

noConservativas

October 31, 2025

1 Fuerzas no conservativas en las ecuaciones de Euler-Lagrange

2025 Víctor A. Bettachini

1.1 Fuerzas generalizadas

Para un sistema sometido a campos externos que dan lugar a potenciales en función de coordenadas, $V = V(q_i)$, su ecuación de Euler-Lagrange puede expresarse como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L}.$$

No habiendo una dependencia explícita con las q_i de la energía cinética, $T \neq T(q_i)$, la derivada del Lagrangiano respecto a estas solo depende del potencial, V ,

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} = -\frac{\partial}{\partial q_i} V$$

que redundo en la acción de **fuerzas conservativas** de acuerdo a la definición, $-\vec{\nabla}V = \vec{F}^c$.

Pero buena parte de las fuerzas que actúan sobre el sistema, como la fricción o la acción de un motor externo, son **fuerzas no conservativas**. Anteriormente encontramos que $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}$ es el equivalente de masa por aceleración. La 2.a ley de Newton establece que este término equivalente a la suma de **todas las L fuerzas aplicadas**,

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_{l=1}^L \vec{F}_l = \sum_{m=1}^M \vec{F}_m^c + \sum_{j=1}^J \vec{F}_j^{nc},$$

entre ellas M conservativas, \vec{F}^c , y J no conservativas, \vec{F}^{nc} .

Evidentemente, a la ecuación de Euler-Lagrange que corresponde a cada coordenada q_i hay que agregar junto al término que responde a las fuerzas conservativas otras para las no conservativas. Se incorpora así una **fuerza generalizada** Q_i que responde a aquellas fuerzas que no dependen de un potencial

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} + Q_i.$$

1.2 ¿Cómo obtener una fuerza generalizada Q_i ?

- Las Q_i para cada q_i se obtienen de la *descomposición* de una fuerza conocida
- No necesitan ser vectoriales. Basta estimar el *trabajo virtual* δW que tal fuerza cuasaría ante un *desplazamiento virtual* en esa coordenada δq_i .

1.2.1 Repasemos la relación entre trabajo y energía

Durante un desplazamiento entre puntos 1 y 2 la sumatoria de **fuerzas no conservativas** actuando sobre un sistema, $\vec{F}^{\text{nc}} = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j$, pueden variar su energía mecánica, $E = T + V$. Tal variación es igual al **trabajo** que realizaron las fuerzas, $W_{1 \rightarrow 2}^{\text{nc}} = \Delta E$. El trabajo no es función de estado del sistema, es decir, no depende de cuál sea su configuración en 1 y en 2 sino de cuál fue el recorrido para ir de 1 a 2. Por tanto la integral de camino

$$W_{1 \rightarrow 2}^{\text{nc}} = \int_1^2 \vec{F}^{\text{nc}} \cdot d\vec{r} \neq \int_1^2 dW_{1 \rightarrow 2}^{\text{nc}},$$

no puede reducirse a la integración de un hipotético diferencial exacto, $dW_{1 \rightarrow 2}^{\text{nc}}$, pues el trabajo no es función de la posición. Pero si 1 y 2 están infinitesimalmente próximos entre sí habrá una variación infinitesimal del trabajo, δW^{nc} , que puede calcularse explorando los posibles **desplazamiento virtuales** $\delta \vec{r}$ desde cada punto del espacio.

1.3 δW^{nc} en función de Q_i

Referencia

- §10.4.1 Generalized dissipative forces for linear velocity dependence

Douglas Cline, *Variational Principles in Classical Mechanics*, 3rd ed., Rochester, NY, University of Rochester River Campus Libraries, 2021

- §9 Non-holonomic auxiliary conditions and polygenic forces

Cornelius Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, University of Toronto press, 1952

Con la suma de las fuerzas externas al sistema que no son conservativas \vec{F}^{nc} (las conservativas se contemplan a través de un potencial V) se puede calcular

$$\delta W^{\text{nc}} = \vec{F}^{\text{nc}} \cdot \delta \vec{r}.$$

donde $\delta \vec{r}$ es función de variaciones de las n coordenadas generalizadas δq_i , es decir $\delta \vec{r} = \delta \vec{r}(\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n)$. Esto recibe el nombre de **trabajo de las fuerzas virtuales**, en este caso las no conservativas.

Como a cada coordenada generalizada q_i se asocia una fuerza generalizada Q_i , ésta ante el desplazamiento virtual δq_i causa la misma variación del trabajo

$$\delta W^{\text{nc}} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i.$$

Puede entonces plantearse la igualdad

$$\sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i,$$

donde $\delta \vec{r}_j$ es el **desplazamiento virtual del vector posición** donde se aplica la fuerza externa no conservativa, \vec{F}_j .

1.3.1 Ejemplo: péndulo forzado

La cuerda de un péndulo tiene cierta elasticidad, lo cual puede contemplarse en un modelo realizado para obtener su dinámica estableciendo que su longitud no es constante, sino que varía en función de las fuerzas actuantes en su extremo. Para dar cuenta de este estiramiento más allá de la longitud de equilibrio, l_0 se utilizará una coordenada generalizada, x .

En la posición central de su pesa, C , se indican en la figura las fuerzas aplicadas. No solo consta la fuerza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ y la elástica del resorte sino que además actúa una

$$\vec{F} = F(t)\hat{I},$$

que busca apartarle de su posición de equilibrio. Esta fuerza no conservativa puede descomponerse en dos componentes, una tangencial al resorte y otra perpendicular a él.

1.3.2 Fuerzas generalizadas a partir del trabajo virtual

- Desplazamiento virtual en función de coordenadas generalizadas

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_c &= \delta x \hat{\rho} + (l_0 + x) \delta \theta \hat{\theta} \\ &= \delta x (\sin(\theta) \hat{I} - \cos(\theta) \hat{J}) + (l_0 + x) \delta \theta (\cos(\theta) \hat{I} + \sin(\theta) \hat{J}) \end{aligned}$$

- Trabajo virtual a causa de la \vec{F} aplicada en C , que como tiene componente solo en \hat{I} hará que solo sobrevivan los términos en esa dirección de $\delta \vec{r}_c$ al momento de calcular este trabajo

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_C = F(t) \hat{I} \cdot \delta \vec{r}_c \\ &= F(t) \sin(\theta) \delta x + F(t) (l_0 + x) \cos(\theta) \delta \theta \\ &= Q_x \delta x + Q_\theta \delta \theta \\ &\Rightarrow \begin{cases} Q_x = F(t) \sin(\theta) \\ Q_\theta = F(t) (l_0 + x) \cos(\theta) \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 Un procedimiento más automatizable

Referencia

- §6.3.2 Transformation to generalized coordinates

Douglas Cline, *Variational Principles in Classical Mechanics*, 3rd ed., Rochester, NY, University of Rochester River Campus Libraries, 2021

La variación total del trabajo de tales fuerzas es

$$\delta W^{\text{nc}} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j(\delta q_1, \dots, \delta q_n),$$

donde las fuerzas \vec{F}_j están aplicadas en las posiciones \vec{r}_j que son vectores en algún sistema (cartesiano, esférico, etc.), pero que expresamos en función de coordenadas generalizadas, q_i . Por tanto la variación de tales posiciones $\delta \vec{r}_j$ es función de las variaciones de las coordenadas generalizadas δq_i .

Un desplazamiento virtual arbitrario $\delta \vec{r}_j$ se puede relacionar a un desplazamiento virtual de la coordenada generalizadas δq_i a través de las derivadas parciales de las coordenadas vectoriales respecto de las coordenadas generalizadas

$$\delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i.$$

Podría decirse que en \vec{r}_j exploramos cuanto variaría tal posición en función de cada q_i a través de la derivada y luego “avanzamos” en tal sentido con δq_i , y de esta manera efectuamos el desplazamiento virtual, $\delta \vec{r}_j$.

Con esto el trabajo que buscamos calcular se puede expresar como

$$\delta W^{\text{nc}} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i.$$

Al determinar la fuerza generalizada producto de las no conservativas para una de las cordenadas generalizadas, Q_i la segunda sumatoria es irrelevante, y se obtiene

$$Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i,$$

y es posible identificar la fuerza generalizada Q_i como

$$Q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right).$$

De aquí en adelante las ecuaciones de Euler-Lagrange contemplando todas las fuerzas generalizadas pueden escribirse como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} = \sum_k \lambda_k \frac{\partial}{\partial q_i} f_k + \sum_j \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right),$$

que en los casos donde no hay fuerzas de vínculo será

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} = \sum_j \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right),$$

1.4.1 Péndulo: a partir del punto en que se aplica la fuerza

En este caso hay una única fuerza, $\sum_{j=1}^J \vec{F}_j = \vec{F}(t)$, y por tanto a las coordenadas generalizadas x y θ corresponden sendas fuerzas generalizadas, Q_x y Q_θ .

```
[1]: import sympy as sm # importamos funciones de cálculo simbólico
from sympy.physics import mechanics as me # de sympy utilizaremos funciones de
    ↪ mecánica
me.init_vprinting() # notación con punto para la velocidad y punto punto para
    ↪ la aceleración
```

```
[2]: e = me.ReferenceFrame('e', indices=['I', 'J', 'K'], latexs=['\mathbf{\hat{I}}',
    ↪ '\mathbf{\hat{J}}', '\mathbf{\hat{K}}'])
F = sm.Symbol('F')
F_vec = F*e.x
F_vec
```

[2]: $\hat{F}\hat{\mathbf{I}}$

- Se escribe el vector posición del punto en que se aplica $\vec{F}(t)$ en el sistema geométrico de coordenadas, pero en función de las coordenadas generalizadas

```
[3]: l0, zeta = sm.symbols('l_0, theta')
x = me.dynamicsymbols('x')
C_r = (l0 + x)* (sm.sin(zeta)* e.x + sm.cos(zeta)*e.y)
C_r
```

[3]: $(l_0 + x) \sin(\theta) \hat{\mathbf{I}} + (l_0 + x) \cos(\theta) \hat{\mathbf{J}}$

$$\vec{r}_C = (l_0 + x) \hat{\rho} = (l_0 + x) (\sin(\theta) \hat{I} - \cos(\theta) \hat{J})$$

- Se calcula para cada q_i su Q_i

```
[4]: x_Q = sm.Eq(
    sm.symbols('Q_x'),
    F_vec.dot(C_r.diff(x,e))
)
x_Q
```

[4]: $Q_x = F \sin(\theta)$

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_C}{\partial x} = F(t) \hat{I} \cdot (\sin(\theta) \hat{I} - \cos(\theta) \hat{J}) = F(t) \sin(\theta)$$

```
[5]: zeta_Q = sm.Eq(
    sm.symbols('Q_theta'),
    F_vec.dot(C_r.diff(zeta,e))
)
zeta_Q
```

[5]: $Q_\theta = F(l_0 + x) \cos(\theta)$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_C}{\partial \theta} = F(t) \hat{I} \cdot [(l_0 + x) (\cos(\theta) \hat{I} + \sin(\theta) \hat{J})] = F(t)(l_0 + x) \cos(\theta)$$

1.5 Otro ejemplo: barra que pende de un carro

- Barra m_2 , l (centro de masa en G) pende de (A) sujeta a \vec{g} .
- Carro m_1 unido a pared por un resorte de constante elástica k .

```
[6]: # Defino los parámetros físicos del sistema
m1, m2, k, g, l = sm.symbols('m_1, m_2, k, g, l', positive=True)
```

```
[7]: # posiciones de los centros de masa
e = me.ReferenceFrame('e')
x, zeta = me.dynamicsymbols('x, theta')
m1_r = x* e.x
m2_r = m1_r + (l/2)* (sm.sin(zeta)* e.x + sm.cos(zeta)* (-e.y) )
```

Energía cinética La masa de la barra está distribuida, no corresponde calcular su energía cinética como la de una partícula, sino como la de un sólido rígido. Para calcular su correspondiente energía cinética de rotación

$$T_{\text{rotación}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

necesitamos el **momento de inercia** I . Para una barra de longitud l y masa m girando en torno a un eje transversal al longitudinal que pasa por su centro de masa es

$$I_{\text{barra cm}} = \frac{ml^2}{12}.$$

En este problema tal eje está desplazado a un extremo de la barra, a $\frac{l}{2}$ del centro de masa, por lo que debe adicionarse el término que indica el **teorema de Steiner**

$$I_{\text{barra extremo}} = m \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{ml^2}{12} = m \frac{l^2}{3}.$$

```
[8]: barra_I_centro = m2* l**2/ 12 # momento de inercia barra en torno a centro_
    ↪ https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Momentos\_de\_inercia
barra_I_extremo = barra_I_centro + m2* (l/2)**2 # a (l/2) del centro de masa,
    ↪ con teorema de Steiner
```

```

barra_I = sm.Eq(
    sm.Symbol('I_{barra}'),
    barra_I_extremo
)
barra_I

```

[8]:
$$I_{barra} = \frac{l^2 m_2}{3}$$

```

[9]: unMedio = sm.Rational(1, 2)
t = sm.symbols('t') # tiempo
barra_T_rotación = sm.Eq(
    sm.Symbol('T_{rotación}'),
    unMedio* barra_I.rhs* zeta.diff(t)**2
)
barra_T_rotación

```

[9]:
$$T_{rotacin} = \frac{l^2 m_2 \dot{\theta}^2}{6}$$

Por el contrario para el carro no hay inconveniente en considerar la masa concentrada en el centro de masa, ya que no está sometido a rotación. Por lo tanto la energía cinética del carro la tratamos de la forma usual.

```

[10]: def energíaCinéticaTraslación(masa, posición, marcoDeReferencia):
    """
    A partir de la masa y posición de una partícula puntual en un marco de
    ↪referencia devuelve su energía cinética.

    Parámetros
    -----
    masa: (sympy.core.symbol.Symbol)
        De un partícula
    posición: (sympy.physics.vector.vector.Vector)
        del centro de masa de la partícula
    marcoDeReferencia: (sympy.physics.vector.frame.ReferenceFrame)
        En el que se expresa la posición

    Retorna
    -----
    Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
        En su lado derecho explicita la energía cinética del sistema en función
    ↪de coordenadas y velocidades generalizadas y el tiempo.
        Energía cinética,  $T = (m/2) \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$ 
    """
    velocidad = posición.dt(marcoDeReferencia)
    unMedio = sm.Rational(1,2) # Rational: fracción de enteros,
    ↪alternativamente podría haberse usado 0.5
    T_traslación = sm.Eq(

```

```

sm.Symbol('T_{traslación}'),
unMedio* masa* velocidad.dot(velocidad)
).simplify()
return T_traslación

```

```

[11]: carro_T = energíaCinéticaTraslación(m1, m1_r, e)
      barra_T_traslación = energíaCinéticaTraslación(m2, m2_r, e)

```

Y por tanto la energía cinética en este sistema es:

```

[12]: T = sm.Eq(
      sm.Symbol('T'),
      carro_T.rhs + barra_T_rotación.rhs + barra_T_traslación.rhs )
      T

```

[12]:
$$T = \frac{l^2 m_2 \dot{\theta}^2}{6} + \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 (l^2 \dot{\theta}^2 + 4l \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{x} + 4\dot{x}^2)}{8}$$

Energía potencial El resorte puede almacenar energía potencial elástica.

```

[13]: resorte_V = sm.Eq(
      sm.Symbol('V_{elástica}'),
      unMedio* k* x**2
      )
      resorte_V

```

[13]:
$$V_{elstica} = \frac{kx^2}{2}$$

Y si bien la barra es un cuerpo extenso donde su punto de unión con el carro no varía altura en tanto que el extremo lo hace en una forma pronunciada, realizaremos una aproximación para simplificar el problema. A los efectos de la energía potencial gravitatoria se considerará que la barra concentra toda su masa en su centro de masa.

```

[14]: def energíaPotencialGravitatoria(masa, posición, aceleracionGravitatoria):
      """
      Retorna la energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m cuya
      ↪ posición r está dada en un sistema de referencia en el cual g es la
      ↪ aceleración gravitatoria terrestre.

      Parámetros
      -----
      aceleracionGravitatoria: (sympy.physics.vector.vector.Vector)
          vector orientado según el sistema de referencia
      masa: (sympy.core.symbol.Symbol)
          del cuerpo en cuestión
      posición: (sympy.core.symbol.Symbol)
          del centro de masa en un sistema de referencia relacionable con el de
      ↪ aceleracionGravitatoria

```



```

Retorna
-----
Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
    En su lado derecho explicita la energía potencial del sistema en
    función de coordenadas y velocidades generalizadas y el tiempo.
    coordenadaGeneralizada: Símbolo Sympy (sympy.core.symbol.Symbol)
    """
    V = - (m \vec{aceleracionGravitatoria}) \cdot {posición}
    """
V_gravitatoria = sm.Eq(
    sm.Symbol('V_{gravitatoria}'),
    - (masa* aceleracionGravitatoria).dot(posición)
).simplify()
return V_gravitatoria

```

```

[15]: aceleracionGravitatoria = g* (- e.y)
      barra_V = energíaPotencialGravitatoria(m2, m2_r, aceleracionGravitatoria)
      barra_V

```

[15]:
$$V_{gravitatoria} = -\frac{glm_2 \cos(\theta)}{2}$$

Así la energía potencial en el sistema es:

```

[16]: # Energía potencial
      V = sm.Eq(
          sm.Symbol('V'),
          resorte_V.rhs + barra_V.rhs
      )
      V

```

[16]:
$$V = -\frac{glm_2 \cos(\theta)}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

Dos coordenadas generalizadas, dos ecuaciones de Euler-Lagrange

```

[17]: def eulerLagrange(T, V, coordenadaGeneralizada):
      """
      Esta función devuelve la ecuación de Euler-Lagrange para una coordenada
      generalizada a partir de las energías del sistema.

      Parámetros
      -----
      T : Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
          En su lado derecho explicita la energía cinética del sistema en función
          de coordenadas y velocidades generalizadas y el tiempo.
      V : Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
          En su lado derecho explicita la energía potencial del sistema en
          función de coordenadas y velocidades generalizadas y el tiempo.
      coordenadaGeneralizada: Símbolo Sympy (sympy.core.symbol.Symbol)
          Para la que quiere obtenerse la ecuación de Euler-Lagrange
      """

```

```

Retorna
-----
Igualdad Sympy (sympy.core.relational.Equality)
Ecuación de Euler-Lagrange homogénea para la coordenadaGeneralizada
'''
lagrangiano = (T.rhs - V.rhs).expand()
t = sm.Symbol('t') # como se deriva respecto al tiempo con la función diff
↪se declara t como símbolo
return sm.Eq(
    lagrangiano.diff(coordenadaGeneralizada.diff(t)).diff(t)
    - lagrangiano.diff(coordenadaGeneralizada)
    , 0
).simplify()

```

Llamaremos de ahora en más a estas ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones de **Euler-Lagrange homogéneas** para diferenciarlas de las ecuaciones de Euler-Lagrange que contemplen fuerzas no conservativas.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

```

[18]: x_EL_homogénea = eulerLagrange(T, V, x)
      x_EL_homogénea

```

[18]:
$$kx - \frac{lm_2 \sin(\theta) \dot{\theta}^2}{2} + \frac{lm_2 \cos(\theta) \ddot{\theta}}{2} + m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

```

[19]: zeta_EL_homogénea = eulerLagrange(T, V, zeta)
      zeta_EL_homogénea

```

[19]:
$$\frac{lm_2 (6g \sin(\theta) + 7l\ddot{\theta} + 6 \cos(\theta) \ddot{x})}{12} = 0$$

1.5.1 Adicionando las fuerzas no conservativas

Al sistema anterior se aplican dos fuerzas no conservativas: - una motriz externa $\vec{F}_{\text{motriz}} = F(t)\hat{x}$ - una de amortiguación proporcional a la velocidad $\vec{F}_{\text{amortiguación}} = -b\dot{x}\hat{x}$

ambas actuando sobre el carro, por lo que consideramos que se aplican en la posición puntal \vec{r}_A .

Se puede analizar la variación de trabajos virtuales

$$\begin{aligned}
\delta W^{\text{nc}} &= \sum_j \vec{F}_j^{\text{nc}} \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_i Q_i \delta q_i \\
&= [\vec{F}_{\text{amortiguación}} + \vec{F}_{\text{motriz}}] \delta x + [0] \delta \theta \\
&= [-b\dot{x} + F(t)] \delta x + [0] \delta \theta \\
&\Rightarrow Q_x = -b\dot{x} + F(t) \quad Q_\theta = 0
\end{aligned}$$

Pero puede ser más sencillo utilizar la expresión

$$Q_i = \sum_{j=1}^J \vec{F}_j \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right),$$

que requiere explicitar el vector posición \vec{r}_j donde se aplica $\sum_{j=1}^J \vec{F}(t)$

$$\vec{r}_A = x\hat{x}$$

entonces

$$\frac{\partial \vec{r}_A}{\partial x} = \hat{x} \quad \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \theta} = 0,$$

y por tanto

```
[20]: b = sm.Symbol('b', positive= True)
      F = sm.Function('F')(t)
      fuerzas_m1_r = (-b* x.diff(t)+ F)* e.x # sumatoria de fuerzas sobre m1_r
      ↪ (vector)
      x_Q = fuerzas_m1_r.dot(m1_r.diff(x, e))
      x_Q
```

[20]: $-b\dot{x} + F$

$$Q_x = [(-b\dot{x} + F(t))\hat{x}] \cdot \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial x} = [(-b\dot{x} + F(t))\hat{x}] \cdot \hat{x} = -b\dot{x} + F(t)$$

```
[21]: zeta_Q = fuerzas_m1_r.dot(m1_r.diff(zeta, e))
      zeta_Q
```

[21]: 0

$$Q_\theta = [(-b\dot{x} + F(t))\hat{x}] \cdot \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \theta} = 0$$

esta última es 0 porque \vec{r}_A no tiene dependencia con θ .

Se aprovechará la función `eulerLagrange` para generar los términos de la ecuación homogénea que ahora se ubicarán del lado izquierdo de la nueva igualdad. En su lado derecho ubicaremos la suma de fuerzas generalizadas

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -b\dot{x} + F(t).$$

```
[22]: x_EL = sm.Eq(
      x_EL_homogénea.lhs,
      x_Q
    )
      x_EL
```

$$kx - \frac{lm_2 \sin(\theta) \dot{\theta}^2}{2} + \frac{lm_2 \cos(\theta) \ddot{\theta}}{2} + m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} = -b\dot{x} + F$$

Por otra parte, en la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada θ no hay modificaciones

```
[23]: zeta_EL = sm.Eq(
      zeta_EL_homogénea.lhs,
      zeta_Q
    )
      zeta_EL
```

$$\frac{lm_2 (6g \sin(\theta) + 7l\ddot{\theta} + 6 \cos(\theta) \ddot{x})}{12} = 0$$

Es importante recordar que ambas ecuaciones conforman un sistema acoplado, y, por tanto, se requiere de ambas para obtener la dinámica del dispositivo.

En particular hay que tener en cuenta que $F = F(t)$ por lo que habrá que desarrollar esta en una expresión compatible con las herramientas de resolución que se utilicen. Hacia el final del curso veremos la aplicación del desarrollo de Fourier para este tipo de problemas.

1.6 Resumen: las fuerzas en el enfoque Lagrangiano

Si la fuerza que actúa sobre los componentes de un sistema es - causada por algún **campo** (eléctrico, gravitatorio), se las contempla calculando el **potencial** usando que $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, - si es de otro origen se la expresa como una **no conservativa**, se las escribe como fuerzas generalizadas Q_i .

Hay otras fuerzas, que son las que mantienen una **ligadura**. Por ejemplo las que haga una barra rígida manteniendo una cierta distancia, o la que haga una superficie sobre la que se asiente un componente. Estas no hacen trabajo, pues los posibles δr de los componentes del sistema serán siempre perpendiculares a estas (de lo contrario no se cumple el vínculo). Si no necesitamos su magnitud no se incluyen en el cálculo, pero si le necesitamos, puede obtenerse con la técnica de **multiplicadores de Lagrange**.

1.6.1 Euler-Lagrange con fuerzas de ligadura y no conservativas

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{L} = \sum_{k=1}^K \lambda_k(t) \frac{\partial}{\partial q_i} f_k + \sum_{j=1}^J \vec{F}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \quad \left\{ \begin{array}{ll} i = 1, 2, \dots, n & \text{coordenadas generalizadas} \\ j = 1, 2, \dots, J & \text{fuerzas no conservativas} \\ k = 1, 2, \dots, K & \text{ligaduras} \end{array} \right.$$

donde

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k(t) \frac{\partial}{\partial q_i} f_k,$$

denota las fuerzas generalizadas producto de las K funciones de ligadura, f_k , y

$$\sum_{j=1}^J \vec{F}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right),$$

denota las fuerzas generalizada producto de la acción de las J fuerzas no conservativas, $\vec{F}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, que pueden depender de la posición y/o velocidad vectorial así como explícitamente del tiempo.

Esta formulación permite que utilicemos la función **eulerLagrange** que hasta aquí utilizamos para generar la ecuación homogénea, es decir igualada a un 0 en el lado derecho de la igualdad, **rhs**, pero en su lugar escribir la suma de las fuerzas generalizadas producto de las ligaduras y las no conservativas.