第七章

平面几何

7.1 通用基础概念

线段的垂直平分线(中垂线)

【垂直平分线】经过某一条线段的中点,并且垂直于这条线段的直线(又称“中垂线“)

【垂直平分线的性质】

①垂直平分线垂直且平分其所在线段;

②垂直平分线上任意一点,到线段两端点的距离相等.

由垂直平分线的定义和性质可知:到一条线段两个端点距离相等的点,一定在这条线段的垂直平分线上.或者说,垂直平分线可以看成到线段两个端点距离相等的点的集合.

角与角平分线

【角】由两条有公共端点的射线组成的几何对象.这两条射线叫作角的边,它们的公共端点叫作角的顶点.

【角平分线】从一个角的顶点引出一条射线,把这个角分成两个完全相同的角,这条射线叫作这个角的角平分线.

【角平分线性质】角平分线上的点到这个角两边的距离相等. 反过来,在角内部到一个角的两边距离相等的点在这个角的角平分线上.

▷平行线与夹角

【平行线】在同一平面内,永远不相交的直线.

【夹角】是由两条交叉的直线所形成的角度,用符号“∠”来表示.

【平行线夹角相等定理】当两条平行线与一条直线相交时,它们分别所形成的同侧夹角大小是相等的.

【平行线三大判定定理】同位角相等⇔两直线平行

内错角相等⇔两直线平行

同旁内角互补⇔两直线平行

角度制与弧度制

角度制是用来表示一个角的大小的，单位为“度”. 除了角度制可以测量角的大小，弧度制也可以度量角的大小，单位为“弧度”，记作 rad. 它们之间的转换关系为 $180^\circ=\pi\text{rad}$，或 $1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{rad}$. 常用角的角度与弧度对应关系见下表.

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	360°
弧度	0rad	$\frac{\pi}{6}$rad	$\frac{\pi}{4}$rad	$\frac{\pi}{3}$rad	$\frac{\pi}{2}$rad	$\frac{2\pi}{3}$rad	πrad	2πrad

7.2 三角形

基础知识

【三角形】由同一平面内不在同一直线上的三条线段首尾顺次连接所组成的封闭图形称为三角形，三角形内角和为180°.

【三角形判定】若要以 a、b、c 为边构成三角形，则意味着需要求出三个不等式成立，即任意两项和大于第三项，任意两项差小于第三项. 即：

$$\begin{cases}a+b>c\\a+c>b\\b+c>a\end{cases}\text{或}\begin{cases}|a-b|<c\\|a-c|<b\\|b-c|<a\end{cases}$$

需要注意的是，仅某两条线段长度之和大于第三条线段长度，或某两条线段长度之差小于第三条线段长度，均无法充分推出这三条线段可构成三角形.

由以上不等式组可得，第三边长度范围为：|两边之差|<第三边<两边之和

破题标志词

以 a，b，c 三项为边可构成三角形⇒这三项中任意两项和大于第三项，任意两项差小于第三项.

三角形已知两边求第三边长度范围⇒两边之差（大减小）<第三边<两边之和.

【三角形面积】$S_{\triangle}=\frac{\text{任一底边}\times\text{相对应的高}}{2}$

1 【模拟题】若一个三角形的周长为偶数，且已知两边长分别为 6 和 2017，则满足条件的三角形共有(　　)个.

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6　　E. 7

2 【模拟题】在$\triangle ABC$ 中，已知有两条高线的长分别为 5 和 20，第三条高线的长为整数，则第三条高线长度最大值为(　　).

A. 5　　B. 12　　C. 6　　D. 10　　E. 无法确定

直角三角形

【直角三角形的判定】若三角形的三条边长分别为 a,b,c，满足以下任意一个条件的三角形可判定为直角三角形.

(1)一个内角为 90 度.

(2)三边长度符合勾股定理 $a^2+b^2=c^2$.

(3)三角形面积 $S=\frac{1}{2}ab$.

(4)若三角形底边为圆的直径，顶点在圆周上，则它为直角三角形.

此即直径所对的圆周角为直角

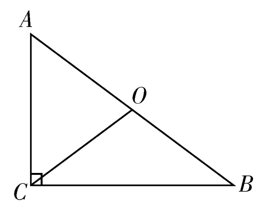
【直角三角形的性质】若一个三边分别为 a,b,c 的三角形为直角三角形，则有：

(1)三边的长度符合勾股定理 $a^2+b^2=c^2$.

常用勾股数有：$a=3,b=4,c=5$；$a=6,b=8,c=10$；$a=5,b=12,c=13$ 等. 特别地，每组常用勾股数的整数倍依然为勾股数.

(2)等面积模型：直角边×直角边＝斜边×斜边上的高.

(3)直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半：$AO=OB=OC$.



破题标志词

一般三角形⇒作垂线构造直角三角形，用勾股定理求解.

直角三角形斜边上的高⇒①等面积模型：直角边×直角边＝斜边×高；

②射影定理

3 【模拟题】直角三角形的直角边为 a,b，斜边为 c，斜边上的高为 x，则(　　).

A. $ab=x^2$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$　　C. $a^2+b^2=2x^2$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{x^2}$　　E. $\frac{b}{a}=\frac{1}{x}$

▶ 4 【2003.01.03】设 P 是正方形 $ABCD$ 外的一点，$PB=10$ 厘米，$\triangle APB$ 的面积是 80 平方厘米，$\triangle CPB$ 的面积是 90 平方厘米，则正方形 $ABCD$ 的面积为(　　).

A. 720 平方厘米　　B. 580 平方厘米　　C. 640 平方厘米

D. 600 平方厘米　　E. 560 平方厘米

等腰三角形

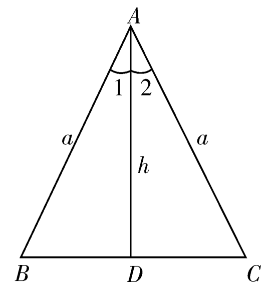
【等腰三角形的判定】满足以下任意一个条件的三角形可判定为等腰三角形：

(1)一个三角形任意两个角相等，那么该三角形为等腰三角形；

(2)一个三角形任意两条边相等，那么该三角形为等腰三角形；

(3)三角形的三线(角平分线/对应底边中线/对应底边的高)有任两条重合，该三角形为等腰三角形.

【等腰三角形的性质】若一个三角形为等腰三角形，那么它具有如下几条重要性质：



(1)等腰三角形两个底角相等(即右图中$\angle ABC=\angle ACB$)；

(2)等腰三角形两个腰相等(即右图中 $AB=AC$)；

(3)等腰三角形顶角的角平分线，同时也是底边的中线，也是底边的高(此即等腰三角形三线合一)，即右图中：$\angle 1=\angle 2\Leftrightarrow AD\perp BC\Leftrightarrow BD=DC$.

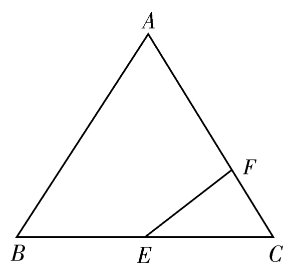
破题标志词

等腰三角形⇒若缺少三线，则补齐三线.

▶ 5 【2013.10.07】如图，$AB=AC=5$，$BC=6$，E 是 BC 的中点，$EF\perp AC$. 则 $EF=$(　　).

A. 1.2　　B. 2　　C. 2.2

D. 2.4　　E. 2.5



重要三角形

【等腰直角三角形】三边长度之比为 $1:1:\sqrt{2}$，若直角边为 a，则面积为$\frac{1}{2}a^2$.

【举例】当三边长度分别为 $a=1,b=1,c=\sqrt{2}$ 时，周长为 $2+\sqrt{2}$，面积为$\frac{1}{2}$；

当三边长度分别为 $a=\sqrt{2},b=\sqrt{2},c=2$ 时，周长为 $2+2\sqrt{2}$，面积为 1.

【30°直角三角形】三边长度之比为 $1:\sqrt{3}:2$，若最短边为 a，则面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

【举例】当三边长度分别为 $a=1,b=\sqrt{3},c=2$ 时，面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$；

当三边长度分别为 $a=\frac{1}{2},b=\frac{\sqrt{3}}{2},c=1$ 时，面积为$\frac{\sqrt{3}}{8}$.

【等边三角形】三条边相等的三角形是等边三角形；任意一个内角为 60°的等腰三角形为等边三角形；有两个内角均为 60°的三角形是等边三角形.

等边三角形的高与边长之比为$\sqrt{3}:2=\frac{\sqrt{3}}{2}:1$，若边长为 a，则高为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

【举例】当等边三角形边长为 1 时，高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$；

当等边三角形边长为 2 时，高为$\sqrt{3}$，面积为$\sqrt{3}$.

6 【2020.16】(条件充分性判断)在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=60^{\circ}$. 则$\frac{c}{a}>2$.(　　)

(1)$\angle C<90^{\circ}$.

(2)$\angle C>90^{\circ}$.

破题标志词

一般三角形⇒作垂线构造直角三角形，用勾股定理求解.

直角三角形

①[直角三角形]+[重要角度($30^{\circ}/45^{\circ}/60^{\circ}$)]⇒重要三角形三边和面积关系(自动满足勾股)

②[直角三角形]+[斜边上的高]⇒a.[等面积模型]；b.[射影定理]

③[直角三角形]+[斜边上的中线]⇒斜边上的中线=斜边的一半

④[直角三角形]+[内接于一圆]⇒斜边为直径，过圆心

7 【模拟题】某三角形底边长为 80，一底角为 60°，另两边长之和为 90，则该三角形最短边的长为(　　).

A. 45　　B. 40　　C. 36　　D. 17　　E. 12

等高模型

破题标志词

两三角形底同线，共顶点⇒等高模型

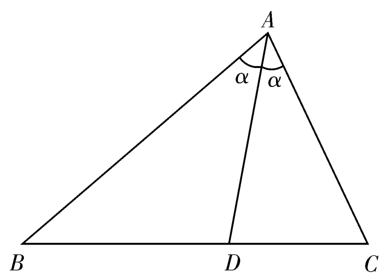
底同线＋顶同线⇒等高模型

符合以上两个破题标志词的三角形高相等，面积比＝底边比，面积和＝$\frac{1}{2}$(底边和)×高

实际上，由于三角形面积由底和相应的高两个要素决定，两个三角形高相等时，面积比＝底边之比；另一方面，当两个三角形底边相等时，面积比＝高之比.

【三角形的角平分线】三角形其中一个内角的平分线与它的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫作三角形的角平分线.

【三角形角平分线定理】三角形一个角的角平分线与其对边所成的两条线段与这个角的两边对应成比例.

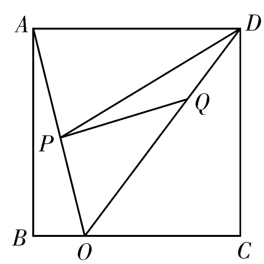


如图所示，$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$，则有：$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$

8　【2019.21】(条件充分性判断)如图，已知正方形$ABCD$面积，O为BC上一点．P为AO的中点，Q为DO上一点．则能确定三角形PQD的面积.(　　)

(1)O为BC的三等分点.

(2)Q为DO的三等分点.



相似三角形

【相似三角形的判定】满足下列条件之一的两个三角形是相似三角形：

(1)有两角对应相等.

(2)三条边对应成比例.

(3)有一角相等，且夹这等角的两边对应成比例.

(4)一条直角边与一条斜边对应成比例的两个直角三角形相似.

(5)顶角相等的两个等腰三角形相似.
(6)三边满足同一个比的三角形相似.

【相似三角形的性质】若两三角形相似,则它们:
(1)对应角相等.
(2)对应一切线段成比例,这个比称为相似比.
(3)面积比=相似比^2.

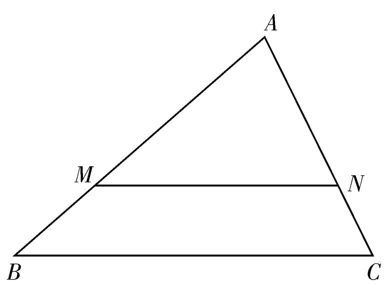
代数判定

9 【2021.25】(条件充分性判断)给定两个直角三角形.则这两个直角三角形相似.(　　)
(1)每个直角三角形边长成等比数列.
(2)每个直角三角形边长成等差数列.

相似模型

破题标志词

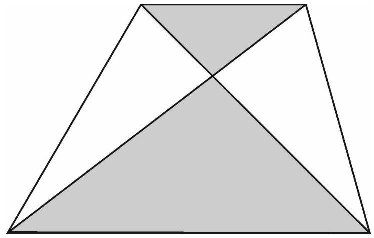
A 字形相似:[三角形]+[边的平行线]



如图所示,$MN // BC$,由于$\triangle ABC$,$\triangle AMN$共用顶角A,且底边平行,则它们三个内角对应相等,这两个三角形相似.图形与大写字母A相像,故称为A字形相似.

破题标志词

8 字形相似:[梯形]+[两对角线]$\Rightarrow$对角线分割出的呈8字形分布两三角形相似.(如图中阴影所示)

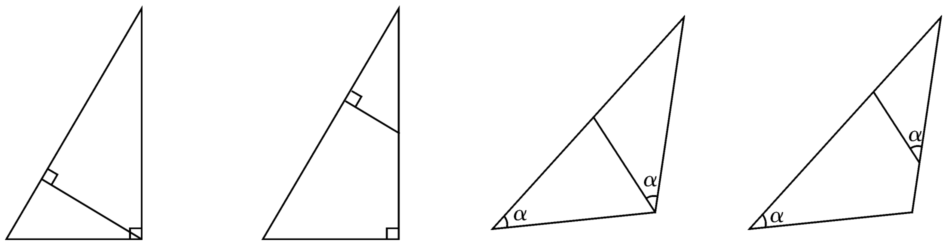


破题标志词

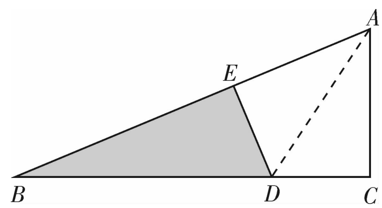
反 A 字形相似

①直角三角形斜边上的垂线⇒垂线分割出的小三角形与原三角形相似.

②[共用一角的嵌套三角形]+[一个等角] ⇒相似



10 【2009.01.12】直角三角形 ABC 的斜边 $AB=13$cm,直角边 $AC=5$cm,把 AC 对折到 AB 上去与斜边相重合,点 C 与点 E 重合,折痕为 AD(如图),则图中阴影部分的面积为(　　)cm^2.

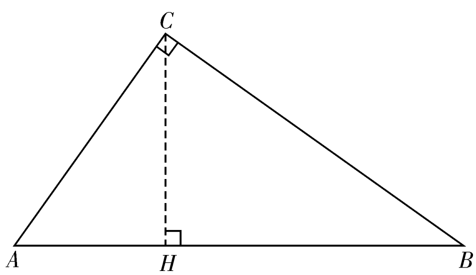


A. 20　　B. $\frac{40}{3}$　　C. $\frac{38}{3}$

D. 14　　E. 12

射影定理

【射影定理】在直角三角形中,斜边上的高是两条直角边在斜边射影的比例中项,每一条直角边又是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项.

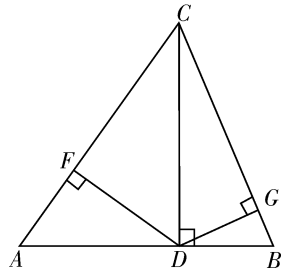


$CH^2=AH\cdot BH$

$AC^2=AH\cdot AB$

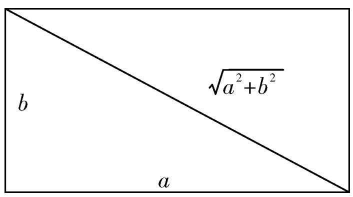
$BC^2=BH\cdot AB$

11　【例题】如图，在$\triangle ABC$中，$CD\perp AB$于D，$DF\perp AC$于F，$DG\perp BC$于G，求证$CF\cdot AC=CG\cdot BC$.



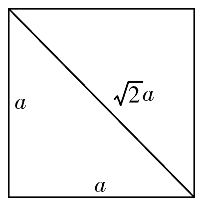
7.3 四边形

矩形



面积 $S=ab$，周长 $C=2(a+b)$

对角线长 $l=\sqrt{a^2+b^2}$



边长：对角线$=1:\sqrt{2}$

面积 $S=a^2$

【矩形】四个角均为直角的特殊的平行四边形为矩形，矩形包括正方形和长方形.

矩形面积等于两邻边的乘积$S=ab$；矩形周长等于两邻边和的两倍，即$C=2(a+b)$；矩形对角线将矩形分为两全等的三角形，符合勾股定理，即对角线$l^2=a^2+b^2$.

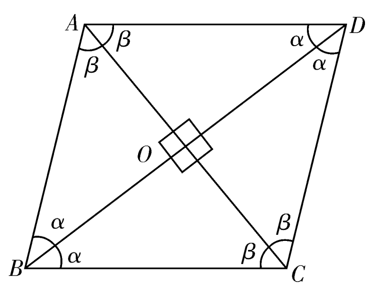
【正方形】正方形是邻边相等的特殊矩形：即$a=b$，将其代入矩形公式得：

正方形的面积$S=a^2$；正方形的周长$C=4a$；正方形的对角线$l=\sqrt{2}a$；

正方形的对角线平分顶角，把正方形分为两个全等的等腰直角三角形.

菱形

四条边长度相等的平行四边形为菱形，设有菱形$ABCD$如图所示，菱形有以下性质：



(1)菱形的四条边长度相等，即$AB=BC=CD=DA$.

(2)菱形的对角线平分顶角，即$\angle ADB=\angle CDB$，$\angle BAC=\angle DAC$等.

(3)菱形对角线互相垂直且平分，即$AC\perp BD$且$AO=CO$，$BO=DO$.

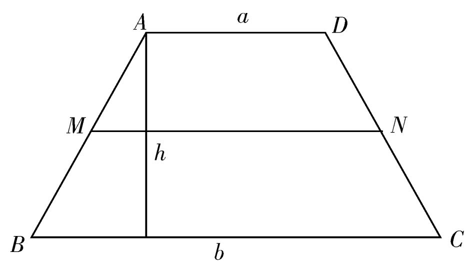
(4)菱形四个内角中，对角相等、邻角互补，即$\angle ADC=\angle ABC$，$\angle BAD=\angle BCD$，

$\angle ADC+\angle BCD=180^0$，$\angle ABC+\angle BAD=180^0$等.

(5)菱形的对角线把菱形分为4个全等的三角形，菱形面积为对角线之积的一半，即：$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=4S_{\triangle AOD}$.

梯形

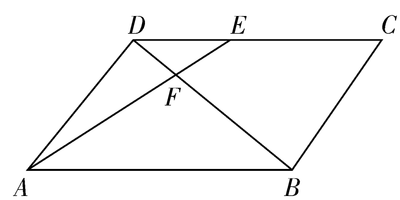
【梯形】只有一组对边平行，另一组对边不平行的四边形叫作梯形. 其中平行的对边分别称为梯形的上底和下底，不平行的对边称为梯形的腰.



【梯形面积】$S_{梯形}=\frac{(上底+下底)\times 高}{2}$

【等腰梯形】两个腰长度相等的梯形称为等腰梯形，等腰梯形两底角相等，它们互为等价关系. 即上图梯形 $ABCD$ 中 $AB=DC\Leftrightarrow\angle ABC=\angle DCB$.

12 【模拟题】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 CD 上一点，连接 AE、BD，且 AE、BD 交于点 F，$\triangle DEF$ 与 $\triangle ABF$ 的面积之比为 $4:25$，则 $\triangle ADF$ 与四边形 $BCEF$ 的面积之比为（　　）.



A. 10∶31　　B. 10∶21　　C. 4∶25

D. 4∶21　　E. 15∶31

中位线

基础知识

【三角形中位线】连结三角形两边中点的线段叫作三角形的中位线.

注意区分：三角形中线是连结一顶点和它的对边中点的线段，而三角形中位线是连结三角形两边中点的线段.

【三角形中位线定理】三角形的中位线平行于第三边并且等于它的一半.

【梯形中位线】连接梯形两腰中点的线段叫作梯形的中位线

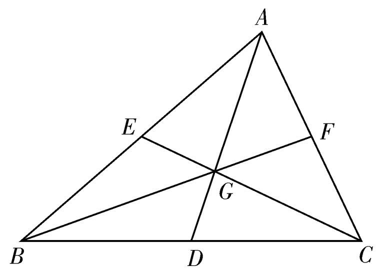
【梯形中位线定理】梯形中位线平行于两底，并且长度等于两底和的一半. 它到两底距离相等，均为梯形高的一半.

▷构造中位线

破题标志词

遇见等分点⇒连接等分点

▶13　【模拟题】如图所示，D、E、F 分别为$\triangle ABC$ 各边中点，试证明 $AG=2GD$，$CG=2GE$，$BG=2GF$.



【三角形的重心】每个三角形都有三条中线，它们都在三角形的内部. 三角形三条中线的交点是三角形的重心. 重心位于各中线的三等分点上，即：一边上的中线长度等于重心到此边中点的距离的三倍.

中点多边形

顺次连接多边形各边中点所得的新多边形叫作原多边形的中点多边形.

破题标志词

任意三角形中点三角形⇒面积为原三角形的$\frac{1}{4}$，周长为原三角形的$\frac{1}{2}$.

任意四边形的中点四边形⇒面积为原四边形的$\frac{1}{2}$.

正六边形的中点六边形⇒面积为原六边形的$\frac{3}{4}$.

▶14　【例题】试求连接正六边形各边中点构成的中点六边形面积与原六边形面积之比.

7.4　圆、扇形与弓形

基础知识

【圆】如图所示，平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆. 这一定点为圆心，距离为圆的半径.