10.3 组合问题：从相同备选池选取

仅分堆问题

从同一个备选池的 n 个不同元素中按要求选取元素，分成无差别 m 堆，每堆至少包含一个元素，即为仅分堆问题.

注意：①分成的堆，题目中未说不同，默认相同；②分堆时，有几堆元素数量相同，就除以几的全排列消序.

举例	计算方法
把 6 本书分为 1+2+3 三堆	每堆数量不同，不消序：$C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3$
把 6 本书分为 2+2+2 三堆	有三堆数量相同，除以 A_3^3 消序：$\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3}$
把 6 本书分为 1+1+4 三堆	有两堆数量相同，除以 A_2^2 消序：$\frac{C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^4}{A_2^2}$

若未指定每堆数量，则分情况讨论.

16 【2017.15】将 6 人分成 3 组，每组 2 人，则不同的分组方式共有（　　）.

A. 12　　B. 15　　C. 30　　D. 45　　E. 90

分堆分配问题

【标准步骤】对于将 n 个不同元素全部分配给 m 个不同对象，每个对象至少分得一个元素的问题，采用分堆分配的方法实现，具体过程为：

①先将 n 个元素分为 m 个无顺序区别的堆，每堆至少一个元素；

②将这 m 堆按要求分配给 m 个对象.

注意：分堆时，有几堆元素数量相同，就除以几的全排列消序.

分配时，有几个人无法唯一确定会分得哪一堆，就乘以几的全排列.

【确定分配与非确定分配】在分堆问题中，对于分好的堆，若可以唯一确定它会分配给哪个对象，则为确定分配，分配方法数为 1. 若不能确定分配给哪个对象，则需要全排列分配. 分配时可能一部分堆确定分配，另一部分堆非确定分配.

【举例】有 3 堆球，每堆分别有 1 个球、2 个球和 3 个球，将其分给甲、乙、丙三个人，每人一堆. 确定分配为：若要求分给甲一个球，乙两个球，丙三个球. 此时甲需要分得一个球，则可以确定包含 1 个球的堆一定分配给甲，乙、丙同理.

17 【2010.01.11】某大学派出 5 名志愿者到西部 4 所中学支教，若每所中学至少有一

名志愿者，则不同的分配方案共有（　　）种.

A. 240　　B. 144　　C. 120　　D. 60　　E. 24

18　【2018.08】将 6 张不同的卡片 2 张一组分别装入甲、乙、丙 3 个袋中，若指定的两张卡片要在同一组，则不同的装法有（　　）.

A. 12 种　　B. 18 种　　C. 24 种　　D. 30 种　　E. 36 种

19　【2020.15】某科室有 4 名男职员，2 名女职员，若将这 6 名职员分为 3 组，每组 2 人，且女职员不同组，则不同的分组方式有（　　）种.

A. 4　　B. 6　　C. 9　　D. 12　　E. 15

20　【模拟题】某交通岗共有 3 人，从周一到周日的 7 天中，每天安排 1 人值班，每人至少值 2 天，其不同的排法共有（　　）种.

A. 260　　B. 320　　C. 480　　D. 520　　E. 630

10.4 错位重排

错位重排问题的经典场景有：不对号入座、装错信封、球的号码跟盒子不对应等.

具体可表述为：编号是 1、2、…、n 的 n 封信，装入编号为 1、2、…、n 的 n 个信封，要求每封信和信封的编号均不同，问有多少种装法？

设 D_n 表示 n 对元素错位重排的方法数，则有：

1 对元素无法错位重排，有 0 种方法，即 $D_1=0$

2 对元素的错位重排问题，有 1 种方法，即 $D_2=1$

3 对元素的错位重排问题，有 2 种方法，即 $D_3=2$

4 对元素的错位重排问题，有 9 种方法，即 $D_4=9$

5 对元素的错位重排问题，有 44 种方法，即 $D_5=44$

21　【2014.01.15】某单位决定对 4 个部门的经理进行轮岗，要求每位经理必须轮换到 4 个部门中的其他部门任职，则不同的轮岗方案有（　　）.

A. 3 种　　B. 6 种　　C. 8 种　　D. 9 种　　E. 10 种

22　【2018.13】某单位为检查 3 个部门的工作，由这 3 个部门的主任和外聘的 3 名人员组成检查组，分 2 人一组检查工作，每组有 1 名外聘成员，规定本部门主任不能检查本部门，则不同的安排方式有（　　）.

A. 6 种　　B. 8 种　　C. 12 种　　D. 18 种　　E. 36 种

10.5 特殊位置要求

元素必须在某位置

破题标志词

元素必须在某位置⇒命中注定，方法数为 1.

未指明的⇒要明确选出是哪一个.

23 【2011.01.19】(条件充分性判断)现有 3 名男生和 2 名女生参加面试．则面试的排序法有 24 种.(　　)

(1)第一位面试的是女生.

(2)第二位面试的是指定的某位男生.

元素不能在某位置

破题标志词

元素不能在某位置⇒占位法．

未指明的⇒要明确选出是哪一个．

24 【模拟题】7 个不同的文艺节目要编成一个节目单，如果有一个独唱节目一定不能排在第二个节目的位置上，则共有(　　)种不同的排法.

A. 720　　B. 4320　　C. 2160　　D. 144　　E. 1440

25 【模拟题】从 7 个不同的文艺节目中选 5 个编成一个节目单，如果有一个独唱节目一定不能排在第二个节目的位置上，则共有(　　)种不同的排法.

A. 2060　　B. 2080　　C. 2120　　D. 2160　　E. 2180

10.6 总体剔除法

当题目中从正面求解困难时，采用总体剔除法，从对立面求解.

破题标志词

①"至少"问题②"非"的问题③正难则反⇒总体剔除.

▶**26** 【2023.05】某公司财务部有 2 名男员工,3 名女员工,销售部有 4 名男员工,1 名女员工.现要从中选 2 名男员工,1 名女员工组成工作小组,并要求每部门至少有 1 名员工入选,则工作小组的构成方式有(　　)种.

A. 24　　B. 36　　C. 50　　D. 51　　E. 68

10.7 "恰"的问题

破题标志词

恰⇒等同于[有且仅有],描述全局.

选 n 个元素恰有 m 个是 A⇔m 个是 A,并且其余 $n-m$ 个不是 A.

▶**27** 【模拟题】有 4 队学生,每队均有 3 人,现从中选取 4 人参加比赛,要求恰有 2 人来自同一队,则有(　　)种不同的选取方案.

A. 324　　B. 300　　C. 100　　D. 900　　E. 420

▶**28** 【2010.01.06 改编】某商店举行店庆活动,顾客消费达到一定的数量后,可以在 4 种赠品中随机选取 2 件不同的赠品,任意两位顾客所选的赠品中,恰有 1 件赠品相同的方法数为________.

▶**29** 【模拟题】有五名志愿者参加社区服务,共服务星期六、星期天两天,每天从中任选两人参加服务,则恰有一人连续参加两天服务的选择种数为(　　).

A. 120　　B. 60　　C. 40　　D. 30　　E. 20

思考与总结

第十一章 概 率

11.1 概率基础

【互斥事件】在一次试验中,不可能同时出现的事件就叫作互斥事件.

【概率加法公式】对于两互斥事件 A 和 B,如果事件 A 发生的概率为 $P(A)$,事件 B 发生的概率为 $P(B)$,那么事件 A 发生或事件 B 发生的概率等于其分别发生的概率之和 $P(A)+P(B)$.

【举例】掷骰子掷出 1 点的概率为 $P(A)=\frac{1}{6}$,掷骰子掷出 2 点的概率为 $P(B)=\frac{1}{6}$.

掷骰子掷出的点数小于等于 2 点(即掷出 1 点或掷出 2 点)的概率是:$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}$.

【独立事件】在多次试验时,每一次试验的结果都不会对另一次的试验结果产生影响,那么它们就叫作独立事件.

【概率乘法公式】两个独立事件均发生的概率,为两者单独发生的概率之积,即若事件 A 发生的概率为 $P(A)$,事件 B 发生的概率为 $P(B)$,则相互独立的事件 A 和事件 B 均发生的概率为 $P(A)\cdot P(B)$.

【举例】掷 A 骰子掷出 1 点的概率为 $\frac{1}{6}$,掷 B 骰子掷出 1 点的概率为 $\frac{1}{6}$,则掷出 A、B 两个骰子均是 1 点的概率为 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

此公式可推广至 n 个相互独立事件均发生的概率,为每个事件发生的概率的乘积,即:

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,P 均发生$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)$.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$,$\cdots$, $\overline{A_n}$ 也相互独立.

11.2 直接运用加法与乘法公式

给出各独立事件概率

▶ 1 【模拟题】甲、乙、丙三人参加射击项目，已知甲的命中率为$\frac{1}{4}$，乙的命中率为$\frac{1}{2}$，丙的命中率为$\frac{1}{3}$. 若甲、乙、丙三人各射击一次，则恰有一人命中的概率为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{8}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. $\frac{11}{24}$　　E. $\frac{13}{24}$

▶ 2 【2015.14】某次网球比赛的四强对阵为甲对乙，丙对丁，两场比赛的胜者将争夺冠军，选手之间相互获胜的概率如下：

	甲	乙	丙	丁
甲获胜概率	/	0.3	0.3	0.8
乙获胜概率	0.7	/	0.6	0.3
丙获胜概率	0.7	0.4	/	0.5
丁获胜概率	0.2	0.7	0.5	/

则甲获得冠军的概率为（　　）.

A. 0.165　　B. 0.245　　C. 0.275　　D. 0.315　　E. 0.33

▶ 3 【2017.08】某试卷由 15 道选择题组成，每道题有 4 个选项，只有一项是符合试题要求的，甲有 6 道题是能确定正确选项，有 5 道能排除 2 个错误选项，有 4 道能排除 1 个错误选项，若从每题排除后剩余的选项中选一个作为答案，则甲得满分的概率为（　　）.

A. $\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{3^5}$　　B. $\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{3^4}$　　C. $\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^4}$　　D. $\frac{1}{2^4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5$　　E. $\frac{1}{2^4}+\left(\frac{3}{4}\right)^5$

▶ 4 【2018.09】甲、乙两人进行围棋比赛，约定先胜 2 盘者赢得比赛，已知每盘棋甲获胜的概率是 0.6，乙获胜的概率是 0.4，若乙在第一盘获胜，则甲赢得比赛的概率为（　　）.

A. 0.144　　B. 0.288　　C. 0.36　　D. 0.4　　E. 0.6

提示：已经发生的事为必然事件，概率为 1.

5 【2014.01.09】掷一枚均匀的硬币若干次，当正面向上次数大于反面向上的次数时停止，则在 4 次之内停止的概率为（ ）.

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{3}{16}$ E. $\frac{5}{16}$

取出后放回问题的概率

取出后放回，每次抽取所面临的情况均相同. 对于相同的抽取结果，概率也相同，可以视作独立事件的概率.

6 【2015.19 改】信封中装有 10 张奖券，只有一张有奖. 从信封中每次抽取 1 张奖券后放回，如此重复抽取 3 次，则中奖概率为多少？

知道结果次序的概率

7 【模拟题】5 个不同的球里，有 3 个白球，2 个红球. 甲不放回一次抽取一球，依次得到一红一白的概率为________.

8 【1999.01.09】甲盒内有 4 只红球、2 只黑球、2 只白球，乙盒内有 5 只红球、3 只黑球，丙盒内有 2 只黑球、2 只白球，从这三个盒子的任意一个中任取一只球，它是红球的概率是（ ）

A. 0.5625 B. 0.5 C. 0.45 D. 0.375 E. 0.225

9 【2000.01.10】某人忘记三位号码锁（每位均有 0～9 十个号码）的最后一个号码，因此在正确拨出前两个号码后，只能随机地试拨最后一个号码，每拨一次算作一次试开，则他在第 4 次试开时才将锁打开的概率是（ ）.

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{10}$ E. $\frac{3}{10}$

11.3 古典概型

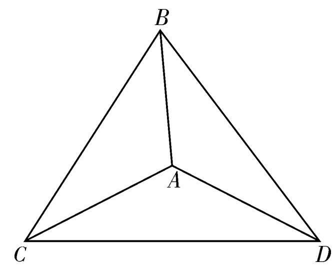
如果一次试验中共有 n 种等可能出现的结果（即所有基本事件数为 n），而事件 A 由

其中 m 种等可能事件出现的结果所组成(即满足事件 A 要求的基本事件的数量为 m),那么事件 A 的概率:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{满足事件 }A\text{ 要求的方法数}}{\text{总方法数}}$$

基础题型

10　【2020.14】如图,节点 A,B,C,D 两两相连,从一个节点沿线段到另一个节点当做 1 步,若机器人从节点 A 出发,随机走了 3 步,则机器人未到达过节点 C 的概率为(　　).



A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{11}{27}$　　C. $\frac{10}{27}$

D. $\frac{19}{27}$　　E. $\frac{8}{27}$

11　【模拟题】x 和 y 为从集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中任意选中的数字,且可以重复,则 $xy+y$ 为奇数的概率为(　　).

A. 0.3　　B. 0.24　　C. 0.76　　D. 0.7　　E. 0.16

仅要求结果组合的概率

在不放回取球中,对于同样的抽取结果(如袋中取球抽到 1 红 2 白)发生的概率:无论是依次抽还是一把抓,概率均相同.因此可以当做一把抓,使用组合数分别计算分子分母.

12　【模拟题】5 个不同的球里,有 3 个白球,2 个红球.

(1)甲先抽一个球,后再抽一个球,抽出的球不放回.得到红球和白球各一个的概率为(　　).

(2)甲一次性抽出两个球,得到红球和白球各一个的概率为(　　).

A. $\frac{3}{5},\frac{2}{5}$　　B. $\frac{3}{5},\frac{3}{5}$　　C. $\frac{2}{5},\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2}{5},\frac{2}{5}$　　E. $\frac{2}{5},\frac{3}{5}$

13　【2021.08 拓展】甲、乙两组同学中,甲组有 3 男 3 女,乙组有 4 男 2 女,从甲、乙两组中各选出 2 名同学,这 4 人中恰有 1 女的概率为________.(用组合数表示)

14 【2024.14】有 4 种不同的颜色，甲乙两人各随机选 2 种，则两人颜色完全相同的概率为(　　).

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{18}$　　E. $\frac{1}{36}$

古典概型求解的列表法、穷举法与抽签法(树图法)

列表法

15 【2024.02】将 3 张写有不同数字的卡片随机地排成一排，数字面朝下. 翻开左边和中间的 2 张卡片，如果中间卡片上的数字大，那么取中间的卡片，否则取右边的卡片，则取出的卡片上数字最大的概率为(　　).

A. $\frac{5}{6}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$　　E. $\frac{1}{4}$

穷举法

16 【全国新高考Ⅰ 2022.05】从 2 至 8 的七个整数中随机取两个不同的数，则这两个数互质的概率为(　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

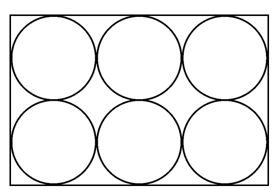
抽签法

17 【2020.19】(条件充分性判断)甲、乙两种品牌的手机共 20 部，任取 2 部. 则恰有 1 部甲品牌的概率为 p. 则 $p>\frac{1}{2}$.(　　)

(1)甲品牌手机不少于 8 部.

(2)乙品牌手机多于 7 部.

18 【2022.05】如图，已知相邻的圆都相切，从这 6 个圆中随机取 2 个，这 2 个圆不相切的概率为(　　).



A. $\frac{8}{15}$　　B. $\frac{7}{15}$　　C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2}{5}$　　E. $\frac{2}{3}$