

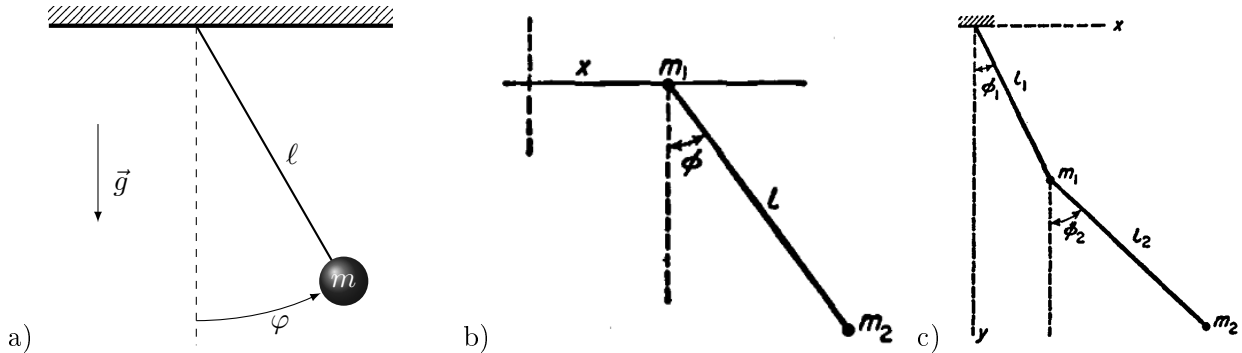
## ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

Los problemas marcados con (\*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

### 1. Péndulo rígido ideal [Marion (english) ex. 7.2]

#### Péndulo de punto de suspensión libre y péndulo doble [Landau §5 ej. 1 y 2]

Aplique la ecuación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de la dinámica de los sistemas:



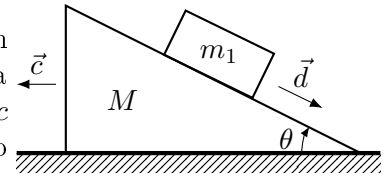
Resultado 1c:

$$\ell_1 (\ell_1 m_1 \ddot{\varphi}_1 + \ell_1 m_2 \ddot{\varphi}_1 + \ell_2 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + \ell_2 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + g m_1 \sin(\varphi_1) + g m_2 \sin(\varphi_1)) = 0$$

$$\ell_2 m_2 (\ell_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 - \ell_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - \ell_2 \ddot{\varphi}_2 - g \sin(\varphi_2)) = 0$$

### 2. Plano inclinado móvil

Un bloque de masa  $m_1$  está originalmente inmóvil sobre un plano de inclinación  $\theta$  que no le presenta fricción y de masa  $M$ . Este último puede deslizarse sobre la superficie horizontal que tampoco le presenta fricción alguna. Denomine con  $c$  la coordenada para la posición de este último, en la dirección y sentido indicado por la flecha; y con  $d$  la del bloque superior en el sentido descendente.



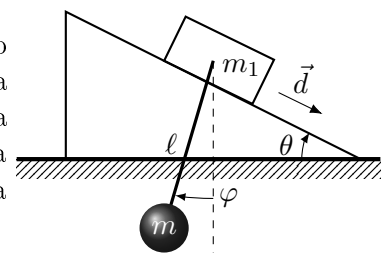
a) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para  $c$  y aquella para  $d$ .

$$\text{Resultado: } M\ddot{c} - m_1 \cos(\theta)\ddot{d} + m_1\ddot{c} = 0 \quad m_1(g \sin(\theta) + \cos(\theta)\ddot{c} - \ddot{d}) = 0$$

Habría notado que no podría responder a una pregunta como “De soltar el bloque más pequeño, ¿qué aceleración tiene el plano?”, pues obtuvo un sistema de dos ecuaciones diferenciales ligadas. En la clase siguiente aprenderá a resolver el sistema usando SymPy.

### 3. Soporte de péndulo sobre un plano inclinado

Un soporte de masa  $m_1$  desliza por un plano inclinado inmóvil con un ángulo  $\theta$  sin que este le presente fricción. Un péndulo de longitud  $\ell$  y masa  $m$  cuelga del soporte describiendo un ángulo  $\varphi$  con la vertical. El soporte se extiende a un costado del plano permitiendo al péndulo colgar libremente sin interferencia de este último. Preste particular atención con la dirección que la figura asigna como positiva para  $\varphi$ .



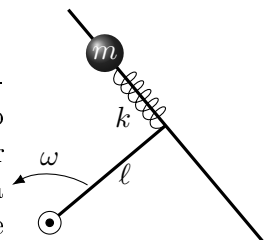
a) Encuentre las ecuaciones para la dinámica. Resultado:

$$\ell m (-\ell \ddot{\varphi} - g \sin(\varphi) + \cos(\theta - \varphi) \ddot{d}) = 0$$

$$\ell m \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi}^2 + \ell m \cos(\theta - \varphi) \ddot{\varphi} + g m \sin(\theta) + g m_1 \sin(\theta) - m \ddot{d} - m_1 \ddot{d} = 0$$

### 4. Resorte enrollado en un brazo de una “T”

Una pieza rígida en forma de T consiste en una larga varilla soldada perpendicularmente a otra de longitud  $\ell$  que pivotea en torno a un origen. La T gira sobre un plano horizontal con velocidad angular constante  $\omega$ . Una partícula de masa  $m$  muy superior a la de la T, por la que esta última es despreciable, puede desplazarse libremente en la primera varilla y está conectada a la intersección de ambas por un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural nula.





- a)* Encuentre una ecuación para la dinámica en función de  $d$ , la distancia de la partícula a la intersección.  
Resultado:  $-\omega^2 md + kd + m\ddot{d} = 0$
- b)* (\*) Existe un “valor especial” para  $\omega$ . ¿Cuál sería y que implicaría para  $d(t)$ ?