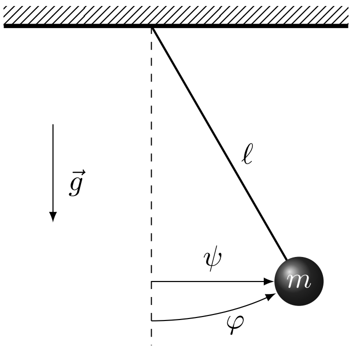
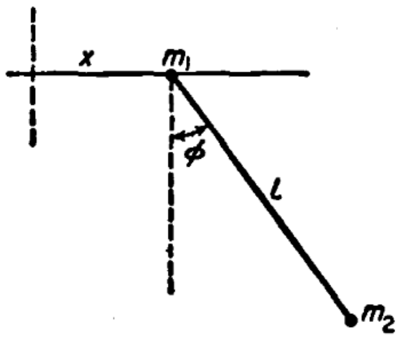
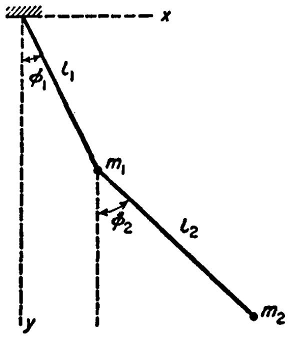
Ecuación de Euler-Lagrange

Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

1. **Péndulo rígido ideal** [Marion (english) ex. 7.2]
Péndulo de punto de suspensión libre y péndulo doble [Landau §5 ejs. 1 y 2]
Aplique la ecuación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de la dinámica de los sistemas:

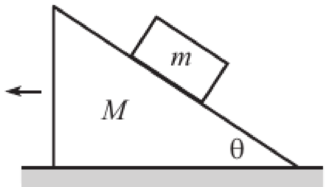
a) 

b) 

c) 

Resultado 1c:
$\ell_1\left(\ell_1 m_1\ddot{\varphi}_1+\ell_1 m_2\ddot{\varphi}_1+\ell_2 m_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2+\ell_2 m_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_2+g m_1\sin(\varphi_1)+g m_2\sin(\varphi_1)\right)=0$
$\ell_2 m_2\left(\ell_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1^2-\ell_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_1-\ell_2\ddot{\varphi}_2-g\sin(\varphi_2)\right)=0$

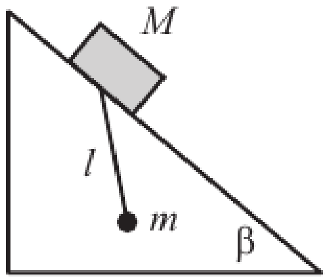
2. **Plano inclinado móvil**
Un bloque de masa m está originalmente inmovil sobre un plano de inclinación θ que no le presenta fricción y de masa M. Este último puede deslizar sobre la superficie horizontal que tampoco le presenta fricción alguna. Denomine con c la coordenada para la posición de este último, en la dirección y sentido indicado por la flecha; y con d la del bloque superior en el sentido descendente.



   a) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para c y aquella para d.
   Resultado: $M\ddot{c}-m\cos(\theta)\ddot{d}+m\ddot{c}=0 \qquad m\left(g\sin(\theta)+\cos(\theta)\ddot{c}-\ddot{d}\right)=0$

Habrá notado que no podría responder a una pregunta como “De soltar el bloque más pequeño, ¿que aceleración tiene el plano?” pues obtuvo un sistema de dos ecuaciones diferenciales ligadas. En la clase siguiente aprenderá a resolver el sistema usando SymPy.

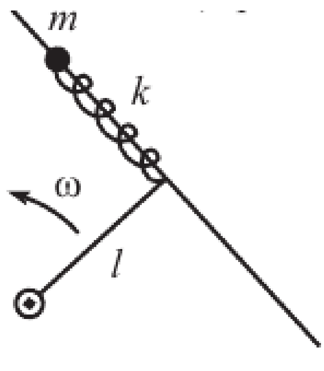
3. **Soporte de péndulo sobre un plano inclinado**
Un soporte de masa M desliza por un plano inclinado en un ángulo β sin que este le presente fricción. Un péndulo de longitud ℓ y masa m cuelga del soporte describiendo un ángulo φ con la vertical. Es soporte se extiende a un costado del plano permitiendo al péndulo colgar libremente sin interferencia de este último.



   a) Encuentre las ecuaciones para la dinámica.

Resultado:
$\ell m\left(g\sin(\varphi)+\ell\ddot{\varphi}+\cos(\beta+\varphi)\ddot{x}\right)=0$
$Mg\sin(\beta)-M\ddot{x}+gm\sin(\beta)+\ell m\sin(\beta+\varphi)\dot{\varphi}^2-\ell m\cos(\beta+\varphi)\ddot{\varphi}-m\ddot{x}=0$

4. **Resorte enrollado en un brazo de una “T”**
Una pieza rígida en forma de T consiste en una larga varilla soldada perpendicularmente a otra de longitud ℓ que pivotea en torno a un origen. La T gira sobre un plano horizontal con velocidad angular constante ω. Una partícula de masa m muy superior a la de la T, por la que esta última es despreciable, puede desplazarse libremente en la primer varilla y está conectada a la intersección de ambas por un resorte de constante elástica k y longitud natural nula.



a) Encuentre una ecuación para la dinámica en función de d, la distancia de la partícula a la intersección. Resultado: $-\omega^2 md + kd + m\ddot{d} = 0$

b) (*) Obtenga $d(t)$ asumiendo las condición iniciales que desee. Esto implica resolver la ecuación diferencial de segundo orden que obtuvo en el punto anterior. Esta debe resultarle familiar pues no es otra que la solución para un péndulo ideal, la de un oscilador armónico simple.

c) (*) Existe un "valor especial" para ω. ¿Cuál sería y que implica para $d(t)$? Note que puede responder esto sin haber resuelto el punto anterior.