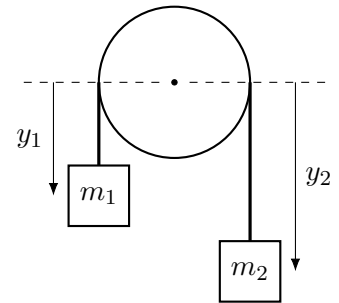


## LIGADURAS

Los problemas marcados con (\*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

## 1. Máquina de Atwood simple

Obtenga a partir de la ecuación de Euler-Lagrange la aceleración que presentan las pesas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que cuelgan de una cuerda de longitud  $\ell$  que pasa por sobre una polea de radio  $R_p$  y masa  $m_p$ .

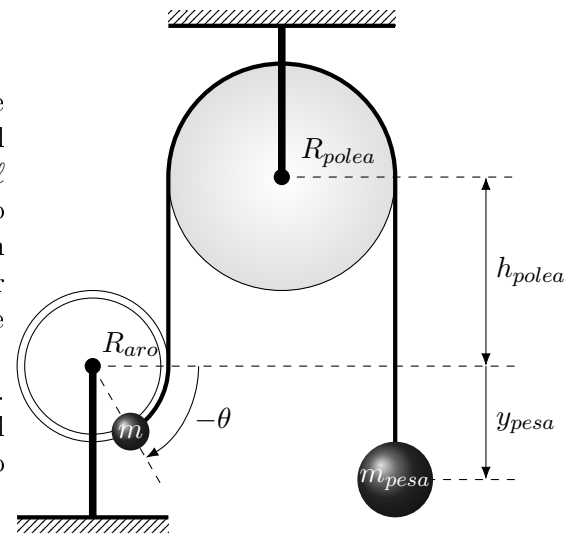


- Resuelva el caso en que se considera  $m_p$  irrelevante.
- Resuelva ahora considerando  $m_p$ , y que la polea presenta una sección cilíndrica. El momento de inercia de tal cilindro de masa  $m$  ante rotaciones en torno a su eje de simetría longitudinal es  $(m/2)R^2$ .

## 2. Aro y polea

Una pesa de masa  $m_{pesa}$  pende de sección de cuerda que sobresale a la derecha de una polea de radio  $R_{polea}$  y masa  $m_{polea}$ . Tal cuerda, que gira solidaria con la polea, tiene un longitud total  $\ell$  y su masa es despreciable. Su otro extremo se ata con un nudo de masa  $m$  a un aro de masa  $m_{aro}$ , enrollándose parcialmente en torno a éste. El centro de la polea está a una altura  $h_{polea}$  por sobre el del aro de radio  $R_{aro}$  que como puede rotar libremente presenta un momento de inercia  $m_{aro}R_{aro}^2$ .

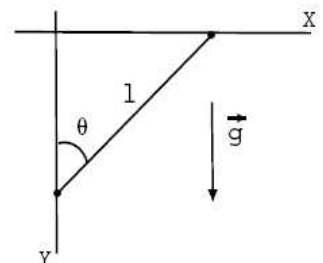
El arco de cuerda enrollada en torno al aro mide un ángulo  $\theta$ . Tenga en cuenta para escribir la función de ligadura que por el sentido de enrolamiento, al medirse desde la horizontal, tal ángulo presentará valores negativos.



- Escriba la posición de las partículas con masa en función de  $y_{pesa}$ ,  $\ell$  y  $\theta$  en un sistema de referencia con origen en el centro del aro.
- Describa la función de ligadura y utilícela para expresar las posiciones en función de  $\theta$ .
- Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica sin olvidar los momentos involucrados.

## 3. Péndulo de pesas deslizantes y acopladas

Dos pesas de masa  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por una barra rígida inextensible de longitud  $\ell$  y masa despreciable frente a las anteriores. La de  $m_1$  puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal y la de  $m_2$  en uno vertical.



- Escriba las posiciones de ambas partículas en función de una única coordenada haciendo uso de la ligadura que impone la barra rígida. Hágalo para: 1)  $y$ , la coordenada para la pesa de  $m_2$ , 2)  $\theta$

- Obtenga las aceleraciones y responda: ¿cuál coordenada generalizada preferiría?

$$\text{Resultado: } \ddot{y} = \frac{-\ell^2 m_1 y \dot{y}^2 + g m_2 (\ell^2 - y^2)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 - 2 \ell^2 m_2 y^2 - m_1 y^4 + m_2 y^4} \quad \ddot{\theta} = \frac{(\ell m_1 \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - \ell m_2 \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - g m_2) \sin(\theta)}{\ell (m_1 \cos^2(\theta) + m_2 \sin^2(\theta))}$$

- (\*) ¿Cuál es el período de movimiento de pequeñas oscilaciones para el caso  $m_1 = m_2 = m$ ?

