2024零基础抱佛脚

(五)

数学—阿董

抱佛脚

讲义P40-P51

章节	题目个数	举例个数	总数
05二次方程与抛物线	4	1	5
06数列	20	4	24

二次方程与抛物线

第五章 二次方程与抛物线

5.5 不等式与一元二次不等式

讲义 P40-P42

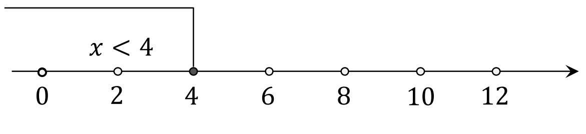
二次方程与抛物线 5.5 不等式

不等式 把两个解析式用大于号(>)、小于号(<)、大于等于号(≥)或小于等于号(≤)连接起来

$x^2-1\geq 0$，$\sqrt{2x+3}<5$，$x<4$

不等式的解 能令不等式成立的未知量的取值

不等式的解集 不等式所有解所组成的集合



实心：取得到等号

空心：取不到等号

不等式$2x<8$的解可以表示为$x<4$，或$(-\infty,4)$.

大师笔记：不等式基础　讲义 P40

二次方程与抛物线 5.5 不等式

不等式的性质

- **对逆性** 如果$a>b$，那么$b<a$.
- **传递性** 如果$a>b$且$b>c$，那么$a>c$.

一个不等式 不等式两边同增同减，不等号方向不变　　若$a>b$，则$a\pm c>b\pm c$

不等式$a>b$两边同时乘以同一个数c时：

$c=0$	不可以乘		
$c>0$	$ac>bc$	$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$	不等号方向不变
$c<0$	$ac<bc$	$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$	不等号方向改变

讲义 P40

二次方程与抛物线 5.5 不等式

【两不等式间】可加不可减，相加要同向

即两不等式间有且仅有：$a>b$，$c>d$，那么$a+c>b+d$

【举例】已知$3>2$，$5>1$

可以相加，得$3+5=8>2+1=3$.

不能相减：$3-5=-2>2-1=1$

【举例】已知$x>3$，$y<5$

$-y>-5$，此时不等号方向相同可以相加，得$x-y>-2$

无论不等号方向相同或不同，均不能相减

即不能用$x>3$与$-y>-5$相减以求$x+y$的范围.

讲义 P40

二次方程与抛物线 5.5 不等式

12.【2016.19】（条件充分性判断）设x, y是实数，则$x \le 6$，$y \le 4$.（　　）

（1）$x \le y + 2$.　　　　（2）$2y \le x + 2$.

【答案】C

讲义 P40

二次方程与抛物线 5.5 不等式

13.【2015.17】（条件充分性判断）已知a, b为实数，则$a \ge 2$或$b \ge 2$.（　　）

（1）$a + b \ge 4$.　　　　（2）$ab \ge 4$.

【答案】A

讲义 P40

二次方程与抛物线 5.5 不等式

- **不等式取倒数**　$a>b>0$，那么$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　$2>1>0\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{1}$

  $0>a>b$，那么$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　$0>-1>-2\Rightarrow\frac{1}{-1}<\frac{1}{-2}$

  不等式两边同为正或同为负，同时取倒数后不等号变向

  $a>0>b$，那么$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　$1>0>-1\Rightarrow\frac{1}{1}>\frac{1}{-1}$

  不等式两边一正一负，同时取倒数后还是正的大于负的

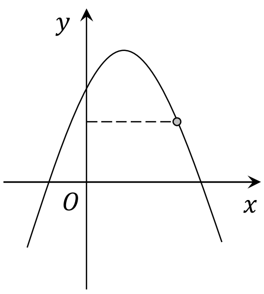
- **不等式两边平方**　若$a,b\geq 0$，则$a>b\Leftrightarrow a^2>b^2$.

  不等式仅可以在两边非负的情况下平方

讲义 P40

二次方程与抛物线 5.5 一元二次不等式

- 二次多项式ax^2+bx+c
- 二次方程$ax^2+bx+c=0$　求二次方程的根就是求x等于什么值时可以令二次多项式ax^2+bx+c的值等于零.
- 二次函数$y=ax^2+bx+c$　每代入一个x的值，都会得到一个相对应的二次多项式ax^2+bx+c的值



将这个x值对应横坐标，二次多项式的值对应纵坐标（命名为y）

可以在坐标平面画出一条抛物线

抛物线上的点对应的纵坐标（对y轴做垂线，垂足落在的位置）

就是二次多项式ax^2+bx+c的值

- 抛物线在x轴上方的部分，对应二次多项式ax^2+bx+c值为正
- 抛物线在x轴下方的部分，对应二次多项式ax^2+bx+c值为负
- 抛物线与x轴的交点，对应二次多项式ax^2+bx+c值为零

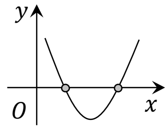
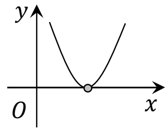
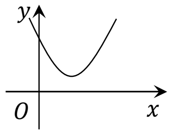
  此即二次方程$ax^2+bx+c=0$的根

注：$a\neq 0$

讲义 P37

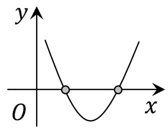
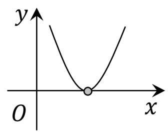
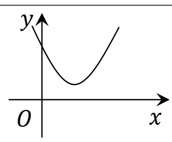
二次方程与抛物线 5.5 一元二次不等式

二次方程的根⇔抛物线与x轴的交点⇔不等式解集的区间端点

一元二次方程的根	一元二次函数图像与x轴交点	不等式$ax^2+bx+c>0$解集
$\Delta>0$ 方程有两不同实根	 抛物线与x轴 有两不同交点	$x<x_1$或$x>x_2$
$\Delta=0$ 方程有两相同实根 $x_1=x_2-\frac{b}{2a}$	 抛物线与x轴 有一个交点	$x\neq-\frac{b}{2a}$
$\Delta<0$ 方程无实根	 抛物线与x轴 无交点	$(-\infty,+\infty)$

二次方程与抛物线 5.5 一元二次不等式

二次方程的根⇔抛物线与x轴的交点⇔不等式解集的区间端点

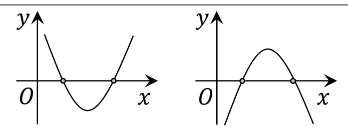
一元二次方程的根	一元二次函数图像与x轴交点	不等式$ax^2+bx+c<0$解集
$\Delta>0$ 方程有两不同实根	 抛物线与x轴 有两不同交点	$x_1<x<x_2$
$\Delta=0$ 方程有两相同实根 $x_1=x_2-\frac{b}{2a}$	 抛物线与x轴 有一个交点	无解
$\Delta<0$ 方程无实根	 抛物线与x轴 无交点	无解

二次方程与抛物线 5.5 一元二次不等式·求解一元二次不等式

【标志词汇】给定不等式，求解集.

【标志词汇】给定不等式解集，求系数.

【举例】求不等式$-x^2+4x-3>0$的解集 大于取两边，小于取中间

步骤	实操
①a变正、标准化	$x^2-4x+3<0$
②求根：求对应二次方程的根.	$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$ $x=1$或$x=3$
③写解集： 不等号为“>”的，解集取两根之外 不等号为“<”的，解集取两根之间 （针对变形后的不等式）	 小于取中间(1,3)

二次方程与抛物线 5.5 一元二次不等式·求解一元二次不等式

14.【2006.10.05】已知不等式$ax^2+2x+2>0$的解集是$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，则$a=$ （ ）.

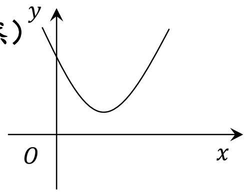
A.-12 B.6 C.0 D.12 E.以上结论均不正确

【答案】A

二次方程与抛物线 5.5 一元二次不等式·无解与恒成立问题

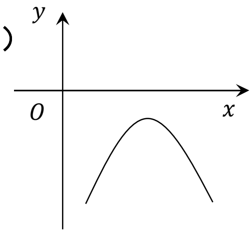
$ax^2+bx+c>0$对所有实数x都成立 恒成立（必然）

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{抛物线开口必向上，} a>0 \\ \text{抛物线与} x \text{ 轴无交点（对应方程} \Delta<0\text{）} \end{cases}$



$ax^2+bx+c<0$对所有实数x都成立 恒成立（必然）

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{抛物线开口必向下，} a<0 \\ \text{抛物线与} x \text{ 轴无交点（对应方程} \Delta<0\text{）} \end{cases}$



二次方程与抛物线 5.5 一元二次不等式·无解与恒成立问题

标志词汇	翻译	解读
不等式$ax^2+bx+c>0$解集为全体实数	**必然**	ax^2+bx+c必然>0
不等式$ax^2+bx+c>0$对所有实数x都成立		
不等式$ax^2+bx+c\le 0$解集为空集	**不可能**	ax^2+bx+c不可能≤ 0
不等式$ax^2+bx+c\le 0$无解		

$(a\neq 0)$

无解 空集 ⇒ 恒成立

把所有的无解转化为恒成立　把所有的不可能转化为必然

【标志词汇】一元二次不等式无解⇒转化为恒成立后求解

二次方程与抛物线 5.5 一元二次不等式

15.【2011.10.21】（条件充分性判断）不等式$ax^2+(a-6)x+2>0$对所有实数x都成立（　　）.

（1）$0<a<3$　　　　（2）$1<a<5$

【答案】E

二次方程与抛物线 5.5 一元二次不等式·无解与恒成立问题

15.【2011.10.21】（条件充分性判断）不等式$ax^2+(a-6)x+2>0$对所有实数x都成立（　　）.

（1）$0<a<3$　　　　（2）$1<a<5$

【答案】E

讲义 P42

二次方程与抛物线

二次方程与抛物线	5.2一元二次方程的根	近5年考3题 【2022.21】构造二次方程 【2022.23】构造二次方程 【2019.20】根的判别式
	5.3二次函数	近5年考1题 【2021.05】二次函数特值法 【2020.23】二次函数图像
	5.4给出根的取值范围相关计算	近5年考1题 【2023.17】（根的k分布）
	5.5不等式与一元二次不等式	近5年考1题 【2020.03】（不等式）

数列

2024MBA大师零基础抱佛脚

数列

- 近几年每年2题左右（2023年2题）
- 三项数列
- 等差数列
- 等比数列

数列	6.2等差数列	近5年考4题【2022.24】【2021.02】【2020.05】【2019.24】
	6.3等比数列	近5年考5题【2023.18】【2023.24】【2022.21】【2021.24】【2019.16】

数列

第六章 数列

6.1 数列基础

讲义 P43

数列 6.1 数列基础

数列的定义和分类 依一定次序排成的一列数称为一个数列.

数列的一般表达形式为：a_1，a_2，a_3，…，a_n，…简记为$\{a_n\}$.

【有穷数列】 1，2，3，4，5，6，7

【无穷数列】 1，2，3，4，5，6，7，…

【递增数列】第二项起，每一项都比前一项大.

单调性

【递减数列】第二项起，每一项都比前一项小. 7，6，5，4，3，2，1，…

【摆动数列】1，-1，1，-1，1，-1，1，-1，… 公比为-1的等比数列

【常数列】各项均为同一个常数 2，2，2，2，2，2，2，… 常数列特值法

数列 6.1 数列基础

【数列】<u>依一定次序排成的一列数 $\{a_n\}$</u>

0，1，1，2，3，5，8，…

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，…

数列两大要素 $\begin{cases} \text{数列某项的值：} a_n \\ \text{某项的序号：下标} n \end{cases}$

【数列的通项】数列的第n项a_n与其序号n之间的关系

如果数列中的第n项a_n与其序号n的关系可以用一个公式来表示，则称这个公式为通项公式

数列的通项公式⟹数列中的任意一项.

【数列前n项和S_n】从数列第一项a_1开始依次相加，至第n项a_n，这n项的和称为数列的前n项和.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

数列 6.1 数列基础

1.【2016.24】已知数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$，则$a_1-a_2+a_3-\cdots+a_9-a_{10}\geq 0$．（　　）

（1）$a_n\geq a_{n+1},n=1,2,\cdots,9$.　　（2）${a_n}^2\geq {a_{n+1}}^2$，$n=1,2,\cdots,9$.

【答案】A

讲义 P43

数列

第六章 数列

6.2 等差数列

讲义 P44-P48

数列 6.2 等差数列 · 基础

次序	第1项	第2项	第3项	第4项	…	第n项	…
数值	1 $\xleftrightarrow{+1}$	2 $\xleftrightarrow{+1}$	3 $\xleftrightarrow{+1}$	4	…	n	…
数值	5 $\xleftrightarrow{+5}$	10 $\xleftrightarrow{+5}$	15 $\xleftrightarrow{+5}$	20	…	$5n$	…
一般式	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d	…	$a_1+(n-1)d$	…

等差数列 如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一常数，即：$a_{n+1}-a_n=d$，那么这个数列就叫作等差数列，这个常数叫作等差数列的公差d.

数列的通项 数列的第n项a_n与其序号n之间的关系

等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

a_1和$d \Longrightarrow$ 等差数列的通项公式 $\Longrightarrow$ 等差数列中的任何一项.

大师笔记：等差数列定义与判定 讲义 P44

数列 6.2 等差数列 · 基础

等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

公差$d>0 \Leftrightarrow$递增数列

公差$d<0 \Leftrightarrow$递减数列

公差$d=0 \Leftrightarrow$常数列

数列前n项和S_n 从数列第一项a_1开始依次相加，至第n项a_n，这n项的和称为数列的前n项和.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

等差数列前n项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\dfrac{2a_1-d}{2}n$

$$\frac{(\text{首项}+\text{末项})\times\text{项数}}{2}$$

讲义 P44

数列 6.2 等差数列 · 常用设项方法

①通项法： 根据等差数列的通项公式$a_n = a_1 + (n-1)d$

设第一项为a_1，第二项为$a_1 + d$，第三项为$a_1 + 2d$，…，以此类推.

②对称设：

项数	设项原则	常见应用
连续奇数个项成等差数列	设中间一项为a，再以d为公差向两边分别设项	三项成等差，设为$a-d, a, a+d$
		五项成等差，设为$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$
连续偶数个项成等差数列	设中间两项分别为$a-d$和$a+d$，再以$2d$为公差向两边分别设项	四项成等差，设为$a-3d, a-d, a+d, a+3d$

数列 6.2 等差数列 · 三项数列

三项数列可以被用在任何知识点，等同于给出一个关于a，b，c的等式

三元乘法公式、二次方程的三个系数、三角形三边、立方体三条棱、应用题等

【标志词汇】<u>三项成等差数列</u>⇔
- ①给出a, b, c为等差，则有关系式$2b = a + c$
- ②需要设项，则直接设为$a-d, a, a+d$，自动满足等差

连续自然数：$n-1$，n，$n+1$

连续偶数/奇数：$n-2$，n，$n+2$（n为偶数/奇数）

数列 6.2 等差数列 • 常用设项方法

2.【2021.02】三位年轻人的年龄成等差数列，且最大与最小的两人年龄差的10倍是另一人的年龄，则三人中年龄最大的是（　　）.

A.19　　B.20　　C.21　　D.22　　E.23

【答案】C

数列 6.2 等差数列 • 判定

①定义法 任意相邻两项之差$a_{n+1}-a_n$是否为常数，若为常数，则$\{a_n\}$为等差数列

3.【例题】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n+3\times 2^n$，是否可充分推出$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$为等差数列？是

等式两边同除以2^{n+1}得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{\cancel{2}a_n}{2^{\cancel{n+1}}}+\frac{3\times\cancel{2}^n}{2^{\cancel{n+1}}}$　$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{3}{2}$　$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{2}$

②等差中项法　$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

4.【例题】已知数列$\{a_n\}$中任意一项均非零，且方程$a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$有一根为$-1$，是否可充分推出$\{a_n\}$为等差数列？是

【标志词汇】给定一个数是方程的一个根⇒给定一个此数满足的等式.

代入得$a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$　即$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

数列 6.2 等差数列·判定

①定义法 任意相邻两项之差$a_{n+1}-a_n$是否为常数，若为常数，则$\{a_n\}$为等差数列

②等差中项法 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

③通项公式法 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$ 形似关于n的一次函数或一个常数

数列通项符合以下三种形式，即为等差数列；若不符合，则非等差数列.

形式①：$a_n=$ 数字$_1\cdot n+$ 数字$_2$

形式②：$a_n=$ 数字$\cdot n$

形式③：$a_n=$ 数字

【举例】判断下列通项对应的数列是否为等差数列

$a_n=3n+2$	$a_n=-n$	$a_n=5$	$a_n=n^2+1$
是	是	是	否

讲义 P45

数列 6.2 等差数列·判定

④前n项和法 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a_1-d}{2}n=An^2+Bn$

形似关于n的不含常数项的一次或二次函数

当$A=B=0$时　即$a_1=d=0$，$S_n=0$　数列为$a_n=0$的常数列

当$A=0$，$B\neq 0$时　即$d=0$，$a_1\neq 0$，$S_n=na_1$　为非零常数列，如1，1，1，1，1，1⋯

当$A\neq 0$，$B=0$时　即$2a_1=d\neq 0$，$S_n=\frac{d}{2}n^2$　如1，3，5，7，9，11⋯ $S_n=n^2$

A与B均可能为0

讲义 P45

数列 6.2 等差数列 • 判定

形似关于n的不含常数项的一次或二次函数

④前n项和法 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n = An^2 + Bn$

数列前n项和符合以下四种形式，即为等差数列；若不符合，则非等差数列.

形式①：$S_n = 数字_1 \cdot n^2 + 数字_2 \cdot n$

形式②：$S_n = 数字 \cdot n^2$

形式③：$S_n = 数字 \cdot n$

形式④：$S_n = 0$

【举例】判断下列通项对应的数列是否为等差数列

$S_n = 4n^2 + n$	$S_n = -2n^2$	$S_n = 5n$	$S_n = 0$	$S_n = n^2 + 1$
是	是	是	是	否

数列 6.2 等差数列 • 判定

5.【2019.24】设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则$\{a_n\}$为等差数列.（　　）

（1）$S_n = n^2 + 2n$，$n = 1,2,3\cdots$.　　（2）$S_n = n^2 + 2n + 1$，$n = 1,2,3\cdots$.

【答案】A

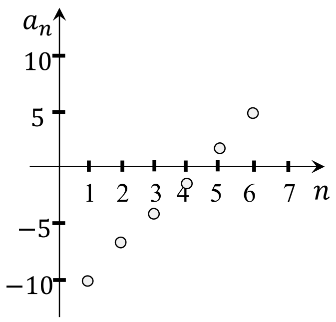
数列 6.2 等差数列·判定（总结）

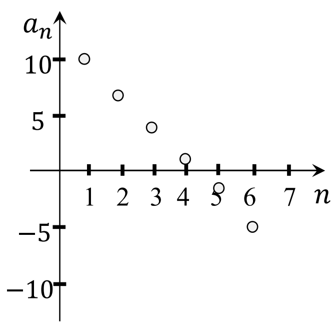
判定方法	详细描述
定义法	任意相邻两项之差$a_{n+1}-a_n$为常数
等差中项法	$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$
通项公式法	$a_n=dn+m$（形似关于n的一次函数）
前n项和法	$S_n=An^2+Bn$ （形似关于n的二次函数，其中A与B均可能为0，但一定不含常数项）

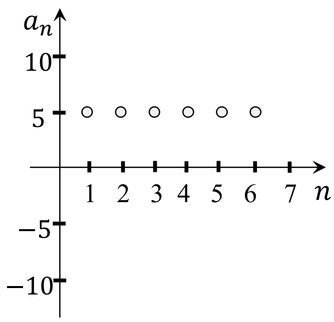
说明：以上n为正整数

数列 6.2 等差数列·性质

等差数列$\{a_n\}$单调性 $a_n=a_1+(n-1)d$







- **公差$d>0\Leftrightarrow$递增**
- **公差$d<0\Leftrightarrow$递减**
- **公差$d=0\Leftrightarrow$常数列**

数列 6.2 等差数列 • 性质

6.【模拟题】已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2+kn+2$，若数列$\{a_n\}$是递增数列，则实数k的取值范围是（　　）.

A.$k>0$　　B. $k>-1$　　C. $k\geq 0$　　D. $k>-2$　　E. $k>-3$

【答案】 E

讲义 P46

数列 6.2 等差数列 • 性质

等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

$$a_1\xrightarrow{+d}a_2\xrightarrow{+d}a_3\xrightarrow{+d}a_4\xrightarrow{+d}a_5\cdots\xrightarrow{+d}a_m\cdots\xrightarrow{+d}a_n\cdots$$

$$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+nd-d$$

$$a_m=a_1+(m-1)d=a_1+md-d$$

$$a_n-a_m=(n-m)d$$

作用	公式	举例
求某一项/通项	$a_n=a_m+(n-m)d$	$a_5=a_2+(5-2)d=a_2+3d$
求公差	$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$	$d=\dfrac{a_5-a_2}{5-2}$

a_m和d $\Leftrightarrow$等差数列的通项公式$\Leftrightarrow$等差数列中的任何一项.

讲义 P45

数列 6.2 等差数列 • 性质

等差数列下标和相等的两项之和相等 等号左右下标和相等，项数也要相等

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9，$\cdots$

$2a_5$

$2a_5 = a_4 + a_6 = a_3 + a_7 = a_2 + a_8 = a_1 + a_9$

$a_6 = a_1 + 5d$ $\qquad$ $a_7 = a_1 + 6d$

$a_9 = a_1 + 8d$ $\qquad$ $a_8 = a_1 + 7d$ $\qquad$ 下标和相等的项呈对称分布

若$\{a_n\}$为有穷等差数列，则与首末两项距离相等的两项之和都相等，且等于首末两项的和

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \cdots$

数列 6.2 等差数列 • 性质

7.【2013.01.13】 已知$\{a_n\}$为等差数列，若a_2与a_{10}是方程$x^2 - 10x - 9 = 0$的两个根，则$a_5 + a_7 =$（ ）.

A.-10 $\qquad$ B.-9 $\qquad$ C.9 $\qquad$ D.10 $\qquad$ E.12

【答案】D

数列 6.2 等差数列 · 性质

等差数列下标和相等的同数量项之和相等 两组项下标和相等，项数相同，则这两组项的和相等

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，$a_9\cdots$ 等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

$a_2=a_1+d$

$a_3=a_1+2d$

$a_4=a_1+3d$

$a_5=a_1+4d$

$a_6=a_1+5d$

$a_7=a_1+6d$

$a_8=a_1+7d$

$a_9=a_1+8d$

$a_3+a_7=2a_5$

$a_3+a_5+a_7=a_2+a_4+a_9=3a_1+12d$

$3+5+7=2+4+9$

【标志词汇】等差数列某几项和 ⟹ 下标和相等的同数量项之和相等.

数列 6.2 等差数列 · 性质

等差数列前n项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$

$S_9=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$

$2a_5$

$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=\dfrac{9(a_2+a_8)}{2}=\cdots=\dfrac{9\times 2a_5}{2}=9a_5$ $\qquad a_5=\dfrac{1}{9}S_9$

前奇数个项和：等于中间项乘以项数 $S_n=n\cdot a_{中间项}$ $\qquad a_{中间项}=\dfrac{1}{n}S_n$

【标志词汇】 $a_{中间项}\Leftrightarrow$ 对应的S_n $\quad n$为奇数

数列 6.2 等差数列 • 性质

8.【2018.17】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值.（ B ）

（1）已知a_1的值　　（2）已知a_5的值

【标志词汇】 $a_{中间项}\Leftrightarrow$ 对应的S_n　　$S_9=9a_5$

【拓展】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值.（ B ）

（1）已知a_1的值　　（2）已知a_4+a_6的值

【标志词汇】等差数列某几项和 $\Rightarrow$ 下标和相等的两项之和相等

【拓展】设$\{a_n\}$为等差数列，则能确定$a_1+a_2+\cdots+a_9$的值.（ C ）

（1）已知a_1的值　　（2）已知a_6的值

讲义 P46

数列 6.2 等差数列 • 性质

9.【 2009.01.25】$\{a_n\}$的前n项和S_n与$\{b_n\}$的前n项和T_n满足$S_{19}:T_{19}=3:2$.（　）

（1）$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是等差数列　　（2）$a_{10}:b_{10}=3:2$

【答案】C

讲义 P46

数列 6.2 等差数列·性质

【拓展】若等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则数列$\{pa_n+q\}$是公差为pd的等差数列

$\{a_n\}$　　1，2，3，4，5，6……　　$d=1$

$\{a_n+1\}$　　2，3，4，5，6，7　……　　$d=1\times1=1$

$\{2a_n\}$　　2，4，6，8，10，12　……　　$d=2\times1=2$

$\{2a_n+1\}$　　3，5，7，9，11，13　……　　$d=2\times1=2$

数列 6.2 等差数列·通分与裂项

分数的加减法 分母相同，分母不变，分子直接加减.

$$\frac{3}{13}+\frac{5}{13}=\frac{3+5}{13}=\frac{8}{13}\qquad\frac{9}{13}-\frac{2}{13}=\frac{9-2}{13}=\frac{7}{13}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}\qquad\frac{b}{ac}-\frac{3}{ac}=\frac{b-3}{ac}\quad(a\neq0,\ c\neq0)$$

分母不同，先通分（化为同分母分数），再加减.

分数的基本性质 分数的分子与分母同乘一个不为零的数或算式，分数值不变.

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times7}{5\times7}=\frac{14}{35}\qquad\frac{b}{a}=\frac{bc}{ac}=\frac{ab}{a^2}\quad(a\neq0,\ c\neq0)$$

数列 6.2 等差数列・通分与裂项

分数的通分　异分母分数 ⟹ 等值同分母分数

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\times 7}{5\times 7}+\frac{3\times 5}{7\times 5}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{29}{35}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1\times 5}{4\times 5}-\frac{1\times 4}{5\times 4}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{4\times 5}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}$$

$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}$$

讲义 P47

数列 6.2 等差数列・通分与裂项

➢ **分数的通分相减**

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1\times 5}{4\times 5}-\frac{1\times 4}{5\times 4}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{4\times 5}\qquad \frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{7}{3\times 7}-\frac{3}{3\times 7}=\frac{7}{21}-\frac{3}{21}=\frac{4}{3\times 7}$$

➢ **分数的裂项**　$\frac{大-小}{小\times 大}=\frac{\mathbf{1}}{小}-\frac{\mathbf{1}}{大}$

$$\frac{1}{4\times 5}=\frac{5-4}{4\times 5}=\frac{5}{4\times 5}-\frac{4}{4\times 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\qquad \frac{4}{3\times 7}=\frac{7-3}{3\times 7}=\frac{7}{3\times 7}-\frac{3}{3\times 7}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{5\times 6}=\frac{6-5}{5\times 6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\qquad \frac{1}{6}=\frac{3-2}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\qquad \frac{3}{40}=\frac{8-5}{5\times 8}=\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$$

讲义 P47

数列 6.2 等差数列·通分与裂项

两数之差 →

两数之积 → $\frac{大-小}{大\times小}=\frac{1}{小}-\frac{1}{大}$　　$\frac{3}{40}=\frac{8-5}{5\times8}=\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$

分母必须为两项之积，
分子可以凑配

$$\frac{1}{7\times3}=\frac{1}{7-3}\times\frac{7-3}{7\times3}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{1}{(a+2)a}=\frac{1}{(a+2)-a}\times\frac{(a+2)-a}{(a+2)a}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)$$

【标志词汇】 [多分式求和]+[分母为相似的规律结构乘积] ⟹ 裂项相消.

数列 6.2 等差数列·通分与裂项

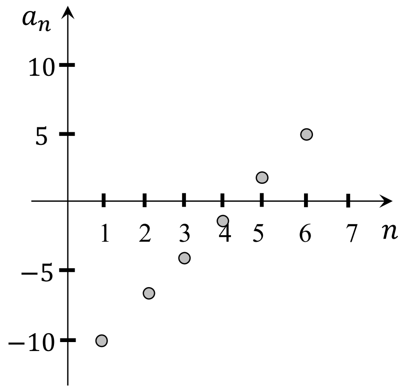
10.【2009.01.13】设直线$nx+(n+1)y=1$（n为正整数）与两坐标轴围成的三角形面积为$S_n(n=1,2,\cdots,2009)$，则$S_1+S_2+\cdots+S_{2009}=$（　　）.

A. $\frac{1}{2}\times\frac{2009}{2008}$　　B. $\frac{1}{2}\times\frac{2008}{2009}$　　C. $\frac{1}{2}\times\frac{2009}{2010}$　　D. $\frac{1}{2}\times\frac{2010}{2009}$　　E.以上结论都不正确

【答案】C

数列 6.2 等差数列·S_n的最值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	…	a_{n-1}	a_n
-10	-7	-4	-1	2	5	…	$-10+3(n-2)$	$-10+3(n-1)$



$S_1=a_1=-10$

$S_2=-10-7=-17$

$S_3=-10-7-4=-21$

$S_4=-10-7-4-1=-22$

$S_5=-10-7-4-1+2=-20$

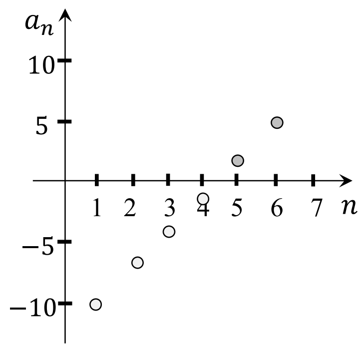
$S_6=-10-7-4-1+2+5=-15$

……

数列 6.2 等差数列·S_n的最值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	…	a_{n-1}	a_n
-10	-7	-4	-1	2	5	…	$-10+3(n-2)$	$-10+3(n-1)$

【标志词汇】等差数列S_n的最值⇒寻找数列变号的项



$a_4<0$，$a_5>0$

a_5即为数列$\{a_n\}$开始变号的项

a_5之前的每一项均为负；a_5及以后的每一项均为正

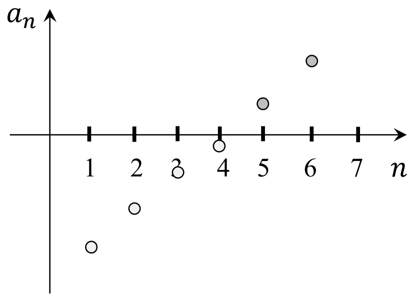
所有负项之和即为S_n能取到的最小值.

$S_n \geq S_4$

数列 6.2 等差数列 · S_n的最值

【标志词汇】等差数列S_n的最值⇒寻找数列变号的项

当$a_1 < 0$，$d > 0$，S_n有最小值.



数列为首项为负的递增数列时，

随着项数n的增加，a_n越来越大

S_n有最小值.

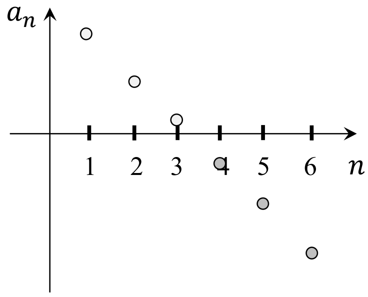
最小值为所有非正项之和.

讲义 P48

数列 6.2 等差数列 · S_n的最值

【标志词汇】等差数列S_n的最值⇒寻找数列变号的项

当$a_1 > 0$，$d < 0$，S_n有最大值



数列为首项为正的递减数列时，

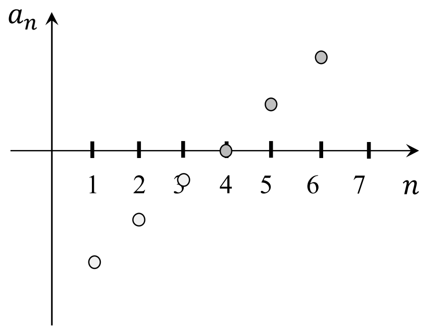
随着项数n的增加，a_n越来越小，S_n有最大值.

最大值为所有非负项之和.

讲义 P48

数列 6.2 等差数列 · S_n的最值

若$d \neq 0$的等差数列中有一项为零，则数列有两个相等的最值.



当$a_1 < 0$，$d > 0$，S_n有最小值

$a_4 = 0$

a_4之前的项均为负， a_4之后的项均为正.

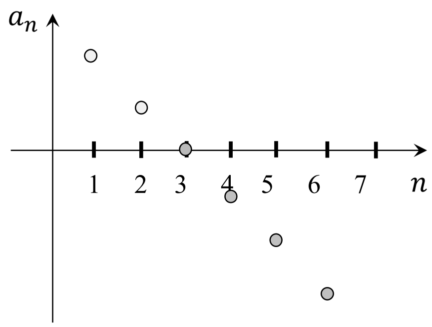
所有负项之和S_3 = 所有负项之和$S_3 + a_4 = S_4$

数列有两个相等的最小值：S_3和S_4

讲义 P48

数列 6.2 等差数列 · S_n的最值

若$d \neq 0$的等差数列中有一项为零，则数列有两个相等的最值.



当$a_1 > 0$，$d < 0$，S_n有最大值

$a_3 = 0$

a_3之前的项均为正， a_3之后的项均为负.

所有正项之和S_2 = 所有正项之和$S_2 + a_3 = S_3$

数列有两个相等的最大值：S_2和S_3

讲义 P48

数列 6.2 等差数列 · S_n的最值

11.【2015.23】已知$\{a_n\}$是公差大于零的等差数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和，则$S_n \geq S_{10}$，$n = 1,2 \cdots$.（　　）

（1）$a_{10} = 0$.　　　　（2）$a_{11}a_{10} < 0$.

【答案】 D

讲义 P48

数列 6.2 等差数列 · S_n的最值

12.【2020.05】等差数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 8$，且$a_2 + a_4 = a_1$，则$\{a_n\}$前n项和的最大值为（　　）.

A.16　　B.17　　C.18　　D.19　　E.20

【答案】 E

讲义 P48

数列 6.2 等差数列 · S_n的最值

13.**【模拟题】**已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1+a_3+a_5=105$，$a_2+a_4+a_6=99$，若S_n表示$\{a_n\}$的前n项和，使得S_n达到最大值时的$n=$（　　）.

A.21　　B.20　　C.19　　D.18　　E.22

【答案】B

讲义 P48