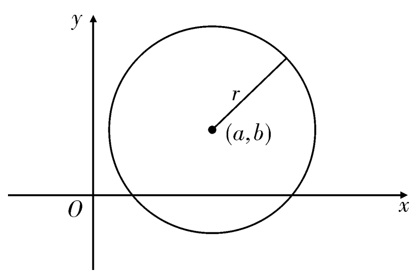
第九章

解析几何

9.1 圆

圆的基础知识

【圆的标准方程】如果一个圆的圆心是点(a,b)，半径为r，那么这个圆的标准方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.



【圆的一般方程】在直角坐标系中，方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$叫作一般方程，其中，系数要求满足$D^2+E^2-4F>0$.

一般式方程用配方法可化为标准方程：$\left(x+\dfrac{D}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{2}\right)^2=\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}$，即圆心为$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$，半径$r=\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

【单位圆】当圆心在原点$(0,0)$时，圆的方程为$x^2+y^2=r^2$. 若同时半径r为单位长度1，则这个圆称为单位圆，方程为$x^2+y^2=1$.

▶ 1 【2016.10】圆$x^2+y^2-6x+4y=0$上到原点距离最远的点是(　　).

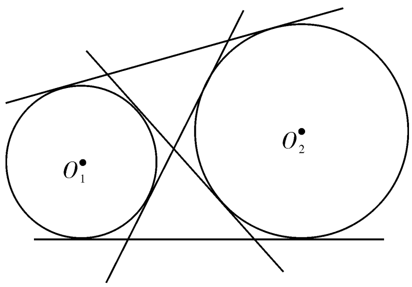
A. $(-3,2)$　　B. $(3,-2)$　　C. $(6,4)$　　D. $(-6,4)$　　E. $(6,-4)$

两圆位置关系

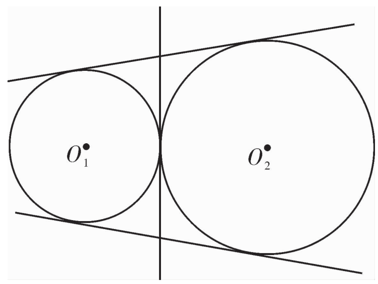
在讨论两圆位置关系时，推荐使用数形结合法，即用圆心距与半径的大小关系分别

确定外离、外切、相交、内切和内含的位置关系.

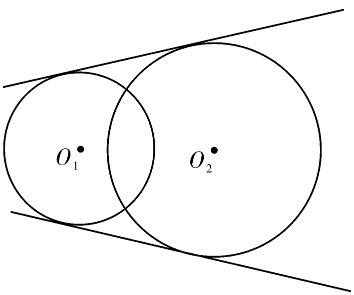
两圆的关系	圆心距与两圆半径的关系	交点个数	公切线
外离	$d>r_1+r_2$	无交点	4 条
外切	$d=r_1+r_2$	1 个交点	3 条
相交	$\|r_1-r_2\|<d<r_1+r_2$	2 个交点	2 条
内切	$d=\|r_1-r_2\|$	1 个交点	1 条
内含	$0\leqslant d<\|r_1-r_2\|$	无交点	无公切线



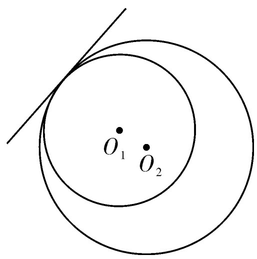
外离



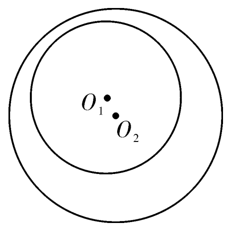
外切



相交



内切



内含

特别地:当 $d=0$ 时,两圆心重合,两圆为同心圆.

2 【2008.01.28】(条件充分性判断)圆 C_1:$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=r^2$ 与圆 C_2:$x^2-6x+y^2-8y=0$ 有交点.(　　)

(1)$0<r<\frac{5}{2}$.

(2)$r>\frac{15}{2}$.

直线与圆

在讨论直线与圆位置关系时,推荐使用数形结合法. 即利用圆心到直线的距离和半径的大小关系判定.

设有圆$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$和直线$Ax+By+C=0$，根据圆心点(x_0,y_0)到直线的距离为$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，根据$d$与圆半径$r$之间的大小关系，直线与圆之间的位置关系分为三种，相交，相切与相离. 具体分析如下表所示：

位置关系	距离与半径的关系	交点个数
相交	$d<r$	2 个交点
	$d=0$	直线过圆心，平分圆
相切	$d=r$	1 个交点
相离	$d>r$	无交点

特别地：直线与圆关系模型中结合平面几何知识解题：

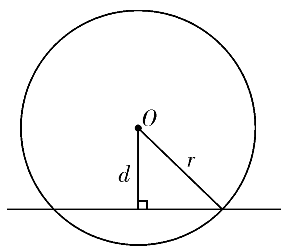
直线与圆相交——垂直于弦的直径平分弦；

直线与圆相切——圆的切线垂直于经过切点的半径.

破题标志词

判断直线与圆位置关系⇒通过d与r关系判断.

直线与圆相交弦长⇒d、r与弦长一半构成直角三角形，使用勾股定理求解.



3　【2018.24】(条件充分性判断)设a,b为实数. 则圆$x^2+y^2=2y$与直线$x+ay=b$不相交.(　　)

(1)$|a-b|>\sqrt{1+a^2}$.

(2)$|a+b|>\sqrt{1+a^2}$.

9.2 直线与抛物线

直线与抛物线位置关系判断推荐采用代数法.

设非竖直的一直线方程为$y=kx+b$，抛物线方程为$y=Ax^2+Bx+C$：联立方程可得到关于x的一元二次方程$Ax^2+(B-k)x+C-b=0$，由此二次方程根的判别式取值情况可判断直线与抛物线位置关系.

破题标志词

直线与抛物线有两个交点(相交)$\Leftrightarrow \Delta>0$.

直线与抛物线有一个交点(相切)$\Leftrightarrow \Delta=0$.

直线与抛物线没有交点$\Leftrightarrow \Delta<0$.

注:若直线为竖直直线,则它与任意抛物线均有且仅有一个交点;若抛物线与 x 轴相切,说明抛物线顶点在 x 轴上,则可直接用二次方程根的判别式 $\Delta=0$.

4 【2017.19】(条件充分性判断)直线 $y=ax+b$ 与抛物线 $y=x^2$ 有两个交点.(　　)

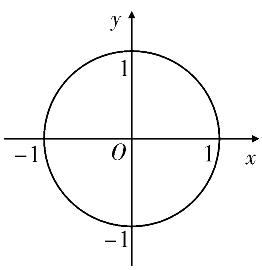
(1)$a^2>4b$.

(2)$b>0$.

9.3 两变量不等式的数形结合法

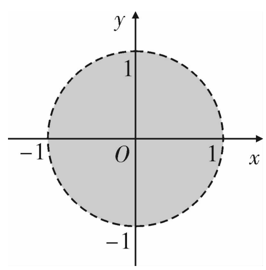
当曲线方程中等号变为不等号时,它表示坐标平面内的一块区域.

曲线方程式涵义法判断区域范围



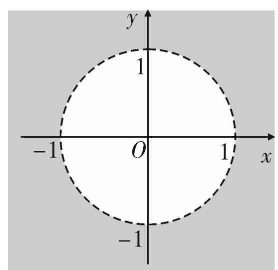
$x^2+y^2=1$

单位圆周上点的集合



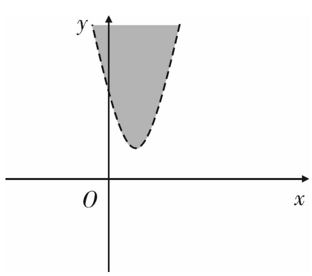
$x^2+y^2<1$

单位圆内的区域



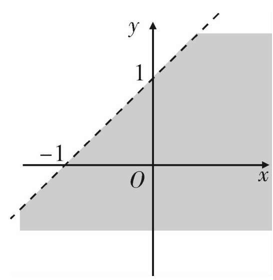
$x^2+y^2>1$

单位圆外的区域



$y>x^2-3x+12$

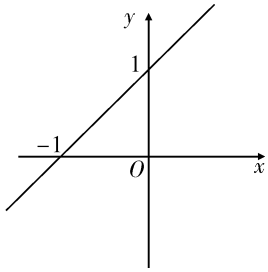
抛物线上方平面区域



$y<x+1$

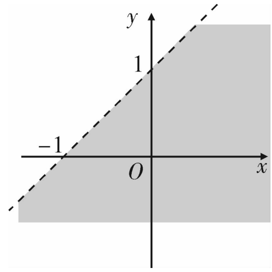
直线下方平面区域

特殊点法判断区域范围



$x-y+1=0$

直线上所有点的集合



$x-y+1>0$

直线下方平面区域

若题目中给出一般方程,无法快速定位图形方程涵义,则采用特殊点法判断.代入点坐标后,若可令不等式成立,则不等式表示包括此点的区域范围;若不等式不成立,则不等式表示不包括此点的区域范围.以直线为例,直线将坐标平面分为两部分,判断直线的不等式取坐标平面的哪一部分方法为:

以 $x-y+1>0$ 为例,代入原点(0,0)坐标,得 $x-y+1=0-0+1>0$,不等式成立,故直线的不等式所表示的平面区域包括原点,即不等式表示直线下方的区域.反之,若代入原点坐标后不能使不等式成立,则直线的不等式所表示的平面区域不包括原点(若直线过原点,则代入(1,0)或(0,1)等易于计算的点).

▶ 5 【2021.21】(条件充分性判断)设 x,y 为实数.则能确定 $x\leqslant y$.(　　)

(1)$x^2\leqslant y-1$.

(2)$x^2+(y-2)^2\leqslant 2$.

思考与总结

思考与总结

第十章

计数原理与排列组合

10.1 基础知识

加法原理与乘法原理

【加法原理/分类计数原理】

如果完成一件事有 n 种不同方案，第 1 种方案中有 m_1 种不同方法，第 2 种方案中有 m_2 种不同方法，以此类推，第 n 种方案有 m_n 种不同方法．若不论用哪一种方案中的哪一种方法，都可以完成此事，且它们相互独立，则完成这件事共有：$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同方法．这就是加法原理，或称分类计数原理．

【乘法原理/分步计数原理】

如果完成一件事需要经过 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，以此类推，做第 n 步有 m_n 种不同的方法．只有每个步骤都依次分别完成了，这件事才算完成，那么将各个步骤的方法数相乘，可以得到完成这件事的方法总数．即完成这件事共有：$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种不同方法．这就是乘法原理，或称分步计数原理．

	加法原理	乘法原理
相同点	加法原理和乘法原理研究的都是关于完成一件事情的不同方法的种数问题．	
不同点	分类：完成事情共有 n 类方案	分步：完成事情共分 n 个步骤
	每类方案都能独立完成此事	每一步得到的只是中间结果，任何一步都不能独立完成此事，缺少任何一步也不能完成此事，只有完成所有步骤才能完成此事．

▶ 1 【模拟题】将 8 本书分给 5 个人，没有其他限制，不同的分书情况共有多少种？

▶ 2 【模拟题】5 个人参加读书会，每个人只能选择一本书读，共有 8 本书备选，并且多人可以选择读同一本书一起读，不同的选书情况共有多少种？

▶ 3 【模拟题】集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 的不同的子集有多少个？

全排列与组合数

【组合数】从 n 个不同的元素中，任取 m 个元素（$m\leqslant n$），不论顺序组成一组，称为从 n 个元素中取出 m 个元素的一个组合. 所有这些组合的个数称为组合数，记为 C_n^m.

$$C_n^m=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\cdots\cdot1}=\frac{\text{从 } n \text{ 开始由大往小，数 } m \text{ 个数连乘}}{\text{从 } m \text{ 开始往小连乘至 } 1}=\frac{A_n^m}{A_m^m}$$

【全排列】将从 n 个不同的元素按照一定的顺序排成一列，称为这 n 个不同元素的一个排列. 所有这些排列的个数称为全排列数，记为 A_n^n.

$$A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

【常用公式】

$C_n^0=C_n^n=1$；　$C_n^1=C_n^{n-1}=n$；　$C_n^m=C_n^{n-m}$；　$A_n^m=C_n^m\cdot A_m^m$

【常用数值】

$A_3^3=3!=6$，　$C_3^1=C_3^2=3$

$A_4^4=4!=24$，$C_4^1=C_4^3=4$，$C_4^2=6$

$A_5^5=5!=120$，$C_5^1=C_5^4=5$，$C_5^2=C_5^3=10$

$A_6^6=6!=720$，$C_6^2=C_6^4=15$，$C_6^3=20$

▶ 4 【2012.01.05】某商店经营 15 种商品，每次在橱窗内陈列 5 种，若每两次陈列的商品不完全相同，则最多可陈列（　　）.

A. 3000 次　B. 3003 次　C. 4000 次　D. 4003 次　E. 4300 次

解题要点

在求解排列组合的题目的时候，只要分析清楚以下解题要点，就可以快速定位它对应的数学模型，解决问题.

(1)只能计算[格局确定]的方法数

所谓“格局确定”，指的是全局格局唯一确定，不可继续再分情况讨论.

(2)[元素]默认不同，[组]默认相同

相同元素主要有：①题目中指明相同②数字等抽象概念和名额、岗位、空座位等具有相同功能元素.

(3)确认[相同备选池]和[不同备选池]

在元素选取时，具有相同属性的元素形成一个备选池. 需要区分题目场景是根据不

同属性元素分别选取，还是将所有元素看作一个整体进行选取.

(4)先选再排原则

选元素时，先用组合数选取所需元素，再根据是否有顺序的要求用全排列添加顺序.

排队列时，先全排列，再根据局部定序/相同进行消序.

(5)未指明的⇒要明确选出是哪一个

(6)对部分元素要求不同或部分元素具有特殊属性要分步分别处理，其中特殊元素优先处理.

一般题目中的特殊元素指的是题目对元素有特殊要求，或元素具有特殊属性/功能，主要表现为：

(1)是否有某两元素必须相邻/不相邻的要求

(2)是否有某元素必须排在/不能排在某位置的要求

(3)是否有特殊功能的元素(偶数、末尾为 0 或 5 的数、双重功能元素)

元素的非全选常与特殊元素同时出现，当备选元素具有特殊元素且仅部分元素被选中时，需要分情况讨论，即分特殊元素被选中与不被选中两种情况讨论.

【举例】从 0、1、2、3、5、7、11 七个数字中每次取两个相乘，不同的积有多少种？

全排列的作用

【乘以 A_n^n】①给 n 个没有顺序的元素添加顺序(排队).

②两组各包含 n 个元素，将其一一配对.

5 【模拟题】下面的问题分别有多少种排列方法？

(1)7 个人全部排成一队：

(2)7 个人中选出 5 个排成一队：

(3)将两本书分配给甲、乙两人，每人一本：

(4)将三只队伍命名为甲、乙和丙：

【除以 A_m^m】将 m 个已有顺序的元素的顺序区别消去(即消序).

6 【模拟题】下面的问题分别有多少种排列方法？

(1)将 ABCDE 五个字母进行排列：

(2)将 ABCDD 五个字母进行排列：

(3)将 ABCCC 五个字母进行排列：

【密西西比法则】排列组合中快速计算有重复/相同/定序元素题目的方法.

▶ 7 【模拟题】如果把 mississippi(密西西比)这个单词的字母打乱顺序进行随机排列,请问一共有多少种不同的排列方式?

破题标志词

局部元素定序/相同⇒局部有几个元素定序/相同,就除以几的全排列.

注:若元素中有多组元素组内定序/相同,就分别除以各个组内元素数的全排列.

▶ 8 【模拟题】下面的问题分别有多少种排列方法?

(1)5 人排队,三男两女,共有多少种方法.

(2)5 人排队,三男两女,其中要求男生按身高从高到低排队

(3)5 人排队,三男两女,男生之间按身高由低至高排,女生之间按身高由高至低排队.

(4)5 人排队,全体按照身高由低至高排队

▶ 9 【2014.10.12】用 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的四位数,其中千位数字大于百位数字且百位数字大于十位数字的四位数的个数是(　　).

A. 36　　B. 40　　C. 48　　D. 60　　E. 72

排列与组合基础问题

▶ 10 【2022.10】一个自然数的各位数字都是 105 的质因数,且每个质因数最多出现一次,这样的自然数有(　　).

A. 6 个　　B. 9 个　　C. 12 个　　D. 15 个　　E. 27 个

10.2 组合问题:从不同备选池选取

每个备选池均选出元素

一般问题⇒直接选取

从不同备选池选取元素,每个备选池均选出元素的一般问题,直接用组合数从不同备选池选取后相乘即可.

11　【2018.11】羽毛球有 4 名男运动员和 3 名女运动员，从中选出两对参加混双比赛，则不同的选派方式有（　　）.

A. 9 种　　B. 18 种　　C. 24 种　　D. 36 种　　E. 72 种

12　【2021.08】甲、乙两组同学中，甲组有 3 名男同学、3 名女同学，乙组有 4 名男同学、2 名女同学，从甲、乙两组中各选出 2 名同学，这 4 人中恰有 1 名女同学的选法有（　　）.

A. 26 种　　B. 54 种　　C. 70 种　　D. 78 种　　E. 105 种

至少问题⇒分情况讨论

13　【模拟题】袋子中有 5 只红球，3 只白球，任取 4 只，求取出的球至少有 2 个白球的方法数有多少？

仅从部分备选池选出元素

从不同备选池选取元素时，若仅从部分备选池选出，则需要先选定备选池，再从不同备选池中选取元素.

每个备选池元素个数相同⇒用组合数选取备选池，再从池中选元素

14　【2019.14】某中学的 5 个学科各推举 2 名教师作为支教候选人，若从中选派来自不同学科的 2 人参加支教工作，则不同的选派方式有（　　）.

A. 20 种　　B. 24 种　　C. 30 种　　D. 40 种　　E. 45 种

【拓展】从 5 双不同的鞋中选取 2 只，要求这两只不成双，有多少种选取方式.

有备选池元素个数不同⇒分情况讨论

15　【2016.06】某委员会由三个不同专业的人员组成，三个专业的人员分别是 2，3，4，从中选派 2 位不同专业的委员外出调研，则不同的选派方式有（　　）.

A. 36 种　　B. 26 种　　C. 12 种　　D. 8 种　　E. 6 种