

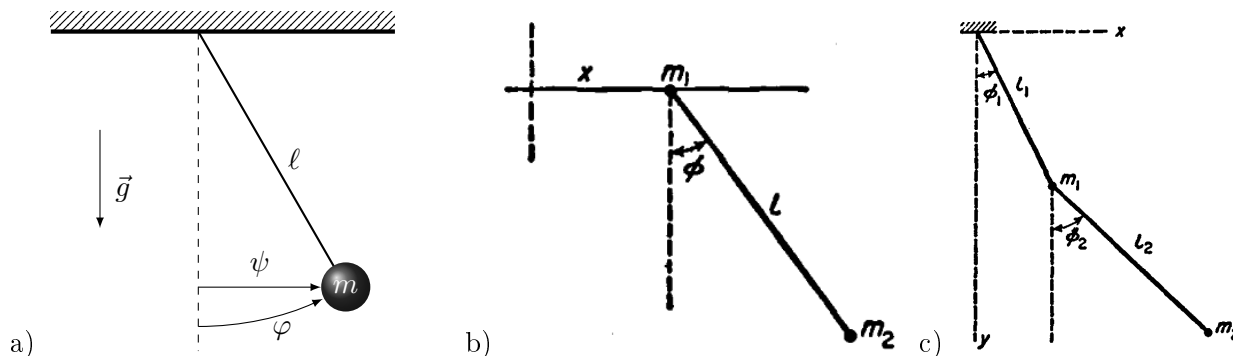
ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

1. Péndulo rígido ideal [Marion (english) ex. 7.2]

Péndulo de punto de suspensión libre y péndulo doble [Landau §5 ej. 1 y 2]

Aplique la ecuación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de la dinámica de los sistemas:

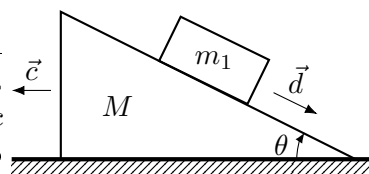


Resultado 1c:

$$\begin{aligned} \ell_1 (\ell_1 m_1 \ddot{\phi}_1 + \ell_1 m_2 \ddot{\phi}_2 + \ell_2 m_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_2^2 + \ell_2 m_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \ddot{\phi}_2 + g m_1 \sin(\phi_1) + g m_2 \sin(\phi_1)) &= 0 \\ \ell_2 m_2 (\ell_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1^2 - \ell_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) \ddot{\phi}_1 - \ell_2 \ddot{\phi}_2 - g \sin(\phi_2)) &= 0 \end{aligned}$$

2. Plano inclinado móvil

Un bloque de masa m_1 está originalmente inmovil sobre un plano de inclinación θ que no le presenta fricción y de masa M . Este último puede deslizarse sobre la superficie horizontal que tampoco le presenta fricción alguna. Denomine con c la coordenada para la posición de este último, en la dirección y sentido indicado por la flecha; y con d la del bloque superior en el sentido descendente.



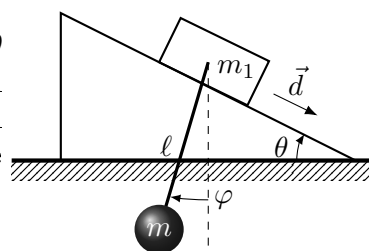
a) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para c y aquella para d .

$$\text{Resultado: } M\ddot{c} - m \cos(\theta)\ddot{d} + m_1\ddot{c} = 0 \quad m_1 (g \sin(\theta) + \cos(\theta)\ddot{c} - \ddot{d}) = 0$$

Habría notado que no podría responder a una pregunta como “De soltar el bloque más pequeño, ¿que aceleración tiene el plano?” pues obtuvo un sistema de dos ecuaciones diferenciales ligadas. En la clase siguiente aprenderá a resolver el sistema usando SymPy.

3. Soporte de péndulo sobre un plano inclinado

Un soporte de masa m_1 desliza por un plano inclinado inmóvil con un ángulo θ sin que éste le presente fricción. Un péndulo de longitud ℓ y masa m cuelga del soporte describiendo un ángulo φ con la vertical. El soporte se extiende a un costado del plano permitiendo al péndulo colgar libremente sin interferencia de éste último.



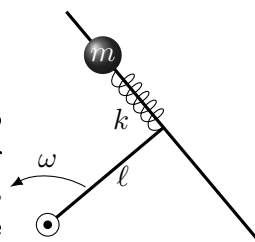
a) Encuentre las ecuaciones para la dinámica.

$$\text{Resultado: } \ell m (\ell \ddot{\varphi} + g \sin(\varphi) + \cos(\theta + \varphi) \ddot{d}) = 0$$

$$\ell m \sin(\theta + \varphi) \dot{\varphi}^2 - \ell m \cos(\theta + \varphi) \ddot{\varphi} + g m \sin(\theta) + g m_1 \sin(\theta) - m \ddot{d} - m_1 \ddot{d} = 0$$

4. Resorte enrollado en un brazo de una “T”

Una pieza rígida en forma de T consiste en una larga varilla soldada perpendicularmente a otra de longitud ℓ que pivotea en torno a un origen. La T gira sobre un plano horizontal con velocidad angular constante ω . Una partícula de masa m muy superior a la de la T, por la que esta última es despreciable, puede desplazarse libremente en la primera varilla y está conectada a la intersección de ambas por un resorte de constante elástica k y longitud natural nula.



- a) Encuentre una ecuación para la dinámica en función de d , la distancia de la partícula a la intersección.
Resultado: $-\omega^2 md + kd + m\ddot{d} = 0$
- b) (*) Existe un “valor especial” para ω . ¿Cuál sería y que implicaría para $d(t)$?