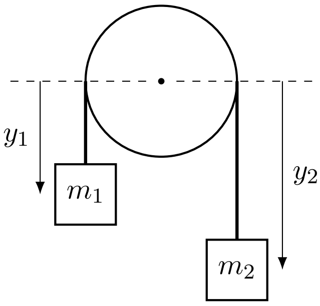
LIGADURAS

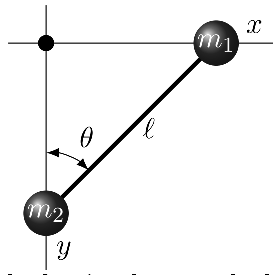
Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

1. **Máquina de Atwood simple**
   Obtenga a partir de la ecuación de Euler-Lagrange la aceleración que presentan las pesas de masas m_1 y m_2 que cuelgan de una cuerda de longitud ℓ que pasa por sobre una polea de radio R_p y masa m_p.



   a) Resuelva el caso en que se considera m_p irrelevante.

   b) Resuelva ahora considerando m_p, y que la polea presenta una sección cilíndrica. El momento de inercia de tal cilindro de masa m ante rotaciones en torno a su eje de simetría longitudinal es $(m/2)R^2$.



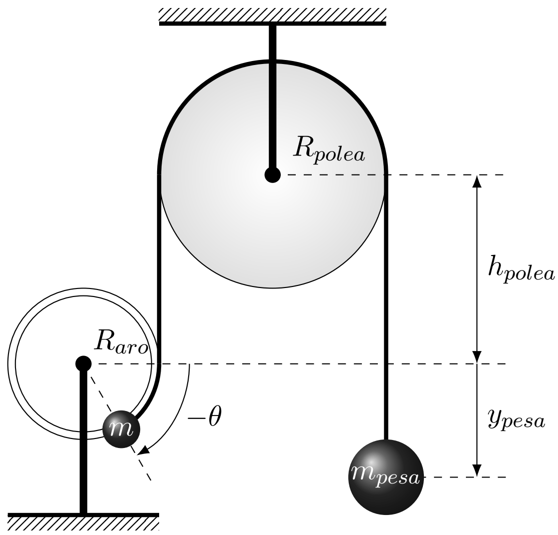
2. **Péndulo de pesas desilzantes y acopladas**
   Dos pesas de masa m_1 y m_2 están unidas por una barra rígida inextensible de longitud ℓ y masa despreciable frente a las anteriores. La de m_1 puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal y la de m_2 en uno vertical.

   a) Escriba las posiciones de ambas partículas en función de una única coordenada haciendo uso de la ligadura que impone la barra rígida. Hágalo para: 1) y, la coordenada para la pesa de m_2, 2) θ

   b) Obtenga las aceleraciones y responda: ¿con cuál coordenada generalizada las expresiones de energía fueron más "informativas"?
   Resultado: $\ddot{y} = \frac{-\ell^2 m_1 y \dot{y}^2 + g m_2 \left(\ell^2 - y^2\right)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 - 2\ell^2 m_2 y^2 - m_1 y^4 + m_2 y^4}$ $\qquad \ddot{\theta} = \frac{\left(\ell m_1 \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - \ell m_2 \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - g m_2\right)\sin(\theta)}{\ell\left(m_1 \cos^2(\theta) + m_2 \sin^2(\theta)\right)}$

   c) Realice las sustituciones que corresponden a una aproximación de pequeñas oscilaciones para el caso $m_1 = m_2 = m$. ¿La expresión de qué sistema obtiene?

3. **Aro y polea**
   Una pesa de masa m_{pesa} pende de sección de cuerda que sobresale a la derecha de una polea de radio R_{polea} y masa m_{polea}. Tal cuerda, que gira solidaria con la polea, tiene un longitud total ℓ y su masa es despreciable. Su otro extremo se ata con un nudo de masa m a un aro de masa m_{aro}, enrollándose parcialmente en torno a éste. El centro de la polea está a una altura h_{polea} por sobre el del aro de radio R_{aro} que como puede rotar libremente presenta un momento de inercia $m_{aro}R_{aro}^2$.
   El arco de cuerda enrollada en torno al aro mide un ángulo θ. Tenga en cuenta para escribir la función de ligadura que por el sentido de enrolamiento, al medirse desde la horizontal, tal ángulo presentará valores negativos.

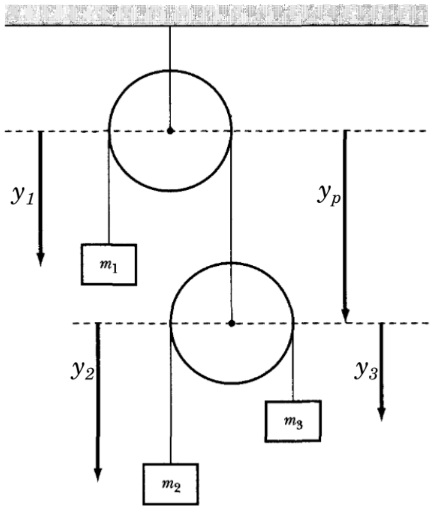


   a) Escriba la posición de las partículas con masa en función de y_{pesa}, ℓ y θ en un sistema de referncia con origen en el centro del aro.

   b) Describa la función de ligadura y utilícela para expresar las posiciones en función de θ. Verifique su solución revisando que una variación de θ "hacia su cero" implique que la pesa "baja".

   c) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica sin olvidar los momentos involucrados.
   Resultado: $R_{aro}^2 m\ddot{\theta} + R_{aro}^2 m_{aro}\ddot{\theta} + R_{aro} g m \cos(\theta) + R_{polea}^2 m_{pesa}\ddot{\theta} + \frac{R_{polea}^2 m_{polea}\ddot{\theta}}{2} - R_{polea} g m_{pesa} = 0$

4. **Maquina de Atwood compuesta** [Marion (english) ex. 7.8]



a) Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura: y_i con $i = 1, 2, 3, p$.

b) Modele las ligaduras que proveen las cuerdas en dos funciones.

c) Haciendo uso de estas últimas reemplace en las posiciones para expresarles en función de solo dos y_i.

d) Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del $\dot{y}_i$ correspondiente.

e) Obtenga las dos ecuaciones de Euler-Lagrange.
Resultados:
$$-gm_1 + gm_2 + gm_3 + gm_p + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{3m_p\ddot{y}_1}{2} = 0$$
$$-gm_2 + gm_3 - m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{m_p\ddot{y}_2}{2} = 0$$

f) Resuelva este sistema de ecuaciones para obtener las dos correspondientes aceleraciones generalizadas y con estas escribir las aceleraciones de los cuatro cuerpos en cuestión.
Resultados:
$$\ddot{y}_1 = \frac{4gm_1m_2+4gm_1m_3+2gm_1m_p-16gm_2m_3-6gm_2m_p-6gm_3m_p-2gm_p^2}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$$
$$\ddot{y}_2 = \frac{8gm_1m_2-8gm_1m_3+2gm_2m_p-2gm_3m_p}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$$