Sprawozdanie X

Odszumianie sygnału przy użyciu FFT – splot funkcji

Adam Łaba

21 maja 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Szybka transformacja Fouriera

Jest to algorytm służący do wyznaczenia dyskretnej transformacji Fouriera, a także transformaty odwrotnej. Dla x_0, x_{N-1} zespolonych dyskretną transformatę opisuje wzór:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-2\pi i}{N} nk}, \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Wzór 1.

Najczęściej spotykana wersja algorytmu szybkiej transformacji Fouriera (także wykorzystana w tym ćwiczeniu) to FFT o podstawie 2. Wektor zawierający dane wejściowe dla tego przypadku musi mieć długość 2^k, dla k należącego do liczb naturalnych.

1.2. Splot funkcji

Splot funkcji *f* i g wyraża się wzorem:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

Wzór 2.

Obie funkcje muszą być całkowalne w przedziale (-∞, +∞). Splot dwóch funkcji może zostać wykorzystany do uśredniania funkcji *f* za pomocą funkcji g będącej funkcją wagową. Splot dwóch funkcji obliczany za pomocą szybkiej transformaty Fouriera wyraża się wzorem:

$$f * g = FFT^{-1}\{f(k) \cdot g(k)\}.$$

Wzór 3.

W ten sposób dla funkcji wagowej g otrzymujemy uśrednioną funkcję f.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Wykorzystana funkcja

Funkcja *f*, która była uśrednianym sygnałem wejściowym, dana była wzorem:

$$f(t) = \sin(\omega t) + \sin(2\omega t) + \sin(3\omega t) + \Delta.$$

Wzór 4.

Natomiast funkcja wagowa g:

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right).$$

Wzór 5.

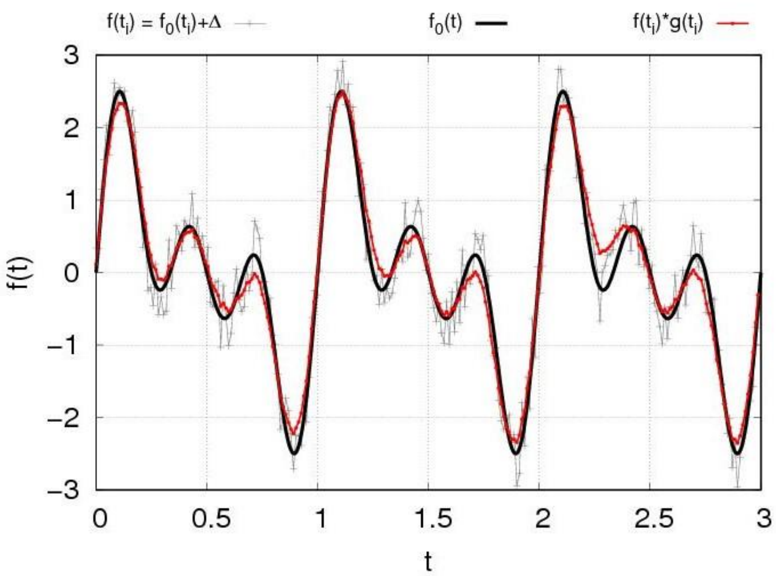
Pojawiające się w powyższych wzorach: $\omega = 2\,\pi/T$ - pulsacja, T – okres, Δ - liczba pseudolosowa z zakresu [-0.5, 0.5], $\sigma = 0.05$ - odchylenie standardowe funkcji gausowskiej.

2.2. Wykonanie zadania

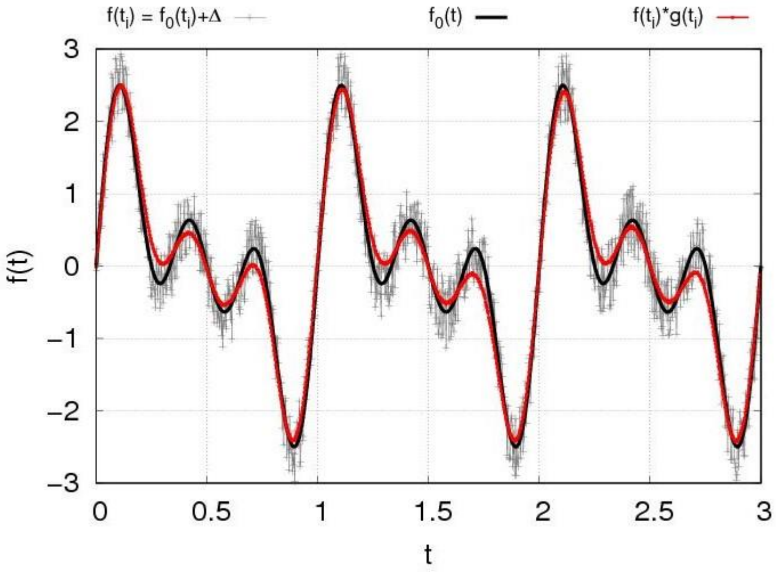
Korzystając z własnej implementacji metody w języku C, która szybkie transformacje Fouriera obliczała w oparciu o gotowe funkcje z biblioteki GSL, przeprowadzono odszumianie funkcji dla różnych wartości parametru k: 8, 10, 12. Kolejno: obliczano wartości funkcji (parametr Δ odpowiada za wprowadzenie szumu), obliczano transformaty celem wyznaczenia splotu funkcji, obliczano splot (wygładzanie funkcji), poszukiwano elementu o maksymalnym module f_{max}, następnie dokonywano normalizacji funkcji poprzez przemnożenie wartości przez czynnik 2.5 / f_{max}. Na podstawie uzyskanych wyników (wartości funkcji bez szumów, wartości funkcji z wprowadzonymi szumami oraz wartości funkcji po przeprowadzeniu odszumiania) utworzono wykresy w celu przedstawienia wyników.

3. Wyniki

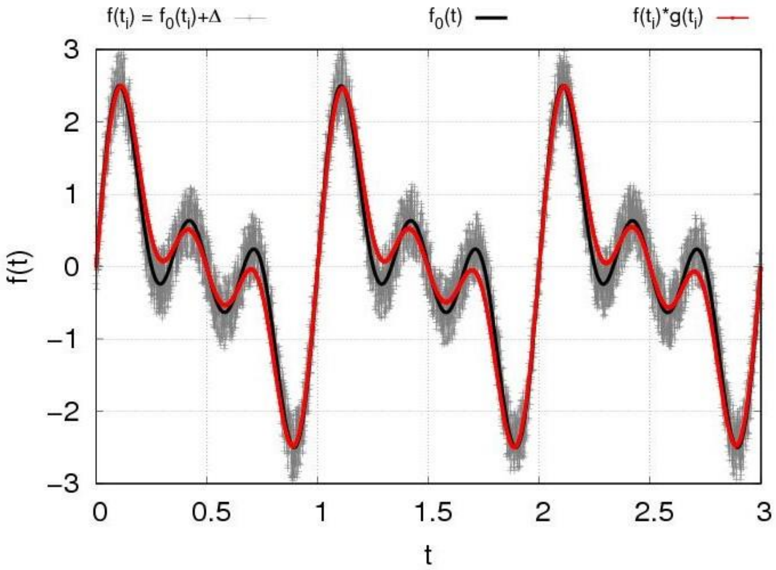
3.1. Wyniki dla k = 8



3.2. Wyniki dla k = 10



3.3. Wyniki dla k = 12



4. Wnioski

Wraz ze wzrostem wartości k zauważalne jest nieznaczne polepszenie otrzymanych wyników. Warto zauważyć, że nawet dla $k = 8$ uśredniona funkcja f jest bliska funkcji f_0.

Skorzystanie z szybkiej transformacji Fouriera pozwala na otrzymanie transformaty bazując na algorytmie o mniejszej złożoności czasowej niż ta wynikająca ze skorzystania z algorytmu opartego bezpośrednio na wzorze na dyskretną transformatę Fouriera.

Dla każdej uśrednionej funkcji wartości nie zawsze pokrywają się z wartościami funkcji podstawowej. Jest to szczególnie widoczne w okolicach ekstremów. Lepsze dopasowanie można uzyskać zmieniając parametr $\boldsymbol{\sigma}$, na przykład dla wartości 0.025 wyniki dla k = 12 niemalże w całości pokrywają się z funkcją f_0.