

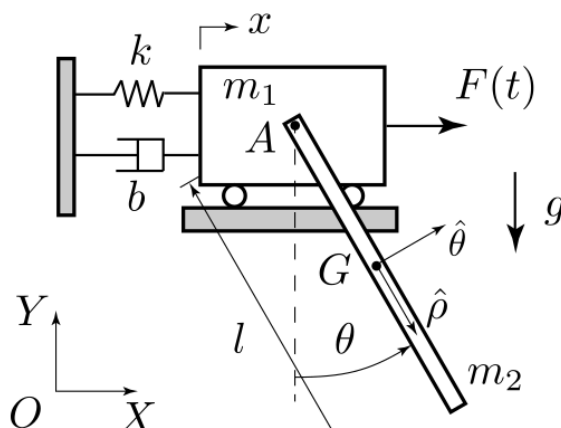
## FUERZAS EXTERNAS EN EL ENFOQUE LAGRANGIANO

## 1. Barra que pende de un carro

Obtenga las ecuaciones que describen la dinámica del sistema.

El momento de inercia para una barra de masa  $m$  y longitud  $l$  para una rotación desde uno de sus extremos es  $\frac{m}{12}l^2$ .

- Las fuerzas no conservativas que actúan sobre el sistema son el forzado externo  $\vec{F}(t)$ , y la que hace ejercer amortiguador de constante  $b$  en función de la velocidad del carro,  $-b\dot{x}\hat{x}$ . Estas deben descomponerse en fuerzas generalizadas, pero primero obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange que corresponderían a la dinámica si estas fuerzas no existieran.
- Ahora sí, descomponga en fuerzas generalizadas las no conservativas que actúan sobre el sistema.
- Calcule las ecuaciones de Euler-Lagrange con las fuerzas generalizadas.

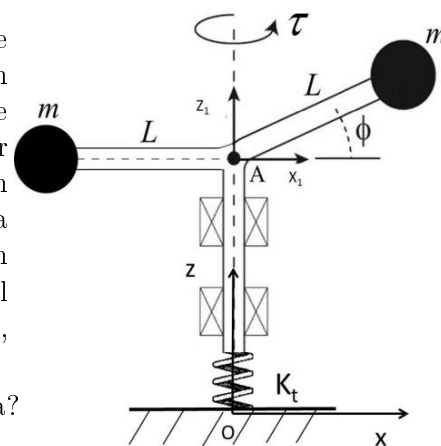


## 2. Péndulo de torsión desbalanceado

Dos pesos de masa idéntica  $m$  están unidos al extremo de brazos de masa despreciable. Uno de los brazos describe una inclinación fija con la horizontal de  $\phi$ . Descartamos la fricción con los rodamientos que mantiene vertical el eje de donde parten los brazos. Este podría rotar libremente a cualquier ángulo  $\theta$  si no fuera por un resorte de torsión de constante elástica  $K_t$  que opone un torque buscando alinear la pieza con el plano x-z cada vez que  $\theta \neq 0$ . Por tanto, se lo considera en la ecuación de Euler-Lagrange como una fuente de energía potencial elástica. Pero, adicionalmente, se ejerce sobre el sistema otro torque, que es externo y es además variable en el tiempo:  $\vec{\tau} = \tau(t)\hat{z}$ .

Pregunta conceptual: ¿Cuáles es la unidad de la fuerza generalizada?

- N
- $\frac{N}{m}$
- N m
- Otra



Despeje la aceleración angular de la ecuación de Euler-Lagrange. Resultado:  $\ddot{\theta} = \frac{-K_T\theta + \tau}{L^2m(\cos^2(\phi) + 1)}$

## 3. Barriles soldados

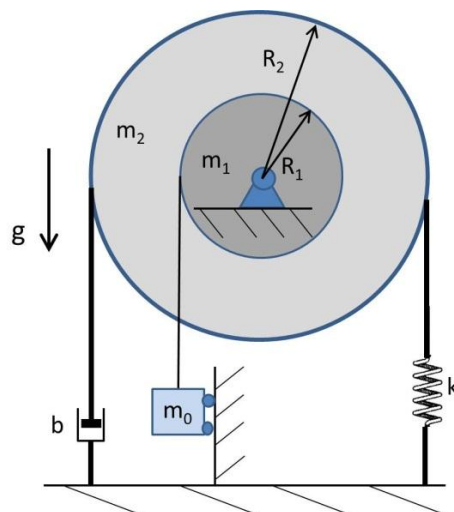
Dos barriles cilíndricos homogéneos de respectivas masas y radios  $m_1, m_2, R_1$  y  $R_2$  están soldados. Este armado puede rotar en torno a su eje común que no le presenta fricción. Una cuerda de masa despreciable envuelve al cilindro externo y sus extremos conectan un resorte de constante elástica  $k$  y un amortiguador. Tal amortiguador ejerce una fuerza de resistencia al movimiento lineal con la velocidad,

$$\vec{F}_{\text{amortiguador}} = -b\dot{r}\hat{r}.$$

Una correa de masa despreciable envuelve al cilindro de menor radio y de ella pende vertical un bloque de masa  $m_0$ .

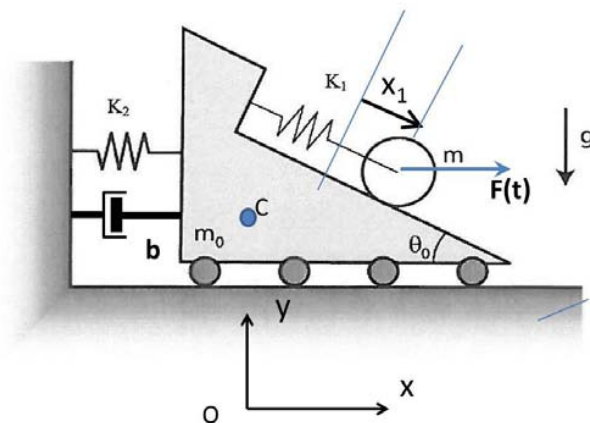
Despeje la aceleración angular de la ecuación de la dinámica de Euler-

Lagrange. Resultado:  $\ddot{\theta} = \frac{2(R_1gm_0 - R_2^2b\dot{\theta} - R_2^2k\theta)}{2R_1^2m_0 + R_1^2m_1 + R_2^2m_2}$



#### 4. Plano inclinado oscilante

Sobre la superficie inclinada en  $\theta_0$  del carro de masa  $m_0$  rueda sin deslizar un disco de radio  $R$  y masa  $m$ . Este no se sale de la superficie a pesar de que al centro del mismo se aplica una fuerza  $\vec{F} = F(t)\hat{x}$  gracias a un resorte de constante elástica  $K_1$  que une este centro con el carro. Limita el alcance de este un resorte de constante elástica  $K_2$  fijado a la pared y un amortiguador proporcional a la velocidad de constante proporcional  $b$ . Ambos resortes tienen originalmente sus longitudes naturales,  $l_{10}$  y  $l_{20}$ . Se descarta la fricción del carro con el suelo. Todo el sistema está sometido a la aceleración gravitatoria  $\vec{g} = -g\hat{y}$ .



Pregunta conceptual: ¿Qué es la fuerza generalizada asociada al desplazamiento virtual  $\delta x$  debida a  $\vec{F}$ ?

- a)  $F(t) \cos(\theta)$       b)  $F(t)$       c)  $F(t)\delta x$       d) 0

Obtenga la dinámica a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, esto es, haga explícita las aceleraciones de ambos cuerpos. Resultado:

$$\ddot{x} = \frac{2K_1 X_1 \cos(\theta_0) - 3K_2 x - 3b\dot{x} - gm \sin(2\theta_0) - F \cos(2\theta_0) + 2F}{2m \sin^2(\theta_0) + m + 3m_0}$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{2(-K_1 m X_1 - K_1 m_0 X_1 + K_2 m x \cos(\theta_0) + b m \cos(\theta_0) \dot{x} + g m^2 \sin(\theta_0) + g m m_0 \sin(\theta_0) + m_0 F \cos(\theta_0))}{m(2m \sin^2(\theta_0) + m + 3m_0)}$$