破题标志词

一元二次方程有两负根$\Leftrightarrow\Delta\geqslant0$ 且 a,b,c 同号.
一元二次方程有两正根$\Leftrightarrow\Delta\geqslant0$,$a$ 与 c 同号,a 与 b 异号.

总结以上三个破题标志词可知,若我们将方程化为二次项系数 $a>0$ 的标准二次方程,则有:

系数特征	方程的根	根的判别式 Δ
$c<0$	一正一负两实根	自动满足
正 x^2＋负 x＋正$=0$	两正根	$\Delta\geqslant0$
正 x^2＋正 x＋正$=0$	两负根	

▶11　【2005.10.05】(条件充分性判断)方程 $x^2+ax+b=0$ 有一正一负两个实根.(　　)

(1)$b=-C_4^3$.

(2)$b=-C_7^5$.

5.5　不等式

不等式

【不等式】把两个解析式用大于号(>)、小于号(<)、大于等于号(≥)或小于等于号(≤)连接起来,所得到的式子叫作不等式.

如:$x^2-1\geqslant0$,$\sqrt{2x+3}<5$,$\log_2 5x>0$,$2^x-1>1$ 等都是不等式.

【不等式的解集】能够使不等式成立所有未知数的值构成的集合叫作不等式的解集.

如:不等式 $2x<8$ 的解可以表示为 $x<4$ 或$(-\infty,4)$.

【不等式的性质】

※【对逆性】如果 $a>b$,那么 $b<a$.

※【传递性】如果 $a>b$ 且 $b>c$,那么 $a>c$.

即不等式两边都加上(或者减去)同一个数或者同一个整式,所得的不等式和原不等式同解.

※一个不等式:左右两边同乘以正数不等号不变,同乘以负数不等号变方向.

注意:未知乘数的正负不能乘.

※两个不等式之间:可加不可减,相加要同向,加后不可逆.

如果 $a>b$,$c>d$,那么 $a+c>b+d$.

※【不等式取倒数】如果 $a>b>0$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

如果 $a>0>b$，那么 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；

如果 $0>a>b$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

※【不等式两边平方】不等式仅可以在两边非负的情况下平方，即有：若 $a,b\geqslant 0$，则 $a>b\Leftrightarrow a^2>b^2$.

12 【2016.19】(条件充分性判断)设 x,y 是实数．则 $x\leqslant 6,y\leqslant 4$.(　　)

(1)$x\leqslant y+2$.

(2)$2y\leqslant x+2$.

13 【2015.17】(条件充分性判断)已知 a,b 为实数．则 $a\geqslant 2$ 或 $b\geqslant 2$.(　　)

(1)$a+b\geqslant 4$.

(2)$ab\geqslant 4$.

14 【2024.21】(条件充分性判断)设 a,b 为正实数.则能确定 $a\geqslant b$.(　　)

(1)$a+\frac{1}{a}\geqslant b+\frac{1}{b}$.

(2)$a^2+a\geqslant b^2+b$.

思考与总结

第六章

数列

6.1 数列基础

【数列的定义和分类】按一定次序排列的一列数叫作数列.数列中每一个数叫作这个数列的项,数列一般形式可以写为:$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$简记为数列$\{a_n\}$.其中数列第一项$a_1$也称为首项,$a_n$是数列的第$n$项,也叫作数列的通项.

数列按照不同的特征可进行如下分类:

有穷数列:如:1,2,3,4,5,6,7

无穷数列:如:1,2,3,4,5,6,7,…

递增数列:第二项起,每一项都比前一项大.如:1,2,3,4,5,6,7,…

递减数列:第二项起,每一项都比前一项小.如:7,6,5,4,3,2,1,…

摆动数列:从第二项起,有些项大于它的前一项,有些项小于它的前一项.

如:1,−1,1,−1,1,−1,1,−1,…(事实上,这也是一个首项为1,公比为−1的等比数列).

常数列:各项均为同一个常数(常用于作为特值解题).

【数列的通项公式】即数列的第n项a_n与其序号n之间的关系.

如果数列中的第n项a_n与其项数n的关系可以用一个公式来表示,则称这个公式为通项公式.知道了一个数列的通项公式,就可以求出这个数列中的任意一项.

【数列前n项和】从数列第一项a_1开始依次相加,至第n项a_n,这n项的和称为数列的前n项和,记为$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

▶ 1 【2016.24】(条件充分性判断)已知数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$.则$a_1-a_2+a_3-\cdots+a_9-a_{10}\geqslant 0$.(　　)

(1)$a_n\geqslant a_{n+1}$,$n=1,2,\cdots,9$.

(2)$a_n^2\geqslant a_{n+1}^2$,$n=1,2,\cdots,9$.

6.2 等差数列

相关概念

【等差数列】如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一常数，$a_{n+1}-a_n=d(n=1,2,\cdots)$，那么这个数列就叫作等差数列，这个常数叫作等差数列的公差 d. 等差数列的一般表达式为：$a_1,a_1+d,a_1+2d,\cdots,a_1+(n-1)d,\cdots$. 如：2，4，6，8，10，…….

【等差数列通项公式】$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$.

【等差数列前 n 项和公式】$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a_1-d}{2}n$.

2 【2024.06】已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2a_3=a_1a_4+50$，且 $a_2+a_3<a_1+a_5$，则公差为（　　）.

A. 2　　B. -2　　C. 5　　D. -5　　E. 10

等差数列中常用的设项方法

(1)通项法：根据等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，设第一项为 a_1，第二项为 a_1+d，第三项为 a_1+2d，…，以此类推.

(2)对称设：

项数	设项原则	常见应用
连续奇数个项成等差数列	设中间一项为 a，再以 d 为公差向两边分别设项	三项成等差，设为 $a-d,a,a+d$
		五项成等差，设为 $a-2d,a-d,a,a+d,a+2d$
连续偶数个项成等差数列	设中间两项分别为 $a-d$ 和 $a+d$，再以 $2d$ 为公差向两边分别设项	四项成等差，设为 $a-3d,a-d,a+d,a+3d$

说明：已给出字母 a,b,c 三项，且符合等差数列，则相当于给出关于 a,b,c 的等式 $2b=a+c$. 事实上对于题目中给出三项成等差（或下一节的等比数列），实际上等同于给出了这三个变量的一个关系式，可以被用在任何知识点.

破题标志词

三项成等差数列⇒①给出 a,b,c 为等差，则有 $2b=a+c$

②需要设项，则直接设为 $a-d,a,a+d$，自动满足.

3　【2021.02】三位年轻人的年龄成等差数列，且最大与最小的两人年龄之差的 10 倍是另一人的年龄，则三人中年龄最大的是(　　).

A. 19　　B. 20　　C. 21　　D. 22　　E. 23

等差数列的判定

判定方法	详细描述
定义法	任意相邻两项之差 $a_{n+1}-a_n$ 为常数
等差中项法	$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$
通项公式法	$a_n=dn+m$(形似关于 n 的一次函数)
前 n 项和法	$S_n=An^2+Bn$ (形似关于 n 的二次函数，其中 A 与 B 均可能为 0，但一定不含常数项)

说明：以上 n 为正整数

4　【模拟题】已知数列 $\{a_n\}$ 中任意一项均非零，且方程 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$ 有一根为 -1，是否可充分推出 $\{a_n\}$ 为等差数列.

5　【2019.25】(条件充分性判断)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 则 $\{a_n\}$ 为等差数列.(　　)

(1) $S_n=n^2+2n$，$n=1,2,3\cdots$.

(2) $S_n=n^2+2n+1$，$n=1,2,3\cdots$.

等差数列的性质

性质	说明与举例
单调性	若公差 $d>0$，数列为递增数列
	若公差 $d<0$，数列为递减数列
	若公差 $d=0$，数列为常数列
$a_n=a_m+(n-m)d$；$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$	$a_5=a_2+(5-2)d$；$d=\dfrac{a_5-a_2}{5-2}$
等差数列下标和相等的两项之和相等	如下标 $1+10=2+9=3+8=4+7=\cdots$，则有 $a_1+a_{10}=a_2+a_9=a_3+a_8=a_4+a_7=\cdots$ 注意：等号左右下标和相等，项数也要相等
等差数列下标和相等的同数量项之和相等	如下标 $3+5+7=2+4+9$，则有 $a_3+a_5+a_7=a_2+a_4+a_9$ 要求：两组项下标和相等，项数也要相同

续表

性质	说明与举例
若$\{a_n\}$为有穷等差数列，则与首末两项距离相等的两项之和都相等，且等于首末两项的和	$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}=\cdots$
对等差数列前奇数项和： $S_n=n\cdot a_{中间项}$ $a_{中间项}=\frac{1}{n}S_n$	若已知前 9 项的中间项 $a_5=3$，则有$S_9=9a_5=27$； 反之若已知$S_9=27$，则其中间项 $a_5=\frac{S_9}{9}=3$. 特别地，两数列前奇数个项和之比＝中间项之比

破题标志词

等差数列某几项和⇒下标和相等的同数量项之和相等.

6　【2013.01.13】已知$\{a_n\}$为等差数列，若 a_2 与 a_{10} 是方程 $x^2-10x-9=0$ 的两个根，则 $a_5+a_7=$（　　）.

A. -10　　B. -9　　C. 9　　D. 10　　E. 12

7　【2018.17】（条件充分性判断）设$\{a_n\}$为等差数列．则能确定 $a_1+a_2+\cdots+a_9$ 的值.（　　）

（1）已知 a_1 的值.

（2）已知 a_5 的值.

8　【2009.01.25】（条件充分性判断）$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 与$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n 满足 $S_{19}:T_{19}=3:2$.（　　）

（1）$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是等差数列.

（2）$a_{10}:b_{10}=3:2$.

9　【2017.07】在 1 到 100 之间，能被 9 整除的整数的平均值是（　　）.

A. 27　　B. 36　　C. 45　　D. 54　　E. 63

6.3 等比数列

相关概念

【等比数列定义】如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一非零常数，即存在常数 $q\neq 0$，使$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(n=1,2,\cdots)$，那么这个数列就叫作等比数列，这个常数就叫作等比数列的公比 q ($q\neq 0$)(等比数列每一项 a_n 和公比 q 均不为 0)，如：2，4，8，16，32，…….

【等比数列通项公式】$a_n=a_1q^{n-1}=a_kq^{n-k}(q\neq 0)$.

等比数列中常用的设项方法

(1)通项法：根据等比数列的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$，设第一项为 a_1，第二项为 a_1q，第三项为 a_1q^2，…，以此类推.

(2)对称设：

项数	设项原则	常见应用
连续奇数个项成等比数列	设中间一项为 a，再以 q 为公比向两边分别设项	三项成等比，设为$\frac{a}{q}$，a，aq
		五项成等比，设为$\frac{a}{q^2}$，$\frac{a}{q}$，a，aq，aq^2
连续偶数个项成等比数列	设中间两项分别为$\frac{a}{q}$和 aq，再以q^2 为公比向两边分别设项	四项成等比，设为$\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq，aq^3

破题标志词

三项成等比数列⟺给出 a,b,c 为等比，则有 $b^2=ac$ ($b\neq 0$).

10 【2018.19】(条件充分性判断)甲、乙、丙三人的年收入成等比数列．则能确定乙的年收入的最大值.(　　)

(1)已知甲、丙两人的年收入之和.

(2)已知甲、丙两人的年收入之积.

等比数列的判定

判定方法	详细描述
定义法	验证$\frac{a_{n+1}}{a_n}$是否为常数,应注意必须从 $n=1$ 起所有项都满足此等式
等比中项法	验证 $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$是否成立,应注意这里 $a_n\neq0$
通项公式法	验证 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$是否成立,应注意这里的 $a_1\neq0$ 且 $q\neq0$
前 n 项和法	$S_n=A-Aq^n$,其中 $A=\frac{a_1}{1-q}$,且 $q\neq0,q\neq1$.

【拓展】若$\{a_n\}$为等比数列,则$\{Ca_n\}$,$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$,$\{|a_n|\}$,$\{a_n^2\}$均为等比数列,公比分别为:$q$、$\frac{1}{q}$、$|q|$、$q^2$.(其中 C 为非零常数)

11 【模拟题】(条件充分性判断)a,b,c,d 为四个实数.则 $a+b,b+c,c+d$ 成等比数列.(　　)

(1)a,b,c,d 成等比数列.

(2)$a+b,b+c,c+d$ 均不为 0.

12 【2021.24】(条件充分性判断)已知数列$\{a_n\}$.则数列$\{a_n\}$为等比数列.(　　)

(1)$a_na_{n+1}>0$.

(2)$a_{n+1}^2-2a_n^2-a_na_{n+1}=0$.

等比数列的性质

性质	举例
单调性	$\begin{cases}a_1>0\\q>1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\0<q<1\end{cases}$$\Leftrightarrow$等比数列$\{a_n\}$为递增数列
	$\begin{cases}a_1>0\\0<q<1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\q>1\end{cases}$$\Leftrightarrow$等比数列$\{a_n\}$为递减数列
	$q=1\Leftrightarrow$等比数列$\{a_n\}$为常数列
	$q<0\Leftrightarrow$等比数列$\{a_n\}$为摆动数列

续表

性质	举例
等比数列下标和相等的两项乘积相等	如下标 $1+10=2+9=3+8=4+7=\cdots$，则有 $a_1a_{10}=a_2a_9=a_3a_8=a_4a_7=\cdots$ 注意等号左右下标和相等，项数也要相等
若 $\{a_n\}$ 为有穷等比数列，则与首末两项距离相等的两项之积都相等，且等于首末两项的积	$a_1\cdot a_n=a_2\cdot a_{n-1}=a_3\cdot a_{n-2}=a_4\cdot a_{n-3}=\cdots$
等比数列下标和相等的同数量项乘积相等	如下标 $3+5+7=2+4+9$，则有 $a_3a_5a_7=a_2a_4a_9$ 两组项下标和相等，项数相同，则这两组项乘积相等

破题标志词

等比数列某几项之积⇒下标和相等的同数量项乘积相等.

13 【2023.18】(条件充分性判断)已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比大于 1. 则 $\{a_n\}$ 单调递增.
(　　)

(1) a_1 是方程 $x^2-x-2=0$ 的根.

(2) a_1 是方程 $x^2+x-6=0$ 的根.

14 【2010.10.13】等比数列 $\{a_n\}$ 中，a_3，a_8 是方程 $3x^2+2x-18=0$ 的两个根，则 $a_4a_7=$(　　).

A. -9　　B. -8　　C. -6　　D. 6　　E. 8

等比数列求和

【等比数列求和公式】

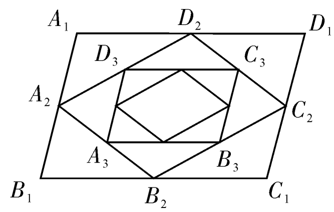
当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$（此时数列 $\{a_n\}$ 为常数列）

当 $n\to\infty$，且 $0<|q|<1$ 时，$S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}$

注意：等比数列求和时：若不能确定 q 的取值，应分 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况讨论.

15 【2018.07】如图，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形，A_2，B_2，C_2，D_2 分别是 $A_1B_1C_1D_1$ 四边的中点，A_3，B_3，C_3，D_3 分别是四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 四边的中点，依次下去，得到四边形序列 $A_nB_nC_nD_n$（$n=1,2,3,\cdots$），设 $A_nB_nC_nD_n$ 是面积为 S_n，且 $S_1=12$，则 $S_1+S_2+S_3+\cdots=$(　　).



A. 16　　　B. 20　　　C. 24　　　D. 28　　　E. 30

相关知识点补充：

破题标志词

任意四边形的中点四边形⇒面积为原四边形的$\frac{1}{2}$. 同型题目【2008. 01. 03】

16 【模拟题】30 年之后要筹措到 300 万元的养老金，假定平均的年回报率是 3%，每年以复利计息. 那么，现在必须投入的本金是多少万元？

6.4 等差数列与等比数列的相似特性

片段和定理

破题标志词

题目中出现形如S_3，S_6，S_9或S_5，S_{10}，S_{15}等落在等差数列等长度片段节点的一组前 n 项和具体值时，往往考虑使用片段和定理，即：

【等差数列片段和定理】　如果a_1，a_2，a_3，…，a_n为等差数列，那么这个数列连续的 n 项之和也是等差数列，即S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$……也是等差数列，并且这个新等差数列的公差为n^2d.（n 代表片段长度）

【举例】设$\{a_n\}$为等差数列，前 n 项和为S_n，则有：

$S_3=a_1+a_2+a_3$；

$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=(a_1+a_2+a_3)+3\cdot 3d=S_3+3\cdot 3d$；

$S_9-S_6=a_7+a_8+a_9=(a_4+a_5+a_6)+3\cdot 3d$.

……

它们为数列$\{a_n\}$等长度片段，片段长度为 3，组成了公差为$3^2d=9d$ 的新的等差数列.

类似地，S_4，S_8-S_4，和$S_{12}-S_8$……片段长度为4，组成了公差为$4^2d=16d$的新的等差数列.以此类推.

注：是S_n，$S_{2n}-S_n$和$S_{3n}-S_{2n}$成等差数列，而非S_n，S_{2n}，S_{3n}成等差数列.

当题目中出现【破题标志词】形如S_3，S_6，S_9或S_5，S_{10}，S_{15}等落在等比数列等长度片段节点的一组前n项和具体值时，往往考虑使用等比数列片段和定理.

等比数列片段和定理：如果a_1，a_2，a_3，…，a_n构成等比数列$\{a_n\}$，那么若这个数列连续的n项之和非零，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$……也是等比数列，并且公比为q^n(n代表片段长度).

注：是S_n，$S_{2n}-S_n$和$S_{3n}-S_{2n}$…成等比数列，而非S_n，S_{2n}，S_{3n}…成等比数列.

17 【模拟题】等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_3=3$，$S_6=24$，则此等差数列的公差d等于(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$　　E. $\frac{1}{3}$

18 【2024.25】(条件充分性判断)设a_n为等比数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和．则能确定a_n的公比.(　　)

(1)$S_3=2$.

(2)$S_9=26$.

等间距取出项

对于一个等差数列，等间隔取出的项仍构成等差数列.若取出的相邻两项下标差为n，则新公差为nd.

对于一个等比数列，等间隔取出的项仍构成等比数列.若取出的相邻两项下标差为n，则新公比为q^n.

19 【模拟题】$\{a_n\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，且$S_{100}=145$，则$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=$(　　).

A. 70　　B. 60　　C. 50　　D. 40　　E. 30