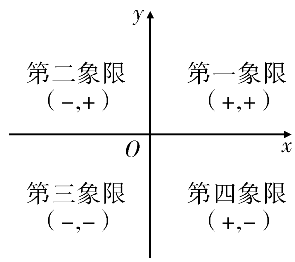
4.2 平面直角坐标系

在平面上选定两条相互垂直的直线，分别指定正方向（用箭头表示），以两直线的交点 O 作为原点，设定单位长度，这样，就在平面上建立了一个直角坐标系，也叫作笛卡尔直角坐标系.

这两条相互垂直的直线叫作坐标轴，习惯上把其中一条放在水平的位置上，以向右的方向作为它的正方向，这条轴叫作横坐标轴，简称为横轴或 x 轴. 与横轴垂直的一条坐标轴叫作纵坐标轴，简称为纵轴或 y 轴，以向上的方向作为它的正方向.

两条坐标轴将平面分割为四个区域，分别称为四个象限.



(1)坐标平面内的点与有序实数对一一对应.

(2)坐标轴上的点不属于任何象限.

(3)y 轴上的点，横坐标都为零.

(4)x 轴上的点，纵坐标都为零.

(5)一点上下平移，横坐标不变，即平行于 y 轴的直线上的点横坐标相同.

(6)一点左右平移，纵坐标不变，即平行于 x 轴的直线上的点纵坐标相同.

(7)一个关于 x 轴对称的点横坐标不变，纵坐标变为原坐标的相反数.

(8)一个关于 y 轴对称的点纵坐标不变，横坐标变为原坐标的相反数.

4.3 点与直线

基础知识

【直线】从平面解析几何的角度来看，平面上的直线就是由平面直角坐标系中的一个二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A、B 不同时为零）所表示的图形.

说明：当 $A=0$ 时为水平直线，当 $B=0$ 时为竖直直线. 以直线方程 $x=1$ 为例，直线上每一个点的横坐标 x 都有与其相对应的纵坐标 y，$x=1$ 属于广义二元一次方程.

【直线的斜率】斜率可以表示一条直线对于 x 轴的倾斜程度（由直线与 x 轴正方向夹

角确定)，记做字母 k. 特别地，规定竖直直线的斜率不存在.

【判断直线过点/点在直线上】若点坐标满足直线方程，则点一定在直线上. 设点 P 的坐标为 (m,n)，直线的方程为 $Ax+By+C=0$，代入 $\begin{cases}x=m\\y=n\end{cases}$，若有 $Am+Bn+C=0$，则点 P 在直线上.

破题标志词

曲线过点⇒点坐标代入曲线方程，等式成立.

2【2014.01.16】(条件充分性判断)已知曲线 $l: y=a+bx-6x^2+x^3$. 则 $(a+b-5)(a-b-5)=0$.(　　)

(1)曲线 l 过点 $(1,0)$.

(2)曲线 l 过点 $(-1,0)$.

直线的方程

【直线的一般式方程】$Ax+By+C=0(a^2+b^2\neq 0$，即 A、B 不同时为零).

特别地：在直线方程中，如果常数项为零(仅含 x 项和 y 项)，则直线一定过原点 $(0,0)$，它在 x 轴截距、y 轴截距均为零.

【竖直/水平直线】当 A,B 中有一个为零时，方程表示竖直或水平的直线，即与坐标轴平行或重合的直线.

竖直直线方程 $x=m$(m 为任意实数)，特殊的竖直直线为 y 轴，方程式为 $x=0$.

水平直线方程 $y=n$(n 为任意实数)，特殊的水平直线为 x 轴，方程式为 $y=0$.

【直线的点斜式方程】斜率为 k，且经过点 $P(x_0,y_0)$ 的直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.

【直线的斜截式方程】斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b 的直线方程为 $y=kx+b$.

【直线的两点式方程】已知直线上两点 $p_1(x_1,y_1)$，$p_2(x_2,y_2)$ 可确定一条直线，其方程为 $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.$(x_1\neq x_2)$

破题标志词

曲线一般方程中无常数项⇒曲线必过原点.

【两直线交点】我们知道，一个二元一次方程在坐标平面代表一条直线，要求两条直线的交点，只需把这两个二元一次方程联立求解，当这个联立方程组无解时，两直线平行；有无穷多解时，两直线重合；只有一解时，两直线相交于一点.

直线在坐标轴的截距

分类	含义	计算方法
在 y 轴的截距	直线与 y 轴交点的纵坐标（或称为纵截距）	在直线方程中代入：$x=0$，得到的 y 值即为直线的纵截距
在 x 轴的截距	直线与 x 轴交点的横坐标（或称为横截距）	在直线方程中代入：$y=0$，得到的 x 值即为直线的横截距

破题标志词

曲线与 x 轴交点⇒代入：$y=0$（实际上就是与 x 轴方程 $y=0$ 联立）.

曲线与 y 轴交点⇒代入：$x=0$（实际上就是与 y 轴方程 $x=0$ 联立）.

重要公式

公式	描述
线段中点坐标	已知 $p_1(x_1,y_1)$ 与 $p_2(x_2,y_2)$，线段 p_1p_2 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
两点间距离	$p_1(x_1,y_1)$ 与 $p_2(x_2,y_2)$ 两点间距离为 $p_1p_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
两点斜率公式	当 $x_1\neq x_2$ 时，过 $p_1(x_1,y_1)$ 和 $p_2(x_2,y_2)$ 两点的直线的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
	当 $x_1=x_2$ 时，过 $p_1(x_1,y_1)$ 和 $p_2(x_2,y_2)$ 两点的直线的斜率不存在
点到直线距离	点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\frac{\mid Ax_0+By_0+C\mid}{\sqrt{A^2+B^2}}$
平行直线间距离	$Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ 间距离为 $d=\frac{\mid C_1-C_2\mid}{\sqrt{A^2+B^2}}$

两直线位置关系

设两条直线方程为：$a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 $a_2x+b_2y+c_2=0$. 同一平面上两直线位置关系共有平行、相交、重合三种，可总结为下表：

位置关系	交点个数	联立两直线方程组的解	斜率关系	系数关系
相交	1 个	有唯一解，即交点(x_0,y_0).	$k_1\neq k_2$ 垂直时$k_1\times k_2=-1$	$a_1b_2\neq a_2b_1$ 垂直时 $a_1a_2+b_1b_2=0$
平行	无	无解	$k_1=k_2$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
重合	无数个	无数解	$k_1=k_2$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

破题标志词

两条直线垂直⇒斜率关系$k_1\times k_2=-1$；系数关系 $a_1a_2+b_1b_2=0$.

两条直线平行⇒斜率关系$k_1=k_2$；系数关系$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$.

说明：一般而言，若题目给出点斜式或斜截式方程，则用斜率关系求解；若给出一般方程，则用系数关系求解.

3 【模拟题】(条件充分性判断)两直线l_1：$(m-1)x+y+2=0$，l_2：$(m^2+3m-4)x+(2m+5)y+m=0$ 互相平行.(　　)

(1)$m=1$.

(2)$m=-1$.

思考与总结

思考与总结

第五章

二次方程与抛物线

5.1 一元二次方程

【一元二次方程】只含有一个未知量(一元),并且未知量的最高次数是二次的整式方程.一元二次方程标准形式记作 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

【方程的解】使方程左右两边相等的未知数的(一组)值.

破题标志词

给定一个数是方程的一个根⇒给定一个此数满足的等式.

5.2 一元二次方程的根

二次多项式配平方

【二次多项式配平方】将一个二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和的过程,称为二次多项式配平方,简称配方.

$$x^2+bx=x^2+2\cdot\frac{b}{2}\cdot x+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}$$

配方过程:加上一次项系数 b 一半的平方后,再减去一次项系数一半的平方.

熟练后仅需要记忆 $x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$,若有常数项,则照抄即可.

1 【例题】将下列二次多项式配平方

(1)$x^2+6x=$

(2)$x^2+6x-16=$

(3)$x^2-6x=$

(4)$x^2-2x+4=$

(5)$y^2+8y+1=$

(6)$x^2+y^2+4x+2y+1=$

求根公式与根的判别式

【一元二次方程标准形式】$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

注意:一元二次方程要求为形式上完全符合的整式方程,包含绝对值、根号、分式、指数、对数等均不是一元二次方程,不可以直接套用根的判别式及求根公式等分析.

【一元二次方程两根式】$a(x-x_1)(x-x_2)=0\quad(a\neq0,\Delta\geqslant0)$

【求根公式】一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的解为:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

由求根公式可以看出,一元二次方程若有无理根,则一定成对出现,互为有理化因式.

2 【模拟题】已知 a,b 为有理数,并且$\sqrt{5}-2$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的一根,则 $a^b=$(　　).

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. 4　　D. $\frac{1}{2}$　　E. $\frac{1}{4}$

【根的判别式】由求根公式可以看出,b^2-4ac 的正负性决定$\sqrt{b^2-4ac}$在实数范围内是否有意义,因此它反映了一元二次方程是否有实根,故称作根的判别式,记作 $\Delta=b^2-4ac$.

破题标志词

二次方程有实根$\Leftrightarrow\Delta\geqslant0$

二次方程有两个相等的实根$\Leftrightarrow\Delta=0$

二次方程有两个不相等的实根$\Leftrightarrow\Delta>0$

二次方程无实根$\Leftrightarrow\Delta<0$

注意:一元二次方程要么没有实根,要么有两个实根.当 $\Delta=0$ 时方程仍然有两实根,只不过它们取值相等,而非仅有一个实根.

3 【2014.10.24】(条件充分性判断)关于 x 的方程 $mx^2+2x-1=0$ 有两个不相等的实根.(　　)

(1)$m>-1$.

(2)$m\neq0$.

构造二次方程

破题标志词

[3 个未知量]+[2 个方程]

情况	处理方式	结果
均为一次方程	加减、代入消元	用一个量唯一表示其余所有未知量
		求出未知量间唯一比例关系
方程中有二次方程	消元→利用整体思维构造二次方程→求根	用一个量表示其余所有未知量(表示可能不唯一)
		求出未知量间比例关系(可能不唯一)

4 【2013.01.22】(条件充分性判断)设 x,y,z 为非零实数．则 $\frac{2x+3y-4z}{-x+y-2z}=1$.(　　)

(1)$3x-2y=0$.

(2)$2y-z=0$.

5 【2022.23】(条件充分性判断)已知 a,b 为实数．则能确定 $\frac{a}{b}$ 的值.(　　)

(1)$a,b,a+b$ 成等比数列.

(2)$a(a+b)>0$.

韦达定理(根与系数关系)

【韦达定理】即一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 两根 x_1、x_2 与系数 a,b,c 之间的关系：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

【韦达定理的逆定理】设有两实数满足 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$. 那么 α,β 必定是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根.

【韦达定理的逆定理常见应用】利用两数的和、积关系构造化简的一元二次方程. 即将两根之和的相反数作为一次项系数，将两根之积作为常数项，构造一个一元二次方程.

▷直接应用

6 【例题】已知方程 $2x^2-3x-4=0$ 有两个实数根 x_1 和 x_2，则 $x_1+x_2=$________，$x_1\cdot x_2=$________.

▷凑配后应用

$$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{x_1{}^2}+\frac{1}{x_2{}^2}=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1{}^2x_2{}^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$

$$x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\text{（设 }x_1>x_2\text{）}$$

$$x_1{}^3+x_2{}^3=(x_1+x_2)(x_1{}^2-x_1x_2+x_2{}^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$

破题标志词

关于一元二次方程两根的算式⇒凑配为由 x_1+x_2 和 x_1x_2 表达的算式.

给定两个数是二次方程的两根⇒①韦达定理②两根式设出方程.

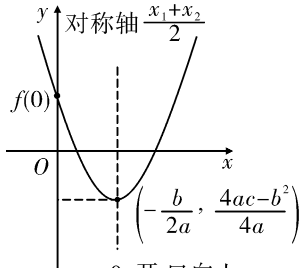
7 【2015.09】已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-ax-1=0$ 的两个实根，则 $x_1^2+x_2^2=$（　　）.

A. a^2+2　　B. a^2+1　　C. a^2-1　　D. a^2-2　　E. $a+2$

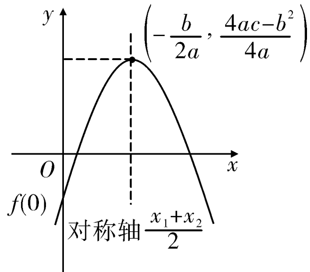
5.3 二次函数

二次函数图像

在坐标平面上，$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$图像为一条抛物线：



$a>0$，开口向上



$a<0$，开口向下

【开口方向】由二次项系数 a 决定. 当 $a>0$ 时抛物线开口向上，当 $a<0$ 时抛物线开口向下.

【开口大小】由二次项系数的绝对值 $|a|$ 决定. $|a|$ 越大开口越小，$|a|$ 越小开口越大.

【对称轴】二次函数图像以 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 为对称轴. 对称轴左右两侧函数单调性相反.

$b=0\Leftrightarrow$ 对称轴为 y 轴；a，b 同号时对称轴在 y 轴左侧，a，b 异号时对称轴在 y 轴右侧.

对于抛物线上两点：纵坐标相等 $\Leftrightarrow$ 两点在同一水平高度 $\Leftrightarrow$ 两点到对称轴距离相等.

【顶点坐标】在对称轴处取得抛物线顶点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

【与 y 轴交点】抛物线在 y 轴截距，也就是 $x=0$ 时函数 y 的值，故 y 轴截距为 $y=f(0)=c$.

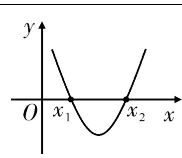
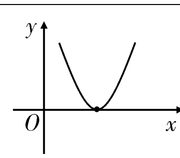
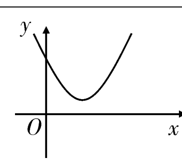
$c=0$ 时抛物线过原点，$c>0$ 时抛物线与 y 轴正半轴相交，$c<0$ 时抛物线与 y 轴负半轴相交.

拓展：事实上，对于所有曲线方程式的一般形式，当它无常数项时，必过原点.

【与 x 轴交点】抛物线与 x 轴交点对应一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

如果抛物线与 x 轴有交点，那么当 $x=x_0$ 时，函数 y 的值为零，也就是说 $x=x_0$ 时，$a{x_0}^2+bx_0+c=0$ 成立，因此交点的横坐标 x_0 就是对应的方程的实根.

一元二次多项式、方程、函数图像关系

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
多项式 ax^2+bx+c	可因式分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$	可因式分解为 $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	不可因式分解
方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$	两相异实根 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	两相同实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像			

说明：表中以 $a>0$ 为例.

8【2024.24】(条件充分性判断)设曲线 $y=x^3-x^2-ax+b$ 与 x 轴有三个不同的交点 A,B,C. 则 $|BC|=4$.(　　)

(1)点 A 的坐标为(1,0).

(2)$a=4$.

9【2020.23】(条件充分性判断)设函数 $f(x)=(ax-1)(x-4)$. 则在 $x=4$ 左侧附近有 $f(x)<0$.(　　)

(1)$a>\frac{1}{4}$.

(2)$a<4$.

10【2024.18】(条件充分性判断)设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$. 则能确定 $a<b$.(　　)

(1)曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称.

(2)曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=2$ 相切.

5.4 根的零分布

此类题目结构一般为:给定一个系数包含未知字母的二次方程根的取值范围,求满足此要求对应的系数的取值范围.

说明:若给定两根在不同区间内,如“一正一负两根”、“(m,n)中只有一个根”、“某数 m 在两根之间”等,则下述结论可保证方程有实根,无需验证根的判别式 Δ.

若给定两根在同一区间内,如“两不相等的正根”、“两不相等的负根”等,则需要首先验证根的判别式 Δ.

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.

破题标志词

一元二次方程有一正一负两个根$\Leftrightarrow a$ 与 c 异号.

抛物线图像	若开口向上($a>0$),则一定有 y 轴截距 $f(0)=c<0$. 反之若开口向下($a<0$),则一定有 y 轴截距 $f(0)=c>0$,即 a 与 c 异号.
韦达定理	一正一负两根之积小于零,即 $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$,a 与 c 异号.

与上同理,抛物线图像与韦达定理角度均可证得以下结论:

破题标志词

一元二次方程有两负根$\Leftrightarrow \Delta \geqslant 0$ 且 a,b,c 同号.

一元二次方程有两正根$\Leftrightarrow \Delta \geqslant 0$,$a$ 与 c 同号,a 与 b 异号.

总结以上三个破题标志词可知,若我们将方程化为二次项系数 $a>0$ 的标准二次方程,则有:

系数特征	方程的根	根的判别式 Δ
$c<0$	一正一负两实根	自动满足
正 x^2＋负 x＋正＝0	两正根	$\Delta \geqslant 0$
正 x^2＋正 x＋正＝0	两负根	

▶11　【2005.10.05】(条件充分性判断)方程 $x^2+ax+b=0$ 有一正一负两个实根.(　　)

(1)$b=-C_4^3$.

(2)$b=-C_7^5$.

5.5 不等式

不等式

【不等式】把两个解析式用大于号(>)、小于号(<)、大于等于号(≥)或小于等于号(≤)连接起来,所得到的式子叫作不等式.

如:$x^2-1\geqslant 0$,$\sqrt{2x+3}<5$,$\log_2 5x>0$,$2^x-1>1$ 等都是不等式.

【不等式的解集】能够使不等式成立所有未知数的值构成的集合叫作不等式的解集.

如:不等式 $2x<8$ 的解可以表示为 $x<4$ 或$(-\infty,4)$.

【不等式的性质】

❈【对逆性】如果 $a>b$,那么 $b<a$.

❈【传递性】如果 $a>b$ 且 $b>c$,那么 $a>c$.

即不等式两边都加上(或者减去)同一个数或者同一个整式,所得的不等式和原不等式同解.

❈一个不等式:左右两边同乘以正数不等号不变,同乘以负数不等号变方向.

注意:未知乘数的正负不能乘.

❈两个不等式之间:可加不可减,相加要同向,加后不可逆.

如果 $a>b$,$c>d$,那么 $a+c>b+d$.