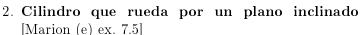
Mecánica Analítica Computacional

Fuerzas de ligadura | Multiplicadores de Lagrange

1. Péndulo rígido ideal

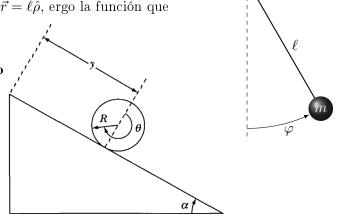
Calcule la tensión de la cuerda con el método de multiplicadores de Lagrange. La restricción es que la pesa se mantiene siempre en $\vec{r} = \ell \hat{\rho}$, ergo la función que

expresa esto es $f(\rho) = \rho - \ell = 0$.





- b) la aceleración angular,
- c) y la fuerzas de ligadura.



 ℓ_1

3. Doble máquina de Atwood [Marion (e) ej. 7.8 y 7-37]

Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento y las tensiones de las cuerdas.

a) Verifique que obtiene las mismas aceleraciones generalizadas que obtuvo sin usar multiplicadores de Lagrange. Resultado:

$$\ddot{y}_1 = \frac{2g\left(2m_1m_2 + 2m_1m_3 + m_1m_p - 8m_2m_3 - 3m_2m_p - 3m_3m_p - m_p^2\right)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

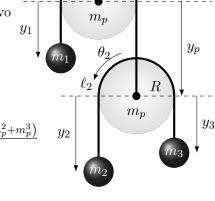
$$\ddot{y}_2 = \frac{2g(4m_1 + m_p)(m_2 - m_3)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

b) Obtenga las tensiones de ambas cuerdas. Resusltado:

$$Q_{1} = \frac{g\left(32m_{1}m_{2}m_{3}+12m_{1}m_{2}m_{p}+12m_{1}m_{3}m_{p}+4m_{1}m_{p}^{2}+8m_{2}m_{3}m_{p}+3m_{2}m_{p}^{2}+3m_{3}m_{p}^{2}+m_{p}^{3}\right)}{4m_{1}m_{2}+4m_{1}m_{3}+2m_{1}m_{p}+16m_{2}m_{3}+8m_{2}m_{p}+8m_{3}m_{p}+3m_{p}^{2}}$$

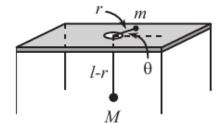
$$Q_{2} = \frac{gm_{3}\left(16m_{1}m_{2}+4m_{1}m_{p}+4m_{2}m_{p}+m_{p}^{2}\right)}{4m_{1}m_{2}+4m_{1}m_{3}+2m_{1}m_{p}+16m_{2}m_{3}+8m_{2}m_{p}+8m_{3}m_{p}+3m_{p}^{2}}$$

$$Q_2 = \frac{gm_3(16m_1m_2 + 4m_1m_p + 4m_2m_p + m_p^2)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$



4. Pesos enlazados por una cuerda [Taylor 7.50]

Una partícula de de masa m posada sobre una mesa horizontal está atada a otra de masa M con una cuerda de longitud l que atraviesa un hueco en una mesa que no ofrece fricción. La última pende vertical con una distancia a la mesa $y = \ell - \rho$ función de la distancia de la primera al hueco ρ .

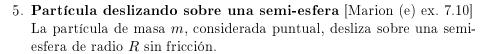


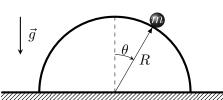
a) Asumiendo que θ no es necesariamente constante obtenga las ecuaciones de Lagrange para ρ e y. Resultado:

$$-Mg + M\ddot{y} + \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_1 - m\rho\dot{\theta}^2 + m\ddot{\rho} = 0$$

b) Resuélva el sistema para ρ, y y el multiplicador de Lagrange λ_1 encontrando las fuerzas de tensión sobre ambas masas. Resultado: $Q_{\rho}=\frac{Mm\left(g+\rho\dot{\theta}^2\right)}{M+m}$

Resultado:
$$Q_{\rho} = \frac{Mm(g+\rho\dot{\theta}^2)}{M+m}$$





- a) Encuentre la fuerza de la ligadura. Resultado: $F_{\rho}^{\text{ligadura}} = m \left(-R\dot{\theta}^2 + g\cos(\theta) \right)$
- b) Calcule el ángulo en que la partícula se despega de la semi-esfera. Resultado: $\approx 48.19^{\circ}$

Mecánica Analítica Computacional



Para llegar al ángulo de despegue debe resolver la ecuación diferencial a la que arribará tras resolver la problemática de las fuerzas de ligadura, que será $\ddot{\theta} = \frac{g \sin(\theta)}{R}$. Esta expresión es integrable para el recorrido que hace la partícula. Para facilitar esto se intercala por regla de la cadena derivaciones en función de θ en la definición de la aceleración.

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

Como la partícula parte de $\theta(t=0)=0$ con $\dot{\theta}(t=0)=0$.

$$\begin{split} \ddot{\theta} &= \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{R} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} d\dot{\theta} &= \frac{g}{R} \sin(\theta) d\theta \\ \int_{0}^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} \dot{\theta} d\dot{\theta} &= \frac{g}{R} \int_{0}^{\theta_{\text{despegue}}} \sin \theta d\theta \\ \frac{\dot{\theta}^{2}}{2} \Big|_{0}^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} &= \frac{g}{R} (-\cos \theta) \Big|_{0}^{\theta_{\text{despegue}}} \\ \frac{\dot{\theta}^{2}_{\text{despegue}}}{2} &= \frac{g}{R} (-\cos(\theta_{\text{despegue}}) + 1) \end{split}$$

Con esto hay que substituir $\dot{\theta}^2$ en una expresión de $F_{\rho}^{\mathrm{ligadura}}$, que debe ser nula en el momento de despegue.