# Решение задачи Game.

Обозначим ответ задачи за $g(p_1, p_2, k)$. Матожидание того, что игроки наберут вдвоем в сумме $x \in \mathbb{R}$ побед, равно $\frac{x}{p_1+p_2}$, поэтому $g(p_1, p_2, k) = \frac{g(p, 1-p, k)}{p_1+p_2}$, где $p = \frac{p_1}{p_1+p_2}$. Пусть $f(p, k) = g(p, 1-p, k)$. Вероятность того, что первый игрок выиграет игру (то есть $k$ раундов), а второй $j$ раундов, равна $p^k(1-p)^j C_{k+j-1}^j$. Первые $k+j-1$ раундов игроки выигрывают в произвольном порядке, но последний раунд обязательно выигрывает первый игрок, поскольку в противном случае игра закончилась бы раньше. Время игры в таком случае $j+k$. Суммируя по $j$ и рассматривая аналогично случай, когда выигрывает второй игрок, получаем:

$$f(p, k) = \sum_{j=0}^{k-1}(k+j)C_{k+j-1}^j p^k(1-p)^j + \sum_{j=0}^{k-1}(k+j)C_{k+j-1}^j p^j(1-p)^k \tag{1}$$

Вычислить ответ по этой формуле можно для относительно небольших $k$, скажем, $k < 250\ 000$.

Второй игрок выиграет с вероятностью $\sum_{j=0}^{k-1} C_{k+j-1}^j p^j(1-p)^k$. Тогда при любом $p > \frac{1}{2}$ существует такое $k$, что второй игрок выиграет игру не более, чем с любой наперед заданной вероятностью. Поскольку изначально вероятности заданы в виде целого числа процентов, то из $p > \frac{1}{2}$ следует, что $p \geq \frac{49}{99}$. Значит, при $k \geq 250\ 000$ вероятность, что второй игрок выиграет игру, будет не больше $5 \cdot 10^{-13}$ (в чем несложно убедиться, вычислив эту вероятность при $p = \frac{48}{99}$ и $k = 250\ 000$). Это значит, что мы можем пренебречь вероятностью, что второй игрок выиграет, при этом относительная погрешность не будет превосходить $10^{-12}$ (поскольку $f(p, k) \geq k$, а матожидание длины игры в случае выигрыша второго игрока не превосходит $2kP$, где $P$ — вероятность выигрыша второго игрока). Фактически, мы перешли к задаче, в которой первому игроку надо выиграть $k$ раундов вне зависимости от того, сколько выиграет второй. Значит, ответ будет $f(p, k) \approx \frac{k}{p}$. Аналогично в случае $p < \frac{1}{2}$ у первого игрока пренебрежимо малые шансы выиграть, а $f(p, k) \approx \frac{k}{1-p}$.

Теперь рассмотрим случай $p = \frac{1}{2}$. Очевидно, шансы выиграть игру у обоих игроков равные, значит,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{C_{k+j-1}^j}{2^{k+j}} = \frac{1}{2}, \text{ то есть } \sum_{j=0}^{k} \frac{C_{k+j}^j}{2^{k+j}} = 1, \text{ тогда} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f(1/2, k) &= 2\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k+j)C_{k+j-1}^j}{2^{k+j}} = 2\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k+j)\cdot(k+j-1)!}{(k-1)!\cdot j!\cdot 2^{k+j}} = \\ &= 2\sum_{j=0}^{k-1} \frac{k\cdot(k+j)!}{k!\cdot j!\cdot 2^{k+j}} = 2k\sum_{j=0}^{k-1} \frac{C_{k+j}^j}{2^{k+j}} = 2k\sum_{j=0}^{k} \frac{C_{k+j}^j}{2^{k+j}} - 2k\frac{C_{k+k}^k}{2^{k+k}} = \\ &= 2k\left(1 - \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} = \frac{(2n)!}{n!^2 \cdot 2^{2k}} \approx \frac{\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 2k} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot 2k}\right)}{\left(\frac{k}{e}\right)^{2k} \cdot 2\pi k \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot k}\right)^2 \cdot 2^{2k}} = \frac{1 + \frac{1}{24k}}{\sqrt{\pi k} \cdot \left(1 + \frac{1}{6k} + \frac{1}{144k^2}\right)} \approx$$
$$\approx \frac{\left(1 + \frac{1}{24k}\right)\left(1 - \frac{1}{6k}\right)}{\sqrt{\pi k}} \approx \frac{1 - \frac{1}{8k}}{\sqrt{\pi k}}$$

Эти формулы позволяют вычислить $C_{2k}^k \big/ 2^{2k}$ с относительной погрешностью $O\left(k^{-2}\right)$, а $f\left(1/2, k\right)$ (в силу того, что $C_{2k}^k \big/ 2^{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$) — с погрешностью $O\left(k^{-2.5}\right)$, которая при $k \geq 250\ 000$ будет приблизительно равна $10^{-16}$.

**Замечание 1.** При вычислении формулы (1) следует учесть возможные переполнения и антипереполнения.

**Замечание 2.** Для вычисления $C_{2k}^k \big/ 2^{2k}$ можно использовать более простое приближение факториала $n! \approx (n/e)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$, которое дает формулу $C_{2k}^k \big/ 2^{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ и обеспечивает относительную погрешность порядка $O\left(k^{-1.5}\right)$, при $k = 250\ 000$ равную $5 \cdot 10^{-10}$.

**Замечание 3.** Для тех, кому доказательство формулы (2) показалось «читерским», привожу «честное».

$$C_{m+n}^n = C_{m+n-1}^n + C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^n + C_{m+n-2}^{n-1} + C_{m+n-2}^{n-2} = \ldots =$$
$$= \sum_{i=1}^n C_{m+i-1}^i + C_m^0 = \sum_{i=1}^n C_{m+i-1}^i + C_{m-1}^0 = \sum_{i=0}^n C_{m+i-1}^i, \text{ тогда}$$
$$\sum_{j=0}^k \frac{C_{k+j}^j}{2^{k+j}} = \sum_{j=0}^k \frac{\sum_{i=0}^j C_{k+i-1}^i}{2^{k+j}} = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \frac{C_{k+i-1}^i}{2^{k+j}} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k \frac{C_{k+i-1}^i}{2^{k+j}} =$$
$$= \sum_{i=0}^k C_{k+i-1}^i \sum_{j=i}^k \frac{1}{2^{k+j}} = \sum_{i=0}^k C_{k+i-1}^i \left(\frac{1}{2^{k+i-1}} - \frac{1}{2^{2k}}\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^k \frac{C_{k+i-1}^i}{2^{k+i-1}} - \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=0}^k C_{k+i-1}^i = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{C_{k+i-1}^i}{2^{k+i-1}} + \frac{C_{2k-1}^k}{2^{2k-1}} - \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{C_{k+i-1}^i}{2^{k+i-1}} = \ldots = \sum_{i=0}^0 \frac{C_i^i}{2^i} = 1$$