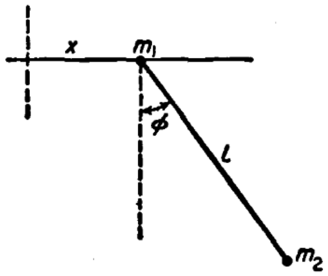
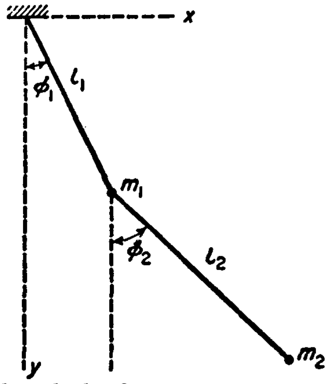
Coordenadas generalizadas | Ligaduras | Energías cinética y potencial

Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.



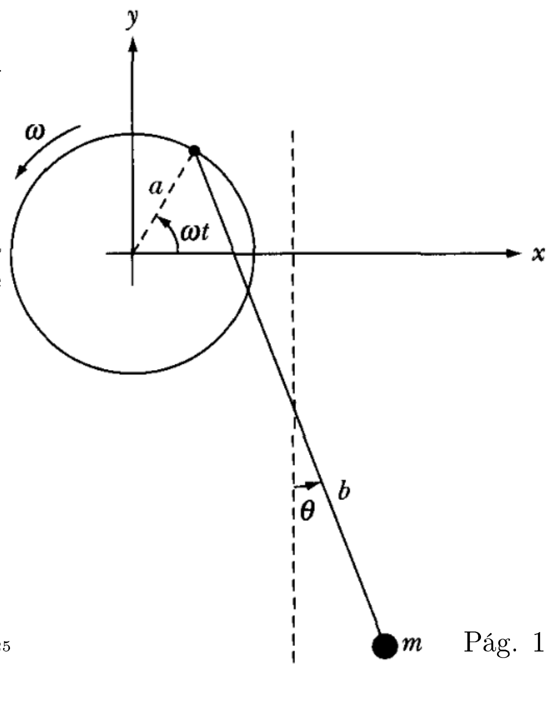
1. **Péndulo con punto de suspensión libre** [Landau §5 ej. 2]
   La partícula de masa m_2 pende de una barra rígida de longitud ℓ de masa despreciable. En su otro extremo hay un dispositivo de masa m_1 enhebrado en una barra rígida horizontal y que se mueve libremente a lo largo de su eje $\hat{x}$. El dispositivo permite que la barra que pende de él forme con la vertical cualquier ángulo φ.
   a) Tras determinar las coordenadas generalizadas, escriba la posición de las partículas en función de ellas.
   b) Calcule las velocidades de las partículas.
   c) Con estas velocidades, calcule la energía cinética, T, y potencial gravitatoria, V, de cada partícula.
   d) Calcule ahora T y V usando las funciones que toman por parámetros las masas y posiciones de las partículas. Verifique que obtiene el mismo resultado en menos pasos.
   e) Realice substituciones en las expresiones de T y V del punto anterior para inmovilizar la partícula de masa m_1. Verifique que recupera las expresiones que corresponden a las de un péndulo rígido ideal.



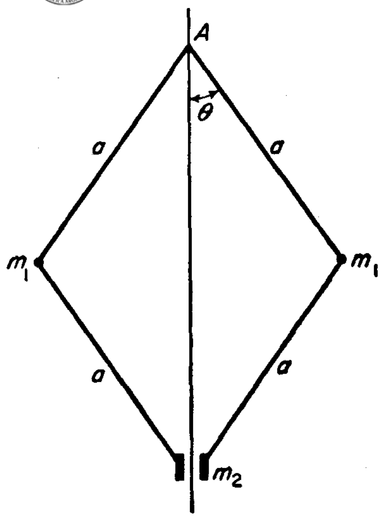
2. **Péndulo doble** [Landau §5 ej. 1]
   Una barra rígida de longitud ℓ_1 tiene una masa despreciable respecto a la de la partícula de masa m_1 fija a su extremo. A su vez de esta última pende otra barra rígida, de longitud ℓ_2 que en su extremo tiene otra partícula de masa m_2, también mucho mayor que aquella de la barra.
   Para cada uno de los siguientes puntos escriba en un cuaderno Jupyter titulado con su apellido una o varias celdas de código separadas entre sí por otras conteniendo un texto indicando de qué punto se trata.
   a) Obtenga la energía cinética, T, y potencial, V, en función de las coordenadas de la figura.
   Resultado:
   $$T_{traslación} = \frac{\ell_1^2 m_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2\left(\ell_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2\ell_1\ell_2\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \ell_2^2\dot{\varphi}_2^2\right)}{2}$$
   $$V_{gravitatoria} = -g\left(\ell_1 m_1\cos\left(\varphi_1\right) + \ell_1 m_2\cos\left(\varphi_1\right) + \ell_2 m_2\cos\left(\varphi_2\right)\right)$$
   b) Establezca $m_1 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ y $\ell_1 = \ell_2 = \frac{\ell}{2}$ a través de la función de substitución de SymPy. Verifique que se obtiene el T y V de un único péndulo rígido ideal.

3. (*) **Péndulo con punto de suspensión en rotación** [Marion (e) ex. 7.5] [Landau §5 ej. 3]

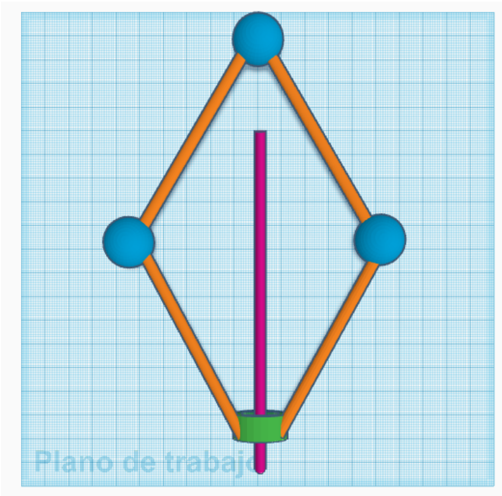
   Una partícula de masa m pende de una barra rígida de longitud b. El punto de suspensión engarzado en un aro de radio a dispuesto verticalmente rota respecta a su centro con una frecuencia ω *constante*. Se asume que todas las posiciones se encuentran en un único plano bidimensional y que la masa de la barra rígida tiene masa despreciable frente a m.
   Calcule la energía cinética, T y potencial, V de la partícula con masa m.
   Resultado:
   $$T_{traslación} = \frac{m\left(a^2\omega^2 - 2ab\omega\sin\left(\omega t-\theta\right)\dot{\theta} + b^2\dot{\theta}^2\right)}{2}$$
   $$V_{gravitatoria} = gm\left(a\sin\left(\omega t\right) - b\cos\left(\theta\right)\right)$$

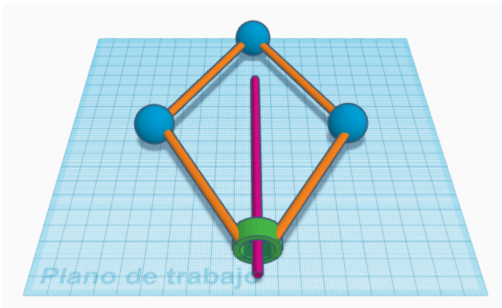


4. (*) **Pesas acopladas rotando en torno a eje** [Landau §5 ej. 4]



La pieza con m_2 se desplaza sobre un eje vertical, y todo el sistema gira con una velocidad angular Ω *constante* en torno a ese eje. Está unida por barras de longitud a y masa despreciable a otras pesas de masa m_1. A su vez estas penden de sendas barras idénticas del punto fijo, A, que describen un ángulo variable de apertura respecto al eje θ.
Calcule la energía cinética para cada una de las tres masas y exprese en la forma más compacta posible la del sistema en su conjunto. Haga lo propio con la energía potencial.
Resultado:
$T_{traslación} = a^2\left(m_1\left(\Omega^2\sin^2(\theta)+\dot{\theta}^2\right)+2m_2\sin^2(\theta)\dot{\theta}^2\right)$
$V_{gravitatoria} = -2ag\,(m_1+m_2)\cos(\theta)$





En estas ilustraciones indicamos el punto A, de donde tenemos *agarrado* al sistema, con la *pelota de arriba*. Todo gira en torno al eje rosa con velocidad angular Ω *constante*. Por lo tanto, las dos partículas de los laterales, las de masa m_1, rotan entrando y saliendo del plano de la pantalla (imagen de abajo). Esto es equivalente a pensar que el plano celeste de la imagen rota completo sobre el eje rosa.

La pieza de masa m_2 es un dispositivo pasante (un buje) que puede ir para arriba y abajo sin rozamiento sobre el eje vertical (rosa). Si la pieza de abajo sube, todos los ángulos cambian lo mismo, porque las longitudes de las barras naranjas son todas iguales.