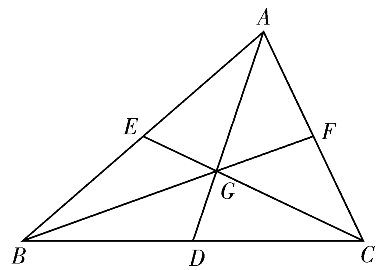
### ▷构造中位线

**破题标志词**

遇见等分点⇒连接等分点

▶**13**　【模拟题】如图所示，$D$、$E$、$F$ 分别为$\triangle ABC$ 各边中点，试证明 $AG=2GD$，$CG=2GE$，$BG=2GF$.




【三角形的重心】每个三角形都有三条中线，它们都在三角形的内部. 三角形三条中线的交点是三角形的重心. 重心位于各中线的三等分点上，即：一边上的中线长度等于重心到此边中点的距离的三倍.

**中点多边形**

顺次连接多边形各边中点所得的新多边形叫作原多边形的中点多边形.

**破题标志词**

任意三角形中点三角形⇒面积为原三角形的$\frac{1}{4}$，周长为原三角形的$\frac{1}{2}$.

任意四边形的中点四边形⇒面积为原四边形的$\frac{1}{2}$.

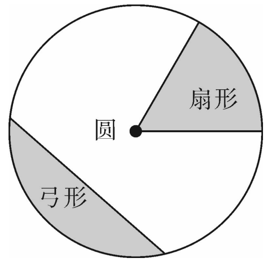
正六边形的中点六边形⇒面积为原六边形的$\frac{3}{4}$.

▶**14**　【例题】试求连接正六边形各边中点构成的中点六边形面积与原六边形面积之比.

## 7.4　圆、扇形与弓形

**基础知识**

【圆】如图所示，平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆. 这一定点为圆心，距离为圆的半径.




【圆面积】设一圆半径为 $r$,则它的面积 $S=\pi r^2$.

【圆周长】设一圆半径为 $r$,则它的周长 $l=2\pi r$.

【弦】连接圆上任意两点的线段叫作弦,经过圆心的弦叫作直径,直径是一个圆里最长的弦.垂直于弦的直径平分这条弦以及弦所对的两条弧.

【扇形】由一条弧和经过这条弧两端的两条半径所围成的图形叫作扇形(半圆与直径的组合,即半圆也属于扇形).

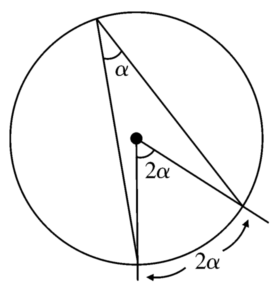
【扇形面积】$S=\dfrac{\text{圆心角度数}}{360^\circ}\pi r^2$

**15**　【2016.22】(条件充分性判断)已知 $M$ 是一个平面有限点集．则平面上存在到 $M$ 中各点距离相等的点.(　　)

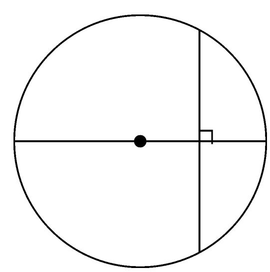
(1)$M$ 中只有三个点.

(2)$M$ 中的任意三点都不共线.

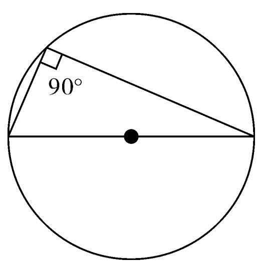
【与圆有关的重要等量关系与模型】



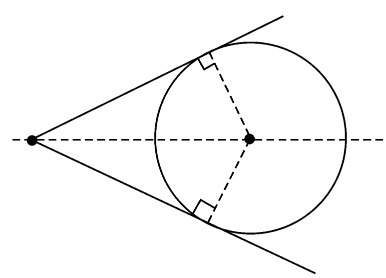

同一段弧所对的
圆周角是圆心角的一半



【垂径定理】垂直于弦的直径平分弦且平分这条弦所对的两条弧




直径所对的圆周角是直角



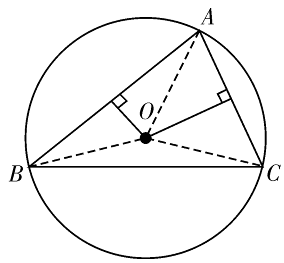
【切线长定理】从圆外一点可以引圆的两条切线,它们的切线长相等,这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

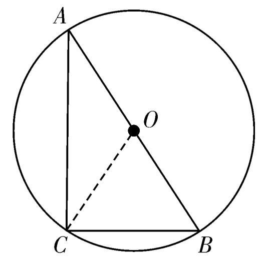
## 圆与一般三角形

### 三角形外心

【三角形的外心】三角形外接圆的圆心叫作三角形的外心.外心也是三角形三边垂直平分线的交点,三角形的三个顶点就在这个外接圆上.

【三角形外心性质】根据外心定义,外心到三个顶点的距离相等,均等于外接圆半径.当三角形为直角三角形时,外心为斜边中点(与直径所对的圆周角为直角相对应).

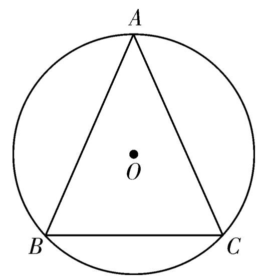



**16**　【2020.12】如图,圆 $O$ 的内接 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,底边 $BC=6$,顶角为 $\frac{\pi}{4}$,则圆 $O$ 的面积为(　　).

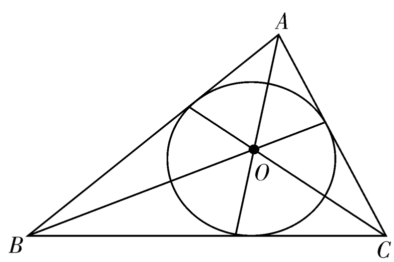
A. $12\pi$　　B. $16\pi$　　C. $18\pi$

D. $32\pi$　　E. $36\pi$




### 三角形内心

【三角形的内心】任意三角形有三条角平分线,且它们都在三角形内部,这三条角平分线永远交三角形内部于一点,这个点即三角形的内心.根据角平分线性质,三角形内心即为三角形内切圆的圆心.



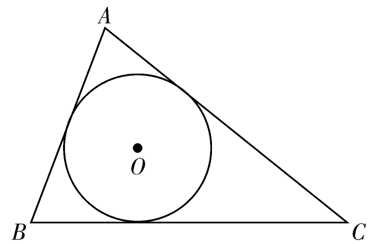

【三角形内切圆半径公式】①一般三角形:$r=\frac{2S_{\triangle}}{a+b+c}$

②直角三角形:$r=\frac{a+b-c}{2}$($a,b$ 为直角边,$c$ 为斜边)

**17**【2018.04】如图，圆 $O$ 是三角形 $ABC$ 的内切圆，若三角形 $ABC$ 的面积与周长的大小之比为 1∶2，则圆 $O$ 的面积为（　　）.

A. $\pi$　　B. $2\pi$　　C. $3\pi$

D. $4\pi$　　E. $5\pi$

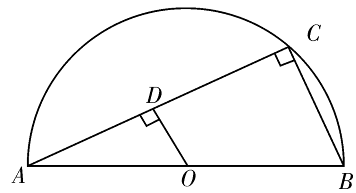



## 圆与直角三角形

**18**【2014.01.20】（条件充分性判断）如图所示，$O$ 是半圆的圆心，$C$ 是半圆上的一点，$OD\perp AC$. 则能确定 $OD$ 的长.（　　）

(1)已知 $BC$ 的长.

(2)已知 $AO$ 的长.




**19**【2022.09】直角△$ABC$ 中，$D$ 为斜边 $AC$ 的中点，以 $AD$ 为直径的圆交 $AB$ 于 $E$，若△$ABC$ 的面积为 8，则△$AED$ 的面积为（　　）.

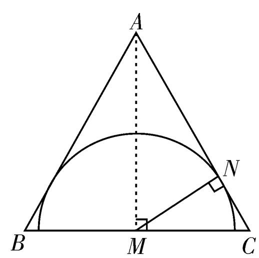
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 6

## 扇形与弓形

**20**【2024.11】如图，在边长为 2 的正三角形材料中，裁剪出一个半圆形. 已知半圆的直径在三角形的一条边上，则这个半圆的面积最大为（　　）.

A. $\frac{3}{8}\pi$　　B. $\frac{3}{5}\pi$　　C. $\frac{3}{4}\pi$

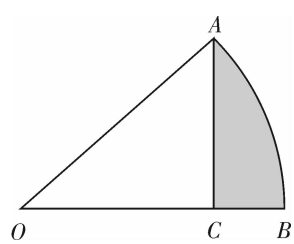
D. $\frac{\pi}{4}$　　E. $\frac{\pi}{2}$



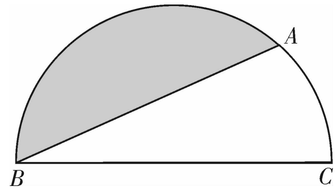

**21**【2017.09】如图，在扇形 $AOB$ 中，$\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，$OA=1$，$AC\perp OB$，则阴影部分的面积为（　　）.

A. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{8}$　　C. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

D. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$　　E. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}$



**22** 【2015.04】如图，$BC$ 是半圆的直径，且 $BC=4$，$\angle ABC=30^\circ$，则图中阴影部分的面积为(　　).




A. $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$　　B. $\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$

D. $\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}$　　E. $2\pi-2\sqrt{3}$

## 7.5 不规则图形

### 基础知识

**破题标志词**

题中图形特征不明显时⇒标号法.

多个相同的重复图形⇒割补法：分割后重新组合.

对称图形⇒割补法：关于对称轴翻转重新组合.

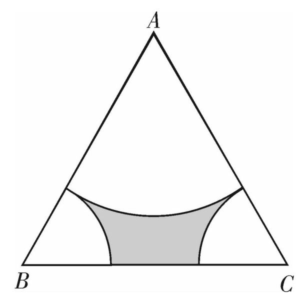
稍难的题目需要先用辅助线分割之后，才能得到重复图形.

联考中辅助线原则主要有：①圆：使圆上没有孤单的点；

②对称图形：对称轴(已有对称轴的补齐相对称的另一半)；

③多边形：作多边形的对角线、边平行线；连结多边形边上的等分点.

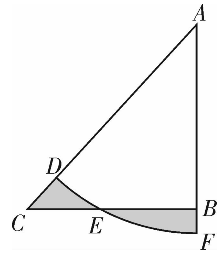
**23** 【2024.08】如图，正三角形 $ABC$ 边长为 3，以 $A$ 为圆心，以 2 为半径作圆弧，再分别以 $B$，$C$ 为圆心，以 1 为半径作圆弧，则阴影面积为(　　).




A. $\frac{9}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{9}{4}\sqrt{3}-\pi$　　C. $\frac{9}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{9}{8}\sqrt{3}-\pi$　　E. $\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

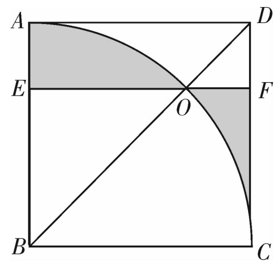
**24** 【2022.04】如图，△$ABC$ 一个等腰直角三角形，以 $A$ 为圆心的圆弧交 $AC$ 于 $D$，交 $BC$ 于 $E$，交 $AB$ 的延长线于 $F$，若曲边三角形 $CDE$ 与 $BEF$ 的面积相等，则$\frac{AD}{AC}$=(  ).




A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$  B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$  C. $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$

D. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  E. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

**25** 【2013.10.10】如图，在正方形 $ABCD$ 中，弧 $AOC$ 是四分之一圆周，$EF//AD$. 若 $DF=a$，$CF=b$，则阴影部分的面积为(  ).




A. $\frac{1}{2}ab$  B. $ab$  C. $2ab$

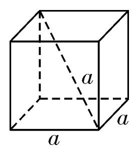
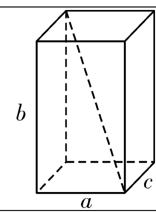
D. $b^2-a^2$  E. $(b-a)^2$

思考与总结

# 第八章

# 立体几何

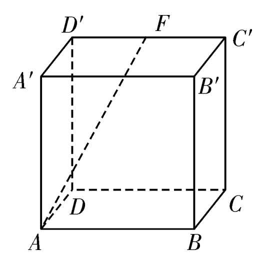
## 8.1 长方体/正方体

| | 正方体 | 长方体 |
|---|---|---|
| 图像 |   |   |
| 表面积 | $6a^2$ | $2(ab+bc+ac)$ |
| 体积 | $a^3$ | $abc$ |
| 体对角线 | $\sqrt{3}a$ | $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ |

**1** 【2014.01.12】如图，正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 2，$F$ 是 $C'D'$ 的中点，则 $AF$ 的长为（　　）.

A. 3　　B. 5　　C. $\sqrt{5}$

D. $2\sqrt{2}$　　E. $2\sqrt{3}$




**2** 【2020.21】（条件充分性判断）在长方体中，能确定长方体的体对角线.（　　）

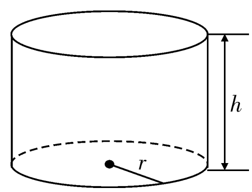
（1）已知共顶点的三个面的面积.

（2）已知共顶点的三个面的面对角线.

3 【2017.13】将长、宽、高分别为 12,9,6 的长方体切割成正方体,且切割后无剩余,则能切割成相同正方体的最少个数为(　　).

A. 3　　B. 6　　C. 24　　D. 96　　E. 648

## 8.2 柱体




如图所示,设圆柱体高为 $h$,底面半径为 $r$,则有:

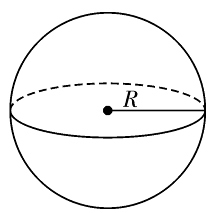
上/下底面积:$\pi r^2$

体积:$V=\pi r^2 h$

侧面积:$S_{侧}=2\pi rh$

全表面积:$S_{全}=2\pi r^2+2\pi rh$

## 8.3 球体




如图所示,设球的半径是 $R$,则有:

球体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

球表面积:$S=4\pi R^2$

## 8.4 锥体

**锥体分为棱锥和圆锥**

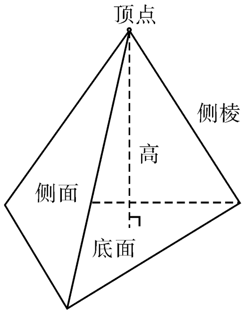
**棱锥:**由多边形各个顶点向它所在的平面外一点依次连直线段而构成的三维多面体

①有一个面是多边形(底面)②其余各面是有一个公共顶点的三角形(侧面)

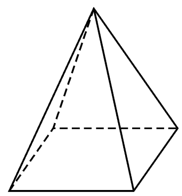
**正棱锥:**底面是正多边形,且顶点在底面的射影是底面的中心的棱锥

**▷正棱锥的性质:正棱锥的各侧棱都相等,各侧面都是全等的等腰三角形**

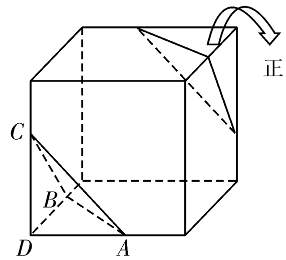
## ▷正棱锥的斜高：正棱锥侧面等腰三角形底边上的高，叫做正棱锥的斜高




底面是三角形的棱锥
三棱锥



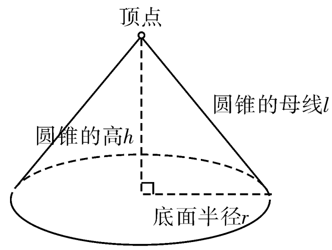
底面是正方形的棱锥
方锥




【2023.10】

底面是正三角形
且顶点在底面的射影是底面中心

**圆锥：**以直角三角形的直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转 360°而成的曲面所围成的几何体叫做圆锥. 旋转轴叫做圆锥的轴. 垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做圆锥的底面. 不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做圆锥的侧面. 无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做圆锥的母线.（边是指直角三角形两个旋转边）

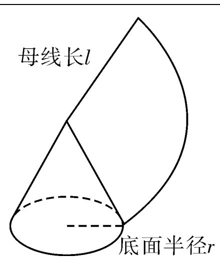
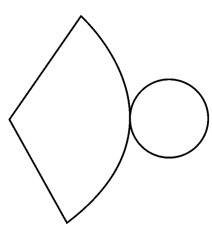
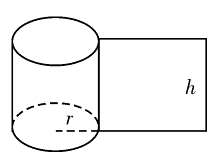
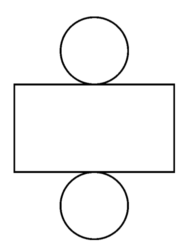



$r^2+h^2=l^2$

无论是圆锥还是棱锥，体积公式表达都是相同的.

$$V_{柱体}=底面积\times高 \qquad V_{锥体}=\frac{1}{3}S_{底}\times h$$

**【举例】**已知等腰直角三角形的直角边长为 1，以一条直角边所在直线为轴旋转一周所成的几何体体积是________.

| 名称 | 圆锥 | | 圆柱 | |
|---|---|---|---|---|
| 展开图 | 侧面 | 全表面 | 侧面 | 全表面 |
| | 扇形 | 扇形＋圆 | 矩形 | 矩形＋两个等圆 |
| 图示 |  |  |  |  |
| 公式 | $S_{侧}=\pi rl$ | $S_{全}=\pi rl+\pi r^2$ | $S_{侧}=2\pi rh$ | $S_{全}=2\pi rh+2\pi r^2$ |

4 【模拟题】已知圆锥的底面周长为 $8\pi$,高为 3,则这个圆锥侧面展开图对应的圆心角度数为(　　)

A. $260°$　　B. $168°$　　C. $280°$　　D. $286°$　　E. $288°$

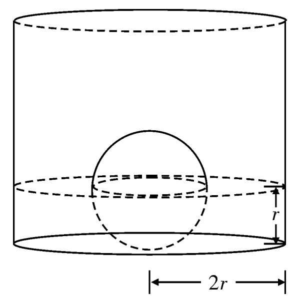
## 8.5 两空间几何体之间关系

### 液体与空间几何体

5 【2024.13】如图,圆柱形容器的底面半径是 $2r$,将半径为 $r$ 的铁球放入容器后,液面的高度为 $r$,液面原来的高度为(　　).

A. $\frac{r}{6}$　　B. $\frac{r}{3}$　　C. $\frac{r}{2}$

D. $\frac{2}{3}r$　　E. $\frac{5}{6}r$

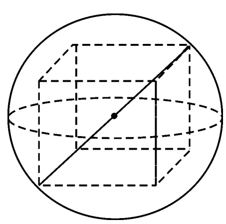


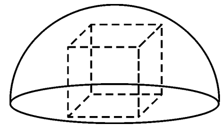

6 【模拟题】圆柱形容器内盛有高度为 8cm 的水,投入 3 个相同的球(球半径与圆柱底面半径相同),水恰好淹没最上面的球,若投入一个这样的球,则水面的高度为(　　)cm.

A. 12　　B. $\frac{38}{3}$　　C. $\frac{40}{3}$　　D. $\frac{46}{3}$　　E. 14

### 立方体外接球

【等量关系】立方体的体对角线长=外接球直径.





**破题标志词**

半球⇒补齐为整球.

**7**【2021.07】若球体的内接正方体的体积为 $8m^3$，则该球体的表面积为（　　）.

A. $4\pi m^2$　　B. $6\pi m^2$　　C. $8\pi m^2$　　D. $12\pi m^2$　　E. $24\pi m^2$

注：同型题目有【2011.01.04】

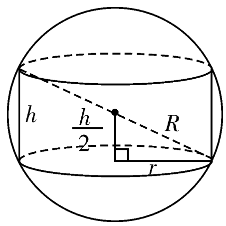
### 圆柱外接球

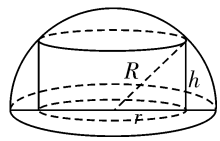
【等量关系】立方体的体对角线长＝外接球直径.

圆柱外接球，即给球体打圆柱形孔.

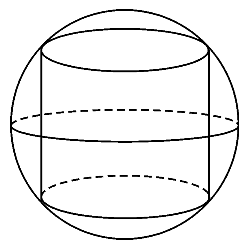
【等量关系】圆柱轴截面的对角线长同时也为球的直径.

【等量关系】洞的内壁面积＝圆柱的侧表面积＝圆柱底面周长×高.




**8**【2016.15】如图，在半径为 10 厘米的球体上开一个底面半径是 6 厘米的圆柱形洞，则洞的内壁面积为（　　）（单位：平方厘米）.



A. $48\pi$　　B. $288\pi$　　C. $96\pi$

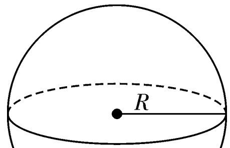
D. $576\pi$　　E. $192\pi$

## 8.6 截面模型

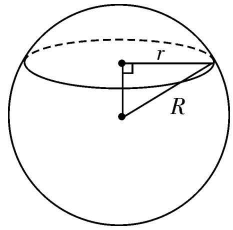
### 切割球

球的截面只可能是圆，其中最大的圆半径等于球半径，此时截面过球心，圆心与球心重合.

【等量关系】截面不过球心时，截面半径 $r$、球半径 $R$、球心到截面距离 $d$ 构成直角三角形，使用勾股定理建立等量关系.




截面过球心

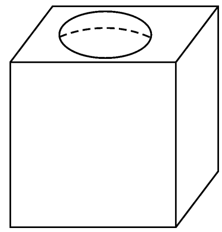



截面不过球心

**9**【2017.21】(条件充分性判断)如图,一个铁球沉入水池中．则能确定铁球的体积.(　　)

(1)已知铁球露出水面的高度.

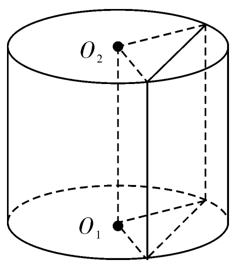
(2)已知水深及铁球与水面交线的周长.



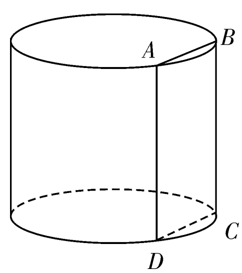
## 切割柱体

纵向切割圆柱体:截面为矩形;横向切割圆柱体:截面为圆.

【等量关系】纵向截得体积=底面弓形面积×圆柱高.



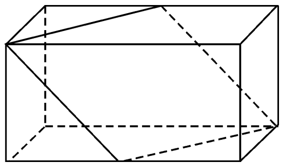

**10**【2018.14】如图,圆柱体的底面半径为2,高为3,垂直于底面的平面截圆柱体所得截面为矩形$ABCD$.若弦$AB$所对的圆心角是$\frac{\pi}{3}$,则截掉部分(较小部分)的体积为(　　).

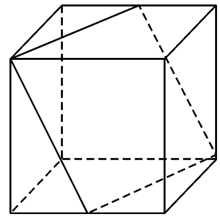



A. $\pi-3$　　B. $2\pi-6$　　C. $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $2\pi-3\sqrt{3}$　　E. $\pi-\sqrt{3}$

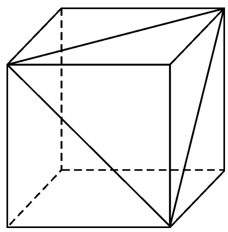
## 切割立方体





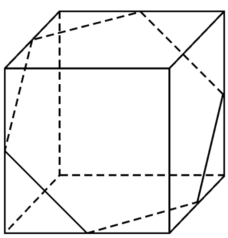
如图截长方体，截面为平行四边形.　　　如图截正方体，截面为菱形

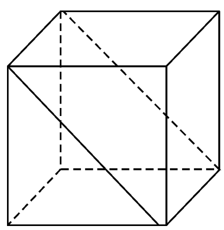
若给定正方体棱长为 $a$，则菱形一条对角线长为正方体体对角线$\sqrt{3}a$，另一条对角线长为面对角线$\sqrt{2}a$. 截面菱形面积为$\frac{1}{2}\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$.

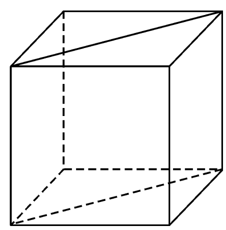


如图截正方体，截面为等边三角形.

若给定正方体棱长为 $a$，则截面等边三角形边长为面对角线$\sqrt{2}a$，截面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.





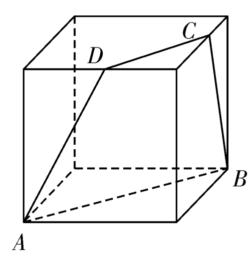


如图截正方体，截面为正六边形.　　　如图截正方体/长方体，截面为矩形.

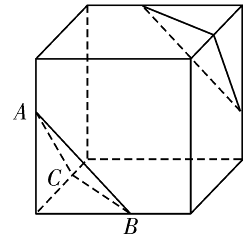
**▶11**　【2022.06】如图，在棱长为 2 的正方体中，$A$，$B$ 是顶点，$C$，$D$ 是所在棱的中点，则四边形 $ABCD$ 的面积为（　　）.

A. $\frac{9}{2}$　　B. $\frac{7}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. $2\sqrt{5}$　　E. $3\sqrt{2}$



**12** 【2023.10】如图，从一个棱长为 6 的正方体中裁去两个相同的正三棱锥，若正三棱锥的底面边长 $AB=4\sqrt{2}$，则剩余几何体的表面积为（　　）.




A. 168　　B. $168+16\sqrt{3}$　　C. $168+32\sqrt{3}$

D. $112+32\sqrt{3}$　　E. $124+16\sqrt{3}$

## 思考与总结