11.4 正难则反：对立事件法

【对立事件】如果一件事情发生的概率为 P，那么这件事情不发生就叫作与之对立的事件，它不发生的概率为 $1-P$.

破题标志词

正难则反，对立事件法．

直接[至多/至少]问题

19 【模拟题】某公司有 9 名工程师，6 男 3 女，从中任意抽调 4 人组成攻关小组．则：

(1)恰好包含一名女工程师的概率为________.（用组合数表示）

(2)至少包含一名女工程师的概率为________.（用组合数表示）

20 【2021.14】从装有 1 个红球，2 个白球，3 个黑球的袋中随机取出 3 个球，则这 3 个球的颜色至多有两种的概率（　　）.

A. 0.3　　B. 0.4　　C. 0.5　　D. 0.6　　E. 0.7

现实场景中的[至多/至少]问题

常见至少问题现实场景：

多次射击后击中⇔至少有一次击中

多个警报器有效报警⇔至少有一个警报器有效报警

多次抽奖后中奖⇔至少有一次中奖

并联电路电流通过⇔至少有一路电流通过

【拓展】串联电路电流通过⇔每一个元器件均通过，乘法公式.

21 【2013.01.20】（条件充分性判断）档案馆在一个库房中安装了 n 个烟火感应报警器，每个报警器遇到烟火发出警报的概率均为 p. 则该库房遇烟火发出警报的概率达到 0.999.（　　）

(1) $n=3$，$p=0.9$.

(2) $n=2$，$p=0.97$.

[非]的问题

▶22 【模拟题】有三人在一座 7 层大楼的底层进入电梯,假设每一个人自第二层开始在每一层离开电梯是等可能的,则这三人不全在同一层离开的概率为( ).

A. $\frac{1}{36}$　　B. $\frac{48}{49}$　　C. $\frac{1}{49}$　　D. $\frac{35}{36}$　　E. $\frac{5}{6}$

11.5 几何概型

如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积或度数)成比例,则称这样的概率模型为几何概率模型,简称为几何概型.

在这个模型下,随机实验所有可能的结果是无限的,并且每个基本结果发生的概率是相同的.例如一个人到单位的时间可能是 8:00～9:00 之间的任意一个时刻、往一个方格中投一个石子,石子落在方格中任何一点上……这些试验出现的结果都是无限多个,属于几何概型.一个试验是否为几何概型在于这个试验是否具有两个特征——无限性和等可能性,只有同时具备这两个特点的概型才是几何概型.

古典概型与几何概型的主要区别在于:几何概型是另一类等可能概型,它与古典概型的区别在于试验的结果是无限个.

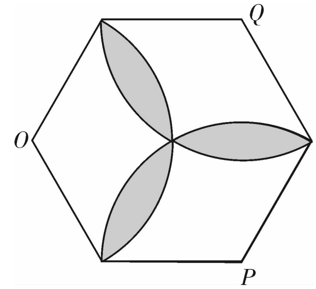
几何概型中事件 A 的概率计算公式为:

$$P(A)=\frac{\text{构成事件 }A\text{ 的区域长度(面积或体积等)}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度(面积或体积等)}}.$$

▶23 【模拟题】在区间$[-2,12]$中任取一个数 x,则 $x\in[8,13]$的概率为( ).

A. $\frac{5}{14}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$　　E. $\frac{3}{7}$

▶24 【2021.09 改编】如图,正六边形边长为 1,分别以正六边形的顶点 O、P、Q 为圆心,以 1 为半径作圆弧形成阴影.将一枚飞镖投掷到正六边形上,若飞镖落在各点机会相等,则飞镖恰好落在阴影部分区域的概率为________.



11.6 排列组合与概率中的逆推

25 【2013.10.14】福彩中心发行彩票的目的是为了筹措资金资助福利事业. 现在福彩中心准备发行一种面值为 5 元的福利彩票刮刮卡，方案设计如下：(1)该福利彩票的中奖率为 50%；(2)每张中奖彩票的中奖奖金有 5 元和 50 元两种. 假设购买一张彩票获得 50 元奖金的概率为 p，且福彩中心筹得资金不少于发行彩票面值总和的 32%，则(　　).

A. $p \leqslant 0.005$　　B. $p \leqslant 0.01$　　C. $p \leqslant 0.015$　　D. $p \leqslant 0.02$　　E. $p \leqslant 0.025$

26 【模拟题】袋中有 10 个球，分别为红球、黄球和蓝球，现从中任取两球，至少有一球为黄球或蓝球的概率为$\frac{13}{15}$，则袋中红球个数为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

27 【2020.19】(条件充分性判断)甲、乙两种品牌的手机共 20 部，任取 2 部. 则恰有 1 部甲品牌的概率为 p. 则 $p > \frac{1}{2}$.(　　)

(1)甲品牌手机不少于 8 部.
(2)乙品牌手机多于 7 部.

思考与总结

第十二章 模块化解题方法

12.1 四大代数式求最值方法

代数式求最值方法	适用题目特征	说明
凑配完全平方求最值	无取值范围限制的多元代数式，且在形态上符合乘法公式	①变形为[常数+(　)^2]求最小值 ②变形为[常数－(　)^2]求最大值
利用二次函数求最值	直接给定一元二次代数式，或可消元处理变形为一元二次代数式的算式	结合抛物线图形可求变量在任何范围内的最值
均值定理求最值	变量限制为正	几项相加或相乘可得常数(消去未知量)
线性规划求最值(选修)	二元不等式，规定可行域与目标函数	截距型、距离性、斜率型、乘积型

凑配完全平方求最值

凑配完全平方求最值的核心在于多项式配平方：

$$x^2+bx=x^2+2\cdot\frac{b}{2}\cdot x+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}$$

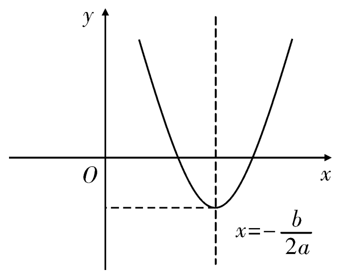
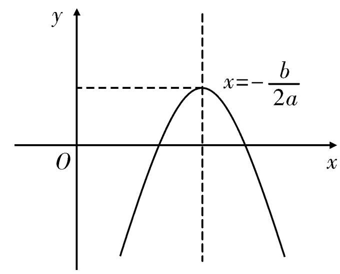
配方方法：加上一次项系数 b 一半的平方后，再减去一次项系数一半的平方.

▶ 1 【2022.03】设 x,y 为实数，则 $f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-2y+2$ 的最小值为(　　).

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{3}{2}$　　E. 3

二次函数求最值

抛物线顶点纵坐标即为二次函数最值，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，二次函数可取到最值，即

	
当 $a>0$ 时，抛物线开口向上	当 $a<0$ 时，抛物线开口向下
函数有最小值，无最大值	函数有最大值，无最小值
代入 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 得到的函数值为最小值	代入 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 得到的函数值为最大值

▶ 2 【2012.10.02】设实数 x,y 满足 $x+2y=3$，则 x^2+y^2+2y 的最小值为（　　）.

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. $\sqrt{5}-1$　　E. $\sqrt{5}+1$

注：同型题目有【2016.23】【2007.10.06】

均值定理求最值

基础知识

【算术平均值】设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个数，称 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值，记为：$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$.

【几何平均值】设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正实数，称 $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$ 为这 n 个数的几何平均值，记为：$x_g=\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}$.

【均值定理】对于任意 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$，则有：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等号成立.（$x_i>0,i=1,\cdots,n$）

即：n 个正实数的算术平均值大于等于它们的几何平均值. 当这些数全部相等时，它们的算数平均值与几何平均值相等.

不同形态的均值定理

	和的最小值	乘积的最大值	取等号条件
两项时	$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$	$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	$a=b$
三项时	$a+b+c\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{abc}$	$abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$	$a=b=c$

破题标志词

[限制为正]+[求最值]⇒均值定理

均值定理直接求代数式最值

3　【2020.24】(条件充分性判断)设 a,b 为正实数. 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 存在最小值.(　　)

(1)已知 ab 的值.

(2)已知 a,b 是方程 $x^2-(a+b)x+2=0$ 的不同实根.

均值定理凑配定值

【举例】求下列代数式的最大值或最小值

$x+\frac{1}{x},x>0$　　　　$x+\frac{1}{x-2},x>2$

$x+\frac{1}{x^2},x>0$　　　　$x+\frac{1}{(x-2)^3},x>2$

$x+\frac{1}{x^3},x>0$　　　　$x^2(1-x),x\in(0,1)$

$t+\frac{C}{t}$ 型最值

天然满足乘积为定值的均值定理求最值模型：已知代数式 t 取值为正，求 $t+\frac{C}{t}$ 的最值.

说明：①以上 C 为正常数，t 可代表任何正的代数式.

②当常数 $C=1$ 时有 $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$，此即互为倒数的两正项之和大于等于 2($t=1$ 时取等号).

③扩展形式：$\frac{ay}{bx}+\frac{cx}{dy}$(其中系数 a,b,c,d 和变量 x,y 均为正).

4【2019.02】设函数 $f(x)=2x+\frac{a}{x^2}(a>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值为 $f(x_0)=12$，则 $x_0=$(　　).

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2　　E. 1

分式型代数式最值

适配形式	处理方式	举例
$\frac{\text{二次}}{\text{一次}}$	以分母为最小单元，将分子向其凑配，除后转化为 $t+\frac{a}{t}$ 型	$\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{4}=4(x>0)$
		$\frac{x^2+2x+4}{x}=x+\frac{4}{x}+2\geqslant 2\sqrt{4}+2=6(x>0)$
$\frac{\text{一次}}{\text{二次}}$	以分子为最小单元，将分母向分子凑配，之后同除分子，分子变为1，分母变为 $t+\frac{a}{t}$ 型	$\frac{x}{x^2+4}=\frac{1}{x+\frac{4}{x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}(x>0)$
		$\frac{x}{x^2+2x+4}=\frac{1}{x+\frac{4}{x}+2}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{4}+2}=\frac{1}{6}(x>0)$
		$\frac{x+1}{x^2+2x+5}=\frac{x+1}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{x+1+\frac{4}{x+1}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}(x>-1)$

5【模拟题】函数 $y=\frac{x^2+7x+10}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内的最小值为________.

利用常值代换求最值

套路一：已知 $ax+by=C$，求 $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}$ 的最小值.

套路二：已知 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=C$，求 $mx+ny$ 的最小值.

说明：以上系数 a,b,m,n,C 均为正常数，x,y 为正变量).

6【模拟题】已知 $x>0,y>0$，且 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，则 $x+y$ 的最小值为________.

7【模拟题】已知 $x,y>0$，且 $x+2y=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{8}{y}$ 的最小值为________.

二元函数消元法求最值

限制变量为正的二元(两个变量)函数求最值时，若可以直接用均值定理，则直接套

用;若不可,则可通过消元转化为一元函数问题,再套用均值定理.

8【模拟题】已知 $a>0$, $b>0$,且 $ab=4+2b$,则 $a+b$ 的最小值为________.

均值定理求几何问题最值

9【模拟题】一长方体的体积为 60,其中一个面的面积为 10,求长方体表面积的最小值.

12.2 绝对值相关问题

基础知识

(1)若 $|x|=a(a>0)$,则 $x=\pm a$.

(2)$|a|\geqslant a$,即一个数的绝对值大于等于它本身.

(3)$\sqrt{a^2}=|a|$.

(4)$|a|^2=|a^2|=a^2$.

(5)$|a|=|-a|$,即互为相反数的两个数的绝对值相等.

(6)若 a 为正数,则满足 $|x|=a$ 的 x 的值有两个,即 $\pm a$. 如若 $|x|=3$,则有 $x=3$ 或 $x=-3$.

(7)自比性:对于非零实数 a,有 $\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1(a>0)\\-1(a<0)\end{cases}$.

(8)非负性:一个数 a 的绝对值永远是非负数,即有 $|a|\geqslant 0$ 恒成立.

说明:联考中需要掌握的具有非负性的算式有三种,它们分别是:绝对值,二次根式和平方,即 $|a|\geqslant 0$, $\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$, $a^2\geqslant 0$.

破题标志词

多个未知量,一个等式且带有根号、绝对值、完全平方⇒非负性

10【2024.19】(条件充分性判断)设 a,b,c 为实数. 则 $a^2+b^2+c^2\leqslant 1$.(　　)

(1)$|a|+|b|+|c|\leqslant 1$.

(2)$ab+bc+ac=0$.

绝对值的非负性

11 【模拟题】已知实数 x、y、z 满足条件 $|x^2+4xy+5y^2|+\sqrt{z+\frac{1}{2}}=-2y-1$，则 $(4x-10y)^z=$（　　）.

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$　　E. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

根据定义去掉绝对值

根据绝对值定义，有：若 $|x|=a(a>0)$，则 $x=\pm a$. 据此可解决经典的嵌套绝对值问题.

12 【模拟题】绝对值方程 $|1-|x-215||=1$ 有多少个不同的解？

根据定义去掉绝对值的最常见应用为零点分段法. 题目中使绝对值内代数式为零的 x 值即为一个零点，若有多个绝对值则可能产生多个零点. 在数轴上标出零点，n 个零点将数轴划分为 $n+1$ 个区域，在各个区域内分别讨论，用定义去掉绝对值，得到一个分段函数. 此即零点分段法.

13 【模拟题】用零点分段法去绝对值 $|x-1|+|x-2|$.

说明：绝对值函数是连续函数，因此分段函数中等号可以标在任意区间端点，亦可以全带等号. 一般习惯统一写在较大或较小区间端点处.

带绝对值的函数/不等式

14 【2012.10.25】（条件充分性判断）$x^2-x-5>|2x-1|$.（　　）

（1）$x>4$.

（2）$x<-1$.

15 【2014.01.17】（条件充分性判断）不等式 $|x^2+2x+a|\leqslant 1$ 的解集为空集.（　　）

（1）$a<0$.

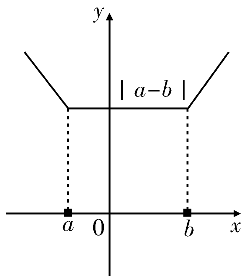
（2）$a>2$.

▶16 【改编自 2018.16】设 x,y 为实数，求 $|x+y|\leqslant 2$ 在坐标平面表示的范围.

绝对值函数图形

破题标志词

形如 $|x-a|+|x-b|$ 的两绝对值之和



当 x 在 $[a,b]$ 之内的任意位置时，$|x-a|+|x-b|=|a-b|$ 恒成立.

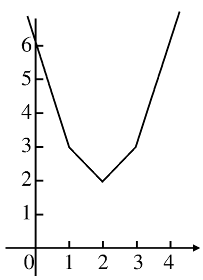
这也是两绝对值之和能取到的最小值.

有无数个 x 可以令两绝对值之和取到最小值；它无最大值.

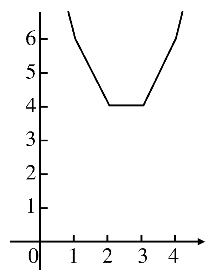
方程有解可以数形结合解读为等号左右两边所代表的两函数图象有交点.

破题标志词

形如 $|x-a|+|x-b|+|x-c|+\cdots$ 的多个绝对值之和



$y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$



$y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

▶17 【2013.10.25】(条件充分性判断)方程 $|x+1|+|x+3|+|x-5|=9$ 存在唯一解.

(　　)

(1) $|x-2|\leqslant 3$.

(2) $|x-2|\geqslant 2$.