Sprawozdanie XIII

Szacowanie całek niewłaściwych przy użyciu kwadratur Gaussa

Adam Łaba

3 czerwca 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Kwadratury Gaussa

Metody zaliczane do kwadratur Gaussa polegają na przybliżaniu wartości całki oznaczonej na danym przedziale za pomocą sumy:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

Wzór 1.

Oznaczenia zawarte w powyższym wzorze:
$\rho(x)$ - funkcja wagowa (zależna od użytej kwadratury), $g(x)=\rho(x)f(x)$ jest funkcją podcałkową.
x_i – kolejne węzły kwadratury (łącznie jest n węzłów)
ω_i – kolejne współczynniki kwadratury (jest ich n).
Rodzaj wykorzystanej kwadratury jest związany z przedziałem całkowania i funkcją wagową.

1.2. Kwadratura Gaussa-Legendre`a

Jest to kwadratura z funkcją wagową $\rho(x) = 1$, do obliczania całek na przedziale [-1, 1].

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

Wzór 2.

W celu zastosowania tych wzorów na przedziale domkniętym innym niż [-1, 1] konieczne jest dokonanie transformacji liniowej zmiennej niezależnej.

1.3. Kwadratura Gaussa-Hermite`a

Mamy z nią do czynienia w przypadku funkcji wagowej $\rho(x) = exp(-x^2)$, całkując na przedziale $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

Wzór 3.

1.4. Kwadratura Gaussa-Laguerre`a

Jest to kwadratura z funkcją wagową $\rho(x) = exp(-x)$, na przedziale $[0, \infty)$:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

Wzór 4.

2. Zadanie do wykonania

Całość zadania została wykonana za pomocą własnej implementacji poszczególnych metod w języku C, korzystając z zasobów biblioteki numerical recipes (funkcje wyznaczające węzły i współczynniki kwadratury dla danych metod). Dla zmiennej liczby węzłów kwadratury, obliczaliśmy wartości różnych całek, zapisując do pliku wartości błędów (wartość bezwzględna różnicy między otrzymanym wynikiem a wartością analityczną) dla danej ilości węzłów celem przedstawienia tej zależności na wykresie.

2.1. Obliczanie całki kwadraturą Gaussa-Legendre`a

Całka, która była przybliżana numerycznie za pomocą tej metody:

$$c_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

Wzór 5.

Jej wartość analityczna to π / 3. W celu wyznaczenia węzłów i współczynników kwadratury została wykorzystana funkcja z biblioteki NR o sygnaturze:

```
gauleg(float x1, float x2, float x[], float w[], int n)
```

A następnie bazując na otrzymanych wynikach obliczono numerycznie całkę za pomocą sumy. Całość została powtórzona dla liczby węzłów n = 2, 3, …, 100.

2.2. Obliczanie całki kwadraturą Gaussa-Hermite`a

Stosując tą kwadraturę przybliżano całkę:

$$c_2 = \int_0^\infty \ln(x) \exp(-x^2) dx$$

Wzór 6.

Wartość analityczna tej całki równa jest −0.8700577. Biorąc pod uwagę fakt, że konieczne jest wydzielenie z funkcji podcałkowej funkcji wagowej $\rho(x) = exp(-x^2)$ oraz ze względu na zmianę przedziału konieczne jest podzielenie przez dwa, wykorzystana do sumy funkcja:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(|x|)$$

Wzór 7.

Do wyznaczenia węzłów i współczynników została wykorzystana funkcja z biblioteki NR:

```
gauher(float x[], float w[], int n)
```

Dla węzłów n = 2, 4, …, 100 (pomijamy nieparzyste, gdyż dla nich 0 występuje jako węzeł co jest problematyczne biorąc pod uwagę funkcję *f*) obliczono numerycznie całkę. Dodatkowo obliczono tę całkę kwadraturą Gaussa-Legendre'a na przedziale (0, 5].

2.3. Obliczanie całki kwadraturą Gaussa-Laguerre'a

Obliczana całka:

$$c_3 = \int_0^\infty \sin(2x)\exp(-3x)dx$$

Wzór 8.

Której wartość analityczna wynosi 2/13. Aby dopasować funkcję podcałkową tak aby pasowała do tej metody, wydzielamy funkcję wagową, otrzymując

$$f(x) = \sin(2x)\exp(-2x)$$

Wzór 9.

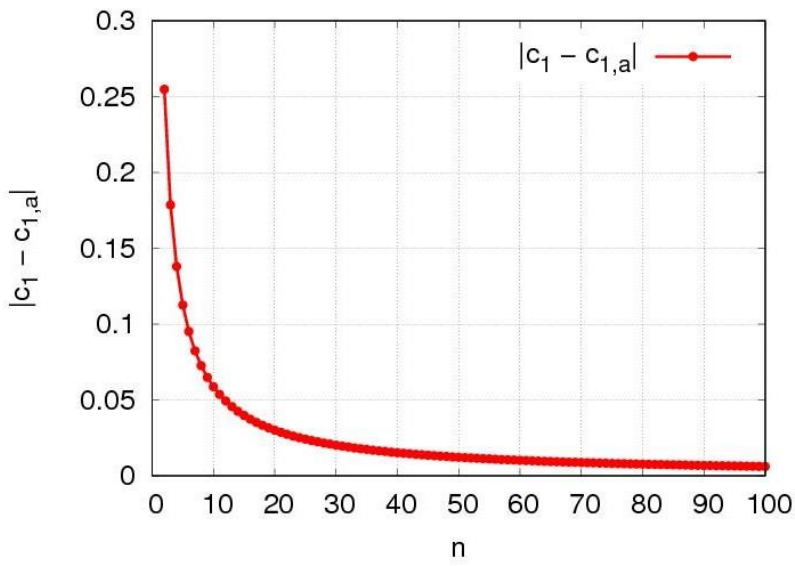
Funkcja z biblioteki NR dzięki której wyznaczono węzły i współczynniki:

```
gaulag(float x[], float w[], int n, float alf)
```

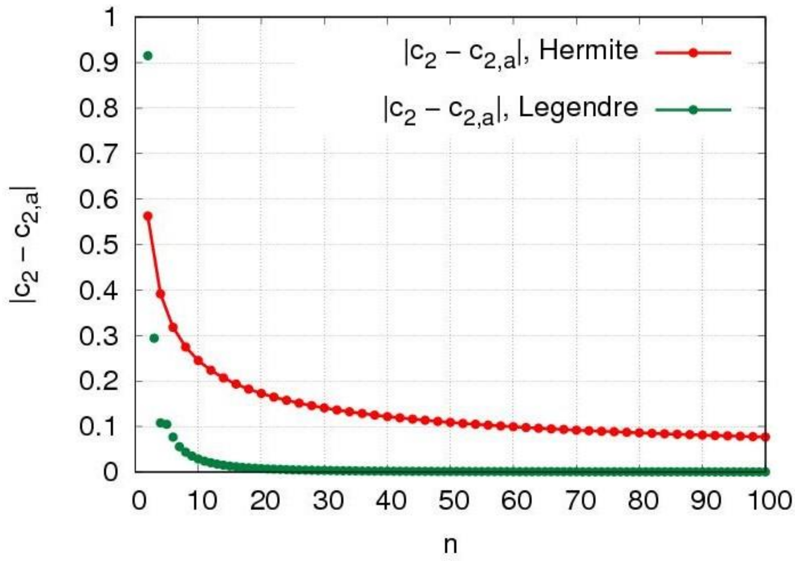
Całka była przybliżana numerycznie dla $n = 2, 3, \ldots, 20$.

3. Wyniki

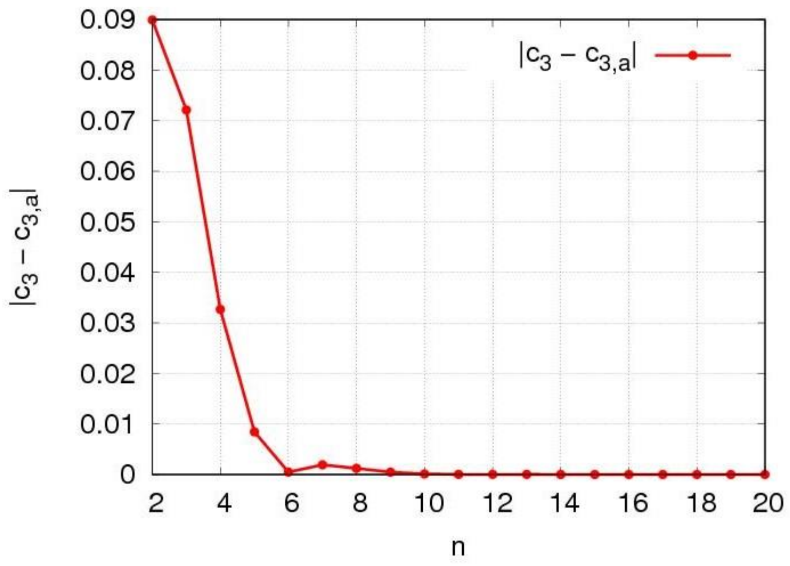
3.1. Przybliżanie c_1 kwadraturą Gaussa-Legendre`a



3.2. Przybliżanie c_2 kwadraturą Gaussa-Hermite`a i Gaussa-Legendre`a



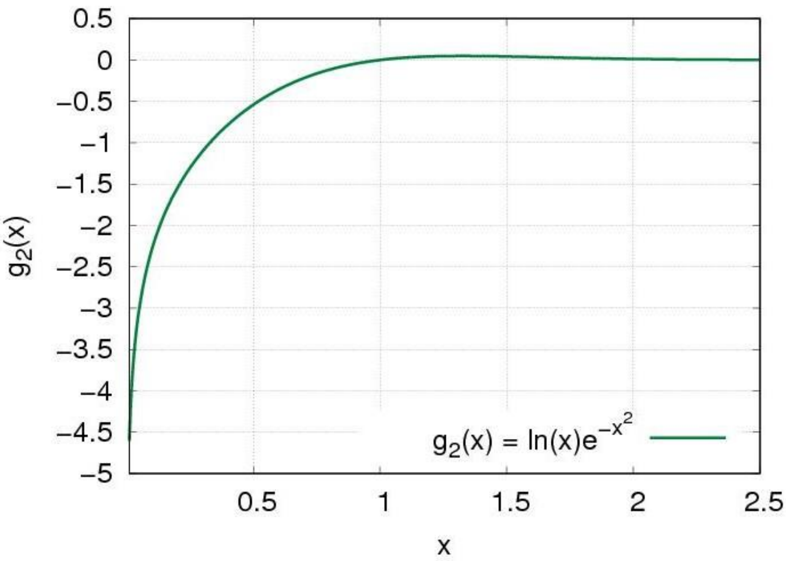
3.3. Przybliżanie c_3 kwadraturą Gaussa-Laguerre'a



4. Wnioski

Kwadratury Gaussa pozwalają na przybliżenie numeryczne całki na dowolnym przedziale. Dokładność tego przybliżenia jest ściśle zależna od ilość węzłów kwadratury i wzrasta wraz ze wzrostem ilości węzłów aż do wartości błędu bliskiej zeru.

W ćwiczeniu 3.2 zauważalna jest przewaga metody Gaussa-Legendre`a nad metodą Gaussa-Hermite`a dla całkowanej funkcji – jest to ściśle związane z jej postacią:



Jak można zauważyć, funkcja ta mocno zmienia wartości jedynie na przedziale (0, 2.5], powyżej tych wartości dążąc do 0. Korzystając z kwadratury G-L na przedziale [0, 5] mamy pewność, że węzły są zagęszczone w miejscach, gdzie wartości funkcji mocno się zmieniają. Dla kwadratury G-H węzły są rozrzucone na dużo większym przedziale, przez co ich zagęszczenie w (0, 2.5] jest mniejsze i w efekcie otrzymane przybliżenie dalsze od wartości analitycznej.