2024零基础抱佛脚

（十一）

数学—阿董

抱佛脚

讲义P97-P109

章节	题目个数	举例个数	总数
11概率	17	1	18
12模块化解题方法	19	16	35

抱佛脚

第十一章 概率

11.3 古典模型

讲义 P97-P99

概率 11.3 古典概型

基本事件 最基本的不能再分解的最简单的随机事件

①任何两个基本事件不能同时发生；

②任何事件（除不可能事件外）都可以表示成基本事件的和.

等可能基本事件 一次试验中，每个基本事件发生的可能性都相等

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

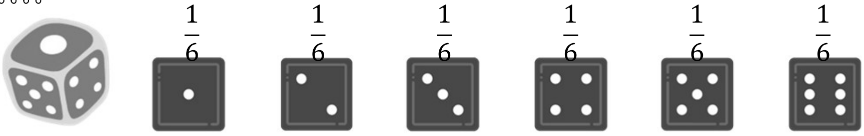
$$P = \frac{满足要求的方法数}{总方法数}$$

$$P = \frac{满足要求的方法数}{总方法数}$$

大师笔记：古典概型基础 讲义 P97

概率 11.3 古典概型

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$



【举例】 掷一次骰子，求：

① 掷出点数小于等于2的概率. $P(\text{点数小于等于2}) = P(1\text{点}) + P(2\text{点}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$

格局不确定　　　　格局确定

② 掷出点数为偶数的概率. $P(\text{点数为偶数}) = P(2\text{点}) + P(4\text{点}) + P(6\text{点}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$

③ 掷出点数小于等于5的概率.

$$P(\text{点数小于等于5}) = P(1\text{点}) + P(2\text{点}) + P(3\text{点}) + P(4\text{点}) + P(5\text{点}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

概率 11.3 古典概型

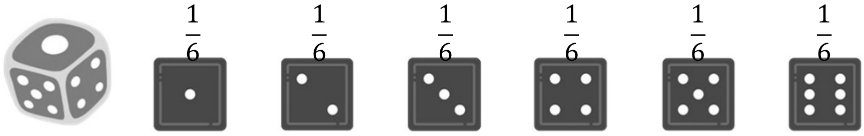
古典概型 如果一个随机试验的结果包含的基本事件数量是有限的，有限性

且每个基本事件发生的可能性均相等，等可能性

则这种条件下的概率模型就叫古典概型.

有限等可能性事件的概率

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$



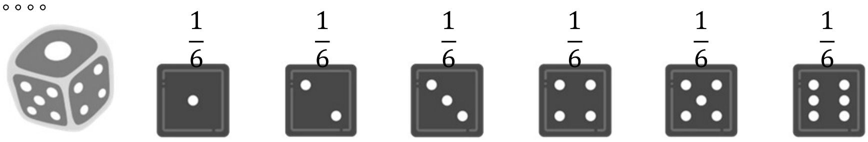
掷骰子这个随机试验，包含6个基本事件，分别为1点-6点

每个基本事件发生的可能性均相等

因此每个点向上的概率均为$\frac{1}{6}$

因此求某些结果的概率，只需要求它包含几个$\frac{1}{6}$即可　$P=\frac{\text{满足要求的基本事件数}}{\text{总基本事件数}}$

概率 11.3 古典概型



$$P=\frac{\text{满足要求的基本事件数}}{\text{总基本事件数}}$$

【举例】 掷一次骰子，求：

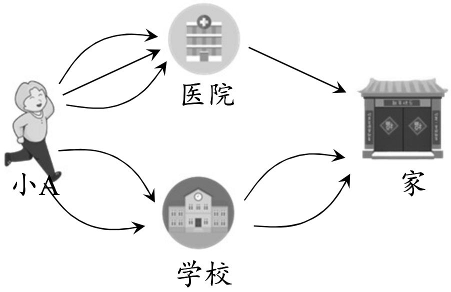
① 掷出点数小于等于2的概率. $P(\text{点数小于等于}2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

② 掷出点数为偶数的概率. $P(\text{点数为偶数})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

③ 掷出点数小于等于5的概率. $P(\text{点数小于等于}5)=\frac{5}{6}$

概率 11.3 古典概型

【举例】 小A回家有如下几条路，他随机选择一条回家，则经过学校的概率为 $\underline{\frac{4}{7}}$.



回家一共有$3\times1+2\times2=7$条路.

其中有$2\times2=4$条路经过学校

$$P=\frac{\text{满足要求的基本事件数}}{\text{总基本事件数}}=\frac{1}{7}\times4=\frac{4}{7}$$

回家这个随机试验，包含可随机选择的7条路，即7个基本事件

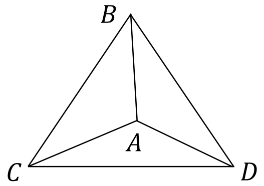
选择每条路的可能性均相等，因此选择每条路的概率均为$\frac{1}{7}$

因此求某些结果的概率，只需要求它包含几个$\frac{1}{7}$即可

概率 11.3 古典概型 • 基础题型

10.【2020.14】 如图，节点A，B，C，D两两相连，从一个节点沿线段到另一个节点，若机器人从节点A出发，随机走了3步，则机器人未到达过节点C的概率为（　　）.

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{11}{27}$　　C. $\frac{10}{27}$　　D. $\frac{19}{27}$　　E. $\frac{8}{27}$



【答案】E

讲义 P98

概率 11.3 古典概型

古典概型 如果一个随机试验的结果包含的基本事件数量是有限的，有限性

且每个基本事件发生的可能性均相等，等可能性

则这种条件下的概率模型就叫古典概型.

有限等可能性事件的概率

【随机选择】、【任意抓取】、【直接选人】等，各个基本事件均为等可能发生，可直接套用古典概型

$$P=\frac{\text{满足要求的基本事件数}}{\text{总基本事件数}}=\frac{\text{满足要求的方法数}}{\text{总方法数}}$$

- 题目[则字]/[逗号]前为整个随机试验，用于计算分母
- 题目[则字]/[逗号]后为需要计算概率的结果要求，用于计算分子

讲义 P97

概率 11.3 古典概型·基础题型

11.【模拟题】x和y为从集合$\{1,2,3,4,5\}$中任意选中的数字，且可以重复，则$xy+y$为奇数的概率为（　）.

A.0.3　　B.0.24　　C.0.76　　D.0.7　　E.0.16

【答案】B

讲义 P98

概率 11.3 古典概型·穷举法

12.【全国新高考I 2022.05】从2至8的七个整数中随机取两个不同的数，则这两个数互质的概率为（　）.

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{2}{3}$

【答案】D

讲义 P98

概率 11.3 古典概型·仅要求结果组合的概率

13.【模拟题】5个不同的球里，有3个白球，2个红球，甲抽取后不放回.求：

（1）甲先取一个球，后再取一个球，取出的球不放回.得到红球和白球各一个的概率为（　）

（2）甲一次性取出两个球，得到红球和白球各一个的概率为（　　）.

【答案】（1）$\frac{3}{5}$（2）$\frac{3}{5}$

概率 结果是否含有次序·总结

- 求[带次序的结果]用乘法公式，比如取球次序为先红再白；
- 求[结果的组合]用排列组合古典概型，比如两红一白的结果组合.

7.【例题】5个不同的球里，有3个白球，2个红球.甲不放回一次抽取一球，依次得到一红一白的概率为$\underline{\frac{3}{10}}$.　　$P=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$　　⟺先取出红球，再取出白球.

13.【模拟题】5个不同的球里，有3个白球，2个红球，甲抽取后不放回.求：

（1）甲先取一个球，后再取一个球，取出的球不放回.得到红球和白球各一个的概率为（$\frac{3}{5}$）

（2）甲一次性取出两个球，得到红球和白球各一个的概率为（$\frac{3}{5}$）.

【总结】 在不放回取球中，对于相同的抽取结果组合，分次抽和一把抓概率相同，可直接用排列组合计算分子分母.

$$P=\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

概率 11.3 古典概型·仅要求结果组合的概率

14.【2021.08拓展】甲、乙两组同学中，甲组有3男3女，乙组有4男2女，从甲、乙两组中各选出2名同学，则这4人中恰有1女的概率为________________.（用组合数表示）

【答案】$\frac{C_3^1C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1C_2^1}{C_6^2C_6^2}$

概率 11.3 古典概型·总结

古典概型 有限个等可能基本事件的概率

$$P=\frac{\text{满足要求的方法数}}{\text{总方法数}}$$

满足要求的方法数 → 排列组合/穷举

总方法数 → 排列组合

第①步：计算总方法数.

第②步：计算满足要求的方法数.

第③步：相除得概率.

- 求[带次序的结果]用乘法公式，比如取球次序为先红再白；
- 求[结果的组合]用排列组合古典概型，比如两红一白的结果组合.

【应用】在不放回取球中，对于相同的抽取结果的组合，分次抽和一把抓概率相同，可直接用排列组合计算分子分母.

抱佛脚

第十一章 概率

11.4 正难则反：对立事件法

讲义 P99-P100

概率

11.4 正难则反：对立事件法

对于同一个事件，发生与不发生，互为对立事件，概率和为1，即$P(A)+P(\bar{A})=1$

【标志词汇】<u>正难则反⇒对立事件法</u>

例如：若可能取值为0，1，2，3　至少一个$\xleftrightarrow{\text{对立事件}}$一个也没有（0个）

至多2个$\xleftrightarrow{\text{对立面}}$3个

说人话是“要么……，要么……”的场景，就是对立事件

大师笔记：对立事件法 讲义 P99

概率 11.4 正难则反：对立事件法 · 直接至多/至少问题

15.【例题】某公司有9名工程师，6男3女，从中任意抽调4人组成攻关小组，则:（用组合数表示）

（1）恰好包含一名女工程师的概率为_________.（2）至少包含一名女工程师的概率为_________.

【答案】（1）$\frac{C_3^1\times C_6^3}{C_9^4}$　（2）$1-\frac{C_6^4}{C_9^4}$

讲义 P99

概率 11.4 正难则反：对立事件法 · 直接至多/至少问题

16.【2021.14】 从装有1个红球，2个白球，3个黑球的袋中随机取出3个球，则这3个球的颜色至多有两种的概率（　　）.

A.0.3　　B.0.4　　C.0.5　　D.0.6　　E.0.7

【标志词汇】<u>至多/至少问题⇒对立事件法</u>　正难则反

【答案】E

讲义 P99

概率 11.4 正难则反：对立事件法·直接至多/至少问题

17.【2011.01.08】将2个红球与1个白球随机地放入甲、乙、丙三个盒子中，则乙盒中至少有1个红球的概率为（　　）.

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{8}{27}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{5}{9}$　　E. $\frac{17}{27}$

【标志词汇】至多/至少问题⇒对立事件法　正难则反

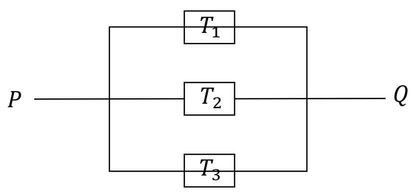
【答案】D

讲义 P99

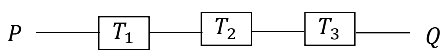
概率 11.4 正难则反：对立事件法·现实场景中至多/至少问题

【常见至少问题现实场景】

1. 多次射击后击中⇔至少有一次击中
2. 多个警报器有效报警⇔至少有一个警报器有效报警
3. 多次抽奖后中奖⇔至少有一次中奖
4. 并联电路电流通过⇔至少有一路电流通过



【拓展】串联电路电流通过⇔每一个元器件均通过，乘法公式.



讲义 P99

概率 11.4 正难则反：对立事件法·现实场景中至多/至少问题

18.【2013.01.20】（条件充分性判断）档案馆在一个库房中安装了n个烟火感应报警器，每个报警器遇到烟火发出警报的概率均为p.该库房遇烟火发出警报的概率达到0.999.（　　）

（1）$n=3$，$p=0.9$　　（2）$n=2$，$p=0.97$

【标志词汇】至少问题⇒对立事件法　正难则反

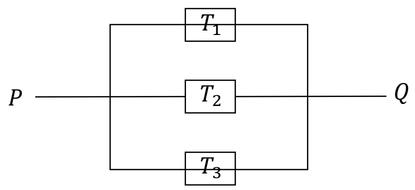
【答案】D

讲义 P100

概率 11.4 正难则反：对立事件法·现实场景中至多/至少问题

19.【2021.06】如图，由P到Q电路中有三个元件，分别为T_1,T_2,T_3，电流能通过T_1,T_2,T_3概率分别为0.9，0.9，0.99.假设电流能否通过三个元件相互独立，则电流能在P、Q之间通过的概率是（　　）.

A.0.8019　　B.0.9989　　C.0.999　　D.0.9999　　E.0.99999



【标志词汇】至少问题⇒对立事件法　正难则反

【答案】D

讲义 P100

概率 11.4 正难则反：对立事件法 · [非]的问题

20.【模拟题】有三人在一座7层大楼的底层进入电梯，假设每一个人自第二层开始在每一层离开电梯是等可能的，则这三人不全在同一层离开的概率为（　　）.

A. $\frac{1}{36}$　　B. $\frac{48}{49}$　　C. $\frac{1}{49}$　　D. $\frac{35}{36}$　　E. $\frac{5}{6}$

【标志词汇】[非]的问题⇒对立事件法. 正难则反

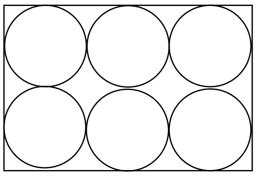
【答案】D

讲义 P100

概率 11.4 正难则反：对立事件法

21.【2022.05】如图，已知相邻的圆都相切，从这6个圆中随机取2个，这2个圆不相切的概率为（　　）.

A. $\frac{8}{15}$　　B. $\frac{7}{15}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$　　E. $\frac{2}{3}$



【标志词汇】正难则反⇒总体剔除/对立事件

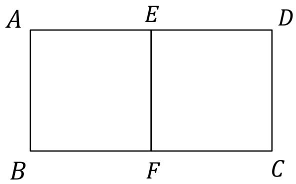
【答案】A

讲义 P100

概率 11.4 正难则反：对立事件法

22.【2023.14】如图，在矩形$ABCD$中，$AD=2AB$，E，F分别是AD,BC的中点，从A、B、C、D、E、F中任意取3个点，则这三个点为顶点可组成直角三角形的概率为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{11}{20}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{13}{20}$　　E. $\frac{7}{10}$



【答案】E

抱佛脚

第十一章 概率

11.5 排列组合与概率中的逆推

概率 11.5 排列组合与概率中的逆推

23.【2013.10.14】福彩中心发行彩票的目的是为了筹措资金资助福利事业.现在福彩中心准备发行一种面值为5元的福利彩票刮刮卡，方案设计如下：（1）该福利彩票的中奖率为50%；（2）每张中奖彩票的中奖奖金有5元和50元两种.假设购买一张彩票获得50元奖金的概率为p，且福彩中心筹得资金不少于发行彩票面值总和的32%，则（　　）.

A. $p \leq 0.005$　　B. $p \leq 0.01$　　C. $p \leq 0.015$　　D. $p \leq 0.02$　　E. $p \leq 0.025$

设彩票发行量为x张

【答案】 D

讲义 P101

概率 11.5 排列组合与概率中的逆推

24.【模拟题】袋中有10个球，分别为红球、黄球和蓝球，现从中任取两球，至少有一球为黄球或蓝球的概率为$\frac{13}{15}$，则袋中红球个数为（　　）.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5　　E.6

【标志词汇】<u>至少问题⇒对立事件法.</u> 正难则反

【答案】 C

讲义 P101

概率 11.5 排列组合与概率中的逆推

25.【2020.19】某商户有20部手机，从中任选2部，则恰有1部甲的概率为$p > \frac{1}{2}$.（　）

（1）甲手机不少于8部.　　　　（2）乙手机大于7部.

【“恰”问题】代表对**全局**的描述，有且仅有一部甲⇔[一部甲手机]and[一部其余手机]

【答案】C

讲义 P101

概率 11.5 排列组合与概率中的逆推

26.【模拟题】已知10个产品中有2个次品，现从其中抽出若干个产品，要使这2个次品全部被抽出的概率不小于0.6，则至少应抽出产品（　）个.

A.6　　B.7　　C.8　　D.9　　E.10

【答案】C

讲义 P101

概率

概率	11.3古典概型	近5年考5题 【2023.25】穷举法 【2022.13】古典概型 【2021.11】仅要求结果组合的概率 【2020.04】仅要求结果组合的概率 【2020.14】基础题型
	11.4正难则反：对立事件法	近5年考6题 【2023.14】几何场景中的概率 【2022.05】几何场景中的概率 【2021.06】现实场景中的至少问题—串并联电路 【2021.14】直接至多/至少问题 【2019.07】直接至多/至少问题 【2019.17】直接至多/至少问题
	11.5排列组合与概率中的逆推	近5年考1题【2020.19】

模块化解题方法

2024MBA大师零基础抱佛脚

模块化解题方法

- 近几年每年2题左右（2023年2题）
- 凑配完全平方求最值
- 二次函数求最值
- 均值定理求最值 ★
- 绝对值相关计算（非负性、零点分段法）

模块化解题方法

模块化解题方法	12.1四大代数式求最值方法	近5年考4题 【2023.13】均值定理求最值—二次分式型函数最值 【2022.03】凑配完全平方求最值 【2020.24】均值定理求最值 【2019.02】均值定理求最值-凑配定值
	12.2绝对值相关问题	近5年考5题 【2023.09】带绝对值的方程 【2022.17】两绝对值之差 【2021.13】带绝对值的方程 【2021.19】根据定义去绝对值 【2020.02】绝对值的几何意义

抱佛脚

第十二章 模块化解题方法

12.1 四大代数式求最值方法

讲义 P103-P107

模块化解题方法

【标志词汇】代数式求最值

①符合乘法公式的⟹凑配完全平方求最值.

②可变形为二次函数的⟹利用二次函数求最值.

③限制为正的⟹均值定理求最值.

④有可行域范围限制的⟹线性规划求最值.

【标志词汇】利用完全平方公式求代数式最值

①变形为[常数+(　)^2]求最小值

②变形为[常数−(　)^2]求最大值

大师笔记：线性规划（选修） 讲义 P103

模块化解题方法 12.1 凑配完全平方求最值

凑配完全平方求最值的核心：多项式配平方

二次多项式配平方 将一个二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和.

$$x^2+bx+c=\boxed{x^2+2\cdot\frac{b}{2}\cdot x+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$$

加上一次项系数一半的平方后，再减去一次项系数一半的平方

【举例】把二次多项式$x^2+6x-16$配平方

$$x^2+6x-16=x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2-16$$

加上x系数一半的平方后，再减去x系数一半的平方

$$=(x+3)^2-3^2-16=(x+3)^2-25$$

讲义 P103

模块化解题方法 12.1 凑配完全平方求最值

1.【2022.03】设x,y为实数，则$f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-2y+2$，则最小值为（　　）.

A.1　　B.$\frac{1}{2}$　　C.2　　D.$\frac{3}{2}$　　E.3

【标志词汇】利用完全平方公式求代数最值⇒①变形为[常数+(　)^2]求最小值

②变形为[常数−(　)^2]求最大值

【答案】 A

讲义 P103

模块化解题方法

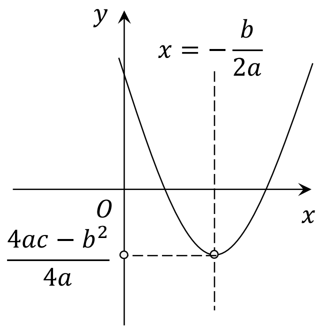
【标志词汇】代数式求最值

①符合乘法公式的⟹凑配完全平方求最值.

②可变形为二次函数的⟹利用二次函数求最值.

③限制为正的⟹均值定理求最值.

④有可行域范围限制的⟹线性规划求最值.



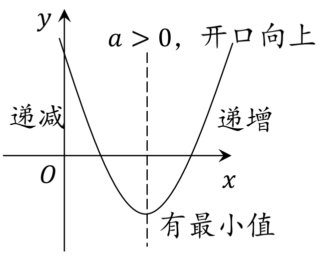
【标志词汇】利用完全平方公式求代数式最值

①变形为[常数+(　)^2]求最小值

②变形为[常数−(　)^2]求最大值

讲义 P103

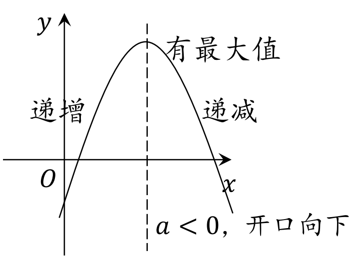
模块化解题方法 12.1 二次函数求最值



二次函数图像抛物线为轴对称图形，对称轴为$x=-\frac{b}{2a}$

单调性：对称轴左右两侧单调性相反

$a>0$时对称轴左侧递减，右侧递增



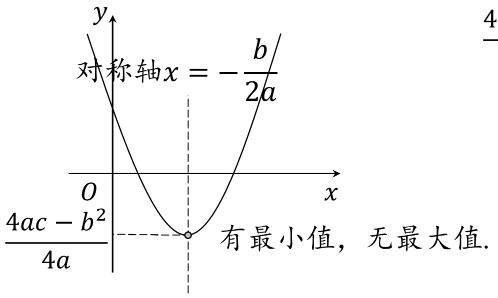
$a<0$时对称轴左侧递增，右侧递减

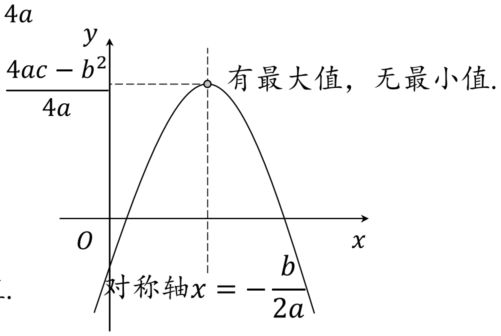
顶点（最值）：在顶点处取得最值

讲义 P104

模块化解题方法 12.1 二次函数求最值

当$x=-\frac{b}{2a}$时，二次函数可取到最值$\frac{4ac-b^2}{4a}$





①将$x=-\frac{b}{2a}$代入函数$y=ax^2+bx+c$中求最值

②结合开口方向（a的正负性）判断是最大值还是最小值

讲义 P104

模块化解题方法 12.1 二次函数求最值

2.【2012.10.02】设实数x，y满足$x+2y=3$，则x^2+y^2+2y的最小值为（　　）.

A.4　　B.5　　C.6　　D.$\sqrt{5}-1$　　E.$\sqrt{5}+1$

【答案】 A

讲义 P104

模块化解题方法

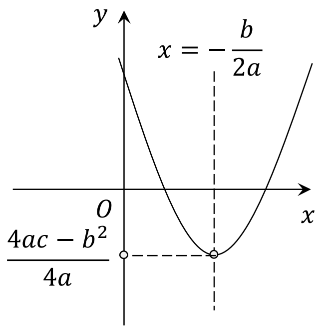
【标志词汇】代数式求最值

①符合乘法公式的⟹凑配完全平方求最值.

②可变形为二次函数的⟹利用二次函数求最值.

③限制为正的⟹均值定理求最值.

④有可行域范围限制的⟹线性规划求最值.



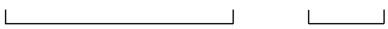
【标志词汇】利用完全平方公式求代数式最值

①变形为[常数$+(\quad)^2$]求最小值

②变形为[常数$-(\quad)^2$]求最大值

讲义 P103

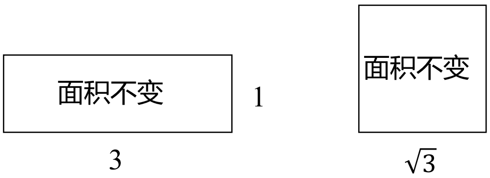
模块化解题方法 12.1 均值定理求最值



3　　1

$$\frac{3+1}{2}=2$$

3和1的算术平均值



3　　$\sqrt{3}$

$$\sqrt{3\times1}=\sqrt{3}$$

3和1的几何平均值

大师笔记：均值定理求最值基础　讲义 P104

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值

算术平均值 设x_1，x_2，……，x_n为n个实数，这n个数的算术平均值为：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$ 累加后除以个数

几何平均值 设x_1，x_2，……，x_n为n个**正**实数，这n个**正**实数的几何平均值为：

$$x_g=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$$ 累乘后开个数次方

【举例】求3，8，9这三个数的算术平均值和几何平均值.

算术平均值 $=\frac{3+8+9}{3}=\frac{20}{3}$　　几何平均值 $=\sqrt[3]{3\times 8\times 9}=\sqrt[3]{3^3\times 2^3}=2\times 3=6.$

讲义 P104

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值

算术平均值$\frac{a+b}{2}$ ≥ 几何平均值$\sqrt{ab}$

作差法比较大小 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$$=\frac{(\sqrt{a})^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0$$

讲义 P104

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值

均值定理 对于任意n个正实数x_1，x_2，……，x_n，则有：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立.（$x_i>0$，$i=1,\ldots,n$）

n个正实数的算术平均值大于等于它们的几何平均值

两种形式：

$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 求和的最小值

$x_1x_2\cdots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$ 求乘积的最大值

讲义 P104

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值 重要的均值不等式应用形态

$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ $x_1x_2\cdots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$

	和的最小值	乘积的最大值	取等条件
两项时	$a+b\geq 2\sqrt{ab}$	$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	$a=b$
三项时	$a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$	$abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$	$a=b=c$

注：以上$a,b,c>0$，可代表任何正的代数式.

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理·积定和最小

$a+b\ge 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

① a，b可以代表任何正代数式.
② 使用范围：a，$b>0$
③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.

关系式	成立条件
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$	恒成立
$a+b>2\sqrt{ab}$	$a\ne b$
$a+b=2\sqrt{ab}$	$a=b$

$a+a=2a\ge 2\sqrt{a\cdot a}=2a\ (a>0)$

一个正数与它的倒数之和大于等于2

$a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$ 不一定成立

不等式成立前提：$a>0$

关系式	成立条件
$a+\frac{1}{a}\ge 2$	恒成立
$a+\frac{1}{a}>2$	$a\ne\frac{1}{a}$，$a\ne 1$
$a+\frac{1}{a}=2$	$a=\frac{1}{a}$，$a=1$

大师笔记：积定和最小　讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理·积定和最小

$a+b\ge 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

① a，b可以代表任何正代数式.
② 使用范围：a，$b>0$
③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.

关系式	成立条件
$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}\ge 4$	恒成立
$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}>4$	$x\ne\pm1$
$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}=4$	$x=\pm1$

$$x^2+1+\frac{4}{x^2+1}\ge 2\sqrt{\cancel{(x^2+1)}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2+1}}}=4$$

$x^2+1>0$　　$\frac{4}{x^2+1}>0$

$$x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$$

$$(x^2+1)^2=4$$

$$x^2+1=2$$

$$x=\pm1$$

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理·积定和最小

$a+b \ge 2\sqrt{ab}\ (a,b>0)$

① a，b可以代表任何正代数式.
② 使用范围：a，$b>0$
③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.

关系式	成立条件
$x^2+1+\frac{4}{x^2+1} \ge 4$	恒成立
$x^2+1+\frac{4}{x^2+1} > 4$	$x \ne \pm 1$
$x^2+1+\frac{4}{x^2+1} = 4$	$x = \pm 1$

$x^2+1+\frac{4}{x^2+1} \ge 4$，即它的最小值为4，当$x=\pm1$时取得最小值.

积定和最小 两个正代数式乘积为定值，则它们的和有最小值

当两式相等时可取得此最小值.

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理·积定和最小

积定和最小 $x_1+x_2+\cdots+x_n \ge n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

一正 所有参与运算的项均为正. 能用套用均值不等式

①题目规定为正②天然为正

如：非零完全平方，几何中长度、面积、体积，概率

二定 参与运算的项乘积为一确定的值 能求最值

①天然为定值 已知x为正，求$x+\frac{1}{x}$最小值

②题目规定为定值 已知a,b为正，ab为定值，求$a+b$最小值

三相等 当且仅当所有参与运算的项均相等时，它们的和可取到最小值.

能取到最值

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理·积定和最小

$a+b+c \geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$ （a,b,c可以代表任何正代数式）

① 一正：a,b,c均为正.

② 二定：abc为定值

③ 三相等：当且仅当$a=b=c$时，$a+b+c$可取到最小值.

【举例】已知$a>0$，求$a+\frac{1}{a}+2$的最小值

$a+\frac{1}{a}+2 \geq 3\cdot\sqrt[3]{a\cdot\frac{1}{a}\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}$　　$a=\frac{1}{a}=2$，$a=1$且$a=2$，“$=$”取不到

$a+\frac{1}{a}+2>3\sqrt[3]{2}$　　$a+\frac{1}{a}+2\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}+2=4$

做题中常数不参与均值不等式运算，否则无法取到最小值

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理·积定和最小

3.【2020.24】（条件充分性判断）设a，b是正实数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值.（　）

（1）已知ab的值.　　（2）已知a，b是方程$x^2-(a+b)x+2=0$的不同实根.

【标志词汇】限制为正+求最值 ⇒ 均值定理

【答案】A

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理·和定积最大

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (a,b>0)$

① a，b可以代表任何正代数式.

② 使用范围：a，$b>0$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.

关系式	成立条件
$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	恒成立
$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	$a \ne b$
$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	$a = b$

注：$a,b>0$

和定积最大 两个正代数式之和为定值，则它们的乘积有最大值

当两代数式相等时可取得此最大值.

模块化解题方法 12.1 均值定理·和定积最大

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (a,b>0)$

① a，b可以代表任何正代数式. $x(1-x) \le \left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$

② 使用范围：a，$b>0$ $x>0 \quad 1-x>0 \quad 0<x<1$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立. 当且仅当$x=1-x$，$x=\frac{1}{2}$时“$=$”成立，取得最大值.

和定积最大 两个正代数式之和为定值，则它们的乘积有最大值

当两代数式相等时可取得此最大值.

模块化解题方法 12.1 均值定理·和定积最大

和定积最大 $x_1x_2\cdots x_n \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$

一正　所有参与运算的项均为正. 能用套用均值不等式

①题目规定为正②天然为正(非零完全平方、几何、概率)

二定　参与运算的项之和为一确定的值　能求最值

①天然为定值　已知$0<x<1$，求$x(1-x)$最大值

②题目规定为定值　已知a,b为正，$a+b$为定值，求ab最大值

三相等　当且仅当所有参与运算的项均相等时，它们的积可取到最大值.

能取到最值

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⇒ 均值定理

	和的最小值	乘积的最大值	取等条件
两项时	$a+b\ge 2\sqrt{ab}$	$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	$a=b$
三项时	$a+b+c\ge 3\cdot\sqrt[3]{abc}$	$abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$	$a=b=c$

注：以上$a,b,c>0$，可代表任何正的代数式.

一正二定三相等　①题目规定为正②天然为正(非零完全平方、几何、概率)

①天然为定值②题目规定为定值

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·凑配定值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⇒ 均值定理 **求和最小，凑积定**

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，若正数ab乘积为常数，则直接使用均值定理求和的最小值

- 互为倒数，乘积天然为常数
- 题目给定乘积为常数

【举例】求$x+\frac{1}{x}$的最小值（$x>0$）

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

当且仅当$x=\frac{1}{x}$，即$x^2=1$，$x=1$或$x=-1$（舍）时取到"＝"（最小值）

大师笔记：均值定理·凑配定值　讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·凑配定值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⇒ 均值定理 **求和最小，凑积定**

若它们的乘积不是常数，则凑配使参与运算的项乘积为常数.

形式不同时，将整式部分与分式部分分母凑成相同形式.

【举例】求$x+\frac{1}{x-2}$的最小值（$x>2$）

$$\boldsymbol{x}+\frac{1}{x-2}=\boxed{\boldsymbol{x-2}+\frac{1}{x-2}}+\boldsymbol{2}\geq 2\cdot\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4$$

当且仅当$x-2=\frac{1}{x-2}$，即$x-2=\pm 1$，$x=3$或$x=1$（舍）时取到"＝"（最小值）

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·凑配定值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⟹ 均值定理 **求和最小，凑积定**

次数不同时，将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数.

注意拆分后注意参与运算的项数发生变化

【举例】求$x+\frac{1}{x^2}$的最小值（$x>0$）　$x+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x^2}}=2\sqrt{\frac{1}{x}}$ **不是定值**（常数）

$$\boldsymbol{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}+\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}+\frac{1}{x^2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

平均拆分 使乘积为定值 拆分后注意参与运算的项数发生变化

当且仅当$\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=\frac{1}{x^2}$，$x^3=2$，$x=\sqrt[3]{2}$时可取到“＝”（最小值）

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·凑配定值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⟹ 均值定理 **求和最小，凑积定**

次数不同时，将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数.

注意拆分后注意参与运算的项数发生变化

【举例】求$x+\frac{1}{x^3}$的最小值（$x>0$）　$x+\frac{1}{x^3}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{x}$ **不是定值**

$$\boldsymbol{x}+\frac{1}{x^3}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}+\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}+\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}+\frac{1}{x^3}\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x^3}}=\frac{4}{\sqrt[4]{27}}$$

平均拆分 使乘积为定值 拆分后注意参与运算的项数发生变化

当且仅当$\frac{x}{3}=\frac{x}{3}=\frac{x}{3}=\frac{1}{x^3}$，即$x=\sqrt[4]{3}$时取到“＝”（最小值）

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值 · 凑配定值

形式不同时，如$x+\dfrac{1}{x-2}$

将整式部分与分式部分分母凑成相同形式

注意只对凑配后的带未知量部分使用均值定理求最值.

次数不同时，如$x+\dfrac{1}{x^2}$

将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数

注意拆分后参与运算的项数发生变化

形式与次数均不同时，如$x+\dfrac{1}{(x-2)^3}$ 先凑形式，再凑次数

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值 · 凑配定值

【举例】求$x+\dfrac{1}{(x-2)^3}$的最小值（$x>2$）

形式与次数均不同：先凑形式，再凑次数

$$x+\frac{1}{(x-2)^3}=x-2+\frac{1}{(x-2)^3}+2 \quad =\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{3}+\frac{1}{(x-2)^3}+2$$

$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)^3}}+2=\frac{4}{\sqrt[4]{27}}+2$$

当且仅当$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{1}{(x-2)^3}$，$(x-2)^4=3$，$x=\sqrt[4]{3}+2$时可取到“ = ”（最小值）

讲义 P105

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·凑配定值

$x_1x_2\cdots x_n \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$ 求乘积的最大值

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$　　　　$x(1-x) \le \left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

a b

① a，b可以代表任何正代数式.

② 使用范围：a，$b>0$　　$x>0$　$1-x>0$　$0<x<1$

③ 当且仅当$a=b$时，等号成立.

两个正代数式之<u>和为定值</u>，则它们的<u>乘积有最大值</u>　和定积最大

当两代数式相等时可取得此最大值.

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·凑配定值

【标志词汇】<u>[限制为正]+[求最值] ⇒ 均值定理</u>　**求积最大，凑和定**

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$　　$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$　（a,b,c可以代表任何正代数式）

【举例】求$x(1-x)$的最大值（$0<x<1$）

若它们的和为常数，则直接使用均值定理求乘积的最大值

$x(1-x) \le \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

当且仅当参与运算的所有项相等，即$x=1-x$，$x=\frac{1}{2}$时取到最大值

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·凑配定值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] $\Rightarrow$ 均值定理　**求积最大，凑和定**

先平均拆至同次数，再按需乘系数

注意：只对凑配后的带未知量部分使用均值定理求最值.

【举例】求$x^2(1-x)$的最大值（$0<x<1$）

$x^2(1-x)\le\left(\frac{x^2+1-x}{2}\right)^2$ 若它们的和不是常数，则**凑配**使参与运算的项之和为常数.

$$x^2(1-x)=x\cdot x\cdot(1-x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot(2-2x)\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{2^2}{3^3}$$

再按需乘系数

先平均拆至同次数

当且仅当参与运算的所有项相等，即$x=x=2-2x$，即$x=\frac{2}{3}$时可取得此最大值.

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·凑配定值·总结

形式不同时，如$x+\frac{1}{x-2}$

将整式部分与分式部分分母凑成相同形式，只对凑配后带未知量部分使用均值定理.

次数不同时，如$x+\frac{1}{x^2}$

将较低次项平均拆分，拆得项数等于较高次数，注意拆分后参与运算的项数发生变化.

形式与次数均不同时，如$x+\frac{1}{(x-2)^3}$

先凑形式，再凑次数

和不是常数时，如$x^2(1-x)$

先平均拆至同次数，再按需乘系数，只对凑配后带未知量部分使用均值定理.

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值 · $t+\frac{C}{t}$ 型最值

【天然满足乘积为定值的均值定理求最值模型】 已知代数式t取值为正，求$t+\frac{C}{t}$的最值.

说明：①以上C为正常数，t可代表任何正的代数式.

②当常数$C=1$时有$t+\frac{1}{t}\geq 2$，此即互为倒数的两正项之和大于等于2（$t=1$时取等号）

③扩展形式：$\frac{ay}{bx}+\frac{cx}{dy}$（其中系数$a,b,c,d$和变量$x,y$均为正）

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值 · $t+\frac{C}{t}$ 型最值

4.【2019.02】设函数$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}$（$a>0$）在$(0,+\infty)$内的最小值为$f(x_0)=12$，则$x_0=$（　）.

A.5　　B.4　　C.3　　D.2　　E.1

【标志词汇】[限制为正]+[求最值]⇒均值定理

【答案】 B

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·二次分式型函数最值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⟹ 均值定理

➢ $\frac{\text{二次}}{\text{一次}}$ 以分母为最小单元，将分子向其凑配，除后转化为$t+\frac{a}{t}$型

【举例】求$\frac{x^2+4}{x}$的最小值.（$x>0$）

$\frac{x^2+4}{x}$分子分母同除以x得：$x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}=2\sqrt{4}=4$

当且仅当$x=\frac{4}{x}$，$x^2=4$，$x=2$时可取到“=”（最小值）

讲义 P106

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·二次分式型函数最值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⟹ 均值定理

➢ $\frac{\text{二次}}{\text{一次}}$ 以分母为最小单元，将分子向其凑配，除后转化为$t+\frac{a}{t}$型

【举例】求$\frac{x^2+2x+4}{x}$的最小值.（$x>0$）

$\frac{x^2+2x+4}{x}$分子分母同除以x得：$x+\frac{4}{x}+2\geq 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}+2=2\sqrt{4}+2=6$

当且仅当$x=\frac{4}{x}$，$x^2=4$，$x=2$时可取到“=”（最小值）

讲义 P106

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·二次分式型函数最值

5.【模拟题】函数$y=\dfrac{x^2+7x+10}{x+1}$在$(-1,+\infty)$内的最小值为__________.

【答案】 9

讲义 P106

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·二次分式型函数最值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⟹ 均值定理

➢ $\dfrac{\text{一次}}{\text{二次}}$ 以分子为最小单元，将分母向分子凑配，之后同除分子，分子变为1，分母变为$t+\dfrac{a}{t}$型

分母的最小值对应分式的最大值

【举例】求$\dfrac{x}{x^2+4}$的最大值.（$x>0$）

$\dfrac{x}{x^2+4}$分子分母同除以x得：$\dfrac{1}{x+\dfrac{4}{x}}\le\dfrac{1}{4}$　分母的最小值对应分式的最大值

$x+\dfrac{4}{x}\ge 2\sqrt{x\times\dfrac{4}{x}}=2\sqrt{4}=4$　当且仅当$x=\dfrac{4}{x}$，$x^2=4$，$x=2$时可取到“＝”（最小值）

讲义 P106

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·二次分式型函数最值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⇒ 均值定理

➢ $\frac{一次}{二次}$ 以分子为最小单元，将分母向分子凑配，之后同除分子，分子变为1，分母变为$t+\frac{a}{t}$型

分母的最小值对应分式的最大值

【举例】求$\frac{x}{x^2+2x+4}$的最大值.（$x>0$）

$\frac{x}{x^2+2x+4}$分子分母同除以x得：$\frac{1}{x+\frac{4}{x}+2}\le\frac{1}{6}$ 分母的最小值对应分式的最大值

$x+\frac{4}{x}+2\ge 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}+2=2\sqrt{4}+2=6$ 当且仅当$x=\frac{4}{x}$，$x^2=4$，$x=2$时可取到"＝"

讲义 P106

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·二次分式型函数最值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⇒ 均值定理

➢ $\frac{一次}{二次}$ 以分子为最小单元，将分母向分子凑配，之后同除分子，分子变为1，分母变为$t+\frac{a}{t}$型

分母的最小值对应分式的最大值

【举例】求$\frac{x+1}{x^2+2x+5}$的最大值.（$x>-1$）

$$\frac{x+1}{x^2+2x+5}=\frac{x+1}{x^2+2x+1+4}=\frac{x+1}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{x+1+\frac{4}{x+1}}\le\frac{1}{4}$$

分子分母同除以$(x+1)$

$$x+1+\frac{4}{x+1}\ge 2\sqrt{(x+1)\times\frac{4}{(x+1)}}=4$$

当且仅当$x+1=\frac{4}{x+1}$，$(x+1)^2=4$，$x=1$时可取到"＝"

讲义 P106

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·二次分式型函数最值

6.【2023.13】设x为正实数，则$\frac{x}{8x^3+5x+2}$的最大值为（　　）.

A. $\frac{1}{15}$　　B. $\frac{1}{11}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{6}$　　E. $\frac{1}{5}$

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⟹ 均值定理

【答案】B

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·二次分式型函数最值

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⟹ 均值定理

- $\frac{\text{二次}}{\text{二次}}$ 以分母为最小单元，将分子向其凑配，除后转化为$t+\frac{a}{t}$型

例：$\frac{x^2+2x+4}{x}=x+\frac{4}{x}+2\geq 2\sqrt{4}+2=6$（$x>0$）

- $\frac{\text{一次}}{\text{二次}}$ 以分子为最小单元，将分母向分子凑配，之后同除分子，分子变为1，分母变为$t+\frac{a}{t}$型

例：$\frac{x}{x^2+2x+4}=\frac{1}{x+\frac{4}{x}+2}\leq\frac{1}{2\sqrt{4}+2}=\frac{1}{6}$（$x>0$）

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·利用常值代换求最值

- **套路一：** 已知$ax+by=C$，求$\frac{m}{x}+\frac{n}{y}$的最小值.

8.【例题】已知$x,y>0$，且$x+2y=1$，则$\frac{1}{x}+\frac{8}{y}$的最小值为______. $\frac{1}{x}+\frac{8}{y}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{8}{y}}=2\cdot\sqrt{\frac{8}{xy}}$

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⟹ 均值定理

【答案】 25

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·利用常值代换求最值

- **套路二：** 已知$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=C$，求$mx+ny$的最小值.

7.【例题】已知$x>0$，$y>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，则$x+y$的最小值为________.

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⟹ 均值定理

【答案】 16

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·二次函数消元法求最值

9.【例题】已知$a>2$，$b>0$，且$ab=4+2b$，则$a+b$的最小值为______.

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] ⇒ 均值定理

【答案】 6

大师笔记：二次函数消元求最值 讲义 P107

模块化解题方法 12.1 均值定理求最值·求几何问题最值

10.【例题】一长方体的体积为60，其中一个面的面积为10，求长方体表面积的最小值.

【答案】 $24\sqrt{10}+20$

大师笔记：均值定理求几何问题最值 讲义 P107

模块化解题方法

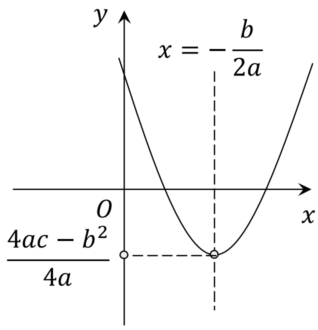
【标志词汇】代数式求最值

①符合乘法公式的⟹凑配完全平方求最值.

②可变形为二次函数的⟹利用二次函数求最值.

③限制为正的⟹均值定理求最值.

④有可行域范围限制的⟹线性规划求最值.



【标志词汇】利用完全平方公式求代数式最值

①变形为[常数+(　)^2]求最小值

②变形为[常数−(　)^2]求最大值

大师笔记：线性规划（选修） 讲义 P103

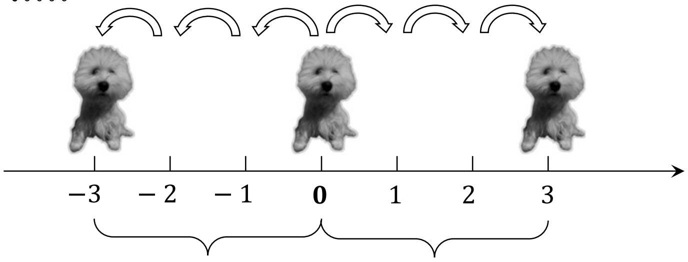
抱佛脚

第十二章 模块化解题方法

12.2 绝对值相关问题

大师笔记：两个绝对值之和/差（选修） 讲义 P107-P109

模块化解题方法 12.2 绝对值·基础知识



到原点的距离　　到原点的距离 **绝对值** **【绝对值的几何意义】**<u>距离</u>

$|3| = 3$　　$|1.2| = 1.2$　　$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$　　正数的绝对值是它本身

$|-3| = 3$　　$|-1.2| = 1.2$　　$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$　　负数的绝对值是它的相反数

$|0| = 0$　　零的绝对值是零

模块化解题方法 12.2 绝对值·基础知识

任意实数a的绝对值，$|a| = \begin{cases} a > 0 & |a| = a \\ a = 0 & |a| = 0 \\ a < 0 & |a| = -a \end{cases}$

分情况讨论：先判断符号，再求绝对值.

- $|a| \geq a$，即一个数的绝对值大于等于它本身.
- $\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}|$　　$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = |2|$　　$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$
- $|\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}^2| = \boldsymbol{a}^2$　　$|2|^2 = |2^2| = 2^2 = 4$　　$|-2|^2 = |(-2)^2| = (-2)^2 = 4$
- $|a| = |-a|$（对称性）　即互为相反数的两个数的绝对值相等.

模块化解题方法 12.2 绝对值·基础知识

任意实数a的绝对值，$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$　**【标志词汇】**遇到绝对值⇒去掉绝对值

- 若a为正数，则满足$|x| = a$的x的值有两个，即$\pm a$.　例如$|x| = 3$，则$x = \pm 3$
- 自比性：对于非0实数a，$\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & (a > 0) \\ -1 & (a < 0) \end{cases}$
- 非负性：一个数a的绝对值永远是非负数，　即$|a| \geq 0$恒成立.

【标志词汇】[多个未知量] + [一个等式]

- 带$\sqrt{\ }$、$|\ \ |$、$(\ \ )^2$的等式 ⟹ 利用非负性求解 $|x-1| + \sqrt{y+2} + (z-3)^2 = 0$
- 限制未知量为整数、正整数的等式 ⟹ 利用奇偶性/整除特性求解（第一章）

讲义 P107

模块化解题方法 12.2 绝对值的非负性

11.【模拟题】已知实数x, y, z满足条件$|x^2 + 4xy + 5y^2| + \sqrt{z + \frac{1}{2}} = -2y - 1$，则$(4x - 10y)^z =$（　）.

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$　　E. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

【标志词汇】多个未知量 and 一个等式

【答案】E

讲义 P108

模块化解题方法 12.2 根据定义去掉绝对值

12.【例题】带绝对值的方程 $\left|1-|x-215|\right|=1$ 有多少个不同的解?

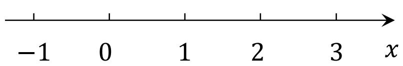
【标志词汇】<u>遇到绝对值⇒去掉绝对值</u>

【答案】 3个

模块化解题方法 12.2 根据定义去掉绝对值

【零点分段法】内核就是根据绝对值定义去掉绝对值　零点：使绝对值内代数式为零的x值

任意实数x的绝对值，$|x|=\begin{cases} x & (当x\geq 0时) \\ -x & (当x<0时) \end{cases}$



【举例】用零点分段法去掉绝对值$|x-1|$

当$x\geq 1$时，$|x-1|=x-1$

当$x<1$时，$|x-1|=-(x-1)=-x+1$

【举例】用零点分段法去掉绝对值$|2x-4|$

当$x\geq 2$时，$|2x-4|=2x-4$

当$x<2$时，$|2x-4|=-(2x-4)=-2x+4$

模块化解题方法 12.2 根据定义去掉绝对值

【零点分段法】内核就是根据绝对值定义去掉绝对值　零点：使绝对值内代数式为零的x值

13.**【例题】**用零点分段法去掉绝对值$|x-1|+|x-2|$.

【答案】

当$x<1$时，$|x-1|+|x-2|=-x+1-x+2=3-2x$

当$1\le x<2$时，$|x-1|+|x-2|=x-1-x+2=1$

当$x\ge 2$时，$|x-1|+|x-2|=x-1+x-2=2x-3$

模块化解题方法 12.2 根据定义去掉绝对值

【零点分段法】内核就是根据绝对值定义去掉绝对值　零点：使绝对值内代数式为零的x值

零点分段法可将绝对值拆为分段函数

$$|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\ge 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$$

$$|2x-4|=\begin{cases}2x-4, & x\ge 2\\ -2x+4, & x<2\end{cases}$$

$$|x-1|+|x-2|=\begin{cases}3-2x, & x<1\\ 1, & 1\le x<2\\ 2x-3, & x\ge 2\end{cases}$$

模块化解题方法 12.2 带绝对值的方程

任意实数a的绝对值，$|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0\\ -a, & a<0\end{cases}$

对于带绝对值的方程求根问题：

【标志词汇】形如$ax^2+b|x|+c$的带绝对值的方程 $\Rightarrow$ 利用$x^2=|x|^2$换元处理.

- 绝对值的性质$|a|^2=a^2$

【分情况讨论】零点分段法去掉绝对值

- 分情况讨论：分为绝对值内≥ 0和<0两种情况讨论.（此即零点分段法）

大师笔记：带绝对值的方程　讲义 P108

模块化解题方法 12.2 带绝对值的方程

14.【模拟题】方程$x^2-2007|x|-2008=0$所有实根之和等于（　　）.

A.2007　　B.4　　C.2　　D.-2007　　E.0

【标志词汇】形如$ax^2+b|x|+c$的绝对值方程/不等式 $\Rightarrow$ 利用$x^2=|x|^2$换元处理.

【答案】E

讲义 P108

模块化解题方法 12.2 带绝对值的方程

15.【模拟题】已知x满足方程$x^2-5|x+1|+2x-5=0$，则x所有可能取值之和为（　　）.

A.2　　B.-2　　C.0　　D.1　　E.-1

【标志词汇】形如$ax^2+b|x|+c$的绝对值方程/不等式 $\Rightarrow$ 利用$x^2=|x|^2$换元处理.

【答案】B

讲义 P108

模块化解题方法 12.2 带绝对值的方程

16.【2023.09】方程$x^2-3|x-2|-4=0$的所有实根之和为（　　）.

A.-4　　B.-3　　C.-2　　D.-1　　E.0

【答案】B

讲义 P108

模块化解题方法 12.2 带绝对值的函数/不等式

遇见绝对值⟹去掉绝对值

① 根据定义零点分段法去掉绝对值求解 最具普适性，零点易得时优选

② 利用不等式的性质转化去掉绝对值($0<a<b$)

|代数式| $<a$　　|代数式| $>a$　　$a\le$ |代数式| $\le b$

模块化解题方法 12.2 带绝对值的函数/不等式

17.【2012.10.25】（条件充分性判断）$x^2-x-5>|2x-1|$．（　　）

（1）$x>4$.　　（2）$x<-1$.

【标志词汇】含有一个绝对值⟹根据定义零点分段法去掉绝对值求解

【答案】A

模块化解题方法 12.2 带绝对值的函数/不等式

遇见绝对值⟹去掉绝对值

① 根据定义零点分段法去掉绝对值求解　最具普适性，零点易得时优选

② 利用不等式的性质转化去掉绝对值

一个绝对值大于或小于某一正数的形式

$|代数式| < a$　　$|代数式| > a$　　$a \le |代数式| \le b$

模块化解题方法 12.2 带绝对值的函数/不等式

表现形式	转化	举例
$\|代数式\| < a$	$-a < 代数式 < a$	由$\|x+1\| < 1$可得 $-1 < x+1 < 1$
$\|代数式\| > a$	$代数式 < -a$ 或 $代数式 > a$	由$\|x^2+x-1\| > 1$可得 $x^2+x-1 > 1$ 或$x^2+x-1 < -1$
$a \le \|代数式\| \le b$	$-b \le 代数式 \le -a$ 或 $a \le 代数式 \le b$	由$1 < \|x\| < 2$可得 $1 < x < 2$或$-2 < x < -1$

模块化解题方法 12.2 带绝对值的函数/不等式

利用不等式的性质转化去掉绝对值($0<a<b$) 一个绝对值大于或小于某一正数的形式

当绝对值内为二次函数$|ax^2+bx+c|$时

- 易因式分解或易判断有根的，根据不等式性质进行转化

举例：$|x^2-x-4|>2 \xrightarrow[\text{进行转化}]{\text{不等式性质}} x^2-x-4>2$ 或 $x^2-x-4<-2$

- 其余则可将二次项系数a化为正后，验Δ，判断是否恒为正

举例：$|-x^2-x-1|>2 \xrightarrow[\text{化为正}]{\text{二次项系数}} |x^2+x+1|>2 \xrightarrow[\text{绝对值}]{\text{直接去掉}} x^2+x+1>2$

$\Delta=1-4<0$故$x^2+x+1>0$恒成立，可直接去掉绝对值

讲义 P109

模块化解题方法 12.2 带绝对值的函数/不等式

18.【2014.01.17】不等式$|x^2+2x+a|\le 1$的解集为空集.（　　）

（1）$a<0$.　　　　　　　　（2）$a>2$.

【标志词汇】<u>含有一个绝对值⇒利用不等式的性质转化</u>

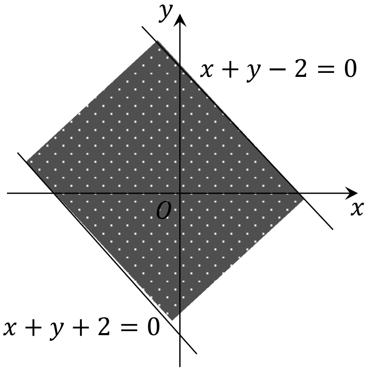
【答案】B

讲义 P109

模块化解题方法 12.2 带绝对值的函数/不等式

19.【改编自2018.16】设x,y为实数，求$|x+y|\le 2$在坐标平面表示的范围.

$|x+y|\le 2$ 不等式性质转化得：$-2\le x+y\le 2$ 表示两条平行线及以内带状区域



$-2\le x+y\le 2$ 连不等式拆分求解

$x+y+2\ge 0$ 包括原点一侧

$x+y-2\le 0$ 包括原点一侧

均为包含原点(0,0)一侧

讲义 P109

模块化解题方法 12.2 带绝对值的函数/不等式・总结

①根据定义零点分段法去掉绝对值求解　最具普适性，零点易得时优选

②利用不等式的性质转化去掉绝对值($0<a<b$)

一个绝对值大于或小于某一正数的形式

$|$代数式$|<a$　　$|$代数式$|>a$　　$a\le|$代数式$|\le b$

当绝对值内为二次函数$|ax^2+bx+c|$时

- 易因式分解或易判断有根的，根据不等式性质进行转化
- 其余则可将二次项系数a化为正后，验Δ，判断是否恒为正

讲义 P109

模块化解题方法

模块化解题方法	12.1四大代数式求最值方法	近5年考4题 【2023.13】均值定理求最值—二次分式型函数最值 【2022.03】凑配完全平方求最值 【2020.24】均值定理求最值 【2019.02】均值定理求最值-凑配定值
	12.2绝对值相关问题	近5年考5题 【2023.09】带绝对值的方程 【2022.17】两绝对值之差 【2021.13】带绝对值的方程 【2021.19】根据定义去绝对值 【2020.02】绝对值的几何意义

系统阶段大功告成
接下来
蒙猜技巧要来啦！
祝大家
稳稳上岸