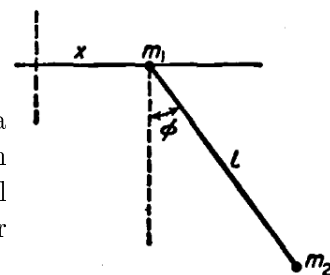


Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

1. Péndulo con punto de suspensión libre [Landau §5 ej. 2]

La partícula de masa m_2 pende de una barra rígida de longitud ℓ de masa despreciable. En su otro extremo hay un dispositivo de masa m_1 enhebrado en una barra rígida horizontal y que se mueve libremente a lo largo de su eje \hat{x} . El dispositivo permite que la barra que pende de él forme con la vertical cualquier ángulo φ .

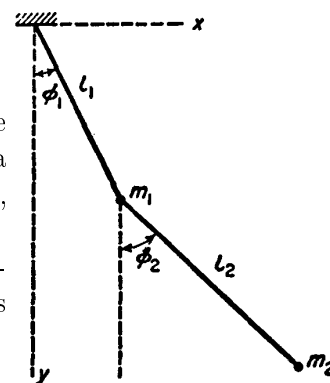


- Tras determinar las coordenadas generalizadas, escriba la posición de las partículas en función de ellas.
- Calcule las velocidades de las partículas.
- Con estas velocidades, calcule la energía cinética, T , y potencial gravitatoria, V , de cada partícula.
- Calcule ahora T y V usando las funciones que toman por parámetros las masas y posiciones de las partículas. Verifique que obtiene el mismo resultado en menos pasos.
- Realice substitutiones en las expresiones de T y V del punto anterior para inmovilizar la partícula de masa m_1 . Verifique que recupera las expresiones que corresponden a las de un péndulo rígido ideal.

2. Péndulo doble [Landau §5 ej. 1]

Una barra rígida de longitud ℓ_1 tiene una masa despreciable respecto a la de la partícula de masa m_1 fija a su extremo. A su vez de esta última pende otra barra rígida, de longitud ℓ_2 que en su extremo tiene otra partícula de masa m_2 , también mucho mayor que aquella de la barra.

Para cada uno de los siguientes puntos escriba en un cuaderno Jupyter titulado con su apellido una o varias celdas de código separadas entre sí por otras conteniendo un texto indicando de qué punto se trata.



- Obtenga la energía cinética, T , y potencial, V , en función de las coordenadas de la figura.

Resultado:

$$T_{\text{traslación}} = \frac{\ell_1^2 m_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2 (\ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2)}{2}$$

$$V_{\text{gravitatoria}} = -g(\ell_1 m_1 \cos(\varphi_1) + \ell_1 m_2 \cos(\varphi_1) + \ell_2 m_2 \cos(\varphi_2))$$

- Establezca $m_1 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ y $\ell_1 = \ell_2 = \frac{\ell}{2}$ a través de la función de substitución de SymPy. Verifique que se obtiene el T y V de un único péndulo rígido ideal.

3. (*) Péndulo con punto de suspensión en rotación [Marion (e) ex. 7.5] [Landau §5 ej. 3]

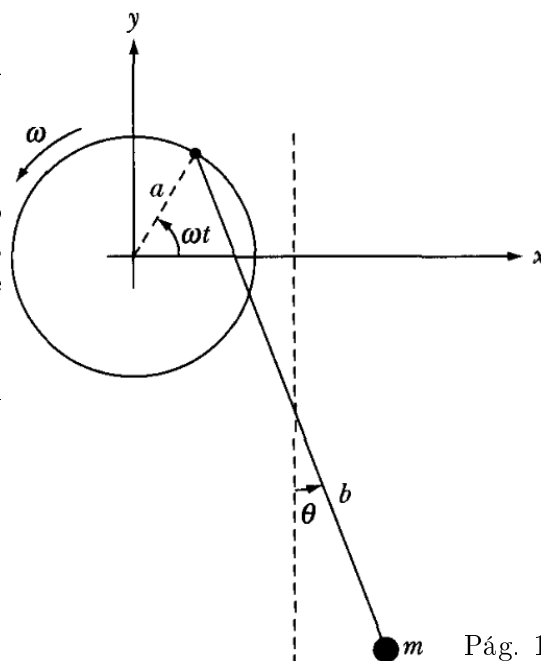
Una partícula de masa m pende de una barra rígida de longitud b . El punto de suspensión engarzado en un aro de radio a dispuesto verticalmente rota respecta a su centro con una frecuencia ω constante. Se asume que todas las posiciones se encuentran en un único plano bidimensional y que la masa de la barra rígida tiene masa despreciable frente a m .

Calcule la energía cinética, T y potencial, V de la partícula con masa m .

Resultado:

$$T_{\text{traslación}} = \frac{m(a^2 \omega^2 - 2ab\omega \sin(\omega t - \theta) \dot{\theta} + b^2 \dot{\theta}^2)}{2}$$

$$V_{\text{gravitatoria}} = gm(a \sin(\omega t) - b \cos(\theta))$$



4. (*) **Pesas acopladas rotando en torno a eje** [Landau §5 ej. 4]

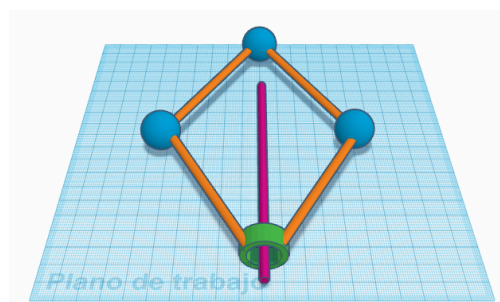
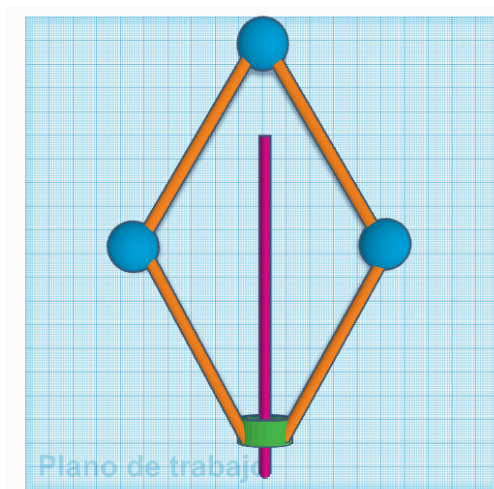
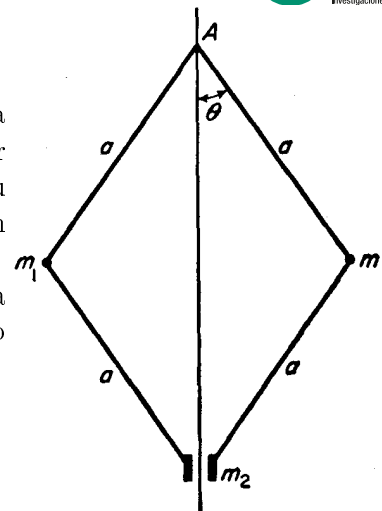
La pieza con m_2 se desplaza sobre un eje vertical, y todo el sistema gira con una velocidad angular constante Ω en torno a ese eje. Está unida por barras de longitud a y masa despreciable a otras pesas de masa m_1 . A su vez estas penden de sendas barras idénticas del punto fijo, A , que describen un ángulo variable de apertura respecto al eje θ .

Calcule la energía cinética para cada una de las tres masas y exprese en la forma más compacta posible la del sistema en su conjunto. Haga lo propio con la energía potencial.

Resultado:

$$T_{\text{traslación}} = a^2 \left(m_1 \left(\Omega^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2 \right) + 2m_2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 \right)$$

$$V_{\text{gravitatoria}} = -2ag(m_1 + m_2) \cos(\theta)$$



En estas ilustraciones indicamos el punto A , de donde tenemos *agarrado* al sistema, con la *pelota de arriba*. Todo gira en torno al eje rosa con velocidad angular **CONSTANTE** Ω . Por lo tanto, las dos partículas de los laterales, las de masa m_1 , rotan entrando y saliendo del plano de la pantalla (imagen de abajo). Esto es equivalente a pensar que el plano celeste de la imagen rota completo sobre el eje rosa.

La pieza de masa m_2 es un dispositivo pasante (un buje) que puede ir para arriba y abajo sin rozamiento sobre el eje vertical (rosa). Si la pieza de abajo sube, todos los ángulos cambian lo mismo, porque las longitudes de las barras naranjas son todas iguales.

