有限群导引章节翻译

Zhang Jinrui*
zhangjr1022@mails.jlu.edu.cn

20241217

摘要

这篇文章翻译了有限群导引第55页-第61页有关群作用的基本概念。[1, 有限群导引]

1 第三章群作用与共轭

群作用的概念在有限群的理论中扮演着重要角色。本章第一节介绍了关于群作用的基本思想和主要结果。在接下来的两节中，将利用对陪集的作用证明Sylow定理、 Schur-Zassenhaus定理以及Gaschütz定理。

1.1 3.1 群作用

设 $\Omega = \{\alpha, \beta, \dots\}$ 是一个非空有限集。所有对 Ω 的置换组成的集合 S_Ω 是一个关于乘法的群，定义如下：

$$\alpha^{xy} := (\alpha^x)^y, \quad \alpha \in \Omega,\ x, y \in S_\Omega$$

S_Ω 称为 Ω 上的**对称群**。我们用 S_n 表示 $\{1, \dots, n\}$ 上的对称群，它是**阶为n的对称群**。当且仅当 $|\Omega| = n$ 时，有 $S_n \cong S_\Omega$。

当对每一对 $(\alpha, g) \in \Omega \times G$，将元素 $\alpha^g \in \Omega$ 赋予[1]如下规则：

1. $\mathcal{O}1 : \alpha^1 = \alpha,\ \forall \alpha \in \Omega$（其中 1 是单位元 1_G）；

2. $\mathcal{O}2 : (\alpha^x)^y = \alpha^{xy},\ \forall x, y \in G,\ \alpha \in \Omega$，

*alternative email:jerryzhang40@gmail.com

[1]虽然在根据定义这里是乘积, 但我们记 α^g 而不是 αg

则称群 G 在 Ω 上作用。

映射

$$g^\pi : \Omega \to \Omega, \quad \alpha \mapsto \alpha^g$$

描述了 $g \in G$ 在 Ω 上的作用。因为

$$(\alpha^g)^{g^{-1}} \overset{\mathcal{O}2}{=} \alpha^{gg^{-1}} = \alpha^1 \overset{\mathcal{O}1}{=} \alpha,$$

g^π 的逆映射是 $(g^{-1})^\pi$，因此 g^π 是 Ω 上的一个置换。由 $O2$ 可知

$$\pi : G \to S_\Omega, \quad g \mapsto g^\pi$$

是一个同态。根据同态基本定理，$G/\ker\pi$ 同构于 S_Ω 的一个子群，因此也同构于 S_n 的一个子群，其中 $n := |\Omega|$。

反过来，每个同态 $\pi : G \to S_\Omega$ 都给出 G 在 Ω 上的一个作用（定义为 $\alpha^g := \alpha^{g^\pi}$）。

- 若 $\ker\pi = 1$，称 G 在 Ω 上作用**忠实**；
- 若 $\ker\pi = G$，称 G 在 Ω 上作用**平凡**。

每个 G 在 Ω 上的作用 π 会导出 $G/\ker\pi$ 在 Ω 上的一个忠实作用：

$$\alpha^{(\ker\pi)g} := \alpha^g$$

下面是一些重要的群作用，在后续章节中会经常遇到。

3.1.1 群G的重要作用

(a) G 通过共轭作用在所有非空子集 $A \subseteq G$ 上：

$$A \overset{x}{\mapsto} x^{-1}Ax = A^x$$

(b) G 通过共轭作用在 G 的所有元素 $g \in G$ 上：

$$g \overset{x}{\mapsto} x^{-1}gx = g^x$$

(c) G 通过右乘作用在 G 的一个固定子群 U 的所有右陪集 Ug 上：

$$Ug \overset{x}{\mapsto} Ugx$$

证明 在所有情况下，单位元 $1 = 1_G$ 平凡地作用：这是 $\mathcal{O}1$。结合律保证了 $\mathcal{O}2$。 □

在 (a) 和 (b) 的情况下，置换 x^π 是由 x 引导的内自同构（参见第15页1.3节）。

此外，左乘作用在固定子群 U 的所有左陪集的集合 Ω 上也给出一个作用 $\pi : G \to S_\Omega$。但在这里，需要定义

$$x^\pi : G \to S_\Omega, \quad gU \mapsto x^{-1}gU,$$

因为 $gU \mapsto xgU$ 不是一个同态（而是一个反同态）[2]。

由(c)可以得到：

3.1.2 设 U 是群 G 的一个指数为 n 的子群，则 G/U_G 同构于 S_n 的一个子群[3]。

证明 如 3.1.1(c) 中所述，设 Ω 是 U 在 G 中的所有右陪集的集合，且 $\pi : G \to S_\Omega$ 是右乘作用。则对于 $x, g \in G$，

$$Ugx = Ug \iff gxg^{-1} \in U \iff x \in Ug,$$

因此

$$x^\pi = 1_{S_\Omega} \iff x \in U_G,$$

即 $U_G = \ker \pi$。 $\Box$

为了处理3.1.1给出的群作用，以下是关于群作用的一些记号和基本性质。这些性质直接由定义推导而来。

设 G 是一个在集合 Ω 上作用的群，且 $\alpha \in \Omega$。定义

$$G_\alpha := \{x \in G \mid \alpha^x = \alpha\},$$

称 G_α 为 α 在 G 中的稳定子群。若 $x \in G_\alpha$，则称 x 稳定化（固定）α。

注意，G_α 是 G 的一个子群，这是由 $\mathcal{O}2$ 保证的。

3.1.3 对于任意 $g \in G, \alpha \in \Omega$，有

$$G_\alpha^g = G_{\alpha^g}$$

证明

$$(\alpha^g)^x = \alpha^g \iff (\alpha^{gx}) = \alpha \iff gxg^{-1} \in G_\alpha \iff x \in G_\alpha^g \quad \Box$$

如果对于任意 $\alpha, \beta \in \Omega$，存在 $x \in G$ 使得 $\alpha^x = \beta$，则称 α 和 β 是等价的。由 $\mathcal{O}1$ 和 $\mathcal{O}2$ 可知，这种等价关系确实定义了 Ω 上的一个等价关系。

[2] 在3.3中我们将只使用左乘群作用

[3] $U_G = \bigcap_{g \in G} U^g$

与此等价关系对应的等价类称为 G 在 Ω 上的轨道（或 G-轨道）。对于任意 $\alpha \in \Omega$，定义

$$\alpha^G := \{\alpha^x \mid x \in G\},$$

称为包含 α 的轨道。

若 G 在 Ω 上的作用使得 Ω 本身是一个轨道（即对所有 $\alpha, \beta \in \Omega$，存在 $x \in G$ 使得 $\alpha^x = \beta$），则称 G 在 Ω 上作用是**传递的**。

3.1.4 Frattini引理

假设 G 包含一个在 Ω[4] 上作用传递的正规子群 N，则对任意 $\alpha \in \Omega$，有

$$G = G_\alpha N$$

特别地，若 $N_\alpha = 1$，则 G_α 是 N 在 G 中的一个补群。

证明 令 $\alpha \in \Omega, y \in G$。由于 N 在 Ω 上作用传递，存在 $x \in N$ 使得 $\alpha^y = \alpha^x$。因此 $\alpha^{yx^{-1}} = \alpha$，即 $yx^{-1} \in G_\alpha$。这表明 $y \in G_\alpha x \subseteq G_\alpha N$。 □

3.1.5 对于任意 $\alpha \in \Omega$，轨道 $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$。特别地，轨道的长度 $|\alpha^G|$ 是 $|G|$ 的一个因数。

证明 对于任意 $y, x \in G$，

$$\alpha^y = \alpha^x \iff \alpha^{yx^{-1}} = \alpha \iff yx^{-1} \in G_\alpha \iff y \in G_\alpha x \quad \square$$

由于 Ω 是 G-轨道的并集，显然：

3.1.6 若 n 是一个整数，且 n 整除 $|G : G_\alpha|$ 对于所有 $\alpha \in \Omega$，则 n 也整除 $|\Omega|$。 □

对于 $U \subseteq G$，定义

$$C_\Omega(U) := \{\alpha \in \Omega \mid U \subseteq G_\alpha\},$$

即 U 在 Ω 上的所有不动点组成的集合。显然，集合 $\Omega \setminus C_\Omega(G)$ 是所有长度大于 1 的 G-轨道的并集。

3.1.7 设 G 是一个 p-群，则

$$|\Omega| \equiv |C_\Omega(G)| \pmod p$$

证明 对于 $\alpha \in \Omega' := \Omega \setminus C_\Omega(G)$，稳定子群 G_α 是 G 的一个真子群。因此，p 是 $|G : G_\alpha|$ 的一个因数（由 Lagrange 定理），并根据 3.1.6 可得

$$|\Omega'| \equiv 0 \pmod p$$

[4]自然的，我们认为N的作用是G的子群.

□

接下来，利用 3.1.3 和 3.1.5 研究 3.1.1 中给出的群作用。

设 Ω 是 G 的所有非空子集组成的集合，$H \leq G$。则 H 通过共轭作用于 Ω。对于 $A \in \Omega$，集合

$$A^x = x^{-1}Ax, (x \in H)$$

是 H 的一个轨道。稳定子群

$$N_H(A) := \{x \in H \mid A^x = A\}$$

称为 A 在 H 中的正规化子。

根据 3.1.5，$|H : N_H(A)|$ 是 A 的 H-共轭的数量。

令 $B \in \Omega$。若 B 使得 $B \subseteq N_G(A)$，则称 B 规范化了 A。

根据 3.1.1(b)，H 通过共轭作用于 G 的所有元素。对于该作用，稳定子群

$$C_H(g) := \{x \in H \mid g^x = g\}$$

称为 $g \in G$ 在 H 中的中心化子。显然，该子群包含所有满足 $xg = gx$ 的元素 $x \in H$。

由 3.1.5 可知，$|H : C_H(g)|$ 是 g 的 H-共轭的数量。

对于 G 的非空子集 A，定义

$$C_H(A) := \bigcap_{g \in A} C_H(g),$$

称为 A 在 H 中的中心化子。因此，$C_H(A)$ 包含所有与 A 的每个元素对易的 H 中的元素。例如，当且仅当 $A \subseteq Z(G)$ 时，有 $C_G(A) = G$。如果 $B \subseteq C_G(A)$（等价于 $[A, B] = 1$，参见第25页），则称 B 中心化了 A。

由 3.1.3 可得，对于任意 $x \in G$，

$$N_G(A)^x = N_G(A^x), \quad C_G(A)^x = C_G(A^x)$$

更一般地，

$$N_H(A)^x = N_{H^x}(A^x), \quad C_H(A)^x = C_{H^x}(A^x)$$

在 $H = G$ 的情况下，G 的轨道 g^G 称为 $g \in G$ 的共轭类，并且

$$|g^G| = |G : C_G(g)|$$

群 $Z(G)$ 包含所有共轭类长度为 1 的元素，即仅与自身共轭的元素。

由于 G 是其共轭类的并集，这些类是通过共轭作用定义的 G-轨道，因此有：

3.1.8 共轭类方程设 $K_1,\ldots,K_h$ 是长度大于 1 的 G 的共轭类，令 $a_i \in K_i$（$i=1,\ldots,h$）则

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{h} |G : C_G(a_i)| \quad \square$$

注意到：

3.1.9 设 U 是 G 的一个子群，则 $N_G(U)$ 是 U 在 G 中的最大正规化子。映射

$$\varphi : N_G(U) \to \mathrm{Aut}(U), \quad x \mapsto (u \mapsto u^x)$$

是一个同态，其核为 $C_G(U)$。特别地，$N_G(U)/C_G(U)$ 同构于[5] $\mathrm{Aut}(U)$ 的一个子群。 $\square$

我们通过两个从3.1.7带出的p-子群和p-群的重要性质来结束此章节。

3.1.10 设 P 是 G 的一个 p-子群，且 p 整除 $|G:P|$。则

$$P < N_G(P)$$

证明 根据 3.1.1(c)，P 通过右乘作用于右陪集 $Pg, g \in G$ 的集合 Ω，且

$$|\Omega| = |G:P| \equiv 0 \pmod{p}$$

由 3.1.7（将 P 替代 G），有

$$|C_\Omega(P)| \equiv |\Omega| \equiv 0 \pmod{p}$$

此外，$P \in C_\Omega(P)$，因此 $C_\Omega(P) \neq \varnothing$。存在 $Pg \in C_\Omega(P)$，且 $P \neq Pg$。这意味着 $g \notin P$，且 $PgP = Pg$。因此 $gPg^{-1} = P$，即 $g \in N_G(P) \setminus P$。 $\square$

3.1.11 设 P 是一个 p-群，$N \neq 1$ 是 P 的一个正规子群，则

$$Z(P) \cap N \neq 1$$

特别地，$Z(P) \neq 1$

证明 P 通过共轭作用于 $\Omega := N$，且

$$C_\Omega(P) = Z(P) \cap N$$

[5] 13页1.2.5同态定理

由于 N 是一个 p-群，由 3.1.7 可得

$$|C_\Omega(P)| \equiv |\Omega| \equiv 0 \pmod p$$

由于 $1 \in C_\Omega(P)$，有 $|C_\Omega(P)| \geq p$。 $\square$

参考文献

[1] Hans Kurzweil and B. Stellmacher. *Theory of finite groups: An introduction (universitext)*. Springer, 2004.