2024零基础抱佛脚

(四)

数学—阿董

抱佛脚

讲义P32-P43

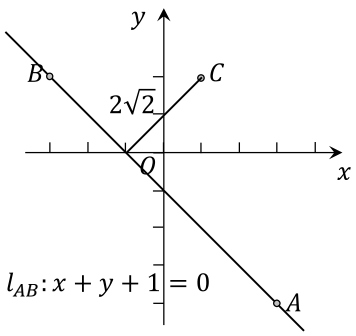
章节	题目个数	举例个数	总数
04二元一次方程与直线	0	1	1
05二次方程与抛物线	15	4	19
06数列	1	0	1

二元一次方程与直线 4.3 点与直线·点到直线距离公式

点到直线距离　点$P(x_0,y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离为 $\boldsymbol{d}=\dfrac{|\boldsymbol{Ax_0}+\boldsymbol{By_0}+\boldsymbol{C}|}{\sqrt{\boldsymbol{A^2}+\boldsymbol{B^2}}}$

(x_1,y_1)　(x_2,y_2)　(x_0,y_0)

【举例】已知3个点坐标分别为$A(3,-4)$、$B(-3,2)$和$C(1,2)$，则点C到AB所在直线距离为 $\underline{2\sqrt{2}}$.



根据两点式直线方程$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$可得$\dfrac{y+4}{2+4}=\dfrac{x-3}{-3-3}$

整理得$x+y+1=0$　$\begin{cases}A=1\\B=1\\C=1\end{cases}$

$$d=\frac{|1\times1+1\times2\ +\ 1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

二元一次方程与直线 4.3 点与直线·两直线位置关系

【两直线交点】一个二元一次方程在坐标平面代表一条直线，要求两条直线的交点，只需把这两个二元一次方程联立求解.

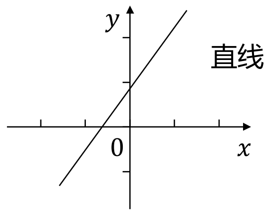
$\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}$　$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$　有唯一解　两直线相交于一点

$\begin{cases}x+y=3\\2x+2y=6\end{cases}$　有无数解　两直线重合

$\begin{cases}x+y=3\\x+y=1\end{cases}$　无解　两直线平行

当联立方程组无解时，两直线平行；有无穷多解时，两直线重合；
只有一解时，两直线相交于一点.

二元一次方程与直线 4.3 点与直线



$Ax + By + C = 0$

（其中A, B不同时为零）

【两直线交点】一个二元一次方程在坐标平面代表一条直线，要求两条直线的交点，只需把这两个二元一次方程联立求解.

➢ 求直线与x轴交点

$$\begin{cases} x\text{轴方程}y = 0 \\ \text{直线方程}Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

【标志词汇】求曲线与x轴交点⇒代入$y = 0$.

➢ 求直线与y轴交点

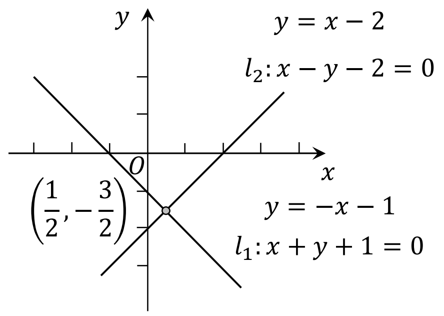
$$\begin{cases} y\text{轴方程}x = 0 \\ \text{直线方程}Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

【标志词汇】求曲线与y轴交点⇒代入$x = 0$.

二元一次方程与直线 4.3 点与直线・两直线位置关系

一般式 $Ax + By + C = 0$（A, B不同时为零） **斜截式** $y = kx + b$

关系	交点个数	联立方程	斜率关系	系数关系
相交	1个	有唯一解，即交点坐标(x_0, y_0).	$k_1 \neq k_2$ 垂直时$k_1 \times k_2 = -1$	$A_1B_2 \neq A_2B_1$ 垂直时$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$



$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

二元一次方程与直线 4.3 点与直线·两直线位置关系

一般式 $Ax+By+C=0$（A,B不同时为零）　**斜截式** $y=kx+b$

关系	交点个数	联立方程	斜率关系	系数关系
相交	1个	有唯一解，即交点坐标(x_0,y_0).	$k_1\neq k_2$ 垂直时$k_1\times k_2=-1$	$A_1B_2\neq A_2B_1$ 垂直时$A_1A_2+B_1B_2=0$
平行	无	无解	$k_1=k_2$	$A_1B_2=A_2B_1$ $B_1C_2\neq B_2C_1$
重合	2个以上	有无数解	$k_1=k_2$	$A_1B_2=A_2B_1$ $B_1C_2=B_2C_1$

$\begin{cases}y=x+1\\y=x+2\end{cases}$　$\begin{cases}x-y+2=0\\2x-2y+4=0\end{cases}$

二元一次方程与直线 4.3 点与直线·两直线位置关系

位置关系⇔系数关系

【标志词汇】<u>两条直线垂直</u>　直线斜率关系$k_1\times k_2=-1$

系数关系$A_1A_2+B_1B_2=0$

【标志词汇】<u>两条直线平行</u>　直线斜率关系$k_1=k_2$

或系数关系$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$

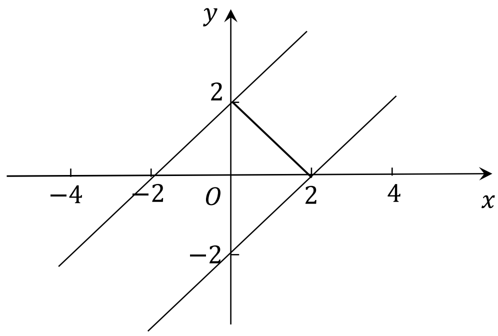
【说明】一般而言，若题目给出点斜式或斜截式方程，则用斜率关系求解；

若给出一般方程，则用系数关系求解.

二元一次方程与直线 4.3 点与直线・两直线位置关系

设有两平行直线方程分别为$Ax+By+C_1=0$与$Ax+By+C_2=0$

两平行直线间的距离公式 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$



直线$x-y+2=0$与直线$x-y-2=0$

距离$d=\dfrac{|2-(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

二元一次方程与直线 4.3 点与直线・重要公式（总结）

公式	描述
线段中点坐标	已知$P_1(x_1,y_1)$与$P_2(x_2,y_2)$，线段P_1P_2的中点坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$
两点间距离	$P_1(x_1,y_1)$与$P_2(x_2,y_2)$两点间距离为$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
两点斜率公式	当$x_1\neq x_2$时，过$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$两点的直线的斜率$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
	当$x_1=x_2$时，过$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$两点的直线的斜率不存在
点到直线距离	点$P(x_0,y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离为$d=\dfrac{\|Ax_0+By_0+C\|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
平行直线间距离	$Ax+By+C_1=0$与$Ax+By+C_2=0$间距离为$d=\dfrac{\|C_1-C_2\|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

二次方程与抛物线

2024MBA大师零基础抱佛脚

二次方程与抛物线

每年考查1-2题左右
既是重要考点，又是重要工具

联考核心技能

一元二次方程

一元二次不等式

一元二次函数

二次方程与抛物线

二次方程与抛物线	5.2一元二次方程的根	近5年考3题【2022.21】【2022.23】【2019.20】
	5.3二次函数	近5年考1题【2021.05】【2020.23】
	5.4给出根的取值范围相关计算	近5年考1题【2023.17】
	5.5不等式与二元一次不等式	近5年考1题【2020.03】

二次方程与抛物线

第五章 二次方程与抛物线

5.1 一元二次方程

讲义 P33

二次方程与抛物线 5.1 一元二次方程

【整式方程】等号两边都是关于未知量的整式的方程　仅包含数字与字母的和或乘积

【一元二次方程】只含有一个未知量（一元），并且未知量的最高次数是二次的整式方程.

$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ x^2项必须有，其余项可以没有

$|x-1|+x=2$　　$x^2-x-5=|2x-1|$　　$\sqrt{1-x^2}=x+1$

$\frac{3x^2-2}{x^2-1}=1$　　$\frac{a}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0$　　$\frac{2y+3x}{3}=2$

$4^x+2^x=1$　　$\log_a x=1$

注：一元二次方程要求为形式上完全符合的整式方程，包含绝对值、根式、分式、指数、对数等均不是一元二次方程，不可以直接套用根的判别式及求根公式等分析.

二次方程与抛物线 5.1 一元二次方程

方程的解 使方程左右两边相等的未知量（一般为x或y）的值（或未知数的一组值）

一元方程的解也叫作**方程的根**. 能令等号成立的未知量的值

关于x的一元二次方程$x^2+2x-3=0$　　$(x-1)(x+3)=0$

当$x=1$和$x=-3$时，均有方程等号左右两边相等，故1和-3均为该一元二次方程的根.

【标志词汇】给定一个数是方程的一个根⇒给定一个此数满足的等式.

5是关于x的一元二次方程$x^2+mx-3=0$的一个根 ⇒代入得$5^2+5m-3=0$

m是关于x的一元二次方程$x^2+2x-3=0$的一个根 ⇒代入得$m^2+2m-3=0$

二次方程与抛物线 **5.1 一元二次方程**

方程组（联立方程）把若干个方程合在一组研究，未知量同时满足每一个方程

$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 有唯一解 ★

$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ 有无数解

$\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$ 无解

两个方程的公共根（解） $x^2+2x-3=0$ $x^2-1=0$

$x=1$或-3 $x=\pm1$ $x=1$是两个方程的公共根

讲义 P33

二次方程与抛物线

第五章 二次方程与抛物线

5.2 一元二次方程的根

讲义 P33-P36

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根

【一元二次方程】只含有一个未知量（一元），并且未知量的最高次数是二次的整式方程.

标准形式（一般式） $ax^2+bx+c=0$ （$a\neq 0$）

两根式 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ （$a\neq 0$，$\Delta\geq 0$）

使一元二次方程左右两边相等的x的值，称为一元二次方程的**根**

【标志词汇】<u>给定一个数是方程的一个根⇒给定一个此数满足的等式.</u>

5是关于x的一元二次方程$x^2+mx-3=0$的一个根 ⇒代入得$5^2+5m-3=0$

m是关于x的一元二次方程$x^2+2x-3=0$的一个根 ⇒代入得$m^2+2m-3=0$

大师笔记：一元二次方程的根 讲义 P33

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根

【一元二次方程】只含有一个未知量（一元），并且未知量的最高次数是二次的整式方程.

标准形式（一般式） $ax^2+bx+c=0$ （$a\neq 0$）

两根式 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ （$a\neq 0$，$\Delta\geq 0$）

使一元二次方程左右两边相等的x的值，称为一元二次方程的**根**

$x^2+2x-3=0$ $(x-1)(x+3)=0$ $x_1=1$，$x_2=-3$

$2x^2=0$ $x_1=x_2=0$

$x^2+4=0$ 没有实数根

一元二次方程根的3种可能情况

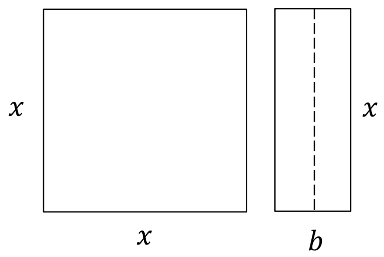
- 有两个不等的实数根
- 有两个相等的实数根
- 没有实数根

讲义 P33

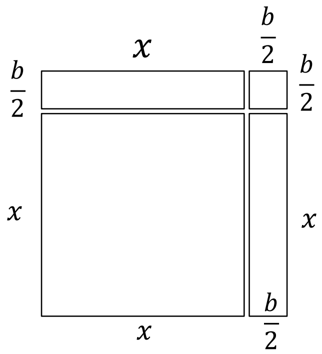
二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根 · 二次多项式配平方

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ★ 完全平方公式 $\begin{cases} \text{知二推二模型（第四章）} \\ \text{多项式配平方（本章）} \end{cases}$

二次多项式配平方 将一个二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和.



面积：$x^2 + bx$



面积：$\left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2$

讲义 P33

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根 · 二次多项式配平方

二次多项式配平方 将一个二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和.

$$x^2 + bx + c = \boxed{x^2 + 2\cdot\frac{b}{2}\cdot x + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$$

加上一次项系数一半的平方后，再减去一次项系数一半的平方

【例题】把二次多项式$x^2 + 6x - 16$配平方

$$x^2 + 6x - 16 = x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 16$$

加上x系数一半的平方后，再减去x系数一半的平方

$$= (x+3)^2 - 3^2 - 16 = (x+3)^2 - 25$$

讲义 P33

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根・二次多项式配平方

1.【例题】将下列多项式配平方 $\boldsymbol{x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$

- $x^2+6x=\left[x+\left(\frac{6}{2}\right)\right]^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2=(x+3)^2-9$
- $x^2-6x=\left[x+\left(-\frac{6}{2}\right)\right]^2-\left(-\frac{6}{2}\right)^2=(x-3)^2-9$
- $x^2-2x+4=\left[x+\left(-\frac{2}{2}\right)\right]^2-\left(-\frac{2}{2}\right)^2+4=(x-1)^2+3$
- $y^2+8y+1=\left(y+\frac{8}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2+1=(y+4)^2-15$
- $x^2+y^2+4x+2y+1=x^2+4x+y^2+2y+1$

  $=\left(x+\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2+(y+1)^2\quad=(x+2)^2+(y+1)^2-4$

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的求根公式

【一元二次方程求根公式】对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

二次项系数$a\neq 0$，故方程两边同除以a得：$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

配方，两边同时加x系数$\frac{b}{a}$一半的平方得：$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

当$b^2-4ac\geq 0$时，两边开平方得$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ $\quad\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·求根公式

【一元二次方程求根公式】对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，

当$b^2-4ac\geq 0$时，它的根是 $\boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

[总结]一元二次方程若有无理根，则一定成对出现，互为有理化因式.

【标志词汇】<u>给定二次方程一个无理根⇒利用无理根成对出现求解</u>

讲义 P34

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·求根公式

2.【模拟题】已知a，b为有理数，并且$\sqrt{5}-2$是方程$x^2+ax+b=0$的一根，则$a^b=$（　　）.

A.2　　B.$\sqrt{5}$　　C.4　　D.$\frac{1}{2}$　　E.$\frac{1}{4}$

【答案】E

讲义 P34

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·根的判别式

一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根是：

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \longrightarrow$$ **一元二次方程根的判别式Δ**

根的判别式是判定方程是否有实数根的依据

（1）$\Delta=b^2-4ac>0$时，方程有两个不相等的实数根，即

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}；\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

（2）$\Delta=b^2-4ac=0$时，方程有两个相等的实数根，即$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

【注意】此时方程仍然有两实根，它们取值相等，而非仅有一个根.

（3）$\Delta=b^2-4ac<0$时，方程无实数根.

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·根的判别式

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当$b^2-4ac\geq 0$时，它的根是

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \longrightarrow$$ **一元二次方程根的判别式$\boldsymbol{\Delta=b^2-4ac}$**

$x^2+2x+3=0$

$\Delta=2^2-4\times 1\times 3=4-12=-8<0$ 方程无实数根

配方检验 $x^2+2x+1-1+3=0$ 加上一次项系数一半的平方后再减去一次项系数一半的平方

$(x+1)^2-1+3=0$

$(x+1)^2=-2$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根的判别式

3.【2014.10.24】关于x的方程 $mx^2+2x-1=0$有两个不相等的实根.（　　）

（1）$m>-1$.　　　　（2）$m\neq 0$.

【答案】C

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·总结

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\longrightarrow$$ 一元二次方程根的判别式Δ

【标志词汇】一元二次方程有实根$\Leftrightarrow \Delta\geq 0$.

一元二次方程有两个**相等**的实根$\Leftrightarrow \Delta=0$.

一元二次方程有两个**不相等**的实根$\Leftrightarrow \Delta>0$.

一元二次方程无实根$\Leftrightarrow \Delta<0$.

一元二次方程要么没有实数根，要么就有两个实数根.

【标志词汇】给定一个数是方程的一个根⇒给定一个此数满足的等式.

5是关于x的一元二次方程$x^2+mx-3=0$的一个根 ⇒代入得$5^2+5m-3=0$

m是关于x的一元二次方程$x^2+2x-3=0$的一个根 ⇒代入得$m^2+2m-3=0$

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·构造二次方程

【标志词汇】 [3个未知量] + [2个方程]

若方程均为一次方程，则加减、代入消元	①用一个量唯一表示其余所有未知量
	②求出未知量间的唯一比例关系

4.【2013.01.22】 设x,y,z为非零实数，则$\dfrac{2x+3y-4z}{-x+y-2z}=1$（　）.

（1）$3x-2y=0$.　　（2）$2y-z=0$.

【答案】C

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·构造二次方程

【标志词汇】 [3个未知量] + [2个方程]

若方程均为一次方程，则加减、代入消元	①用一个量唯一表示其余所有未知量
	②求出未知量间的唯一比例关系
若方程中有二次方程，则消元后利用整体思维，构造二次方程，利用求根公式求解	①用一个量表示其余所有未知量，表示可能不唯一
	②求出未知量间的比例关系，比例关系可能不唯一

是否唯一要看是否还有其余限制条件

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·构造二次方程

5.【2022.23】已知a,b为实数，则能确定$\frac{a}{b}$的值.（　）

（1）$a,b,a+b$成等比数列.　　　（2）$a(a+b)>0$.

【答案】E

讲义 P35

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·韦达定理

弗朗索瓦·韦达

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

两根相加　$\boldsymbol{x_1+x_2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

一元二次方程根与系数之间关系

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=-\boldsymbol{\frac{b}{a}}$$

大师笔记：韦达定理　讲义 P35

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·韦达定理

对于一元二次方程两根：$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

两根相乘 $\quad \boldsymbol{x_1\cdot x_2}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\boldsymbol{\frac{c}{a}}$$

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·韦达定理

弗朗索瓦·韦达

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根：

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

根与系数关系
（韦达定理）

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

根 系数

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·韦达定理

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

【标志词汇】一元二次方程有实根/有两个相等的实根/有两个不相等的实根/无实根

$\Delta\geq0$ $\Delta=0$ $\Delta>0$ $\Delta<0$

根的判别式是判定方程是否有实根的充要条件

根与系数关系（韦达定理） $\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$ $\boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$

韦达定理说明了根与系数的关系.

事实上，无论方程有无实数根，实系数一元二次方程的根与系数之间关系均适合韦达定理.

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·韦达定理

6.【例题】已知方程$2x^2-3x-4=0$有两个实数根x_1和x_2，则$x_1+x_2=$（ ），$x_1\cdot x_2=$（ ）.

【答案】$\frac{3}{2}$，-2

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·韦达定理

韦达定理（根与系数关系） $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$　$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$　韦达定理说明了根与系数的关系.

【韦达定理逆定理】如果两数α和β满足如下关系$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$　$(a\neq 0)$

那么这两个数α和β是方程$ax^2+bx+c=0$的根.

【逆定理常见应用】如果给定两数和$\alpha+\beta=m$，两数积$\alpha\beta=n$

那么这两个数α和β是方程$x^2-mx+n=0$的根.

将两数之和的相反数作为一次项系数　　两数之积作为常数项

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·韦达定理

7.【2015.20】（条件充分性判断）设$\{a_n\}$是等差数列.则能确定数列$\{a_n\}$.（　）

（1）$a_1+a_6=0$.　　（2）$a_1a_6=-1$.

【答案】E

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·韦达定理

【标志词汇】给定一个数是方程的一个根⇒给定一个此数满足的等式.

5是关于x的一元二次方程$x^2+mx-3=0$的一个根 ⇒代入得$5^2+5m-3=0$

m是关于x的一元二次方程$x^2+2x-3=0$的一个根 ⇒代入得$m^2+2m-3=0$

【标志词汇】给定两个数是二次方程的两根⇒①韦达定理②两根式设出方程.

1,2是一元二次方程的根⇔二次方程可设为$a(x-1)(x-2)=0$

【标志词汇】求关于一元二次方程两根的算式 ⇒

凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表达的算式，再代入韦达定理

二次方程与抛物线 5.2 一元二次方程的根·韦达定理

【标志词汇】关于两根的算式⇒凑配为由x_1+x_2和x_1x_2表达的算式，再代入韦达定理.

通分、完全平方公式、平方差公式等 $\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$ $\boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$

$${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c} \qquad \frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{{x_1}^2{x_2}^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$

$$x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\ (\text{设 } x_1>x_2)$$

$$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$

$${x_1}^3+{x_2}^3=(x_1+x_2)({x_1}^2-x_1x_2+{x_2}^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$

二次方程与抛物线 **5.2 一元二次方程的根·韦达定理**

8.【2015.09】已知x_1，x_2是方程$x^2-ax-1=0$的两个实根，则${x_1}^2+{x_2}^2=$（　　）.

A.a^2+2　　B.a^2+1　　C.a^2-1　　D.a^2-2　　E.$a+2$

【答案】A

讲义 P36

二次方程与抛物线

第五章 二次方程与抛物线

5.3 二次函数

讲义 P36-P38

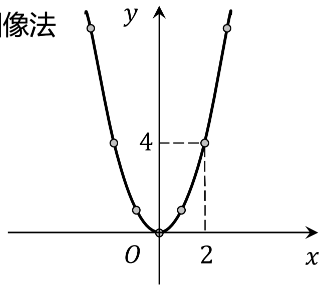
二次方程与抛物线 5.3 二次函数·图像

解析式：$y=x^2$，$x\in\mathbf{R}$

列表法

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

图像法



二次函数图像为一条抛物线

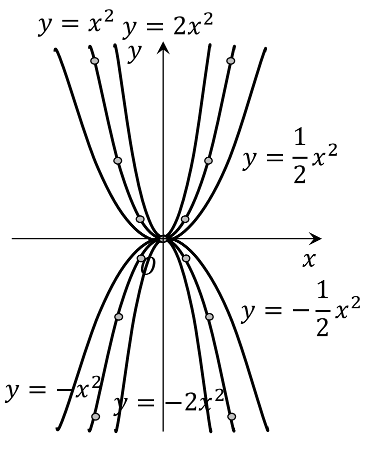
对称性：轴对称图形

增减性：对称轴左右两侧增减性相反

顶点（最值）：在顶点处取得最值

二次方程与抛物线 5.3 二次函数·图像

➢ 抛物线开口方向与开口大小 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）



二次项系数a决定抛物线开口方向与大小

开口方向：当$a>0$时抛物线开口向上

当$a<0$时抛物线开口向下

开口大小：$|a|$越大，开口越小

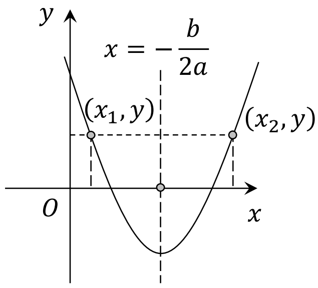
$|a|$越小，开口越大

a越接近于零，开口越大，抛物线越胖

极限分析法

二次方程与抛物线 5.3 二次函数·图像

➢ 抛物线对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$　　对称性：抛物线关于对称轴左右对称



（1）抛物线上一对关于对称轴对称的点

（2）他们纵坐标相等$y_1=y_2=y$

（3）到对称轴距离相等，横坐标满足$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}$

(1) (2) (3) 条中满足一条就一定满足其余.

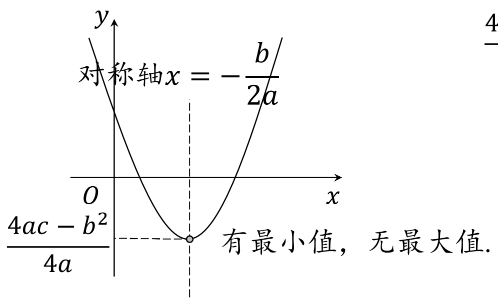
注意：$b=0 \Leftrightarrow$对称轴为y轴；a,b同号时对称轴在y轴左侧，a,b异号时对称轴在y轴右侧.

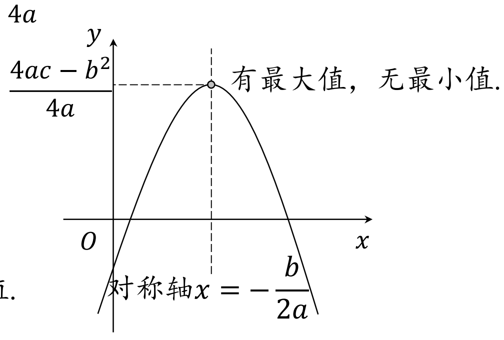
【举例】已知$(1,m)$和$(-5,m)$在抛物线$y=x^2+bx+2$上，求b.

$(1,m)$和$(-5,m)$纵坐标相等，两点对称. $\dfrac{-5+1}{2}=-\dfrac{b}{2}$，$b=4$

二次方程与抛物线 5.3 二次函数·图像

当$x=-\dfrac{b}{2a}$时，二次函数可取到最值$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$



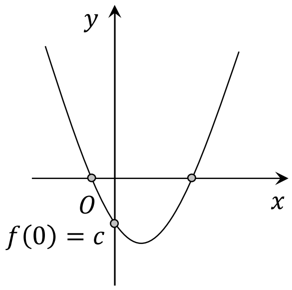


①将$x=-\dfrac{b}{2a}$代入函数$y=ax^2+bx+c$中求最值

②结合开口方向（a的正负性）判断是最大值还是最小值

二次方程与抛物线 5.3 二次函数·图像

➢ 抛物线与y轴交点



$y=x^2-4x-5$

y轴上每一个点的横坐标都为0

代入$x=0$求图像与y轴交点

$f(0)=0^2-4\times0-5=-5$

抛物线与y轴交于$(0,c)$点

抛物线与y轴交点的纵坐标 $\Leftrightarrow$ 抛物线在y轴截距

常数项$c=0$时，抛物线必过原点.

$c>0$时，抛物线与y轴正半轴相交

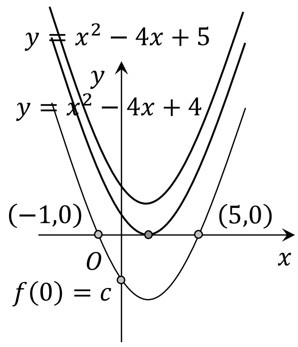
$c<0$时，抛物线与y轴负半轴相交

【拓展】事实上，对于所有曲线方程式的一般形式，当它无常数项时，必过原点

讲义 P37

二次方程与抛物线 5.3 二次函数·图像

➢ 抛物线与x轴交点



$y=x^2-4x-5$

x轴上每一个点的纵坐标都为0

代入$y=0$求图像与x轴交点

$y=x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$　　$x=5$或$x=-1$

抛物线与x轴交点对应一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根.

$y=x^2-4x+4$　对应方程$(x-2)^2=0$　$x_1=x_2=2$

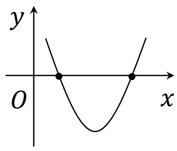
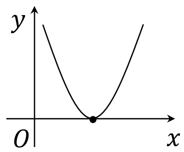
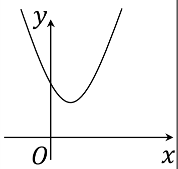
$y=x^2-4x+5$　对应方程$x^2-4x+5=0$

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=16-20<0$

抛物线与x轴的交点$\Leftrightarrow$对应的二次方程的根

讲义 P37

二次方程与抛物线 5.3 二次函数·多项式、方程、函数图像关系

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次多项式 ax^2+bx+c	可因式分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$	可因式分解为 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	不可因式分解
二次方程 $ax^2+bx+c=0$	两相异实根 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	两相同实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实根
二次函数$(a>0)$ $y=ax^2+bx+c$			

二次方程两根式
$a(x-x_1)(x-x_2)=0$

二次函数交点式
$y=a(x-x_1)(x-x_2)$

二次方程与抛物线 5.3 二次函数

交点式

9.【2020.23】设函数$f(x)=(ax-1)(x-4)$，则在$x=4$左侧附近有$f(x)<0$.（　　）

（1）$a>\frac{1}{4}$.　　　　（2）$a<4$.

【答案】A

二次方程与抛物线

第五章 二次方程与抛物线

5.4 给出根的取值范围相关计算

讲义 P38-P39

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围·根的零分布

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）

韦达定理 $\underbrace{\boxed{\begin{matrix} x_1+x_2 \\ x_1\cdot x_2 \end{matrix}}}_{\text{根}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -\frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} \end{matrix}}}_{\text{系数}}$ 研究根与系数关系的题目

【标志词汇】一元二次方程①已知系数求两根；②已知两根求系数 ⇒ 韦达定理.

【标志词汇】一元二次方程有一正一负两个根

【标志词汇】一元二次方程有两正根/两不相等的正根

【标志词汇】一元二次方程有两负根/两不相等的负根

研究方程根的分布范围
与
系数的取值范围之间的关系

大师笔记：根的零分布 讲义 P38

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围·根的零分布

对于二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）有：韦达定理 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $x_1x_2=\frac{c}{a}$

【标志词汇】<u>一元二次方程有一正一负两个根⇔ a与c异号</u>

韦达定理角度	一正一负两根，乘积小于零，即$x_1x_2=\frac{c}{a}<0$，a与c异号.

一正一负两个根，即$x_1\cdot x_2<0$

$$\frac{c}{a}<0 \xrightarrow[\text{不等式等价变形}]{\text{两边同乘}a^2} ac<0$$

【说明】$ac<0$，$-ac>0$，此时一定$b^2-4ac>0$，即根的判别式$\Delta>0$自动满足.

讲义 P38

抱佛脚 补充·常用数学表达

两数异号（一正一负） $m\cdot n<0$

两数异号，且负数绝对值大于正数 $\begin{cases} m\cdot n<0 \\ m+n<0 \end{cases}$

两数异号，且负数绝对值小于正数 $\begin{cases} m\cdot n<0 \\ m+n>0 \end{cases}$

两数互为相反数 $m+n=0$ 两数异号，且负数绝对值等于正数

两数同号 $m\cdot n>0$

两数同为正 $\begin{cases} m\cdot n>0 \\ m+n>0 \end{cases}$ 两数同为负 $\begin{cases} m\cdot n>0 \\ m+n<0 \end{cases}$

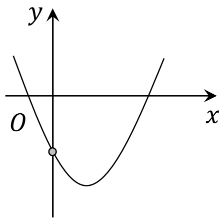
两数均不为零 $m\cdot n\neq 0$

两数至少有一个为零 $m\cdot n=0$

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围·根的零分布

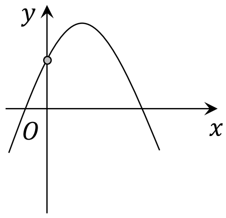
【标志词汇】<u>一元二次方程有一正一负两个根⇔ a与c异号</u>

抛物线	若开口向上$(a>0)$，则一定有y轴截距$f(0)=c<0$.	即a与c异号.
图像角度	反之若开口向下$(a<0)$，则一定有y轴截距$f(0)=c>0$.	



当开口向上$(a>0)$时

抛物线在y轴截距一定为负



开口向下$(a<0)$时

抛物线在y轴截距一定为正

抛物线一定穿过x轴

故满足$ac<0$时一定有实根

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围·根的零分布

10.【2005.10.05】（条件充分性判断）方程$x^2+ax+b=0$有一正一负两个实根.（　　）

（1）$b=-\mathrm{C}_4^3$. 方法数

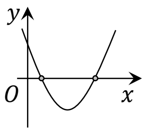
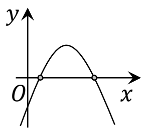
（2）$b=-\mathrm{C}_7^5$. 方法数

【答案】 D

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围·根的零分布

【标志词汇】一元二次方程有两正根⇔ $\Delta \geq 0$，a与c同号，a与b异号

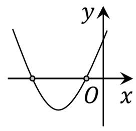
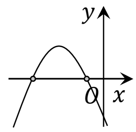
一元二次方程有两不相等的正根⇔ $\Delta > 0$，a与c同号，a与b异号

大前提：$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$（或$\Delta = b^2 - 4ac > 0$）	
韦达定理角度	两正根之和大于零，即$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$，$a$与$b$异号
	两正根之积大于零，即$x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0$，a与c同号
抛物线图像角度	对称轴位于两正根之间，大于零，即$\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} > 0$，$a$与$b$异号
	若开口向上($a > 0$)，则y轴截距$f(0) = c > 0$ 若开口向下($a < 0$)，则y轴截距$f(0) = c < 0$ 综上所述，a与c同号  

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围·根的零分布

【标志词汇】一元二次方程有两负根⇔ $\Delta \geq 0$，且a, b, c同号

一元二次方程有两不相等的负根⇔ $\Delta > 0$，且a, b, c同号

大前提：$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$（或$\Delta = b^2 - 4ac > 0$）	
韦达定理角度	两负根之和小于零，即$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$，$a$与$b$同号
	两负根之积大于零，即$x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0$，a与c同号
抛物线图像角度	对称轴位于两负根之间，小于零，即$\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} < 0$，$a$与$b$同号
	若开口向上($a > 0$)，则y轴截距$f(0) = c > 0$ 若开口向下($a < 0$)，则y轴截距$f(0) = c < 0$ 综上所述，a与c同号  

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围・根的零分布

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）

【标志词汇】一正一负两个根 $\Leftrightarrow$ a与c异号

【标志词汇】两正根$\Leftrightarrow$ $\Delta\geq 0$，a与c同号，a与b异号

【标志词汇】两负根$\Leftrightarrow$ $\Delta\geq 0$，且a,b,c同号

将方程化为二次项系数$a>0$的标准二次方程

系数特征	方程的根	根的判别式Δ
$c<0$	一正一负两实根	自动满足
正x^2+负$x+$正$=0$	两正根	$\Delta\geq 0$
正x^2+正$x+$正$=0$	两负根	

讲义 P39

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围・根的零分布(总结)

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a>0$）

系数特征	方程的根	根的判别式Δ
$c<0$	一正一负两实根	自动满足
正x^2+负$x+$正$=0$	两正根	$\Delta\geq 0$
正x^2+正$x+$正$=0$	两负根	

若给定两根在不同区间内，则无需验证根的判别式Δ.

如“一正一负两根”、“(m,n)中只有一个根”、“某数m在两根之间”等

若给定两根在同一区间内，则需要首先验证根的判别式Δ.

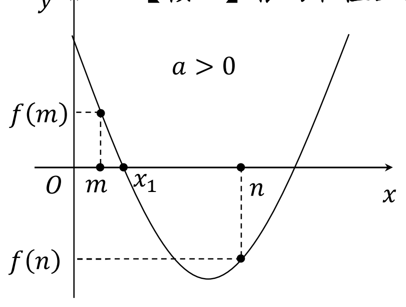
如“两不相等的正根”、“两不相等的负根”、“两根均在$[m,n]$内”等

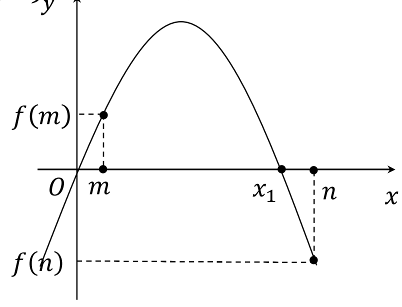
讲义 P39

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围 · 根的k分布

【标志词汇】 $f(m)f(n)<0 \Rightarrow$ 一元二次方程在(m,n)范围中只有一个根. “两端异号，中间一根”

【核心】根的取值区间端点函数值正负





$f(m)>0$，$f(n)<0 \Rightarrow f(m)f(n)<0$

(m,n)范围中有且仅有一个根x_1

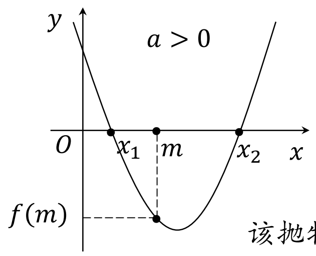
$f(m)>0$，$f(n)<0 \Rightarrow f(m)f(n)<0$

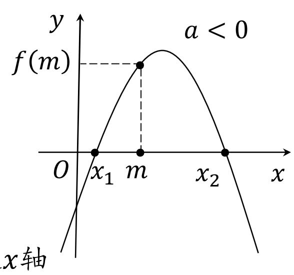
(m,n)范围中有且仅有一个根x_1

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围 · 根的k分布

【标志词汇】 一元二次方程一个根大于m，一个根小于$m \Leftrightarrow$对应函数$af(m)<0$.

抛物线图像	$\left.\begin{array}{l}\text{若开口向上}(a>0)\text{，则}f(m)<0\\\text{若开口向下}(a<0)\text{，则}f(m)>0\end{array}\right\}$ 即a与$f(m)$异号





该抛物线一定会穿过x轴

即抛物线若满足$af(m)<0$，一定能保证穿过x轴（$\Delta>0$），故此时无需额外验证根的判别式.

二次方程与抛物线 5.4 给出根的取值范围・根的k分布

11.【2023.17】关于x的方程$x^2-px+q=0$有两个实根a,b，则$p-q>1$.（　　）

（1）$a>1$.　　（2）$b<1$.

【答案】C

讲义 P39