



MBA大师 2025三天三夜终极预测

阿董

2025三天三夜 考试得分攻略

- **不要盲目刷新题** 复盘！重点看题目结构要素，为什么这样入手（道的层面，非术的层面）
[题目特征] + [入手方向] = [标志词汇]
- **只做会做的题** 最优策略：会做的题全做对，不会的用蒙猜技巧蒙
最吃亏策略：死磕不会做的题，导致会做的也没时间了只能蒙一个
- **交卷不改答案** 只有确定审错题 or 确定计算错误，再改
- **问题求解：含错必错 不含对必错**
- **条件题：所有...都必然**
 - 说人话①：所有A，都必然B
 - 说人话②：如果A，那么B
 - 说人话③：只要A，就必然B

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

板块	2024年 题量	2023年 题量	2022年 题量	2021年 题量	2020年 题量	2019年 题量
算术	2	2	2	2	1	2
代数	8	6	6	6	6	6
几何	7	5	5	5	6	7
数据分析	4	6	6	5	5	4
应用题	4	6	6	7	7	6

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 2024知识点统计

板块	题量	章节	题号
算术	2题	算术	17: 带余除法 20: 两绝对值之差
代数	8题	代数式	21: 乘法公式+不等式推导
		方程与不等式	04: 均值定理 15: 不等式计算 19: 不等式性质
		数列	03: 等差数列求和 06: 等差数列 10: 等差数列求和 25: 等比数列片段和
几何	7题	平面几何	08: 阴影图形 11: 三角形内接半圆
		立体几何	13: 柱体、球体积
		解析几何	05: 平行四边形点坐标关系 18: 直线与抛物线 23: 两变量不等关系数形结合法 24: 曲线与坐标轴交点

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 2024知识点统计

板块	题量	章节	题号
数据分析	4题	排列组合	07: 隔板法
		概率	02: 古典概型 14: 古典概型 16: 古典概型
		数据描述	未考
应用题	4题	应用题	01: 增长率+比例 09: 工程问题—负效率问题 12: 行程问题—行船问题 22: 行程问题—两条直线上的运动

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 2024历史同源真题

2023真题	正确率	同源真题	考点
2024.01	84%	2012.10.16	增长率基础题型
2024.04	83%	2023.13	均值定理求分式型代数式的最值
2024.06	81%	2018.17 2013.01.13	等差数列下标关系
2024.07	63%	2009.10.14	相同元素隔板法
2024.12	72%	2011.01.01	行船问题
2024.14	61%	2010.01.06	古典概型基础
2024.16	78%	2014.01.23	取球概率与球数互推
2024.17	51%	2019.22	带余除法极其代数表达
2024.18	62%	2014.01.22	抛物线形态及二次函数系数
2024.20	70%	2022.17	两绝对值之差
2024.23	37%	2021.21	两变量不等关系数形结合

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 2023历史同源真题

2023真题	正确率	同源真题	考点
2023.02	94%	2016.01、2007.10.04	比与比例-两个含有公共项的比
2023.05	71%	2022.12、2016.14	正难则反，总体剔除法
2023.08	57%	2011.01.10	捆绑法、插空法
2023.09	57%	2012.10.25	去掉绝对值-零点分段法
2023.14	51%	2022.05、2021.14	对立事件法
2023.15	41%	2014.01.12	全排列的作用-定序消序
2023.17	74%	2008.01.21	给出根的取值范围-k分布

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜 2022历史同源真题**

2022真题	正确率	同源真题	考点
2022.01	71%	2019.01、2013.01.01	工程问题，总量不变，效率改变
2022.02	81%	2010.01.02	应用题-利润率
2022.03	75%	2010.10.02	[常数+() ²]与[常数-() ²]求最值
2022.04	63%	2010.10.11	平面几何-阴影图形
2022.05	64%	2019.07	[穷举法]与[对立事件法]相结合
2022.09	65%	2014.01.20、2013.01.07	平面几何-相似三角形
2022.11	88%	2014.01.01、2012.01.02	应用题-一般方程
2022.15	53%	2000.01.07	分步涂色问题（注意涂色顺序）
2022.18	71%	2016.16	数据描述-总体均值与部分均值
2022.21	38%	2021.25条件（1）	一元二次方程+直角△+等比数列
2022.25	57%	2013.01.21	绝对值几何意义与不等式转换

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 2021历史同源真题

2021真题	正确率	同源真题	考点
2021.04	78%	2015.03	质数-穷举法
2021.06	70%	1999.01.10	概率-对立事件法
2021.07	70%	2011.01.04	立体几何-立方体外接球
2021.08	81%	2020.04、2020.19	排列组合概率中[恰]的问题
2021.09	79%	2017.09、2012.01.09	弓形面积（割补法）
2021.12	69%	2016.20	不同浓度溶液混合
2021.13	68%	2002.01.06	绝对值-整体思维解绝对值方程
2021.17	64%	2013.01.04	工程问题（分段与合作）
2021.21	43%	2018.16	两变量不等式-数形结合

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

常用特值法梳理

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法

- 【标志词汇】全比例问题⇒特值法
- 【标志词汇】求代数式具体值⇒特例法
- 【标志词汇】单一条件型题目⇒任选满足条件的特值/特例
- 【标志词汇】给数列出单一条件⇒常数列特值法
- 【标志词汇】范围型选项⇒各范围内选取特值代入验证.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 全比例问题

- 【标志词汇】全比例问题⇒特值法

【2020.01】某产品去年涨价10%，今年涨价20%，则该产品这两年涨价（ D ）.

A.15% B.16% C.30% D.32% E.33%

只要价格变动幅度满足这样的条件，都可以指向相同的答案值

因此设出满足要求的一个具体价格，就可以得到答案

设去年该产品原价为100元

两次涨价后为 $(1 + 10\%) \times (1 + 20\%) \times 100 = 132$ 元，比原价100元上涨32%.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 全比例问题

➤ 【标志词汇】全比例问题⇒特值法 【标志词汇】代数式求值⇒特值法

【2008.10.01】 $a:b = \frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, 则 $\frac{12a+16b}{12a-8b} = (C)$.

A. 2

B. 3

C. 4

D. -3

E. -2

第一步：将 a, b 关系化为整数连比形式，即 $a:b = \frac{1}{3}:\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3} \times 12\right) : \left(\frac{1}{4} \times 12\right) = 4:3$

第二步：比值即特值。故将 a, b 直接赋值为 $a = 4, b = 3$

第三步：带入求值 $\frac{12a+16b}{12a-8b} = \frac{12 \times 4 + 16 \times 3}{12 \times 4 - 8 \times 3} = \frac{96}{24} = 4$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 求代数式具体值

➤ 求代数式具体值⇒特例法

【2018.05】设实数 a, b 满足 $|a-b| = 2, |a^3-b^3| = 26$, 则 $a^2+b^2 = (E)$.

A. 30

B. 22

C. 15

D. 13

E. 10

【标志词汇】遇到绝对值⇒去掉绝对值：
①设定未知字母间大小关系，去掉绝对值
②根据条件判断绝对值内正负性，去掉绝对值
③零点分段，分情况讨论去掉绝对值

设实数 $a > b > 0$ 则有 $|a-b| = a-b = 2$

$$|a^3-b^3| = a^3-b^3 = 26$$

观察题目特征可知 $26 = 27 - 1 = 3^3 - 1^3$

故可取特值 $a = 3, b = 1$

代入得 $a^2+b^2 = 3^2+1^2 = 10$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 求代数式具体值

➤ 求代数式具体值⇒特例法

【2019.04】设实数 a, b 满足 $ab = 6$, $|a + b| + |a - b| = 6$, 则 $a^2 + b^2 = (D)$

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

E. 14

【标志词汇】遇到绝对值⇒去掉绝对值：
 ①设定未知字母间大小关系，去掉绝对值
 ②根据条件判断绝对值内正负性，去掉绝对值
 ③零点分段，分情况讨论去掉绝对值

设 $a > b > 0$, 则 $|a + b| + |a - b| = a + b + a - b = 2a = 6$

$a = 3, b = 2$

$a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 单一条件型题目

➤ 【标志词汇】单一条件型题目⇒任选满足条件的特值/特例

因为只有一个条件往往无法唯一锁定讨论对象

有很多情况都能满足，设出最方便解题的特殊情况即可

【2002.10.06】已知 $t^2 - 3t - 18 \leq 0$, 则 $|t + 4| + |t - 6| = (B)$.

A. $2t - 2$

B. 10

C. 3

D. $2t + 2$

取 $t = 0$ 满足 $t^2 - 3t - 18 \leq 0$

代入待求式得 $|t + 4| + |t - 6| = |0 + 4| + |0 - 6| = 10$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 单一条件型题目

【标志词汇】数列中的具体化 \Rightarrow 设数列为特殊数列

【标志词汇】给数列出单一条件 \Rightarrow 常数列特值法

唯一确定一个等差或等比数列需要两个条件

因此若题目只给出关于其的一个条件，无法唯一确定

有很多情况都能满足，设出最方便解题的特殊情况即可

设数列 $\{a_n\}$ 为公差 $d = 0$ 的常数列，则此时每一项均相等，设为 t

设数列 $\{a_n\}$ 为公比 $q = 1$ 的常数列，则此时每一项均相等，设为 t

【2014.01.07】已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_2 - a_5 + a_8 = 9$ ，则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = (D)$ 。

A.27

B.45

C.54

D.81

E.162

每个满足 $a_2 - a_5 + a_8 = 9$ 的等差数列都有相同的 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9$ 值

\Rightarrow 任意找满足条件的具体的数列，它的 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9$ 值就等于所求

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 单一条件型题目

➤ 【标志词汇】给数列出单一条件 \Rightarrow 常数列特值法 常数列，每一项均相等，设为 t

【2011.10.09】若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $5a_7 - a_3 - 12 = 0$ ，则 $\sum_{k=1}^{15} a_k = (D)$ 。

A.15

B.24

C.30

D.45

E.60

$$5a_7 - a_3 - 12 = 5t - t - 12 = 0, t = 3, \sum_{k=1}^{15} a_k = 15t = 45$$

【2011.10.06】若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_2a_8 = 25$ ，且 $a_1 > 0$ ，则 $a_3 + a_5 = (B)$ 。

A.8

B.5

C.2

D.-2

E.-5

$$a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_2a_8 = t^2 + 2t^2 + t^2 = 4t^2 = 25, \text{解得} t = \frac{5}{2}$$

$$a_3 + a_5 = 2t = 5$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 单一条件型题目

➤ 【标志词汇】给数列出单一条件⇒常数列特值法

【例题】 $\{a_n\}$ 为等差数列， $d \neq 0$ ，前 n 项和为 S_n ，且 $S_6 = a_6$ ，则 $\frac{a_5}{a_4}$ 的值为 2。

识别特征点 ➤ 上策 特征点：等差数列+单一条件

↓

定向破题

↓

分析求解

↓

总结与拓展

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = a_6$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$$

$$\text{假设数列前5项为 } -2, -1, 0, 1, 2 \quad \frac{a_5}{a_4} = 2$$

➤ 下策

$$S_6 = a_6$$

$$6a_1 + 15d = a_1 + 5d$$

$$5a_1 = -10d, a_1 = -2d$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + 3d} = \frac{-2d + 4d}{-2d + 3d} = 2$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 单一条件型题目

➤ 【标志词汇】不具体的问题⇒具体化，即设出满足条件的具体数值

二次函数需要3个条件才可以完全确定（ a, b, c 三个系数）

因此若条件给出不够三个，就不能唯一确定，可以设特例。

【2021.05】设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 $f(2) = f(0)$ ，则 $\frac{f(3) - f(2)}{f(2) - f(1)} =$ (B)。

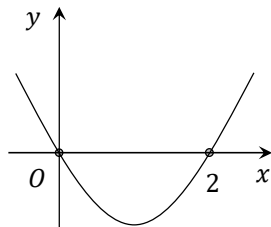
A.2

B.3

C.4

D.5

E.6



$$\text{假设 } f(2) = f(0) = 0$$

$$\text{根据交点式设二次函数为 } y = (x - 2)(x - 0) = x(x - 2)$$

$$\text{故 } f(3) = 3 \times (3 - 2) = 3, f(1) = 1 \times (1 - 2) = -1$$

$$\frac{f(3) - f(2)}{f(2) - f(1)} = \frac{3 - 0}{0 - (-1)} = 3$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 特值法 单一条件型题目

➤ **【标志词汇】** 不具体的问题 \Rightarrow 具体化, 即设出满足条件的具体数值

二次函数需要3个条件才可以完全确定 (a, b, c 三个系数)
因此若条件给出不够三个, 就不能唯一确定, 可以设特例.

【2016.12】 设抛物线 $y = x^2 + 2ax + b$ 与 x 轴相交于 A, B 两点, C 点坐标为 $(0, 2)$, 若 $\triangle ABC$ 的面积等于6, 则 (A) .

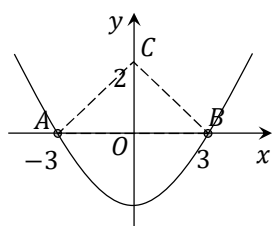
A. $a^2 - b = 9$

B. $a^2 + b = 9$

C. $a^2 - b = 36$

D. $a^2 + b = 36$

E. $a^2 - 4b = 9$



$$y = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$$

$$y = x^2 + 2ax + b$$

$$\text{满足条件的一组特值为 } \begin{cases} a = 0 \\ b = -9 \end{cases}$$

仅A选项满足

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜 特值法 范围型选项**

➤ **【标志词汇】** 范围型选项 \Rightarrow 各范围内选取特值代入验证.

【2013.10.05】 不等式 $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ 的解集是 (E) .

A. $(2, 3)$

B. $(-\infty, 2]$

C. $[3, +\infty)$

D. $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

E. $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

包含开区间与闭区间, 首选区间端点验证

取特值 $x = 2, x = 3$ 得分母无意义, 故 $x \neq 2$ 且 $x \neq 3$, 排除B、C、D

代入 $x = 0$ 满足不等式, 故选E.

【出镜率法则】 DE互为迷惑性分身, 在DE中选

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

求最值套路梳理

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理

➤ 符合乘法公式的 \Rightarrow 凑配完全平方求最值.

【标志词汇】无取值范围限制多元代数式求最值 \Rightarrow 利用凑完全平方求代数最值

①变形为[常数+()²]求最小值

②变形为[常数-()²]求最大值

➤ 可变形为二次函数的 \Rightarrow 利用二次函数求最值.

➤ 限制为正的 \Rightarrow 均值定理求最值.

➤ [可行域]+[目标函数] \Rightarrow 线性规划求最值

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 乘法公式

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac = \frac{1}{2}[(a + b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2]$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2]$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 乘法公式

【例题】若 x, y 是实数，则整式 $5x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 9$ 的最小值为（ C ）。

A.3

B.4

C.5

D.6

E.7

【标志词汇】利用完全平方公式求代数最值 \Rightarrow ①变形为[常数+()²]求最小值

$$5x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 9 = 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 + 5$$

$$= (2x - y)^2 + (x - 2)^2 + 5 \geq 5$$

故待求式最小值为5.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理

➤ 符合乘法公式的 \Rightarrow 凑配完全平方求最值.

【标志词汇】 无取值范围限制多元代数式求最值 \Rightarrow 利用凑完全平方求代数最值

①变形为[常数+()²]求最小值

②变形为[常数-()²]求最大值

➤ 可变形为二次函数的 \Rightarrow 利用二次函数求最值.

一元代数式

结合抛物线形状可求任何范围内的最值

➤ 限制为正的 \Rightarrow 均值定理求最值.

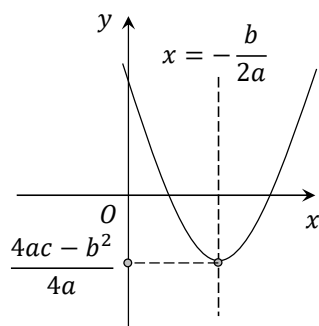
➤ [可行域]+[目标函数] \Rightarrow 线性规划求最值

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 二次函数

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像为一条抛物线



当 $a > 0$ 时抛物线开口向上 (有最小值)

当 $a < 0$ 时抛物线开口向下 (有最大值)

当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 二次函数可取到最值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 二次函数

【2012.10.02】设实数 x, y 满足 $x + 2y = 3$, 则 $x^2 + y^2 + 2y$ 的最小值为 (A) .

A.4

B.5

C.6

D. $\sqrt{5} - 1$ E. $\sqrt{5} + 1$

$x + 2y = 3$, 则 $x = 3 - 2y$, 可代入消元:

$$x^2 + y^2 + 2y = (3 - 2y)^2 + y^2 + 2y = 5y^2 - 10y + 9 \text{ 开口向上的抛物线}$$

$$\text{当 } y = -\frac{-10}{2 \times 5} = 1 \text{ 时, } 5y^2 - 10y + 9 \text{ 取最小值 } = 5 - 10 + 9 = 4$$

注: 同型题目有【2016.23】【2007.10.06】

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 二次函数

【例题】已知二次函数 $y = 2(x + 1)^2 + 1$, 其中 $-2 \leq x \leq 1$, 则此函数的最大值和最小值分别是 (D) .

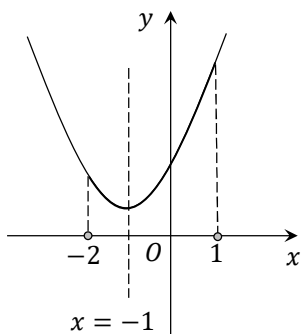
A.9, -1

B.3, -1

C.9, 3

D.9, 1

E.1, -9



$y = 2(x + 1)^2 + 1$ 开口向上的抛物线

对称轴 $x = -1$ 在 $-2 \leq x \leq 1$ 范围内

当 $x = -1$ 时函数取最小值 $2(-1 + 1)^2 + 1 = 1$

开口向上, 越远离对称轴, 函数值越大

当 $x = 1$ 时函数取最大值 $2(1 + 1)^2 + 1 = 9$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理

➤ 符合乘法公式的 \Rightarrow 凑配完全平方求最值.

【标志词汇】 无取值范围限制多元代数式求最值 \Rightarrow 利用凑完全平方求代数最值

①变形为[常数+()²]求最小值

②变形为[常数-()²]求最大值

➤ 可变形为二次函数的 \Rightarrow 利用二次函数求最值.

一元代数式

结合抛物线形状可求任何范围内的最值

➤ 限制为正的 \Rightarrow 均值定理求最值.

➤ [可行域]+[目标函数] \Rightarrow 线性规划求最值

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 均值定理

【例题】 已知 $a > 0, b > 0, a + 2b = 3$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 (C).

A.2

B.3

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

E.6

【标志词汇】 [限制为正]+[求最值] \Rightarrow 均值定理 已知 $ax + by = C$, 求 $\frac{m}{x} + \frac{n}{y}$ 的最值.

已知 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = C$, 求 $mx + ny$ 的最小值.

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3} \times 3 \times \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{3} \times [a + 2b] \times \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{4b}{a} + \frac{a}{b} + 2 \right) \geq \frac{1}{3} \left(4 + 2\sqrt{\frac{4b}{a} \cdot \frac{a}{b}} \right) = \frac{8}{3}$$

当且仅当 $\frac{4b}{a} = \frac{a}{b}$, 即 $a = 2b, a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{4}$ 时取到“=” (最小值)

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理

➤ 符合乘法公式的 \Rightarrow 凑配完全平方求最值.

【标志词汇】 无取值范围限制多元代数式求最值 \Rightarrow 利用凑完全平方求代数最值

①变形为[常数+()²]求最小值

②变形为[常数-()²]求最大值

➤ 可变形为二次函数的 \Rightarrow 利用二次函数求最值.

一元代数式

结合抛物线形状可求任何范围内的最值

➤ 限制为正的 \Rightarrow 均值定理求最值.

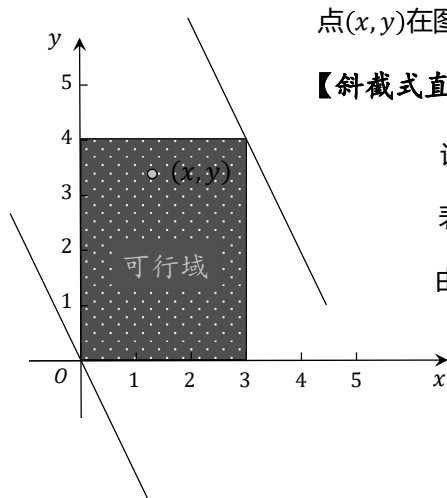
➤ [可行域]+[目标函数] \Rightarrow 线性规划求最值 截距型、斜率型、距离型、乘积型

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 线性规划

【标志词汇】 求 $mx + ny$ 最值 \Rightarrow 截距型线性规划



点 (x, y) 在图示阴影范围内, 求 $2x + y$ 的最值. 目标函数

【斜截式直线方程】 在 y 轴截距为 b , 斜率为 k 的直线方程为 $y = kx + b$

设 $2x + y = b$, $y = -2x + b$

表示经过可行域斜率为 -2 , 截距为 b 的直线

由图可知, 直线经过 $(0,0)$ 点时, 截距最小

对应 $2x + y$ 的最小值 $b = 2 \times 0 + 0 = 0$

直线经过 $(3,4)$ 点时, 截距最大

对应 $2x + y$ 的最大值 $b = 2 \times 3 + 4 = 10$

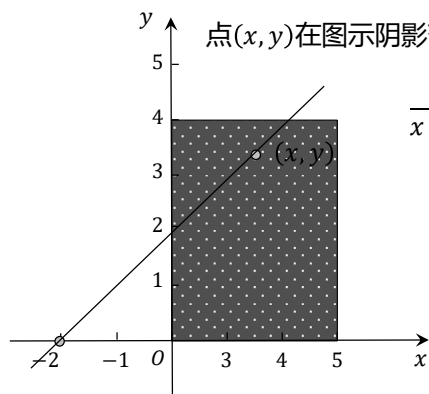
扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 线性规划

【标志词汇】求 $\frac{y-n}{x-m}$ 最值 \Rightarrow 斜率型线性规划. 表示可行域内点 (x, y) 与定点 (m, n) 连线的斜率

【两点斜率公式】过两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 的直线斜率为 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$.



点 (x, y) 在图示阴影范围内, 求 $\frac{y}{x+2}$ 的最值.

$\frac{y}{x+2} = \frac{y-0}{x-(-2)}$, 表示可行域内一点 (x, y) 与点 $(-2, 0)$ 连线的斜率

$\frac{y}{x+2}$ 的最值对应此斜率的最值

当连线水平时斜率最小, 即 $\frac{y}{x+2}$ 的最小值为 0

当连线经过点 $(0, 4)$ 时斜率最大

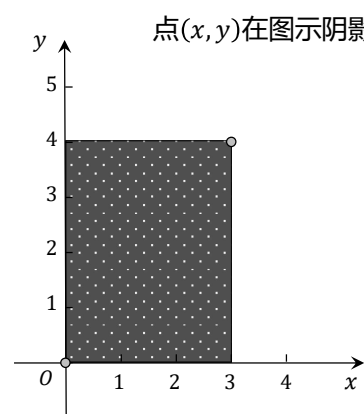
即 $\frac{y}{x+2}$ 的最大值为 $\frac{4-0}{0+2} = 2$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 线性规划

【标志词汇】求 $(x-m)^2 + (y-n)^2$ 最值 \Rightarrow 距离型线性规划.



点 (x, y) 在图示阴影范围内, 求 $x^2 + y^2$ 的最值.

【两点间距离公式】 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$x^2 + y^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$$

表示可行域内任一点 (x, y) 到原点 $(0, 0)$ 的距离的平方

距离最近和最远的点, 即对应 $(x - m)^2 + (y - n)^2$ 的最值.

$x^2 + y^2$ 最小值为 0

可行域内到原点 $(0, 0)$ 距离最远点为点 $(3, 4)$

$x^2 + y^2$ 最大值为 $3^2 + 4^2 = 25$

扫码领取
PPT讲义

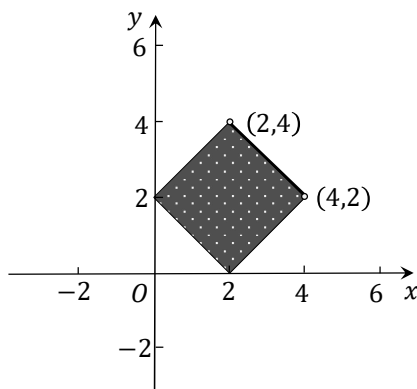
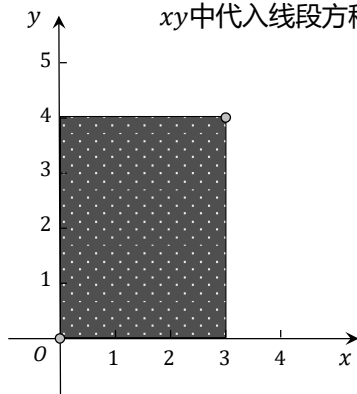


2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 线性规划

【标志词汇】求 xy 最值 \Rightarrow 乘积型线性规划.

找出在可行域内可取到最值的边界, 将最值点固定到一条边界线段上

xy 中代入线段方程将目标函数转化为二次函数, 进而求最值



扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理 线性规划

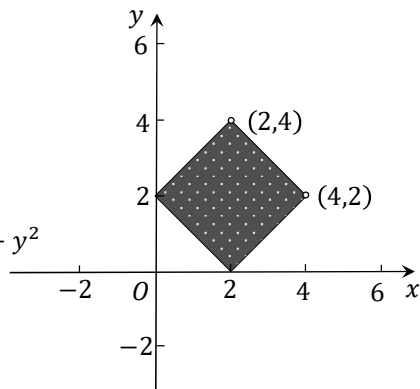
【标志词汇】两变量的不等关系 \Rightarrow 数形结合

【标志词汇】求 $mx + ny$ 最值 \Rightarrow 截距型线性规划. $2x + y$

【标志词汇】求 $\frac{y-n}{x-m}$ 最值 \Rightarrow 斜率型线性规划. $\frac{y}{x+2}$

【标志词汇】求 $(x-m)^2 + (y-n)^2$ 最值 \Rightarrow 距离型线性规划. $x^2 + y^2$

【标志词汇】求 xy 最值 \Rightarrow 乘积型线性规划. xy



【注】一般情况下, 线性规划最值点常在可行域边界处取得,

但具体是边界交点还是边界线需要数形结合具体分析.

考场亦可将可行域边界点和边界线代入目标函数对比取值大小.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 求代数式最值方法梳理

➤ 符合乘法公式的 \Rightarrow 凑配完全平方求最值.

【标志词汇】 无取值范围限制多元代数式求最值 \Rightarrow 利用凑完全平方求代数最值

①变形为[常数+()²]求最小值

②变形为[常数-()²]求最大值

➤ 可变形为二次函数的 \Rightarrow 利用二次函数求最值.

一元代数式

结合抛物线形状可求任何范围内的最值

➤ 限制为正的 \Rightarrow 均值定理求最值.

➤ [可行域]+[目标函数] \Rightarrow 线性规划求最值 截距型、斜率型、距离型、乘积型

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

算术

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：完全平方数

➤ 特殊数字①完全平方数

$$\begin{array}{ccccc}
 1^2 = 1 & 2^2 = 4 & 3^2 = 9 & 4^2 = 16 & 5^2 = 25 \\
 6^2 = 36 & 7^2 = 49 & 8^2 = 64 & 9^2 = 81 & 10^2 = 100 \\
 11^2 = 121 & 12^2 = 144 & 13^2 = 169 & 14^2 = 196 & 15^2 = 225 \\
 16^2 = 256 & 17^2 = 289 & 18^2 = 324 & 19^2 = 361 & 20^2 = 400
 \end{array}$$

➤ 特殊数字②立方数

$$1^3 = 1 \quad 2^3 = 8 \quad 3^3 = 27 \quad 4^3 = 64 \quad 5^3 = 125$$

➤ 特殊数字③质数 常用的30以内的十个质数：2,3,5,7,11,13,17,19,23,29

➤ 特殊数字④2的1~10次幂

$$\begin{array}{ccccc}
 2^1 = 2 & 2^2 = 4 & 2^3 = 8 & 2^4 = 16 & 2^5 = 32 \\
 2^6 = 64 & 2^7 = 128 & 2^8 = 256 & 2^9 = 512 & 2^{10} = 1024
 \end{array}$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：完全平方数

【例题】一个整数 x ，加4之后是一个完全平方数，减7之后也是一个完全平方数，则 x 各数位上的数字之和为（ C ）. 32各数位数字之和 = $3 + 2 = 5$

A.3 B.4 C.5 D.6 E.7

【标志词汇】完全平方数 \Rightarrow ①穷举法；②因数分解后讨论.

0, 1, 4, 9, 16, **25, 36**, 49, 64, 81, 100, 121...

相差11, 尾数差1锁定5、6, 后续差值越来越大 $x + 4 = 36 \quad x = 32$

x 加4之后是一个完全平方数 $\begin{cases} x + 4 = m^2 (m \in \mathbb{N}) \\ x - 7 = n^2 (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$ 上式 - 下式得 $m^2 - n^2 = 11$
 x 减7之后是一个完全平方数

$$(m+n)(m-n) = 11 = 11 \times 1 \quad \begin{cases} m+n = 11 \\ m-n = 1 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m = 6 \\ n = 5 \end{cases} \quad x = m^2 - 4 = 32$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：整除

- 能被 2 整除的数：个位数字为 0, 2, 4, 6, 8
- 能被 3 整除的数：各位数字之和能被 3 整除
- 能被 4 整除的数：末两位（个位和十位）数字必能被 4 整除
- 能被 5 整除的数：个位数字为 0 或 5
- 能被 6 整除的数：同时满足能被 2 和 3 整除的条件
- 能被 8 整除的数：末三位能被 8 整除
- 能被 9 整除的数：各位数字之和能被 9 整除
- 能被 10 整除的数：个位数字为 0

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：整除

任意两个连续正整数，一定有一个是2的倍数.

任意三个连续正整数，一定有一个是3的倍数. 至少有一个是2的倍数

任意四个连续正整数，一定有一个是4的倍数. 至少有一个是2的倍数 至少有一个是3的倍数

【结论1】 任意连续的 n 个正整数中，有且仅有一个数能被 n 整除.

【结论2】 任意 n 个连续正整数之积一定能被 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 整除.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：整除

【例题】 a 一定有一个约数为8. (B)

(1) m 是一个大于2的正整数, 且 $a = m^3 - m$.

(2) m 是一个奇数, 且 $a = m^2 - 1$.

【标志词汇】代数式必有因数 \Rightarrow 因式分解后, 根据因式个数/奇偶性判断

条件 (1) : $a = m^3 - m = m(m^2 - 1) = (m - 1)m(m + 1)$

任意三个连续正整数, 一定有一个是3的倍数, 至少一个是2的倍数.

则 a 一定含约数 $2 \times 3 = 6$, 不一定含约数8, 不充分

条件 (2) : $a = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$ 设 $m = 2k + 1$

$= 2k(2k + 2) = 4k(k + 1)$ 两个连续整数, 必定一奇一偶

乘积为偶, 必含因数2

则 $a = 4k(k + 1)$ 含约数8, 充分

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：奇数与偶数

【偶数】能被2整除的数, 常表示为 $2k$

【奇数】不能被2整除的数, 常表示为 $2k + 1$

奇数 \pm 奇数=偶数 偶数 \pm 偶数=偶数 偶数 \pm 奇数=奇数 两数和为奇数, 必为一奇一偶

1 ± 1

2 ± 2

2 ± 1

偶数个奇数之和为偶数

偶数 \times 任意整数=偶数

奇数 \times 奇数=奇数

奇数个奇数之和为奇数

$2 \times n$

$1 \times 1 = 1$

两个相邻整数必为一奇一偶. $a + b$ 与 $a - b$ 同奇同偶 ($a, b \in \mathbf{Z}$)

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：质数与合数

【标志词汇】质数

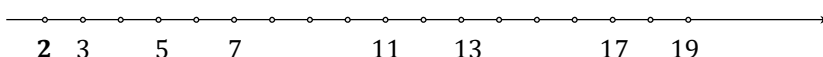
- ①[质数] + [确定范围] \Rightarrow 穷举法;
- ②包含质数的等式 \Rightarrow 结合奇偶性及其四则运算判断;
- ③[一个数] = [某些数的乘积] \Rightarrow 将此数因数分解.
- ④一个代数式为质数 \Rightarrow 因式分解为两项乘积, 一项为1, 另一项与原式相等
具体谁为1需分情况讨论

- 常用的30以内质数: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
- 质数与奇偶性: 最小的质数是2, 也是唯一的偶数质数 (其余质数都是奇数);

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：质数与合数



- 最小的质数是2, 也是所有质数中唯一的偶数.
- 除了2以外的所有质数都是奇数.

若两个质数之积为偶数

若两个质数之差为奇数 \Rightarrow 其中一个质数一定是2

若两个质数之和为奇数

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：质数与合数

100以内质数表（共25个）

20以内	2	3	5	7	11	13	17	19
20-29	23	29						
30-39	31	37						
40-49	41	43	47					
50-59	53	59						
60-69	61	67						
70-79	71	73	79					
80-89	83	89						
90-99	97							

扫码领取
PPT讲义

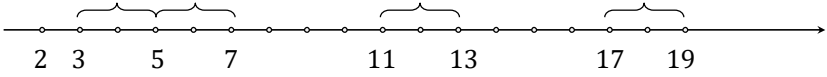


2025三天三夜 算术：质数与合数

【2015.03】设 m, n 是小于20的质数，满足条件 $|m - n| = 2$ 的 $\{m, n\}$ 共有（ C ）。

- A. 2组 B. 3组 C. 4组 D. 5组 E. 6组

【标志词汇】明确范围的质数 \Rightarrow 穷举法



$|5 - 3| = 2$, $|7 - 5| = 2$, $|13 - 11| = 2$, $|19 - 17| = 2$, 共四组。

【说明】 $\{m, n\}$ 表示这两个质数所构成的集合，集合具有无序性，
即 $\{5, 3\}$ 和 $\{3, 5\}$ 表示同一个集合，因此符合要求的集合共有4组，而非8组。

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 算术：质数与合数

注：2是所有质数中唯一的偶数

【例题】已知 P_1, P_2, P_3 为质数，且满足 $P_1 + P_2 + P_3 + P_1 P_2 P_3 = 99$ ，则 $P_1 + P_2 + P_3 = (D)$ 。

A.19

B.20

C.22

D.23

E.27

【标志词汇】包含质数的等式 \Rightarrow 结合奇偶性及其四则运算判断【标志词汇】[多个未知量] + [一个等式] \Rightarrow 奇偶性、因数倍数特性

P_1, P_2, P_3 奇偶性	P_1	P_2	P_3	$P_1 P_2 P_3$	和 (99)	
3奇0偶	奇	奇	奇	奇	偶	舍去
2奇1偶	偶	奇	奇	偶	偶	舍去
1奇2偶	偶	偶	奇	偶	奇	满足
0奇3偶	偶	偶	偶	偶	偶	舍去

故 $P_1 = P_2 = 2$ ，则 $4 + P_3 + 4P_3 = 99$ 解得 $P_3 = 19$ $P_1 + P_2 + P_3 = 2 + 2 + 19 = 23$ 。扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 算术：质数与合数

【例题】若 x 为正整数，且 $15x^2 - 82x - 17$ 为一个质数，则此质数为 (D)。

A.19

B.23

C.29

D.31

E.37

【标志词汇】一个代数式为质数 \Rightarrow 因式分解为两项乘积，一项为1，另一项与原式相等

具体谁为1需分情况讨论

$$15x^2 - 82x - 17 = (5x + 1)(3x - 17) \quad \begin{matrix} 5 & \times & 1 \\ 3 & & -17 \end{matrix} \quad 5 \times (-17) + 3 = -85 + 3 = -82$$

 $(5x + 1)$ 和 $(3x - 17)$ 一个值为1，另一个值等于此质数 $15x^2 - 82x - 17$ 的值 x 为正整数， $5x + 1 \neq 1$ 所以 $3x - 17 = 1$ ，可得 $x = 6$ 此质数值为 $5x + 1 = 31$ 。扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 算术：质数与合数

【例题】已知 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是满足条件 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 8$ 的五个不同的整数，如果 b 是关于 x 的一元五次方程 $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5) = 63$ 的整数根，则 b 的值为（ A ）。

A.3

B.4

C.5

D.6

E.7

【标志词汇】给定一个数是方程的一个根 \Rightarrow 给定一个此数满足的等式.

$$(b - a_1)(b - a_2)(b - a_3)(b - a_4)(b - a_5) = 63$$

【标志词汇】[一个数]=[某些数的乘积] \Rightarrow 将此数因数分解.

$$63 = 7 \times 3 \times 3$$

$$= 7 \times 3 \times (-3) \times (-1)$$

$$= 7 \times 3 \times 1 \times (-3) \times (-1)$$

$$\begin{cases} b - a_1 = 7 \\ b - a_2 = 3 \\ b - a_3 = 1 \\ b - a_4 = -3 \\ b - a_5 = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{【标志词汇】多个结构相似的等式} \Rightarrow \text{累加} \\ 5b - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 7 \\ 5b - 8 = 7, \quad b = 3 \end{array}$$

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜****去掉绝对值**

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 去掉绝对值

$$\text{任意实数 } a \text{ 的绝对值, } |a| = \begin{cases} a > 0 & |a| = a \\ a = 0 & |a| = 0 \\ a < 0 & |a| = -a \end{cases}$$

分情况讨论：先判断符号，再求绝对值。

- $|a| \geq a$ ，即一个数的绝对值大于等于它本身。
- $\sqrt{a^2} = |a|$ $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = |2|$ $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$
- $|a|^2 = |a^2| = a^2$ $|2|^2 = |2^2| = 2^2 = 4$ $|-2|^2 = |(-2)^2| = (-2)^2 = 4$
- $|a| = |-a|$ (对称性) 即互为相反数的两个数的绝对值相等。

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 去掉绝对值

【标志词汇】遇到绝对值 \Rightarrow 去掉绝对值

$$\text{任意实数 } a \text{ 的绝对值, } |a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

- 若 a 为正数，则满足 $|x| = a$ 的 x 的值有两个，即 $\pm a$ 。例如 $|x| = 3$ ，则 $x = \pm 3$
- 自比性：对于非0实数 a ， $\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & (a > 0) \\ -1 & (a < 0) \end{cases}$
- 非负性：一个数 a 的绝对值永远是非负数，即 $|a| \geq 0$ 恒成立。

【标志词汇】[多个未知量] + [一个等式]

- 带 $\sqrt{\quad}$ 、 $|\quad|$ 、 $(\quad)^2$ 的等式 \Rightarrow 利用非负性求解 $|x-1| + \sqrt{y+2} + (z-3)^2 = 0$
- 限制未知量为整数、正整数的等式 \Rightarrow 利用奇偶性/整除特性求解

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 去掉绝对值

【2011.01.02】若实数 a, b, c 满足 $|a-3| + \sqrt{3b+5} + (5c-4)^2 = 0$, 则 $abc = (A)$.

- A. -4 B. $-\frac{5}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{5}$ E. 4

【标志词汇】遇到绝对值 \Rightarrow 去掉绝对值

【标志词汇】[多个未知量] + [一个等式]

➤ 带 $\sqrt{\quad}$ 、 $|\quad|$ 、 $(\quad)^2$ 的等式 \Rightarrow 非负性

$$\underbrace{|a-3|}_{0} + \underbrace{\sqrt{3b+5}}_{0} + \underbrace{(5c-4)^2}_{0} = 0$$

$$a = 3, \quad b = -\frac{5}{3}, \quad c = \frac{4}{5} \quad abc = 3 \times \left(-\frac{5}{3}\right) \times \frac{4}{5} = -4$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 去掉绝对值

【例题】带绝对值的方程 $|1 - |x - 215|| = 1$ 有多少个不同的解? 3个

【标志词汇】遇到绝对值 \Rightarrow 去掉绝对值

根据绝对值定义: 若 $|x| = a (a > 0)$, 则 $x = \pm a$. 若不确定 a 的正负, 则不能这样去绝对值.

由 $|1 - |x - 215|| = 1$ 得: $1 - |x - 215| = \pm 1$

情况一: $1 - |x - 215| = 1 \xrightarrow{\text{移项}} |x - 215| = 0$ 解得 $x = 215$

情况二: $1 - |x - 215| = -1 \xrightarrow{\text{移项}} |x - 215| = 2$

$\xrightarrow[\text{绝对值}]{\text{去掉}} x - 215 = \pm 2$ 解得 $x = 217$ 或 213

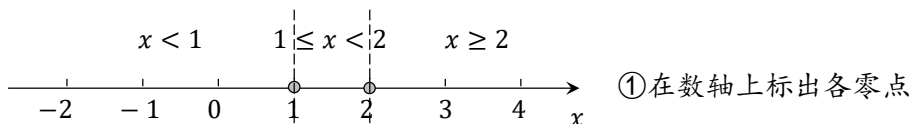
扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 去掉绝对值

【零点分段法】内核就是根据绝对值定义去掉绝对值 零点：使绝对值内代数式为零的 x 值

【举例】用零点分段法去掉绝对值 $|x-1|+|x-2|$.



②两个零点将数轴划分为三个区域，在各个区域内分别判断正负，用定义去掉绝对值

当 $x < 1$ 时， $|x-1|+|x-2| = -x+1-x+2 = 3-2x$

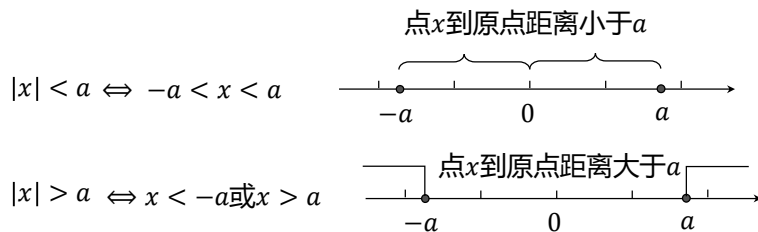
当 $1 \leq x < 2$ 时， $|x-1|+|x-2| = x-1-x+2 = 1$

当 $x \geq 2$ 时， $|x-1|+|x-2| = x-1+x-2 = 2x-3$

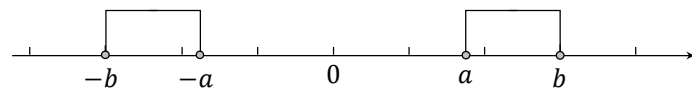
扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 去掉绝对值



$0 < a \leq |x| \leq b \Leftrightarrow 0 < a \leq x \leq b$ 或 $-b \leq x \leq -a < 0$



特别地，若有 $|a| > |b|$ ，则可以两边平方去掉绝对值，得到 $a^2 > b^2$.

注： a 、 b 为正数

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

代数式

乘法公式、倒数形态乘法公式

扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 乘法公式

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac = \frac{1}{2}[(a + b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2]$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2]$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 乘法公式 完全平方公式

★ 完全平方公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

➤ 知二推二模型

【标志词汇】给定 $a^2 + b^2$, ab , $a + b$ 和 $a - b$ 中任意两个 \Rightarrow 利用完全平方公式推出其余

➤ 代数式求最值

【标志词汇】利用完全平方公式求代数最值 \Rightarrow ①变形为[常数+ $(\quad)^2$]求最小值
②变形为[常数- $(\quad)^2$]求最大值

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 倒数形态乘法公式 完全平方

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

★ 完全平方公式 a, b 互为倒数时:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 2 \quad \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2 \quad \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2$$

建立 $a + \frac{1}{a}$ 与 $a - \frac{1}{a}$ 之间的关系

$$\left|a + \frac{1}{a}\right| \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{平方后减4, 再开方}} \\ \xleftarrow{\text{平方后加4, 再开方}} \end{array} \left|a - \frac{1}{a}\right|$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 倒数形态乘法公式 立方和/差

立方和与立方差公式

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$

a, b 互为倒数时:

$$a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left[a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1\right] = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right]$$

要求 $a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3$ 的值, 只需知道 $a + \frac{1}{a}$ 的值

$$a^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left[a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1\right] = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left[\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 3\right]$$

要求 $a^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^3$ 的值, 只需知道 $a - \frac{1}{a}$ 的值

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 倒数形态乘法公式

【例题】若 $3^x + 3^{-x} = 4$, 则 $27^x + 27^{-x} = (C)$. $a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right]$

A.64

B.60

C.52

D.48

E.36

【标志词汇】倒数和/倒数差 \Rightarrow 完全平方公式/立方和立方差公式

负指数幂 = 取倒数: $a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0)$ $3^x + \frac{1}{3^x} = 4$ $\frac{n}{am}$ $\begin{cases} \rightarrow \text{分子代表乘方} \\ \rightarrow \text{分母代表开方} \end{cases}$

$$27^x + 27^{-x} = 27^x + \frac{1}{27^x} = (3^x)^3 + \frac{1}{(3^x)^3}$$

$$= \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) \left[\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 - 3\right]$$

$$= 4 \times (4^2 - 3) = 52$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 倒数形态乘法公式 结合整式

【标志词汇】[倒数形态] + [整式方程] \Rightarrow 整式方程两边同除 x 构造出 $x \pm \frac{1}{x}$.

【标志词汇】互为倒数的算式之和/差 \Rightarrow 完全平方公式/立方和立方差公式

$$a \pm \frac{1}{a}, x^2 \pm \frac{1}{x^2}, \frac{a}{b} \pm \frac{b}{a}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

【举例】已知 $x^2 - ax + 1 = 0$, 求下列算式的值. 两边同除 x 化为 $x + \frac{1}{x} = a$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = a^2 - 2$$

$$x + \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{平方后减2}]{\text{平方后加2}} x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = (a^2 - 2)^2 - 2$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 倒数形态乘法公式 完全平方

【例题】若 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 那么 $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 等于 (C) .

A.36

B.45

C.47

D.49

E.52

【标志词汇】[倒数形态] + [整式方程] \Rightarrow 整式方程两边同除 x 构造出 $x \pm \frac{1}{x}$.

原方程两边同除以 x 得: $x - 3 + \frac{1}{x} = 0$, $x + \frac{1}{x} = 3$

【标志词汇】互为倒数的算式之和/差 \Rightarrow 完全平方公式/立方和立方差公式

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = (3^2 - 2)^2 - 2 = 47$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 倒数形态乘法公式 结合分式

【标志词汇】[倒数形态] + [整式形态] \Rightarrow 整式形态各项同除 x 构造出 $x \pm \frac{1}{x}$.

【套路1】对于整式方程 $x^2 - ax + 1 = 0$, 两边同除 x 可得 $x + \frac{1}{x} = a$.

【套路2】对于分式 $\frac{x}{x^2 - ax + 1}$ (其中 $x \neq 0$), 分子分母同除 x 可得 $\frac{1}{x + \frac{1}{x} - a}$.

若 $x + \frac{1}{x} = 3$, 求 $\frac{x}{x^2 - x + 1}$ 的值.

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} \text{ 分子分母同除 } x \text{ 得 } \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x - 1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 倒数形态乘法公式 结合分式

【例题】若 $x + \frac{1}{x} = 3$, 则 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = (E)$.

A. $-\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{8}$

【标志词汇】[倒数形态] + [分式] \Rightarrow 分子分母同除 x 构造出 $x \pm \frac{1}{x}$.

$$\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} \text{ 分子分母同除 } x^2 \text{ 得 } \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{7 + 1} = \frac{1}{8}$$

【标志词汇】互为倒数的算式之和/差 \Rightarrow 完全平方公式/立方和立方差公式

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

方程

一元二次方程的根

扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 方程、函数与不等式 一元二次方程的根

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

【标志词汇】 一元二次方程有实根/有两个相等的实根/有两个不相等的实根/无实根

$$\Delta \geq 0$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta > 0$$

$$\Delta < 0$$

根的判别式是判定方程是否有实根的充要条件

根与系数关系 (韦达定理) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

韦达定理说明了根与系数的关系.

事实上, 无论方程有无实数根, 实系数一元二次方程的根与系数之间关系均适合韦达定理.

扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 方程、函数与不等式 一元二次方程的根

【例题】若 x_1, x_2 是方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根, 则 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19 = (B)$.

A.6

B.0

C.2

D.1

E.4

【标志词汇】 x_1, x_2 是二次方程的两个实根 \Rightarrow 韦达定理

$$x_1 + x_2 = -1; x_1 x_2 = -3$$

【标志词汇】给定方程的一个根 \Rightarrow 将此根代入方程得到一个等式.

$$x_1^2 + x_1 - 3 = 0; x_2^2 + x_2 - 3 = 0 \quad x_1^2 = 3 - x_1; x_2^2 = 3 - x_2$$

【标志词汇】[高次方程]+[高低次之间关系式] \Rightarrow 替换降次法.

$$\begin{aligned} x_1 \times x_1^2 - 4x_2^2 + 19 &= x_1(3 - x_1) - 4(3 - x_2) + 19 \\ &= 3x_1 - x_1^2 - 12 + 4x_2 + 19 = 3x_1 - (3 - x_1) + 4x_2 + 7 \\ &= 4(x_1 + x_2) + 4 = -4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 方程、函数与不等式 一元二次方程的根

【例题】设 x_1, x_2 为一元二次方程 $ax^2 - 129x + c = 0$ 的两根, 且 a, x_1, x_2 均为质数, 则 $x_1^2 + x_2^2 = (A)$

A.1685

B.1537

C.1325

D.1037

E.925

【标志词汇】一元二次方程[两根]+[系数] \Rightarrow 韦达定理.

$$x_1 + x_2 = \frac{129}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

【标志词汇】[多个未知量]+[一个等式] 讨论范围限制为整数、正整数等
 \Rightarrow 奇偶性、因数倍数特性

$$(x_1 + x_2) \times a = 129 = 3 \times 43$$

奇 奇 \triangleright 若两个质数之差(和)为奇数, 其中一个一定是2

$$a = 3, x_1 + x_2 = 43 \quad \text{即 } x_1 = 2, x_2 = 41$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + 41^2 = 4 + 1681 = 1685$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 方程、函数与不等式 一元二次方程的根

【例题】已知 a, b 为有理数，并且 $\sqrt{5} - 2$ 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一根，则 $a^b = (E)$ 。

A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. 4 D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{4}$

【标志词汇】给定二次方程一个无理根 \Rightarrow 利用无理根成对出现求解

一个根为 $-2 + \sqrt{5}$ ，则另一个根一定为 $-2 - \sqrt{5}$

【标志词汇】一元二次方程①已知系数求两根；②已知两根求系数 \Rightarrow 韦达定理。

研究根与系数关系的题目

$$\begin{cases} -2 + \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -4 = -a \\ (-2 + \sqrt{5})(-2 - \sqrt{5}) = 4 - 5 = -1 = b \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases} \quad a^b = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜****数列****等差/等比数列的判定**

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：等差数列的判定

①**定义法** 任意相邻两项之差 $a_{n+1} - a_n$ 是否为常数，若为常数，则 $\{a_n\}$ 为等差数列

【例题】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \times 2^n$ ，是否可充分推出 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 为等差数列？ 是

$$\text{等式两边同除以 } 2^{n+1} \text{ 得 } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{3 \times 2^n}{2^{n+1}} \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{3}{2} \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{2}$$

②**等差中项法** $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

【例题】已知数列 $\{a_n\}$ 中任意一项均非零，且方程 $a_n x^2 + 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0$ 有一根为 -1 ，是否可充分推出 $\{a_n\}$ 为等差数列？ 是

【标志词汇】给定一个数是方程的一个根 \Rightarrow 给定一个此数满足的等式。

$$\text{代入得 } a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = 0 \quad \text{即 } 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：等差数列的判定

①**定义法** 任意相邻两项之差 $a_{n+1} - a_n$ 是否为常数，若为常数，则 $\{a_n\}$ 为等差数列

②**等差中项法** $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

③**通项公式法** $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$ 形似关于 n 的一次函数或一个常数

数列通项符合以下三种形式，即为等差数列；若不符合，则非等差数列。

形式①: $a_n = \text{数字}_1 \cdot n + \text{数字}_2$

形式②: $a_n = \text{数字} \cdot n$

形式③: $a_n = \text{数字}$

【举例】判断下列通项对应的数列是否为等差数列

$$a_n = 3n + 2$$

是

$$a_n = -n$$

是

$$a_n = 5$$

是

$$a_n = n^2 + 1$$

否

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：等差数列的判定

④前n项和法 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1-d}{2}n = An^2 + Bn$

形似关于n的不含常数项的一次或二次函数

当 $A = B = 0$ 时 即 $a_1 = d = 0, S_n = 0$ 数列为 $a_n = 0$ 的常数列

当 $A = 0, B \neq 0$ 时 即 $d = 0, a_1 \neq 0, S_n = na_1$ 为非零常数列, 如1, 1, 1, 1, 1, 1...

当 $A \neq 0, B = 0$ 时 即 $2a_1 = d \neq 0, S_n = \frac{d}{2}n^2$ 如1, 3, 5, 7, 9, 11... $S_n = n^2$

A与B均可能为0

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：等差数列的判定

④前n项和法 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1-d}{2}n = An^2 + Bn$

形似关于n的不含常数项的一次或二次函数

数列前n项和符合以下四种形式, 即为等差数列; 若不符合, 则非等差数列.

形式①: $S_n = \text{数字}_1 \cdot n^2 + \text{数字}_2 \cdot n$

形式②: $S_n = \text{数字} \cdot n^2$

形式③: $S_n = \text{数字} \cdot n$

形式④: $S_n = 0$

【举例】判断下列通项对应的数列是否为等差数列

$S_n = 4n^2 + n$

是

$S_n = -2n^2$

是

$S_n = 5n$

是

$S_n = 0$

是

$S_n = n^2 + 1$

否

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：等差数列的判定

【2019.24】设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则 $\{a_n\}$ 为等差数列. (A)

(1) $S_n = n^2 + 2n, n = 1, 2, 3 \dots$. (2) $S_n = n^2 + 2n + 1, n = 1, 2, 3 \dots$.

【类型判断】不可能联合，A/B/D型

等差数列前 n 项和形似关于 n 的不含常数项的一次或二次函数

数列前 n 项和符合以下四种形式，即为等差数列；若不符合，则非等差数列.

形式①: $S_n = \text{数字}_1 \cdot n^2 + \text{数字}_2 \cdot n$

形式②: $S_n = \text{数字} \cdot n^2$

形式③: $S_n = \text{数字} \cdot n$

形式④: $S_n = 0$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：等差数列的判定

判定方法	详细描述
定义法	任意相邻两项之差 $a_{n+1} - a_n$ 为常数
等差中项法	$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$
通项公式法	$a_n = dn + m$ (形似关于 n 的一次函数)
前 n 项和法	$S_n = An^2 + Bn$ (形似关于 n 的二次函数，其中 A 与 B 均可能为0，但一定不含常数项)

说明：以上 n 为正整数

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：等比数列的判定

①**定义法** 验证 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 是否为常数，应注意必须从 $n=1$ 起所有项都满足此等式

②**等比中项法** 验证 $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ 是否成立，应注意这里 $a_n \neq 0$

③**通项公式法** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ($a_1 \neq 0; q \neq 0$)

$a_n = Aq^{an+b}$ 形似关于 n 的指数函数，底数为常数， n 在指数位置。

a, b 可能单独或同时为零， $A \neq 0$

④**前 n 项和法**: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = A - Aq^n \left(A = \frac{a_1}{1-q} \right)$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：等比数列的判定

【例题】 a, b, c, d 为四个实数，则 $a+b, b+c, c+d$ 成等比数列. (C)

(1) a, b, c, d 成等比数列. 无法保证 $a+b, b+c, c+d$ 均不为 0，如：1, -1, 1, -1

(2) $a+b, b+c, c+d$ 均不为 0. 无法得出关于 $a+b, b+c, c+d$ 的关系式

【类型判断】两条件单独信息不完全，C或E.

【标志词汇】等比数列的判定 \Rightarrow ①定义法: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

$a+b, b+c, c+d$ 成等比数列 $\Leftrightarrow \frac{b+c}{a+b} = \frac{c+d}{b+c}$

a, b, c, d 成等比数列 $\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ 由等比定理可得: $\frac{b+c}{a+b} = \frac{c+d}{b+c}$

【等比定理】若几个分式相等，则分子相加与分母相加的比值仍与原比值相等。

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：等比数列的判定

【例题】 a, b, c, d 为四个实数，则 $a+b, b+c, c+d$ 成等比数列. (C)

(1) a, b, c, d 成等比数列. 无法保证 $a+b, b+c, c+d$ 均不为0, 如: $1, -1, 1, -1$

(2) $a+b, b+c, c+d$ 均不为0. 无法得出关于 $a+b, b+c, c+d$ 的关系式

【类型判断】两条件单独信息不完全, C或E.

【标志词汇】等比数列的判定 \Rightarrow ②等比中项法: $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ 且 $a_n \neq 0$

a, b, c, d 成等比数列 $\Leftrightarrow ac = b^2; bd = c^2; ad = bc$

$a+b, b+c, c+d$ 成等比数列 $\Leftrightarrow (b+c)^2 = (a+b)(c+d)$

整理得: $b^2 + 2bc + c^2 = ac + ad + bc + bd$

满足 $(b+c)^2 = (a+b)(c+d)$ 且均不为0, 联合充分

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜****数列****等差/等比数列的片段和**

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：片段和

等差数列片段和定理 如果 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 为等差数列, 那么这个数列连续的 n 项之和也是等差数列, 即 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \dots$ 也是等差数列, 并且这个新等差数列的公差为 n^2d .

(n 代表片段长度) **注意:** 不是 $S_n, S_{2n}, S_{3n} \dots$ 成等差数列

$S_2, S_4 - S_2$, 和 $S_6 - S_4 \dots$ 片段长度为2, 组成了公差为 $2^2d = 4d$ 的新等差数列

$S_3, S_6 - S_3$, 和 $S_9 - S_6 \dots$ 片段长度为3, 组成了公差为 $3^2d = 9d$ 的新等差数列

$S_4, S_8 - S_4$, 和 $S_{12} - S_8 \dots$ 片段长度为4, 组成了公差为 $4^2d = 16d$ 的新等差数列

$S_5, S_{10} - S_5$, 和 $S_{15} - S_{10} \dots$ 片段长度为5, 组成了公差为 $5^2d = 25d$ 的新等差数列

【标志词汇】 出现形如 $S_n, S_{2n}, S_{3n} \Rightarrow$ 片段和定理. 下标成倍数

$S_n, S_{2n} - S_n$ 和 $S_{3n} - S_{2n} \dots$ 构成新等差数列, 新公差为 n^2d

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：片段和

【例题】 若等差数列前5项和 $S_5 = 15$, 前15项和 $S_{15} = 120$, 则前10项和 S_{10} 为 (D) .

A.40

B.45

C.50

D.55

E.60

【标志词汇】 出现形如 $S_n, S_{2n}, S_{3n} \Rightarrow$ 片段和定理. 下标成倍数

$S_n, S_{2n} - S_n$ 和 $S_{3n} - S_{2n} \dots$ 构成新等差数列, 新公差为 n^2d

等差数列 $\{a_n\}$ 连续五项之和构成新等差数列, 片段长度 $n = 5$.

$S_5, S_{10} - S_5, S_{15} - S_{10}$ 构成新等差数列

【标志词汇】 a, b, c 三项成等差数列 $\Leftrightarrow 2b = a + c$

$2(S_{10} - S_5) = S_5 + (S_{15} - S_{10}) \quad 3S_{10} = 3S_5 + S_{15} = 165 \quad \text{解得 } S_{10} = 55$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：片段和

等比数列片段和定理 如果 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 为等比数列, 那么这个数列连续的 n 项之和也是等比数列, 即 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \dots$ 也是等比数列, 并且这个新等比数列的公比为 q^n .

(n 代表片段长度) **注意:** 不是 S_n, S_{2n}, S_{3n} 成等比数列.

$S_2, S_4 - S_2$, 和 $S_6 - S_4 \dots$ 片段长度为2, 组成了公比为 q^2 的新等比数列

$S_3, S_6 - S_3$, 和 $S_9 - S_6 \dots$ 片段长度为3, 组成了公比为 q^3 的新等比数列

$S_4, S_8 - S_4$, 和 $S_{12} - S_8 \dots$ 片段长度为4, 组成了公比为 q^4 的新等比数列

$S_5, S_{10} - S_5$, 和 $S_{15} - S_{10} \dots$ 片段长度为5, 组成了公比为 q^5 的新等比数列

【标志词汇】 出现形如 $S_n, S_{2n}, S_{3n} \Rightarrow$ 片段和定理. 下标成倍数

$S_n, S_{2n} - S_n$ 和 $S_{3n} - S_{2n} \dots$ 构成新等比数列, 新公比为 q^n

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：片段和

【例题】 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_6 = 3S_3$, 则 $S_9 = (C) S_3$.

A.3

B.5

C.7

D.1

E.6

【标志词汇】 出现形如 $S_n, S_{2n}, S_{3n} \Rightarrow$ 片段和定理. 下标成倍数

$S_n, S_{2n} - S_n$ 和 $S_{3n} - S_{2n} \dots$ 构成新等比数列, 新公比为 q^n

$[S_3], [S_6 - S_3], [S_9 - S_6]$ 构成新等比数列. $S_6 - S_3 = 3S_3 - S_3 = 2S_3$

S_3 $2S_3$ $4S_3$
 \swarrow \swarrow
 $\times 2$ $\times 2$ $S_9 - S_6 = S_9 - 3S_3 = 4S_3$ $S_9 = 7S_3$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：片段和

【标志词汇】出现形如 $S_n, S_{2n}, S_{3n} \Rightarrow$ 片段和定理. 下标成倍数

➤ $\{a_n\}$ 为等差数列

$S_n, S_{2n} - S_n$ 和 $S_{3n} - S_{2n} \cdots$ 构成新等差数列, 新公差为 n^2d

➤ $\{a_n\}$ 为等比数列

$S_n, S_{2n} - S_n$ 和 $S_{3n} - S_{2n} \cdots$ 构成新等比数列, 新公比为 q^n

注意: 不是 S_n, S_{2n}, S_{3n} 构成新等差/等比数列.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

数列 一般数列

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：一般数列 已知 S_n 求 a_n

【2003.10.04】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 $S_n = 4n^2 + n - 2$ ，则它的通项 a_n 是 (E) .

A. $8n - 3$ B. $4n + 1$ C. $8n - 2$ D. $8n - 5$ E. $a_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 8n - 3, & n \geq 2 \end{cases}$

【标志词汇】一般数列难题 \Rightarrow 代入验证法.

依次代入 $n = 1, 2, 3 \dots$ 验证选项/寻找规律.

$n = 1$ 时, $S_1 = a_1 = 4 \times 1^2 + 1 - 2 = 3$, 即 $a_1 = 3$, 排除A、B、C

$n = 2$ 时, $S_2 = a_1 + a_2 = 4 \times 2^2 + 2 - 2 = 16$, 即 $a_2 = 16 - 3 = 13$, 排除D

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜 数列：一般数列 已知 S_n 求 a_n**

【2003.10.04】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 $S_n = 4n^2 + n - 2$ ，则它的通项 a_n 是 (E) .

A. $8n - 3$ B. $4n + 1$ C. $8n - 2$ D. $8n - 5$ E. $a_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 8n - 3, & n \geq 2 \end{cases}$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (4n^2 + n - 2) - [4(n-1)^2 + (n-1) - 2]$

$= 8n - 3$ 代入 $n = 1$ 得 $a_1 = 8 - 3 = 5 \neq 3$

两表达式无法合并 $a_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 8n - 3, & n \geq 2 \end{cases}$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：一般数列 a_n 与 a_{n+1} 或 a_{n-1} 的递推

【例题】已知数列满足 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n$, 那么 a_{2024} 的值是 (B) .

A. 2023×2022 B. 2024×2023 C. 2024^2 D. 2025×2024 E. 2025^2

【标志词汇】一般数列难题 \Rightarrow 代入验证法. 依次代入 $n = 1, 2, 3 \dots$ 验证选项/寻找规律.

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1 \quad a_3 = a_2 + 2 \times 2 \quad a_4 = a_3 + 2 \times 3$$

$$a_5 = a_4 + 2 \times 4 = a_3 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = a_2 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4$$

$$= a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = a_1 + 2(1 + 2 + 3 + 4)$$

$$a_n = a_1 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + n - 1)$$

$$a_{2024} = a_1 + 2(1 + 2 + \dots + 2023) = 2 \times \frac{2023(1 + 2023)}{2} = 2023 \times 2024$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 数列：一般数列 a_n 与 a_{n+1} 或 a_{n-1} 的递推

【例题】已知数列满足 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n$, 那么 a_{2024} 的值是 (B) .

A. 2023×2022 B. 2024×2023 C. 2024^2 D. 2025×2024 E. 2025^2

若选项正确, 则一定符合通项, 各选项对应的可能通项为:

由于 $a_1 = 0$, 则正确通项中代入 $n = 1$, 一定可以得到项值0

选项	通项	$n = 1$	$n = 2$
A	$(n - 1)(n - 2)$	$(1 - 1)(1 - 2) = 0$	$(2 - 1)(2 - 2) = 0$
B	$n(n - 1)$	$1 \times (1 - 1) = 0$	$2(2 - 1) = 2$
C	n^2	$1^2 = 1$	
D	$(n + 1)n$	$(1 + 1) \times 1 = 2$	
E	$(n + 1)^2$	$(1 + 1)^2 = 4$	

由于 $a_2 = 2$,
则正确通项中代入 $n = 2$,
一定可以得到项值2

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

代数—省略号

裂项相消、等比数列求和

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 省略号

➤ 省略号在中间 { 分数/分式裂项相消
分母有理化后相消

➤ 省略号在末尾 无穷等比数列求和

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 省略号

两数之差 →

$$\frac{\text{大} - \text{小}}{\text{大} \times \text{小}} = \frac{1}{\text{小}} - \frac{1}{\text{大}} \quad \frac{3}{40} = \frac{8-5}{5 \times 8} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$$

两数之积 →

分母必须为两项之积，
分子可以凑配

$$\frac{1}{7 \times 3} = \frac{1}{7-3} \times \frac{7-3}{7 \times 3} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right)$$

$$\frac{1}{(a+2)a} = \frac{1}{(a+2)-a} \times \frac{(a+2)-a}{(a+2)a} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2} \right)$$

【标志词汇】[多分式求和]+[分母为相似的规律结构乘积] ⇒ 裂项相消.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 省略号

【例题】 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} = (A)$.

A. $\frac{99}{100}$

B. $\frac{97}{100}$

C. $\frac{98}{99}$

D. $\frac{97}{99}$

E. $\frac{93}{100}$

【标志词汇】分母为乘积形式的多分数和化简求值 ⇒ 裂项相消. $\frac{\text{大} - \text{小}}{\text{小} \times \text{大}} = \frac{1}{\text{小}} - \frac{1}{\text{大}}$

$$\text{原式} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

【例题】 $\frac{2}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \cdots + \frac{2}{99 \times 100} = \left(\frac{99}{50} \right)$.

$$\text{原式} = 2 \times \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} \right) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{100} \right) = \frac{99}{50}$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 省略号

【标志词汇】分数的分母中带有根号，要求化简/求值 \Rightarrow 分母有理化.

分数分子分母上下同乘分母的有理化因式

原式	有理化因式	乘积	举例
单项式 \sqrt{a}	\sqrt{a}	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$	$(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$
$a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$	$a\sqrt{x} - b\sqrt{y}$	$a^2x - b^2y$	$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) = -2$

有理化的核心是利用平方差公式将根式每一项平方

注：上表中所有二次根式均有意义且有理化因式是相互的

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 省略号

【2021.03】 $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = (A)$.

A.9

B.10

C.11

D. $3\sqrt{11} - 1$

E. $3\sqrt{11}$

【标志词汇】分数的分母中带有根号，要求化简/求值 \Rightarrow 分母有理化.

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$ 将[小+大]变为[大+小]

$$\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \cdots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{98}-\sqrt{97}) + (\sqrt{99}-\sqrt{98}) + (\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

$$= -1 + \sqrt{100} = 10 - 1 = 9$$

扫码领取
PPT讲义



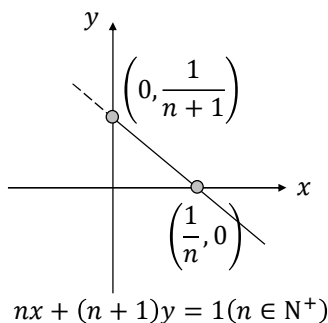
2025三天三夜 省略号

【2009.01.13】设直线 $nx + (n+1)y = 1$ (n 为正整数) 与两坐标轴围成的三角形面积为

S_n ($n = 1, 2, \dots, 2009$), 则 $S_1 + S_2 + \dots + S_{2009} = (C)$.

- A. $\frac{1}{2} \times \frac{2009}{2008}$ B. $\frac{1}{2} \times \frac{2008}{2009}$ C. $\frac{1}{2} \times \frac{2009}{2010}$ D. $\frac{1}{2} \times \frac{2010}{2009}$ E. 以上结论都不正确

【标志词汇】求曲线与 x 轴交点 \Rightarrow 代入 $y = 0$. 【标志词汇】求曲线与 y 轴交点 \Rightarrow 代入 $x = 0$.



与 x 轴交点 $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, 与 y 轴交点 $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad \text{大} - \text{小} = \frac{1}{\text{小}} - \frac{1}{\text{大}}$$

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{2009} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2010} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2009}{2010}$$

扫码领取
PPT讲义

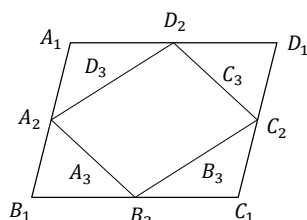
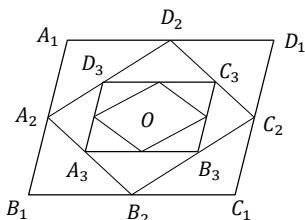


2025三天三夜 省略号

【2018.07】如图, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形, A_2, B_2, C_2, D_2 分别是 $A_1B_1C_1D_1$ 四边的中点, A_3, B_3, C_3, D_3 分别是四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 四边的中点, 依次下去, 得到四边形序列 $A_nB_nC_nD_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 设 $A_nB_nC_nD_n$ 是面积为 S_n , 且 $S_1 = 12$, 则 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots = (C)$.

- A. 16 B. 20 C. 24 D. 28 E. 30

联考中唯一可以求无穷项之和: 当 $n \rightarrow \infty$, 且 $0 < |q| < 1$ 时, $S = \frac{a_1}{1-q}$



$$S_2 = \frac{1}{2} S_1$$

$$\text{所有平行四边形面积之和} = \frac{12}{1 - \frac{1}{2}} = 24$$

这一系列四边形的面积, 构成首项12, 公比 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

扫码领取
PPT讲义



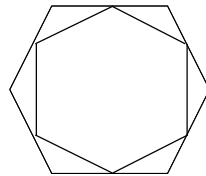
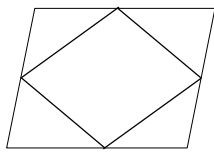
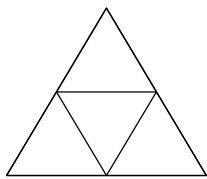
2025三天三夜 省略号

【中点多边形】顺次连接多边形各边中点所得的新多边形叫做原多边形的中点多边形

【标志词汇】任意三角形中点三角形 \Rightarrow 面积为原三角形的 $\frac{1}{4}$, 周长为原三角形的 $\frac{1}{2}$.

【标志词汇】任意四边形的中点四边形 \Rightarrow 面积为原四边形的 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

【标志词汇】正六边形的中点六边形 \Rightarrow 面积为原六边形的 $\frac{3}{4}$.



扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜**

平面几何

三角形

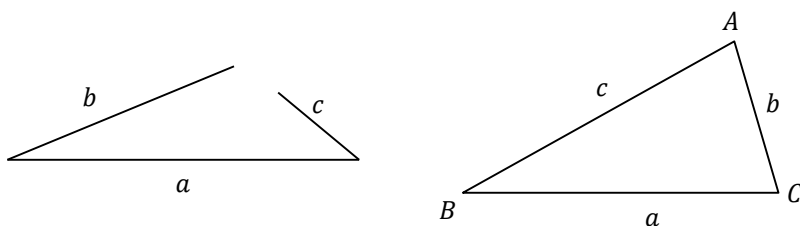
扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：三角形

三角形 由同一平面内不在同一直线上的三条线段首尾顺次连接所组成的封闭图形称为三角形

1. 三角形任意两边之和大于第三边；任意两边之差小于第三边；
2. 三角形内角和等于180度；



常见边与角的表示

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：三角形

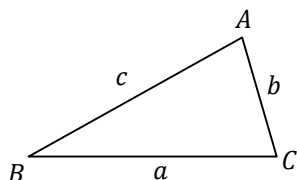
【标志词汇】 以 a, b, c 三项为边可构成三角形

\Leftrightarrow 这三项中任意两项和大于第三项，任意两项差（大减小）小于第三项.

$$\text{满足} \begin{cases} a+b > c \\ a+c > b \\ b+c > a \end{cases} \text{ 或满足 } \begin{cases} |a-b| < c \\ |a-c| < b \\ |b-c| < a \end{cases}$$

注意：必须满足三个不等式构成的不等式组

仅满足一个或两个不等式无法充分推出这三条线段可构成三角形.



平面上不共线的三点可以（唯一）确定一个三角形

也可以（唯一）确定一个圆

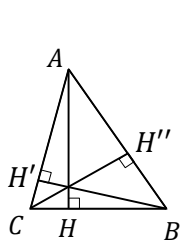
这个圆就是此三角形的外接圆

扫码领取
PPT讲义

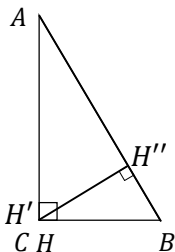


2025三天三夜 平面几何：三角形

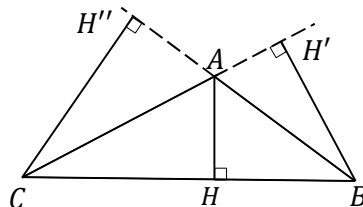
三角形面积： $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \text{任意一个底边} \times \text{相对应的高}$ 第三顶点与这个底边所在直线的距离



锐角三角形



直角三角形



钝角三角形

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} BH' \cdot AC = \frac{1}{2} CH'' \cdot AB \quad S_{\text{直角三角形}} = \frac{\text{直角边} \times \text{直角边}}{2}$$

扫码领取
PPT讲义

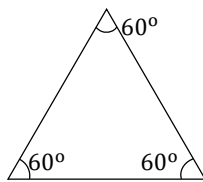
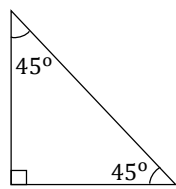
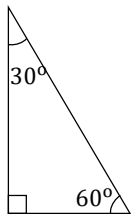


2025三天三夜 平面几何：三角形

【30°直角三角形】三边长度之比为1: $\sqrt{3}$: 2

【等腰直角三角形】三边长度之比为1: 1: $\sqrt{2}$

【等边三角形】边长与高之比为1: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 边长为a的等边三角形高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 面积 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



重要三角形形状已锁定，再多给定一个条件即可唯一确定此三角形

扫码领取
PPT讲义

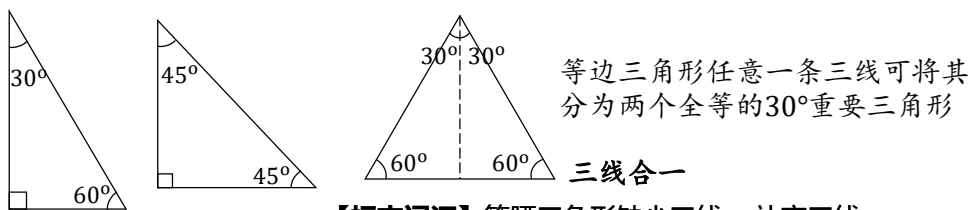


2025三天三夜 平面几何：三角形

【标志词汇】一般三角形 \Rightarrow 作垂线构造直角三角形

【标志词汇】直角三角形

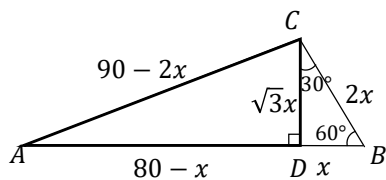
- 一般直角三角形 \Rightarrow 【勾股定理】 $a^2 + b^2 = c^2$
- [直角三角形]+[重要角度(30° 、 45° 、 60°)] \Rightarrow 重要三角形三边比例
套用重要三角形三边比例后，自动符合勾股定理

【标志词汇】等腰三角形缺少三线 \Rightarrow 补齐三线扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 平面几何：三角形

【例题】某三角形底边长为80，一底角为 60° ，另二边长之和为90，则该三角形最短边的长为（ D ）。

A.45 B.40 C.36 D.17 E.12

【标志词汇】给出一般三角形 \Rightarrow 作垂线构造直角三角形。一条垂线可以得到两个直角三角形【 30° 直角 $\triangle DBC$ 】三边长度之比为 $1:\sqrt{3}:2$ 设 $BD = x$ ，则 $CD = \sqrt{3}x$ ， $BC = 2x$ $AD = 80 - x$ ， $AC = 90 - 2x$ 作 $\triangle ABC$ ， $AB = 80$ ， $\angle B = 60^\circ$ 过点 C 作 CD 垂直于底边 AB 于点 D ，
构造出重要 $\triangle DBC$ 在直角 $\triangle ADC$ 中， $(\sqrt{3}x)^2 + (80 - x)^2 = (90 - 2x)^2$ 解得 $x = \frac{17}{2}$ 则 $BC = 2x = 17$ 扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 平面几何：三角形

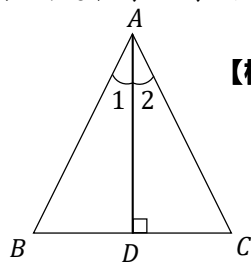
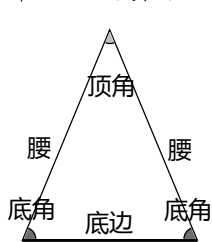
【等腰三角形判定】 三角形任意两个角相等/任意两条边相等/三线中有任两条重合

三线：顶角的角平分线、底边中线、底边上的高

【等腰三角形性质】 等腰三角形两个底角相等、等腰三角形两个腰相等

三线合一： $\angle 1 = \angle 2 \Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow BD = DC$

常见出题套路：两角/两边相等 \Rightarrow 等腰三角形 \Rightarrow 用三线合一性质解题



【标志词汇】 等腰三角形缺少三线 \Rightarrow 补齐三线

等腰三角形常用辅助线

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：三角形

【例题】 在等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, $BC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 且 AB, AC 的长分别是方程 $x^2 - \sqrt{2}mx + \frac{3m-1}{4} = 0$ 的两个根, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ().

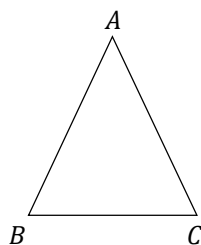
A. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

C. $\frac{5\sqrt{5}}{9}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

E. $\frac{\sqrt{5}}{18}$



【标志词汇】 一元二次方程有两个相等的实根 $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

$$\Delta = 2m^2 - 3m + 1 = (m-1)(2m-1) = 0 \quad \text{解得 } m = 1 \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

【标志词汇】 三角形三边 \Rightarrow 三边关系

两根和 = $AB + AC = \sqrt{2}m = \sqrt{2}$ 或 $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ (不满足三边关系, 舍)

$$AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：三角形

【例题】在等腰三角形 ABC 中， $AB = AC$ ， $BC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，且 AB ， AC 的长分别是方程 $x^2 - \sqrt{2}mx + \frac{3m-1}{4} = 0$ 的两个根，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ A ）.

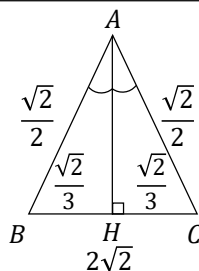
A. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

C. $\frac{5\sqrt{5}}{9}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

E. $\frac{\sqrt{5}}{18}$



【标志词汇】等腰三角形缺少三线 \Rightarrow 补齐三线

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{9}$$

【总结】求等腰三角形面积总是通过作底边上的高，利用三线合一性质求解。

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：三角形

【标志词汇】给出一一般三角形 \Rightarrow 作垂线构造直角三角形.

【标志词汇】直角三角形

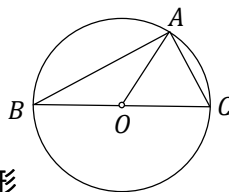
➤ 一般直角三角形 \Rightarrow 【勾股定理】 $a^2 + b^2 = c^2$

➤ [直角三角形]+[重要角度($30^\circ/45^\circ/60^\circ$)] \Rightarrow 重要三角形

➤ [直角三角形]+[斜边上的高] \Rightarrow ①【等面积模型】直角边 \times 直角边 = 斜边 \times 斜边上的高
②【射影定理】

➤ [直角三角形]+[斜边上的中线] \Rightarrow 斜边上的中线=斜边的一半

➤ [直角三角形]+[内接于一圆] \Rightarrow 斜边为直径，过圆心



扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

平面几何

有用的定理

 扫码领取
PPT讲义

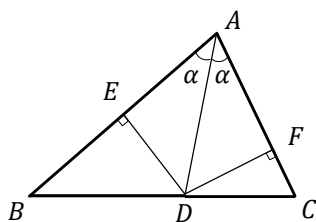

2025三天三夜 平面几何：角平分线定理

【三角形角平分线】 三角形其中一个内角的平分线与它的对边相交，
这个角的顶点与交点之间的线段叫做三角形的角平分线。

【角平分线性质】 角平分线上的点到这个角两边的距离相等。

反过来，在角内部到一个角的两边距离相等的点在这个角的角平分线上。

【三角形角平分线定理】 三角形一个角的角平分线与其对边所成的两条线段与这个角的两边对应成比例。



AD为 $\triangle ABC$ 的角平分线

$$DE = DF$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

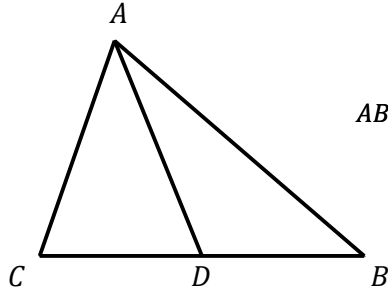
$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DE \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot DF \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$$

 扫码领取
PPT讲义


2025三天三夜 平面几何：中线定理

【三角形中线】三角形的中线是连接三角形顶点和它的对边中点的线段.

【中线定理】三角形一条中线两侧所对的边平方和等于底边平方的一半与该边中线平方的两倍的和.



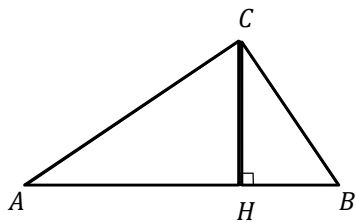
$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AD^2$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：垂线定理

【垂线定理】 $AC^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2$



$\triangle ABC$ 为任意三角形, 过C作AB边上的垂线, 垂足为H

在直角 $\triangle AHC$ 中: $CH^2 = AC^2 - AH^2$

在直角 $\triangle CHB$ 中: $CH^2 = BC^2 - BH^2$

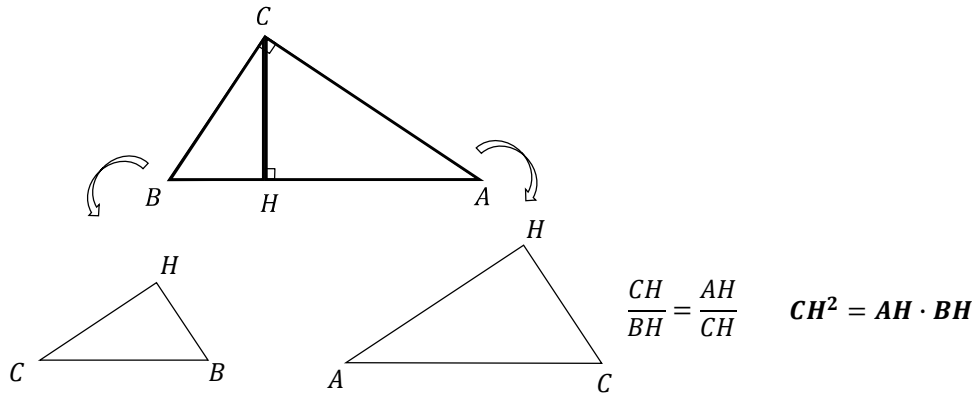
$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：射影定理

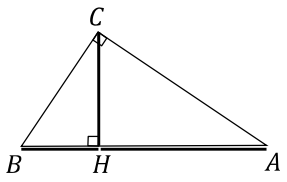
【射影定理】在直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边射影的比例中项，
每一条直角边又是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项。



扫码领取
PPT讲义

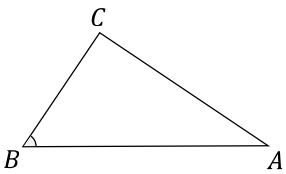
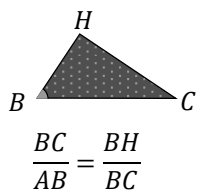
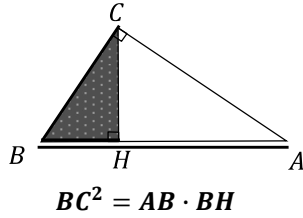


2025三天三夜 平面几何：射影定理



射影就是正投影
 $CH^2 = AH \cdot BH$

直角三角形中斜边上的高
是两直角边在斜边长射影的比例中项。

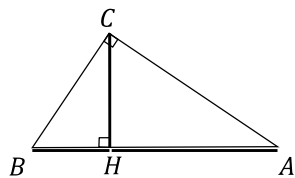


直角三角形每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项。

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：射影定理

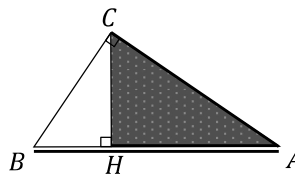


射影就是正投影

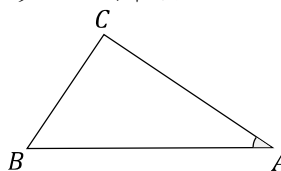
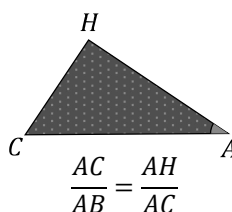
$$CH^2 = AH \cdot BH \quad BC^2 = AB \cdot BH$$

直角三角形中斜边上的高

是两直角边在斜边上射影的比例中项。



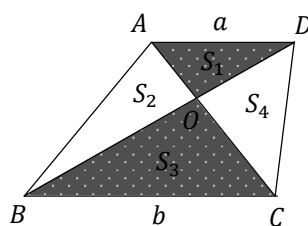
$$AC^2 = AB \cdot AH$$



直角三角形每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项。

扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 平面几何：蝶形定理

【梯形蝶形定理】 $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = a^2 : ab : b^2 : ab$  $\triangle AOD$ 与 $\triangle BOC$ 符合8字形相似根据[面积比 = 相似比²]可得： $S_1 : S_3 = a^2 : b^2$ $\triangle AOD$ 与 $\triangle AOB$ [底同线BD] and [共顶点A]

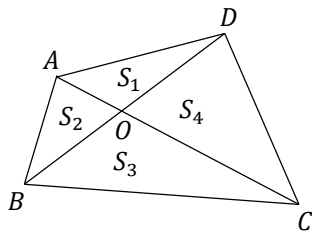
$$S_1 : S_2 = a : b = a^2 : ab$$

 $\triangle AOD$ 与 $\triangle COD$ [底同线AC] and [共顶点D]

$$S_1 : S_4 = a : b = a^2 : ab$$

扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 平面几何：蝶形定理

【任意四边形蝶形定理】① $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ 【标志词汇】[底同线] and [共顶点] \Rightarrow 等高模型 面积比 = 底边比

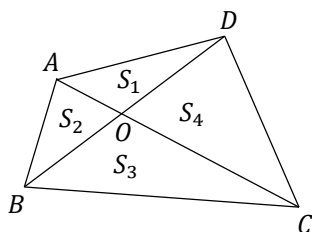
$$\triangle AOD \text{ 与 } \triangle AOB \text{ [底同线 } BD] \text{ and [共顶点 } A] \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{OD}{OB}$$

$$\triangle DOC \text{ 与 } \triangle BOC \text{ [底同线 } BD] \text{ and [共顶点 } C] \quad \frac{S_4}{S_3} = \frac{OD}{OB}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3} = \frac{OD}{OB} \quad \text{即 } S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 平面几何：蝶形定理

【任意四边形蝶形定理】② $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{OA}{OC}; \quad \frac{S_1 + S_4}{S_2 + S_3} = \frac{OD}{OB}$ 

$$\text{由 } S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

$$\text{可得 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3} = \frac{OD}{OB}$$

$$\text{根据[等比定理]得: } \frac{S_1 + S_4}{S_2 + S_3} = \frac{OD}{OB}$$

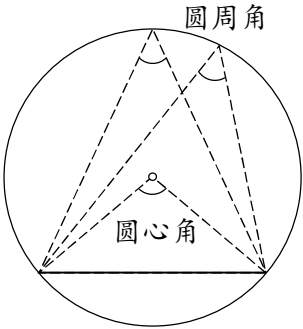
$$\text{可得 } \frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3} = \frac{OA}{OC}$$

$$\text{根据[等比定理]得: } \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{OA}{OC}$$

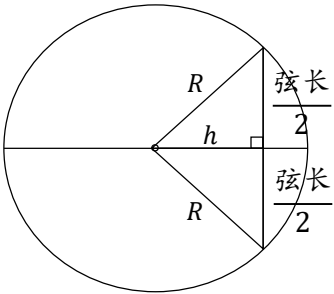
扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 平面几何：圆的相关定理

圆 平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆.这一定点为圆心, 距离为圆的半径.



同一段弧所对的
圆周角是圆心角的一半



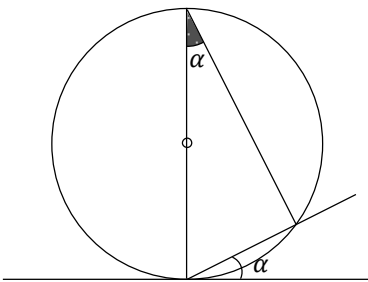
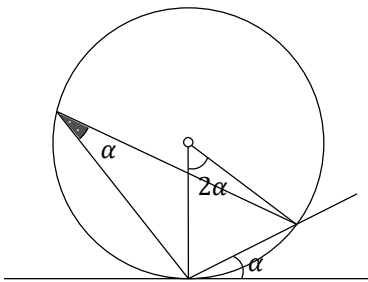
【垂径定理】垂直于弦的直径平分这条弦以及弦所对的两条弧

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：圆的相关定理

圆 平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆.这一定点为圆心, 距离为圆的半径.



【弦切角定理】弦切角的度数等于它所夹的弧所对的圆心角度数的一半,
等于它所夹的弧所对的圆周角度数.

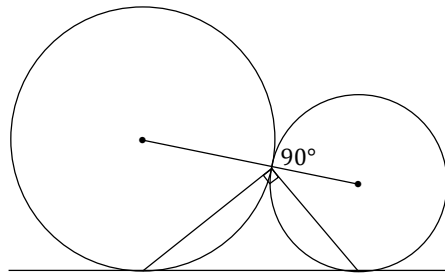
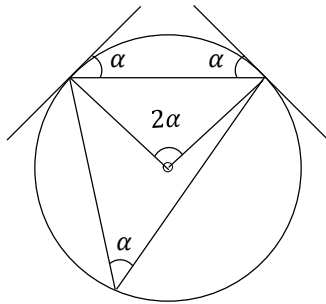
扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：圆的相关定理

圆 平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆.这一定点为圆心, 距离为圆的半径.

【弦切角定理】弦切角的度数等于它所夹的弧所对的圆心角度数的一半,
等于它所夹的弧所对的圆周角度数.



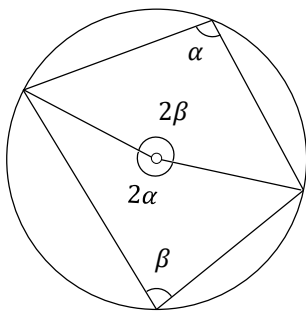
相切的两圆, 圆心连线过切点

扫码领取
PPT讲义

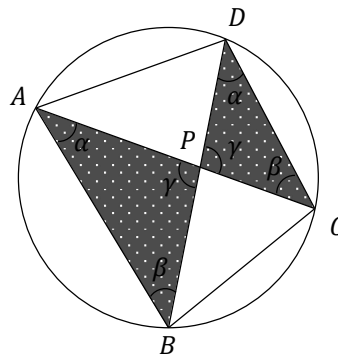


2025三天三夜 平面几何：圆的相关定理

圆 平面上到一定点距离相等的所有点的集合称之为一个圆.这一定点为圆心, 距离为圆的半径.



圆内接四边形对角互补
 $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ $\alpha + \beta = 180^\circ$

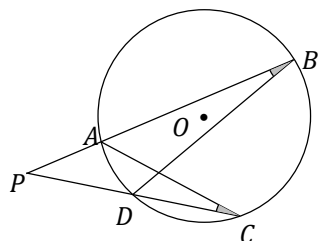


圆内接四边形对应三角形相似
【相交弦定理】 $AP \cdot CP = BP \cdot DP$

扫码领取
PPT讲义

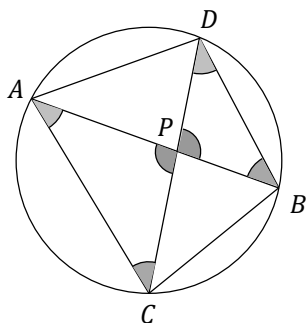


2025三天三夜 平面几何：圆幂定理



$$\triangle PBD \text{ 与 } \triangle PCA \text{ 相似 } \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

【割线定理】 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



$$\triangle PAC \text{ 与 } \triangle PDB \text{ 相似 } \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

【相交弦定理】 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：圆幂定理

【例题】如图所示， A, B, C, D 是圆 O 上的点， BA 与 CD 的延长线交于一点 P ， $PA = 2$ ， $PD = CD = 3$ ，则 PB 长度为（ D ）。

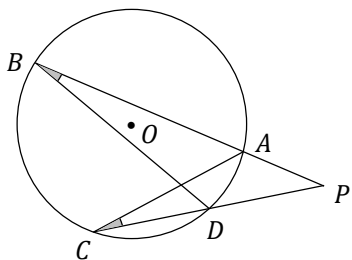
A.6

B.7

C.8

D.9

E.10



$$\angle BCD = \angle ADB$$

等弧对等弦，等弦对等角

$\triangle PBD$ 与 $\triangle PCA$ 相似

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad \text{【割线定理】}$$

$$2 \times PB = 3 \times 6 \quad \text{解得 } PB = 9$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 平面几何：圆幂定理

【例题】如图，已知四边形 $ABCD$ ， $\angle BAD + \angle BCD = \pi$ ， $PA = 6$ ， $PC = 4$ ， $PD = 3$ ，则 PB 长为（A）.

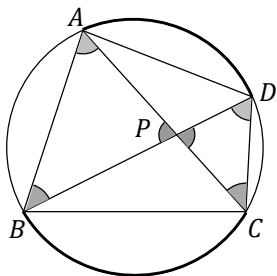
A.8

B.9

C.7

D.10

E.11



等弧对等角

$\angle BAC = \angle BDC$;
 $\angle ABD = \angle ACD$

圆内接四边形的性质：对角互补，外角等于内对角.

圆内接四边形的判定：有一组对角互补的四边形内接于某个圆

$\angle BAC + \angle BCD = \pi$ ，四边形对角互补，内接于圆.

$\triangle APB$ 与 $\triangle DPC$ 相似

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC} \quad PA \cdot PC = PB \cdot PD \quad \text{【相交弦定理】}$$

$$6 \cdot 4 = PB \cdot 3 \quad \text{解得 } PB = 8$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

立体几何

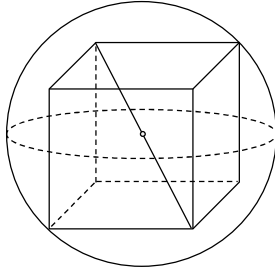
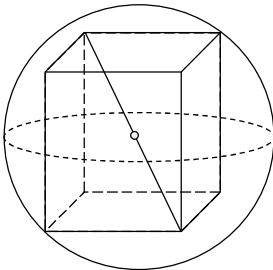
两空间几何体之间关系

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：立方体外接球

立方体外接球

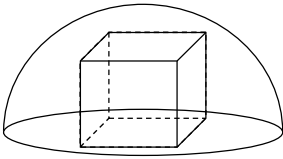


几何体关系：中心重合

【等量关系】立方体的体对角线长 = 外接球直径.

长方体 $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

正方体 $2R = \sqrt{3}a$



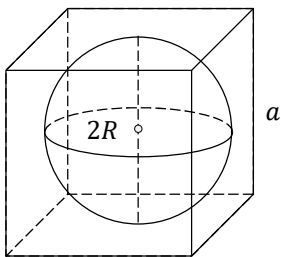
【标志词汇】半球 \Rightarrow 补齐为整球.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：立方体内切球

正方体内切球



【等量关系】正方体棱长 = 内切球直径.

$a = 2R$

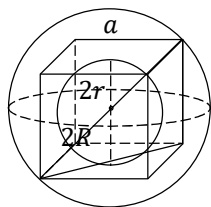
扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：立方体外接球

【例题】（条件充分性判断） $M = 3\sqrt{3}$. （ B ）

(1) 正方体的外接球与内切球的表面积之比为 M . (2) 正方体的外接球与内切球的体积之比为 M .



$$R : r = \sqrt{3} : 1$$

$$\text{表面积: } S = 4\pi R^2$$

$$\text{体积: } V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

【等量关系】外接球直径 = 正方体体对角线长.

$$2R = \sqrt{3}a \quad \text{解得 } R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

【等量关系】内切球直径 = 正方体棱长.

$$a = 2r \quad \text{解得 } r = \frac{a}{2}$$

$$\text{条件 (1): } \frac{S_{\text{外}}}{S_{\text{内}}} = \frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} = 3, \text{ 不充分}$$

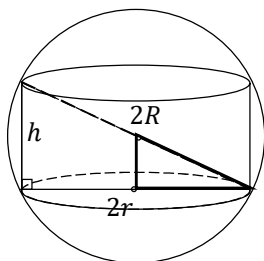
$$\text{条件 (2): } \frac{V_{\text{外}}}{V_{\text{内}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^3}{r^3} = 3\sqrt{3}, \text{ 充分}$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：圆柱外接球

圆柱外接球 给球体打圆柱形孔

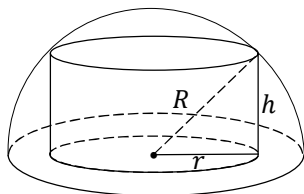


中心重合

【等量关系】圆柱轴截面的对角线长同时也为球的直径.

$$(2R)^2 = h^2 + (2r)^2$$

洞的内壁面积 = 圆柱的侧表面积 = 圆柱底面周长 × 高.



圆底面圆心与球截面圆心重合

方案①: $R^2 = h^2 + r^2$ (推荐思路)

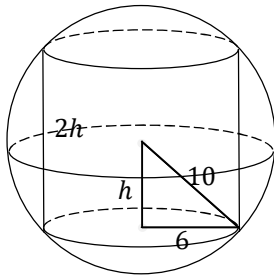
方案② 【标志词汇】半球 → 补齐为整球.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：圆柱外接球

【2016.15】如图所示，在半径为10厘米的球体上开一个底面半径是6厘米的圆柱形洞，则洞的内壁面积为（单位： cm^2 ）（ E ）。

A. 48π B. 288π C. 96π D. 576π E. 192π 设圆柱高为 $2h$

$$100 = 36 + h^2 \quad \text{解得 } h = 8\text{cm} \quad \text{常用勾股数 } 6, 8, 10$$

洞的内壁面积 = 圆柱的侧表面积 = 圆柱底面周长 \times 高

$$S = 2\pi r \cdot 2h = 2\pi \times 6 \times 16 = 192\pi (\text{cm}^2)$$

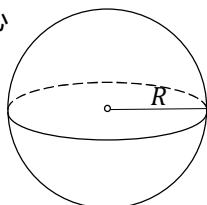
扫码领取
PPT讲义**2025三天三夜****立体几何
截面模型**扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割球

【核心思路】①将立体问题平面化②寻找直角三角形或规则图形③使用勾股定理等等量关系求解.

【切割球】球的截面只可能是圆，其中最大的圆半径等于球半径，圆心与球心重合.

截面过球心

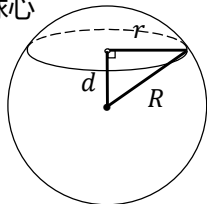


这个最大的截面称为[球的大圆]

【等量关系】截面过球心时，圆心与球心重合

截面圆半径 = 球半径

截面不过球心



【等量关系】截面不过球心时

截面半径 r 、球半径 R 、球心到截面距离 d 构成直角三角形，符合勾股定理.

$$r^2 + d^2 = R^2$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割球

【2017.21】如图所示，一个铁球沉入水池中，则能确定铁球的体积. (B) 确定铁球半径 R

(1) 已知铁球露出水面的高度.

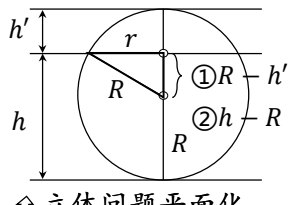
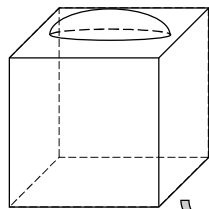
h'

(2) 已知水深及铁球与水面交线的周长.

h

r

设铁球半径为 R ，水深为 h ，铁球露出水面高度为 h' ，球与水面交线圆半径为 r .



等量关系①: $R^2 = r^2 + (R - h')^2$

等量关系②: $R^2 = r^2 + (h - R)^2$

立体问题平面化

条件 (1) : h' 已知，而 r 未知，无法确定 R ，条件 (1) 不充分.

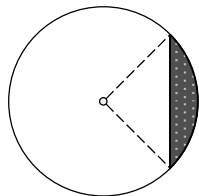
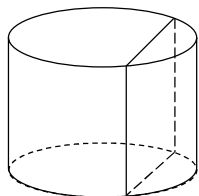
条件 (2) : 已知 h 和交线周长 $C = 2\pi r$ ，即已知 h 和 r ，根据等量关系②可确定 R ，条件 (2) 充分.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割柱体

切割圆柱体 纵向切割圆柱体：截面为矩形；横向切割圆柱体：截面为圆。



截得的空间几何体与剩余部分均为[柱体]
柱体体积均为底面积 \times 高

【等量关系】 体积 = 底面积 \times 圆柱高.

体积 = 弓形面积 \times 圆柱高

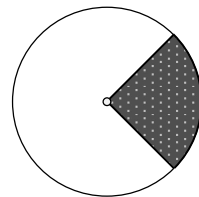
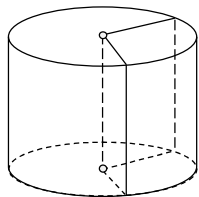
= (扇形面积 - 等腰三角形面积) \times 圆柱高

截面面积 = 弦长 \times 圆柱高

体积 = 扇形面积 \times 圆柱高

截面面积 = $2 \times r \times$ 圆柱高 h

立体问题平面化



【圆的辅助线原则】 使圆上没有孤单的点

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割柱体

【2018.14】 如图，圆柱体的底面半径为2，高为3，垂直于底面的平面截圆柱体所得截面为矩形ABCD.

若弦AB所对的圆心角是 $\frac{\pi}{3}$ ，则截掉部分（较小部分）的体积为（ D ）.

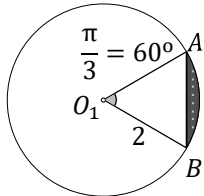
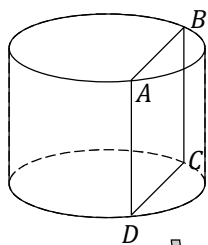
A. $\pi - 32$

B. $\pi - 6$

C. $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $2\pi - 3\sqrt{3}$

E. $\pi - \sqrt{3}$



立体问题平面化

体积 = 弓形面积 \times 圆柱高

$$= (S_{\text{扇形}} - S_{\Delta})h = 3 \left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \right) = 2\pi - 3\sqrt{3}$$

$$S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{6} \pi \cdot 2^2 = \frac{2}{3} \pi$$

【重要三角形】 边长为 a 的等边三角形面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

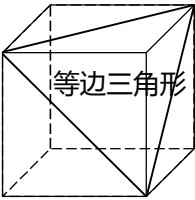
$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

扫码领取
PPT讲义

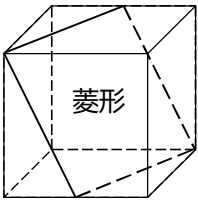


2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割立方体

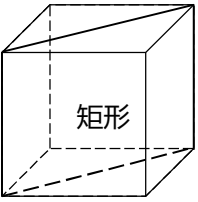
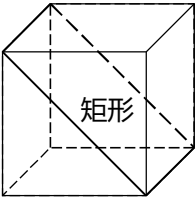
正方体



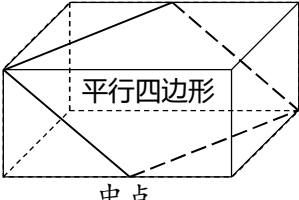
中点



中点

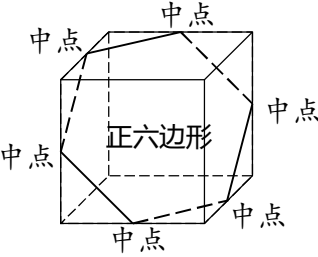


中点



长方体

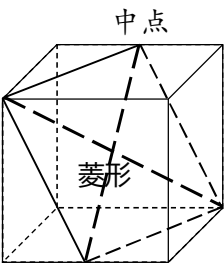
中点



扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割正方体



中点
正方体

正方体棱长为 a

菱形每一条边长均为 $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$

四条边相等的四边形是菱形

菱形一条对角线长为正方体体对角线 $\sqrt{3}a$

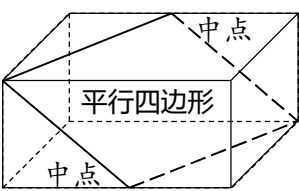
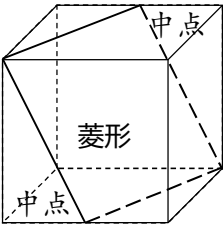
另一条对角线长为面对角线 $\sqrt{2}a$

截面积 $S = \frac{1}{2} \sqrt{3}a \cdot \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{6}}{2} a^2$

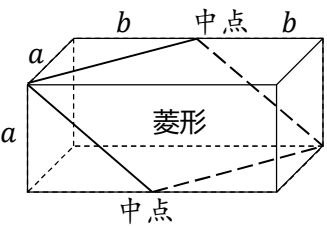
扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割立方体



长方体
平行四边形：
两组对边分别平行且相等
面积 = 底 × 高

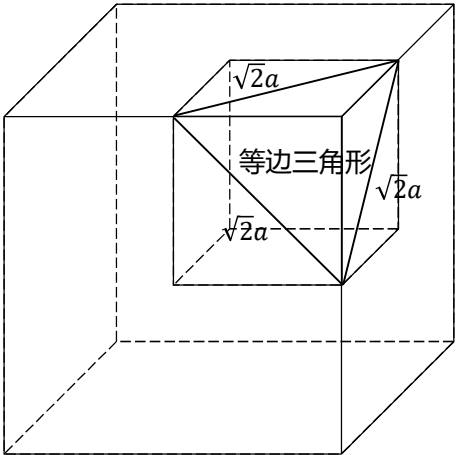


左右侧面为正方形的长方体（设棱长为 $a, a, 2b$ ）
截面四边形每条边长均为 $\sqrt{a^2 + b^2}$
有一组邻边相等的平行四边形是菱形

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割正方体



正方体棱长为 a
截面等边三角形边长为面对角线 $\sqrt{2}a$
截面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割正方体

【2022.06】如图，在棱长为2的正方体中， A, B 是顶点， C, D 是所在棱的中点，则四边形 $ABCD$ 的面积为（ A ）。

A. $\frac{9}{2}$

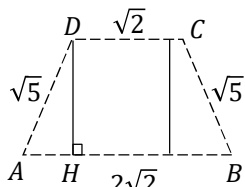
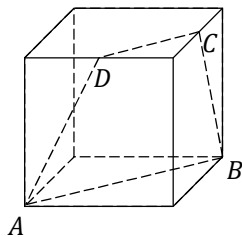
B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. $2\sqrt{5}$

E. $3\sqrt{2}$

【核心思路】①将立体问题平面化；②寻找直角三角形或规则图形；③使用勾股定理等公式求解。



$$S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}$$

$$AD = BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

四边形 $ABCD$ 为等腰梯形

$$\text{下底} AB = 2\sqrt{2}, \text{上底} CD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

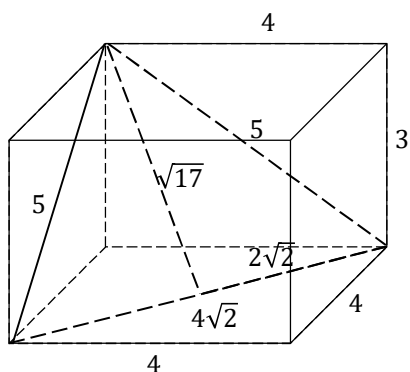
$$AH = \frac{1}{2}(2\sqrt{2} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{等腰梯形高} DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 立体几何：截面模型 切割长方体



上下表面为正方形的长方体

截面为等腰三角形，腰长 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

【等量关系】截面等腰三角形底边长=长方体底面对角线长

根据等腰三角形三线合一，可得高为绿色虚线

$$\text{截面三角形高为} \sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{截面积} S = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \sqrt{17} = 2\sqrt{34}$$

扫码领取
PPT讲义

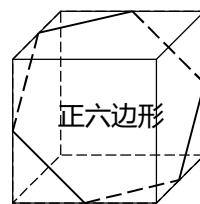
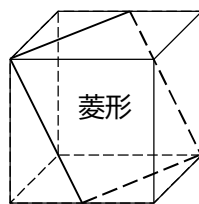
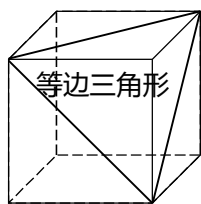
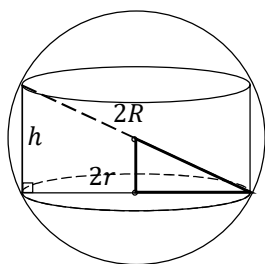


2025三天三夜 立体几何：截面模型

【核心思路】①将立体问题平面化②寻找直角三角形或规则图形③使用勾股定理等等量关系求解.

- **切割球** 球的截面只可能是圆，其中最大的圆半径等于球半径，圆心与球心重合.
- **切割圆柱体** 纵向切割圆柱体：截面为矩形；横向切割圆柱体：截面为圆.
- **给球体打圆柱形孔（圆柱外接球）** ➤ **立方体截面模型**

【标志词汇】遇见半图⇒补齐全图 空间几何体的缩放



扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

解析几何

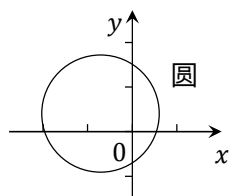
两变量不等式的数形结合法

扫码领取
PPT讲义

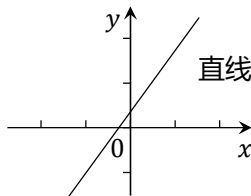


2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

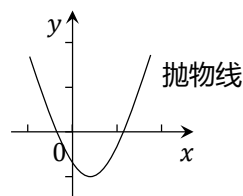
若坐标平面上有一点满足曲线方程，则这一点在此曲线上。



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



$$y = kx + b$$



$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

曲线一般方程中无常数项 \Leftrightarrow 曲线过原点 代入原点坐标(0,0)，曲线方程等式成立

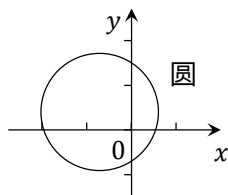
代入 $x = 0$ 可得曲线与 y 轴交点

代入 $y = 0$ 可得曲线与 x 轴交点

扫码领取
PPT讲义

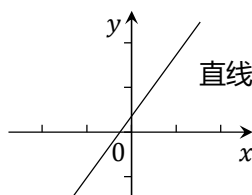


2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法



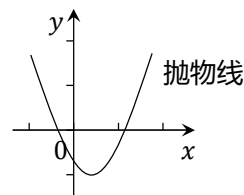
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$



$$y > kx + b$$

$$y < kx + b$$



$$y > ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$$y < ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

圆将平面分为内外两部分

直线将平面分为左右两侧两部分

抛物线将平面分为上下两部分

当曲线方程中等号变为不等号时，它表示平面的其中一部分

有【方程式含义法】与【特殊点法】两种方法判断到底是哪个部分

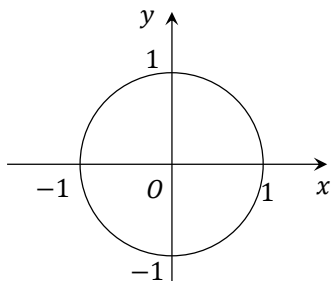
扫码领取
PPT讲义



讲义 P80

2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

● 到平面内一定点距离等于定值的所有点的集合



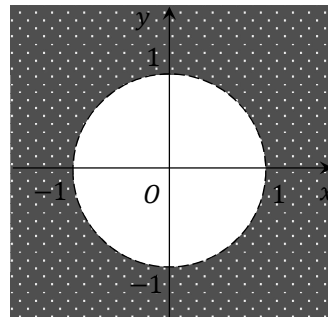
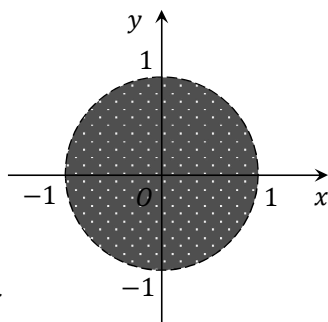
$$x^2 + y^2 = 1$$

单位圆的圆周（圆上）

到原点距离等于1的所有点的集合

到原点距离小于1的所有点的集合

$$x^2 + y^2 < 1 \quad (\text{单位圆内的区域})$$



$$x^2 + y^2 > 1$$

单位圆外的区域

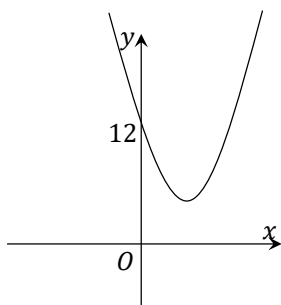
到原点距离大于1的所有点的集合

扫码领取
PPT讲义



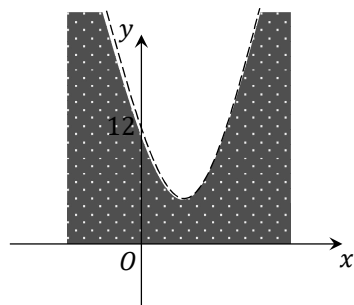
2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 表示一条抛物线，它将平面分为上下两部分
等号变为不等号后将表示抛物线上方或下方的其中一部分



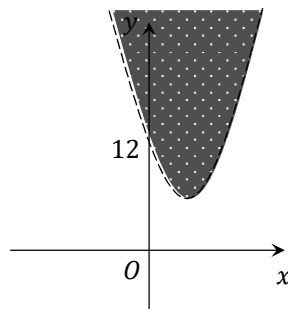
$$y = x^2 - 3x + 12$$

表示一条抛物线



$$y < x^2 - 3x + 12$$

表示抛物线下方部分



$$y > x^2 - 3x + 12$$

表示抛物线上方部分

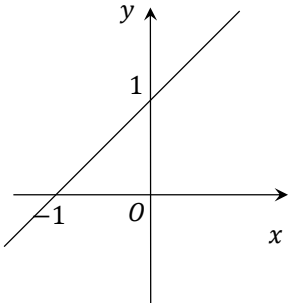
扫码领取
PPT讲义



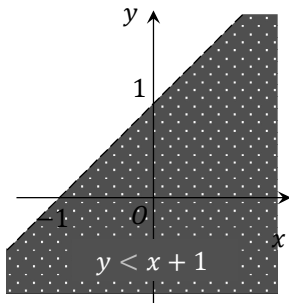
2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

二元一次方程代表坐标平面上一直线，它将平面分为直线两侧两部分

二元一次不等式代表直线的其中一侧



$y = x + 1$
表示一条直线



直线右下方一侧区域

对于直线点斜式方程 $y = kx + b$ 对应的不等式
 $y > kx + b$ 或 $y < kx + b$

“<”表示直线下方部分

“>”表示直线上方部分

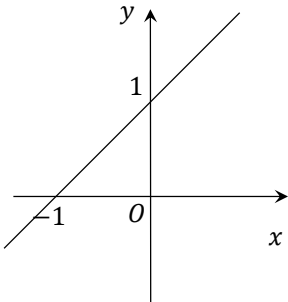
扫码领取
PPT讲义



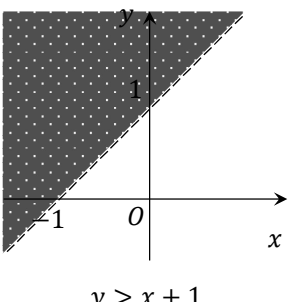
2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

二元一次方程代表坐标平面上一直线，它将平面分为直线两侧两部分

二元一次不等式代表直线的其中一侧



$y = x + 1$
表示一条直线



直线右上方一侧区域

对于直线点斜式方程 $y = kx + b$ 对应的不等式
 $y > kx + b$ 或 $y < kx + b$

“<”表示直线下方部分

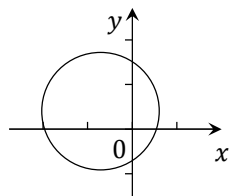
“>”表示直线上方部分

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

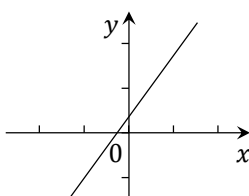
若给出符合圆或直线一般式的不等式，代入特殊点（优选原点）判断其表示的范围



$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F > 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F < 0$$

(其中 $D^2 + E^2 - 4F > 0$)



$$Ax + By + C > 0$$

$$Ax + By + C < 0$$

(其中 A, B 不同时为零)

➤ 若代入原点坐标后若不等式成立

不等式表示包括原点的平面区域

➤ 若代入原点坐标后若不等式不成立

不等式表示不包括原点的平面区域

注：若曲线过原点（无常数项），则代入(1,0)或(0,1)等易于计算的点

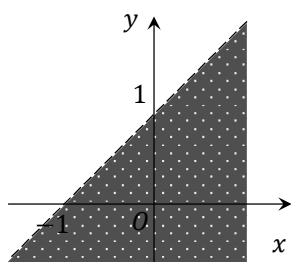
扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

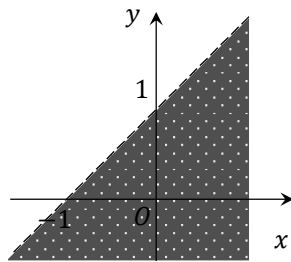
二元一次方程代表坐标平面上一直线，它将平面分为直线两侧两部分

二元一次不等式代表直线的其中一侧



$$y < x + 1$$

方程式涵义法
直线左下方一侧区域



$$x - y + 1 > 0$$

特殊点法

代入原点 $x = 0, y = 0$

$$0 - 0 + 1 > 0$$

不等式成立

表示直线包括原点的一侧

扫码领取
PPT讲义

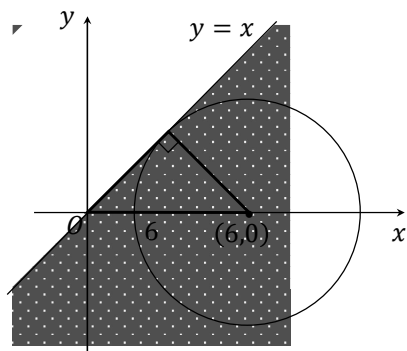


2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

【2024.23】设 x, y 为实数，则能确定 $x \geq y$. ()

(1) $(x - 6)^2 + y^2 = 18$.

(2) $|x - 4| + |y + 1| = 5$.



【破题标志】两变量的不等关系 \Rightarrow 数形结合

$x \geq y$: 表示直线 $y = x$ 及其右下方部分平面

条件 (1): 表示圆心为 $(6, 0)$ 半径为 $3\sqrt{2}$ 的圆周

过圆心对直线 $y = x$ 作垂线段，可得等腰直角三角形

斜边为6，则直角边为 $\frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

垂线段长=圆半径，圆与直线相切，充分.

【圆的切线距离法判定】如果圆心到直线的距离等于圆的半径，那么这条直线就是圆的切线

扫码领取
PPT讲义

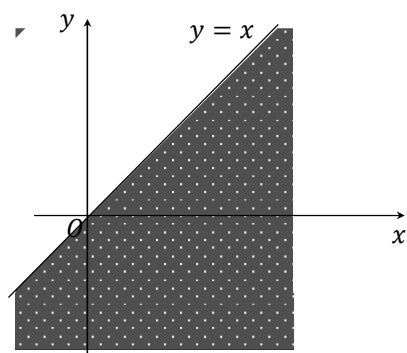


2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

【2024.23】设 x, y 为实数，则能确定 $x \geq y$. (D) 表示直线 $y = x$ 及其右下方部分平面

(1) $(x - 6)^2 + y^2 = 18$.

(2) $|x - 4| + |y + 1| = 5$.



【破题标志】两变量的不等关系 \Rightarrow 数形结合

条件 (1): 圆与直线相切，充分.

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

【结论】 $|x - b_1| + |y - b_2| = a$ ($a > 0$) 代表首尾顺次相接的四条线段，围成一个立放的正方形.

对角线长度为 $2a$ ，一条对角线水平，一条对角线竖直

中心坐标为 (b_1, b_2) ，面积为 $S = 2a^2$.

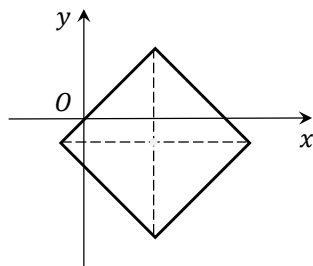
$$|x - 4| + |y + 1| = 5$$

$$|x - 4| + |y - (-1)| = 5$$

对角线长度为10的

立放的正方形

中心坐标为 $(4, -1)$



扫码领取
PPT讲义

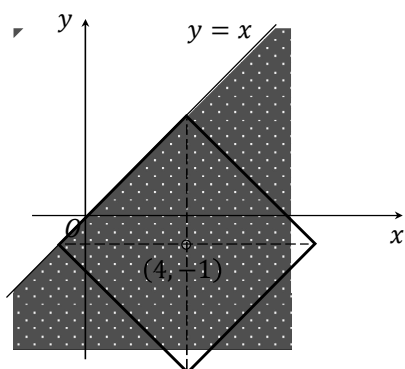


2025三天三夜 解析几何：两变量不等式的数形结合法

【2024.23】 设 x, y 为实数，则能确定 $x \geq y$. (D) 表示直线 $y = x$ 及其右下方部分平面

(1) $(x - 6)^2 + y^2 = 18$.

(2) $|x - 4| + |y + 1| = 5$.



【破题标志】 两变量的不等关系 \Rightarrow 数形结合

条件 (1) : 圆与直线相切，充分.

条件 (2) : 表示中心 $(4, -1)$ ，对角线长10的
立放正方形圆周上的点

正方形恒在 $y = x$ 上及其下方，亦充分

【技巧】 可根据中心点及对角线长确定四个
顶点 $(4, 4)$ $(4, -5)$ $(-1, -1)$ $(-1, 9)$ ，再作图

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

解析几何

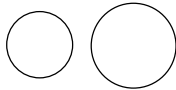
圆与圆

扫码领取
PPT讲义

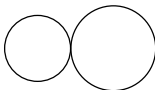


2025三天三夜 解析几何：圆与圆

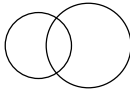
半径已知，而圆心点未知（可变），则两圆位置关系可能有5种：外离、外切、相交、内切、内含



$$d > r_1 + r_2$$



$$d = r_1 + r_2$$



$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$$



$$d = |r_1 - r_2|$$



$$0 \leq d < |r_1 - r_2|$$

【标志词汇】 两圆位置关系 \Leftrightarrow 圆心距与两半径和/差的大小关系

两圆的关系	圆心距与两圆半径的关系	交点个数	公切线
外离	$d > r_1 + r_2$	无交点	4条
外切	$d = r_1 + r_2$	1个交点	3条
相交	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	2个交点	2条
内切	$d = r_1 - r_2 $	1个交点	1条
内含	$0 \leq d < r_1 - r_2 $	无交点	无公切线

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 解析几何：圆与圆

【2014.10.09】圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+(y-3)^2=3$
 $x^2+y^2+2x-3=0$ 与圆 $x^2+y^2-6y+6=0$ (C) .

A. 外离

B. 外切

C. 相交

D. 内切

E. 内含

【标志词汇】两圆位置关系 \Leftrightarrow 圆心距与两半径和/差的大小关系

将两圆化为标准方程得

$$(x+1)^2+y^2=4 \quad \text{圆心}(-1,0), r_1=2$$

$$x^2+(y-3)^2=3 \quad \text{圆心}(0,3), r_2=\sqrt{3}$$

$$\text{两圆圆心距 } d = \sqrt{(-1-0)^2+(0-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{半径差} = 2 - \sqrt{3} \quad 2 - \sqrt{3} < \sqrt{10} < 2 + \sqrt{3} \quad \text{半径和} = 2 + \sqrt{3}$$

用完全平方数估算二次根式范围

外离	$d > r_1 + r_2$
外切	$d = r_1 + r_2$
内切	$d = r_1 - r_2 $
相交	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$
内含	$0 \leq d < r_1 - r_2 $

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 解析几何：圆与圆

【例题】已知圆 $(x+a)^2+(y-2)^2=1$ 与圆 $(x-b)^2+(y-2)^2=4$ 相外切, 若 $a > 0, b > 0$, 则 ab 的最大值为 (B) .

A. $2\sqrt{3}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

E. $2\sqrt{6}$

【标志词汇】外切 $\Leftrightarrow d = r_1 + r_2 \quad a + b = r_1 + r_2 = 3$

【标志词汇】[限制为正]+[求最值] \Rightarrow 均值定理 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$$\text{圆 } (x+a)^2+(y-2)^2=1: \text{ 圆心点为 } (-a, 2), \text{ 半径 } r_1=1$$

$$\text{圆 } (x-b)^2+(y-2)^2=4: \text{ 圆心点为 } (b, 2), \text{ 半径 } r_2=2$$

$$\text{两圆圆心距 } d = \sqrt{(-a-b)^2+(2-2)^2} = |a+b| = a+b (a > 0, b > 0)$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

解析几何
圆与直线

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 解析几何：圆与直线

【标志词汇】判断直线与圆位置关系 \Rightarrow 数形结合 比较半径 r 与圆心到直线距离 d 的大小

位置关系	图像	距离与半径的关系	公共点个数
相交		$d < r$	2个公共点
		$d = 0$	直线过圆心，平分圆
相切		$d = r$	1个公共点
相离		$d > r$	无公共点

扫码领取
PPT讲义



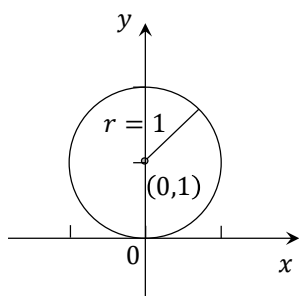
2025三天三夜 解析几何：圆与直线

相切和相离

【2018.24】设 a, b 为实数，则圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 与直线 $x + ay = b$ 不相交 (A)

(1) $|a - b| > \sqrt{1 + a^2}$.

(2) $|a + b| > \sqrt{1 + a^2}$.

【标志词汇】圆与直线相切 \Leftrightarrow 圆心到直线距离 $d = r$; 相离 $\Leftrightarrow d > r$.即题干结论成立要求 $d \geq r$.将圆配方为标准方程 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 圆心为 $(0, 1)$, 半径 $r = 1$

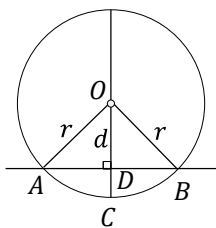
圆心到直线距离 $d = \frac{|a - b|}{\sqrt{1 + a^2}} \geq 1 \quad |a - b| \geq \sqrt{1 + a^2}$

条件 (1) 充分, 条件 (2) 不充分.

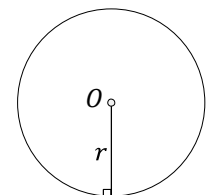
扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 解析几何：圆与直线

直线与圆关系模型中结合平面几何知识解题:

**直线与圆相交** 垂直于弦的直径(半径)平分弦. 垂径定理若 $OC \perp AB$, 垂足为 D , 则 $AD = BD$. 等腰三角形三线合一

根据勾股定理有: $r^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + d^2$

【标志词汇】直线与圆相交弦长 $\Rightarrow d, r$ 与弦长一半构成直角三角形, 符合勾股定理.**直线与圆相切** 圆的切线垂直于经过切点的半径扫码领取
PPT讲义

2025三天三夜 解析几何：圆与直线

【2021.10】已知 $ABCD$ 是圆 $x^2 + y^2 = 25$ 的内接四边形，若 A 、 C 是直线 $x = 3$ 与圆 $x^2 + y^2 = 25$ 的交点，则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 (C) . 图未给出，需要自己画.

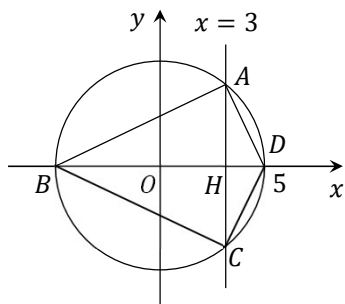
A.20

B.24

C.40

D.48

E.80



【陷阱】四边形 $ABCD$ 是以各顶点顺次命名的，
因此 AC 为对角线而非一条边.

要求四边形 $ABCD$ 的面积最大

$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 最大



$\triangle ABC$ 的高 BH 最大 $\triangle ADC$ 的高 DH 最大 $\Rightarrow B, D$ 均在 x 轴上

圆方程 $x^2 + y^2 = 25$ 中代入 $x = 3$ 得 $y = 4$ ，即 $AH = CH = 4$

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20, \text{ 四边形 } ABCD \text{ 面积为 } 40$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜

解析几何

圆上的点与直线距离

扫码领取
PPT讲义

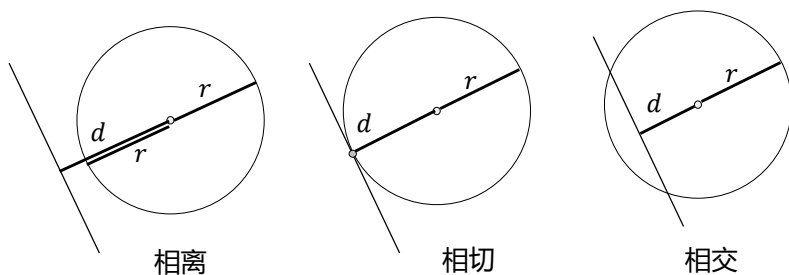


2025三天三夜 解析几何：圆上的点与直线距离

圆上的点与直线的最长/最短距离 设圆心到直线的距离为 d ，圆的半径为 r

位置关系	最短距离	最长距离
相离	$d - r$	$d + r$
相切	0	$2r$
相交	0	$d + r$

此时 $d = r, d + r = 2r$.



扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 解析几何：圆上的点与直线距离

【例题】 曲线 $x^2 - 2x + y^2 = 0$ 上的点到直线 $3x + 4y - 12 = 0$ 的最短距离是 (B) .

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

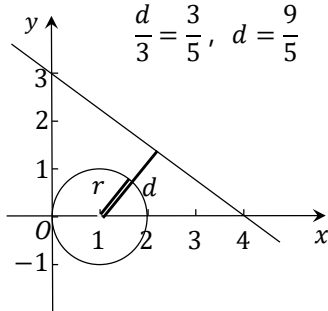
C. 1

D. $\frac{4}{3}$

E. $\sqrt{2}$

出现直角三角形斜边上的高
根据反A字型相似三角形可得

$$\frac{d}{3} = \frac{3}{5}, d = \frac{9}{5}$$



将圆方程配方得 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 圆心为点(1,0), 半径 $r = 1$

$$\text{圆心到直线距离 } d = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5} > r = 1$$

直线与圆相离, 最短距离为 $d - r$, 最长距离为 $d + r$

$$\text{直线与圆相离, 则最短距离为 } d - r = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

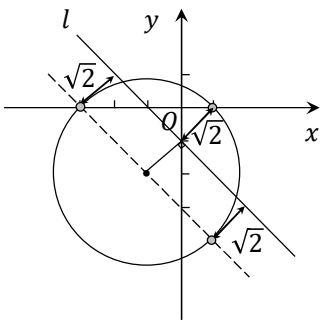
扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 解析几何：圆上的点与直线距离

【例题】圆 $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ 上到直线 $l: x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有 (C) .

- A.1个 B.2个 C.3个 D.4个 E.5个



将圆的方程配方得 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = (2\sqrt{2})^2$

圆心为 $(-1, -2)$, 半径 $r = 2\sqrt{2}$

圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|-1 - 2 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2} = \frac{r}{2} < r$

圆心到直线距离为半径的一半, 故圆与直线 l 相交于两点

圆上有三个点到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：分房问题与分堆分配问题

【分堆分配】与【分房法】本质并不矛盾, 计算结果也一致.

	分堆分配	分房问题
相同点	把 n 个不同元素分配给 m 个不同对象	
不同点	每个对象至少分得一个元素	意味着有对象可能不分得元素

分房问题中有两类要素:

- ①必须被调用且只被调用一次的要素——指数
- ②可能不被调用的要素——底数

分房问题方法数 $= m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^n$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：分房问题与分堆分配问题

【例题】四位同学去选择甲、乙、丙三个课外活动，求以下要求下方法数。

(1) 每人只选一个活动参加 【题型定位】分房模型

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$$

盯住必须被调用且只用一次的要素：每个人只能选一次，分4步让4个人选完
有的活动可能被多个同学选中，也有的活动可能一个同学也没选

(2) 每人只选一个活动参加，每个活动都有人选 【题型定位】分堆分配

①先将4位同学分为 $[1+1+2]$ 三堆，②再将3堆同学按要求分配给3个课外小组

$$\frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^2}{A_2^2} \times A_3^3 = 6 \times 6 = 36$$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：分房问题与分堆分配问题

【例题】单位组织3项不同的培训，有5人备参加，每项培训根据要求选其中一人进行培训，无额外要求，则不同的培训方法有 5^3 种。

两类要素：①必须被调用且只被调用一次的要素——指数

②可能不被调用的要素——底数

盯住必须被调用且只用一次的要素：3项培训，每项必须选且只能选择一人进行培训

$$5^3 = 125 = 5 \times 5 \times 5$$

3为指数
5自然就为底数

分3步让3项培训选完人

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：分房问题与分堆分配问题

【例题】有5人报名参加3项不同的培训，每人都只报一项，则不同的报法有（ A ）。

A.243种 B.125种 C.81种 D.60种 E.以上结论均不正确

两类要素：①必须被调用且只被调用一次的要素——指数

②可能不被调用的要素——底数

盯住必须被调用且只用一次的要素：5个人，每人必须报名且只报名一项培训

$$3^5 = 243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

5为指数
3自然就为底数 分5步让5人选完培训

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜 排列组合：总体剔除法**

排列组合

总体剔除法

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：总体剔除法

总体剔除法：所求方法数 = 总方法数 - 对立面方法数

➤ 至少问题：总体剔除法

【标志词汇】[至少]问题 \Rightarrow 总体剔除

例如：可能取值：0, 1, 2, 3

至少一个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 一个也没有 (0个) 至少2个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 有0个或1个

至多一个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 2个或3个 至多2个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 3个

➤ 非的问题：总体剔除法

➤ 正难则反：总体剔除法

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：总体剔除法

【2023.05】某公司财务部有2名男员工，3名女员工，销售部有4名男员工，1名女员工。现要从中选2名男员工，1名女员工组成工作小组，并要求每部门至少有1名员工入选，则工作小组的构成方式有 (D) 种。 【标志词汇】[至少]问题 \Rightarrow 总体剔除

A.24 B.36 C.50 D.51 E.68

每部门至少1名员工 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ [全是财务部员工] or [全是销售部员工]

第一步：计算总方法数。从2个部门共[2 + 4 = 6男][3 + 1 = 4女]中选2男1女， $C_6^2 \times C_4^1 = 60$

第二步：计算对立面方法数。 $\left. \begin{array}{l} 2男1女全来自财务部, \quad C_2^2 \times C_3^1 = 3 \\ 2男1女全来自销售部, \quad C_4^2 \times C_1^1 = 6 \end{array} \right\} 3 + 6 = 9$

第三步：总体剔除。小组构成方式有 $60 - 9 = 51$ (种)

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：总体剔除法

总体剔除法：所求方法数 = 总方法数 - 对立面方法数

➤ **至少问题：总体剔除法** 【标志词汇】[至少]问题 \Rightarrow 总体剔除

➤ **非的问题：总体剔除法** 【标志词汇】[非]的问题 \Rightarrow 总体剔除

2人来自不同学科 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 2人来自相同学科

乙队没有领先过 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 乙队领先过

➤ **正难则反：总体剔除法** 【标志词汇】正难则反 \Rightarrow 总体剔除

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜 排列组合：总体剔除法**

【2019.14】某中学的5个学科各推举2名教师作为支教候选人，若从中选派来自不同学科的2人参加支教工作，则不同的选派方式有（ D ）种。

A.20

B.24

C.30

D.40

E.45

【标志词汇】[非]的问题 \Rightarrow 总体剔除

2人来自不同学科 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 2人来自相同学科

第一步：计算总方法数. 从5个学科共10名教师中选2人， $C_{10}^2 = 45$

第二步：计算对立面方法数. 2人来自同一学科， $C_5^2 = 5$

第三步：总体剔除. 不同的选派方式有 $45 - 5 = 40$ （种）

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：总体剔除法

【2022.12】甲乙两支足球队进行比赛，比分为4:2，且在比赛过程中乙队没有领先过，则不同的进球顺序有（ C ）。



A. 6种

B. 8种

C. 9种

D. 10种

E. 12种

【标志词汇】[非]的问题⇒总体剔除 乙队没有领先过 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 乙队领先过

第一步：计算总方法数. 从6个进球中选出乙进的2球，方法数为 $C_6^2 = 15$

第二步：计算对立面方法数.

情况①：第1球乙进，剩余5球中乙进一球；方法数为 $1 \times C_5^1 = 5$

情况②：第2,3球乙进，其余4球均为甲进. 方法数为1

第三步：总体剔除. 不同的进球顺序有 $15 - 5 - 1 = 9$ (种)

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：总体剔除法

【2009.01.10】湖中有四个小岛，它们的位置恰好近似构成正方形的四个顶点. 若要修建三座桥将这四个小岛连接起来，则不同的建桥方案有（ B ）种。 【标志词汇】正难则反⇒总体剔除法.

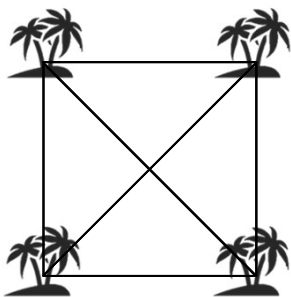
A. 12

B. 16

C. 13

D. 20

E. 24



第一步：计算总方法数.

从正方形四边及对角线共6条线中任取3条修桥， C_6^3

第二步：计算对立面方法数. 4个小岛连接起来 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 出现孤岛

当3条线构成一个三角形时将出现孤岛，共4种



第三步：总体剔除. 共有 $C_6^3 - 4 = 16$ 种

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 排列组合：总体剔除法

总体剔除法：所求方法数 = 总方法数 - 对立面方法数

➤ **至少问题：总体剔除法** 【标志词汇】 [至少]问题 \Rightarrow 总体剔除

至少一个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 一个也没有 (0个) 至少2个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 有0个或1个

➤ **非的问题：总体剔除法** 【标志词汇】 [非]的问题 \Rightarrow 总体剔除

乙队没有领先过 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 乙队领先过 2人来自不同学科 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 2人来自相同学科

➤ **正难则反：总体剔除法** 【标志词汇】 正难则反 \Rightarrow 总体剔除

当题目中从正面求解困难时，采用总体剔除法，从对立面求解。

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜****概率****正难则反：对立事件法**

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 概率：对立事件法



对于同一个事件，发生与不发生，互为对立事件，概率和为1，即 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

【标志词汇】正难则反 \Rightarrow 对立事件法

可能取值：0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

至少一个 $\xleftrightarrow{\text{对立事件}}$ 一个也没有

至少2个 $\xleftrightarrow{\text{对立事件}}$ 有0个或1个

至多一个 $\xleftrightarrow{\text{对立事件}}$ 大于一个，2~n个

至多2个 $\xleftrightarrow{\text{对立事件}}$ 大于2个，3~n个

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 概率：对立事件法

【例题】某公司有9名工程师，6男3女，从中任意抽调4人组成攻关小组，则：(用组合数表示)

(1) 恰好包含一名女工程师的概率为 $\frac{C_3^1 \times C_6^3}{C_9^4}$. (2) 至少包含一名女工程师的概率为 $1 - \frac{C_6^4}{C_9^4}$.

第一步：计算总方法数 C_9^4

第二步：计算满足要求的方法数 恰包含一女 \Leftrightarrow [1女]and[3男] $C_3^1 \times C_6^3$

第三步：相除得概率 $P = \frac{C_3^1 \times C_6^3}{C_9^4} = \frac{10}{21}$

可能抽调到女工程师人数：0, 1, 2, 3, 4

至少包含一名女工程师 $\xleftrightarrow{\text{对立事件}}$ 一个女工程师也没有，即全为男工程师

$P(\text{至少包含一名女}) = 1 - P(\text{全为男}) = 1 - \frac{C_6^4}{C_9^4}$

扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 概率：对立事件法

【2021.14】从装有1个红球，2个白球，3个黑球的袋中随机取出3个球，则这3个球的颜色至多有二种的概率（ E ）。

A.0.3

B.0.4

C.0.5

D.0.6

E.0.7

【标志词汇】至多/至少问题⇒对立事件法 正难则反

三个球颜色至多有二种 $\xleftrightarrow{\text{对立事件}}$ 这三个球恰分别为三种颜色

$$P(\text{三个球三种颜色}) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_3^1}{C_6^3} = \frac{6}{20} = 0.3$$

三个球分别从三个不同备选池选取

$$P(\text{三个球颜色至多有二种}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

扫码领取
PPT讲义

**2025三天三夜 概率：对立事件法**

【2011.01.08】将2个红球与1个白球随机地放入甲、乙、丙三个盒子中，则乙盒中至少有1个红球的概率为（ D ）。

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{8}{27}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{5}{9}$ E. $\frac{17}{27}$

【标志词汇】至多/至少问题⇒对立事件法 正难则反

乙盒中至少有1个红球 $\xleftrightarrow{\text{对立事件}}$ 乙盒中一个红球也没有

$$P(\text{乙盒中至少有1个红球}) = 1 - P(\text{乙盒中一个红球也没有})$$

$$= 1 - \frac{C_3^1 \times 2^2}{3^3} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

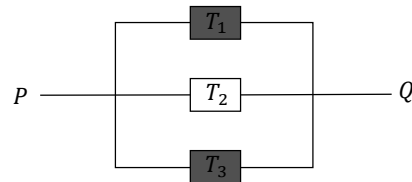
扫码领取
PPT讲义



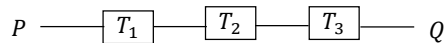
2025三天三夜 概率：对立事件法

【常见至少问题现实场景】

1. 多次射击后击中 \Leftrightarrow 至少有一次击中
2. 多个警报器有效报警 \Leftrightarrow 至少有一个警报器有效报警
3. 多次抽奖后中奖 \Leftrightarrow 至少有一次中奖
4. 并联电路电流通过 \Leftrightarrow 至少有一路电流通过



【拓展】串联电路电流通过 \Leftrightarrow 每一个元器件均通过，乘法公式.



扫码领取
PPT讲义



2025三天三夜 概率：对立事件法

【2013.01.20】（条件充分性判断）档案馆在一个库房中安装了 n 个烟火感应报警器，每个报警器遇到烟火发出警报的概率均为 p .该库房遇烟火发出警报的概率达到0.999. （ D ）

(1) $n = 3, p = 0.9$ (2) $n = 2, p = 0.97$ 发出警报 \Leftrightarrow [至少]有一个报警器发出警报

【标志词汇】至少问题 \Rightarrow 对立事件法 正难则反

条件 (1) : 共3个报警器，每个发出警报的概率为0.9，不发出警报概率为 $1 - 0.9 = 0.1$

$$P(\text{至少有一个报警}) = 1 - P(\text{全不报警}) = 1 - 0.1^3 = 0.999$$

条件 (2) : 共2个报警器，每个发出报警的概率为0.97，不发出警报概率为 $1 - 0.97 = 0.03$

$$P(\text{至少有一个报警}) = 1 - P(\text{全不报警}) = 1 - 0.03^2 = 0.9991 > 0.999$$

扫码领取
PPT讲义



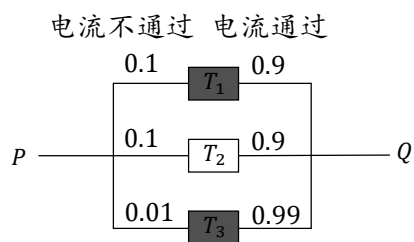
2025三天三夜 概率：对立事件法

【2021.06】如图，由P到Q电路中有三个元件，分别为 T_1, T_2, T_3 ，电流能通过 T_1, T_2, T_3 概率分别为0.9, 0.9, 0.99.假设电流能否通过三个元件相互独立，则电流能在P、Q之间通过的概率是（ D ）.

A.0.8019 B.0.9989 C.0.999 D.0.9999 E.0.99999

电流能在P、Q之间通过 $\Leftrightarrow T_1, T_2, T_3$ 中至少有一个电流可以通过

【标志词汇】至少问题 \Rightarrow 对立事件法 正难则反



$$\begin{aligned} P(\text{至少有一个电流可以通过}) &= 1 - P(\text{电流全不通过}) \\ &= 1 - 0.1 \times 0.1 \times 0.01 = 0.9999 \end{aligned}$$

对立事件常见应用场景：

直接型至少/至多问题

击中/报警/中奖/通过等隐含至少概念的问题

正向计算困难的问题.

扫码领取
PPT讲义



**祝大家
拥有考试
超好运!!!**