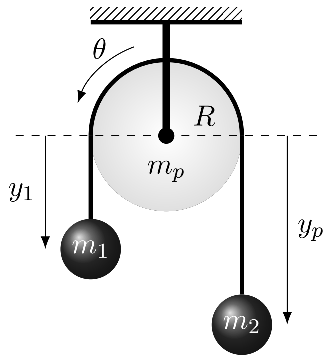
Ligaduras

Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

1. **Máquina de Atwood simple**
   Obtenga a partir de la ecuación de Euler-Lagrange la aceleración que presentan las pesas de masas m_1 y m_2 que cuelgan de una cuerda de longitud ℓ que pasa por sobre una polea de radio R_p y masa m_p.



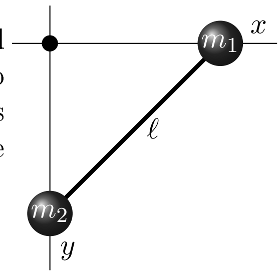
   a) La cuerda es inextensible, por lo que establece una relación entre y_1 e y_2. Escriba esta función de vínculo.

   b) De asumirse que la cuerda desliza sin rozamiento sobre la polea, esta última no se mueve. Así que basta con usar la única función de vínculo hallada en el punto anterior para obtener la ecuación de Euler-Lagrange en función y_1.

   c) Lo que plantea el punto anterior rara vez sucede. Lo usual es que la cuerda no deslice y gire solidaria con la cuerda. Esto es un vínculo entre el ángulo que describe la polea en torno a su eje de simetría longitudinal y el desplazamiento de la cuerda, ergo de las pesas. Modele este nuevo vínculo como función de *theta* y una de las coordenadas y_i.

   d) La energía cinética de rotación es función del momento de inercia y la velocidad angular, que a través de la función de vínculo del punto anterior, debe relacionarse con la velocidad de las pesas. Modelando la polea como un cilindro homogéneo, su momento de inercia ante rotaciones en torno a su eje de simetría longitudinal es $(m/2)R^2$.

2. **Péndulo de pesas deslizantes y acopladas**
   Dos pesas de masa m_1 y m_2 están unidas por una barra rígida inextensible de longitud ℓ y masa despreciable frente a las anteriores. La de m_1 puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal y la de m_2 en uno vertical. Las coordenadas que definen sus posiciones son x e y, respectivamente. La barra establece entonces un vínculo entre estas coordenadas.

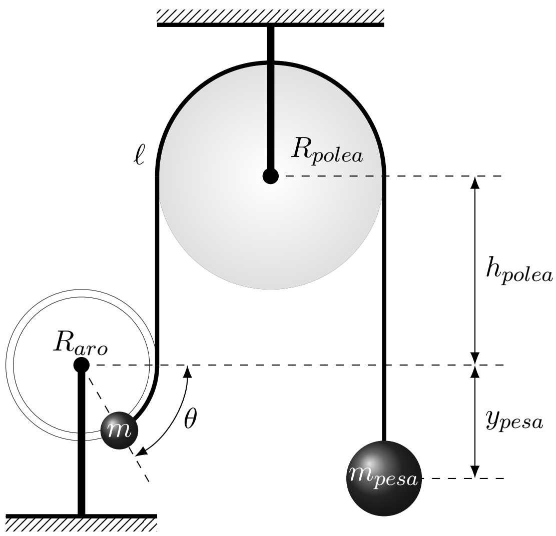


   a) Use la función de vínculo para expresar las posiciones solo en función de y.

   b) Calcule la aceleración de la pesa de m_2.

   Resultado: $\ddot{y} = \frac{-\ell^2 m_1 y \dot{y}^2 + g m_2 \left(\ell^2 - y^2\right)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 - 2\ell^2 m_2 y^2 - m_1 y^4 + m_2 y^4}$

3. **Aro y polea**
   Una pesa de masa m_{pesa} pende de sección de cuerda que sobresale a la derecha de una polea de radio R_{polea} y masa m_{polea}. Tal cuerda, que gira solidaria con la polea, tiene una longitud total ℓ y su masa es despreciable. Su otro extremo se ata con un nudo de masa m a un aro de masa m_{aro}, enrollándose en un arco θ en torno a éste. El centro de la polea está a una altura h_{polea} por sobre el del aro de radio R_{aro} que como puede rotar libremente presenta un momento de inercia $m_{aro}R_{aro}^2$.
   Quedan el apartamiento con la horizontal de la pesa, y_{pesa}, y la extensión del arco enrollado, θ, como las coordenadas generalizadas que estarán ligadas por la cuerda de longitud ℓ.

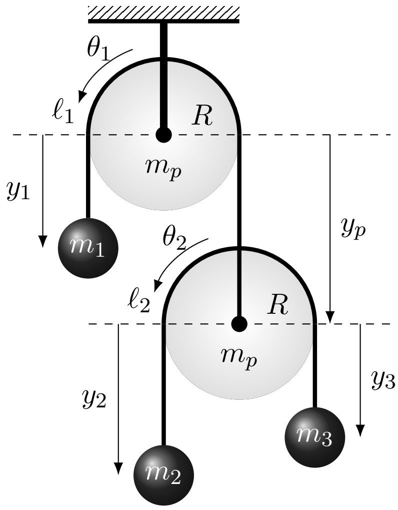


a) Escriba la posición de las partículas con masa en función de las coordenadas generalizas variables que un sistema de referencia con origen en el centro del aro.

b) Describa la función de ligadura y utilícela para expresar las posiciones en función de θ. Verifique su solución revisando que una variación de θ “hacia su cero” implique que la pesa “baja”.

c) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica sin olvidar los momentos involucrados.
Resultado: $R_{aro}^2 m\ddot{\theta} + R_{aro}^2 m_{aro}\ddot{\theta} + R_{aro} g m \cos(\theta) + R_{polea}^2 m_{pesa}\ddot{\theta} + \frac{R_{polea}^2 m_{polea}\ddot{\theta}}{2} - R_{polea} g m_{pesa} = 0$

4. **Maquina de Atwood compuesta** [Marion (english) ex. 7.8]



a) Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura: y_i con $i = 1, 2, 3, p$.

b) Modele las ligaduras que proveen las dos cuerdas en sendas funciones.

c) Use las funciones de ligadura para expresar todas las posiciones en función de y_1 e y_2.

d) Las cuerdas no deslizan sobre las poleas, por lo que la longitud de cuerda que se desplaza en una polea es igual a la que se desplaza en la otra. Este es otro vínculo que debe modelar la relación entre las y_i y las θ_i.

e) Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del $\dot{y}_i$ correspondiente.

f) Obtenga las dos ecuaciones de Euler-Lagrange.
Resultados:
$-gm_1 + gm_2 + gm_3 + gm_p + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{3m_p\ddot{y}_1}{2} = 0$
$-gm_2 + gm_3 - m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{m_p\ddot{y}_2}{2} = 0$

g) Resuelva este sistema de ecuaciones para obtener las dos correspondientes aceleraciones generalizadas.
Resultados:
$\ddot{y}_1 = \frac{2g\left(2m_1m_2+2m_1m_3+m_1m_p-8m_2m_3-3m_2m_p-3m_3m_p-m_p^2\right)}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$
$\ddot{y}_2 = \frac{2g(4m_1+m_p)(m_2-m_3)}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$

h) Calcule las aceleraciones de las tres pesas.
Resultados:
$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{y}_1(-\hat{e}_y)$
$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{2g\left(2m_1m_2-6m_1m_3-m_1m_p+8m_2m_3+4m_2m_p+2m_3m_p+m_p^2\right)}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}\mathbf{\hat{e}_y}$
$\ddot{\vec{r}}_3 = -\frac{2g\left(-6m_1m_2+2m_1m_3-m_1m_p+8m_2m_3+2m_2m_p+4m_3m_p+m_p^2\right)}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}\mathbf{\hat{e}_y}$

Actualizado al 20 de septiembre de 2024