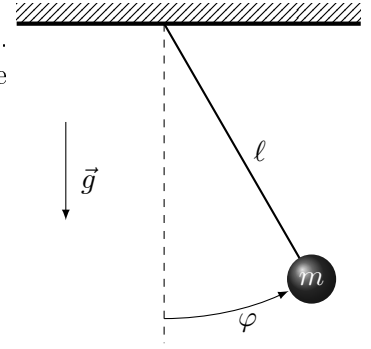


1. **Péndulo rígido ideal**

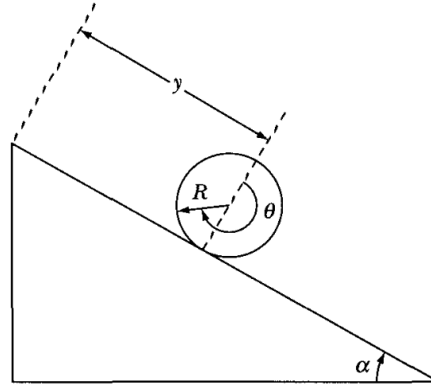
Calcule la tensión de la cuerda con el método de multiplicadores de Lagrange. La restricción es que la pesa se mantiene siempre en  $\vec{r} = \ell \hat{\rho}$ , ergo la función que expresa esto es  $f(\rho) = \rho - \ell = 0$ .



2. **Cilindro que rueda por un plano inclinado**

[Marion (e) ex. 7.5]

- Encuentre las ecuaciones de movimiento,
- la aceleración angular,
- y la fuerzas de ligadura.



3. **Doble máquina de Atwood** [Marion (e) ej. 7.8 y 7-37]

Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento y las tensiones de las cuerdas.

- Verifique que obtiene las mismas aceleraciones generalizadas que se habían obtenido sin usar multiplicadores de Lagrange. Resultado:

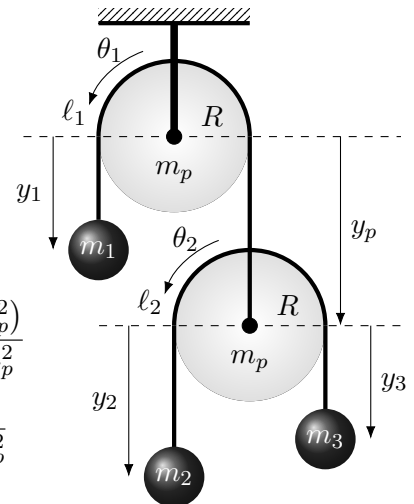
$$\ddot{y}_1 = \frac{2g(2m_1m_2 + 2m_1m_3 + m_1m_p - 8m_2m_3 - 3m_2m_p - 3m_3m_p - m_p^2)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{2g(4m_1 + m_p)(m_2 - m_3)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

- Obtenga las tensiones de ambas cuerdas. Resultado:

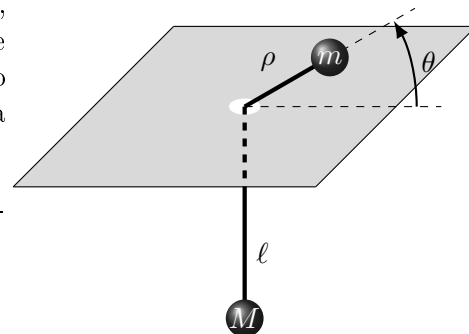
$$Q_1 = \frac{g(32m_1m_2m_3 + 12m_1m_2m_p + 12m_1m_3m_p + 4m_1m_p^2 + 8m_2m_3m_p + 3m_2m_p^2 + 3m_3m_p^2 + m_p^3)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

$$Q_2 = \frac{gm_3(16m_1m_2 + 4m_1m_p + 4m_2m_p + m_p^2)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$



#### 4. Pesos enlazados por una cuerda [Taylor 7.50]

Una partícula de masa  $m$ , situada sobre una mesa horizontal sin fricción, está unida mediante una cuerda ideal de longitud  $\ell$  a otra partícula de masa  $M$ . La cuerda pasa por un orificio practicado en la mesa, el cual no presenta rozamiento. La segunda pesa pende vertical con una distancia a la mesa  $y = \ell - \rho$ , función de la distancia de la primera al hueco,  $\rho$ .



- a) Asumiendo que  $\theta$  no es necesariamente constante obtenga las ecuaciones de Lagrange para  $\rho$  e  $y$ . Resultado:

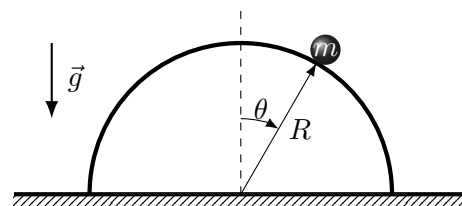
$$M(-g + \ddot{y}) = \lambda_1 \quad m(-\rho\dot{\theta}^2 + \ddot{\rho}) = \lambda_1$$

- b) Resuelva el sistema para  $\rho, y$  y el multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$  encontrando las fuerzas de tensión sobre ambas masas.

$$\text{Resultado: } Q_\rho = \frac{Mm(g + \rho\dot{\theta}^2)}{M + m}$$

#### 5. Partícula deslizando sobre una semiesfera [Marion (e) ex. 7.10]

La partícula de masa  $m$ , considerada puntual, desliza sobre una semiesfera de radio  $R$  sin fricción.



- a) Encuentre la fuerza de la ligadura.

$$\text{Resultado: } F_\rho^{\text{ligadura}} = m(-R\dot{\theta}^2 + g \cos(\theta))$$

- b) Calcule el ángulo en que la partícula se despegue de la semiesfera.

$$\text{Resultado: } \theta_{\text{despegue}} \approx 48,19^\circ$$

Para llegar al ángulo de despegue debe resolver la ecuación diferencial a la que arribará tras resolver la problemática de las fuerzas de ligadura, que será  $\ddot{\theta} = \frac{g \sin(\theta)}{R}$ . Esta expresión es integrable para el recorrido que hace la partícula. Para facilitar esto se intercala por regla de la cadena derivaciones en función de  $\theta$  en la definición de la aceleración.

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

Como la partícula parte de  $\theta(t=0) = 0$  con  $\dot{\theta}(t=0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{R} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} d\dot{\theta} &= \frac{g}{R} \sin(\theta) d\theta \\ \int_0^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} \dot{\theta} d\dot{\theta} &= \frac{g}{R} \int_0^{\theta_{\text{despegue}}} \sin \theta d\theta \\ \frac{\dot{\theta}^2}{2} \Big|_0^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} &= \frac{g}{R} (-\cos \theta) \Big|_0^{\theta_{\text{despegue}}} \\ \frac{\dot{\theta}_{\text{despegue}}^2}{2} &= \frac{g}{R} (-\cos(\theta_{\text{despegue}}) + 1) \end{aligned}$$

Con esto hay que substituir  $\dot{\theta}^2$  en una expresión de  $F_\rho^{\text{ligadura}}$ , que debe ser nula en el momento de despegue.