2.7 平均值

【算术平均值】设 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 为 n 个数，称 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值，记为：$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

算术平均值相关计算

破题标志词

算术平均值⇒乘以个数求总和

18【2015.05】在某次考试中，甲、乙、丙三个班的平均成绩分别为 80，81 和 81.5，三个班的学生分数之和为 6952，三个班共有学生(　　).

A. 85 名　B. 86 名　C. 87 名　D. 88 名　E. 90 名

19【模拟题】n 个正整数的和大于 48，这 n 个正整数的算术平均值为 1.2，则 n 的最小值为(　　).

A. 41　B. 40　C. 48　D. 45　E. 55

平均值的改变

$$\text{算术均值的改变量}=\frac{\text{个体改变量之和}}{\text{元素数量 } n}$$

20【2019.23】(条件充分性判断)某校理学院五个系每年录取人数如下表：

系别	数学系	物理系	化学系	生物系	地理系
录取人数	60	120	90	60	30

今年与去年相比，物理系平均分没有变．则理学院录取平均分升高了．(　　)

(1)数学系录取平均分升高了 3 分，生物系录取平均分降低了 2 分.

(2)化学系录取平均分升高了 1 分，地理系录取平均分降低了 4 分.

2.8 方差与方差的改变

【方差】在一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中，各数据与它们的平均数 $\overline{x}$ 的差的平方的平均值称为这组数据的方差，通常用s^2 表示.

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]\text{或}s^2=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(\overline{x})^2$$

方差的算术平方根称为这组数据的标准差.

【方差的意义】方差用来反映数据波动的大小，方差大波动大，方差小波动小.

【方差的变化】当一组数据波动性减小时，方差变小；波动性增大时，方差变大，具体代数关系有：

(1)当把一组数中的每个数都加上一个相同的数时，这组数的方差不变；

(2)当把一组非全等数据，每个数都变为原来的 n 倍后，这组数据的方差变为原来的 n^2 倍；

21 【2023.12】跳水比赛中，裁判给某选手的一个动作打分，其平均值为 8.6，方差为 1.1，若去掉一个最高分 9.7 和一个最低分 7.3，则剩余得分的(　　).

A. 平均值变小，方差变大　　B. 平均值变小，方差变小

C. 平均值变小，方差不变　　D. 平均值变大，方差变大

E. 平均值变大，方差变小

22 【模拟题】实数 $0<a<b<c<d<e$，两组数据 A：$\{a,b,c,d,e\}$ 和数据 B：$\{-2a,-2b,-2c,-2d,-2e\}$，哪组数据方差更大？

23 【模拟题】(条件充分性判断)实数 $0<a<b<c$. 则可确定数据 B 的方差大.(　　)

(1)A：$\{-c,-b,-a,0,a,b,c\}$.

(2)B：$\{-c^2,-b^2,-a^2,0,a^2,b^2,c^2\}$.

2.9 总体与部分问题/两部分混合问题

总体盈亏

24【2009.01.01】一家商店为回收资金，把甲乙两件商品均以 480 元一件卖出，已知甲商品赚了 20%，乙商品亏了 20%，则商店盈亏结果为(　　).

A. 不亏不赚　B. 亏了 50 元　C. 赚了 50 元

D. 赚了 40 元　E. 亏了 40 元

总体平均速度

25【2006.10.01】某人以 6 公里/小时的平均速度上山，上山后立即以 12 公里/小时的平均速度原路返回，那么此人在往返过程中的每小时平均所走的公里数为(　　).

A. 9　B. 8　C. 7　D. 6　E. 以上结论均不正确

总体均值与部分均值

破题标志词

总体均值与部分均值⇒

①数值计算：根据总量列等式

②定性判断：总体均值、甲均值、乙均值、甲乙间的比⇒知三推第四

设一个总体分为甲、乙两部分，甲的平均值为 a，数量为 m；乙的平均值为 b，数量为 n；总体平均值为 c，则有：

※总体的平均值 c，一定在两个部分平均值 a 和 b 之间. 具体在中间的什么位置，取决于甲乙数量的比例大小关系，即 m 与 n 的比值.

※根据总量列等式有：总量 $=c(m+n)=am+bn$

26【2003.01.02】车间共有 40 人，某技术操作考核的平均成绩为 80 分，其中男工平均成绩为 83 分，女工平均成绩为 78 分，该车间有女工(　　).

A. 16 人　B. 18 人　C. 20 人　D. 24 人　E. 28 人

27　【2016.16】(条件充分性判断)已知某公司的男员工的平均年龄和女员工的平均年龄．则能确定该公司员工的平均年龄.(　　)

(1)已知该公司员工的人数.

(2)已知该公司男、女员工的人数之比.

28　【2022.18】(条件充分性判断)两个人数不等的班数学测验的平均分不相等．则能确定人数多的班.(　　)

(1)已知两个班的平均分.

(2)已知两个班的总平均分.

两种不同浓度溶液混合

破题标志词

两种不同浓度溶液混合⇒根据总溶质不变列等式

以盐水为例:设混合前浓盐水的质量为 m,浓度为 $a\%$;稀盐水的质量为 n,浓度为 $b\%$.混合后盐水的浓度为 $c\%$,质量为 $m+n$.

【大等量】总溶质不变:混合前各溶液中总盐量=混合后溶液中总盐量

【小等量】总量不变:混合前各溶液质量之和=混合后溶液总质量

用大等量列方程,用小等量表示要素

故有 $am+bn=c(m+n)$,整理得 $(a-c)m=(c-b)n$;$\frac{m}{n}=\frac{c-b}{a-c}$

29　【2021.12】现有甲、乙两种浓度酒精,已知用 10 升甲酒精和 12 升乙酒精可以配成浓度为 70%的酒精,用 20 升甲酒精和 8 升乙酒精可以配成浓度为 80%的酒精,则甲酒精的浓度为(　　).

A. 72%　　B. 80%　　C. 84%　　D. 88%　　E. 91%

30　【2016.20】(条件充分性判断)将 2 升甲酒精和 1 升乙酒精混合得到丙酒精．则能确定甲、乙两种酒精的浓度.(　　)

(1)1 升甲酒精和 5 升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的 $\frac{1}{2}$ 倍.

(2)1 升甲酒精和 2 升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的 $\frac{2}{3}$ 倍.

思考与总结

第三章

代数式

3.1 整式基础

【代数式】有理式和无理式统称代数式，为由数字和表示数字的字母经过有限次加、减、乘、除、乘方和开方运算所得到的算式，如：$a+b$，$\frac{a}{b}$，vt，$\sqrt[3]{3a^2}$，a，40，$\frac{2}{3}$等. 本章只研究有理式.

【单项式】由数或字母的乘积组成的代数式叫作单项式，如：$2x^2y^3$，$\frac{1}{2}x^3$ 等.

【多项式】几个单项式的代数和叫作多项式，如 $2x^2+xy+y^2$ 等.

多项式中的每个单项式叫作多项式的项，其中多项式中不含字母的项叫作常数项.

【分式】一般地，若 A、B(B 中含有字母且 $B\neq0$)表示两个整式，那么$\frac{A}{B}$就叫作分式，其中 A 称为分式的分子，B 称为分式的分母. 如：$\frac{1}{x-2}(x\neq2)$，$\frac{x}{y}(y\neq0)$ 等.

【元】一个多项式，含有多少个变量，就叫作几元多项式，含两个变量的多项式叫作二元多项式；含三个变量的多项式叫作三元多项式，依此类推. 特别地，含两个及以上变量的多项式叫作多元多项式.

【次数】当单项式的系数不为零时，它的所有字母的指数和叫作这个单项式的次数. 如$-\frac{1}{3}x^2$ 是二次单项式；$2^3x^2y^3$ 是五次单项式；不含字母因数的单项式(非零)是零次单项式，如-7；数字“0”是唯一没有次数的单项式，有时也把它的次数约定为无限大. 以标准形式给出的多项式里，各个单项式中次数最高的项的次数，叫作这个多项式的次数.

【同类项】所含的字母相同，相同字母的幂次也分别相同的单项式为同类项. 如 $4xy^2z$ 和$-\frac{2}{3}xy^2z$.

3.2 整式运算及乘法公式

必背乘法公式

【举例】求 $(x+2y)^2$ 的展开式

【二元乘法公式】

平方差：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

完全平方：$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$；$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

完全立方：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；$(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$

立方和与立方差：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

【三元乘法公式】

三元完全平方：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

（与二元完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 形式类似，可联系记忆）

$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ac$

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac$

（常逆向应用凑配完全平方，以求最值）

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

平方差公式的应用

破题标志词

分数的分母中带有根号，要求化简/求值⇒分母有理化.

有理化的核心是利用平方差公式将根式每一项平方，分析详见下表.

原式	有理化因式	乘积	举例
单项式$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$	$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$	$(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$
$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$	$a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$	a^2x-b^2y	$(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})=-2$

注：上表中所有二次根式均有意义

▶ 1 【2019.16】（条件充分性判断）能确定小明年龄.（　　）

（1）小明年龄是完全平方数.

（2）20 年后小明年龄是完全平方数.

▶ 2 【模拟题】一个自然数减去 15 及加上 14 都是完全平方数，求此数.

▶ 3 【2021.03】$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$（　　）

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. $3\sqrt{11}-1$　　E. $3\sqrt{11}$

完全平方的应用

应用 1：利用完全平方去掉根号与绝对值

破题标志词

应用 2：给定 a^2+b^2，ab，$a+b$ 和 $a-b$ 中任意两个⇒利用完全平方公式推出其余.（此即知二推二模型）

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$；$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$；$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

破题标志词

应用 3：代数式求最值（见本讲义第十二章）

▶ 4 【2023.04】$\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{3}=$（　　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{2}$　　E. $2\sqrt{3}$

▶ 5 【模拟题】已知 $(2020-a)(2019-a)=2000$，那么 $(2020-a)^2+(2019-a)^2=$（　　）

A. 3998　　B. 4000　　C. 4001　　D. 4002　　E. 5000

提示：

破题标志词

不同代数式间有较大重复部分⇒将重复的部分看作一个整体（整体思维）

3.3 十字相乘因式分解

求展形式

$$(x+1)^3=(x+1)(x+1)(x+1)=x^3+3x^2+3x+1$$

因式分解

【因式分解】把一个多项式化成几个整式的积的形式.因式分解的结果必须是几个整式的连乘的形式.因式分解必须在指定的范围内分解到不能再分解为止.

说明:联考中因式分解为工具型知识点,作为解题的中间过程出现,主要要求掌握基本十字相乘法即可.

6 【例题】尝试用十字相乘将下列多项式因式分解:

(1)$x^2+2x-3=$

(2)$x^2+5x-6=$

(3)$x^2-5x+6=$

(4)$x^2+x-42=$

(5)$2x^2-7xy+3y^2=$

(6)$x^2+xy+y+y^2+xy+x-42=$

3.4 代数式求值

代入法求值

联考中代数式求值最常使用的即为化简代入和特值法,一般而言,需要遵循“先化简,再代入的原则”,而联考中往往作为工具型应用直接代入.(特值法将在技巧专题中的特例模块中详细阐述).

破题标志词

给定未知字母的取值或简单关系式,求代数式值⇒直接代入.

7 【2013.10.19】(条件充分性判断)已知 $f(x,y)=x^2-y^2-x+y+1$. 则 $f(x,y)=1$.

(1)$x=y$.

(2)$x+y=1$.

第四章 二元一次方程与直线

4.1 方程与二元一次方程

【方程】含有未知量的等式.

【方程的解】使方程左右两边相等的未知数的(一组)值.

【二元一次方程】含有两个未知数,并且含有未知数的项的次数都是1的整式方程.所有二元一次方程都可化为$Ax+By+C=0$(A、B不同时为零)的一般形式.

【二元一次方程的解】满足一个二元一次方程的每一对未知量的值,叫作这个二元一次方程的一对解.每个二元一次方程都有无数对解,由二元一次方程组成的二元一次方程组才可能有唯一解.

破题标志词

给定一个数是方程的一个根⇒给定一个此数满足的等式.

1 【模拟题】已知a_1,a_2,a_3,a_4,a_5是满足条件$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=8$的五个不同的整数,如果b是关于x的一元五次方程$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)=63$的整数根,则$b$的值为(　　).

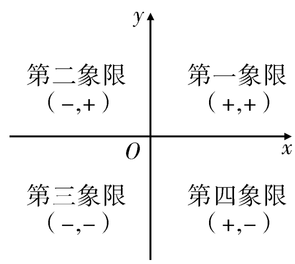
A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6　　E. 7

4.2 平面直角坐标系

在平面上选定两条相互垂直的直线，分别指定正方向（用箭头表示），以两直线的交点 O 作为原点，设定单位长度，这样，就在平面上建立了一个直角坐标系，也叫作笛卡尔直角坐标系.

这两条相互垂直的直线叫作坐标轴，习惯上把其中一条放在水平的位置上，以向右的方向作为它的正方向，这条轴叫作横坐标轴，简称为横轴或 x 轴. 与横轴垂直的一条坐标轴叫作纵坐标轴，简称为纵轴或 y 轴，以向上的方向作为它的正方向.

两条坐标轴将平面分割为四个区域，分别称为四个象限.



(1)坐标平面内的点与有序实数对一一对应.

(2)坐标轴上的点不属于任何象限.

(3)y 轴上的点，横坐标都为零.

(4)x 轴上的点，纵坐标都为零.

(5)一点上下平移，横坐标不变，即平行于 y 轴的直线上的点横坐标相同.

(6)一点左右平移，纵坐标不变，即平行于 x 轴的直线上的点纵坐标相同.

(7)一个关于 x 轴对称的点横坐标不变，纵坐标变为原坐标的相反数.

(8)一个关于 y 轴对称的点纵坐标不变，横坐标变为原坐标的相反数.

4.3 点与直线

基础知识

【直线】从平面解析几何的角度来看，平面上的直线就是由平面直角坐标系中的一个二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A、B 不同时为零）所表示的图形.

说明：当 $A=0$ 时为水平直线，当 $B=0$ 时为竖直直线. 以直线方程 $x=1$ 为例，直线上每一个点的横坐标 x 都有与其相对应的纵坐标 y，$x=1$ 属于广义二元一次方程.

【直线的斜率】斜率可以表示一条直线对于 x 轴的倾斜程度（由直线与 x 轴正方向夹