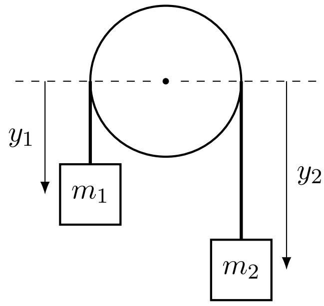
# Ligaduras

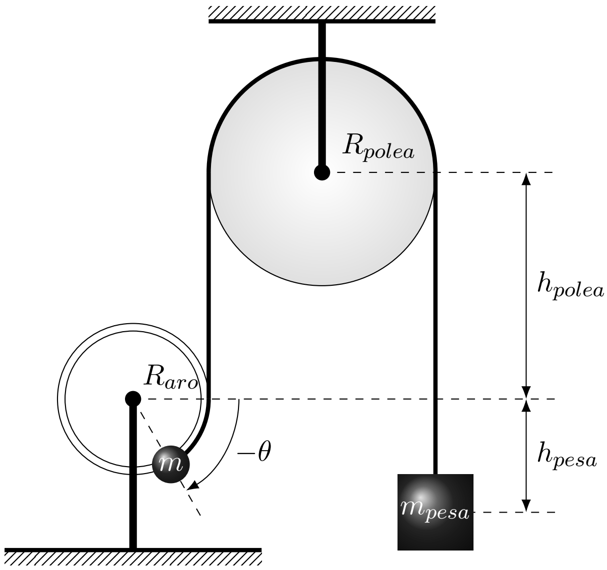
Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.




1. **Máquina de Atwood simple**
   Obtenga a partir de la ecuación de Euler-Lagrange la aceleración que presentan las pesas de masas $m_1$ y $m_2$ que cuelgan de una cuerda de longitud $\ell$ que pasa por sobre una polea de radio $R_p$ y masa $m_p$.

   *a*) Resuelva el caso en que se considera $m_p$ irrelevante.

   *b*) Resuelva ahora considerando $m_p$, y que la polea presenta una sección cilíndrica. El momento de inercia de tal cilindro de masa $m$ ante rotaciones en torno a su eje de simetría longitudinal es $(m/2)R^2$.

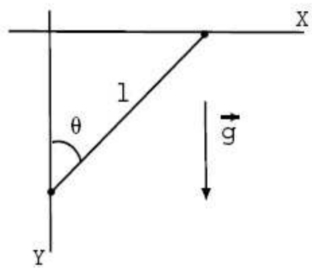



2. **Aro y polea**
   Una pesa de masa $m_{pesa}$ pende de sección de cuerdaque sobresale a la derecha de una polea de radio $R_{polea}$ y masa $m_{polea}$. La cuerda tiene un longitud total $\ell$, su masa es despreciable y gira solidaria con la una polea.
   El otro extremo se ata con un nudo de masa $m$ a un aro de masa $m_{aro}$, enrollándose parcialmente en torno a éste. El centro de la polea está a una altura $h_{polea}$ por sobre el del aro de radio $R_{aro}$ que como puede rotar libremente presenta un momento de inercia $m_{aro}R_{aro}^2$.
   El arco de cuerda enrollada en torno al aro mide un ángulo $\theta$, que si se mide desde la horizontal resulta negativo por el sentido de enrolamiento.

   *a*) Escriba la posición de las partículas con masa con origen el centro del aro.

   *b*) Describa la función de ligadura y utilícela para expresar las posiciones en función de $\theta$.

   *c*) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica.



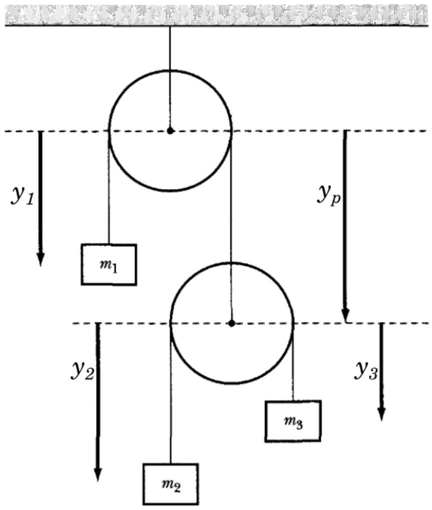

3. **Péndulo de pesas desilzantes y acopladas**
   Dos pesas de masa $m_1$ y $m_2$ están unidas por una barra rígida inextensible de longitud $\ell$ y masa despreciable frente a las anteriores. La de $m_1$ puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal y la de $m_2$ en uno vertical.

   *a*) Escriba las posiciones de ambas partículas en función de una única coordenada haciendo uso de la ligadura que impone la barra rígida. Hágalo para: 1) $y$, la coordenada para la pesa de $m_2$, 2) $\theta$

   *b*) Obtenga las aceleraciones y responda: ¿cuál coordenada generalizada preferiría?
   Resultado: $\ddot{y} = \frac{-\ell^2 m_1 y \dot{y}^2 + g m_2 \left(\ell^2 - y^2\right)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 - 2\ell^2 m_2 y^2 - m_1 y^4 + m_2 y^4}$ $\qquad \ddot{\theta} = \frac{\left(\ell m_1 \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - \ell m_2 \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - g m_2\right)\sin(\theta)}{\ell\left(m_1 \cos^2(\theta) + m_2 \sin^2(\theta)\right)}$

   *c*) (*) ¿Cuál es el período de movimiento de pequeñas oscilaciones para el caso $m_1 = m_2 = m$?

4. **Maquina de Atwood compuesta** [Marion (english) ex. 7.8]




*a*) Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura: $y_i$ con $i = 1, 2, 3, p$.

*b*) Modele las ligaduras que proveen las cuerdas en dos funciones.

*c*) Haciendo uso de estas últimas reemplace en las posiciones para expresarles en función de solo dos $y_i$.

*d*) Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del $\dot{y}_i$ correspondiente.

*e*) Obtenga las dos ecuaciones de Euler-Lagrange.
Resultados:
$$-gm_1 + gm_2 + gm_3 + gm_p + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{3m_p\ddot{y}_1}{2} = 0$$
$$-gm_2 + gm_3 - m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{m_p\ddot{y}_2}{2} = 0$$

*f*) Resuelva este sistema de ecuaciones para obtener las dos correspondientes aceleraciones generalizadas y con estas escribir las aceleraciones de los cuatro cuerpos en cuestión.
Resultados:
$$\ddot{y}_1 = \frac{4gm_1m_2+4gm_1m_3+2gm_1m_p-16gm_2m_3-6gm_2m_p-6gm_3m_p-2gm_p^2}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$$
$$\ddot{y}_2 = \frac{8gm_1m_2-8gm_1m_3+2gm_2m_p-2gm_3m_p}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$$

 Actualizado al 10 de septiembre de 2024  