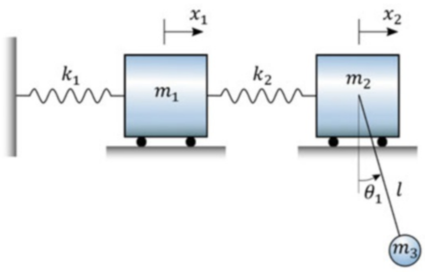
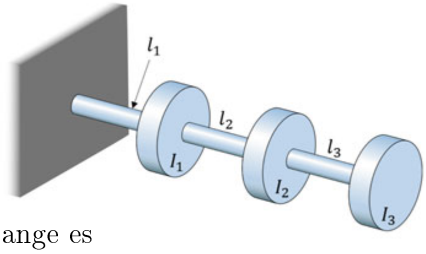
Vibraciones en sistemas discretos | Múltiples grados de libertad

1. **Múltiples carros** En el sistema de la figura $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $k_1 = k_2 = k = 2 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ y $m_1 = m_2 = m_3 = m = 1\,\mathrm{kg}$. Asumiendo pequeñas las oscilaciones en torno al cero de las coordenadas indicadas:



   a) obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange,
   b) escríbalas en forma matricial (matrices M, K), y
   c) obtenga las frecuencias naturales de oscilación del sistema.

2. **Péndulo de torsión compuesto**
   El sistema de la figura consiste en un eje atraviesa tres discos que tienen por momentos de inercia I_1, I_2 e I_3 todos de igual magnitud $1 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^2}$. El eje de acero tiene un diámetro $d = 0{,}01\,\mathrm{m}$ y sus secciones longitudes de $l_1 = l_2 = l_3 = 0{,}5\,\mathrm{m}$.



   Recordemos que para una coordenada angular θ la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\Gamma\dot{\theta} + \kappa\theta + I\ddot{\theta} = \tau,$$

   donde Γ en la fricción torsional, I el momento de inercia, τ el torque aplicado. κ es la rigidez torsional (torsional stiffness) o coeficiente de torsión que responde al torque restitutivo que ejerce la pieza al ser torcida en un ángulo unidad, $\tau_{\text{restitutivo}} = -\kappa\theta$ y su magnitud la determina

$$\kappa = \frac{GJ}{l},$$

   donde l es la longitud de la pieza, G el módulo de cilladura (shear modulus) específico de cada material, y J es el módulo o momento de torsión de la sección geométrica transversal a la dirección de $\vec{\tau}$. Para una sección circular J es igual al segundo momento del área, o momento de inercia polar

$$J_{zz} = J_{xx} + J_{yy} = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

   Según el documento Mechanical Properties of Structural Steels publicado por National Institute of Standards and Technology estadounidense, para el acero estructural de las torres 1 y 2 del World Trade Center de Nueva York desaparecidas el año 2001,

$$\begin{aligned}
G &= g_0 + g_1T + g_2T^2 + g_3T^3 + g_4T^4 + g_5T^5 \\
g_0 &= 80{,}005\,922\,\mathrm{GPa} \\
g_1 &= -0{,}018\,303\,811\,\mathrm{GPa\,^\circ C^{-1}} \\
g_2 &= -1{,}565\,028\,8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{GPa\,^\circ C^{-2}} \\
g_3 &= -1{,}516\,092\,1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{GPa\,^\circ C^{-3}} \\
g_4 &= -1{,}624\,291\,1 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{GPa\,^\circ C^{-4}} \\
g_5 &= 7{,}727\,754\,3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{GPa\,^\circ C^{-5}}
\end{aligned}$$

   Descartando la fricción rotacional Γ:

   a) obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange,
   b) escríbalas en forma matricial (matrices M, K), y
   c) obtenga las frecuencias naturales de oscilación del sistema.