Sprawozdanie V

Metoda potęgowa z ortogonalizacją Grama-Schmidta

Adam Łaba

2 kwietnia 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Metoda potęgowa

Metoda potęgowa, będąca metodą iteracyjną, która została wykorzystana w tym zadaniu, została rozszerzona o ortogonalizację Grama-Schmidta. Podstawowa metoda potęgowa pozwala na znalezienie tylko jednej dominującej wartości własnej i przynależnego do niej wektora własnego. Dodatkowe wykorzystanie ortogonalizacji, która zastępuje modyfikowanie macierzy, pozwala na znalezienie pozostałych własności własnych i wektorów. Opiera się na wykorzystaniu algorytmu:

$$
\begin{aligned}
& for\,(k = 0; k < K_{val}; k++) \\
& \quad x_k^0 = [1, \ldots, 1] \\
& \quad for\,(i = 1; i <= \mathrm{ITMAX}; k++) \\
& \qquad x_k^{i+1} = A x_k^i \\
& \qquad //ortogonalizacja\, G - S \\
& \qquad \lambda_k^i = \frac{\left(x_k^{i+1}\right)^T x_k^i}{\left(x_k^i\right)^T x_k^i} \\
& \qquad x_k^i = \frac{x_k^{i+1}}{||x_k^i||_2}
\end{aligned}
$$

,

gdzie: k – numer wyznaczonej wartości własnej i – numer iteracji dla określonego k, A – macierz, λ_i^k - przybliżenie k-tej wartości własnej w i-tej iteracji, x_i^k – i-te przybliżenie k-tego wektora własnego, K_{val} – liczba wartości własnych do wyznaczenia, *IT_MAX* – maksymalna liczba iteracji dla każdego k.

1.2 Ortogonalizacja Grama – Schmidta

Metoda ta polega na przekształceniu układu liniowo niezależnych wektorów w układ wektorów ortogonalnych. Wykorzystana w powyższym algorytmie ortogonalizacja G-S prezentuje się:

$$
\begin{aligned}
& for\,(j = 0; j < k; j++) \\
& \qquad x_k^{i+1} = x_k^{i+1} - \left[\left(x_k^{i+1}\right)^T x_j\right] x_j
\end{aligned}
$$

.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Macierz A

Wykorzystana w tym zadaniu kwadratowa macierz A rzędu n = 7 była wypełniana wartościami zgodnie ze wzorem:

$$A_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{2+|i-j|}}, \qquad i,j = 0,\ldots,n-1$$

Macierz ta jest macierzą symetryczną, więc wszystkie jej wartości własne będą rzeczywiste, tak jak i wszystkie wartości wektorów własnych będą rzeczywiste.

2.2 Przyjęte wartości parametrów

W zadaniu przyjęliśmy: $K_{val} = n = 12$, $IT\_MAX = 12$ (później dla porównania przyjęto $IT\_MAX = 300$).

2.3 Wykonanie zadania

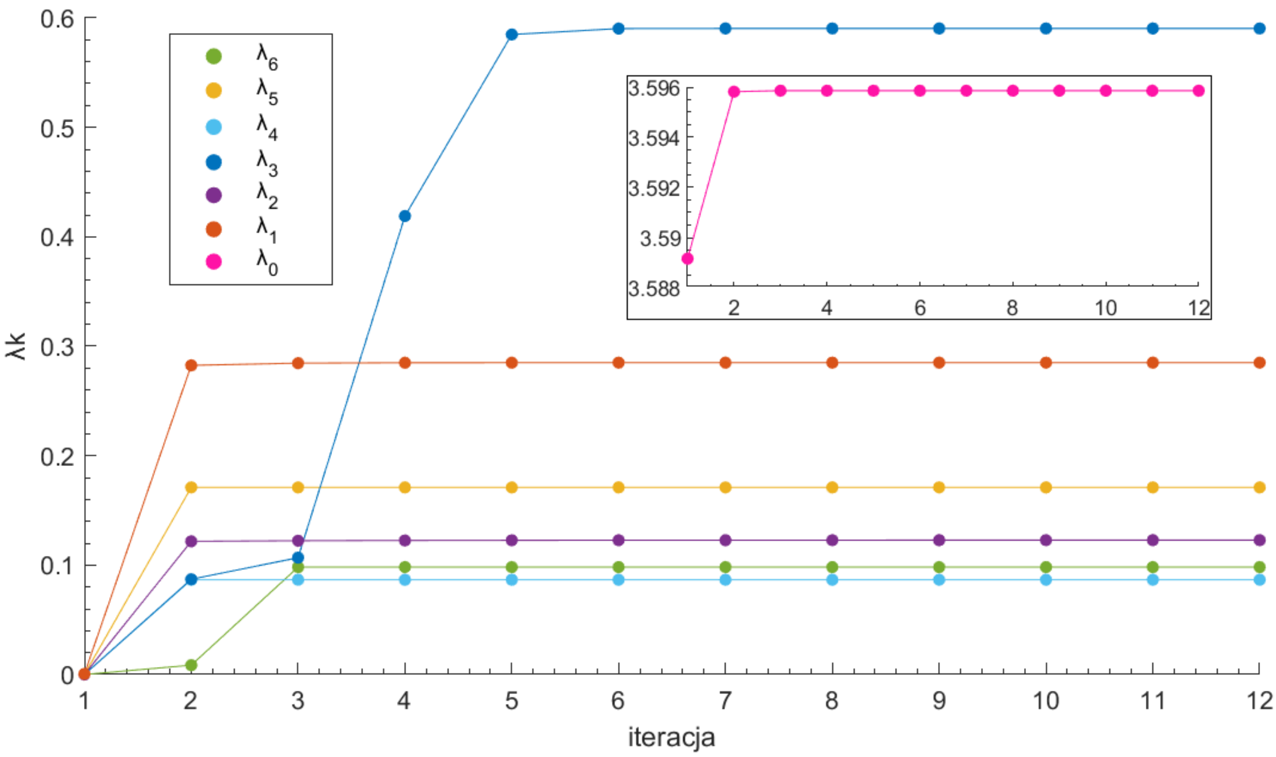
Korzystając z własnej implementacji metody potęgowej z ortogonalizacją Grama – Schmidta, z dodatkowymi własnymi implementacjami metod do wyznaczania iloczynów: macierz-wektor, wektor-wektor, macierz-macierz, oraz do ortogonalizacji wektorów wyznaczono wartości własne. Dla każdego k zapisano kolejne przybliżenia wartości własnych λ_i^k do pliku. Dodatkowo, po wyznaczeniu wszystkich wartości wyznaczono macierz D zdefiniowaną jako:

$$D = X^T A X,$$

Gdzie X – macierz mająca jako kolumny wektory własne. Macierz D zapisano do pliku. Wszystkie czynności powtórzono dla $IT\_MAX = 12$, dla $IT\_MAX = 300$ pominięto zapisywanie λ_i^k do pliku.

3. Wyniki

3.1 Wartości λ_i^k dla IT_MAX = 12



3.2 Macierz D dla IT_MAX = 12

$$\begin{bmatrix}
3.59586 & -8.99 \cdot 10^{-15} & 1.66 \cdot 10^{-16} & -5.55 \cdot 10^{-16} & -3.33 \cdot 10^{-16} & 1.11 \cdot 10^{-16} & -2.78 \cdot 10^{-16} \\
-8.90 \cdot 10^{-15} & 0.284988 & -1.88 \cdot 10^{-6} & -9.65 \cdot 19 & -1.58 \cdot 10^{-9} & 3.47 \cdot 10^{-17} & -6.94 \cdot 10^{-18} \\
-2.29 \cdot 10^{-16} & -1.88 \cdot 10^{-6} & 0.122798 & -0.002400 & -0.000136 & -2.50 \cdot 10^{-12} & -2.95 \cdot 10^{-17} \\
-6.94 \cdot 10^{-17} & -9.66 \cdot 10^{-9} & -0.002400 & 0.590378 & -1.14 \cdot 10^{-8} & 2.78 \cdot 10^{-17} & -5.55 \cdot 10^{-17} \\
-2.71 \cdot 10^{-16} & -1.58 \cdot 10^{-9} & -0.00014 & -1.14 \cdot 10^{-8} & 0.0865952 & -1.61 \cdot 10^{-9} & -7.30 \cdot 10^{-15} \\
2.71 \cdot 10^{-16} & -4.86 \cdot 10^{-17} & -2.50 \cdot 10^{-12} & -1.39 \cdot 10^{-17} & -1.61 \cdot 10^{-9} & 0.170974 & -4.07 \cdot 10^{-9} \\
-5.55 \cdot 10^{-17} & -8.67 \cdot 10^{-18} & -7.46 \cdot 10^{-17} & -9.19 \cdot 10^{-17} & -7.26 \cdot 10^{-15} & -4.07 \cdot 10^{-9} & 0.098154
\end{bmatrix}$$

3.3 Macierz D dla IT_MAX = 300

$$\begin{bmatrix}
3.59586 & -1.11 \cdot 10^{-16} & 0 & -1.11 \cdot 10^{-16} & 2.22 \cdot 10^{-16} & 1.11 \cdot 10^{-16} & 3.05 \cdot 10^{-16} \\
2.78 \cdot 10^{-16} & 0.59039 & 0 & -5.55 \cdot 10^{-17} & 5.55 \cdot 10^{-17} & 8.33 \cdot 10^{-17} & -1.18 \cdot 10^{-16} \\
1.39 \cdot 10^{-16} & 1.39 \cdot 10^{-17} & 0.284988 & 0 & -2.78 \cdot 10^{-17} & -3.47 \cdot 10^{-17} & 4.86 \cdot 10^{-17} \\
2.78 \cdot 10^{-17} & 4.86 \cdot 10^{-17} & 4.16 \cdot 10^{-17} & 0.170974 & -6.94 \cdot 10^{-18} & 3.47 \cdot 10^{-17} & -5.20 \cdot 18 \\
1.04 \cdot 10^{-16} & -1.39 \cdot 10^{-17} & -1.39 \cdot 10^{-17} & 0 & 0.122787 & -1.04 \cdot 10^{-17} & -2.95 \cdot 10^{-17} \\
5.20 \cdot 10^{-17} & -1.21 \cdot 10^{-17} & -6.25 \cdot 10^{-17} & -4.16 \cdot 10^{-17} & 1.73 \cdot 10^{-17} & 0.098154 & -3.89 \cdot 10^{-6} \\
3.64 \cdot 10^{-17} & 4.68 \cdot 10^{-17} & 2.60 \cdot 10^{-18} & -1.73 \cdot 10^{-18} & -2.17 \cdot 10^{-17} & -3.89 \cdot 10^{-6} & 0.086595
\end{bmatrix}$$

4. Wnioski

Metoda potęgowa jest dobrym narzędziem, jeśli chcemy znaleźć dominującą wartość własną i odpowiadający jej wektor. Jeśli interesuje nas większa liczba wartości własnych, konieczne jest rozszerzenie metody, na przykład o ortogonalizacje Grama-Schmidta.

Dokładność działania metody jest uzależniona od maksymalnej liczby iteracji dla każdego k, czyli w naszym przypadku parametru IT_MAX. Oczekiwaliśmy, że macierz D poza diagonalą będzie składała się z samych zer, ale za każdym razem pojawiały się tam niezerowe wartości.

Dla IT_MAX = 12 największa z tych wartości była rzędu 10^{-3}, a większość z nich znalazła się między 10^{-6} a 10^{-18}. Dla IT_MAX = 300 wartości te były zdecydowanie bliższe zera – dwie rzędu 10^{-6}, pozostałe co najmniej rzędu 10^{-16}. Wraz ze wzrostem IT_MAX wzrasta dokładność działania metody.