FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# ALGEBRA Y GEOMETRÍA I

# Recta en el plano
# Inecuaciones lineales en dos variables

**Ricardo Sagristá**
**Patricia Có**
**Mónica del Sastre**
**Ma. Inés González**
**Raúl Katz**
**Erica Panella**

# -2011-

# La recta en el plano

## 1- Introducción

Fijado un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano, a cada punto ***P*** le corresponde un único par ordenado (***x,y***) de números reales y recíprocamente a cada par ordenado (***x,y***) le corresponde un único punto ***P*** del plano. Se establece de este modo una correspondencia biunívoca entre puntos del plano (elementos geométricos) y pares ordenados de números reales (elementos algebraicos).

Decimos que:
***(x,y)*** son las coordenadas del punto ***P***
***x*** es la abscisa del punto ***P***
***y*** es la ordenada del punto ***P***.

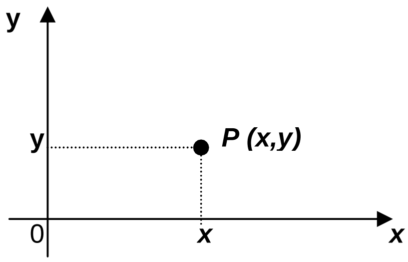


Fig. 1

### 2- Lugar geométrico

Se llama ***lugar geométrico*** (en el plano o el espacio) a un conjunto de puntos (del plano o del espacio) que cumplen con una o varias propiedades geométricas.

Son ejemplos de lugares geométricos:

- El conjunto de todos los puntos ***P*** del plano (espacio) que equidistan de dos puntos fijos ***R*** y ***Q.***
- El conjunto de todos los puntos del plano (espacio) que equidistan de un punto fijo ***C***.

¿Qué representa en el plano cada uno de los lugares geométricos?. Dibujar algunos puntos de cada conjunto puede ayudar a encontrar la respuesta.

#### 2.1- Ecuación de un lugar geométrico del plano

Si (***x, y***) son las coordenadas de un punto cualquiera de un lugar geométrico del plano, la propiedad o las propiedades que definen dicho lugar se traducen por lo general a una ecuación en las variables ***x*** e **y** que llamamos **ecuación cartesiana del lugar geométrico** dado**.**

**Ejemplo 1:** Hallemos la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos $Q(3,2)$ y $R(-1,4)$

$$A=\left\{ P \;/\; \left|\overline{QP}\right| = \left|\overline{RP}\right| \right\} \quad (1)$$

Sean ***(x, y)*** las coordenadas de un punto ***P*** perteneciente a *A.*

Entonces $\overline{QP}=(x-3,y-2)$ y $\overline{RP}=(x+1,y-4)$**.**

$$P\in A \Leftrightarrow \left|\overline{QP}\right| = \left|\overline{RP}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2 = (x+1)^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+4 = x^2+2x+1+y^2-8y+16$$

$$\Leftrightarrow -8x + 4y - 4 = 0$$

o equivalentemente $\boxed{2x - y + 1 = 0}$ (2)

Hemos probado que todo punto ***P*** de coordenadas ***(x, y)*** que pertenece a *A* verifica la ecuación $2x - y + 1 = 0$ y recíprocamente todo punto ***P*** cuyas coordenadas satisfacen $2x - y + 1 = 0$, pertenece al conjunto *A.*

En este caso decimos que $2x - y + 1 = 0$ es la ecuación (cartesiana) del lugar geométrico *A*.

La ecuación (2) corresponde a la recta mediatriz del segmento determinado por los puntos P y Q.

**La ecuación (cartesiana) de un lugar geométrico en el plano es una ecuación en las variables *x*** e ***y***, tal que todo punto ***P(x,y)*** del lugar, la verifica ó satisface y, recíprocamente todo punto del plano cuyas coordenadas verifican la ecuación pertenece al lugar.

**Actividad 1:**

a) ¿Pertenece el punto ***P*** de coordenadas (10,10) al lugar geométrico de ecuación (2)?. ¿Por qué?

b) Encuentre las coordenadas de cinco puntos que pertenecen al lugar geométrico.

**Ejemplo 2:** Encontremos la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a 3 unidades del origen de coordenadas.

$$B = \{P / P \text{ se encuentra a } 3\, unidades \text{ del origen de coordenadas } \}$$

Si notamos con ***O*** al origen de coordenadas y con ***P(x , y)*** a un punto arbitrario, entonces:

$$P \in B \Leftrightarrow \left|\overline{OP}\right| = 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 9} \quad (3)$$

La ecuación (3) corresponde al lugar geométrico planteado y representa una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio $r = 3$.

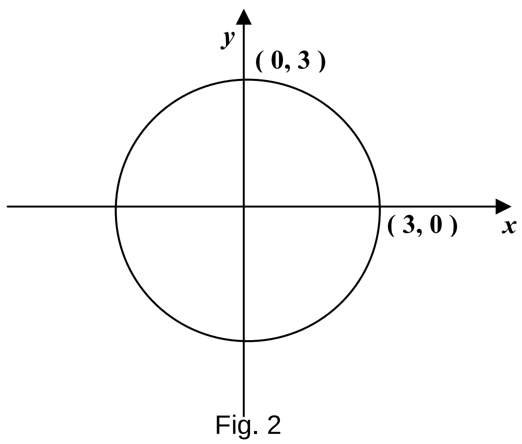



Fig. 2

Hemos probado que todo punto ***P*** de coordenadas ***(x, y)*** que pertenece a *B* verifica la ecuación $x^2+y^2=9$, y recíprocamente todo punto ***P*** cuyas coordenadas satisfacen $x^2+y^2=9$ pertenece al conjunto *B*.

Luego: $$B=\left\{P(x,y)\,/\,x^2+y^2=3^2\right\}$$

**Actividad 2**

¿Cuál es la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que pertenecen a la recta bisectriz :

a) del primer y tercer cuadrante?

b) del segundo y cuarto cuadrante?

## 3. La recta como un lugar geométrico:

Si $P_1$ es un punto fijo del plano y $\bar{u}$ un vector no nulo, el lugar geométrico dado por:

$$r=\left\{P:\overline{P_1P}\ //\ \bar{u}\ \right\}\cup\left\{P_1\right\}$$

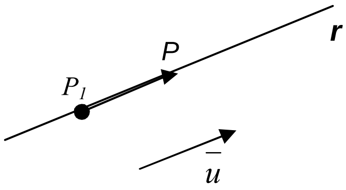



Fig. 3

es el conjunto de todos los puntos del plano que pertenecen a la recta que contiene a $P_1$ y es paralela a $\bar{u}$ .

### 3.1 Ecuación vectorial de la recta en el plano

Fijado un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano con la base $\left\{\bar{i},\ \bar{j}\ \right\}$ asociada, y dados un punto $P_1(x_1,y_1)$ y un vector $\bar{u}=(u_1,u_2)\neq\bar{0}$, existe una única recta ***r*** que contiene a $P_1$ y tiene la dirección de $\bar{u}$ .

$P\in \boldsymbol{r} \Leftrightarrow\ \overline{P_1P}\ //\ \bar{u}$ o $P\equiv P_1\ \Leftrightarrow\ \overline{P_1P}=t\ \bar{u}$ para un cierto $t\in\Re$ .

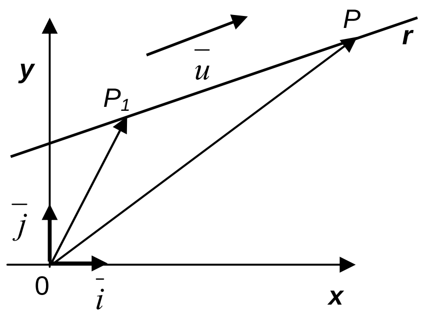



Fig.

$$\boxed{r=\left\{P(x,y)\,/\,\overline{P_1P}=t\,\bar{u}\ ;\ \mathrm{t}\in\Re\right\}}$$

La ecuación: $\boxed{\overline{P_1P}=t\,\bar{u}\ ;\ \mathrm{t}\in\Re}$ recibe el nombre de ***Ecuación vectorial de la recta.***

Como $\overline{OP}=\overline{OP_1}+\overline{P_1P}$, ó $\overline{P_1P}=\overline{OP}-\overline{OP_1}$, dicha ecuación se puede escribir: $\overline{OP}-\overline{OP_1}=t\,\bar{u}$ ,

o bien:

$$\boxed{\overline{OP}=\overline{OP_1}+t\,\bar{u}\ ,\ t\in\Re}\quad (4)$$

Para describir la recta usando esta ecuación **es necesario tener como datos un punto *P*$_1$ de la recta y un vector $\bar{u}$ paralelo a la misma.**

En particular, si la recta contiene al origen de coordenadas podemos elegir $P_1(0,0)$ y la ecuación (4) se transforma en:

$$\boxed{\overline{OP} = t\,\overline{u}, \quad t \in \Re} \qquad (5)$$

Analicemos el significado geométrico del parámetro *t* que aparece en la ecuación vectorial $\overline{P_1P} = t\,\overline{u}$ :

$$\overline{P_1P} = t\,\overline{u} \quad \Rightarrow$$

$$\left|\overline{P_1P}\right| = \left|t\,\overline{u}\right| = |t|\,\left|\overline{u}\right|,$$

en consecuencia:

$$|t| = \frac{1}{|\overline{u}|}\left|\overline{P_1P}\right| = \frac{1}{|\overline{u}|}\,\mathrm{dist}\,(P_1, P)$$

El parámetro *t*, en valor absoluto, resulta proporcional a la distancia entre el punto *P(x,y)* de la recta que se obtiene para ese valor de *t* y el punto fijo $P_1$. En particular si $\left|\overline{u}\right| = 1$, entonces **|** *t* **|** es dicha distancia.

Observamos que para cada valor de *t* queda determinado un punto $P \in$ ***r*** y recíprocamente. La variable *t* se denomina ***parámetro*** y no se representa sobre un eje.

Si en la ecuación (4) explicitamos las componentes, se tiene:

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t\,(u_1, u_2) \quad t \in \Re$$

de modo que:

$$(x, y) = (x_1 + t\,u_1,\; y_1 + t\,u_2),$$

La igualdad entre vectores implica:

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,u_1 \\ y = y_1 + t\,u_2 \end{cases} \quad t \in \mathrm{R} \qquad (6)$$

Las ecuaciones obtenidas se denominan:

***Ecuaciones paramétricas de la recta***

*coordenadas de un punto de la recta* — *componentes de un vector paralelo a la recta*

A $u_1$ y $u_2$ se los llama **coeficientes directores** de la recta. Estos coeficientes no son únicos ya que hay infinitos vectores con la misma dirección que ***r***. Si en particular elegimos un vector de módulo uno (versor) los coeficientes directores reciben el nombre de **cosenos directores** de la recta.

**Actividad 2**

1) Escriba las ecuaciones paramétricas de una recta que contenga al origen de coordenadas. ¿Qué representa en este caso el parámetro ***t***?

2) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que es paralela al vector *(1,2)* y contiene al punto *(2,3).*

3) Halle las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto Q(-3,2) y es:

a) paralela al eje ***x***. b) paralela al eje ***y***.

Grafique ambas rectas.

4) Sean $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$ $t \in \Re$, las ecuaciones paramétricas de una recta *r*.

a) ¿Los puntos *P (1,5)* y *Q (3,-2)* pertenecen a *r*?

b) ¿Para qué valor del parámetro *t* se obtiene el punto *(-2,17)*?

c) ¿Para qué valores de *t* se obtienen los puntos del segmento determinado por las intersecciones de la recta con los ejes coordenados?

d) Calcule el área el triángulo que forma la recta con los ejes coordenados.

e) Escriba otras ecuaciones paramétricas de la misma recta.

## 3.3 Ecuación general de la recta en el plano

Si de las ecuaciones paramétricas (6), $(\text{con}: \ u_1 \neq 0 \ \text{y} \ u_2 \neq 0)$ despejamos el parámetro ***t*** obtenemos:

$$\frac{x - x_1}{u_1} = t \quad , \quad \frac{y - y_1}{u_2} = t \quad \text{de donde} \quad \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2}$$

Operando algebraicamente resulta:

$$(x - x_1)\, u_2 = (y - y_1)\, u_1$$

$$u_2 x - u_2 x_1 = u_1 y - u_1 y_1 \qquad (7)$$

$$u_2 x - u_1 y + (u_1 y_1 - u_2 x_1) = 0$$

Si reemplazamos $u_2$ por $a$, $-u_1$ por $b$, y $(u_1 \ y_1 - u_2 x_1)$ por $c$, obtenemos la ecuación:

| *r)* $a\ x + b\ y + c = 0$, que llamamos: ***Ecuación General de la recta*** | (8) |
|---|---|

Esta es una ecuación de primer grado o lineal en las variables ***x*** e ***y.*** Las variables ***x*** e ***y*** simbolizan las coordenadas de un punto cualquiera de la recta ***r***. Asimismo, cualquier punto del plano de coordenadas **(*x, y*)** que verifica la ecuación (8) pertenece a la recta.

A los números ***a, b*** y ***c*** se los llama **coeficientes de la ecuación**, y en particular a ***c*** se lo denomina **término independiente de la ecuación,** pero ¿qué significan geométricamente?

Para encontrar respuesta a esta pregunta le proponemos que grafique en un mismo sistema de coordenadas el vector $\overline{u}$ = (*u*$_1$, *u*$_2$) (vector paralelo a la recta) y el vector $\overline{n} = (u_{2_1}, -u_1)$ = (*a, b*).

¿Cómo son $\overline{u}$ y $\overline{n}$ ? Verifique analíticamente.

Hecha esta verificación, podemos afirmar que el vector $\overline{n}$ = ($a$ , $b$) **es un vector perpendicular (o normal) a la dirección de la recta**. Por este motivo a $\overline{n}$ se lo llama **vector normal a la recta.**

Encontramos un significado geométrico para el par ***(a, b)***,

Busquemos ahora significar geométricamente el coeficiente ***c***.

De la ecuación (8) se tiene que:

$$-c = ax + by = (a,b)\times(x,y) = \overline{n}\times\overline{OP}$$

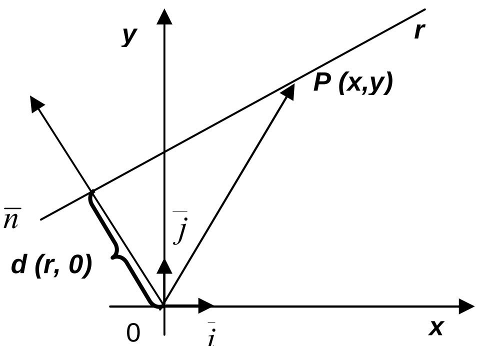


Fig. 5

de donde:

$$\left|-c\right| = \left|a\,x + b\,y\right| = \left|(a,b)\times(x,y)\right| = \left|\overline{n}\times\overline{OP}\right| =$$

$$= \left|\overline{n}\right| \; \left|\overline{OP}\right| \; \left|\cos\left(\overline{n}, \widehat{\overline{OP}}\right)\right| = \left|\overline{n}\right| \; d\,(\boldsymbol{r}, 0)$$

donde $d$ ($\boldsymbol{r}$, 0 ) simboliza la distancia de la recta al origen de coordenadas.

(*Observación*: el concepto de distancia de un punto a una recta será precisado más adelante)

- Si **|** $\overline{n}$ **|** = 1, entonces $\left|-c\right|$ es la distancia del origen de coordenadas a la recta.

Es decir, cuando en la ecuación general de una recta los coeficientes de la x y de la y son las componentes de un versor normal a la recta entonces el valor absoluto del término independiente es igual a la distancia del origen de coordenadas a la misma.

- Si **|** $\overline{n}$ **|** $\neq$ 1: $\left|-c\right| = \left|\overline{n}\right| \; d\,(r, O)$ es proporcional a la distancia de la recta al origen.

Siendo $\left|-c\right| = \left|c\right|$, resulta:

$$\begin{cases} \left|\mathrm{c}\right| = d(r,O) & \text{si } \left|\overline{n}\right| = 1 \\ \left|\mathrm{c}\right| = \left|\overline{n}\right| \; d(r,O) & \text{si } \left|\overline{n}\right| = 1 \end{cases} \quad \text{X}$$

## Actividad 3:

1) Escriba la ecuación general de una recta que contenga al origen de coordenadas.
2) ¿Cómo son las posiciones relativas entre las rectas de ecuaciones $ax + by = 0$ y $ax + by + c = 0$, con $c \neq 0$ ?
3) Halle la ecuación general de una recta y grafíquela, si la misma cumple las siguientes condiciones:
   a) es paralela al eje *x.*
   b) es paralela al eje *x* y contiene al origen de coordenadas.
   c) es paralela al eje *y*.
   d) es paralela al eje *y* y contiene al origen de coordenadas.

4) Si en la ecuación $ax + b\,y + c = 0$, es $a$ = 0 ; $b$ = 0, qué puntos del plano la verifican?

5) Dada la ecuación de la recta $2x - y + 3 = 0$ , indique si los puntos $P_1$ (-3,-3) y $P_2$ (4,-2) pertenecen o no a ella. Determine las coordenadas de los puntos de intersección de la misma con los ejes coordenados. Represente gráficamente.

6) Dada la recta $r)\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad t \in \Re$ ,

a) represente gráficamente,
b) halle su ecuación general,
c) encuentre la recta perpendicular a la dada que contenga al origen de coordenadas.

### 3.4 Ecuación segmentaria de la recta

Si $ax + by + c = 0$ con $a \neq 0,\ b \neq 0$ y $c \neq 0$ , entonces $ax + by = -c$ .

Dividiendo ambos miembros por $(-c)$ resulta:

$$\frac{a}{-c}x + \frac{b}{-c}y = 1 \qquad \text{o bien:} \qquad \frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1 \qquad (a \neq 0, b \neq 0)$$

Si llamamos $-\frac{c}{a}$ y $-\frac{c}{b}$ con ***p*** y ***q*** respectivamente, obtenemos la ecuación:

$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$, que llamamos: ***Ecuación segmentaria de la recta*** (9)

A partir de la ecuación (9) es fácil determinar los puntos en que la recta intercepta a los ejes coordenados. Dichos puntos de muestran en el siguiente gráfico:

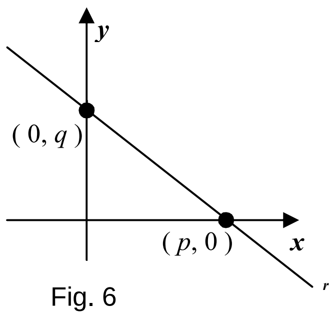



Fig. 6

¿Qué particularidad tienen las rectas en cuyas ecuaciones $a \neq 0,\ b \neq 0$ y $c \neq 0$ ?

Cuando la recta contiene el origen de coordenadas, ($c$ = $0$), no es posible expresarla en forma segmentaria.

### Actividad 4:

*r*

1) a) Halle la ecuación segmentaria de la recta $2x - 3y - 5 = 0$ .

b) Encuentre las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados y represente gráficamente.

2) Halle la ecuación segmentaria de la recta que contiene a los puntos (0, 5) y (-3, 0). Represente gráficamente a la misma.

### 3.5 Ecuación explícita de la recta.

Si de la ecuación general $ax + by + c = 0$ (con $b \neq 0$) despejamos la variable **y**, obtenemos la siguiente ecuación:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Llamando $-\frac{a}{b}$ y $-\frac{c}{b}$ con ***m*** y ***h*** respectivamente, resulta:

$\boxed{y = mx + h}$, que llamamos ***Ecuación explícita de la recta*** (10)

¿Qué particularidad tienen las rectas en cuyas ecuaciones es $b \neq 0$?

Veamos el *significado geométrico* de los coeficientes ***m*** y ***h***.

Significado de ***h****:*

En (10) para *x = 0*, resulta *y = h*. Esto indica que ***h*** es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje ***y***. Por ello recibe el nombre de ***ordenada al origen de la recta.***

En cuanto al significado del coeficiente ***m****:*

En la Fig. 7 se observa que ***r*** forma un ángulo $\alpha$ con el semieje positivo ***x***. Considerando el triángulo rectángulo determinado por los puntos ***P (0,h), Q (x,h)*** y ***R (x, mx+h)***, tenemos que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{cat.op.}{cat.ady.} = \frac{(mx+h)-h}{x} = \frac{mx}{x} = m$$

$$(0 \le \alpha < \frac{\pi}{2})$$

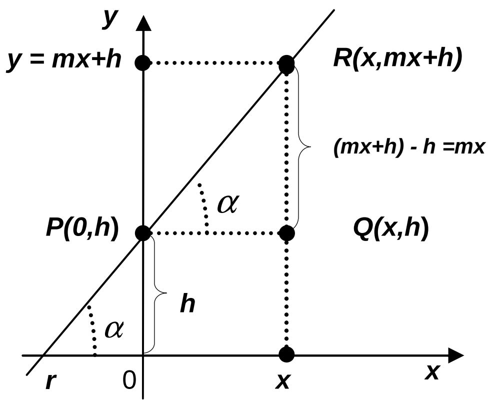


Fig. 7

Luego el valor de ***m*** es la tangente trigonométrica del ángulo $\alpha$ formado por la recta y el sentido positivo del eje ***x***. Por esta razón, se lo llama **pendiente de la recta** o **coeficiente angular** de la misma.

### Actividad 5

1) Al analizar el significado de ***m*** tuvimos en cuenta que $(0 \le \alpha < \frac{\pi}{2})$. ¿Llega a la misma conclusión si el ángulo $\alpha$ que forma la recta con el sentido positivo del eje ***x*** es tal que $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$ ?

   Sugerencia: recuerde la relación entre los valores de las tangentes de ángulos suplementarios.

2) Le proponemos que trabaje sobre los siguientes casos particulares:

   a) Escriba la forma explícita de la ecuación de una recta que contiene al origen de coordenadas.

b) ¿Cuál es la forma explícita de la ecuación de una recta cuando *m = 0*? ¿En qué posición relativa a los ejes coordenados se encuentra? Grafique.

c) Analice por qué no es posible escribir la ecuación explícita de una recta paralela al eje *y*.

d) Si una recta biseca al primer y tercer cuadrante, ¿cuál es su ecuación explícita?, ¿y si biseca al segundo y cuarto cuadrante? Grafique ambas rectas.

3) Conociendo las coordenadas de dos puntos del plano $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, obtenga la ecuación explícita de la recta que contiene a estos dos puntos (considere $x_1 \neq x_2$ ).

4) Escriba la ecuación explícita de la recta que contiene a *A*(2,3) y forma un ángulo de 120º con el eje x.

5) Halle la ecuación explícita de la recta que contiene a los puntos $P_1$( 2, -3 ) y $P_2$( 1, 5 ).

## 4. Ángulo entre dos rectas

Si dos rectas $r_1$ y $r_2$ son paralelas o coincidentes, entonces el ángulo entre las mismas es cero.

Si $r_1$ y $r_2$ se cortan en un punto entonces forman cuatro ángulos. Dos cualesquiera de ellos o son opuestos por el vértice o suplementarios.

Conocidos $\overline{n_1}$ y $\overline{n_2}$ vectores perpendiculares (o vectores paralelos si se trabaja con las ecuaciones paramétricas) a $r_1$ y $r_2$ respectivamente, uno de los ángulos determinado por las rectas es $\alpha = \left(\overline{n_1} \hat{\ } \overline{n_2}\right)$ y el otro su suplementario: $(\pi - \alpha)$.

Si las ecuaciones de las rectas son $r_1)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $\mathrm{r}_2)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ entonces

$$\cos\alpha = \frac{\overline{n_1} \times \overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\ |\overline{n_2}|}\text{, donde } \overline{n_1} = (a_1, b_1) \text{ y } \overline{n_2} = (a_2, b_2)$$

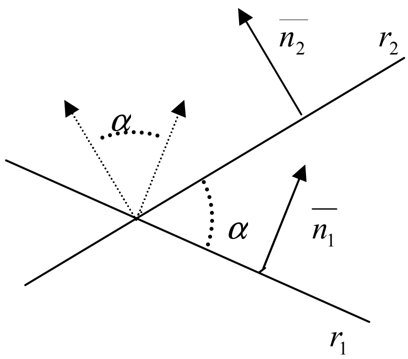



Fig. 8

**Ejemplo 3:**

Vamos a encontrar uno de los ángulos que forman las rectas *$r_1$) 2 x - 5 y + 1 = 0* y *$r_2$) x - 5 y = -3:*

$\overline{n_1} = (2, -5)$ y $\overline{n_2} = (1, -5)$,

$$\cos\alpha = \frac{(2,-5)\times(1,-5)}{\sqrt{2^2+5^2}\ \sqrt{1^2+5^2}} = \frac{12}{\sqrt{145}} \approx 0.99654 \Rightarrow \alpha \approx 4^{\circ}\ 45'\ 49''$$

### 4.1 Condición de perpendicularidad entre dos rectas

$$\boxed{r_1 \perp \mathrm{r}_2 \Leftrightarrow r_1 \hat{\ } r_2 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow \overline{n_1} \times \overline{n_2} = 0, \qquad \overline{n_1} \neq \overline{0}, \overline{n_2} \neq \overline{0}} \quad (11)$$

- Si las rectas están expresadas por su ecuación general la condición (11) se traduce a:

$$\boxed{r_1 \perp \mathrm{r}_2 \Leftrightarrow a_1\ a_2 + b_1\ b_2 = 0}$$

- Si las ecuaciones de las rectas están dadas en forma explícita, $r_1)\ y = m_1 x + h_1$ y $r_2)\ y = m_2 x + h_2$ , se puede probar que la condición (11) queda expresada como:

$$\boxed{r_1 \perp \mathrm{r}_2 \Leftrightarrow m_1\ m_2 = -1} \quad (11')$$

Analice los casos $m_2 = 0$ o $m_1 = 0$.

## 4.2 Condición de paralelismo entre dos rectas

$$\boxed{r_1\ //\ r_2 \Leftrightarrow \overline{n_1}\ //\ \overline{n_2} \Leftrightarrow \exists\ \alpha \neq 0\ /\ \overline{n_1} = \alpha\ \overline{n_2}} \quad (12)$$

- Si las rectas están expresadas mediante sus ecuaciones generales, la condición (12) se traduce en:

$$\boxed{a_1 = \alpha\ a_2\ ;\ b_1 = \alpha\ b_2}$$

Si $a_2$ y $b_2$ no son nulos, entonces:

$$\boxed{r_1\ //\ r_2 \Leftrightarrow \overline{n_1}\ //\ \overline{n_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}}$$

¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de las ecuaciones de dos rectas, dadas en forma general, para que resulten **coincidentes**?

- Si las ecuaciones de las rectas están dadas en forma explícita entonces:

$$\boxed{r_1\ //\ r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2} \quad (12`)$$

**Ejemplo 4:**

Dada las rectas de ecuaciones:

$r_1)\ 3x + 4y - 12 = 0$ $\qquad r_2)\ 4x - 3y + 12 = 0$

$r_3)\ 6x + 8y - 24 = 0$ $\qquad r_4)\ -\frac{3}{2}x - 2y + 7 = 0$

a) $r_1)$ es perpendicular a $r_2)$ pues 3 . 4 + 4 . (-3 ) = 0.

b) $r_1)$ coincide con $r_3)$ pues $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{-12}{-24}$.

c) $r_1)$ es paralela a $r_4)$ pues $\frac{3}{-3/2} = \frac{4}{-2} \neq \frac{-12}{7}$.

Le proponemos que exprese las ecuaciones dadas en forma explícita y verifique luego las afirmaciones a), b) y c).

### Actividad 6

1) Halle el ángulo agudo que forman las rectas:

a) $r_1) 3x - y + 2 = 0$ y $r_2)\ 2\ x + y - 2 = 0$ b) $r_1) x + 2y + 1 = 0$ y $r_2) 2\ x - y - 2 = 0$

2) Dadas las rectas $r_1) 2x + 3y = 1$ y $r_2)\ y = -\frac{2}{3}x + 10$, analice si son o no paralelas.

3) Dadas $s) -x + 2y + 3 = 0$ y $t)\ 3x + y - 2 = 0$,

a) encuentre el ángulo agudo entre ellas.

b) halle la ecuación de la recta que contiene a la intersección de ambas y forma un ángulo de 60º con el semieje positivo *x*.

4) Pruebe la condición (11**'**) con la siguiente ayuda:

***$m_1$= tg $\alpha$***

***$m_2$ = tg $\beta$***

***$\beta$ = 90º+$\alpha$***

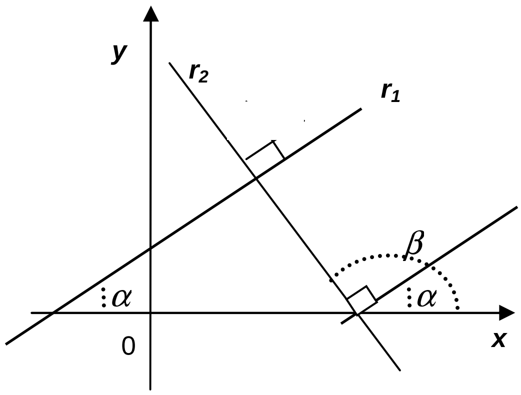



Fig. 9

## 5. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento determinado por el punto y por el pie de la perpendicular trazada desde el punto a la recta.

Dada la recta de ecuación $r)\ ax + by + c = 0$ y el punto $P_1(x_1, y_1)$:

a) si $\boldsymbol{P_1} \in \boldsymbol{r}$ entonces ***d*** **(*$P_1$*, *r* ) = 0**.

b) Si ***$P_1$*(*$x_1$*, *$y_1$*)** $\notin$ ***r*** entonces: ***d*** **(*$P_1$*, *r* ) =** $\left|\text{Pr}\,oy_{\bar{n}}\ \overline{P_0P_1}\right|$,

siendo $P_0(x_0, y_0)$ cualquier punto de ***r***.

Las coordenadas de $P_0(x_0, y_0)$ verifican la ecuación de la recta, esto es:

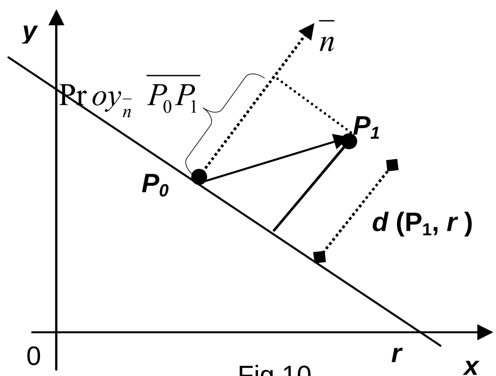



Fig.10

$ax_0 + by_0 + c = 0$, luego

$c = -(ax_0 + by_0)$. (*)

Habíamos visto que: $\operatorname{Pr}oy_{\bar{n}}\ \overline{P_0P_1} = (\overline{P_0P_1} \times \overline{n_0})\ .\ \overline{n_0}$ .

Luego $\left|\operatorname{Pr}oy_{\bar{n}}\overline{P_0P_1}\right|$ **=** $\left|\ (\overline{P_0P_1} \times \overline{n_0})\ .\ \overline{n_0}\ \right| = \left|\ \overline{P_0P_1} \times \overline{n_0}\ \right| \left|\ \overline{n_0}\ \right|$ **=** $\left|\overline{P_0P_1} \times \overline{n_0}\right|$ **.**

En consecuencia:

$$\boxed{\boldsymbol{d\ (P_1, r)} = \left|\operatorname{Pr}oy_{\bar{n}}\overline{P_0P_1}\right| = \left|\overline{P_0P_1} \times \overline{n_0}\right|} \qquad (13)$$

Como $\overline{P_0P_1}$ = ($x_1 - x_0$ , $y_1 - y_0$) y $\overline{n_0} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ , reemplazando en (13) resulta:

$$d\,(P_1, r) = \left|\overline{P_0P_1} \times \overline{n_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_0 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_0\right| =$$

$$= \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_1 - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_0 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_0\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{a\,x_1 + b\,y_1 - (a\,x_0 + b\,y_0)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \overset{(*)}{=} \left|\frac{a\,x_1 + b\,y_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|\,a\,x_1 + b\,y_1 + c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Le proponemos que exprese las distancias de $P_1(x_{1,}y_1)$ a ***r)***, cuando:

a) $r)\ ax + by = 0$ ; y $P_1 \notin r$ ; b) $r)\ ax + by + c = 0$ y $P_1 \equiv 0$

*Observación*: Las ecuaciones $a\,x + b\,y + c = 0$ y $\frac{a\,x + b\,y + c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$ son equivalentes (por lo tanto representan a una misma recta).

La ecuación $\frac{a\,x + b\,y + c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$ se llama ***Ecuación normalizada da la recta***.

Los coeficientes que multiplican a las variables *x* e *y* son las componentes de un versor perpendicular a la recta.

El término independiente, de acuerdo a lo obtenido en la propuesta b) representa, salvo el signo, la distancia de la recta al origen de coordenadas.

## 6. Distancia entre dos rectas paralelas

La distancia entre dos rectas paralelas es la longitud del segmento determinado por los puntos de intersección de ambas con una recta perpendicular a ellas.

Para hallar ***d*** **(*$r_1$, $r_2$*)** basta considerar un punto de una de las rectas y calcular su distancia a la otra recta.

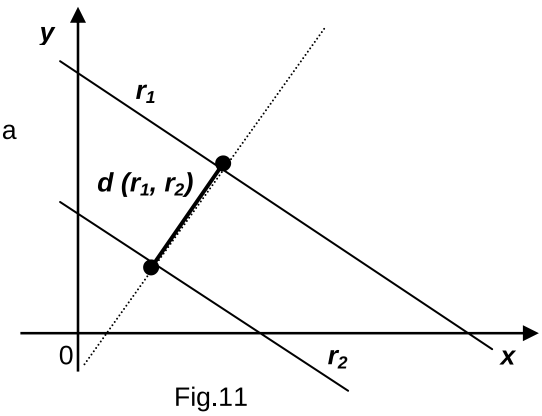


Fig.11

### Actividad 7

1) Halle la distancia del punto $P_1$ (-1, 4) a la recta 4 x – 3 y = 9.

2) Analice si las siguientes rectas son paralelas. En caso de serlo, encuentre la distancia entre ellas:

$$r_1)\ x-3y-2=0 \qquad\qquad r_2)\ y=\frac{1}{3}x-5$$

3) Los puntos *A* (2,3) y *B* (6,4) son vértices de un rectángulo. Halle las coordenadas de los otros vértices, sabiendo que una de las diagonales está contenida en la recta de ecuaciones:

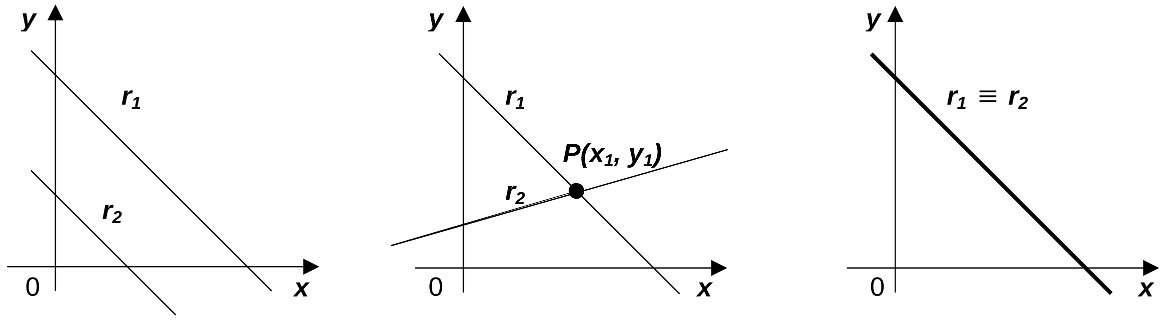
$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=3+5t \end{cases} \quad t\in\Re\,.$$

4) Dados los puntos *R* (9,-9), *S* (1,2) y *T* (3,1), halle las coordenadas del punto simétrico a *R*, respecto de la recta determinada por *S* y *T.*

## 7. Intersección de rectas

Dadas las rectas: $r_1)\ a_1x+b_1y+c_1=0$ y $\mathrm{r}_2)\ a_2x+b_2y+c_2=0$ determinaremos el conjunto formado por los puntos de intersección de ambas rectas.

Geométricamente puede darse sólo alguna de estas tres situaciones:




$r_1 \cap r_2 = \emptyset$ — *Rectas paralelas*

$r_1 \cap r_2 = \{P(x_1, y_1)\}$ — *rectas secantes*

$r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ — *rectas coincidentes*

Fig. 12

Vemos que:

$$r_1 \cap r_2 = \{\ P\ (x,y)\ /\ a_1x + b_1y + c_1 = 0\ \} \cap \{\ P\ (x,y)\ /\ a_2x + b_2y + c_2 = 0\ \} =$$
$$= \{\ P\ (x,y)\ /\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ y } a_2x + b_2y + c_2 = 0 \}$$

Por lo tanto $P(x, y)$ pertenece a $r_1 \cap r_2$ si y sólo si sus coordenadas verifican el sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

De esta manera, el problema geométrico de determinar $r_1 \cap r_2$ se traduce analíticamente en resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Es sencillo predecir ***el tipo de solución*** del sistema (14) por simple inspección de los coeficientes de ambas ecuaciones. Esto es:

- si se verifica que $\begin{cases} a_1 = \alpha a_2 \\ b_1 = \alpha b_2 \\ c_1 \neq \alpha c_2 \end{cases}$ las rectas resultan paralelas y el sistema es incompatible (o no tiene solución).
- si $\begin{cases} a_1 = \alpha a_2 \\ b_1 = \alpha b_2 \\ c_1 = \alpha c_2 \end{cases}$ entonces las ecuaciones son equivalentes, es decir representan a la misma recta y por lo tanto el sistema es compatible con infinitas soluciones. Las mismas resultan ser las coordenadas de todos los puntos que satisfacen a una cualquiera de las dos ecuaciones dadas.
- si se verifica que $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$ las rectas son secantes (compruébelo) y el sistema es compatible con una única solución.

**Ejemplo 5:** Encontremos, de ser posible, las coordenadas del punto intersección de las siguientes rectas:

$$r)\ 2x + y - 1 = 0$$
$$t)\ 3x - 2y + 4 = 0$$

Como $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{-2}$ las rectas son secantes y por lo tanto se cortan en un punto. Para hallar las coordenadas del mismo podemos utilizar cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones, por ejemplo el de sustitución:

De la primera ecuación resulta: $y = 1 - 2x$ (*).

Reemplazando $y$ por (*) en la segunda ecuación, queda $3x - 2(1-2x) + 4 = 0$, de donde resulta que $x = -\frac{2}{7}$.

Reemplazando en (*) el valor calculado para $x$, se tiene que $y = \frac{11}{7}$.

Luego: $$r_1 \cap r_2 = \left\{ \left( \frac{-2}{7}, \frac{11}{7} \right) \right\}$$

Le proponemos que realice la representación gráfica de ambas rectas y verifique la solución encontrada.

### Actividad 8

Halle, si es posible, el conjunto intersección de los siguientes pares de rectas:

$a)\ 2x + y - 1 = 0;\quad 3x - 2y + 4 = 0$

$b)\ x - 3y - 6 = 0;\quad 2x - 6y = 12$

$c)\ x + y = 5;\qquad 2x + 2y = -1$

## 8. Inecuaciones lineales

El conjunto $r = \{P(x,y)\ /\ ax + by + c = 0\}$ está formado por los puntos de una recta cuya dirección es perpendicular a la del vector $\overline{n} = (a,b)$. Esta recta divide al plano en dos **semiplanos** y recibe el nombre de **recta frontera**.

Probemos que los conjuntos:

A = $\{P(x,y)\ /\ ax + by + c > 0\}$ y

B = $\{P(x,y)\ /\ ax + by + c < 0\}$

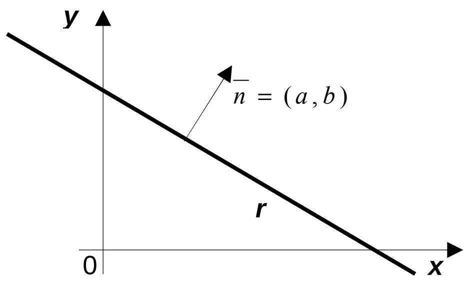


Fig. 13

se corresponden respectivamente con cada uno de los semiplanos antedichos.

Para ello consideremos la recta $r)\ ax + by + c = 0$, los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P(x,y)$, donde $P_1 \in r$ y $P \notin r$, y los vectores fijos $\overline{P_1P} = (x - x_1,\ y - y_1)$ y $\overline{n} = (a,b)$ (ambos con origen en $P_1$).

En la Fig. 11 observamos que pueden presentarse dos situaciones:

(a) los vectores $\overline{P_1P}$ y $\overline{n}$ están en el mismo semiplano.

(b) los vectores $\overline{P_1P}$ y $\overline{n}$ no están en el mismo semiplano.

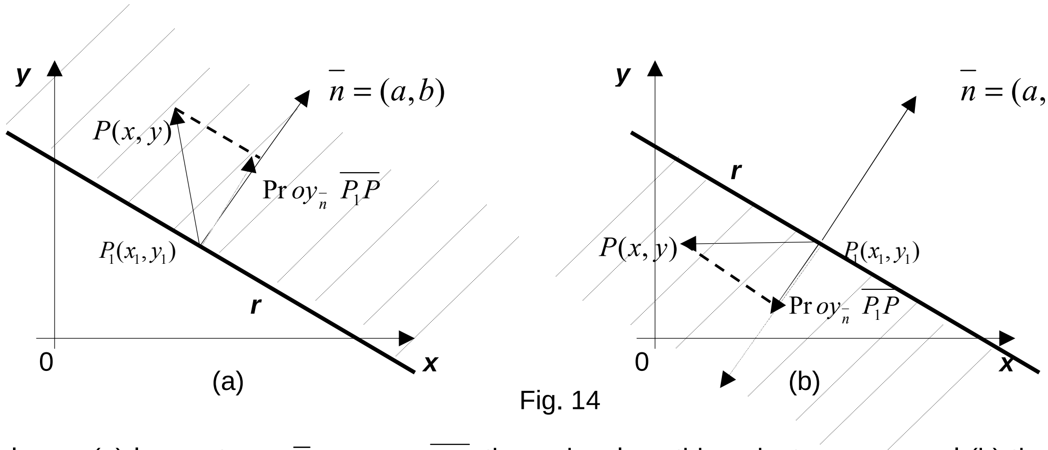



Fig. 14

En el caso (a) los vectores $\overline{n}$ y $\text{Pr}\,oy_{\overline{n}}\ \overline{P_1P}$ tienen igual sentido, mientras que en el (b) tienen sentidos opuestos.

Para lograr nuestro objetivo calculemos el producto escalar: $\overline{P_1P}\times\overline{n}$

$$\overline{P_1P}\times\overline{n} = (x-x_1,\ y-y_1)\times(a,b) = a\ (x-x_1)+b\ (y-y_1) =$$
$$= a\ x + b\ y - (a\,x_1 + b\ y_1)$$

Por otra parte, como $P_1 \in r$ , resulta que $a\,x_1 + b\,y_1 + c = 0$ , por lo tanto $\overline{P_1P}\times\overline{n} = a\,x + b\,y + c$ .

El producto escalar calculado es igual al primer miembro de las inecuaciones que aparecen cuando se describen los conjuntos A y B.

- Cuando los vectores $\overline{n}$ y $\text{Pr}\,oy_{\overline{n}}\ \overline{P_1P}$ tienen igual sentido, $\overline{P_1P}$ y $\overline{n}$ forman un ángulo agudo, por lo tanto: $\overline{P_1P}\times\overline{n} = a\,x + b\,y + c\ > 0.$
- Cuando los vectores $\overline{n}$ y $\text{Pr}\,oy_{\overline{n}}\ \overline{P_1P}$ tienen distinto sentido entonces $\overline{P_1P}\times\overline{n} = a\,x + b\,y + c\ < 0.$

La igualdad: $\overline{P_1P}\times\overline{n} = a\,x + b\,y + c\ = 0$ no puede darse dado que $P$ no es un punto de la recta.

En síntesis:

| |
|---|
| $\left\{ P(x,y)\ /\ \overline{n}\ \text{ y }\ \text{Pr}\,oy_{\overline{n}}\overline{P_1P}\ \text{ tienen igual sentido} \right\} = \left\{ P(x,y)\ /\ \overline{P_1P}\times\overline{n}\ > 0 \right\} =$ A |
| $\left\{ P(x,y)\ /\ \overline{n}\ \text{ y }\ \text{Pr}\,oy_{\overline{n}}\overline{P_1P}\ \text{ tienen distinto sentido} \right\} = \left\{ P(x,y)\ /\ \overline{P_1P}\times\overline{n}\ < 0 \right\} =$ B |

Por lo dicho y observando la Figura 11 podemos concluir que el semiplano que se corresponde con el conjunto A es aquel que contiene al extremo del vector normal $\overline{n}$ (cuando su origen está ubicado en la recta) y el semiplano que se corresponde con el conjunto B es aquel que no contiene a dicho extremo.

Los puntos de la recta ***r*** no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos. Si en A y en B cambiamos los símbolos ">" y "<" por "$\geq$" y "$\leq$", respectivamente, los puntos de la recta frontera ***r*** quedan incluidos en ambos conjuntos.

**Ejemplo 6:** Determinemos los puntos $P(x, y)$ del plano cuyas coordenadas satisfacen la inecuación:

$$2x + 3y - 1 > 0$$

Dibujamos la recta $2x + 3y - 1 = 0$ y su vector normal $\overline{n} = (2,3)$. La solución de la inecuación son todos los puntos del semiplano que se representa en la figura 12.

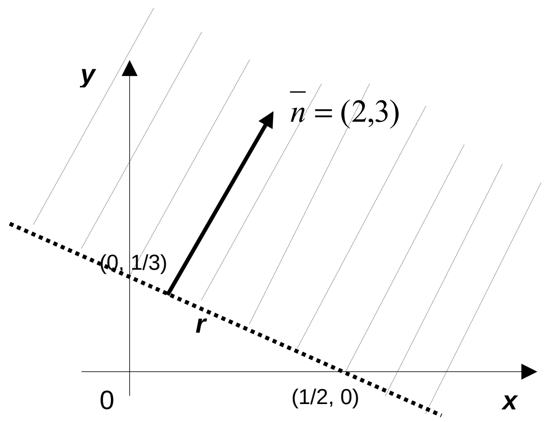



Fig. 15

**Observaciones:**

1) En la práctica podemos usar un método sencillo que consiste en analizar si un punto cualquiera del plano, que no pertenezca a la recta ***r***, verifica la inecuación planteada.

Volvamos al ejemplo anterior y tomemos como punto de prueba al origen de coordenadas.

Vemos que la inecuación planteada en el ejemplo no se satisface para *x = 0* e *y = 0* ya que

$$2\ .\ 0 + 3\ .\ 0 - 1 = -1 < 0 \text{, es falso.}$$

Entonces *(0,0)* no pertenece al conjunto solución de la inecuación, lo que nos permite afirmar que dicho conjunto resulta ser el semiplano que no contiene al origen de coordenadas.

2) Si en ejemplo anterior sustituimos el ">" por el "$\geq$" el conjunto solución quedará determinado por el semiplano y la recta frontera.

## 9. Sistemas de inecuaciones lineales en dos variables

Nos proponemos representar gráficamente a la región del plano formada por todos los puntos cuyas coordenadas satisfagan simultáneamente dos o más inecuaciones lineales, es decir, un sistema de inecuaciones lineales. Dicha región está formada por la intersección de dos o más semiplanos, representados cada uno de ellos por una de las inecuaciones dadas.

**Ejemplo 7:** Representemos la región R del plano solución del siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 6 \end{cases}$$

$$R = \{\ P(x,y)\ /\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ 2x + 3y \leq 6\}$$

R puede ser expresado como la intersección de tres conjuntos de puntos:

$$R = \{\ P(x,y)\ /\ x \geq 0\} \cap \{\ P(x,y)\ /\ y \geq 0\} \cap \{P(x,y)\ /\ 2x + 3y \leq 6\}$$

Notemos que cada uno de esos tres conjuntos representa un semiplano (observe figura 13):

- el primer conjunto define el semiplano a la derecha respecto del eje $\overrightarrow{oy}$ (incluido dicho eje).
- el segundo conjunto describe el semiplano superior respecto al eje $\overrightarrow{ox}$ (incluido dicho eje).
- el tercer conjunto se corresponde con el semiplano que queda determinado por la recta $2x + 3y = 6$ y que contiene al origen de coordenadas. La recta frontera está contenida en este conjunto.

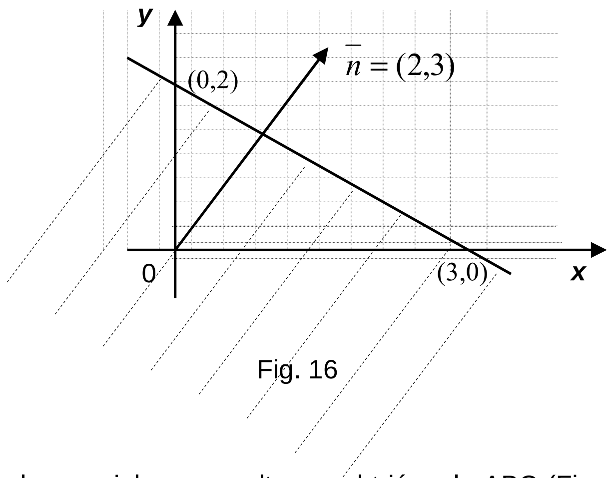



Fig. 16

La intersección de los semiplanos resulta ser el triángulo ABC (Fig. 16); es decir, R es el conjunto de los puntos del plano que pertenecen a la **región limitada** por los lados del triángulo (**incluidos éstos**). Por este motivo R se dice un **conjunto cerrado.**

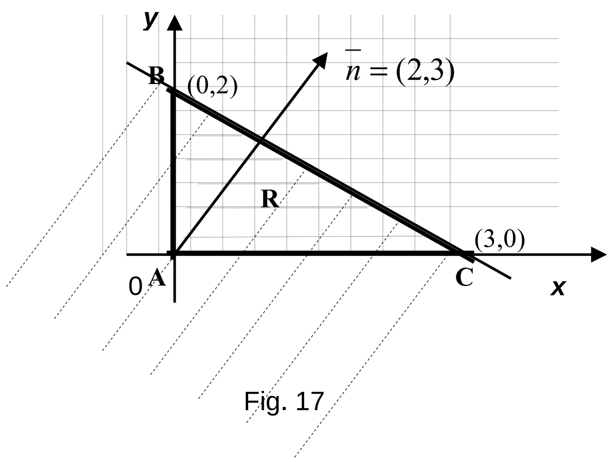



Fig. 17

Se debe advertir que un sistema de inecuaciones lineales puede tener como conjunto solución una región del plano no acotada o no tener solución (incompatible).

## Actividad 9

Represente gráficamente, si es posible, el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 3x+5y \le 15 \\ 5x+2y \le 10 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y \ge 0 \\ x-5y \ge -5 \\ x \ge 2 \quad y \ge 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y \ge 3 \\ 2x+3y \ge 6 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y \ge 4 \\ x+y \le 2 \end{cases}$

# Ejercicios adicionales

1) Represente gráficamente las siguientes rectas:

a) $3x - 4y = 0$ b) $y = -x + 3$ c) $x/2 - y/3 = 1$

2) En cada caso, escriba una ecuación para la recta que cumple con las condiciones pedidas y represente gráficamente.

a) Contiene a los puntos *A*(1, 1) y *B*(3, 4).

b) Contiene al punto *A*(5, 3) y es paralela al eje *y*.

c) Es perpendicular a la recta $2x - 3y + 4 = 0$ y corta la eje *y* en el punto ( 0, 1).

d) Es paralela a la recta que pasa por los puntos *P* ( 2, -3) *y Q* (1, 2) y corta al eje *x* en el punto (-1, 0).

3) a) Halle las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que contiene al punto *A*(-1,2) y es paralela al vector $\overline{u}$ =(-1.3).

b) Determine si el punto *B*(-4, 1) pertenece a la recta *r*.

c) A partir de las ecuaciones obtenidas en a) elimine el parámetro y halle una ecuación general para *r.*

4) En cada caso analice si las rectas son paralelas o perpendiculares entre sí, o calcule el ángulo agudo que forman:

a) $x + 2y = 3$ ; $6x + 12y = 4$

b) $2x - y + 5 = 0$ ; $y = 2x + 3$

c) $x + 2y + 11 = 0$ ; $3/2\, x - 3/4\, y = 1$

d) $x + y - 1 = 0$ ; $2x + 3y = 1$

5) Halle la ecuación de una recta que diste 2 unidades del origen y sea paralela a la recta de ecuación $5x + 12y = 3$. ¿Existe única solución? Represente gráficamente.

6) Dados los puntos *A*(-3,2), *B*(-1,0) y *C*(2,***b***); ¿qué valor debe tomar ***b*** para que los tres puntos pertenezcan a una misma recta?

7) Considere el punto *A*(2,3) y la recta *r* determinada por los puntos *B*(1,1) y *C*(3,2). Exprese mediante una inecuación el semiplano determinado por *r* que contiene al punto *A,* incluyendo los puntos de *r*.

8) Cada uno de los puntos *A*(2,3) y *B*(-2,2) forma con el origen de coordenadas dos rectas. Determine si el punto *C*(-1,3) pertenece a la recta bisectriz de alguno de los ángulos formados por ellas.

9) La intersección de $r_1)$ y $r_2)$ es el punto *Q*(3,2). Dados los puntos *R*(5,1) de $r_1)$ y *S*(-1,1) de $r_2)$, halle la recta bisectriz del ángulo agudo que forman ambas rectas.

10) Los puntos *A*(4,5); *B*(2,2) y *C*(6,2) determinan el triángulo *ABC*.

a) Calcule: i) la medida de sus ángulos interiores,

ii) la altura correspondiente al lado AB,

iii) su área.

a) Escriba un sistema de inecuaciones lineales cuyo conjunto solución sean los puntos del triángulo ABC.

11) Dada la recta de ecuación $y = x + 1$, ¿a qué distancia se encuentra del punto *C*(4,7)?

12) a) Dados los puntos *A*(3,0) y *B*(4,2) determine una ecuación de la recta que los contiene y otra para la recta paralela que contiene a *C*(2,6).

b) Determine una ecuación de la recta que contiene a *B* y *C* del ítem a) y otra para la recta paralela que contiene a *A*.

c) Halle el perímetro de la figura que resulta.

13) Dados los puntos *A*(5,-2) y *B*(0,1) determine la recta que los contiene y la recta perpendicular a ella que pasa por el punto medio del segmento AB.

14) Halle las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto *P*(3,4) y que es perpendicular a la recta determinada por el punto *C*(1,5) y el origen de coordenadas.

15) Halle la ecuación de la recta que contiene al punto (3,0) y forma un ángulo de 135º con el sentido positivo del eje *x*.

16) Supongamos ubicar un par de ejes coordenados sobre una mesa de pool de manera que un ángulo de la misma quede apoyado en el origen y sus lados sobre los ejes. De esta forma podemos darle a cada bola una ubicación tal como lo hacemos con los puntos en el plano. Así, una bola ubicada en el punto (3/2,1) marca su trayectoria chocando en el punto (2,5) (sobre uno de los lados de la mesa) y entrando en un hoyo situado en el punto (3,0). ¿Cuál es el ángulo descripto por la trayectoria?

17) a) Exprese a través de un sistema de **inecuaciones** lineales, la región triangular que queda determinada por las siguientes rectas. Grafique dicha región.

$$w)\ -9x + 2y + 15 = 0 \qquad s)\ y = -\frac{3}{4}x + 3 \qquad r)\ \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad t \in R$$

b) Calcule el punto de intersección entre *r)* y *w)*. Llámelo *P*.
c) Calcule la distancia del punto *P* a la recta *s)*.
d) Determine el área del triángulo formado.

20) Sean $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ y $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ las ecuaciones de dos rectas que se cortan en el punto $P_1(x_1, y_1)$.

a) Pruebe que para cada $k \in \Re$, $\left(a_1\, x + b_1\, y + c_1\right) + k\,(a_2\, x + b_2\, y + c_2) = 0$ representa la ecuación de una recta que contiene al punto $P_1(x_1, y_1)$.

21) En cada caso, halle la ecuación de la recta que contiene al punto de intersección de $r_1)\, 3x - 5y + 9 = 0$ y $r_2)\, 4x + 7y - 30 = 0$ y que además:

a) contiene al punto A (-3, - 5).

b) es paralela a la recta $2\,x + 3\,y - 5 = 0$.

c) es perpendicular a la recta $4\,x + 5\,y - 20 = 0$

22) Determine para qué valores de $k \in \Re$, la recta de ecuación:

$$(2k-1)x + (4-k)y - 3k - 5 = 0$$

a) es paralela a *s*) $2x - 3y + 5 = 0$.

b) contiene l origen de coordenadas.

c) es perpendicular a la recta $t)\ 3x - y + 2 = 0$.

d) contiene al punto *P*(-1,3).

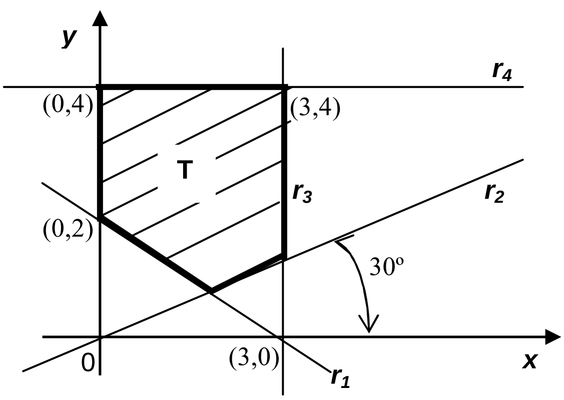
23) Halle la ecuación de la recta que contiene al punto *A*(4,1) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 8.

24) Determine las coordenadas de los puntos que están a distancia 3 del punto A(2,-1) y pertenecen a la recta de ecuación:

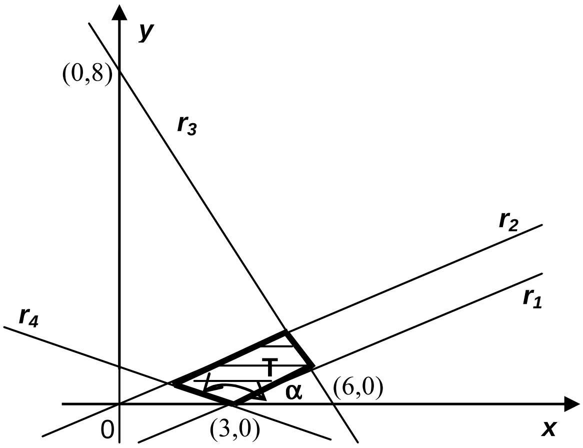
$$r)\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 2t \end{cases} \quad t \in \Re$$

25) Exprese, mediante un sistema de inecuaciones lineales en *x* e *y*, el conjunto T de puntos del plano (incluida su frontera)

a)



b)




$r_1 \parallel r_2$

$r_1 \perp r_3$

$\alpha = 120^{o}$