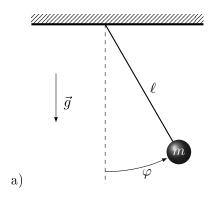
Ecuación de Euler-Lagrange

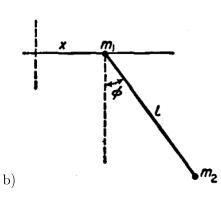
Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

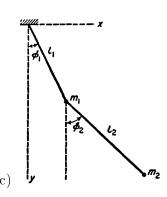
1. **Péndulo rígido ideal** [Marion (english) ex. 7.2]

Péndulo de punto de suspensión libre y péndulo doble [Landau §5 ejs. 1 y 2]

Aplique la ecuación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de la dinámica de los sistemas:







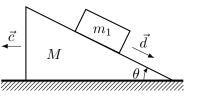
Resultado 1c:

$$\ell_1 \left(\ell_1 m_1 \ddot{\varphi}_1 + \ell_1 m_2 \ddot{\varphi}_1 + \ell_2 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + \ell_2 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + g m_1 \sin(\varphi_1) + g m_2 \sin(\varphi_1) \right) = 0$$

$$\ell_2 m_2 \left(\ell_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 - \ell_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - \ell_2 \ddot{\varphi}_2 - g \sin(\varphi_2) \right) = 0$$

2. Plano inclinado móvil

Un bloque de masa m_1 está originalmente inmovil sobre un plano de inclinación heta que no le presenta fricción y de masa M. Este último puede deslizar sobre la $ec{\mathcal{L}}$ superficie horizontal que tampoco le presenta fricción alguna. Denomine con cla coordenada para la posición de este último, en la dirección y sentido indicado por la flecha; y con d la del bloque superior en el sentido descendente.

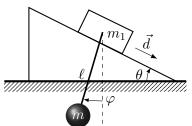


a) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para
$$c$$
 y aquella para d .
Resultado: $M\ddot{c} - m\cos(\theta)\ddot{d} + m_1\ddot{c} = 0$ $m_1\left(g\sin(\theta) + \cos(\theta)\ddot{c} - \ddot{d}\right) = 0$

Habrá notado que no podría responder a una pregunta como "De soltar el bloque más pequeño, ¿que aceleración tiene el plano?" pues obtuvo un sistema de dos ecuaciones diferenciales ligadas. En la clase siguiente aprenderá a resolver el sistema usando SymPy.

3. Soporte de péndulo sobre un plano inclinado

Un soporte de masa m_1 desliza por un plano inclinado inmóvil con un ángulo θ sin que éste le presente fricción. Un péndulo de longitud ℓ y masa m cuelga del soporte describiendo un ángulo φ con la vertical. Es soporte se extiende a un costado del plano permitiendo al péndulo colgar libremente sin interferencia de éste último.



a) Encuentre las ecuaciones para la dinámica.

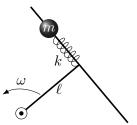
Resultado:
$$\ell m \left(\ell \ddot{\varphi} + g \sin{(\varphi)} + \cos{(\theta + \varphi)} \ddot{d} \right) = 0$$

 $\ell m \sin{(\theta + \varphi)} \dot{\varphi}^2 - \ell m \cos{(\theta + \varphi)} \ddot{\varphi} + g m \sin{(\theta)} + g m_1 \sin{(\theta)} - m \ddot{d} - m_1 \ddot{d} = 0$

$$\ell m \sin(\theta + \varphi) \dot{\varphi}^2 - \ell m \cos(\theta + \varphi) \ddot{\varphi} + q m \sin(\theta) + q m_1 \sin(\theta) - m d - m_1 d = 0$$

4. Resorte enrollado en un brazo de una "T"

Una pieza rígida en forma de T consiste en una larga varilla soldada perpendicularmente a otra de longitud ℓ que pivotea en torno a un origen. La T gira sobre un plano horizontal con velocidad angular constante ω . Una partícula de masa m muy superior a la de la T, por la que esta última es despreciable, puede desplazarse libremente en la primer varilla y está conectada a la intersección de ambas por un resorte de constante elástica k y longitud natural nula.



Mecánica Analítica Computacional



- a) Encuentre una ecuación para la dinámica en función de d, la distancia de la partícula a la intersección. Resultado: $-\omega^2 m d + k d + m \ddot{d} = 0$
- b) (*) Existe un "valor especial" para ω . ¿Cuál sería y que implicaría para d(t)?