



讲义P48-P61

章节	题目个数	举例个数	总数
06数列	7	0	7
07平面几何	13	0	13



## 第六章 数列

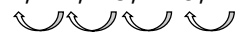
### 6.3 等比数列

讲义 P48-P51

#### 6.3 等比数列 · 基础

.....

2, 4, 8, 16, 32, ...



$\sqrt{2}$ , 2,  $2\sqrt{2}$ , 4,  $4\sqrt{2}$ , ...

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

1, -1, 1, -1, 1, ...

**等比数列** 如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一固定常数，即：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \text{ 那么这个数列就叫做等比数列, 这个常数就叫做等比数列的公比 } (q \neq 0)$$

等比数列任一项和公比均不为0 ( $a_n \neq 0, q \neq 0$ )



大师笔记：等比数列定义与判定 讲义 P48

**数列 6.3 等比数列 · 基础**

.....

次序	第1项	第2项	第3项	第4项	...	第n项	...
表示	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...	$a_n$	...
与 $a_1$ 关系	$a_1$	$a_1 \cdot q$	$a_1 \cdot q \cdot q$	$a_1 \cdot q^3$	...	$a_1 \cdot q^{n-1}$	...
数值	1	2	4	8	...	$1 \times (2)^{n-1}$	...
数值	2	-2	2	-2	...	$2 \times (-1)^{n-1}$	...

**等比数列通项公式**  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  ( $q \neq 0$ )

**数列 6.3 等比数列 · 常用设项方法**

.....

**①通项法：**根据等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$

设第一项为 $a_1$ ，第二项为 $a_1 q$ ，第三项为 $a_1 q^2$ ，...，以此类推.

**②对称设：**

项数	设项原则	常见应用
连续奇数个项 成等比数列	设中间一项为 $a$ ， 再以 $q$ 为公比向两边分别设项	三项成等比，设为 $\frac{a}{q}, a, aq$
		五项成等比，设为 $\frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^2$
连续偶数个项 成等比数列	设中间两项分别为 $\frac{a}{q}$ 和 $aq$ ， 再以 $q^2$ 为公比向两边分别设项	四项成等比，设为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3$

### ⑧⑨ 6.3 等比数列 · 三项数列

.....

三项数列可以被用在任何知识点，等同于给出一个关于 $a, b, c$ 的等式

三元乘法公式、二次方程的三个系数、三角形三边、立方体三条棱、应用题等

**【标志词汇】** 三项成等比数列  $\Leftrightarrow$   $\begin{cases} \text{①给出 } a, b, c \text{ 为等比, 则有 } b^2 = ac (b \neq 0) \\ \text{②若需要设项, 则直接设为 } \frac{a}{q}, a, aq (a, q \neq 0) \end{cases}$

四项成等差/等比数列  $\Rightarrow$  其中连续三项成等差/等比

特别地，既成等差数列又成等比数列的数列为非零常数数列，它们的公比为1，公差为0.

讲义 P44

### ⑧⑨ 6.3 等比数列 · 常用设项方法 题目给定确定的数：已知某某的值

.....

14. 【2018.19】甲、乙、丙三人的年收入成等比数列. 则能确定乙的年收入的极大值. ( )

(1) 已知甲、丙两人的年收入之和. (2) 已知甲、丙两人的年收入之积.

【答案】D

讲义 P49

### ④④ 6.3 等比数列 · 判定

.....

①**定义法** 验证  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  是否为常数，应注意必须从  $n=1$  起所有项都满足此等式

②**等比中项法** 验证  $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$  是否成立，应注意这里  $a_n \neq 0$

③**通项公式法**  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  ( $a_1 \neq 0; q \neq 0$ )

$a_n = Aq^{an+b}$  形似关于  $n$  的指数函数，底数为常数， $n$  在指数位置。

$a, b$  可能单独或同时为零， $A \neq 0$

④**前  $n$  项和法**:  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = A - Aq^n \left( A = \frac{a_1}{1-q} \right)$

讲义 P49

### ④④ 6.3 等比数列 · 判定

.....

15.【模拟题】(条件充分性判断)  $a, b, c, d$  为四个实数，则  $a+b, b+c, c+d$  成等比数列. ( )

(1)  $a, b, c, d$  成等比数列.

(2)  $a+b, b+c, c+d$  均不为 0.

【答案】C

讲义 P49

### 数列 6.3 等比数列 · 判定

.....

16. 【2021.24】 (条件充分性判断) 已知数列 $\{a_n\}$ , 则数列 $\{a_n\}$ 为等比数列. ( )

- (1)  $a_n a_{n+1} > 0$ .      (2)  $a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - a_n a_{n+1} = 0$ .

【答案】 C

讲义 P50

### 数列 6.3 等比数列 · 判定

.....

【拓展】 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ ,  $\{|a_n|\}$ ,  $\{a_n^2\}$ 均为等比数列, 公比分别为:  $\frac{1}{q}$ 、 $|q|$ 、 $q^2$ .

$$\{a_n\} \quad 1, -2, 4, -8, 16, -32 \quad \dots \quad q = -2$$

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32} \quad \dots \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$\{|a_n|\} \quad 1, 2, 4, 8, 16, 32 \quad \dots \quad q = 2$$

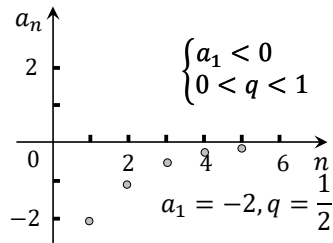
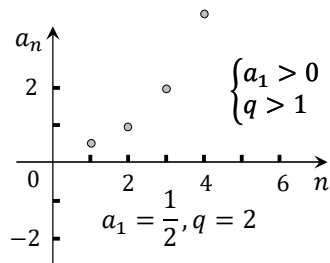
$$\{a_n^2\} \quad 1, 4, 16, 64, 256, 1024 \quad \dots \quad q = 4$$

讲义 P49

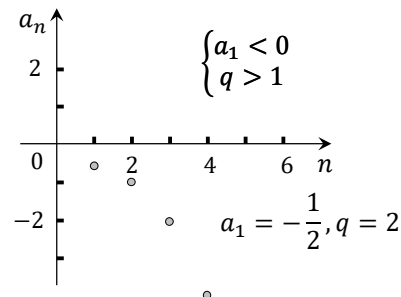
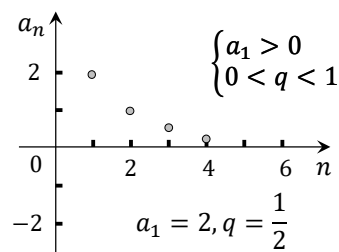
## 数列 6.3 等比数列 · 性质

等比数列 $\{a_n\}$ 单调性

➤ 递增



➤ 递减

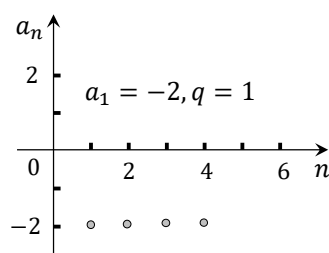
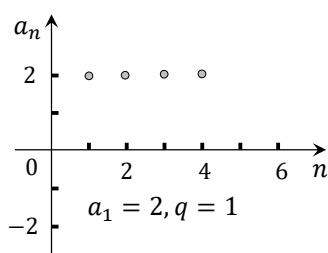


大师笔记：等比数列性质 讲义 P50

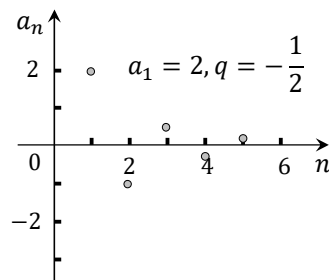
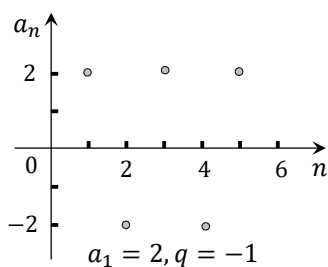
## 数列 6.3 等比数列 · 性质

对于等比数列 $\{a_n\}$

$q = 1 \Leftrightarrow$  非零常数列



$q < 0 \Leftrightarrow$  摆动数列



讲义 P50

### 数列 6.3 等比数列 · 性质

.....

17. 【2023.18】已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比大于1, 则 $\{a_n\}$ 递增. ( )

(1)  $a_1$ 是方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的根.

(2)  $a_1$ 是方程 $x^2 + x - 6 = 0$ 的根.

【答案】C

讲义 P50

### 数列 6.3 等比数列 · 性质

.....

**等差数列的通项公式**  $a_n = a_1 + (n-1)d$   $a_n - a_m = (n-m)d$  两项间相差几个 $d$

**等比数列通项公式**  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$   $\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$  两项间相差几个 $q$   
( $q \neq 0$ )

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \xrightarrow{\times q} a_4 \xrightarrow{\times q} a_5 \xrightarrow{\times q} a_6 \cdots \xrightarrow{\times q} a_m \cdots a_{n-1} \xrightarrow{\times q} a_n \cdots$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_m &= a_1 \cdot q^{m-1} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_m} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1}}{a_1 \cdot q^{m-1}} = q^{n-1-m+1} = q^{n-m}$$

讲义 P50



### 数列 6.3 等比数列 · 性质

.....

【标志词汇】等比数列某几项乘积  $\Rightarrow$  下标关系：下标和相等的两项乘积相等

等号左右下标和相等，项数也要相等

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & \div q & & \times q & & & & & & & & & & \\
 & & & \frown & & \frown & & & & & & & & & & \\
 a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & a_{11}, & a_{12} \cdots \\
 & & & \smile & & \smile & & & & & & & & & & \\
 & & & \div q^2 & & \times q^2 & & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

$$a_5 \cdot a_5 = a_4 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_7 = a_2 \cdot a_8 = a_1 \cdot a_9$$

$$1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5$$

若  $\{a_n\}$  为有穷等比数列，则与首末两项距离相等的两项之积都相等，且等于首末两项的积

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = a_4 \cdot a_{n-3} = \cdots$$

讲义 P50

### 数列 6.3 等比数列 · 性质

.....

【标志词汇】等比数列某几项乘积  $\Rightarrow$  下标关系  $\triangleright$  下标和相等的两项乘积相等

$\triangleright$  下标和相等的同数量项乘积相等

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \cdots$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

$$a_5 = a_1 q^4$$

$$a_6 = a_1 q^5$$

$$a_7 = a_1 q^6$$

$$a_8 = a_1 q^7$$

$$a_9 = a_1 q^8$$

等比数列的通项公式  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_3 \cdot a_5 \cdot a_7 = a_1 q^2 \cdot a_1 q^4 \cdot a_1 q^6 = a_1^3 \cdot q^{12}$$

$$= a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = a_1 q \cdot a_1 q^3 \cdot a_1 q^5 = a_1^3 \cdot q^{12}$$

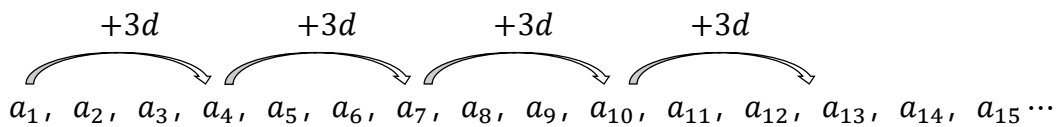
$$= a_5 \cdot a_5 \cdot a_5 = a_1 q^4 \cdot a_1 q^4 \cdot a_1 q^4 = a_1^3 \cdot q^{12}$$

$$3 + 5 + 7 = 2 + 4 + 9 = 5 + 5 + 5$$

讲义 P50

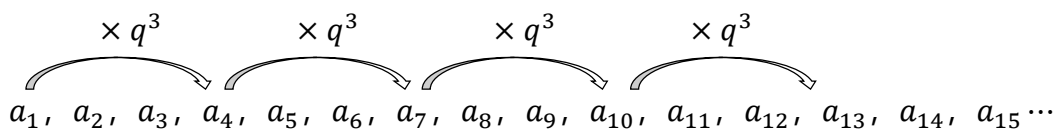
### 数列 6.3 等比数列 · 性质

#### ➤ 等差数列



等差数列[等距离]取出的项亦构成等差数列 下标之差为定值

#### ➤ 等比数列



等比数列[等距离]取出的项亦构成等比数列 下标之差为定值

### 数列 6.3 等比数列 · 性质

18. 【2010.10.13】等比数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_3, a_8$ 是方程 $3x^2 + 2x - 18 = 0$ 的两个根, 则 $a_4 a_7 = ( \quad )$ .

- A. -9      B. -8      C. -6      D. 6      E. 8

【答案】 C

## 数列 6.3 等比数列 · 求和

.....

**等比数列通项公式**  $a_n = a_1 q^{n-1} \quad (q \neq 0)$

**等比数列前n项和公式** 当  $q \neq 1$  时,  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

当  $q = 1$  时,  $S_n = na_1$  (此时数列  $\{a_n\}$  为常数列)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

错位相减  $(1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

 大师笔记: 等比数列求和 讲义 P51

## 数列 6.3 等比数列 · 求和

.....

**等比数列通项公式**  $a_n = a_1 q^{n-1} \quad (q \neq 0)$

**等比数列前n项和公式** (1) 当  $q \neq 1$  时,  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

(2) 当  $q = 1$  时,  $S_n = na_1$  (此时数列  $\{a_n\}$  为常数列)

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
	$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{2}$		

**【注意】** 有限项等比数列求和时, 若不能确定  $q$  取值, 应分  $q = 1$  和  $q \neq 1$  两种情况讨论.

(3) 当  $n \rightarrow \infty$ , 且  $0 < |q| < 1$  时,  $S_n = \frac{a_1}{1-q}$

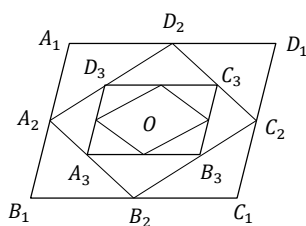
首项为  $\frac{1}{2}$ , 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列:  $S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

讲义 P51

### 数列 6.3 等比数列 · 求和

19. 【2018.07】如图，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形， $A_2, B_2, C_2, D_2$ 分别是 $A_1B_1C_1D_1$ 四边的中点， $A_3, B_3, C_3, D_3$ 分别是四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 四边的中点，依次下去，得到四边形序列 $A_nB_nC_nD_n(n = 1, 2, 3, \dots)$ ，设 $A_nB_nC_nD_n$ 是面积为 $S_n$ ，且 $S_1 = 12$ ，则 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots = (\quad)$ 。

- A.16                      B.20                      C.24                      D.28                      E.30



【答案】 C

讲义 P51

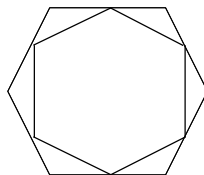
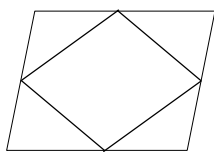
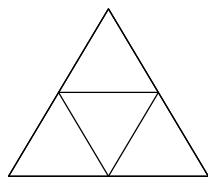
### 抱佛脚 四边形 · 中点多边形

【中点多边形】顺次连接多边形各边中点所得的新多边形叫做原多边形的中点多边形

【标志词汇】任意三角形中点三角形  $\Rightarrow$  面积为原三角形的 $\frac{1}{4}$ ，周长为原三角形的 $\frac{1}{2}$ 。

【标志词汇】任意四边形的中点四边形  $\Rightarrow$  面积为原四边形的 $\frac{1}{2}$ 。

【标志词汇】正六边形的中点六边形  $\Rightarrow$  面积为原六边形的 $\frac{3}{4}$ 。



讲义 P51

## ⑧⑨ 6.3 等比数列 · 求和

.....

20.【例题】从盛满 $a$  ( $a > 1$ ) 升纯酒精的容器里倒出1升然后添满水摇匀，再倒出1升混合溶液后又添满水摇匀，如此继续下去，求：

- (1) 第 $n$ 次操作后溶液的浓度是多少？
- (2) 当 $a = 2$ 时，至少应倒几次才能使溶液的浓度低于10%？

【答案】 (1)  $\left(\frac{a-1}{a}\right)^n$  (2) 4次



大师笔记：倒出后加满

讲义 P51

## ⑧⑨

.....


数 列	6.2等差数列	近5年考4题 【2022.24】三项等差—结合累加 【2021.02】三项等差 【2020.05】等差数列 $S_n$ 的最值 【2019.24】等差数列判定（前 $n$ 项和法）
	6.3等比数列	近5年考5题 【2023.18】等比数列单调性—结合一元二次方程 【2023.24】判定-定义法 【2022.21】三项等比—结合构造二次方程 【2021.24】等差数列判定（定义法）—结合十字相乘 【2019.16】三项等比


# 平面几何


## 2024MBA大师零基础抱佛脚


### 平面几何


.....

 近几年每年2题左右

 重要三角形：等腰直角 $\triangle$ ， $30^\circ$ 直角 $\triangle$ ，等边 $\triangle$

 三角形面积、高、与等高模型 ★

 相似三角形

 四边形，圆与扇形

平面几何

- 三角形
  - 定义与性质 三边关系
  - 三角形分类
    - 直角三角形
    - 等腰三角形
    - 重要三角形 等腰直角 $\triangle$ ， $30^\circ$ 直角 $\triangle$ ，等边 $\triangle$
  - 三角形面积、高、与等高模型
  - 相似三角形

四边形

长方形、正方形、梯形、菱形

圆、扇形与弓形

不规则图形 求阴影面积

平面几何

# 第七章 平面几何

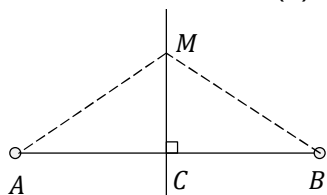
## 7.1 通用基础概念

## ④④④④ 7.1 基础概念 • 线段的垂直平分线

【垂直平分线】经过某一条线段的中点，并且垂直于这条线段的直线（又称“中垂线”）。

【垂直平分线的性质】（1）垂直平分线垂直且平分其所在线段；

（2）垂直平分线上任意一点，到线段两端点的距离相等。



$M$ 在线段 $AB$ 的垂直平分线上  $\Leftrightarrow MA = MB$

到一条线段两个端点距离相等的点，一定在这条线段的垂直平分线上。  
或者说，垂直平分线可以看成到线段两个端点距离相等的点的集合。

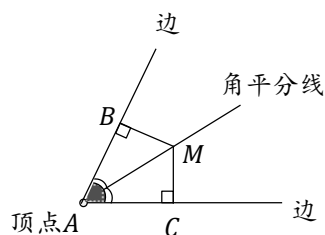
讲义 P53

## ④④④④ 7.1 基础概念 • 角与角平分线

【角】由两条有公共端点的射线组成的几何对象。

这两条射线叫作角的边，它们的公共端点叫作角的顶点。

【角平分线】从一个角的顶点引出一条射线，把这个角分成两个完全相同的角，这条射线叫作这个角的角平分线。



【角平分线性质】角平分线上的点到这个角两边的距离相等。

在角内部到一个角的两边距离相等的点在这个角的角平分线上。

$M$ 在角 $A$ 的角平分线上  $\Leftrightarrow MB = MC$

讲义 P53



## ④④④④ 7.1 基础概念·角与角平分线

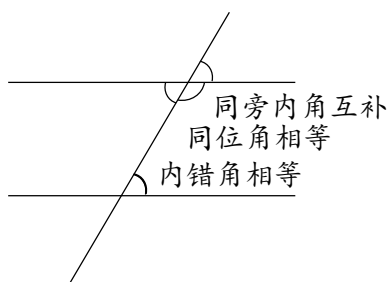
.....

【平行线】在同一平面内，永远不相交的直线.

【夹角】是由两条交叉的直线所形成的角度，用符号“ $\angle$ ”来表示.

【平行线夹角相等定理】当两条平行线与一条直线相交时，  
它们分别所形成的同侧夹角大小是相等的.

【平行线三大判定定理】同位角相等 $\Leftrightarrow$ 两直线平行  
内错角相等 $\Leftrightarrow$ 两直线平行  
同旁内角互补 $\Leftrightarrow$ 两直线平行

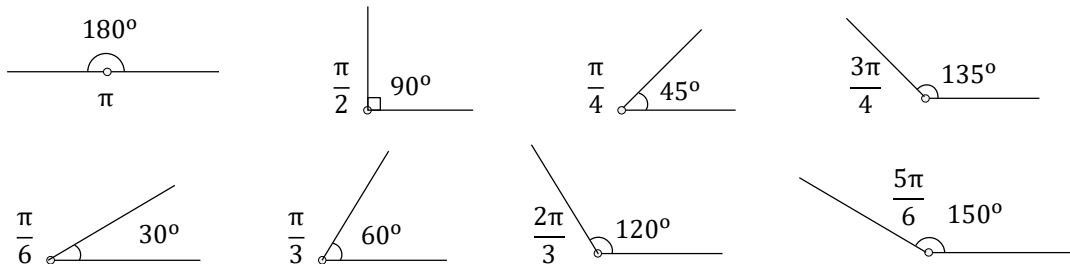


讲义 P53

## ④④④④ 7.1 基础概念·角度制与弧度制

.....

角度制和弧度制被用来表示一个角的大小的度量，单位为“度 $^{\circ}$ ”和“弧度rad  $180^{\circ} = \pi \text{ rad}$ ”



平角 周角

角度	$0^{\circ}$	$30^{\circ}$	$45^{\circ}$	$60^{\circ}$	$90^{\circ}$	$180^{\circ}$	$360^{\circ}$
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$2\pi$

讲义 P54



## 第七章 平面几何

### 7.2 三角形

讲义 P54-P61



### 7.2 三角形

➤ **基础知识 (定义与性质)** 三边关系 (三个不等式的不等式组)

➤ 三角形分类	{	按角分	锐角 $\triangle$ : 三个内角都小于 $90^\circ$
			直角 $\triangle$ : 有一个角等于 $90^\circ$ 等腰直角 $\triangle$ , $30^\circ$ 直角 $\triangle$
		按边分	钝角 $\triangle$ : 有一个角大于 $90^\circ$
			重要三角形
			等腰 $\triangle$ : 两边相等 (等边 $\triangle$ : 三个边都相等)

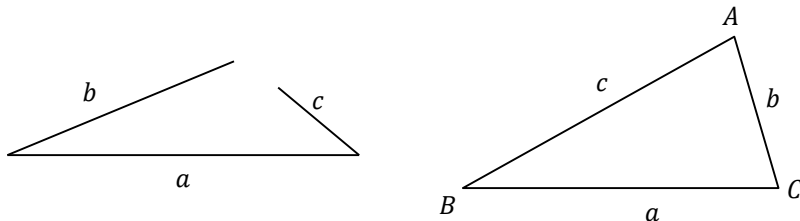
➤ 三角形面积、高、与等高模型

➤ 相似三角形

## ④④④④ 7.2 三角形 · 基础知识

**三角形** 由同一平面内不在同一直线上的三条线段首尾顺次连接所组成的封闭图形称为三角形

1. 三角形任意两边之和大于第三边；任意两边之差小于第三边；
2. 三角形内角和等于180度；



常见边与角的表示

大师笔记：三角形基础 讲义 P54

## ④④④④ 7.2 三角形 · 基础知识

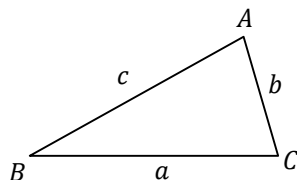
**【标志词汇】** 以 $a, b, c$ 三项为边可构成三角形

$\Leftrightarrow$  这三项中任意两项和大于第三项，任意两项差（大减小）小于第三项。

$$\text{满足} \begin{cases} a+b > c \\ a+c > b \\ b+c > a \end{cases}, \text{或满足} \begin{cases} |a-b| < c \\ |a-c| < b \\ |b-c| < a \end{cases}$$

注意：必须满足三个不等式构成的不等式组

仅满足一个或两个不等式无法充分推出这三条线段可构成三角形。



平面上不共线的三点可以（唯一）确定一个三角形

也可以（唯一）确定一个圆

这个圆就是此三角形的外接圆

**【标志词汇】** 三角形已知两边求第三边长度范围  $\Rightarrow$  两边之差（大减小） $<$  第三边  $<$  两边之和。

讲义 P54

## ④④④④ 7.2 三角形 · 基础知识

1. 【模拟题】若一个三角形的周长为偶数，且已知两边长分别为6和2017，则满足条件的三角形共有（ ）个。

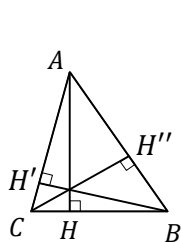
A.3                      B.4                      C.5                      D.6                      E.7

【答案】C

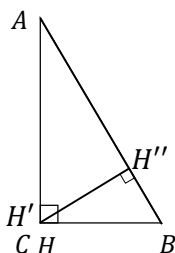
讲义 P55

## ④④④④ 7.2 三角形 · 基础知识

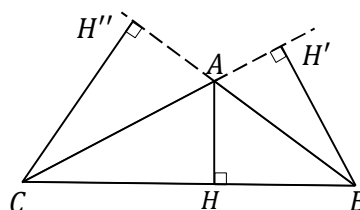
三角形面积：  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \text{任意一个底边} \times \text{相对应的高}$  第三顶点与这个底边所在直线的距离



锐角三角形



直角三角形



钝角三角形

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} BH' \cdot AC = \frac{1}{2} CH'' \cdot AB \quad S_{\text{直角三角形}} = \frac{\text{直角边} \times \text{直角边}}{2}$$

讲义 P54

## ④④④④ 7.2 三角形·基础知识

.....

2.【模拟题】在 $\triangle ABC$ 中，已知有两条高线的长分别为5和20，第三条高线的长为整数，则第三条高线长度最大值为（ ）。

- A.5                      B.12                      C.6                      D.10                      E.无法确定

【答案】C

讲义 P55

## ④④④④ 7.2 直角三角形

.....

➤ 定义与性质    三边关系（三个不等式的不等式组）

➤ 三角形分类

重要三角形	按角分	锐角 $\triangle$ ：三个内角都小于 $90^\circ$
		直角 $\triangle$ ：有一个角等于 $90^\circ$ 等腰直角 $\triangle$ ， $30^\circ$ 直角 $\triangle$
重要三角形	按边分	钝角 $\triangle$ ：有一个角大于 $90^\circ$
		一般 $\triangle$ ：三边都不相等
		等腰 $\triangle$ ：两边相等（等边 $\triangle$ ：三个边都相等）

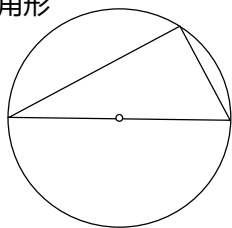
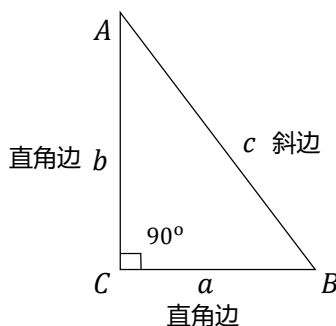
➤ 三角形面积、高、与等高模型

➤ 相似三角形

## 平面几何 7.2 直角三角形

### 【直角三角形判定】

1. 一个内角为 $90^\circ$ 的三角形
2. 三边长度符合勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$
3. 三角形面积 $S = \frac{1}{2}ab$
4. 若三角形底边为圆的直径，顶点在圆周上，  
则三角形为直角三角形



直径所对的圆周角为直角



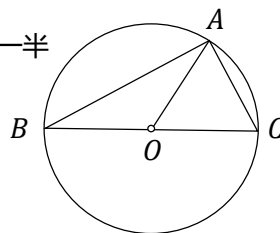
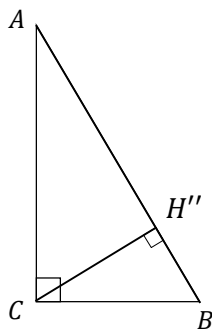
大师笔记：直角三角形

讲义 P55

## 平面几何 7.2 直角三角形

### 【直角三角形性质】

1. 三边的长度符合勾股定理  $a^2 + b^2 = c^2$
2. 面积  $S = \frac{1}{2} \times \text{直角边} \times \text{直角边} = \frac{1}{2} \times \text{斜边} \times \text{斜边上的高}$ .
3. 直角三角形斜边中线等于斜边的一半  
 $AO = OB = OC$



【标志词汇】➤ 一般三角形  $\Rightarrow$  作垂线构造直角三角形，用勾股定理求解

- [直角三角形]+[斜边上的高]  $\Rightarrow$  ① 【等面积】直角边  $\times$  直角边 = 斜边  $\times$  高  
② 【射影定理】（相似三角形讲解）

讲义 P55

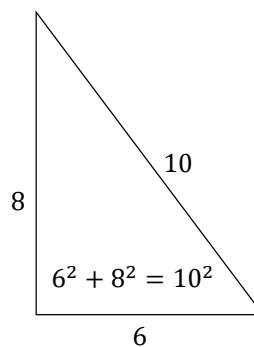
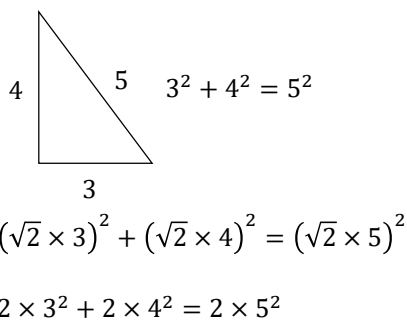
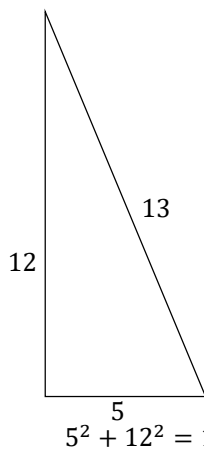
## 平面几何 7.2 直角三角形

.....

**勾股定理**  $a^2 + b^2 = c^2$  常用勾股数有：3,4,5      6,8,10      5,12,13

注：每组常用勾股数各数字乘以相同倍数，结果仍为勾股数

成等差数列的勾股数，只有 $\{3k, 4k, 5k\}$ 一种



讲义 P55

## 平面几何 7.2 直角三角形

.....

3. 【模拟题】直角三角形的直角边为 $a, b$ ，斜边为 $c$ ，斜边上的高为 $x$ ，则（ ）.

- A.  $ab = x^2$       B.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$       C.  $a^2 + b^2 = 2x^2$       D.  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{x^2}$       E.  $\frac{b}{a} = \frac{1}{x}$

【答案】 D

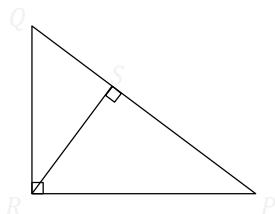
讲义 P55

④④④④ 7.2 直角三角形

4. 【2008.10.18】 (条件充分性判断)  $PQ \times RS = 12$ . ( )

(1) 如图,  $QR \times PR = 12$ .

(2) 如图,  $PQ = 5$ .



【答案】 A

讲义 P56

④④④④ 7.2 直角三角形

5. 【2003.01.03】 设 $P$ 是正方形 $ABCD$ 外的一点,  $PB = 10$ 厘米,  $\triangle APB$ 的面积是 $80\text{cm}^2$ ,  $\triangle CPB$ 的面积是 $90\text{cm}^2$ , 则正方形 $ABCD$ 的面积为 ( ) .

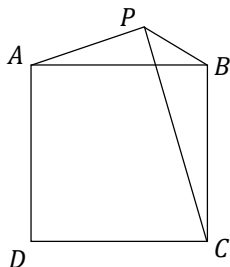
A.  $720\text{cm}^2$

B.  $580\text{cm}^2$

C.  $640\text{cm}^2$

D.  $600\text{cm}^2$

E.  $560\text{cm}^2$



【答案】 B

讲义 P56



## ④④④④ 7.2 等腰三角形

➤ 定义与性质 三边关系（三个不等式的等式组）

➤ 三角形分类

重要三角形	{	按角分	锐角 $\triangle$ ：三个内角都小于 $90^\circ$
			直角 $\triangle$ ：有一个角等于 $90^\circ$ 等腰直角 $\triangle$ ， $30^\circ$ 直角 $\triangle$
		按边分	钝角 $\triangle$ ：有一个角大于 $90^\circ$
			一般 $\triangle$ ：三边都不相等
			等腰 $\triangle$ ：两边相等（等边 $\triangle$ ：三个边都相等）

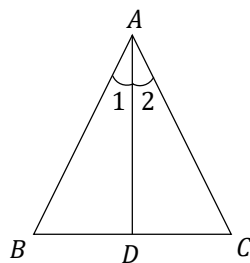
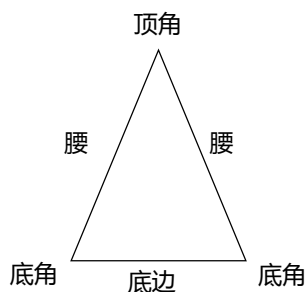
➤ 三角形面积、高、与等高模型

➤ 相似三角形

## ④④④④ 7.2 等腰三角形

- 【等腰三角形判定】
1. 任意两个角相等
  2. 任意两条边相等
  3. 三线中有任两条重合

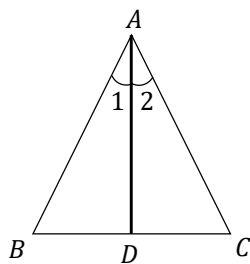
三线：角平分线、对应底边中线、对应底边上的高



## 平面几何 7.2 等腰三角形

.....

- 【等腰三角形性质】**
1. 等腰三角形两个底角相等
  2. 等腰三角形两个腰相等
  3. 三线合一:  $\angle 1 = \angle 2 \Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow BD = DC$



等腰三角形常用辅助线

**【标志词汇】** 等腰三角形  $\Rightarrow$  若缺少三线, 则补齐三线.

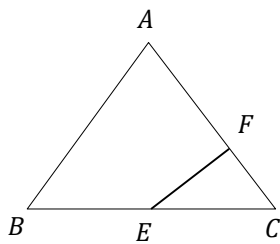
讲义 P56

## 平面几何 7.2 等腰三角形

.....

6. 【2013.10.07】如图  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $E$  是  $BC$  的中点,  $EF \perp AC$ . 则  $EF = ( \quad )$ .

- A.1.2      B.2      C.2.2      D.2.4      E.2.5



**【答案】** D

讲义 P56

## ④④④④ 7.2 三角形

➤ 定义与性质 三边关系（三个不等式的不等式组）

➤ 三角形分类

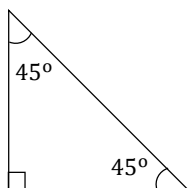
重要三角形	{	按角分	锐角△：三个内角都小于 $90^\circ$
			直角△：有一个角等于 $90^\circ$ 等腰直角△， $30^\circ$ 直角△ 钝角△：有一个角大于 $90^\circ$
	{	按边分	一般△：三边都不相等
		等腰△：两边相等（等边△：三个边都相等）	

➤ 三角形面积、高、与等高模型

➤ 相似三角形

## ④④④④ 7.2 重要三角形

重要三角形形状已锁定，再多给定一个条件即可唯一确定此三角形



当三边长度分别为 $1, 1, \sqrt{2}$ 时，周长为 $2 + \sqrt{2}$ ，面积为 $\frac{1}{2}$ 。

当三边长度分别为 $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$ 时，周长为 $2 + 2\sqrt{2}$ ，面积为 $1$ 。

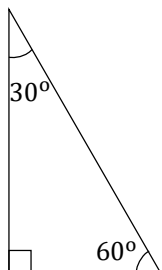
**【等腰直角三角形】**三边长度之比为 $1:1:\sqrt{2}$  充分必要关系

若直角边为 $a$ ，则斜边为 $\sqrt{2}a$ ，周长为 $(2 + \sqrt{2})a$ ，面积 $S = \frac{1}{2}a^2$



## 平面几何 7.2 重要三角形

重要三角形形状已锁定，再多给定一个条件即可唯一确定此三角形



当三角形三边长度分别为  $1, \sqrt{3}, 2$ ，周长为  $3 + \sqrt{3}$ ，面积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

当三角形三边长度分别为  $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ ，周长为  $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ ，面积为  $\frac{\sqrt{3}}{8}$ 。

【30°直角三角形】三边长度之比为  $1:\sqrt{3}:2$  充分必要关系

若短直角边为  $a$ ，则长直角边为  $\sqrt{3}a$ ，斜边为  $2a$ ，周长为  $(3 + \sqrt{3})a$ ，面积  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ 。

讲义 P57

## 平面几何 7.2 重要三角形

7. 【2020.16】（条件充分性判断）在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 60^\circ$ ，则  $\frac{c}{a} > 2$ 。（ ）

- (1)  $\angle C < 90^\circ$ .      (2)  $\angle C > 90^\circ$ .

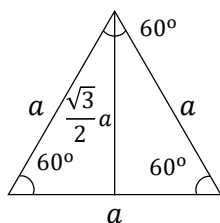
【答案】 B

讲义 P57

## ④④④④ 7.2 重要三角形

重要三角形形状已锁定，再多给定一个条件即可唯一确定此三角形

等边三角形是特殊的等腰三角形，满足三组三线合一



### 等边三角形判定

三条边相等的三角形是等边 $\triangle$ ；

任一个内角为 $60^\circ$ 的等腰三角形为等边 $\triangle$ ；

有两个内角均为 $60^\circ$ 的三角形是等边 $\triangle$ 。

【等边三角形】边长与高之比为 $1:\frac{\sqrt{3}}{2}$  边长为 $a$ 的等边三角形高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，面积 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

讲义 P57

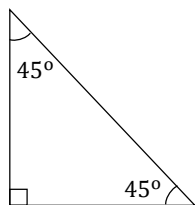
## ④④④④ 7.2 重要三角形

重要三角形形状已锁定，再多给定一个条件即可唯一确定此三角形

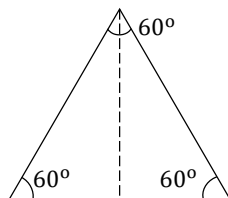
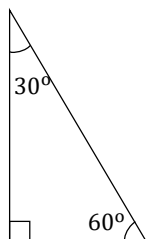
【等腰直角三角形】三边长度之比为 $1:1:\sqrt{2}$

【 $30^\circ$ 直角三角形】三边长度之比为 $1:\sqrt{3}:2$

【等边三角形】边长与高之比为 $1:\frac{\sqrt{3}}{2}$  边长为 $a$ 的等边三角形高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，面积 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



勾股定理



三线合一

讲义 P57

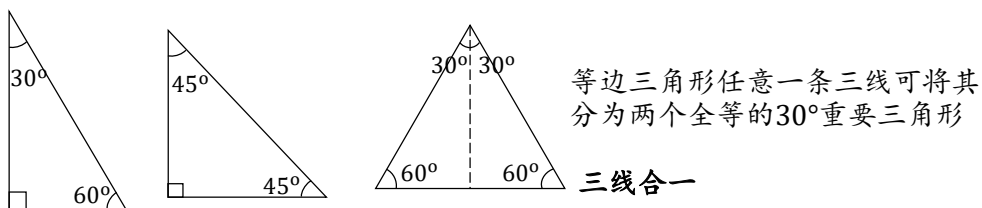
## 平面几何 7.2 重要三角形

【标志词汇】一般三角形 $\Rightarrow$ 作垂线构造直角三角形，用勾股定理求解。

【标志词汇】直角三角形

$\triangleright$  [直角三角形]+[重要角度( $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ )]  $\Rightarrow$ 重要三角形三边和面积关系

套用重要三角形三边比例后，自动符合勾股定理



【标志词汇】等腰三角形 $\Rightarrow$ 若缺少三线，则补齐三线。

讲义 P57

## 平面几何 7.2 重要三角形

8. 【模拟题】某三角形底边长为80，一底角为 $60^\circ$ ，另二边长之和为90，则该三角形最短边的长为 ( ) .

A.45      B.40      C.36      D.17      E.12

【答案】 D

讲义 P58

## ④④④④ 7.2 三角形 · 总结

.....

【标志词汇】给出一般三角形 $\Rightarrow$ 作垂线构造直角三角形，用勾股定理求解.

【标志词汇】直角三角形

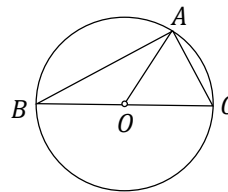
➤ [直角三角形]+[重要角度( $30^\circ/45^\circ/60^\circ$ )]  $\Rightarrow$ 重要三角形三边和面积关系

套用重要三角形三边比例后，自动符合勾股定理

➤ [直角三角形]+[斜边上的高] $\Rightarrow$  ①【等面积模型】直角边 $\times$ 直角边 = 斜边 $\times$ 斜边上的高  
②【射影定理】

➤ [直角三角形]+[斜边上的中线]  $\Rightarrow$  斜边上的中线=斜边的一半

➤ [直角三角形]+[内接于一圆]  $\Rightarrow$  斜边为直径，过圆心



讲义 P58