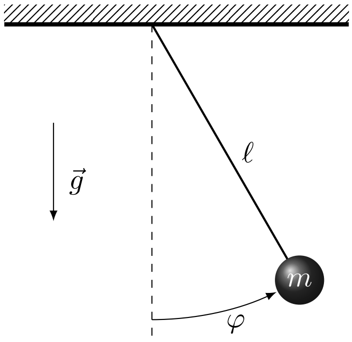
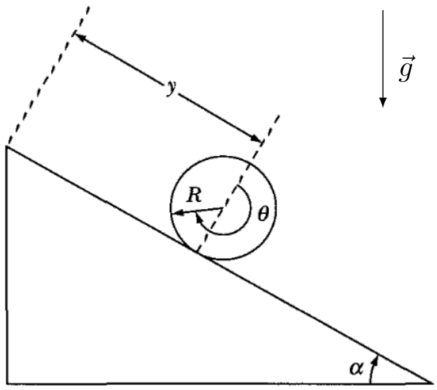
Fuerzas de ligadura | Multiplicadores de Lagrange

1. **Péndulo rígido ideal**
   Calcule la tensión de la cuerda con el método de multiplicadores de Lagrange. La restricción es que la pesa se mantiene siempre en $\vec{r} = \ell\hat{\rho}$, ergo la función que expresa esto es $f(\rho) = \rho - \ell = 0$.



2. **Cilindro que rueda por un plano inclinado** [Marion (e) ex. 7.5]

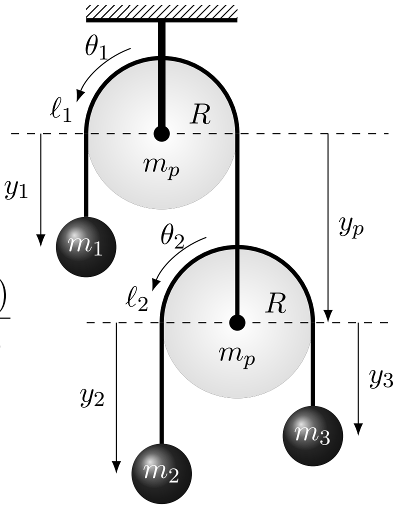


   a) Encuentre las ecuaciones de movimiento,

   b) la aceleración angular,

   c) y la fuerzas de ligadura.

3. **Doble máquina de Atwood** [Marion (e) ej. 7.8 y 7-37]
   Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento y las tensiones de las cuerdas.



   a) Verifique que obtiene las mismas aceleraciones generalizadas que se habían obtenido sin usar multiplicadores de Lagrange. Resultado:

$$\ddot{y}_1 = \frac{2g\left(2m_1m_2 + 2m_1m_3 + m_1m_p - 8m_2m_3 - 3m_2m_p - 3m_3m_p - m_p^2\right)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

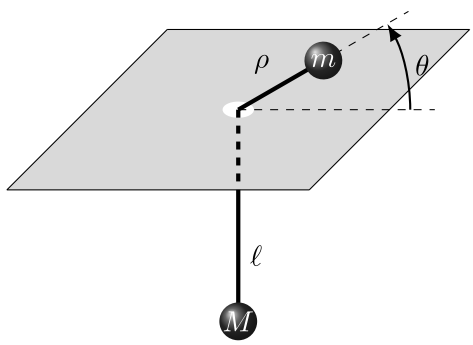
$$\ddot{y}_2 = \frac{2g\left(4m_1 + m_p\right)\left(m_2 - m_3\right)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

   b) Obtenga las tensiones de ambas cuerdas. Resultado:

$$Q_1 = \frac{g\left(-32m_1m_2m_3 - 12m_1m_2m_p - 12m_1m_3m_p - 4m_1m_p^2 - 8m_2m_3m_p - 3m_2m_p^2 - 3m_3m_p^2 - m_p^3\right)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

$$Q_2 = \frac{gm_3\left(-16m_1m_2 - 4m_1m_p - 4m_2m_p - m_p^2\right)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

4. **Pesos enlazados por una cuerda** [Taylor 7.50]
   Una partícula de masa m, situada sobre una mesa horizontal sin fricción, está unida mediante una cuerda ideal de longitud ℓ a otra partícula de masa M. La cuerda pasa por un orificio practicado en la mesa, el cual no presenta rozamiento. La segunda pesa pende vertical con una distancia a la mesa $y = \ell - \rho$, función de la distancia de la primera al hueco, ρ.



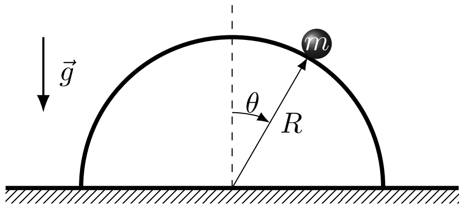
   a) Asumiendo que θ no es necesariamente constante obtenga las ecuaciones de Lagrange para ρ e y. Resultado:

$$M\left(-g + \ddot{y}\right) = \lambda_1 \qquad m\left(-\rho\dot{\theta}^2 + \ddot{\rho}\right) = \lambda_1$$

   b) Resuelva el sistema para ρ, y y el multiplicador de Lagrange λ_1 encontrando las fuerzas de tensión sobre ambas masas.

   Resultado: $Q_\rho = -\dfrac{Mm\left(g + \rho\dot{\theta}^2\right)}{M + m}$

5. **Partícula deslizando sobre una semiesfera** [Marion (e) ex. 7.10]
La partícula de masa m, considerada puntual, desliza sobre una semiesfera de radio R sin fricción.



   a) Encuentre la fuerza de la ligadura.
   Resultado: $Q_\rho = m\left(-R\dot{\theta}^2 + g\cos(\theta)\right)$

   b) Calcule el ángulo en que la partícula se despega de la semiesfera.
   Resultado: $\theta^{\text{despegue}} \approx 48{,}19°$

Para llegar al ángulo de despegue debe resolver la ecuación diferencial a la que arribará tras resolver la problemática de las fuerzas de ligadura, que será $\ddot{\theta} = \frac{g\sin(\theta)}{R}$. Esta expresión es integrable para el recorrido que hace la partícula. Para facilitar esto se intercala por regla de la cadena derivaciones en función de θ en la definición de la aceleración.

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

Como la partícula parte de $\theta(t=0) = 0$ con $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} &= \frac{g}{R}\sin(\theta) \\
\dot{\theta}d\dot{\theta} &= \frac{g}{R}\sin(\theta)d\theta \\
\int_0^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} \dot{\theta}d\dot{\theta} &= \frac{g}{R}\int_0^{\theta_{\text{despegue}}} \sin\theta d\theta \\
\left.\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right|_0^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} &= \frac{g}{R}(-\cos\theta)\Big|_0^{\theta_{\text{despegue}}} \\
\frac{\dot{\theta}^2_{\text{despegue}}}{2} &= \frac{g}{R}(-\cos(\theta_{\text{despegue}}) + 1)
\end{aligned}$$

Con esto hay que substituir $\dot{\theta}^2$ en una expresión de F_ρ^{ligadura}, que debe ser nula en el momento de despegue.

