

noConservativas

October 31, 2025

1 Fuerzas no conservativas en las ecuaciones de Euler-Lagrange

2025 [V́ctor A. Bettachini](#)

1.1 Fuerzas generalizadas

Cuando un sistema est́a sometido a campos externos que dan lugar a potenciales $V = V(q_i)$, su dinámica se rige por la ecuación de Euler-Lagrange, que puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L}.$$

Si la energía cinética no depende expĺcitamente de las coordenadas q_i , es decir, $T \neq T(q_i)$, entonces la derivada del Lagrangiano respecto a q_i , solo proviene del potencial

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} = -\frac{\partial}{\partial q_i} V.$$

Esto se traduce en la presencia de **fuerzas conservativas**, de acuerdo con la definici3n

$$-\vec{\nabla} V = \vec{F}^c.$$

Sin embargo, muchas de las fuerzas que actúan sobre el sistema — como la fricci3n o la acci3n de un motor externo — son **no conservativas**.

Anteriormente vimos que el t́rmino

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}$$

corresponde, en el formalismo de Euler-Lagrange, al ańlogo de “masa por aceleraci3n”. La 2.a ley de Newton establece que este t́rmino debe igualar la suma de **todas las fuerzas aplicadas**, tanto conservativas como no conservativas:

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_{l=1}^L \vec{F}_l = \sum_{m=1}^M \vec{F}_m^c + \sum_{j=1}^J \vec{F}_j^{nc},$$

donde \vec{F}^c y \vec{F}^{nc} representan las fuerzas conservativas y no conservativas, respectivamente.

Por lo tanto, en la ecuación de Euler-Lagrange para cada coordenada q_i debemos incorporar explícitamente las fuerzas no conservativas. Esto se hace introduciendo una **fuerza generalizada** Q_i , que agrupa contribuciones de todas las fuerzas no provenientes de un potencial:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} + Q_i.$$

1.2 ¿Cómo obtener una fuerza generalizada Q_i ?

- Cada Q_i asociada a una coordenada generalizada q_i se obtiene mediante la *descomposición* de una o varias fuerzas aplicadas.
- No es necesario tener una precisa descripción vectorial de tales fuerzas. Basta con calcular el *trabajo virtual* δW que realizaría dicha fuerza ante un *desplazamiento virtual* de esa coordenada δq_i .

1.2.1 Relación entre trabajo y energía

Cuando un sistema se desplaza entre dos puntos 1 y 2, la acción de las **fuerzas no conservativas** $\vec{F}^{nc} = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j$ puede alterar su energía mecánica total $E = T + V$. Esta variación de energía es precisamente igual al **trabajo total** realizado por dichas fuerzas:

$$W_{1 \rightarrow 2}^{nc} = \Delta E.$$

A diferencia de la energía, el trabajo **no es una función de estado**: no depende únicamente de las configuraciones inicial y final del sistema, sino de la trayectoria específica seguida entre los puntos 1 y 2. Por lo tanto, el trabajo se calcula mediante una integral de trayectoria:

$$W_{1 \rightarrow 2}^{nc} = \int_1^2 \vec{F}^{nc} \cdot d\vec{r} \neq \int_1^2 dW_{1 \rightarrow 2}^{nc},$$

Nótese que esta expresión **no equivale** a integrar un diferencial exacto, $dW_{1 \rightarrow 2}^{nc}$, ya que el trabajo no es función que depende exclusivamente de la posición.

Sin embargo, si consideramos dos puntos infinitesimalmente próximos, podemos definir una **variación infinitesimal de trabajo** δW^{nc} , calculada a través de **desplazamientos virtuales** $\delta \vec{r}$ explorados desde cada punto del espacio. Este enfoque permite conectar el concepto de trabajo con las fuerzas generalizadas en el formalismo de Euler-Lagrange.

1.2.2 δW^{nc} en función de Q_i

Referencia

- §10.4.1 Generalized dissipative forces for linear velocity dependence

Douglas Cline, *Variational Principles in Classical Mechanics*

3rd ed., Rochester, NY, University of Rochester River Campus Libraries, 2021

- §9 Non-holonomic auxiliary conditions and polygenic forces

Cornelius Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*

University of Toronto press, 1952

Dado el conjunto de fuerzas no conservativas \vec{F}^{nc} que actúan sobre el sistema (las conservativas ya están incluidas en el potencial V), podemos calcular el **trabajo virtual** como:

$$\delta W^{\text{nc}} = \vec{F}^{\text{nc}} \cdot \delta \vec{r},$$

donde $\delta \vec{r}$ depende de las variaciones de las n coordenadas generalizadas δq_i , es decir:

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{r}(\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n).$$

Este concepto se conoce como **trabajo de fuerzas virtuales** (en este caso, no conservativas).

Por otro lado, a cada coordenada generalizada q_i se le asocia una fuerza generalizada Q_i , de modo que, ante un desplazamiento virtual δq_i , la variación total del trabajo puede expresarse como:

$$\delta W^{\text{nc}} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i.$$

Igualando ambas expresiones para δW^{nc} , obtenemos:

$$\sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i,$$

donde $\delta \vec{r}_j$ representa el **desplazamiento virtual del punto de aplicación** de la fuerza externa no conservativa \vec{F}_j .

1.2.3 Ejemplo: péndulo forzado

La cuerda de un péndulo puede modelarse con cierta elasticidad, lo que permite describir su dinámica considerando que la longitud no es constante, sino que varía según las fuerzas aplicadas en su extremo. Para representar este estiramiento más allá de la longitud de equilibrio l_0 , se introduce una coordenada generalizada, x .

En la figura se muestran las fuerzas aplicadas en la posición C de la masa. Además del peso $\vec{P} = m\vec{g}$ y de la fuerza elástica de restitución con que se modela la elasticidad de la cuerda, actúa una fuerza externa no conservativa

$$\vec{F} = F(t)\hat{I},$$

cuyo objetivo es desplazar al sistema de su posición de equilibrio. Dicha fuerza puede descomponerse en dos componentes: una tangencial al resorte y otra perpendicular a él.

1.2.4 Fuerzas generalizadas a partir del trabajo virtual

- Desplazamiento virtual en función de coordenadas generalizadas

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_c &= \delta x \hat{\rho} + (l_0 + x) \delta \theta \hat{\theta} \\ &= \delta x (\sin(\theta) \hat{I} - \cos(\theta) \hat{J}) + (l_0 + x) \delta \theta (\cos(\theta) \hat{I} + \sin(\theta) \hat{J}). \end{aligned}$$

- Trabajo virtual a causa de la \vec{F} aplicada en C , que como tiene componente solo en \hat{I} hará que solo sobrevivan los términos en esa dirección de $\delta\vec{r}_c$ al momento de calcular este trabajo

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_C = F(t) \hat{I} \cdot \delta\vec{r}_c \\ &= F(t) \sin(\theta) \delta x + F(t) (l_0 + x) \cos(\theta) \delta \theta \\ &= Q_x \delta x + Q_\theta \delta \theta \\ &\Rightarrow \begin{cases} Q_x = F(t) \sin(\theta) \\ Q_\theta = F(t) (l_0 + x) \cos(\theta) \end{cases}\end{aligned}$$

1.3 Un procedimiento más automatizable

Referencia

- §6.3.2 Transformation to generalized coordinates

Douglas Cline, *Variational Principles in Classical Mechanics*

3rd ed., Rochester, NY, University of Rochester River Campus Libraries

2021

La variación total del trabajo de las fuerzas no conservativas es

$$\delta W^{\text{nc}} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \delta\vec{r}_j(\delta q_1, \dots, \delta q_n),$$

donde las fuerzas \vec{F}_j están aplicadas en las posiciones \vec{r}_j que son vectores en algún sistema (cartesiano, esférico, etc.), pero que expresamos en función de coordenadas generalizadas, q_i . Por tanto la variación de tales posiciones $\delta\vec{r}_j$ es función de las variaciones de las coordenadas generalizadas δq_i .

Un desplazamiento virtual arbitrario $\delta\vec{r}_j$ se puede relacionar a un desplazamiento virtual de la coordenada generalizadas δq_i a través de las derivadas parciales de las coordenadas vectoriales respecto de las coordenadas generalizadas

$$\delta\vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i.$$

Podría decirse que en \vec{r}_j exploramos cuanto variaría tal posición en función de cada q_i a través de la derivada y luego “avanzamos” en tal sentido con δq_i , y de esta manera efectuamos el desplazamiento virtual, $\delta\vec{r}_j$.

Con esto el trabajo que buscamos calcular se puede expresar como

$$\delta W^{\text{nc}} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i.$$

Al determinar la fuerza generalizada producto de las no conservativas para una de las coordenadas generalizadas, Q_i la segunda sumatoria es irrelevante, y se obtiene

$$Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i,$$

y es posible identificar la fuerza generalizada Q_i como

$$Q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right).$$

De aquí en adelante las ecuaciones de Euler-Lagrange contemplando todas las fuerzas generalizadas pueden escribirse como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} = \sum_k \lambda_k \frac{\partial}{\partial q_i} f_k + \sum_j \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right),$$

que en los casos donde no hay fuerzas de vínculo será

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} = \sum_j \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right),$$

1.3.1 Péndulo: a partir del punto en que se aplica la fuerza

En este caso hay una única fuerza, $\sum_{j=1}^J \vec{F}_j = \vec{F}(t)$, y por tanto a las coordenadas generalizadas x y θ corresponden sendas fuerzas generalizadas, Q_x y Q_θ .

```
[1]: import sympy as sm # importamos funciones de cálculo simbólico
from sympy.physics import mechanics as me # de sympy utilizaremos funciones de
    ↪ mecánica
me.init_vprinting() # notación con punto para la velocidad y punto punto para
    ↪ la aceleración
```

```
[2]: e = me.ReferenceFrame('e', indices=['I', 'J', 'K'], latexs=['\mathbf{\hat{I}}',
    ↪ '\mathbf{\hat{J}}', '\mathbf{\hat{K}}'])
F = sm.Symbol('F')
F_vec = F*e.x
F_vec
```

[2]: $\hat{F}\hat{\mathbf{I}}$

- Se escribe el vector posición del punto en que se aplica $\vec{F}(t)$ en el sistema geométrico de coordenadas, pero en función de las coordenadas generalizadas

```
[3]: l0, zeta = sm.symbols('l_0, theta')
x = me.dynamicsymbols('x')
C_r = (l0 + x)* (sm.sin(zeta)* e.x + sm.cos(zeta)*e.y)
C_r
```

[3]: $(l_0 + x) \sin(\theta) \hat{\mathbf{I}} + (l_0 + x) \cos(\theta) \hat{\mathbf{J}}$

$$\vec{r}_C = (l_0 + x) \hat{\rho} = (l_0 + x) (\sin(\theta) \hat{I} - \cos(\theta) \hat{J})$$

- Se calcula para cada q_i su Q_i

```
[4]: x_Q = sm.Eq(
    sm.symbols('Q_x'),
    F_vec.dot(C_r.diff(x,e))
)
x_Q
```

[4]: $Q_x = F \sin(\theta)$

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_C}{\partial x} = F(t) \hat{I} \cdot (\sin(\theta) \hat{I} - \cos(\theta) \hat{J}) = F(t) \sin(\theta)$$

```
[5]: zeta_Q = sm.Eq(
    sm.symbols('Q_theta'),
    F_vec.dot(C_r.diff(zeta,e))
)
zeta_Q
```

[5]: $Q_\theta = F(l_0 + x) \cos(\theta)$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_C}{\partial \theta} = F(t) \hat{I} \cdot [(l_0 + x) (\cos(\theta) \hat{I} + \sin(\theta) \hat{J})] = F(t)(l_0 + x) \cos(\theta)$$

1.4 Otro ejemplo: barra que pende de un carro

- Barra m_2 , l (centro de masa en G) pende de (A) sujeta a \vec{g} .
- Carro m_1 unido a pared por un resorte de constante elástica k .

```
[6]: # Defino los parámetros físicos del sistema
m1, m2, k, g, l = sm.symbols('m_1, m_2, k, g, l', positive=True)
```

```
[7]: # posiciones de los centros de masa
e = me.ReferenceFrame('e')
x, zeta = me.dynamicsymbols('x, theta')
m1_r = x* e.x
m2_r = m1_r + (l/2)* (sm.sin(zeta)* e.x + sm.cos(zeta)* (-e.y) )
```

Energía cinética La masa de la barra está distribuida, no corresponde calcular su energía cinética como la de una partícula, sino como la de un sólido rígido. Para calcular su correspondiente energía cinética de rotación

$$T_{\text{rotación}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

necesitamos el [momento de inercia](#) I . Para una barra de longitud l y masa m girando en torno a un eje transversal al longitudinal que pasa por su centro de masa es

$$I_{\text{barra cm}} = \frac{ml^2}{12}.$$

En este problema tal eje está desplazado a un extremo de la barra, a $\frac{l}{2}$ del centro de masa, por lo que debe adicionarse el término que indica el [teorema de Steiner](#)

$$I_{\text{barra extremo}} = m \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{ml^2}{12} = m \frac{l^2}{3}.$$

```
[8]: barra_I_centro = m2* l**2/ 12 # momento de inercia barra en torno a centro
      ↪https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Momentos_de_inercia
barra_I_extremo = barra_I_centro + m2* (l/2)**2 # a (l/2) del centro de masa,
      ↪con teorema de Steiner

barra_I = sm.Eq(
    sm.Symbol('I_{barra}'),
    barra_I_extremo
)
barra_I
```

[8]:
$$I_{\text{barra}} = \frac{l^2 m_2}{3}$$

```
[9]: unMedio = sm.Rational(1, 2)
t = sm.symbols('t') # tiempo
barra_T_rotación = sm.Eq(
    sm.Symbol('T_{rotación}'),
    unMedio* barra_I.rhs* zeta.diff(t)**2
)
barra_T_rotación
```

[9]:
$$T_{\text{rotacin}} = \frac{l^2 m_2 \dot{\theta}^2}{6}$$

Por el contrario para el carro no hay inconveniente en considerar la masa concentrada en el centro de masa, ya que no está sometido a rotación. Por lo tanto la energía cinética del carro la tratamos de la forma usual.

```
[10]: def energíaCinéticaTraslación(masa, posición, marcoDeReferencia):
      """
      A partir de la masa y posición de una partícula puntual en un marco de
      ↪referencia devuelve su energía cinética.

      Parámetros
      -----
      masa: (sympy.core.symbol.Symbol)
            De un partícula
      posición: (sympy.physics.vector.vector.Vector)
```

```

    del centro de masa de la partícula
    marcoDeReferencia: (sympy.physics.vector.frame.ReferenceFrame)
    En el que se expresa la posición

    Retorna
    -----
    Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
    En su lado derecho explicita la energía cinética del sistema en función
    ↪ de coordenadas y velocidades generalizadas y el tiempo.
    Energía cinética,  $T = (m/2) \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$ 
    """
    velocidad = posición.dt(marcoDeReferencia)
    unMedio = sm.Rational(1,2) # Rational: fracción de enteros,
    ↪ alternatively podría haberse usado 0.5
    T_traslación = sm.Eq(
        sm.Symbol('T_{traslación}'),
        unMedio* masa* velocidad.dot(velocidad)
    ).simplify()
    return T_traslación

```

```

[11]: carro_T = energíaCinéticaTraslación(m1, m1_r, e)
      barra_T_traslación = energíaCinéticaTraslación(m2, m2_r, e)

```

Y por tanto la energía cinética en este sistema es:

```

[12]: T = sm.Eq(
      sm.Symbol('T'),
      carro_T.rhs + barra_T_rotación.rhs + barra_T_traslación.rhs )
      T

```

[12]:

$$T = \frac{l^2 m_2 \dot{\theta}^2}{6} + \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 (l^2 \dot{\theta}^2 + 4l \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{x} + 4\dot{x}^2)}{8}$$

Energía potencial El resorte puede almacenar energía potencial elástica.

```

[13]: resorte_V = sm.Eq(
      sm.Symbol('V_{elástica}'),
      unMedio* k* x**2
    )
      resorte_V

```

[13]:

$$V_{elastica} = \frac{kx^2}{2}$$

Y si bien la barra es un cuerpo extenso donde su punto de unión con el carro no varía altura en tanto que el extremo lo hace en una forma pronunciada, realizaremos una aproximación para simplificar el problema. A los efectos de la energía potencial gravitatoria se considerará que la barra concentra toda su masa en su centro de masa.


```
[14]: def energíaPotencialGravitatoria(masa, posición, aceleracionGravitatoria):
    """
    Retorna la energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m cuya
    ↪ posición r está dada en un sistema de referencia en el cual g es la
    ↪ aceleración gravitatoria terrestre.

    Parámetros
    -----
    aceleracionGravitatoria: (sympy.physics.vector.vector.Vector)
        vector orientado según el sistema de referencia
    masa: (sympy.core.symbol.Symbol)
        del cuerpo en cuestión
    posición: (sympy.core.symbol.Symbol)
        del centro de masa en un sistema de referencia relacionable con el de
    ↪ aceleracionGravitatoria

    Retorna
    -----
    Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
        En su lado derecho explicita la energía potencial del sistema en
    ↪ función de coordenadas y velocidades generalizadas y el tiempo.
    coordenadaGeneralizada: Símbolo Sympy (sympy.core.symbol.Symbol)
         $V = - (m \vec{\text{aceleracionGravitatoria}}) \cdot \text{posición}$ 
    """
    V_gravitatoria = sm.Eq(
        sm.Symbol('V_{gravitatoria}'),
        - (masa* aceleracionGravitatoria).dot(posición)
    ).simplify()
    return V_gravitatoria
```

```
[15]: aceleracionGravitatoria = g* (- e.y)
barra_V = energíaPotencialGravitatoria(m2, m2_r, aceleracionGravitatoria)
barra_V
```

[15]:
$$V_{\text{gravitatoria}} = -\frac{g m_2 \cos(\theta)}{2}$$

Así la energía potencial en el sistema es:

```
[16]: # Energía potencial
V = sm.Eq(
    sm.Symbol('V'),
    resorte_V.rhs + barra_V.rhs
)
V
```

[16]:
$$V = -\frac{g m_2 \cos(\theta)}{2} + \frac{k x^2}{2}$$

Dos coordenadas generalizadas, dos ecuaciones de Euler-Lagrange

```
[17]: def eulerLagrange(T, V, coordenadaGeneralizada):
    '''
        Esta función devuelve la ecuación de Euler-Lagrange para una coordenada
        ↪ generalizada a partir de las energías del sistema.

        Parámetros
        -----
        T : Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
            En su lado derecho explicita la energía cinética del sistema en función
            ↪ de coordenadas y velocidades generalizadas y el tiempo.
        V : Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
            En su lado derecho explicita la energía potencial del sistema en
            ↪ función de coordenadas y velocidades generalizadas y el tiempo.
        coordenadaGeneralizada: Símbolo Sympy (sympy.core.symbol.Symbol)
            Para la que quiere obtenerse la ecuación de Euler-Lagrange

        Retorna
        -----
        Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
            Ecuación de Euler-Lagrange homogénea para la coordenadaGeneralizada
    '''
    lagrangiano = (T.rhs - V.rhs).expand()
    t = sm.Symbol('t') # como se deriva respecto al tiempo con la función diff
    ↪ se declara t como símbolo
    return sm.Eq(
        lagrangiano.diff(coordenadaGeneralizada.diff(t)).diff(t)
        - lagrangiano.diff(coordenadaGeneralizada)
        , 0
    ).simplify()
```

Llamaremos de ahora en más a estas ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones de **Euler-Lagrange homogéneas** para diferenciarlas de las ecuaciones de Euler-Lagrange que contemplen fuerzas no conservativas.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

```
[18]: x_EL_homogénea = eulerLagrange(T, V, x)
      x_EL_homogénea
```

```
[18]:
```

$$kx - \frac{lm_2 \sin(\theta) \dot{\theta}^2}{2} + \frac{lm_2 \cos(\theta) \ddot{\theta}}{2} + m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

```
[19]: zeta_EL_homogénea = eulerLagrange(T, V, zeta)
      zeta_EL_homogénea
```

[19]:
$$\frac{lm_2 (6g \sin(\theta) + 7l\ddot{\theta} + 6 \cos(\theta)\dot{x})}{12} = 0$$

1.4.1 Adicionando las fuerzas no conservativas

Al sistema anterior se aplican dos fuerzas no conservativas: - una motriz externa $\vec{F}_{\text{motriz}} = F(t)\hat{x}$ - una de amortiguación proporcional a la velocidad $\vec{F}_{\text{amortiguación}} = -b\dot{x}\hat{x}$

ambas actuando sobre el carro, por lo que consideramos que se aplican en la posición puntal \vec{r}_A .

Se puede analizar la variación de trabajos virtuales

$$\begin{aligned}\delta W^{\text{nc}} &= \sum_j \vec{F}_j^{\text{nc}} \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_i Q_i \delta q_i \\ &= [\vec{F}_{\text{amortiguación}} + \vec{F}_{\text{motriz}}] \delta x + [0] \delta \theta \\ &= [-b\dot{x} + F(t)] \delta x + [0] \delta \theta \\ &\Rightarrow Q_x = -b\dot{x} + F(t) \quad Q_\theta = 0\end{aligned}$$

Pero puede ser más sencillo utilizar la expresión

$$Q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right),$$

que requiere explicitar el vector posición \vec{r}_j donde se aplica $\sum_{j=1}^J \vec{F}_j(t)$

$$\vec{r}_A = x\hat{x}$$

entonces

$$\frac{\partial \vec{r}_A}{\partial x} = \hat{x} \quad \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \theta} = 0,$$

y por tanto

```
[20]: b = sm.Symbol('b', positive= True)
F = sm.Function('F')(t)
fuerzas_m1_r = (-b* x.diff(t)+ F)* e.x # sumatoria de fuerzas sobre m1_r
      ↪ (vector)
x_Q = fuerzas_m1_r.dot(m1_r.diff(x, e))
x_Q
```

[20]: $-b\dot{x} + F$

$$Q_x = [(-b\dot{x} + F(t))\hat{x}] \cdot \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial x} = [(-b\dot{x} + F(t))\hat{x}] \cdot \hat{x} = -b\dot{x} + F(t)$$

```
[21]: zeta_Q = fuerzas_m1_r.dot(m1_r.diff(zeta, e))
      zeta_Q
```

```
[21]: 0
```

$$Q_\theta = [(-b\dot{x} + F(t))\hat{x}] \cdot \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \theta} = 0$$

esta última es 0 porque \vec{r}_A no tiene dependencia con θ .

Se aprovechará la función `eulerLagrange` para generar los términos de la ecuación homogénea que ahora se ubicarán del lado izquierdo de la nueva igualdad. En su lado derecho ubicaremos la suma de fuerzas generalizadas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= Q_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -b\dot{x} + F(t). \end{aligned}$$

```
[22]: x_EL = sm.Eq(
      x_EL_homogénea.lhs,
      x_Q
    )
      x_EL
```

```
[22]:
```

$$kx - \frac{lm_2 \sin(\theta)\dot{\theta}^2}{2} + \frac{lm_2 \cos(\theta)\ddot{\theta}}{2} + m_1\ddot{x} + m_2\ddot{x} = -b\dot{x} + F$$

Por otra parte, en la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada θ no hay modificaciones

```
[23]: zeta_EL = sm.Eq(
      zeta_EL_homogénea.lhs,
      zeta_Q
    )
      zeta_EL
```

```
[23]:
```

$$\frac{lm_2 (6g \sin(\theta) + 7l\ddot{\theta} + 6 \cos(\theta)\ddot{x})}{12} = 0$$

Es importante recordar que ambas ecuaciones conforman un sistema acoplado, y, por tanto, se requiere de ambas para obtener la dinámica del dispositivo.

En particular hay que tener en cuenta que $F = F(t)$ por lo que habrá que desarrollar esta en una expresión compatible con las herramientas de resolución que se utilicen. Hacia el final del curso veremos la aplicación del desarrollo de Fourier para este tipo de problemas.

1.5 Resumen: las fuerzas en el enfoque Lagrangiano

Si la fuerza que actúa sobre los componentes de un sistema es - causada por algún **campo** (eléctrico, gravitatorio), se las contempla calculando el **potencial** usando que $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, - si es de otro origen se la expresa como una **no conservativa**, se las escribe como fuerzas generalizadas Q_i .

Hay otras fuerzas, que son las que mantienen una **ligadura**. Por ejemplo las que haga una barra rígida manteniendo una cierta distancia, o la que haga una superficie sobre la que se asiente un componente. Estas no hacen trabajo, pues los posibles δr de los componentes del sistema serán siempre perpendiculares a estas (de lo contrario no se cumple el vínculo). Si no necesitamos su magnitud no se incluyen en el cálculo, pero si le necesitamos, puede obtenerse con la técnica de **multiplicadores de Lagrange**.

1.5.1 Euler-Lagrange con fuerzas de ligadura y no conservativas

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} = \sum_{k=1}^K \lambda_k(t) \frac{\partial}{\partial q_i} f_k + \sum_{j=1}^J \vec{F}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} i = 1, 2, \dots, n & \text{coordenadas generalizadas} \\ j = 1, 2, \dots, J & \text{fuerzas no conservativas} \\ k = 1, 2, \dots, K & \text{ligaduras} \end{array} \right.$$

donde

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k(t) \frac{\partial}{\partial q_i} f_k,$$

denota las fuerzas generalizadas producto de las K funciones de ligadura, f_k , y

$$\sum_{j=1}^J \vec{F}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right),$$

denota las fuerzas generalizada producto de la acción de las J fuerzas no conservativas, $\vec{F}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, que pueden depender de la posición y/o velocidad vectorial así como explícitamente del tiempo.

Esta formulación permite que utilicemos la función `eulerLagrange` que hasta aquí utilizamos para generar la ecuación homogénea, es decir igualada a un 0 en el lado derecho de la igualdad, `rhs`, pero en su lugar escribir la suma de las fuerzas generalizadas producto de las ligaduras y las no conservativas.