Адамара.

Степенной ряд – это ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где a_n – последовательность комплексных чисел, а z_0 – фиксированная точка в комплексной плоскости, называемая *центром ряда*. Степенные ряды играют важную роль в теории функций комплексного переменного, так как часто используются для представления аналитических функций.

Кругом сходимости степенного ряда называют множество всех z, для которых $|z - z_0| < R$. Внутри круга сходимости степенной ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве этого круга. На границе круга сходимости ряд может сходиться или расходиться в зависимости от конкретного случая.

Формула Коши – Адамара позволяет определить радиус сходимости степенного ряда. Согласно этой формуле,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Теорема Абеля утверждает, что если степенной ряд сходится в точке z на границе круга сходимости, то он также равномерно сходится на любом отрезке, соединяющем центр ряда z_0 с точкой z. Это важный результат, поскольку он показывает, что сходимость на границе круга может иметь последствия для сходимости ряда внутри круга.

Рассмотрим пример:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Для этого ряда $a_n = \frac{1}{n!}$. Используя формулу Коши – Адамара, находим радиус сходимости:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1,$$

то есть $R = 1$, что означает, что ряд сходится для всех z таких, что $|z| < 1$.

7 Определение функций $f(z) = e^z, \sin z, \cos z$ с помощью степенных рядов, их свойства.

Экспоненциальная функция e^z определяется с помощью степенного ряда следующим образом:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на всей комплексной плоскости, поскольку радиус сходимости равен бесконечности. Экспоненциальная функция обладает следующими важными свойствами:

- $e^0 = 1$.
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- Производная экспоненциальной функции равна самой функции: $\frac{d}{dz}e^z = e^z$.

Синус и *косинус* также могут быть определены через степенные ряды:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Оба ряда сходятся абсолютно и равномерно на всей комплексной плоскости, так как их радиусы сходимости также равны бесконечности. Эти функции обладают следующими свойствами:

- $\sin 0 = 0$ и $\cos 0 = 1$.
- Основные тригонометрические тождества: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$.
- Производные синуса и косинуса: $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$ и $\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$.
- Формулы Эйлера: $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ и $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$.

Связь между экспоненциальной и тригонометрическими функциями: функции $e^z, \sin z$ и $\cos z$ связаны между собой через формулы Эйлера, что позволяет выражать тригонометрические функции через экспоненциальные:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Периодичность: синус и косинус являются периодическими функциями с периодом 2π:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

8 Производная. Условия Коши – Римана и дифференцируемость (моногенность) функции комплексного переменного.

Производная $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$. Условия Коши-Римана: если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Выполнение этих условий необходимо и достаточно для дифференцируемости.

9 Аналитические (голоморфные) функции. Аналитичность суммы степенного ряда.

Функция $f(z)$, определённая в области $D \subset \mathbb{C}$, называется *аналитической* (или *голоморфной*), если она комплексно-дифференцируема в каждой точке этой области. Это означает, что предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

существует для всех $z \in D$. Комплексная дифференцируемость влечёт за собой существование всех производных функции всех порядков, что отличает аналитические функции от функций вещественного переменного.

Аналитические функции обладают рядом важных свойств:

- Они бесконечно дифференцируемы.
- Они могут быть представлены степенными рядами в любой точке области определения.
- Они удовлетворяют условиям Коши-Римана, которые являются необходимыми и достаточными условиями дифференцируемости функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

  где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, u и v – действительные функции от действительных переменных x и y.

Аналитичность суммы степенного ряда означает, что если функция $f(z)$ представляется в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

то этот ряд сходится в некоторой окрестности точки z_0 и его сумма является аналитической функцией. Радиус сходимости ряда определяется как

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

и в круге сходимости $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ будет аналитической.

Одним из важнейших свойств аналитических функций является то, что они полностью определяются своими значениями в любой бесконечно малой окрестности точки. Это свойство проявляется в *единственности аналитического продолжения*: если две аналитические функции совпадают в некоторой области, то они совпадают на всей области, где обе функции определены.

Примеры аналитических функций:

- Полиномиальные функции $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ являются аналитическими на всей комплексной плоскости.

- Экспоненциальная функция e^z аналитична на всей комплексной плоскости и может быть представлена степенным рядом

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

- Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ также аналитичны на всей комплексной плоскости и имеют представления в виде степенных рядов:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

10 Функции $f(z) = \sqrt[n]{z}, Ln(z), \ln z$, дробно-линейная и их свойства.

Функция $f(z) = \sqrt[n]{z}$ определяется как $z^{1/n}$. В комплексной плоскости такая функция является многозначной, то есть для одного и того же значения z она может принимать несколько значений. Это связано с тем, что комплексное число z можно представлять в виде $z = re^{i\theta}$, где $r = |z|$ и $\theta = \arg(z)$. Тогда

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n + 2k\pi i/n},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, функция $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений, называемых ветвями. Важно отметить, что функции вида $z^{1/n}$ непрерывны в любой области, исключающей луч, идущий от начала координат (ветвь разрыва).

Функция $ln(z)$ (главное значение логарифма) определяется как

$$\ln z = \ln |z| + i(z),$$

где (z) – главное значение аргумента, лежащее в диапазоне $(-\pi, \pi]$. Функция z также является многозначной, поскольку аргумент (z) может быть увеличен на $2k\pi$, где k – целое число. Это приводит к определению общего логарифма:

$$Ln(z) = z + 2k\pi i,$$

где $k \in \mathbb{Z}$. Главное значение логарифма аналитично в любой области, не содержащей отрицательной вещественной оси (ветвь разрыва).

Функция Ln(z) – это общий логарифм, который является многозначной функцией. Любая из ветвей функции Ln(z) непрерывна в своей области определения. Область определения может быть ограничена так, чтобы функция стала однозначной (например, исключение отрицательной вещественной оси и выбор соответствующей ветви).

Дробно-линейная функция (или мёбиусова функция) имеет вид

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$. Дробно-линейные функции обладают следующими свойствами:

- $f(z)$ отображает комплексную плоскость на себя биективно, за исключением точки $z = -\frac{d}{c}$, которая отображается в бесконечность.
- Обратная функция также является дробно-линейной и имеет вид

$$f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

- Дробно-линейные функции сохраняют окружности и прямые: образ окружности или прямой под действием дробно-линейного преобразования снова является окружностью или прямой.
- Дробно-линейные функции имеют три фиксированные точки, если они не совпадают с бесконечностью. Если $f(z) = z$, то решения уравнения $az + b = cz + d$ дают фиксированные точки.

11 Определение и свойства интеграла от функции комплексного переменного.

Определение интеграла от функции комплексного переменного схоже с определением интеграла от вещественной функции, но учитывает специфику комплексной плоскости. Пусть γ – кусочно-гладкая кривая на комплексной плоскости, задаваемая параметрически как $\gamma(t)$ для t в интервале $[a, b]$. Функция f определена и непрерывна на γ. Интеграл от функции f вдоль кривой γ определяется как

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt,$$

где $\gamma'(t)$ – производная параметризации γ.

Свойства интеграла от функции комплексного переменного включают:

1. *Линейность*:

$$\int_\gamma (af(z) + bg(z))\,dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + b\int_\gamma g(z)\,dz,$$

где a и b – комплексные числа, f и g – функции.

2. *Аддитивность по кривой*: Если кривая γ состоит из двух частей γ_1 и γ_2, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

3. *Изменение ориентации кривой*: Если $-\gamma$ – кривая γ с обратной ориентацией, то

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

4. *Оценка интеграла*: Если $|f(z)| \leq M$ для всех z на γ и L – длина кривой γ, то

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq ML.$$

5. *Независимость от пути*: Если функция f аналитична в односвязной области D, то интеграл $\int_\gamma f(z)\,dz$ зависит только от концов пути и не зависит от самого пути γ, соединяющего эти точки.

12 Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.

Теорема Коши гласит, что если функция f аналитична в односвязной области D и γ – замкнутая кривая в D, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

13 Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

Интегральная формула Коши утверждает, что если функция f аналитична в односвязной области D, содержащей замкнутую кривую γ, и z_0 – точка внутри γ, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Интегральная формула Коши имеет важные следствия:

- Функция, аналитичная в D, бесконечно дифференцируема.
- Производная функции f любого порядка выражается через интеграл:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

14 Теорема Тейлора. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля.

Теорема Тейлора утверждает, что если функция $f(z)$ аналитична в круге радиуса R с центром в точке z_0, то она может быть разложена в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты a_n вычисляются по формуле

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Этот ряд сходится к $f(z)$ в круге $|z - z_0| < R$. Радиус сходимости ряда определяется как

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Теорема Тейлора важна тем, что позволяет представить аналитическую функцию в виде степенного ряда, что упрощает исследование её свойств.

Неравенства Коши позволяют оценить коэффициенты ряда Тейлора. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$ и ограничена на круге значением M, то есть $|f(z)| \leq M$ для всех z в этом круге. Тогда коэффициенты ряда Тейлора удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Эти неравенства дают верхнюю границу для коэффициентов ряда Тейлора, что полезно при анализе сходимости и оценки величин.

Теорема Лиувилля утверждает, что если функция $f(z)$ аналитична и ограничена на всей комплексной плоскости, то она является постоянной. Формально, если существует константа M, такая что $|f(z)| \leq M$

для всех $z \in \mathbb{C}$, то $f(z)$ – константа. Доказательство теоремы Лиувилля основывается на применении оценки коэффициентов ряда Тейлора и теоремы Тейлора. Если функция аналитична и ограничена, то её ряд Тейлора имеет коэффициенты a_n, которые удовлетворяют неравенству $|a_n| \leq \frac{M}{R^n}$ для любого R. При $R \to \infty$ все коэффициенты a_n для $n > 0$ стремятся к нулю, что означает, что функция является постоянной.

Следствие теоремы Лиувилля: Любая аналитическая функция, растущая медленнее любой степени z при $|z| \to \infty$, является полиномом. Это связано с тем, что если функция $f(z)$ не является полиномом, то её рост при $|z| \to \infty$ будет экспоненциальным или быстрее.

15 Теорема о единственности аналитической функции. Нули аналитической функции. Правильные и особые точки аналитической функции.

Теорема о единственности аналитической функции утверждает, что если две аналитические функции совпадают на некотором множестве точек, имеющем хотя бы одну точку накопления, то эти функции совпадают на всей области, где они определены. Формально, если $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и существует множество точек $\{z_n\} \subset D$, такое что $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in D$ и $f(z_n) = g(z_n)$ для всех n, то $f(z) = g(z)$ для всех $z \in D$.

Нули аналитической функции – это точки, в которых функция принимает значение ноль. Нули бывают двух типов:

- **Простые нули** – это нули, в которых функция пересекает ось абсцисс. Формально, если $f(z_0) = 0$ и $f'(z_0) \neq 0$, то z_0 – простой ноль.
- **Нули высших порядков** – это нули, в которых функция касается оси абсцисс. Если $f(z_0) = 0$, но $f'(z_0) = 0, f''(z_0) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$, и $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, то z_0 – ноль порядка k.

Правильные и особые точки аналитической функции:

- **Правильные точки** – это точки, в которых функция аналитична.
- **Особые точки** – это точки, в которых функция не является аналитичной, но может быть продолжена аналитически. Особые точки делятся на три типа:

– **Устранимые особенности** – это точки, в которых функция не определена, но может быть определена так, чтобы стать аналитичной. Например, если $f(z)$ имеет устранимую особенность в z_0, то предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$ существует и конечен.

– **Полюса** – это точки, в которых функция стремится к бесконечности. Если функция $f(z)$ имеет полюс порядка m в точке z_0, то $f(z)$ можно записать в виде $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, где $g(z)$ аналитична и $g(z_0) \neq 0$.

– **Существенные особенности** – это точки, в которых функция ведет себя хаотически. Если z_0 – существенная особенность функции $f(z)$, то в любой окрестности z_0 $f(z)$ принимает бесконечное количество значений, за исключением, возможно, одного значения. Это поведение описывается теоремой Каспара Вейерштрасса.

16 Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Теорема Лорана. Единственность ряда Лорана.

Ряд Лорана – это обобщение ряда Тейлора, которое позволяет представлять аналитические функции в виде степенного ряда, включающего как положительные, так и отрицательные степени. Формально, ряд Лорана для функции $f(z)$ в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где c_n – коэффициенты ряда Лорана, которые вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta,$$

где γ – замкнутый контур, охватывающий точку z_0 и лежащий в области сходимости.

Кольцо сходимости – это область, в которой ряд Лорана сходится. Оно определяется двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 с центром в точке z_0. Внутри кольца $R_1 < |z - z_0| < R_2$ ряд Лорана сходится абсолютно и равномерно к функции $f(z)$.

Теорема Лорана утверждает, что если функция $f(z)$ аналитична в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, то она может быть разложена в единственный ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n определяются через интегральные формулы, как указано выше.

Единственность ряда Лорана означает, что если функция $f(z)$ аналитична в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, то её представление в виде ряда Лорана единственно. Это значит, что для данной функции $f(z)$ существует только один набор коэффициентов c_n, при котором выполняется равенство

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Ряд Лорана играет важную роль в теории функций комплексной переменной, так как позволяет анализировать поведение функций в областях, содержащих особые точки. В частности, ряд Лорана используется для изучения изолированных особых точек, которые могут быть устранимыми особенностями, полюсами или существенными особенностями. Каждому типу особенностей соответствует определённый вид разложения в ряд Лорана:

- Если функция $f(z)$ имеет устранимую особенность в точке z_0, то все коэффициенты при отрицательных степенях равны нулю.

- Если функция $f(z)$ имеет полюс порядка m в точке z_0, то разложение в ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями, вплоть до $(z - z_0)^{-m}$.

- Если функция $f(z)$ имеет существенную особенность в точке z_0, то ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями.

17 Изолированные особые точки аналитической функции и их классификация. Поведение в окрестности изолированной особой точки. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.

Изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$ – это такая точка z_0, в которой функция не является аналитической, но является аналитической в некоторой проколотой окрестности этой точки. Изолированные особые точки классифицируются на три типа: устранимые особенности, полюса и существенные особенности.

17.1 Классификация изолированных особых точек

1. **Устранимая особенность**: Точка z_0 называется устранимой особенностью функции $f(z)$, если существует такая аналитическая функция $g(z)$, что $g(z) = f(z)$ для всех $z \neq z_0$, и $g(z)$ аналитична в точке z_0. В этом случае $f(z)$ может быть непрерывно продолжена в точку z_0. Пример: функция $\frac{\sin z}{z}$ имеет устранимую особенность в точке $z = 0$, так как её можно продолжить аналитически, определив $\frac{\sin z}{z}\big|_{z=0} = 1$.

2. **Полюс**: Точка z_0 называется полюсом функции $f(z)$, если существует такое целое положительное число m, что $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z)$ существует и не равен нулю. Полюс порядка m означает, что функция $f(z)$ ведёт себя как $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ в окрестности z_0. Пример: функция $\frac{1}{(z-1)^2}$ имеет полюс второго порядка в точке $z = 1$.

3. **Существенная особенность**: Точка z_0 называется существенной особенностью функции $f(z)$, если она не является ни устранимой особенностью, ни полюсом. В окрестности существенной особенности функция ведёт себя хаотично. Пример: функция $e^{1/z}$ имеет существенную особенность в точке $z = 0$.

17.2 Поведение в окрестности изолированной особой точки

Поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки можно описать с помощью разложения в ряд Лорана. Для функции $f(z)$, аналитичной в кольце $0 < |z - z_0| < R$, её разложение в ряд

Лорана имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Коэффициенты при положительных степенях $(z - z_0)^n$ определяют поведение функции в окрестности z_0. Коэффициенты при отрицательных степенях отвечают за поведение функции вблизи z_0 и определяют тип особенности.

17.3 Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса

Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса (также известная как теорема Вейерштрасса о существенных особенностях) утверждает, что если функция $f(z)$ имеет существенную особенность в точке z_0, то в любой окрестности этой точки функция принимает все возможные комплексные значения, за исключением, возможно, одного значения. Формально, если z_0 – существенная особенность функции $f(z)$, то для любого комплексного числа w (за исключением, возможно, одного) и любого $\epsilon > 0$ существует такая точка z в окрестности z_0, что $|f(z) - w| < \epsilon$.

Примером такой функции является $f(z) = e^{1/z}$, которая имеет существенную особенность в $z = 0$. В любой окрестности точки $z = 0$, функция $e^{1/z}$ принимает все значения комплексной плоскости, за исключением, возможно, нуля.

18 Вычеты. Теоремы о вычетах.

Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 – это коэффициент c_{-1} в разложении функции в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Вычет обозначается как $\mathrm{Res}(f, z_0)$ и является важным понятием для вычисления интегралов в комплексном анализе.

18.1 Вычет в полюсе

Если $f(z)$ имеет полюс порядка m в точке z_0, то вычет можно найти по формуле:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

Для простого полюса ($m = 1$):

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

18.2 Вычет в устранимой особенности

Если z_0 – устранимая особенность, то $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

18.3 Вычет в существенной особенности

Если z_0 – существенная особенность, то вычет вычисляется как коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в ряде Лорана для функции $f(z)$.

18.4 Теоремы о вычетах

1. **Теорема о вычетах**: Пусть $f(z)$ аналитична внутри замкнутого контура γ, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Эта теорема позволяет вычислять контурные интегралы, используя сумму вычетов функции в её особых точках внутри контура.

2. **Следствие теоремы о вычетах**: Если $f(z)$ аналитична в области, ограниченной контуром γ, и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – все изолированные особые точки функции $f(z)$ внутри контура γ, то:

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right).$$

Поскольку вычет функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в точке z_k равен порядку нуля или полюса функции $f(z)$ в точке z_k, эта формула позволяет вычислять количество нулей и полюсов функции внутри контура.

3. **Теорема Лиувилля** утверждает, что любая ограниченная аналитическая функция на всей комплексной плоскости является постоянной. Эта теорема следует из теоремы о вычетах, поскольку интеграл по контуру на бесконечности от производной ограниченной функции равен нулю, что приводит к выводу, что функция постоянна.

19 Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов.

Пусть функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ и аналитична внутри неё всюду, кроме конечного числа особых точек $z_1, \ldots, z_n$.

Сначала предположим дополнительно, что существуют такие константы $\epsilon > 0$ и $M > 0$, что при достаточно больших $|z|$ имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\epsilon}}. \tag{1}$$

Неравенство (1) выполнено, например, в случае, когда $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $p(z), q(z)$ – алгебраические многочлены, причём $\deg p(z) < \deg q(z) - 2$. В этом случае можно взять $\epsilon = 1$. Если справедливо (1), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z); z_k]. \tag{2}$$

Теперь вместо (1) допустим, что $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно относительно $\arg z$. Более точно, пусть $\gamma(r)$ есть полуокружность $|z| = r$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Сказанное означает, что при $r \to \infty$

$$L(r) = \max_{z \in \gamma(r)} |f(z)| \to 0. \tag{3}$$

В этой ситуации для $\lambda > 0$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z) e^{i\lambda z}; z_k]. \tag{4}$$

При установлении (4) существенно используется тот факт, что если выполнено условие (3), то

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\gamma(r)} f(z) e^{i\lambda z}\, dz = 0$$

(лемма Жордана). Так как $\cos \lambda x = \operatorname{Re} e^{i\lambda x}, \sin \lambda x = \operatorname{Im} e^{i\lambda x}$, то из равенства (4) следует, что при $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z) e^{i\lambda z}; z_k] \right), \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z) e^{i\lambda z}; z_k] \right). \tag{6}$$

Пример

Вычислим интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

В силу чётности подынтегральной функции интеграл I_1 составляет половину интеграла по всей действительной прямой $(-\infty, \infty)$. Функция

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$$

имеет в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ единственную особую точку – полюс второго порядка $z_1 = i$. Так как $f(z) = p(z)/q(z)$ – отношение двух многочленов, причём $\deg q(z) = 4, \deg p(z) = 2$, то имеет место (1) с $\epsilon = 1$. Значит, верно (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{res}[f(z); i].$$

Остаётся найти вычет $f(z)$ в полюсе второго порядка i:

$$\operatorname{res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2}; i\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z^2-i^2)^2}\right].$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{z^2(z+i)^2}{(z-i)^2(z+i)^4} + \frac{z^2(z+i)(z-i)}{(z-i)^2(z+i)^4}\right] = \frac{i}{4}.$$

Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \frac{i}{4} = \frac{\pi}{4}.$$