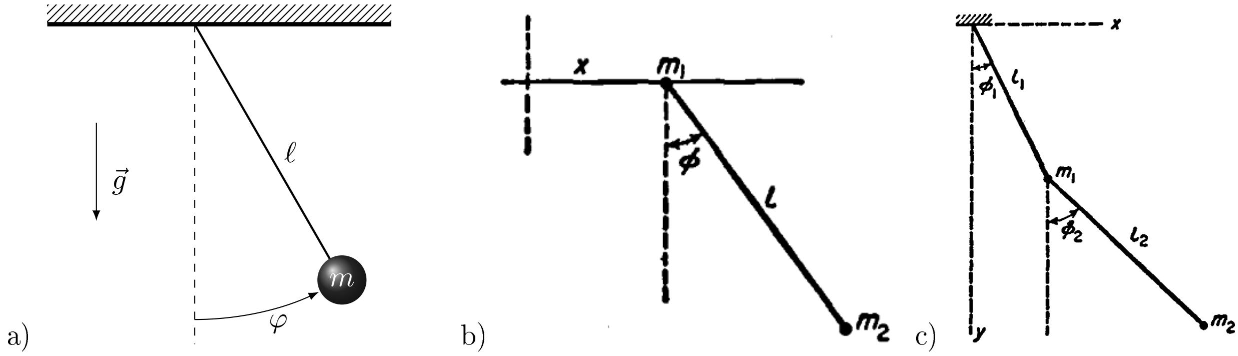
Ecuación de Euler-Lagrange

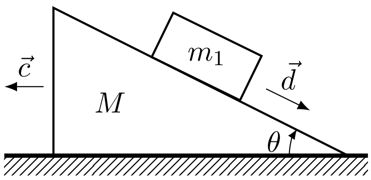
Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

1. **Péndulo rígido ideal** [Marion (english) ex. 7.2]
   Péndulo de punto de suspensión libre y péndulo doble [Landau §5 ejs. 1 y 2]
   Aplique la ecuación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de la dinámica de los sistemas:



   Resultado 1c:
   $$\ell_1\left(\ell_1 m_1\ddot{\varphi}_1 + \ell_1 m_2\ddot{\varphi}_1 + \ell_2 m_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \ell_2 m_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + g m_1\sin(\varphi_1) + g m_2\sin(\varphi_1)\right) = 0$$
   $$\ell_2 m_2\left(\ell_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 - \ell_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot{\varphi}_1 - \ell_2\ddot{\varphi}_2 - g\sin(\varphi_2)\right) = 0$$

2. **Plano inclinado móvil**

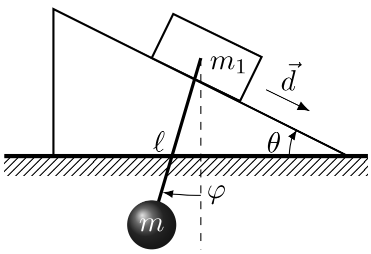


   Un bloque de masa m_1 está originalmente inmóvil sobre un plano de inclinación θ que no le presenta fricción y de masa M. Este último puede deslizar sobre la superficie horizontal que tampoco le presenta fricción alguna. Denomine con c la coordenada para la posición de este último, en la dirección y sentido indicado por la flecha; y con d la del bloque superior en el sentido descendente.

   a) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para c y aquella para d.
   Resultado: $M\ddot{c} - m_1\cos(\theta)\ddot{d} + m_1\ddot{c} = 0$ $\quad m_1\left(g\sin(\theta) + \cos(\theta)\ddot{c} - \ddot{d}\right) = 0$

   Habrá notado que no podría responder a una pregunta como "De soltar el bloque más pequeño, ¿qué aceleración tiene el plano?", pues obtuvo un sistema de dos ecuaciones diferenciales ligadas. En la clase siguiente aprenderá a resolver el sistema usando SymPy.

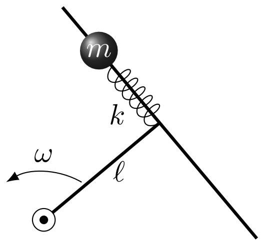
3. **Soporte de péndulo sobre un plano inclinado**



   Un soporte de masa m_1 desliza por un plano inclinado inmóvil con un ángulo θ sin que este le presente fricción. Un péndulo de longitud ℓ y masa m cuelga del soporte describiendo un ángulo φ con la vertical. Es soporte se extiende a un costado del plano permitiendo al péndulo colgar libremente sin interferencia de este último.

   a) Encuentre las ecuaciones para la dinámica.
   Resultado: $\ell m\left(\ell\ddot{\varphi} + g\sin(\varphi) + \cos(\theta+\varphi)\ddot{d}\right) = 0$
   $$\ell m\sin(\theta+\varphi)\dot{\varphi}^2 - \ell m\cos(\theta+\varphi)\ddot{\varphi} + g m\sin(\theta) + g m_1\sin(\theta) - m\ddot{d} - m_1\ddot{d} = 0$$

4. **Resorte enrollado en un brazo de una "T"**



   Una pieza rígida en forma de T consiste en una larga varilla soldada perpendicularmente a otra de longitud ℓ que pivotea en torno a un origen. La T gira sobre un plano horizontal con velocidad angular constante ω. Una partícula de masa m muy superior a la de la T, por la que esta última es despreciable, puede desplazarse libremente en la primera varilla y está conectada a la intersección de ambas por un resorte de constante elástica k y longitud natural nula.

a) Encuentre una ecuación para la dinámica en función de d, la distancia de la partícula a la intersección. Resultado: $-\omega^2 md + kd + m\ddot{d} = 0$

b) (*) Existe un "valor especial" para ω. ¿Cuál sería y que implicaría para $d(t)$?

Actualizado al 1 de mayo de 2025