第二章 现实场景中的数学问题

2.1 比与比例

【定义】两个数相除，又叫作这两个数的比，记为 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$.

这个比的值叫作 a 与 b 的比值(即 a、b 相除的商)

破题标志词

比+具体量⇒见比设 k 再求 k.

【举例】男生与女生的数量之比为 $3:7$，已知男生比女生少 20 人，求女生人数.

【分析】设男生的数量为 $3k$ 人，女生的数量为 $7k$ 人. 男生比女生少 $4k$ 人，$4k=20$，$k=5$，女生人数为 $7k=35$.(设出的多少 k 即代表具体量)

破题标志词

全比例问题⇒特值法.

【举例】男生与女生的数量之比为 $3:7$，求男生与总人数之比.

【分析】设男生有 3 人，女生有 7 人，则总人数为 10 人，男生与总人数之比为 $3:10$.

两项间的比

1 【2023.03】一个分数的分子和分母之和为 38，其分子和分母都减去 15，约分后得到 $\frac{1}{3}$，则这个分数的分母与分子之差为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

整数形式的比

▶ 2 【2018.01】学校竞赛设一等奖、二等奖和三等奖，比例为 1∶3∶8，获奖率为 30%，已知 10 人获得一等奖，则参加竞赛的人数为(　　).

A. 300　　B. 400　　C. 500　　D. 550　　E. 600

分数形式的比

▶ 3 【2012.10.01】将 3700 元奖金按$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{2}{5}$的比例分给甲、乙、丙三人，则乙应得奖金(　　).

A. 1000 元　　B. 1050 元　　C. 1200 元　　D. 1500 元　　E. 1700 元

含有共有项的比

▶ 4 【2023.02】已知甲、乙两公司的利润之比为 3∶4，甲、丙两公司的利润之比为 1∶2，若乙公司的利润为 3000 万元，则丙公司的利润为(　　).

A. 5000 万元　　B. 4500 万元　　C. 4000 万元　　D. 3500 万元　　E. 2500 万元

2.2 利润与利润率

售价、成本、利润、利润率相关概念的相互间关系即可快速解题，近年常与比与比例、增长/增长率相结合考查，需要同学们综合理解.

$$售价=成本+利润=成本+成本\times利润率$$

$$利润率=\frac{利润}{成本}\times100\%;利润=售价-成本=成本\times利润率$$

破题标志词

利润率⇒赚了成本的百分之多少(补全整句法).

注：联考数学中的利润率默认是以成本作为基准量进行计算的，即表示赚了成本的百分之多少.

▶ 5 【2022.02】某商品的成本利润率为 12%，若其成本降低 20%而售价不变，则利润率

为(　　).

A. 32%　　B. 35%　　C. 40%　　D. 45%　　E. 48%

2.3 增长与增长率

【增长率】增加的数额与原来数额之间的比例关系

增长率问题关键:确定基准量("比"字后为基准量,即相比谁增减,谁就是基准量)

a 比 b 少 10%,b 在"比"字后,b 为基准量,列式为 $a=b\times(1-10\%)$.

b 比 a 多 10%,a 在"比"字后,a 为基准量,列式为 $b=a\times(1+10\%)$.

基础问题

6 【2023.01】油价上涨 5%后,加一箱油比原来多花 20 元,一个月后油价下降了 4%,则加一箱油需要(　　).

A. 384 元　　B. 401 元　　C. 402.8 元　　D. 403.2 元　　E. 404 元

多次增减

m 先增加 10%,再减少 10%,得到的值与 m 的大小比较?

先增加 10%:此时基准量为________,增加后的值为________________

再减少 10%:此时基准量为________,减少后的值为________________

m 先减少 10%,再增加 10%,得到的值与 m 的大小比较?

先减少 10%:此时基准量为________,减少后的值为________________

再增加 10%:此时基准量为________,增加后的值为________________

7 【2020.01】某产品去年涨价 10%,今年涨价 20%,则该产品这两年涨价(　　).

A. 15%　　B. 16%　　C. 30%　　D. 32%　　E. 33%

平均增长率

平均增长率是一个专有的概念,常在宏观经济数据中出现,它是指一定时间内,若数据以相同的增长率从期初数据增长到期末数据,则这个增长率即为平均增长率.

以年为单位为例,设第 1 年数值为 A(期初数值),第 n 年数值为 B(期末数值),这 n 年数值从 A 增长至 B,第 1 年至第 2 年增长 1 期,则第 1 年至第 n 年,增长期数为 $n-1$,

若每年均以相同的增长率 q 增长，则有：期末数值 B＝期初数值 $A\cdot(q+1)^{\text{增长期数}}$，故得平均增长率公式.

$$q=\sqrt[\text{增长期数}]{\frac{\text{期末数值}B}{\text{期初数值}A}}-1$$

由公式可知，平均增长率只取决于期初数值、期末数值与增长的期数这三个量，中间的数值，即事实中具体如何从 A 增长至 B 的，不影响平均增长率的值.

【举例】2020 年开展的第七次全国人口普查结果显示，全国人口共 141178 万人，与 2010 年的 133972 万人相比增长量为多少？增长率为多少？年平均增长率为多少？

【解析】增长量为 $141178-133972=7206$ 万人.

增长率为 $\frac{141178-133972}{133972}\times100\%=\frac{7206}{133972}\times100\%\approx5.38\%$.

年平均增长率为 $\sqrt[10]{\frac{141178}{133972}}-1=0.525\%$.

需要注意的是，平均增长率不是增长率的平均值，$0.525\%\neq\frac{5.38\%}{10}$，增长率不可以相加、减、求平均，它们均无实际意义.

8　【2004.10.03】（条件充分性判断）A 公司 2003 年 6 月份的产值是 1 月份产值的 a 倍.（　　）

(1)在 2003 年上半年，A 公司月产值的平均增长率为 $\sqrt[5]{a}$.

(2)在 2003 年上半年，A 公司月产值的平均增长率为 $\sqrt[6]{a}-1$.

2.4 浓度问题

公式	应用 1	应用 2
溶液＝溶质＋溶剂	盐水＝盐＋水	酒精溶液＝纯酒精＋水
浓度$=\frac{\text{溶质}}{\text{溶液}}\times100\%$	盐水浓度$=\frac{\text{盐}}{\text{盐水}}\times100\%$	酒精浓度$=\frac{\text{纯酒精}}{\text{酒精溶液}}\times100\%$
$\frac{\text{溶质}}{\text{溶质}+\text{溶剂}}\times100\%$	$\frac{\text{盐}}{\text{盐}+\text{水}}\times100\%$	$\frac{\text{纯酒精}}{\text{纯酒精}+\text{水}}\times100\%$

浓度变化本质上是溶质（盐、酒精）或者溶剂（水）改变而带来的比例的改变.

解决溶液问题的核心是：寻找调配前后不变的量，以不变的量建立等量关系

※加水或者蒸发，此时溶质不变

※加溶质，此时溶剂不变

※两种不同浓度溶液混合：混合前后溶液总质量不变，混合前后溶质总质量不变

9　【2011.10.02】含盐 12.5%的盐水 40 千克蒸发掉部分水分后变成了含盐 20%的盐水，蒸发掉的水分重量为（　　）千克.

A. 19　　B. 18　　C. 17　　D. 16　　E. 15

2.5 工程问题

【工程问题】有关工作总量、工作时间和工作效率之间的关系的问题.

$$工作量=工作时间\times工作效率 \qquad \frac{工作量}{工作时间}=工作效率 \qquad \frac{工作量}{工作效率}=工作时间$$

【工作效率】单位时间内（小时/天/月等）完成的工作量.

【一般解题原则】有具体量，工作总量设为 x；没有具体量，工作总量设为 1 或合适的特值. 当工作总量设为 1 时，工作效率与工作时间互为倒数.

【举例】

①一项工程，甲队独做需要 12 天完成，甲队每天完成这项工程的________.

②乙队独做需要 36 天完成，乙队每天完成这项工程的________.

③两队合作每天可以完成这项工程的________，合作共需要________天完成，此即合作工作，效率相加.

④两队先后工作：甲做了 m 天，乙做了 n 天，刚好做完，则 m 和 n 各可能为多少？

【计算原则】效率改变，分段计算；同时间内，效率相加.

破题标志词

无具体工作量的工程问题：①工作总量设为特值 1 或最小公倍数

②工作效率设为特值 1（或合适的特值）

基础问题

10　【模拟题】甲单独做 15 天可完成的某项工作，乙单独做 10 天就可以完成，假设甲先做了 12 天后再由乙接着做下去，乙完成这项工作还需要（　　）天.

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. 2　　E. 1

11　【2019.01】某车间计划 10 天完成一项任务，工作 3 天后因故停工 2 天，若仍要按原计划完成任务，则工作效率需要提高（　　）.

A. 20%　　B. 30%　　C. 40%　　D. 50%　　E. 60%

12　【2022.01】一项工程施工 3 天后，因故停工 2 天，之后工程队提高工作效率 20%，仍

能按原计划完成,则原计划工期为(　　).

A. 9 天　　B. 10 天　　C. 12 天　　D. 15 天　　E. 18 天

2.6 行程问题

行程问题研究在匀速条件下的路程、速度、时间三个量之间的关系.

路程 s=速度 v×时间 t　　速度 $v=\frac{\text{路程 } s}{\text{时间 } t}$　　时间 $t=\frac{\text{路程 } s}{\text{速度 } v}$

一般问题

【举例】

(1)A 城市到 B 城市的距离为 20km,一个人以 4 公里每小时的速度从 A 出发到 B 要多久?

【分析】$t=\frac{s}{\nu}=\frac{20}{4}=5h$

(2)A 城市到 B 城市的距离为 20km,甲从 A,乙从 B 出发相向而行,甲的速度是 3km/h,乙的速度是 1km/h.他们多久相遇?他们相遇的点距离 A 城市多远?

【分析】本题为相遇问题,即相同时间内两人合力走完全程问题.

$S_{甲}+S_{乙}=20\text{km}$,即 $3t+t=20$,解得 $t=\frac{20}{3+1}=5h$. 相遇点距离 A 城市:$3\times5=15\text{km}$.

(3)A 城市在 B 城市的正西方向 20km,甲从 A,乙从 B 出发都向东而行,甲的速度是 6km/h,乙的速度是 2km/h,甲多久能追上乙?他们相遇的点距离 A 城市点多远?

【分析】本题为追及问题,即相同时间内快者比慢者多走初始距离问题.

$S_{甲}=S_{乙}+20\text{km}$,即 $6t=2t+20$,解得 $t=\frac{20}{6-2}=5h$. 追上的点距离 A 城市:$6\times5=30\text{km}$.

13 【2021.15】甲、乙两人相距 330 km,他们驾车同时出发,经过 2h 相遇,甲继续行驶 2h24min 后到达乙的出发地,则乙的车速为(　　).

A. 70km/h　　B. 75km/h　　C. 80km/h　　D. 90km/h　　E. 96km/h

14 【2023.06】甲乙两人从同一地点出发,甲先出发 10 分钟,若乙跑步追赶甲,则 10 分钟可追上;若乙骑车追赶甲,每分钟比跑步多行 100 米,则 5 分钟可追上.那么甲每分钟走的距离为(　　).

A. 50m　　B. 75m　　C. 100m　　D. 125m　　E. 150m

环形道路问题

相向运动:等量关系$\begin{cases}\text{【大等量】甲路程＋乙路程＝环形周长}\\\text{【小等量】甲用时＝乙用时}\end{cases}$

【拓展】相向跑圈每多相遇一次,两人路程之和多一个环形跑道周长

同向运动:等量关系$\begin{cases}\text{【大等量】快者路程－慢者路程＝环形周长}\\\text{【小等量】甲用时＝乙用时}\end{cases}$

【拓展】同向跑圈每多相遇一次,两人路程之差多一个环形跑道周长

15 【2013.10.22】(条件充分性判断)甲、乙两人以不同的速度在环形跑道上跑步,甲比乙快.则乙跑一圈需要 6 分钟.(　　)

(1)甲、乙相向而行,每隔 2 分钟相遇一次.

(2)甲、乙同向而行,每隔 6 分钟相遇一次.

火车行程问题

线性物体,长度不可忽略

火车过桥:通过时间 $t=\dfrac{l\text{桥}+l\text{车}}{v}$

两火车错车:错车时间 $t=\dfrac{l_1+l_2}{v_1+v_2}=\dfrac{\text{相对行驶距离}}{\text{相对速度}}$

火车超车:超车时间 $t=\dfrac{l_1+l_2}{v_1-v_2}=\dfrac{\text{相对行驶距离}}{\text{相对速度}}$

16 【2011.10.04】一列火车匀速行驶时,通过一座长为 250 米的桥梁需要 10 秒钟,通过一座长为 450 米的桥梁需要 15 秒钟,则火车通过长为 1050 米的桥梁需要(　　)秒.

A. 22　　B. 25　　C. 28　　D. 30　　E. 35

17 【1998.10.05】在有上、下行的轨道上,两列火车相向开来,若甲长 187 米,每秒行驶 25 米,乙车长 173 米,每秒行驶 20 米,则从两车头相遇到车尾离开需要(　　).

A. 12 秒　　B. 11 秒　　C. 10 秒　　D. 9 秒　　E. 8 秒