2024零基础抱佛脚

（九）

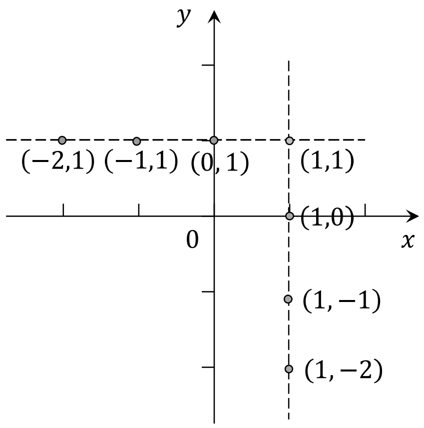
数学—阿董

抱佛脚

讲义P82-P92

章节	题目个数	举例个数	总数
09解析几何	2	0	2
10排列组合	23	12	35

解析几何 9.4 解析几何的动态理解·圆的动态理解

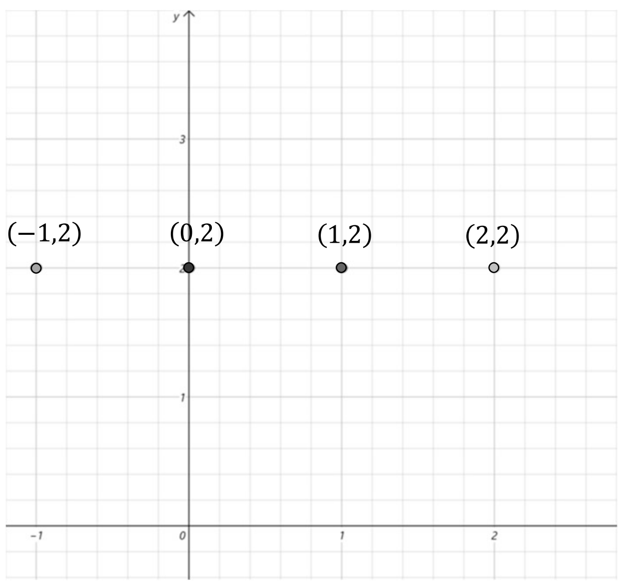


横坐标决定左右
⇩
$P(x,y)=P($横坐标，纵坐标$)$
⇧
纵坐标决定高低

一点上下平移，横坐标不变，
即在同一竖直直线上的点的横坐标相同.

一点左右平移，纵坐标不变，
即在同一水平直线上的点的横坐标相同.

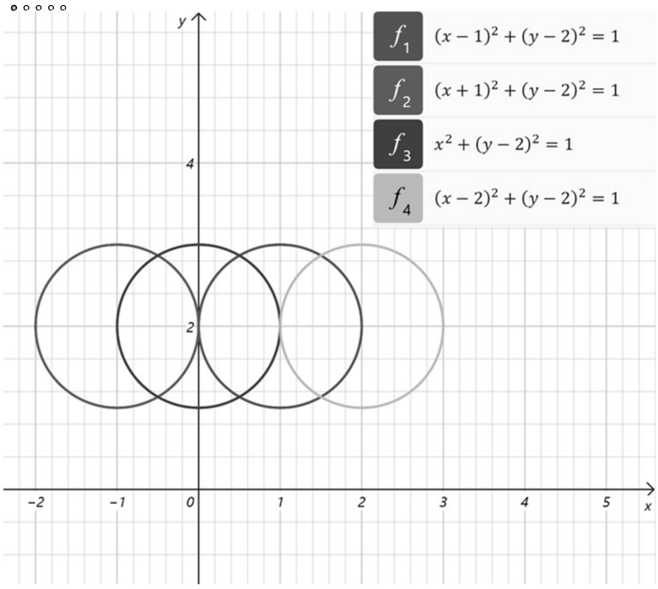
解析几何 9.4 解析几何的动态理解·圆的动态理解



横坐标决定左右
⇩
$P(x,y)=P($横坐标，纵坐标$)$
⇧
纵坐标决定高低

这些点横坐标不一样，即左右不一样
但是纵坐标都为2，即高低都一样
从动态角度看
它们为沿水平直线移动的一系列点

解析几何 9.4 解析几何的动态理解·图形过定点



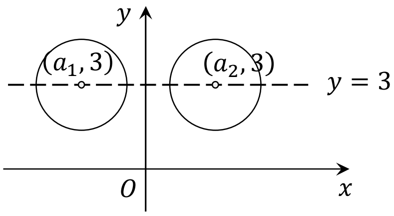
圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

若圆心纵坐标为一定值

即标准方程中的b为常数（一个确定的数）

而标准方程中的a为一个未知字母

则圆随着a的变化沿$y=b$水平移动

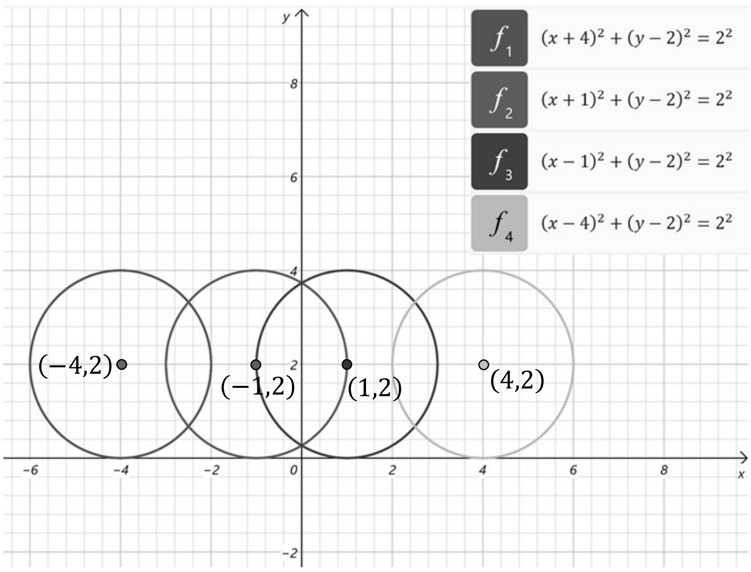


例如$(x-a)^2+(y-3)^2=r^2$

代表圆心沿水平直线$y=3$移动

也即整个圆沿水平直线移动

解析几何 9.4 解析几何的动态理解·圆的动态理解



圆的方程$(x-a)^2+(y-r)^2=r^2$

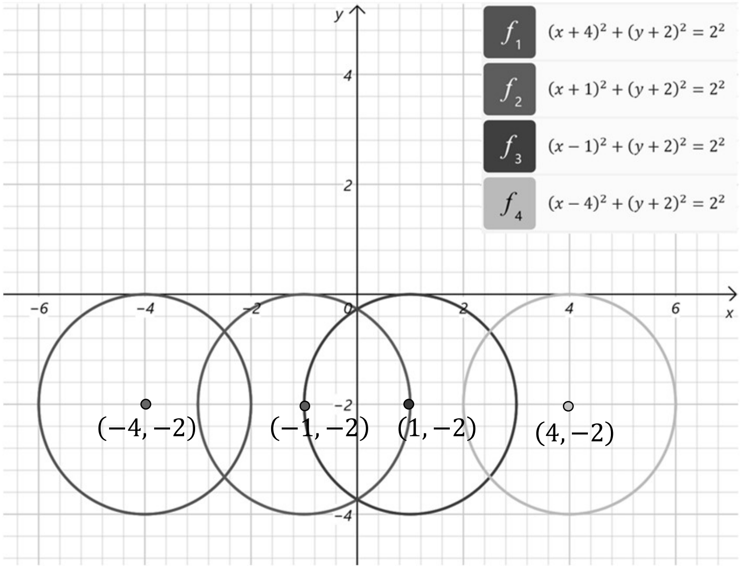
若圆心纵坐标$b=r$

而a为一个未知字母

则此时圆在x轴上方与圆相切

圆随着a的变化沿$y=r$水平移动

解析几何 9.4 解析几何的动态理解 · 圆的动态理解



圆的标准方程$(x-a)^2+(y+r)^2=r^2$

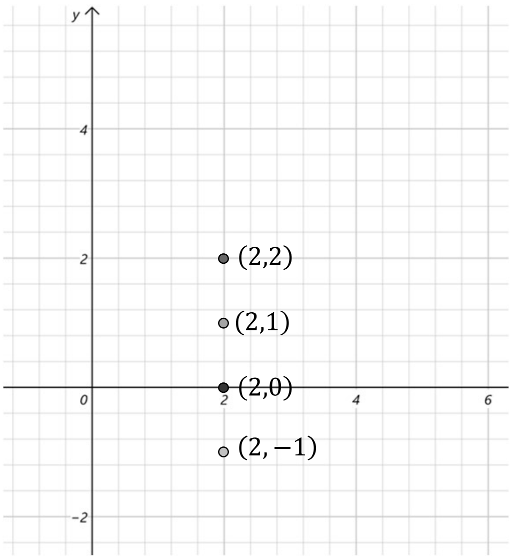
若圆心纵坐标$b=-r$

而a为一个未知字母

则此时圆在x轴下方与圆相切

圆随着a的变化沿$y=-r$水平移动

解析几何 9.4 解析几何的动态理解 · 圆的动态理解



横坐标决定左右

⇩

$P(x,y)=P$(横坐标，纵坐标)

⇧

纵坐标决定高低

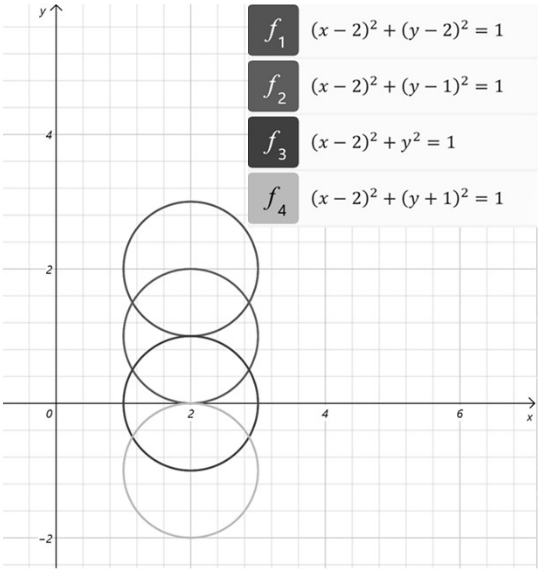
这些点纵坐标不一样，即高低不一样

但是横坐标都为2，即左右位置都一样

从动态角度看

它们为沿竖直直线移动的一系列点

解析几何 9.4 解析几何的动态理解・圆的动态理解



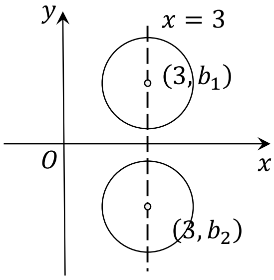
圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

若圆心横坐标为一定值

即标准方程中的a为常数（一个确定的数）

而标准方程中的b为一个未知字母

则圆随着b的变化沿$x=a$竖直移动



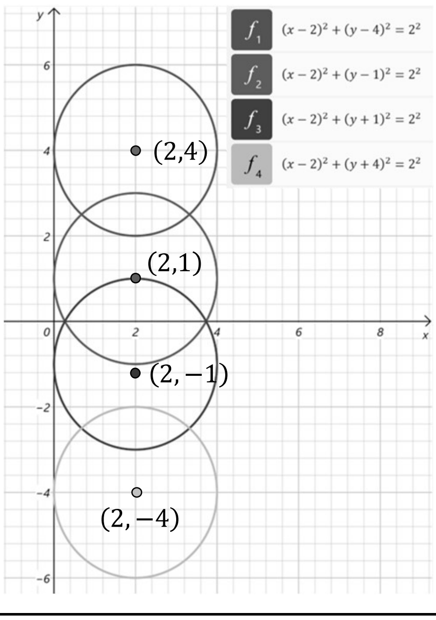
例如$(x-3)^2+(y-b)^2=r^2$

代表圆心沿竖直直线$x=3$移动

也即整个圆沿竖直直线移动

讲义 P83

解析几何 9.4 解析几何的动态理解・图形过定点



圆的方程$(x-r)^2+(y-b)^2=r^2$

若圆心纵坐标$a=r$

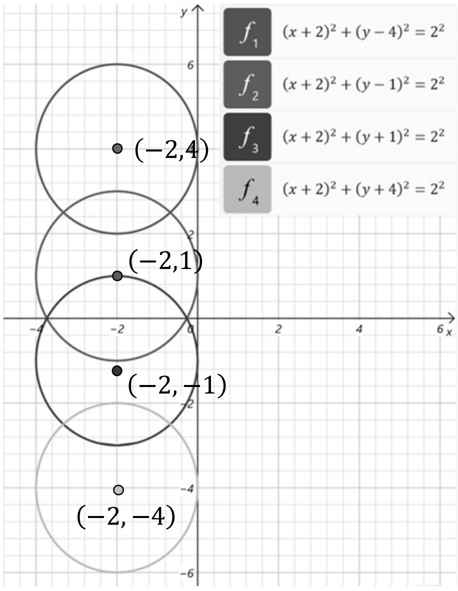
而b为一个未知字母

则此时圆在y轴右侧与圆相切

圆随着b的变化沿$x=r$竖直移动

讲义 P82

解析几何 9.4 解析几何的动态理解・圆的动态理解



圆的方程$(x+r)^2+(y-b)^2=r^2$

若圆心纵坐标$a=-r$

而b为一个未知字母

则此时圆在y轴左侧与圆相切

圆随着b的变化沿$x=-r$竖直移动

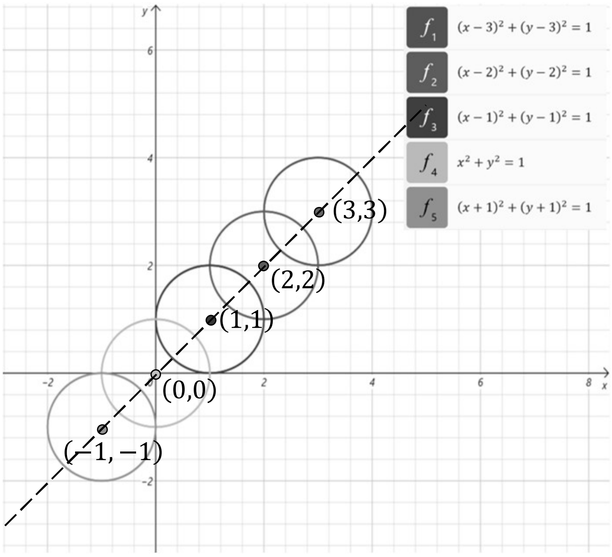
解析几何 9.4 解析几何的动态理解・圆的动态理解

9.【2023.20】 设集合$M=\{(x,y)|(x-a)^2+(y-b)^2\le 4\}$，$N=\{(x,y)|x>0,y>0\}$，则$M\cap N\ne\emptyset$.（　　）

（1）$a<-2$.　　　　（2）$b>2$.

答案：E

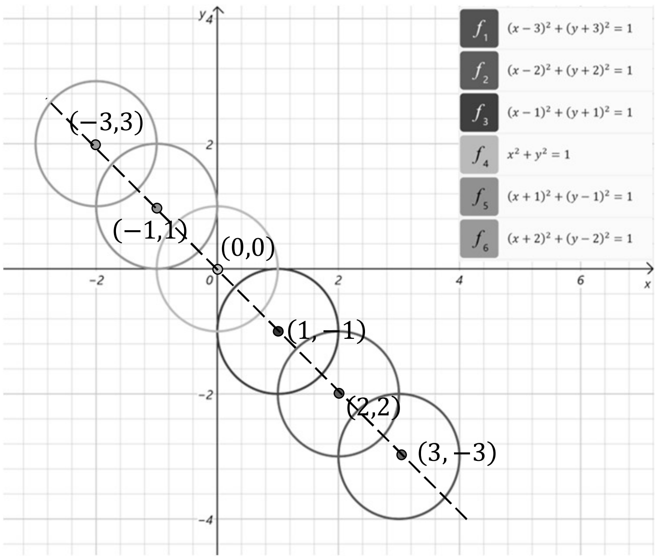
解析几何 9.4 解析几何的动态理解·图形过定点



这些圆的特征：
圆心横纵坐标相等
即圆的标准方程中$a=b$
可表示为$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$

此时：
圆心沿直线$y=x$移动
即整个圆沿$y=x$移动

解析几何 9.4 解析几何的动态理解·圆的动态理解



这些圆的特征：
圆心横纵坐标互为相反数
即圆的标准方程中$a=-b$
可表示为$(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$

此时：
圆心沿直线$y=-x$移动
即整个圆沿$y=-x$移动

解析几何 9.4 解析几何的动态理解·圆的动态理解

10.【2021.20】 设a为实数，圆C：$x^2+y^2=ax+ay$，则能确定圆C的方程.（　　）

（1）直线$x+y=1$与圆C相切.　　　（2）直线$x-y=1$与圆C相切.

答案：A

解析几何

解析几何	9.1圆	近5年考3题 【2021.10】圆—结合四边形 【2020.17】直线与圆 【2019.18】直线与圆
	9.3两变量不等式的数形结合法	近5年考1题 【2021.21】两变量不等式的数形结合法
	9.4解析几何的动态理解	近5年考2题 【2023.20】圆的动态理解 【2021.20】圆的动态理解

计数原理与排列组合

2024MBA大师零基础抱佛脚

排列组合

- 每年2~3题（真题中共考过47题，其中2023年3题）
- 底层逻辑：加法原理与乘法原理
  分类讨论　分步完成
- 排列组合是古典概型的基础
- 难点在于列式，需要掌握并遵从固定套路

排列组合

计数原理与排列组合	10.1基础知识	近5年考3题 【2023.15】全排列的作用-消序 【2022.10】加法原理　　【2022.15】乘法原理
	10.2组合问题：从不同备选池选取	近5年考2题 【2021.08】每个备选池均选出元素 【2019.14】仅从部分备选池选出元素
	10.3组合问题：从相同备选池选取	近5年考1题 【2020.15】分堆分配
	10.6特殊位置要求	近5年考1题 【2023.08】相邻问题与不邻问题
	10.7总体剔除法	近5年考2题 【2023.05】[至少]问题　　【2022.12】[非]的问题

排列组合

第十章 计数原理与排列组合

10.1 基础知识

讲义 P85-P88

排列组合 10.1 加法原理与乘法原理

【举例】从甲地到乙地，可以乘火车、汽车或者轮船，一天中火车有2班次，汽车有4班次，轮船有3班次，那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法？（　　）

A.3　　B.4　　C.6　　D.9　　E.24

答案：D

讲义 P85

排列组合 10.1 加法原理与乘法原理

分类计数原理/加法原理

如果完成一件事有n类不同方案，第1类方案中有m_1种不同方法，第2类方案中有m_2种不同方法，以此类推，第n类方案有m_n种不同方法.若不论用哪一类方案中的哪一种方法，都可以完成此事，则完成这件事共有：

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同方法.

讲义 P85

排列组合 10.1 加法原理与乘法原理

出门穿搭有
$3 \times 2 = 6$种方法

出门穿搭有
$3 \times 2 \times 4 = 24$种方法

完成一件事需要经过[几步]，每一步有多种方法完成，这几个步骤缺一不可.

大师笔记：加法原理与乘法原理　讲义 P85

排列组合 10.1 加法原理与乘法原理

分类计数原理/加法原理

如果完成一件事有n类不同方案，第1类方案中有m_1种不同方法，第2类方案中有m_2种不同方法，以此类推，第 n类 方案有 m_n 种不同方法.若不论用哪一类方案中的哪一种方法，都可以完成此事，则完成这件事共有：

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同方法.

分步计数原理/乘法原理

如果完成一件事需要经过n个步骤，做第1步有m_1种不同的方法，做第2步有m_2种不同的方法，以此类推，做第n步有m_n种不同的方法.则完成这件事共有：

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

种不同方法.

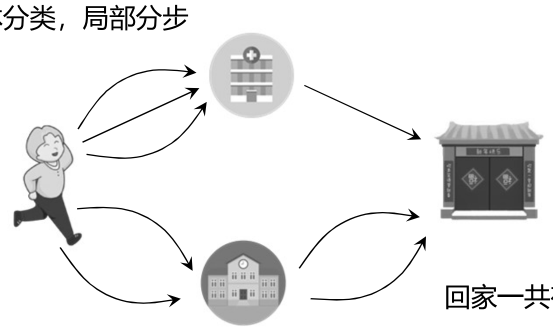
讲义 P85

排列组合 10.1 加法原理与乘法原理

加法原理和乘法原理研究的都是关于完成一件事情不同的方法数的问题.

加法原理	分类	一类就能完成	做完了
乘法原理	分步	每步缺一不可	没做完

整体分类，局部分步



回家一共有$3\times1+2\times2=7$种方法.

排列组合 10.1 加法原理与乘法原理

1.【例题】将8本书分给5个人，没有其他限制，不同的分书情况共有______种.

答案：5^8

排列组合 10.1 加法原理与乘法原理

1.【例题】将8本书全分给5个人，没有其他限制，不同的分书情况共有______种.

答案：5^8

2.【例题】5个人参加读书会，每个人只能选择一本书读，共有8本书备选，并且多人可以选择读同一本书一起读，不同的选书情况共有_______种.

答案：8^5

讲义 P86

排列组合 10.1 加法原理与乘法原理

3.【例题】集合$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$的不同的子集有多少个？

答案：2^{10}

讲义 P86

排列组合 10.1 排列数

【举例】10个人参加吃瓜大赛，从中任选出冠亚季军，有多少种方法？

答案：$10\times 9\times 8$

大师笔记：排列数 讲义 P86

排列组合 10.1 排列数

【举例】10个人参加吃瓜大赛，全体任排名次，有多少种排法？

答案：$10\times 9\times 8\times \cdots \times 2\times 1$

讲义 P86

排列组合 10.1 排列数

A □ ⟶ 向下连续数几个数相乘
  □ ⟶ 从几开始

10人中任选出前三名共有：$10\times9\times8$种方法 A_{10}^{3}

10人中任选出前四名共有：$10\times9\times8\times7$种方法 A_{10}^{4}

10人全体任排名次共有：$10\times9\times8\times\cdots\times2\times1$种方法 A_{10}^{10}

排列组合 10.1 排列数

【排列与排列数】 从n个不同的元素中，任取m个元素（$m\le n$），按照一定的顺序排成一列，（有顺序）
称为从n个不同元素中抽取m个元素的一个排列.
所有这些不完全相同的排列的个数称为排列数，记为A_n^m.

$A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)=$ 从n开始由大往小，连续m个数相乘

A □ ⟶ 选出几个元素（有序）
  □ ⟶ 从几个元素中选

$A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!=$ 从n开始由大往小，连乘至1　n的全排列/n的阶乘

$5!=5\times4\times3\times2\times1$　　**规定$A_n^0=0!=1$**

排列组合 10.1 排列数

有顺序

【排列与排列数】 从n个不同的元素中，任取m个元素（$m \le n$），按照一定的顺序排成一列，

称为从n个不同元素中抽取m个元素的一个排列.

所有这些不完全相同的排列的个数称为排列数，记为A_n^m.

$\mathrm{A}_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1) =$ 从n开始由大往小，连续m个数相乘

10个人中选出前4名 A_{10}^4

10个人选出4人排成一队 A_{10}^4

10个人中选出4人依次表演节目 A_{10}^4

10个人中选出4人担任不同工作 A_{10}^4

10个人中选出4人依次坐座位 A_{10}^4

A □ ⟶ 选出几个元素（有序）
　□ ⟶ 从几个元素中选

排列组合 10.1 全排列的作用

【A_n^n的作用】给n个没有顺序的元素添加顺序（排队）

【举例】 将4个人排成一队，共有多少种排列方法?

答案：24

【举例】 将4个人排成一队，其中甲必须站排头，共有多少种排列方法?

答案：6

排列组合 10.1 全排列的作用

【A_n^n的作用】①给n个没有顺序的元素添加顺序（排队）

②将两组（均包含n个元素）元素一一配对.

【举例】有3本书，将其分给甲、乙、丙三个人，每人一本，有多少种分法.

答案：A_3^3

排列组合 10.1 组合数

有5盘菜，张三、李四各选一盘.

独自吃：为5选2的排列问题

$A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

两人拼桌吃 $A_5^2 \div 2 = 10$

每1种拼桌吃法在独自吃的算法中都被算为2种

排列组合 10.1 组合数

有5盘菜，张三、李四、王五各选一盘.

独自吃：为5选3的排列问题

$A_5^3 = 5\times4\times3 = 60$

张三	李四	王五
鱼	虾	包子
鱼	包子	虾
虾	鱼	包子
虾	包子	鱼
包子	鱼	虾
包子	虾	鱼

三人拼桌吃$C_5^3 = \frac{A_5^3}{A_3^3}$　　$C_5^2 = \frac{A_5^2}{A_2^2}$

每1种拼桌吃法在独自吃的算法中都被算为$A_3^3 = 6$种

讲义 P86

排列组合 10.1 排列数与组合数

排列与排列数A_n^m　从n个不同的元素中，任取m个元素（$m\le n$），**按照一定的顺序排成一列**，
称为从n个不同元素中抽取m个元素的一个**排列**.
所有这些不完全相同的排列的个数称为**排列数**，记为A_n^m.

组合与组合数C_n^m　从n个不同的元素中，任取m个元素（$m\le n$），**不论顺序组成一组**，
称为从n个元素中取出m个元素的一个**组合.**　只管选出元素，不管先后顺序
所有这些不完全相同的组合的个数称为**组合数**，记为C_n^m.

$A_{\square}^{\square}$：上□ ⟶ 选出几个元素（有序）；下□ ⟶ 从几个元素中选

$C_{\square}^{\square}$：上□ ⟶ 选几个元素（无序）；下□ ⟶ 从几个元素中选

讲义 P86

排列组合 10.1 排列数与组合数

【组合数C_n^m】从n个不同的元素中，一把抓出m个元素（$m \le n$）的不完全相同组合结果的个数.

【排列数A_n^m】从n个不同的元素中，依次抓出m个元素（$m \le n$）的不完全相同排列结果的个数.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m}$$

$A_n^m \longrightarrow$ 从n个不同元素中依次抓出m个元素

$A_m^m \longrightarrow$ 消去其中m个元素的顺序（此即消序）

$$A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$$

$C_n^m \longrightarrow$ 一把抓出m个元素

$A_m^m \longrightarrow$ 给m个元素添加顺序

【先选再排原则】

【举例】有5盘菜，张三、李四、王五各选一盘独自吃的方法数为：

$C_5^3 \times A_3^3$　先选再排原则

排列组合 10.1 全排列的作用

有5盘菜，张三、李四、王五各选一盘.

独自吃：$C_5^3 \times A_3^3$

张三	李四	王五
鱼	虾	包子
虾	鱼	包子
鱼	包子	虾
包子	鱼	虾
虾	包子	鱼
包子	虾	鱼

其中两人拼桌吃 $\frac{C_5^3 \times A_3^3}{A_2^2}$

$\frac{C_n^m \times A_m^m}{A_p^p}$

$C_n^m \times A_m^m$　从n个不同元素一把抓出m个元素，并全部排序

A_p^p　消去其中p个元素的顺序

排列组合 10.1 组合数

【组合数C_n^m】从n个不同的元素中，一把抓m个元素（$m \le n$）的不完全相同组合结果的个数.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{\text{从}n\text{个元素中有序选出}m\text{个}}{\text{消去}m\text{个元素的顺序}}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdots 1} = \frac{\text{从}n\text{开始由大往小，数}m\text{个数连乘}}{\text{从}m\text{开始往小连乘至}1}$$

20个人中选三人：$C_{20}^3 = \frac{A_{20}^3}{A_3^3} = \frac{\overbrace{20 \times 19 \times 18}^{3\text{个数}}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3\text{个数}}} = 1140$

五个人中选出两人：$C_5^2 = \frac{A_5^2}{A_2^2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

排列组合 10.1 排列数与组合数


鱼


鸡


包子


鸭


虾

5盘菜任选两盘：$C_5^2 = 10$种

从5盘不同的菜中，任取2盘，不论顺序组成一组，称为一个组合，例如：{鱼, 虾}
所有这些不完全相同的组合的个数称为组合数，记为C_5^2.

{鱼, 鸡}	{鸡, 包子}	{包子, 鸭}	{鸭, 虾}
{鱼, 包子}	{鸡, 鸭}	{包子, 虾}	
{鱼, 鸭}	{鸡, 虾}		
{鱼, 虾}			

排列组合 10.1 组合数

4.【2012.01.05】某商店经营15种商品，每次在橱窗内陈列5种，若每两次陈列的商品不完全相同，则最多可陈列（　　）.

A.3000次　　B.3003次　　C.4000次　　D.4003次　　E.4300次

答案：B

讲义 P86

排列组合 10.1 排列数与组合数

➢ 组合数性质$C_n^m = C_n^{n-m}$　　$C_n^0 = 1$

C_{20}^3：从20人中选出3人获奖.

C_{20}^{17}：从20人中选出17人未获奖.

分别从正反两个角度计算同一个事件的方法数

$C_{20}^3 = C_{20}^{20-3} = C_{20}^{17}$　　$C_{1000}^{999} = C_{1000}^{1000-999} = C_{1000}^1 = 1000$　　$C_n^1 = n$

➢ 常用排列数与组合数

$A_3^3 = 3! = 6$　　$C_3^1 = C_3^2 = 3$

$A_4^4 = 4! = 24$　　$C_4^2 = 6$

$A_5^5 = 5! = 120$　　$C_5^2 = C_5^3 = 10$

$A_6^6 = 6! = 720$　　$C_6^2 = C_6^4 = 15$　　$C_6^3 = 20$

讲义 P86

排列组合 10.1 解题要点

- 原则（一）只能计算[格局确定]的方法数 全局格局唯一确定，不可继续再分情况讨论.
- 原则（二）[元素]默认不同，[组]默认相同

  相同元素主要有：①题目中指明相同

  ②数字等抽象概念和名额、岗位、空座位等具有相同功能元素.
- 原则（三）确认[相同备选池]和[不同备选池]
- 原则（四）先选再排

  选元素时，先用组合数选取所需元素，再根据要求用全排列添加顺序.

  排队列时，先全排列，再根据局部定序/相同进行消序.
- 原则（五）未指明的⇒要明确选出是哪一个
- 原则（六）特殊属性元素优先处理

排列组合 10.1 解题要点

- 解题原则：确认[相同备选池]和[不同备选池].

  需要区分选取要求是根据不同属性元素分别选取，[不同备选池]

  还是将所有元素无差别对待，看做一个整体进行选取. [相同备选池]

【举例】羽毛球有4名男运动员和3名女运动员，求从中选出4人参加比赛的方法数.

答案：35

排列组合 10.1 解题要点

【举例】羽毛球有4名男运动员和3名女运动员，从中选出两男两女，则不同的选取方法有（　　）种.

A.18　　B.36　　C.72　　D.9　　E.24

答案：A

讲义 P86

排列组合 10.1 解题要点

➢ 一般题目中的特殊元素指的是题目对元素有特殊要求，或元素具有特殊属性/功能

主要表现为：（1）是否有某两元素必须相邻/不相邻的要求

（2）是否有某元素必须排在/不能排在某位置的要求

（3）是否有特殊功能的元素（偶数、末尾为0或5的数、双重功能元素）

元素的非全选常与特殊元素同时出现，

当备选元素具有特殊元素且仅部分元素被选中时，需要分情况讨论，

即分特殊元素被选中与不被选中两种情况讨论.

讲义 P87

排列组合 10.1 解题要点

➢ 解题原则：特殊属性元素优先处理

【举例】从0、1、2、3、5、7、11七个数字中每次取两个相乘，不同的积有______种.

答案：16

讲义 P87

排列组合 10.1 全排列的作用

➢ **解题原则：先选再排**

$$\mathrm{A}_m^n=\mathrm{C}_m^n\times\mathrm{A}_n^n$$

$\mathrm{C}_m^n \longrightarrow$ 一把抓出n个元素（无序）

$\mathrm{A}_n^n \longrightarrow$ 给这n个元素添加顺序

【乘以A_n^n】给n个没有顺序的元素添加顺序（排队）

【乘以A_n^n】将两组（均包含n个元素）元素一一配对.

➢ **解题原则：相同/重复/定序元素消序**

$$\frac{\mathrm{C}_m^n\times\mathrm{A}_n^n}{\mathrm{A}_p^p}$$

$\mathrm{C}_m^n\times\mathrm{A}_n^n \longrightarrow$ 从m个不同元素一把抓出n个元素，并全部排序

$\mathrm{A}_p^p \longrightarrow$ 消去其中p个元素的顺序区别

【除以A_p^p】将p个已有顺序元素的顺序消去（即消序）

大师笔记：全排列的作用　讲义 P87

排列组合 10.1 全排列的作用

➢ **解题原则：先选再排** $A_m^n = C_m^n \times A_n^n$

【乘以A_n^n】给n个没有顺序的元素添加顺序（排队）

【乘以A_n^n】将两组（均包含n个元素）元素一一配对.

5.【例题】求下列方法数.

7个人全部排成一队 A_7^7

7个人中选出5个排成一队 $C_7^5 \times A_5^5$

将两本书分配给甲、乙两人，每人一本 A_2^2

将3只队伍命名为甲、乙和丙 A_3^3

排列组合 10.1 全排列的作用

排列时遇到**【标志词汇】**局部元素定序/相同⇒局部有几个元素定序/相同，就除以几的全排列.

【举例】三个球分别标号为1、2、3，其中1、2号为蓝球，3号为黑球，一共有_______种排列方法.

答案：6

【举例】将这三个球排序，其中蓝球按序号从小到大排列，一共有_________种排列方法.

答案：3

排列组合 10.1 全排列的作用

排列时遇到**【标志词汇】**局部元素定序/相同⇒局部有几个元素定序/相同，就除以几的全排列.

【举例】三个球分别标号为1、2、3，其中1、2号为蓝球，3号为黑球，一共有______种排列方法.

答案：6

【举例】将这三个球排序，其中蓝球序号磨损，视为相同蓝球，一共有_______种排列方法.

答案：3

讲义 P87

排列组合 10.1 全排列的作用

【除以A_m^m】将m个已有顺序的元素的顺序区别消去（即消序）

【标志词汇】局部元素定序/相同⇒局部有几个元素定序/相同，就除以几的全排列.

有几组元素定序/相同，就分别除以各组元素数的全排列.

6.**【例题】**下面的问题分别有多少种排法.

（1）将ABCDE五个字母进行排列 A_5^5

（2）将ABCDD五个字母进行排列 $\frac{A_5^5}{A_2^2}$

（3）将ABCCC五个字母进行排列 $\frac{A_5^5}{A_3^3}$

讲义 P87

排列组合 10.1 全排列的作用

【**密西西比法则**】排列组合中快速计算有重复/相同/定序元素题目的方法.

排列时遇到【**标志词汇**】局部元素定序/相同⇒局部有几个元素定序/相同，就除以几的全排列.

有几组元素定序/相同，就分别除以各组元素数的全排列.

7.【例题】如果把mississippi（密西西比）这个单词的字母打乱顺序进行随机排列，请问一共有多少种不同的排列方式？（用排列数组合数表示）

答案：$\dfrac{A_{11}^{11}}{A_4^4\times A_4^4\times A_2^2}$

讲义 P88

排列组合 10.1 全排列的作用

排列时遇到【**标志词汇**】局部元素定序/相同⇒局部有几个元素定序/相同，就除以几的全排列.

8.【例题】有5个人，其中3个男生，2个女生，求下列各要求下排列方法数.

（1）全体排队，共有多少种方法

（2）全体排队，其中要求男生按身高由低至高排

（3）全体排队，要求男生之间按身高由低至高排，女生之间按身高由高至低排

（4）全体按照身高由低至高排队

答案：A_5^5；$\dfrac{A_5^5}{A_3^3}$；$\dfrac{A_5^5}{A_3^3\times A_2^2}$；1

讲义 P88

排列组合 10.1 全排列的作用

9.【2014.10.12】用0，1，2，3，4，5组成没有重复数字的四位数，其中千位数字大于百位数字且百位数字大于十位数字的四位数的个数是（　　）.

A.36　　B.40　　C.48　　D.60　　E.72

【标志词汇】局部元素定序⇒局部有几个元素定序，就除以几的全排列.

答案：D

讲义 P88

排列组合 10.1 全排列的作用

10.【2023.15】快递员收到3个同城快递任务，取送地点各不相同，取送件可穿插进行，不同的送件方式有（　　）种.

A.6　　B.27　　C.36　　D.90　　E.360

【标志词汇】局部元素定序⇒局部有几个元素定序，就除以几的全排列.

答案：D

讲义 P88

排列组合

10.1 排列与组合基础问题

11.【2022.10】一个自然数的各位数字都是105的质因数，且每个质因数最多出现一次，这样的自然数有（　　）个.

A.6　　B.9　　C.12　　D.15　　E.27

【标志词汇】[一个数]=[某些数的乘积] ⇒ 将此数因数分解.

答案：D

讲义 P88

排列组合

第十章 计数原理与排列组合

10.2 组合问题：从不同备选池选取

讲义 P89-P90

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

确认备选池

从**不同**备选池中选取　　从**相同**备选池中选取

每个备选池均选出元素　　仅从部分备选池选出元素

【一般问题】
直接用组合数从
不同备选池选取后相乘
格局确定

【至少问题】
分情况讨论
格局不确定

- 解题原则：乘法用来计算[格局确定]的方法数
- 解题原则：先选再排
- 解题原则：确认[相同备选池]和[不同备选池] 根据题目中选取要求区分

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

12.【2018.11】羽毛球有4名男运动员和3名女运动员，从中选出两对参加混双比赛，则不同的选派方式有（　　）.

A.9种　　B.18种　　C.24种　　D.36种　　E.72种

【标志词汇】元素配对⇒乘以A_n^n

答案：D

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

13.【2021.08】甲、乙两组同学中，甲组有3男3女，乙有4男2女，从甲、乙两组中各选出2名同学，这4人中恰有1女的选法有（　　）种.

A.26　　B.54　　C.70　　D.78　　E.105

【标志词汇】恰⇒等同于[有且仅有]，描述全局

答案：D

讲义 P89

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

确认备选池

从**不同**备选池中选取　　从**相同**备选池中选取

每个备选池均选出元素　　仅从部分备选池选出元素

【一般问题】
直接用组合数从
不同备选池选取后相乘
格局确定

【至少问题】
分情况讨论
格局不确定

- 解题原则：乘法用来计算[格局确定]的方法数
- 解题原则：先选再排
- 解题原则：确认[相同备选池]和[不同备选池] 根据题目中选取要求区分

讲义 P89

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

14.【例题】袋子中有5只红球，3只白球，任取4只，求取出的球至少2个白球的方法数有多少？

答案：35

讲义 P89

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

确认备选池

- 从**不同**备选池中选取
  - 每个备选池均选出元素
    - 直接选取后相乘
  - 仅从部分备选池选出元素
    - 各备选池内元素个数相同
      - ①先用组合数选备选池
      - ②再从选定的备选池中选取元素
    - 有备选池元素个数不同
- 从**相同**备选池中选取

讲义 P89

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

15.【2019.14】某中学的5个学科各推举2名教师作为支教候选人，若从中选派来自不同学科的2人参加支教工作，则不同的选派方式有（　　）种 .

A.20　　B.24　　C.30　　D.40　　E.45

答案：D

讲义 P89

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

【拓展】从5双不同的鞋中选取2只，要求这两只不成双，有______种选取方式.

答案：40

讲义 P89

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

- 确认备选池
  - 从**不同**备选池中选取
    - 每个备选池均选出元素
      - 直接选取后相乘
    - 仅从部分备选池选出元素
      - 各备选池内元素个数相同
        - ①先用组合数选备选池
        - ②再从选定的备选池中选取元素
      - 有备选池元素个数不同
        - 分情况讨论
        - 格局不确定
  - 从**相同**备选池中选取

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

16.【2016.06】某委员会由三个不同专业的人员组成，三个专业的人员分别是2，3，4，从中选派2位不同专业的委员外出调研，则不同的选派方式有（　　）.

A.36种　　B.26种　　C.12种　　D.8种　　E.6种

答案：B

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取·总结

从**不同**备选池中选取

- 每个备选池均选出元素
  直接选取后相乘
  - 【一般问题】
    直接用组合数从
    不同备选池选取后相乘
    格局确定
  - 【至少问题】
    分情况讨论
    格局不确定
- 仅从部分备选池选出元素
  ①选备选池
  ②选元素
  - 各备选池内
    元素个数均相同
    格局确定
  - 有备选池
    元素个数不同
    分情况讨论
    格局不确定

【标志词汇】<u>至少问题⇒分情况讨论</u>

至少问题应分情况讨论，而不能先取出最少量，之后剩余任取，

这是由于此时对于同一种结果组合的不同顺序，会重复计算.

讲义 P90

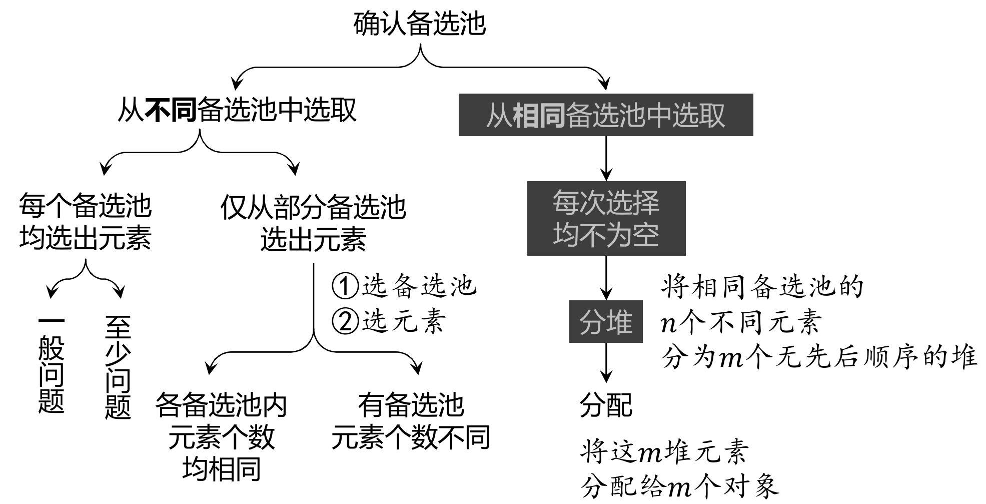
排列组合

第十章 计数原理与排列组合

10.3 组合问题：从相同备选池选取

讲义 P90-P91

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取·仅分堆



大师笔记：从相同备选池选取　讲义 P90

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取·仅分堆

【举例】把6本书分成$1+2+3$三堆，共有______种不同的方法.

答案：60

讲义 P90

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取·仅分堆

【举例】把六本书分成[2 + 2 + 2]三堆，共有______种不同的方法.

答案：15

讲义 P90

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取·仅分堆

【举例】把六本书分成[1 + 1 + 4]三堆，共有______种不同的方法.

答案：15

讲义 P90

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取

【拓展】从5双不同的鞋中选取2只，要求这两只不成双，有______种选取方式.

答案：40

讲义 P89

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取 · 仅分堆

17.【2017.15】将6人分成3组，每组2人，则不同的分组方式共有（　）.

A.12　　B.15　　C.30　　D.45　　E.90

答案：B

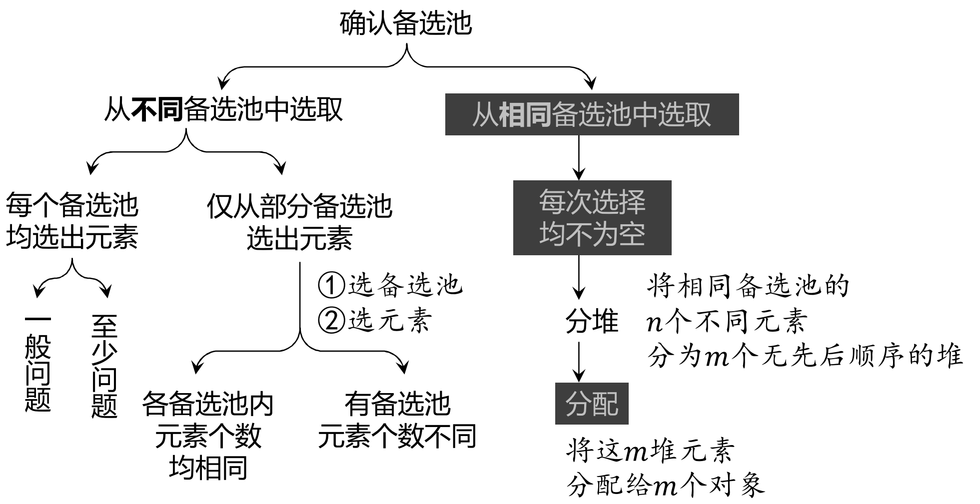
讲义 P90

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取·仅分堆·总结

要求	举例	计算方法
指定每堆元素数量	分为1+2+3三堆	每堆数量不同不消序$C_6^1\times C_5^2\times C_3^3$
	分为2+2+2三堆	有三堆数量相同消序$\frac{C_6^2\times C_4^2\times C_2^2}{A_3^3}$
	分为1+1+4三堆	有两堆数量相同消序$\frac{C_6^1\times C_5^1\times C_4^4}{A_2^2}$
不指定每堆元素数量	把6本书分为3堆，每堆至少1本	分情况讨论后相加： 情况①：[1+2+3] 情况②：[2+2+2] 情况③：[1+1+4]

讲义 P90

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取·分堆分配



讲义 P90

排列组合 10.1 全排列的作用

【乘以A_n^n】给n个没有顺序的元素添加顺序（排队）

【乘以A_n^n】将两组（均包含n个元素）元素一一配对.

【举例】有3本书，将其分给甲、乙、丙三个人，每人一本，有______种分法.

答案：A_3^3

【举例】派3个工程师去3个地方考察，每地一人，有______种分法.

答案：A_3^3

讲义 P87

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取・分堆分配

[确定分配]和[非确定分配]

有6个球，分给甲、乙、丙三个人，每人至少一个球. 只有[人数]=[球堆数]时，才可以分配

将6个球分为3堆（分堆），将3堆球与3个人一一配对（分配）

一个人唯一确定会分得哪堆球，对此人为确定分配，分配方法数为1.

一个人无法唯一确定会分得哪堆球，对此人为非确定分配.

分配时：有几个元素非确定分配，就乘以几的全排列分配

【乘以全排列】①排队；②配对.

讲义 P90

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取・分堆分配

18.【2010.01.11】某大学派出5名志愿者到西部4所中学支教，若每所中学至少有一名志愿者，则不同的分配方案共有（　　）.

A.240种　　B.144种　　C.120种　　D.60种　　E.24种

答案：A

讲义 P91

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取・分堆分配

【举例】将6张不同的卡片2张一组分别装入甲、乙、丙3个袋中，则不同的装法有______种.

答案：90

19.【2018.08】将6张不同的卡片2张一组分别装入甲、乙、丙3个袋中，若指定的两张卡片要在同一组，则不同的装法有（　　）.

A.12种　　B.18种　　C.24种　　D.30种　　E.36种

答案：B

讲义 P91

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取·分堆分配

20.【2020.15】某科室有4名男职员，2名女职员，若将这6名职员分为3组，每组2人，且女职员不同组，则不同的分组方式有（　　）种.

A.4　　B.6　　C.9　　D.12　　E.15

答案：D

讲义 P91

排列组合 10.3 组合问题：从相同备选池选取·分堆分配

21.【模拟题】某交通岗共有3人，从周一到周日的7天中，每天安排1人值班，每人至少值2天，其不同的排法共有（　　）种.

A.260　　B.320　　C.480　　D.520　　E.630

答案：E

讲义 P91

排列组合 10.2 组合问题：从不同备选池选取·总结

从相同备选池中选取 ⟶ 每次选择均不为空 ⟶ 分堆 ⟶ 分配

将相同备选池的n个不同元素分为m个无先后顺序的堆

将这m堆元素分配给m个对象

【定位】不同元素分堆分配问题 将n个元素分配给m个对象，每个对象至少分得一个元素

【分堆时】有几堆元素数量相同，就除以几的全排列

【分配时】有几个人无法唯一确定会分得哪一堆，就乘以几的全排列

【乘以A_n^n】给n个没有顺序的元素添加顺序（排队）

【乘以A_n^n】将两组（均包含n个元素）元素一一配对.

【除以A_n^n】将n个已有顺序的元素的顺序消去（即消序）

排列组合

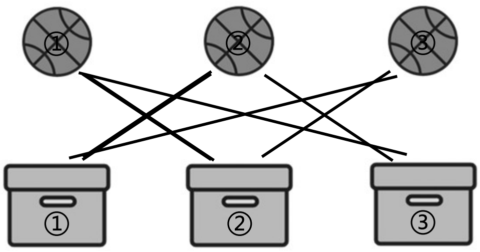
第十章 计数原理与排列组合

10.4 错位重排

讲义 P91-P92

排列组合 10.4 错位重排

伯努利-欧拉装错信封问题 不对号入座/球的号码跟盒子不对应……



两对元素错位重排
方法数为2

元素对数	错位重排方法数
1对	0
2对	1
3对	2
4对	9
5对	44

【题型定位】不对应问题⇒错位重排.

排列组合 10.4 错位重排

22.【2014.01.15】某单位决定对4个部门的经理进行轮岗，要求每位经理必须轮换到4个部门中的其他部门任职，则不同的轮岗方案有（　　）.

A.3种　　B.6种　　C.8种　　D.9种　　E.10种

答案：D

排列组合

10.4 错位重排·部分不对号问题

23.【2018.13】某单位为检查3个部门的工作，由这3个部门的主任和外聘的3名人员组成检查组，分2人一组检查工作，每组有1名外聘成员，规定本部门主任不能检查本部门，则不同的安排方式有（ ）.

A.6种 B.8种 C.12种 D.18种 E.36种

答案：C

讲义 P92

排列组合

第十章 计数原理与排列组合

10.5 相同元素问题

讲义 P92

排列组合 10.5 相同元素问题·仅选取

- 元素是否相同
  - 不同元素 —— 是否从同一备选池选取
    - 不同备选池
    - 同一备选池
  - 相同元素
    - 仅选取：好几种相同元素，分析每种可能取到的个数，之后直接相乘（乘法原理）
    - 连选取带分配 一步完成

元素相同
只有个数区别

①指明相同元素
②数字、名额、岗位、空座位

大师笔记：相同元素仅选取 讲义 P92

排列组合 10.5 相同元素问题·仅选取

24.【例题】整数48共有多少个正因数?

【标志词汇】求因数的个数⇒ ①分解质因数；②指数分别+1后相乘.

答案：10个

讲义 P92

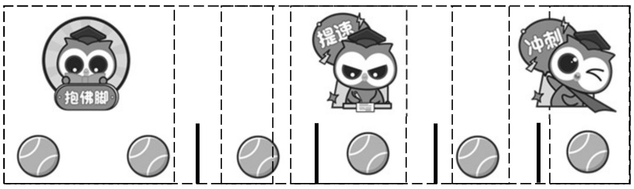
排列组合 10.5 相同元素问题・隔板法

元素是否相同
- 不同元素 —— 是否从同一备选池选取
  - 不同备选池
  - 同一备选池
- 相同元素
  - 仅选取：好几种相同元素，分析每种可能取到的个数，之后直接相乘（乘法原理）
  - 连选取带分配：所有元素全部相同，一步操作完成连选取带分配

元素相同
只有个数区别

①指明相同元素
②数字、名额、岗位、空座位

排列组合 10.5 相同元素问题・隔板法



所有元素全部相同
一步操作完成连选取带分配

【举例】6个相同的小球分给3个人，每人至少一个球；有多少种分法.

答案：21

排列组合 10.5 相同元素问题·隔板法

25.【2009.10.14】若将10只相同的球随机放入编号为1、2、3、4的四个盒子中，则每个盒子不为空的投放方法有（ ）.

A.72种 B.84种 C.96种 D.108种 E.120种

答案：B

讲义 P92

排列组合

第十章 计数原理与排列组合

10.6 特殊位置要求

讲义 P93

排列组合 10.1 解题要点

- 原则（一）只能计算[格局确定]的方法数
- 原则（二）[元素]默认不同，[组]默认相同
- 原则（三）确认[相同备选池]和[不同备选池]
- 原则（四）先选再排
- 原则（五）未指明的⇒要明确选出是哪一个
- 原则（六）特殊属性元素优先处理

（1）是否有某两元素必须相邻/不相邻的要求

（2）是否有某元素必须排在/不能排在某位置的要求

（3）是否有特殊功能的元素（偶数、末尾为0或5的数、双重功能元素）

大师笔记：特殊位置要求 讲义 P86

排列组合 10.6 特殊位置要求·元素必须在某位置

26.【2011.01.19】现有3名男生和2名女生参加面试，则面试的排序法有24种.（　　）

（1）第一位面试的是女生.　　　　（2）第二位面试的是指定的某位男生.

【标志词汇】未指明的⇒要明确选出是哪一个

【标志词汇】元素必须在某位置⇒命中注定方法数为1

答案：B

讲义 P93

排列组合 10.6 特殊位置要求·元素不能在某位置

27.**【模拟题】**7个不同的文艺节目要编成一个节目单，如果有一个独唱节目一定不能排在第二个节目的位置上，则共有（　　）种不同的排法.

A.720　　B.4320　　C. 2160　　D.144　　E.1440

【标志词汇】元素不能在某位置⇒占位法

答案：B

讲义 P93

排列组合 10.6 特殊位置要求·元素不能在某位置

排列组合 10.6 特殊位置要求·元素不能在某位置

28.**【模拟题】**从7个不同的文艺节目中选5个编成一个节目单，如果有一个独唱节目一定不能排在第二个节目的位置上，则共有（　　）种不同的排法.

A.2060　　B.2080　　C.2120　　D.2160　　E.2180

【标志词汇】元素不能在某位置⇒占位法

答案：D

讲义 P93

排列组合

第十章 计数原理与排列组合

10.7 总体剔除法

讲义 P93-P94

排列组合 **10.7 总体剔除法**

总体剔除法：所求方法数 = 总方法数 − 对立面方法数

- **至少问题：总体剔除法**

【标志词汇】[至少]问题 ⇒总体剔除

例如：可能取值：0，1，2，3

至少一个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 一个也没有（0个）　　至少2个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 有0个或1个

至多一个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 2个或3个　　至多2个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 3个

- **非的问题：总体剔除法**
- **正难则反：总体剔除法**

大师笔记：总体剔除法 讲义 P94

排列组合 10.7 总体剔除法

29.【2023.05】某公司财务部有2名男员工，3名女员工，销售部有4名男员工，1名女员工.现要从中选2名男员工，1名女员工组成工作小组，并要求每部门至少有1名员工入选，则工作小组的构成方式有（　　）种.**【标志词汇】**[至少]问题 ⇒总体剔除

A.24　　B.36　　C.50　　D.51　　E.68

答案：D

讲义 P94

排列组合 10.7 总体剔除法

总体剔除法：所求方法数 = 总方法数 − 对立面方法数

- **至少问题：总体剔除法　【标志词汇】**[至少]问题 ⇒ 总体剔除
- **非的问题：总体剔除法　【标志词汇】**[非]的问题⇒总体剔除

2人来自不同学科 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 2人来自相同学科

乙队没有领先过 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 乙队领先过

选课方式不同 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 选课方式相同

- **正难则反：总体剔除法 【标志词汇】**正难则反⇒总体剔除

讲义 P94

排列组合 10.7 总体剔除法

30.【2022.12】 甲乙两支足球队进行比赛，比分为4：2，且在比赛过程中乙队没有领先过，则不同的进球顺序有（　　）.

A.6种　　B.8种　　C.9种　　D.10种　　E.12种

【标志词汇】 [非]的问题⇒总体剔除

答案：C

讲义 P94

排列组合 10.7 总体剔除法

总体剔除法：所求方法数 = 总方法数 − 对立面方法数

➢ **至少问题：总体剔除法　【标志词汇】** [至少]问题 ⇒ 总体剔除

至少一个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 一个也没有（0个）　　至少2个 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 有0个或1个

➢ **非的问题：总体剔除法　【标志词汇】** [非]的问题⇒总体剔除

乙队没有领先过 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 乙队领先过　　2人来自不同学科 $\xleftrightarrow{\text{对立面}}$ 2人来自相同学科

➢ **正难则反：总体剔除法 【标志词汇】** 正难则反⇒总体剔除

当题目中从正面求解困难时，采用总体剔除法，从对立面求解.

讲义 P94

排列组合

10.7 总体剔除法

31.【2009.01.10】湖中有四个小岛，它们的位置恰好近似构成正方形的四个顶点.若要修建三座桥将这四个小岛连接起来，则不同的建桥方案有（　）种.**【标志词汇】**正难则反⇒总体剔除法.

A.12　　B.16　　C.13　　D.20　　E.24

答案：B

讲义 P94

排列组合

第十章 计数原理与排列组合

10.8 “恰”的问题

讲义 P94

排列组合 10.8 “恰”的问题

32.【模拟题】有4队学生，每队均有3人，现从中选取4人参加比赛，要求恰有2人来自同一队，则有（　　）种不同的选取方案.

A.324　　B.300　　C.100　　D.900　　E.420

【标志词汇】恰⇒等同于[有且仅有]，描述全局

答案：A

讲义 P94

排列组合 10.8 “恰”的问题

33.【2010.01.06改编】某商店举行店庆活动，顾客消费达到一定的数量后，可以在4种赠品中随机选取2件不同的赠品，任意两位顾客所选的赠品中，恰有1件赠品相同的方法数为_____.

【标志词汇】恰⇒等同于[有且仅有]，描述全局

答案：24

讲义 P94

排列组合 10.8 "恰"的问题

34.【模拟题】有五名志愿者参加社区服务，共服务星期六、星期天两天，每天从中任选两人参加服务，则恰有一人连续参加两天服务的选择种数为（　　）

A.120　　B.60　　C.40　　D.30　　E.20

【标志词汇】恰⇒等同于[有且仅有]，描述全局

答案：B

讲义 P94

排列组合

计数原理与排列组合	10.1基础知识	近5年考3题 【2023.15】全排列的作用-消序 【2022.10】加法原理　【2022.15】乘法原理
	10.2组合问题：从不同备选池选取	近5年考2题 【2021.08】每个备选池均选出元素 【2019.14】仅从部分备选池选出元素
	10.3组合问题：从相同备选池选取	近5年考1题 【2020.15】分堆分配
	10.6特殊位置要求	近5年考1题 【2023.08】相邻问题与不邻问题
	10.7总体剔除法	近5年考2题 【2023.05】[至少]问题　【2022.12】[非]的问题


稳稳上岸