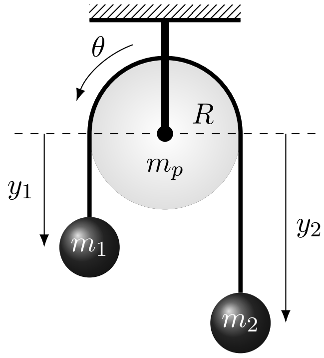
Ligaduras

Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.



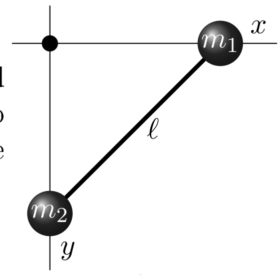
1. **Máquina de Atwood simple**
   Una cuerda de longitud ℓ pasa sobre una polea de radio R_p y masa m_p. Calcule la aceleración de las pesas que cuelgan de sus extremos.

   a) La cuerda es inextensible, por lo que establece una relación entre y_1 e y_2. Escriba esta función de vínculo.

   b) Si la cuerda desliza sin rozamiento sobre la polea, esta última no se mueve. Calcule la ecuación de Euler-Lagrange para y_1 usando el vínculo del punto anterior y escriba la aceleración de las pesas.

   c) Lo usual es que la cuerda no deslice y gire solidaria a la polea. Esto vincula θ al desplazamiento de la cuerda. Con tal vínculo exprese en función de $\dot{y}_1$ la energía cinética de rotación de la polea, que modelada como un cilindro homogéneo que en torno a su eje presenta un momento de inercia $(m/2)R^2$.

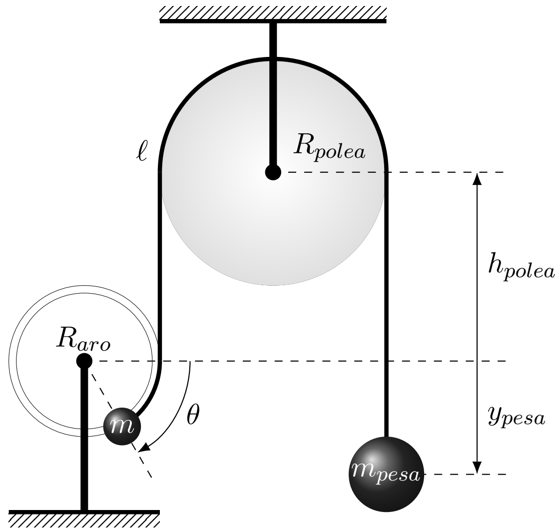
   d) Use la ecuación de Euler-Lagrange para y_1 para escribir la aceleración de las pesas en este caso.



2. **Péndulo de pesas deslizantes y acopladas**
   Dos pesas de masa m_1 y m_2 están unidas por una barra rígida inextensible de longitud ℓ y masa despreciable frente a las anteriores. La de m_1 puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal y la de m_2 en uno vertical. La barra establece un vínculo entre las respectivas coordenadas que definen sus posiciones, x e y.

   a) Use la función de vínculo para expresar las posiciones solo en función de y.

   b) Calcule la aceleración de la pesa de m_2. Resultado: $\ddot{y} = \dfrac{-\ell^2 m_1 y \dot{y}^2 + g m_2 \left(\ell^2 - y^2\right)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 - 2\ell^2 m_2 y^2 - m_1 y^4 + m_2 y^4}$



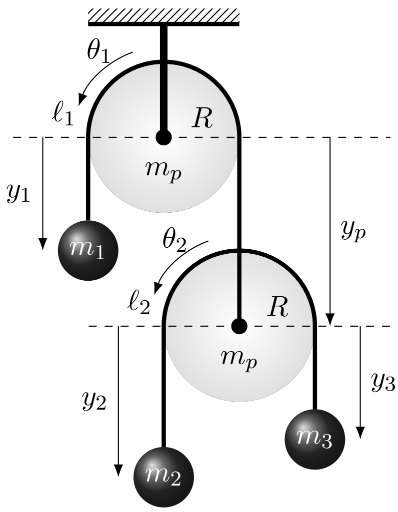
3. **Aro y polea**
   Una pesa de masa m_{pesa} pende de sección de cuerda que sobresale a la derecha de una polea de radio R_{polea} y masa m_{polea}. Tal cuerda, que gira solidaria con la polea, tiene una longitud total ℓ y su masa es despreciable. Su otro extremo se ata con un nudo de masa m a un aro de masa m_{aro}, enrollándose en un arco θ en torno a este. El centro de la polea está a una altura h_{polea} por sobre el del aro de radio R_{aro} que como puede rotar libremente presenta un momento de inercia $m_{aro}R^2_{aro}$.
   Quedan el apartamiento con la horizontal de la pesa, y_{pesa}, y la extensión del arco enrollado, θ, como las coordenadas generalizadas que estarán ligadas por la cuerda de longitud ℓ.

   a) Escriba la posición de las partículas con masa en función de las coordenadas generalizas variables que un sistema de referencia con origen en el centro del aro.

   b) Describa la función de ligadura y utilícela para expresar las posiciones en función de θ. Verifique su solución revisando que una variación de θ "hacia su cero" implique que la pesa "baja".

   c) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica sin olvidar los momentos involucrados.
   Resultado: $R^2_{aro} m\ddot{\theta} + R^2_{aro} m_{aro}\ddot{\theta} + \dfrac{R^2_{aro} m_{polea}\ddot{\theta}}{2} - R_{aro} g m \cos(\theta) + R^2_{polea} m_{pesa}\ddot{\theta} + R_{polea} g m_{pesa} = 0$

4. **Máquina de Atwood compuesta** [Marion (english) ex. 7.8]



a) Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura: y_i con $i = 1, 2, 3, p$.

b) Modele las ligaduras que proveen las dos cuerdas en sendas funciones.

c) Use las funciones de ligadura para expresar todas las posiciones en función de y_1 e y_2.

d) Las cuerdas no deslizan sobre las poleas, por lo que la longitud de cuerda que se desplaza en una polea es igual a la que se desplaza en la otra. Este es otro vínculo que debe modelar la relación entre las y_i y las θ_i.

e) Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del $\dot{y}_i$ correspondiente.

f) Obtenga las dos ecuaciones de Euler-Lagrange. Resultados:

$$-gm_1 + gm_2 + gm_3 + gm_p + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{3m_p\ddot{y}_1}{2} = 0$$

$$-gm_2 + gm_3 - m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{m_p\ddot{y}_2}{2} = 0$$

g) De este sistema de ecuaciones, despeje las aceleraciones generalizadas. Resultados:

$$\ddot{y}_1 = \frac{2g\left(2m_1m_2 + 2m_1m_3 + m_1m_p - 8m_2m_3 - 3m_2m_p - 3m_3m_p - m_p^2\right)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{2g\left(4m_1 + m_p\right)\left(m_2 - m_3\right)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

h) Exprese las aceleraciones de las tres pesas. Resultados:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{y}_1(-\hat{e}_y)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{2g\left(2m_1m_2 - 6m_1m_3 - m_1m_p + 8m_2m_3 + 4m_2m_p + 2m_3m_p + m_p^2\right)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}\hat{e}_y$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -\frac{2g\left(-6m_1m_2 + 2m_1m_3 - m_1m_p + 8m_2m_3 + 2m_2m_p + 4m_3m_p + m_p^2\right)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}\hat{e}_y$$

