Константа связи

$\alpha := 0.7$

$\Phi := 1.2$

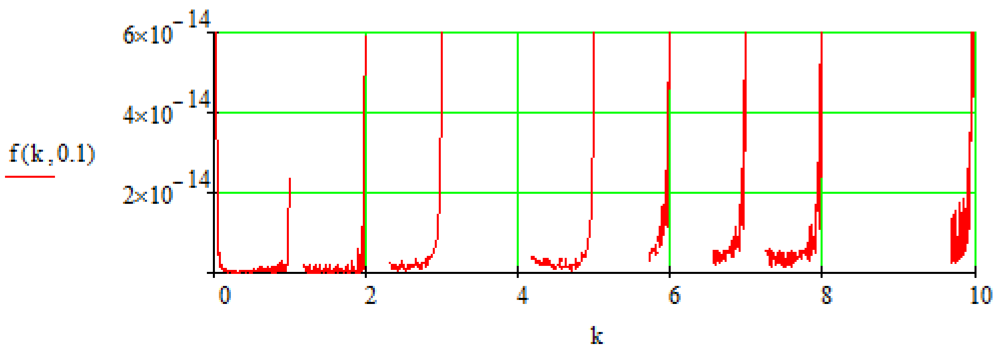
Трансфер-матрица

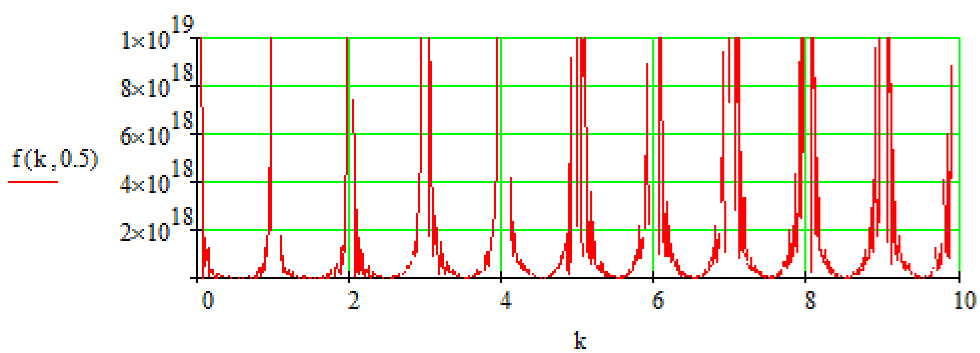
$$M(k,\Phi) := \frac{e^{-i\pi(k+\Phi)}}{2k\cdot\left(-1+e^{2\cdot i\pi k}\right)\left(1+e^{2\cdot i\pi\Phi}\right)}\cdot\begin{bmatrix} -\left[2k\,e^{2\cdot i\pi\cdot k}+2k\cdot e^{2\cdot i\cdot\pi(k+2\Phi)}-i\cdot\alpha\cdot e^{2\cdot i\cdot\pi(k+\Phi)}+(-4k+i\cdot\alpha)e^{2\cdot i\cdot\pi(2k+\Phi)}\right] & -2k\left(-1+e^{2\cdot i\cdot\pi\Phi}\right)\left[-1+e^{2\cdot i\cdot\pi(k+\Phi)}\right]-i\cdot\alpha\cdot e^{2\cdot i\cdot\pi\Phi}\left(-1+e^{2\cdot i\cdot\pi\cdot k}\right) \\ 2k\cdot e^{4\cdot i\cdot\pi\cdot k}+2k\cdot e^{2\cdot i\cdot\pi(k+2\Phi)}+(-2k+i\cdot\alpha)e^{2\cdot i\cdot\pi(2k+\Phi)}-(2k+i\cdot\alpha)e^{2\cdot i\cdot\pi(k+\Phi)} & 2k\,e^{2\cdot i\cdot\pi\cdot k}+2k\cdot e^{2\cdot i\cdot\pi(k+2\Phi)}+i\cdot\alpha\cdot e^{2\cdot i\cdot\pi(k+\Phi)}-(4k+i\cdot\alpha)e^{2\cdot i\cdot\pi\Phi} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{isContSpectra}(k,\Phi) := \left|\mathrm{tr}(M(k,\Phi))\right| \le 2$$

Поведение определителя трансфер-матирцы

$$f(k,\Phi) := \left|1-\left|M(k,\Phi)\right|\right|$$



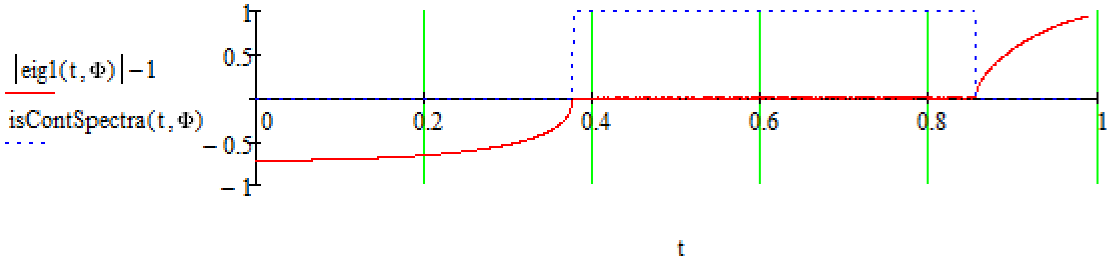


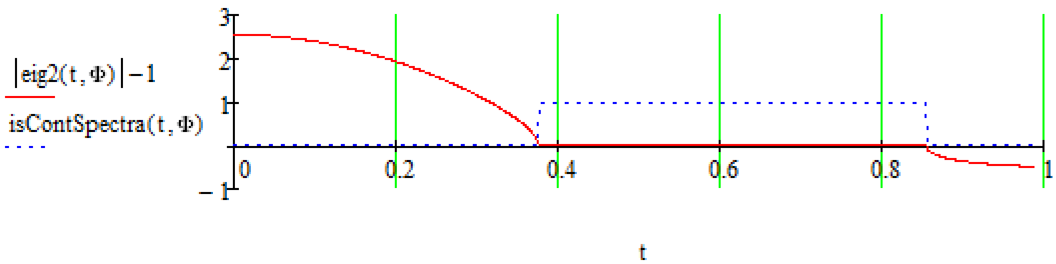
Видно, что при полуцелых значения магнитного потока Ф определитель трансфер-матрицы устремляется в бесконечность, в то время как при остальных значениях он равен единице

Численное полученные собственные значения

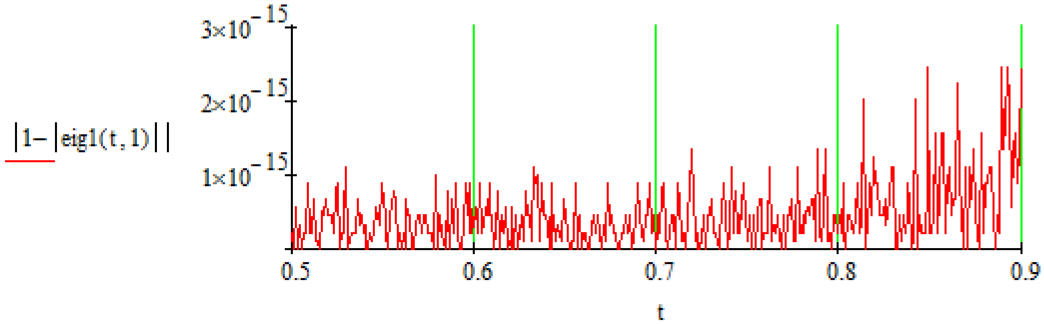
$\mathrm{eig1}(k,\Phi) := \max(\mathrm{eigenvals}(M(k,\Phi)))$ $\qquad t := 0, 0.001..0.99$

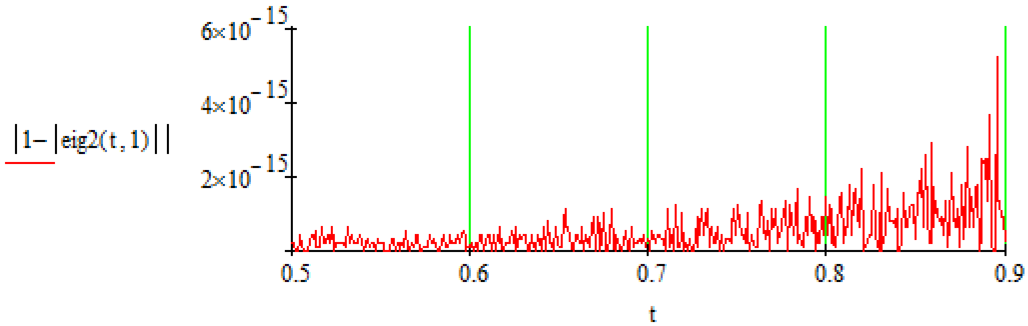
$\mathrm{eig2}(k,\Phi) := \min(\mathrm{eigenvals}(M(k,\Phi)))$





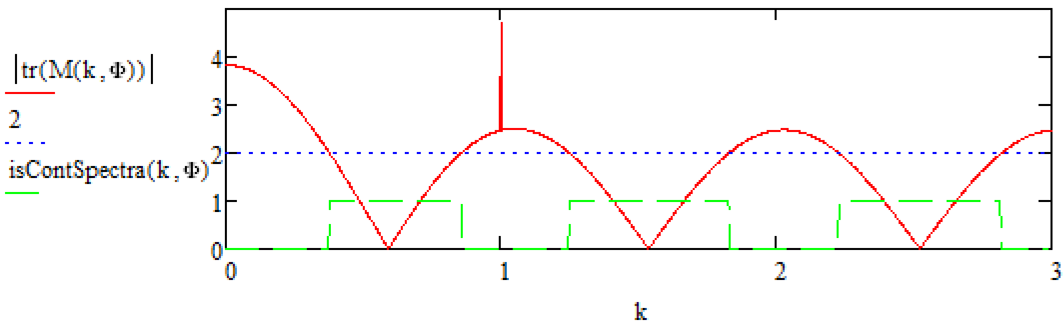
$t := 0.5, 0.5 + 0.001 .. 0.9$





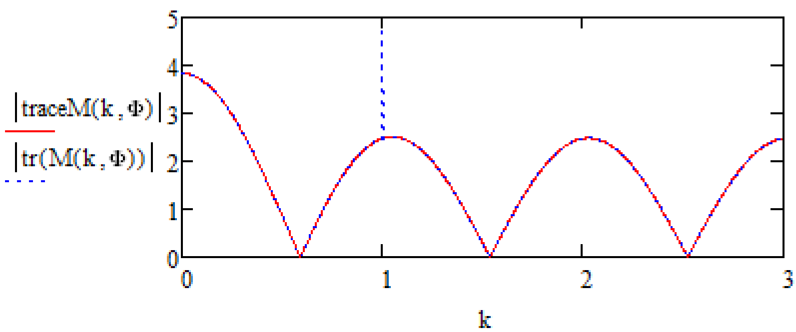
Графики для интервала от 0.5 до 0.9 показывают, что собственные значения одновременно практически равны единице.

Модуль следа трансфер-матрицы. Значения k, для которых он попадает в интервал от 0 до 2 включительно, принадлежат непрерывному спектру.



Проверяем правильность выражения для следа

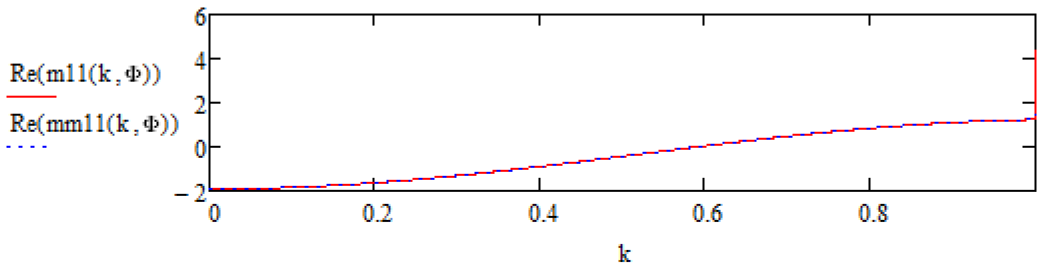
$$\mathrm{traceM}(k,\Phi) := \frac{e^{i\pi(-k+\Phi)}\left[4k + i\cdot\alpha + (4k - i\cdot\alpha)e^{2\cdot i\cdot\pi\cdot k}\right]}{2k\cdot\left(1 + e^{2\cdot i\cdot\pi\cdot\Phi}\right)}$$

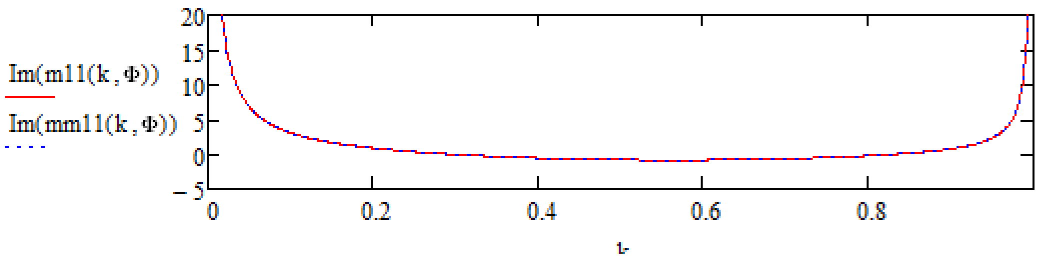


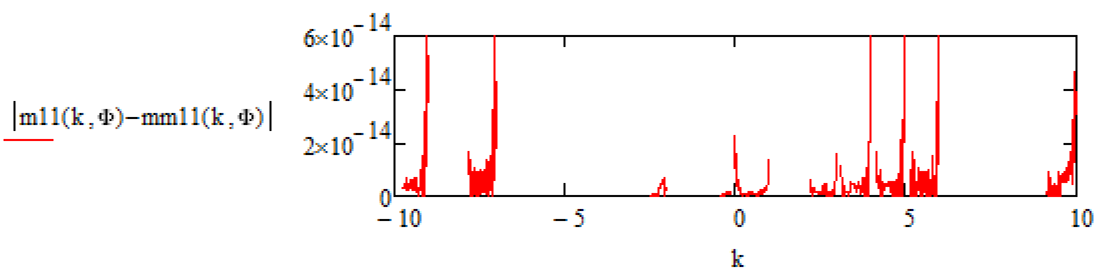
Проверка упрощенных выражений для элементов трансфер-матрицы в магнитном поле

$$m11(k,\Phi) := \left(M(k,\Phi)^{\langle 0\rangle}\right)_0$$

$$mm11(k,\Phi) := \frac{e^{i\cdot\pi\cdot k}}{\cos(\pi\Phi)}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{4\cdot i\cdot k}+\frac{1-\cos(2\pi\Phi)}{e^{i\cdot 2\pi\cdot k}-1}\right)$$

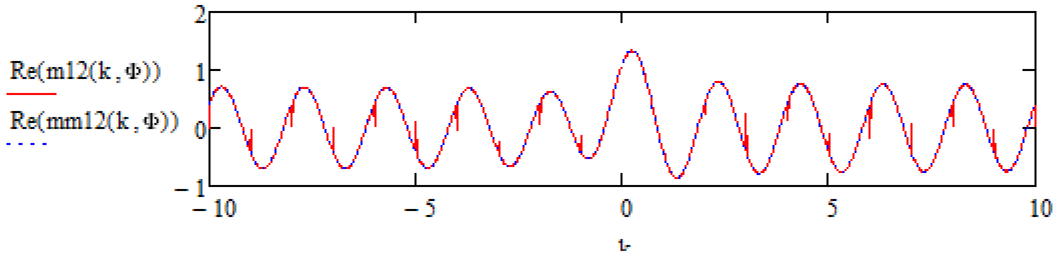


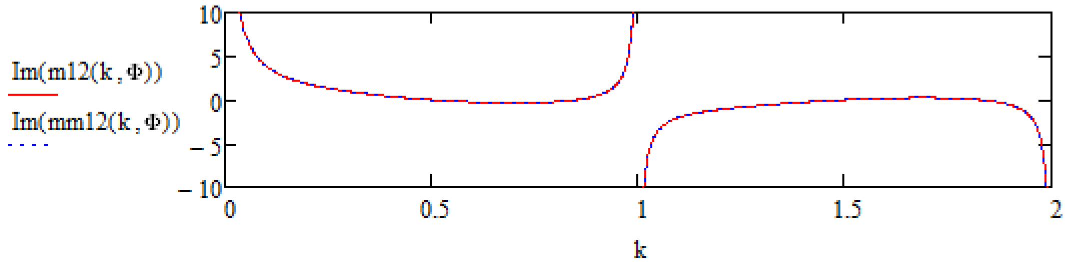


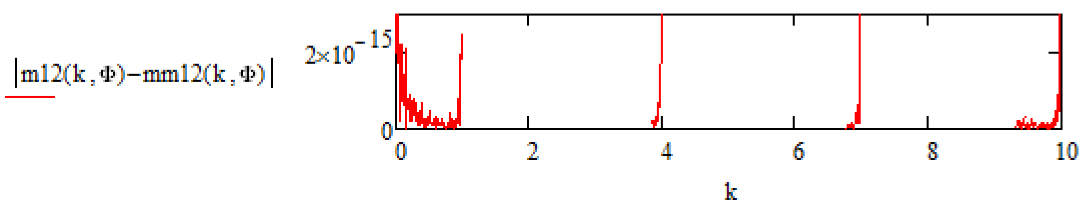


$$m12(k,\Phi) := \left(M(k,\Phi)^{\langle 1\rangle}\right)_0$$

$$mm12(k,\Phi) := \frac{e^{-i\cdot\pi\cdot k}}{\cos(\pi\,\Phi)}\cdot\left[\frac{\alpha}{4\cdot i\cdot k} + \frac{\sin(\pi\,\Phi)\cdot\sin[\pi(k+\Phi)]}{i\cdot\sin(\pi\,k)}\right]$$







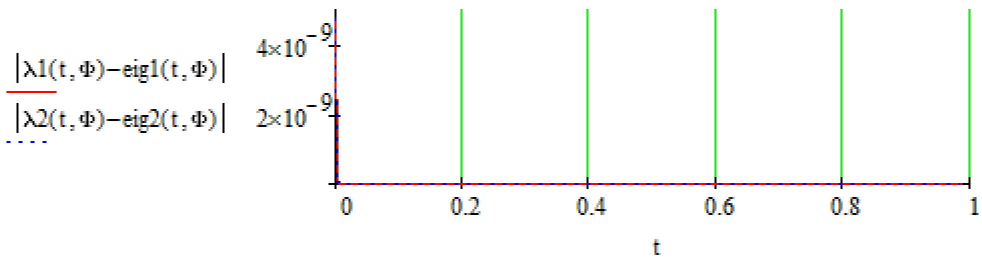
Упрощенные выражения для элементов трансфер-матрицы совпадают с исходными с хорошй точностью

Аналитические выражения для собственных значений

$$\lambda1(k,\Phi) := \frac{1}{\cos(\pi\,\Phi)}\cdot\left(\cos(\pi\,k) + \frac{\alpha}{4k}\cdot\sin(\pi\,k)\right) + \sqrt{\left[\frac{1}{\cos(\pi\,\Phi)}\cdot\left(\cos(\pi\,k) + \frac{\alpha}{4k}\cdot\sin(\pi\,k)\right)\right]^2 - 1}$$

$$\lambda2(k,\Phi) := \frac{1}{\cos(\pi\,\Phi)}\cdot\left(\cos(\pi\,k) + \frac{\alpha}{4k}\cdot\sin(\pi\,k)\right) - \sqrt{\left[\frac{1}{\cos(\pi\,\Phi)}\cdot\left(\cos(\pi\,k) + \frac{\alpha}{4k}\cdot\sin(\pi\,k)\right)\right]^2 - 1}$$

$t := 0, 0.001 .. 0.99$



Видно, что аналитический рассчет собственных значений совпадает с численным с хорошей точностью.

Собственные вектора трансфер-матрицы

Численный расчет собственных векторов

$$G1(k,\Phi) := \mathrm{eigenvec}(M(k,\Phi), \mathrm{eig1}(k,\Phi))$$

$$G2(k,\Phi) := \mathrm{eigenvec}(M(k,\Phi), \mathrm{eig2}(k,\Phi))$$

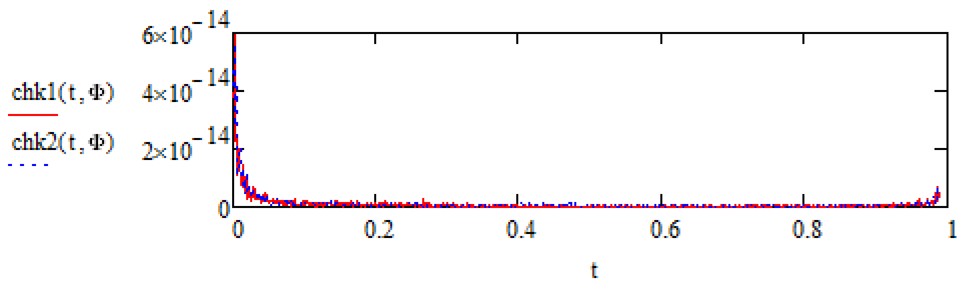
Функция для проверки собственных значений и векторов

$$\mathrm{checkEigens}(M, X, \lambda) := |M\cdot X - \lambda\cdot X|$$

Испытаем нашу функцию, применив ее к сосбтвенным значениям и векторам, посчитанным машиной.

$$\mathrm{chk1}(k,\Phi) := \mathrm{checkEigens}\left(M(k,\Phi), \mathrm{eigenvecs}(M(k,\Phi))^{\langle 0\rangle}, \mathrm{eigenvals}(M(k,\Phi))_0\right)$$

$$\mathrm{chk2}(k,\Phi) := \mathrm{checkEigens}\left(M(k,\Phi), \mathrm{eigenvecs}(M(k,\Phi))^{\langle 1\rangle}, \mathrm{eigenvals}(M(k,\Phi))_1\right)$$



$$normv(X) := \frac{X}{|X|}$$

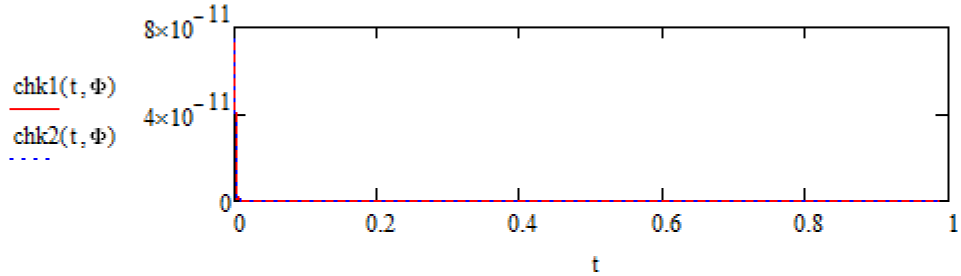
Выражения для собственных векторов

$$X1(k,\Phi) := normv\left(\begin{pmatrix} mm12(k,\Phi) \\ \lambda1(k,\Phi) - mm11(k,\Phi) \end{pmatrix}\right) \quad X2(k,\Phi) := normv\left(\begin{pmatrix} mm12(k,\Phi) \\ \lambda2(k,\Phi) - mm11(k,\Phi) \end{pmatrix}\right)$$

Проверим выражения для собственных векторов при помощи функции checkEigens.

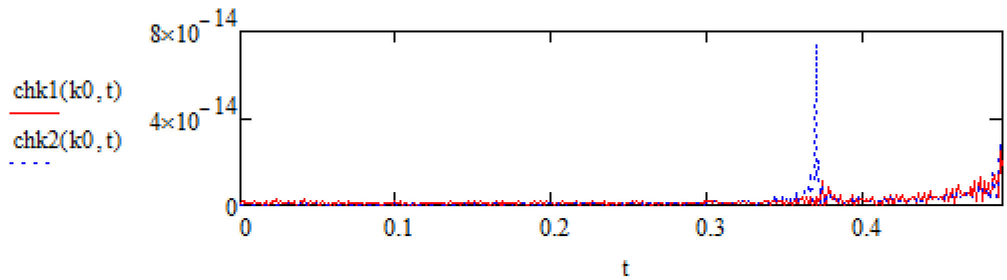
$$chk1(k,\Phi) := checkEigens(M(k,\Phi), X1(k,\Phi), \lambda1(k,\Phi))$$

$$chk2(k,\Phi) := checkEigens(M(k,\Phi), X2(k,\Phi), \lambda2(k,\Phi))$$



$$k0 := 0.7$$

$$t := 0, 0 + 0.001 .. 0.49$$



Преобразованные выражения для собственных векторов

$$X1(k,\Phi) := \mathrm{normv}\left[\begin{bmatrix} -i(\cos(\pi k) - i\cdot\sin(\pi k))\left(\dfrac{\alpha}{4k} + \dfrac{\sin(\pi\Phi)\sin(\pi k + \pi\Phi)}{\sin(\pi k)}\right) \\ i\cdot\left[\dfrac{\alpha}{4k}\cdot\cos(\pi k) - \sin(\pi k) + \dfrac{(\sin(\pi\Phi))^2}{\sin(\pi k)}\right] + \cos(\pi\Phi)\cdot\sqrt{\left[\dfrac{1}{\cos(\pi\Phi)}\cdot\left(\cos(\pi k) + \dfrac{\alpha}{4k}\cdot\sin(\pi k)\right)\right]^2 - 1} \end{bmatrix}\right]$$

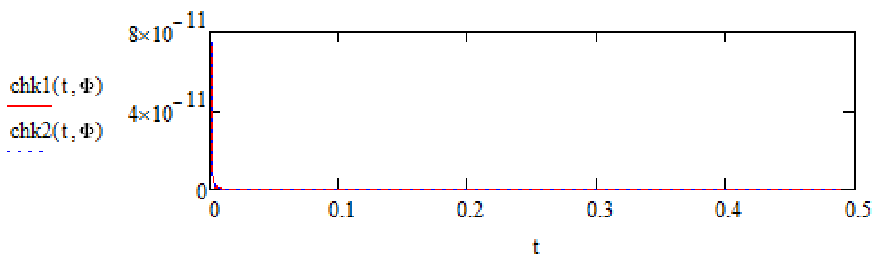
$$X2(k,\Phi) := \mathrm{normv}\left[\begin{bmatrix} -i(\cos(\pi k) - i\cdot\sin(\pi k))\left(\dfrac{\alpha}{4k} + \dfrac{\sin(\pi\Phi)\sin(\pi k + \pi\Phi)}{\sin(\pi k)}\right) \\ i\cdot\left[\dfrac{\alpha}{4k}\cdot\cos(\pi k) - \sin(\pi k) + \dfrac{(\sin(\pi\Phi))^2}{\sin(\pi k)}\right] - \cos(\pi\Phi)\cdot\sqrt{\left[\dfrac{1}{\cos(\pi\Phi)}\cdot\left(\cos(\pi k) + \dfrac{\alpha}{4k}\cdot\sin(\pi k)\right)\right]^2 - 1} \end{bmatrix}\right]$$

Особыми являются целые значения k и полуцелые значения Ф

Проверим преобразованные выражения для собственных векторов.

$$chk1(k,\Phi) := \mathrm{checkEigens}(M(k,\Phi), X1(k,\Phi), \lambda1(k,\Phi))$$

$$chk2(k,\Phi) := \mathrm{checkEigens}(M(k,\Phi), X2(k,\Phi), \lambda2(k,\Phi))$$



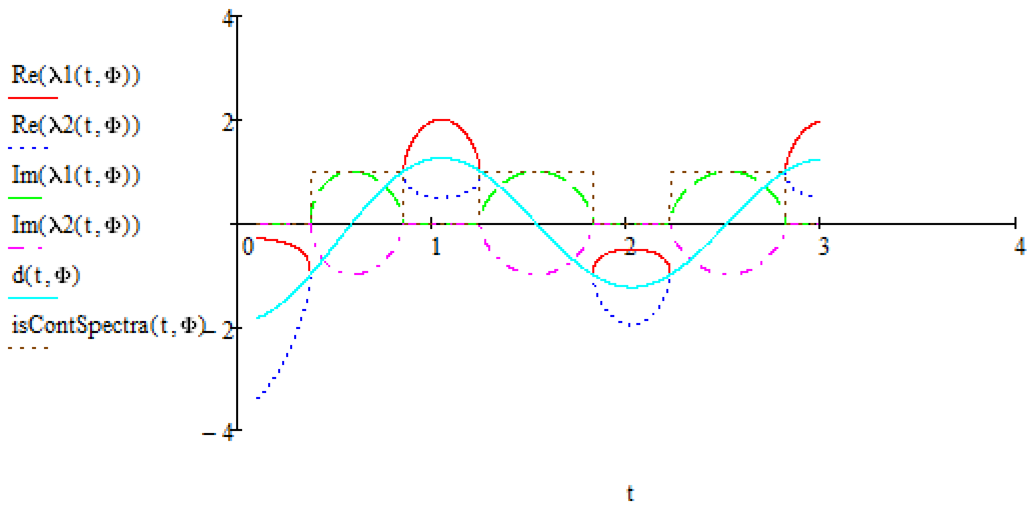
Далее используем пребразованные выражения

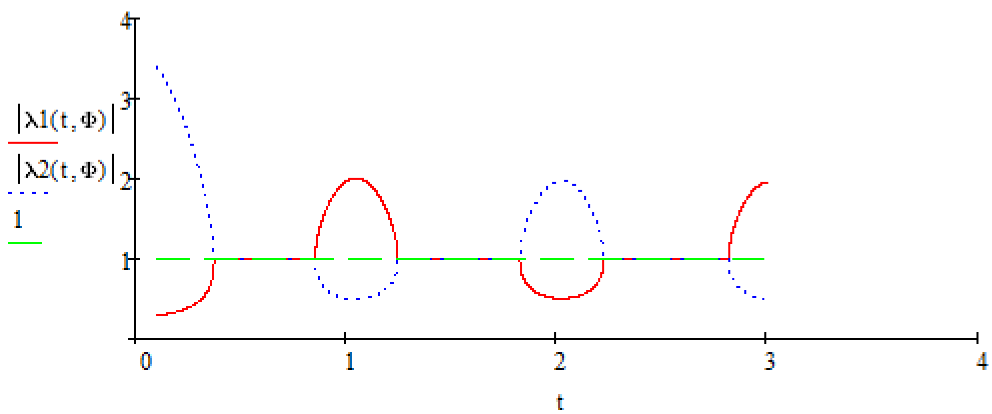
Собственные числа и лакуны непрерывного спектра

$$d(k,\Phi) := \frac{1}{\cos(\pi\,\Phi)}\cdot\left(\cos(\pi\,k) + \frac{\alpha}{4k}\cdot\sin(\pi\,k)\right)$$

$$\text{isContSpectra}(k,\Phi) := \left|\frac{1}{\cos(\pi\,\Phi)}\cdot\left(\cos(\pi\,k) + \frac{\alpha}{4k}\cdot\sin(\pi\,k)\right)\right| \le 1$$

$t := 0.1, 0.1 + 0.001 .. 3$





Видно, что модули собственныч чисел по очереди оказываются меньше 1 - этим интервалам ссответсвуют лакуны непрерывного спектра.

Трансфер матрица на центральном кольце (кольце изгиба)

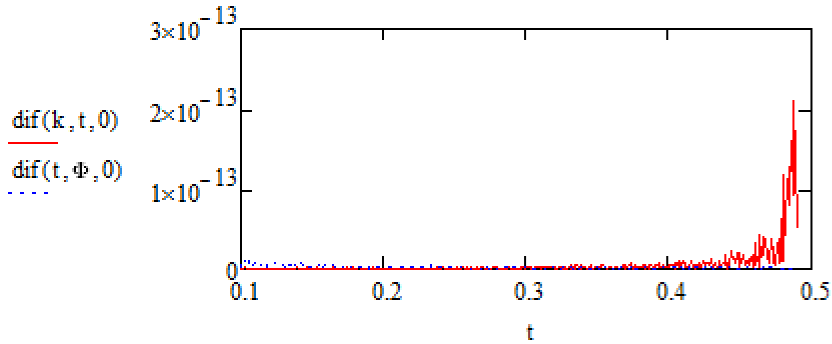
$$Mc(k,\Phi,t) := e^{-i\cdot\pi(k+\Phi)}\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-1\right)^{-1}\cdot\left[e^{2\cdot i\cdot k\cdot(t+\pi)}-e^{2\cdot i\cdot(k\cdot t+\pi\cdot\Phi)}+e^{2\pi\cdot i\cdot(k+\Phi)}-1\right]^{-1}\cdot\begin{bmatrix} e^{2\pi\cdot i\cdot k}\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-1\right)\left[\frac{-\alpha\cdot i}{2k}\cdot e^{2\cdot i\pi\cdot\Phi}\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-1\right)+2e^{2\pi\cdot i\cdot(k+\Phi)}-e^{4\cdot i\pi\cdot\Phi}-1\right] & \frac{-\alpha\cdot i}{2k}\cdot e^{2\cdot i\pi\cdot\Phi}\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-1\right)\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-e^{2\cdot i\cdot k\cdot t}\right)+\left[e^{2\pi\cdot i\cdot(k+\Phi)}-1\right]\left[e^{2\cdot i\cdot(k\cdot t+\pi\cdot\Phi)}-e^{2\cdot i\cdot\pi(k+\Phi)}+e^{2\pi\cdot i\cdot k}-1\right] \\ e^{2\pi\cdot i\cdot k}\cdot\left[\frac{\alpha\cdot i}{2k}\cdot e^{2\cdot i\pi\cdot\Phi}\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-1\right)\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-e^{2\cdot i\cdot k\cdot t}\right)+\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-e^{2\cdot i\pi\cdot\Phi}\right)\cdot\left[e^{2\cdot i\cdot k\cdot t}\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}+e^{2\cdot i\pi\cdot\Phi}-1\right)-e^{2\pi\cdot i\cdot(k+\Phi)}\right]\right] & \frac{\alpha\cdot i}{2k}\cdot e^{2\cdot i\pi\cdot\Phi}\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-1\right)\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-e^{2\cdot i\cdot k\cdot t}\right)+e^{2\cdot i\pi\cdot\Phi}\left[\left[e^{2\pi\cdot i\cdot(k+\Phi)}-1\right]\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-e^{2\cdot i\cdot k\cdot t}\right)-e^{2\cdot i\cdot k\cdot t}\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-1\right)\right]+e^{2\cdot i\cdot k\cdot(t+\pi)}\cdot\left(e^{2\pi\cdot i\cdot k}-1\right) \end{bmatrix}$$

$$dif(k,\Phi,\theta) := norme(Mc(k,\Phi,\theta)-M(k,\Phi))$$

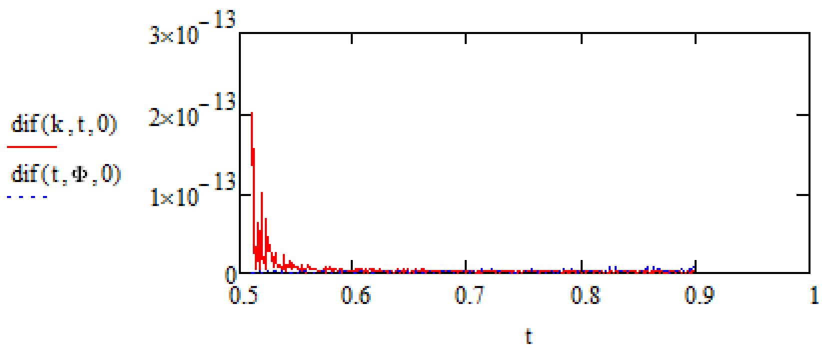
$$ar(a,b,delta) := a, a+delta..b$$

$$t := ar(0.1, 0.49, 0.001)$$

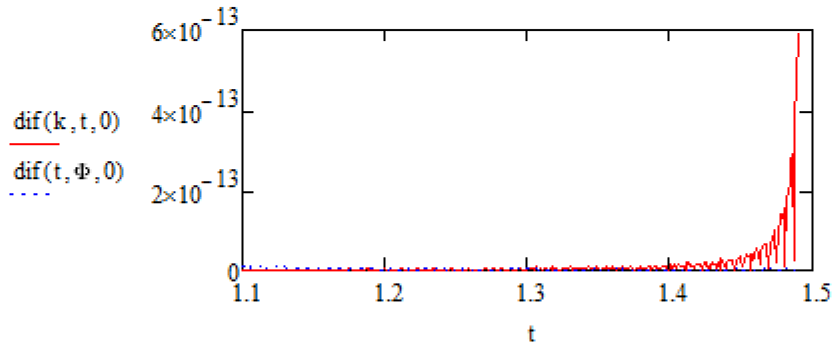
$$k := 0.7$$



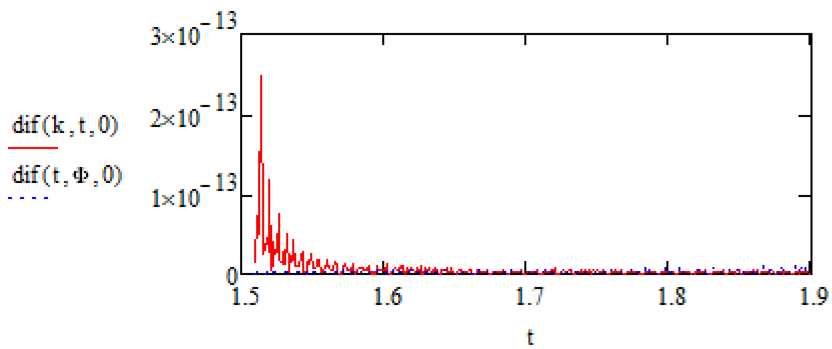
$$t := ar(0.51, 0.9, 0.001)$$



$t := ar(1.1, 1.49, 0.001)$



$t := ar(1.51, 1.9, 0.001)$



$$merge(a,b) := \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

$$det(a,b) := |merge(a,b)|$$

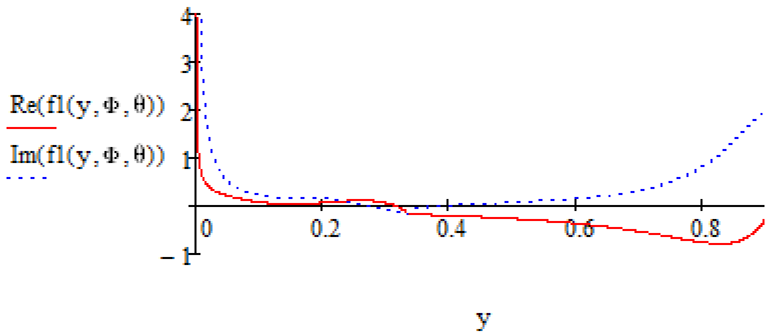
$$det\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = -2$$

$$\Phi := 0.1$$

$$f1(k,\Phi,t) := det(X1(k,\Phi), Mc(k,\Phi,t)\cdot X1(k,\Phi))$$

$$f2(k,\Phi,t) := det(X2(k,\Phi), Mc(k,\Phi,t)\cdot X2(k,\Phi))$$

$\theta := 1$

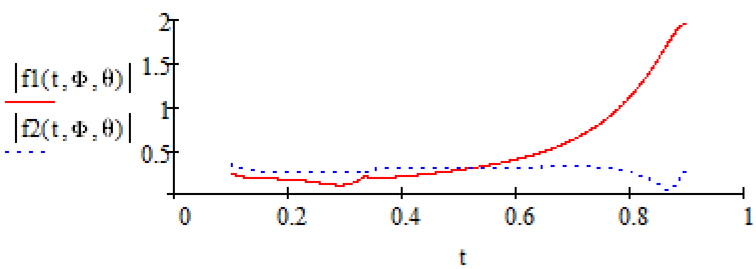


$r(x) := \mathrm{Re}(f1(x, \Phi, \theta))$

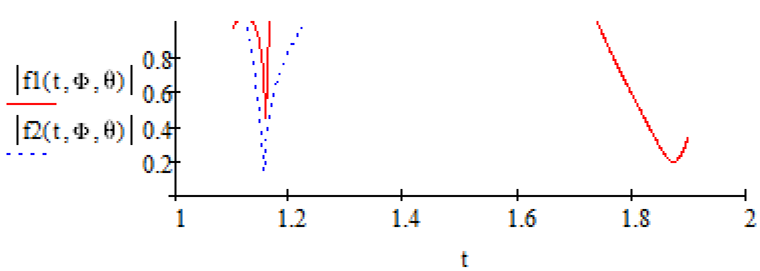
$\mathrm{root}(\mathrm{Re}(f1(x, \Phi, \theta)), x, 0.1, 0.9) = 0.317$

$\mathrm{root}(\mathrm{Im}(f1(x, \Phi, \theta)), x, 0.1, 0.3) = 0.275$

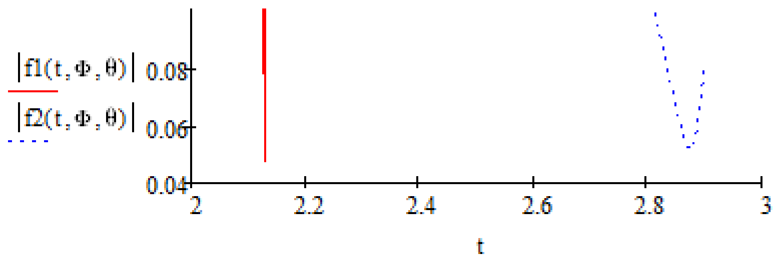
$t := \mathrm{ar}(0.1, 0.9, 0.001)$



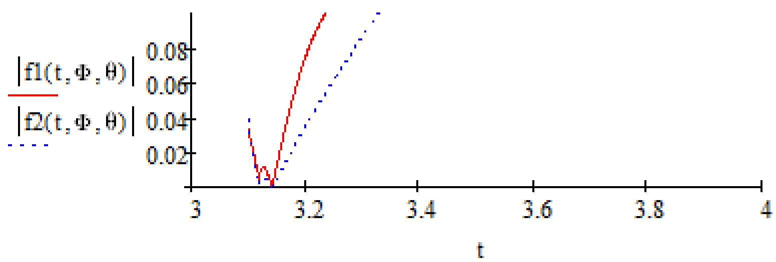
$t := \mathrm{ar}(1.1, 1.9, 0.001)$



$t := ar(2.1, 2.9, 0.001)$



$t := ar(3.1, 3.9, 0.001)$



$t := ar(4.1, 4.9, 0.001)$