#### Mecánica Analítica Computacional

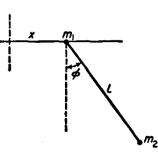


## Coordenadas generalizadas | Ligaduras | Energías cinética y potencial

Los problemas marcados con (\*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

## 1. **Péndulo con punto de suspensión libre** [Landau §5 ej. 2]

La partícula de masa  $m_2$  pende de una barra rígida de longitud  $\ell$  de masa despreciable. En su otro extremo hay un dispositivo de masa  $m_1$  enhebrado en una barra rígida horizontal y que se mueve libremente a lo largo de su eje  $\hat{x}$ . El dispositivo permite que la barra que pende de él forme con la vertical cualquier ángulo  $\varphi$ .

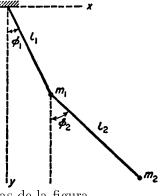


- a) Tras determinar las coordenadas generalizadas, escriba la posición de las partículas en función de ellas.
- b) Calcule las velocidades de las partículas.
- c) Con estas velocidades, calcule la energía cinética, T, y potencial gravitatoria, V, de cada partícula.
- d) Calcule ahora T y V usando las funciones que toman por parámetros las masas y posiciones de las partículas. Verifique que obtiene el mismo resultado en menos pasos.
- e) Realice substituciones en las expresiones de T y V del punto anterior para inmovilizar la partícula de masa  $m_1$ . Verifique que recupera las expresiones que corresponden a las de un péndulo rígido ideal.

# 2. **Péndulo doble** [Landau §5 ej. 1]

Una barra rígida de longitud  $\ell_1$  tiene una masa despreciable respecto a la de la partícula de masa  $m_1$  fija a su extremo. A su vez de esta última pende otra barra rígida, de longitud  $\ell_2$  que en su extremo tiene otra partícula de masa  $m_2$ , también mucho mayor que aquella de la barra.

Para cada uno de los siguientes puntos escriba en un cuaderno Jupyter titulado con su apellido una o varias celdas de código separadas entre sí por otras conteniendo un texto indicando de qué punto se trata.



a) Obtenga la energía cinética, T, y potencial, V, en función de las coordenadas de la figura.

$$T_{traslación} = \frac{\ell_1^2 m_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2 \left(\ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2\right)}{2}$$

$$V_{gravitatoria} = -g \left(\ell_1 m_1 \cos\left(\varphi_1\right) + \ell_1 m_2 \cos\left(\varphi_1\right) + \ell_2 m_2 \cos\left(\varphi_2\right)\right)$$

b) Establezca  $m_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$  y  $\ell_1 = \ell_2 = \frac{\ell}{2}$  a través de la función de substitución de SymPy. Verifique que se obtiene el T y V de un único péndulo rígido ideal.

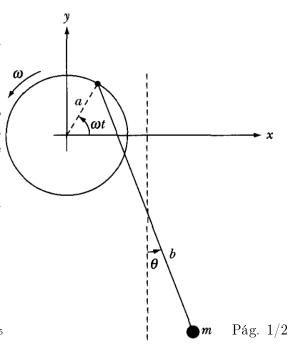
# 3. (\*) Péndulo con punto de suspensión en rotación [Marion (e) ex. 7.5] [Landau §5 ej. 3]

Una partícula de masa m pende de una barra rígida de longitud b. El punto de suspensión engarzado en un aro de radio a dispuesto verticalmente rota respecta a su centro con una frecuencia  $\omega$  constante. Se asume que todas las posiciones se encuentran en un único plano bidimensional y que la masa de la barra rígida tiene masa despreciable frente a m.

Calcule la energía cinética, T y potencial, V de la partícula con masa m.



Resultado: 
$$T_{traslación} = \frac{m\left(a^2\omega^2 - 2ab\omega\sin(\omega t - \theta)\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2\right)}{2}$$
$$V_{gravitatoria} = gm\left(a\sin(\omega t) - b\cos(\theta)\right)$$



#### Mecánica Analítica Computacional



## 4. (\*) Pesas acopladas rotando en torno a eje [Landau §5 ej. 4]

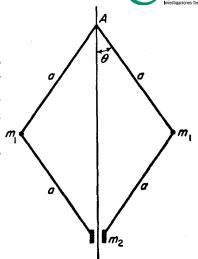
La pieza con  $m_2$  se desplaza sobre un eje vertical, y todo el sistema gira con una velocidad angular  $\Omega$  constante en torno a ese eje. Está unida por barras de longitud a y masa despreciable a otras pesas de masa  $m_1$ . A su vez estas penden de sendas barras idénticas del punto fijo, A, que describen un ángulo variable de apertura respecto al eje  $\theta$ .

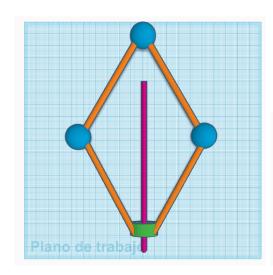
Calcule la energía cinética para cada una de las tres masas y exprese en la forma más compacta posible la del sistema en su conjunto. Haga lo propio con la energía potencial.

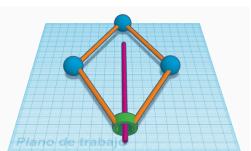


Resultado:  

$$T_{traslación} = a^2 \left( m_1 \left( \Omega^2 \sin^2 (\theta) + \dot{\theta}^2 \right) + 2m_2 \sin^2 (\theta) \dot{\theta}^2 \right)$$
  
 $V_{gravitatoria} = -2ag \left( m_1 + m_2 \right) \cos (\theta)$ 







En estas ilustraciones indicamos el punto A, de donde tenemos agarrado al sistema, con la pelota de arriba. Todo gira en torno al eje rosa con velocidad angular  $\Omega$  constante. Por lo tanto, las dos partículas de los laterales, las de masa  $m_1$ , rotan entrando y saliendo del plano de la pantalla (imagen de abajo). Esto es equivalente a pensar que el plano celeste de la imagen rota completo sobre el eje rosa.

La pieza de masa  $m_2$  es un dispositivo pasante (un buje) que puede ir para arriba y abajo sin rozamiento sobre el eje vertical (rosa). Si la pieza de abajo sube, todos los ángulos cambian lo mismo, porque las longitudes de las barras naranjas son todas iguales.

