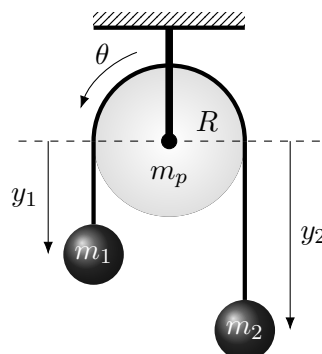


## LIGADURAS

Los problemas marcados con (\*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

## 1. Máquina de Atwood simple

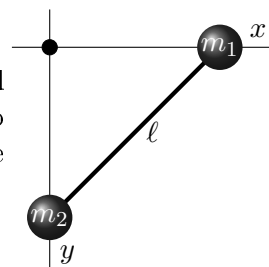
Una cuerda de longitud  $\ell$  pasa sobre una polea de radio  $R_p$  y masa  $m_p$ . Calcule la aceleración de las pesas que cuelgan de sus extremos.



- La cuerda es inextensible, por lo que establece una relación entre  $y_1$  y  $y_2$ . Escriba esta función de vínculo.
- Si la cuerda desliza sin rozamiento sobre la polea, esta última no se mueve. Calcule la ecuación de Euler-Lagrange para  $y_1$  usando el vínculo del punto anterior y escriba la aceleración de las pesas.
- Lo usual es que la cuerda no deslice y gire solidaria a la polea. Esto vincula  $\theta$  al desplazamiento de la cuerda. Con tal vínculo exprese en función de  $\dot{y}_1$  la energía cinética de rotación de la polea, que modelada como un cilindro homogéneo que en torno a su eje presenta un momento de inercia  $(m/2)R^2$ .
- Use la ecuación de Euler-Lagrange para  $y_1$  para escribir la aceleración de las pesas en este caso.

## 2. Péndulo de pesas deslizantes y acopladas

Dos pesas de masa  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por una barra rígida inextensible de longitud  $\ell$  y masa despreciable frente a las anteriores. La de  $m_1$  puede deslizarse sin rozamiento sobre un eje horizontal y la de  $m_2$  en uno vertical. La barra establece un vínculo entre las respectivas coordenadas que definen sus posiciones,  $x$  e  $y$ .

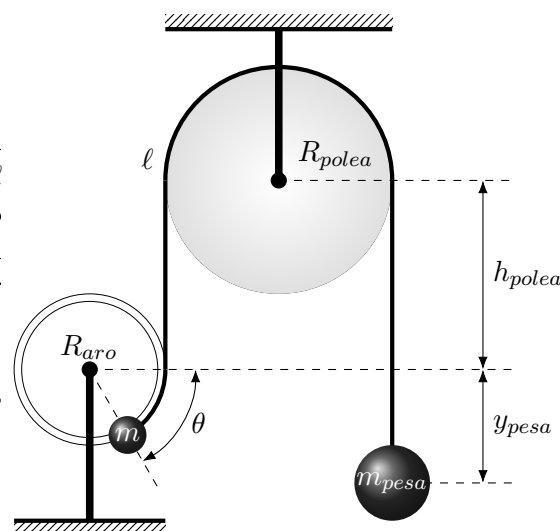


- Use la función de vínculo para expresar las posiciones solo en función de  $y$ .
- Calcule la aceleración de la pesa de  $m_2$ . Resultado:  $\ddot{y} = \frac{-\ell^2 m_1 y \dot{y}^2 + g m_2 (\ell^2 - y^2)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 - 2\ell^2 m_2 y^2 - m_1 y^4 + m_2 y^4}$

## 3. Aro y polea

Una pesa de masa  $m_{\text{pesa}}$  pende de sección de cuerda que sobresale a la derecha de una polea de radio  $R_{\text{polea}}$  y masa  $m_{\text{polea}}$ . Tal cuerda, que gira solidaria con la polea, tiene una longitud total  $\ell$  y su masa es despreciable. Su otro extremo se ata con un nudo de masa  $m$  a un aro de masa  $m_{\text{aro}}$ , enrollándose en un arco  $\theta$  en torno a este. El centro de la polea está a una altura  $h_{\text{polea}}$  por sobre el del aro de radio  $R_{\text{aro}}$  que como puede rotar libremente presenta un momento de inercia  $m_{\text{aro}} R_{\text{aro}}^2$ .

Quedan el apartamiento con la horizontal de la pesa,  $y_{\text{pesa}}$ , y la extensión del arco enrollado,  $\theta$ , como las coordenadas generalizadas que estarán ligadas por la cuerda de longitud  $\ell$ .

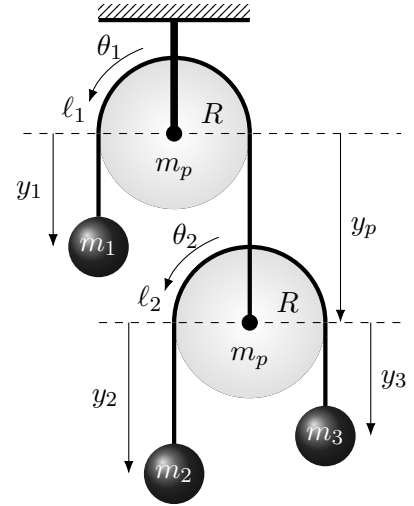


- Escriba la posición de las partículas con masa en función de las coordenadas generalizadas variables que un sistema de referencia con origen en el centro del aro.
- Describa la función de ligadura y utilícela para expresar las posiciones en función de  $\theta$ . Verifique su solución revisando que una variación de  $\theta$  “hacia su cero” implique que la pesa “baja”.
- Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica sin olvidar los momentos involucrados.

Resultado:  $R_{\text{aro}}^2 m \ddot{\theta} + R_{\text{aro}}^2 m_{\text{aro}} \ddot{\theta} + \frac{R_{\text{aro}}^2 m_{\text{polea}} \ddot{\theta}}{2} - R_{\text{aro}} g m \cos(\theta) + R_{\text{polea}}^2 m_{\text{pesa}} \ddot{\theta} + R_{\text{polea}} g m_{\text{pesa}} = 0$

4. Máquina de Atwood compuesta [Marion (english) ex. 7.8]

- Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura:  $y_i$  con  $i = 1, 2, 3, p$ .
- Modele las ligaduras que proveen las dos cuerdas en sendas funciones.
- Use las funciones de ligadura para expresar todas las posiciones en función de  $y_1$  e  $y_2$ .
- Las cuerdas no deslizan sobre las poleas, por lo que la longitud de cuerda que se desplaza en una polea es igual a la que se desplaza en la otra. Este es otro vínculo que debe modelar la relación entre las  $y_i$  y las  $\theta_i$ .



- Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del  $\dot{y}_i$  correspondiente.

- Obtenga las dos ecuaciones de Euler-Lagrange. Resultados:

$$-gm_1 + gm_2 + gm_3 + gm_p + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{3m_p\ddot{y}_1}{2} = 0$$

$$-gm_2 + gm_3 - m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{m_p\ddot{y}_2}{2} = 0$$

- De este sistema de ecuaciones, despeje las aceleraciones generalizadas. Resultados:

$$\ddot{y}_1 = \frac{2g(2m_1m_2 + 2m_1m_3 + m_1m_p - 8m_2m_3 - 3m_2m_p - 3m_3m_p - m_p^2)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{2g(4m_1 + m_p)(m_2 - m_3)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

- Expresé las aceleraciones de las tres pesas. Resultados:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{y}_1(-\hat{e}_y)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{2g(2m_1m_2 - 6m_1m_3 - m_1m_p + 8m_2m_3 + 4m_2m_p + 2m_3m_p + m_p^2)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}\hat{e}_y$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -\frac{2g(-6m_1m_2 + 2m_1m_3 - m_1m_p + 8m_2m_3 + 2m_2m_p + 4m_3m_p + m_p^2)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}\hat{e}_y$$