Sprawozdanie III

Metoda sprzężonych gradientów dla macierzy wstęgowej

Adam Łaba

19 marca 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Macierz wstęgowa

Macierz wstęgowa jest kwadratową macierzą, której wszystkie elementy poza przekątną główną i wstęgą wokół niej (czyli przekątnymi oddalonymi maksymalnie o daną wartość od diagonali) za wartości przyjmuje zero. Macierze wstęgowe są charakteryzowane przez wartość *m*, nazywaną szerokością wstęgi. Można je zapisać równaniem (dla macierzy *n x n*):

$$a_{i,j} \neq 0, \;\; dla\,|i-j\,| \leqslant m, \quad i,j = 1,\ldots,n$$
$$a_{i,j} = 0, \;\; dla\,|i-j\,| > m$$

.

1.2 Metoda sprzężonych gradientów

Jest to iteracyjna metoda służąca do rozwiązywania szczególnych układów równań liniowych. Aby było to możliwe, macierz musi być dodatnio określona oraz symetryczna. Opiera się ona na wykorzystaniu algorytmu:

$$v_1 = r_1 = b - Ax_1$$

$$while\,\left(r_k^T r_k > val\right)$$
$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{v_k A v_k}$$
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k v_k$$
$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A v_k$$
$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$$
$$v_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k v_k,$$

gdzie:

v, *r*, *b* – odpowiednie wektory, *val* - wartość będąca warunkiem wykonania pętli.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Wykorzystana macierz

Wykorzystana w zadaniu macierz opisana była wzorem:

$$a_{i,j} = \frac{1}{1+|i-j|}, \ dla\,|i-j| \leqslant m, \quad i,j = 0,\ldots,n-1$$
$$a_{i,j} = 0, \ dla\,|i-j| > m$$
,

gdzie:

m = 5, n = 1000. Później, przy analizie czasu działania algorytmów, wykorzystano analogiczną macierz o n = 10000.

2.2 Przygotowanie do wykorzystania metody

Przed wykorzystaniem samej metody konieczne było utworzenie i inicjalizacja odpowiednich wektorów. Wektor wyrazów wolnych *b* wypełniony został w sposób:

$$b[i] = i+1, \ \ i = 0,\ldots,n-1,$$

Natomiast wektor startowy *x*:

$$x[i] = 0, \ \ i = 0,\ldots,n-1.$$

Pozostałe wektory, tj. v oraz r zostały wypełnione zgodnie z częścią inicjalizacyjną metody SG.

2.3 Rozwiązanie układu metodą SG

Następnie, korzystając z własnej implementacji metody sprzężonych gradientów rozwiązano układ równań $Ax = b$. W każdej iteracji pętli while zapisywano do pliku wartości: normy euklidesowej wektora reszt, która wyrażała się wzorem:

$$||r_k||_2 = \sqrt{r_k^T r_k},$$

wartość α_k, wartość β_k oraz wartość normy euklidesowej wektora rozwiązań:

$$||x_k||_2 = \sqrt{x_k^T x_k}.$$

W celu oceny wydajności tej metody dodatkowo mierzono czas jej wykonania.

2.4 Rozwiązanie metodą Gaussa-Jordana, pomiary czasu

Później, aby móc porównać wydajność metody sprzężonych gradientów, rozwiązano ten sam układ metodą Gaussa-Jordana, dodatkowo mierząc czas trwania obliczeń. W tym celu skorzystano z gotowej funkcji z biblioteki numerical recipes:

```
void gaussj(float** A, int n, float** b, int m);
```

3. Wyniki

3.1 Zależność wartości normy euklidesowej wektora reszt od iteracji

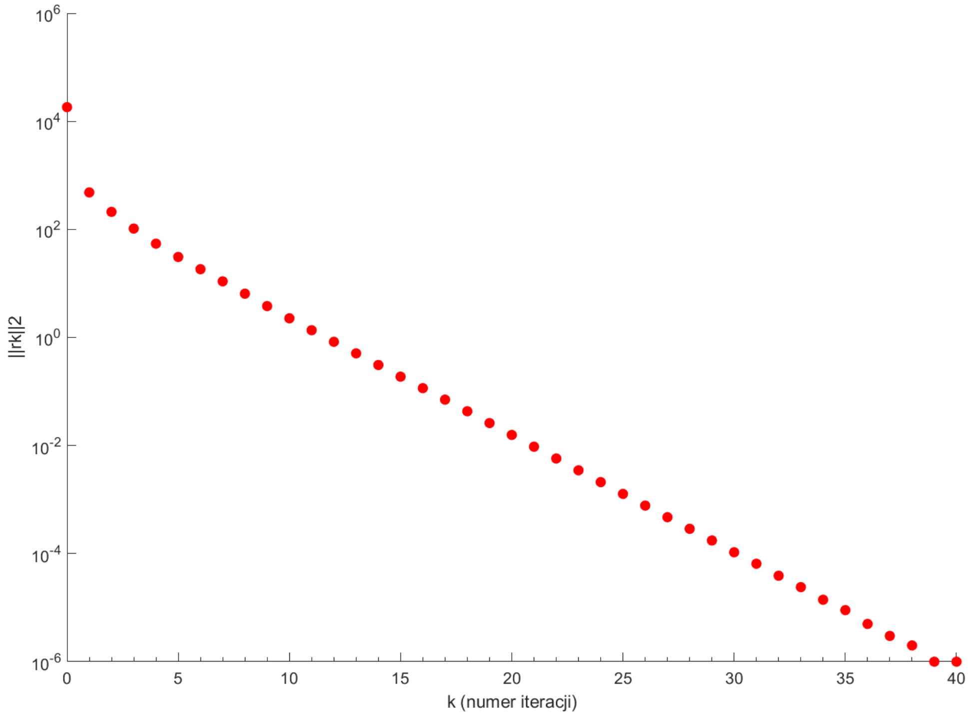

fig1. Zależność f(k) = $||r_k||_2$, Oy w skali logarytmicznej

3.2 Zależność wartości normy euklidesowej wektora rozwiązań od iteracji

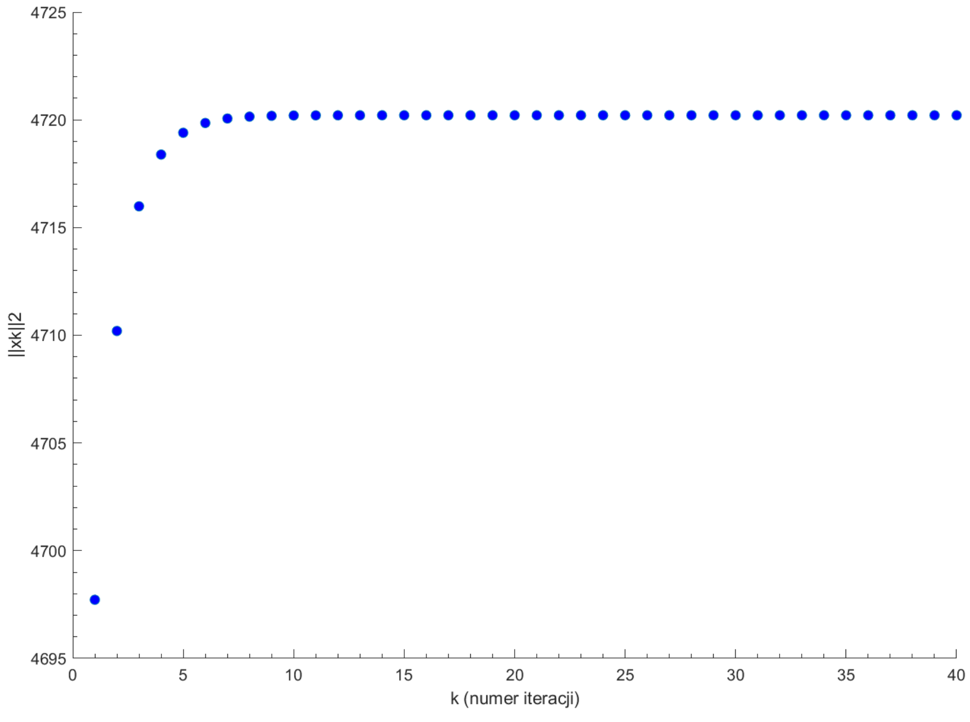

fig2. Zależność f(k) = $||x_k||_2$, Oy w zakresie <4695; 4725>

3.3 Pomiary czasu

Metoda	SG	GJ
Czas działania [s], n = 10^3	0.015625	22.433001
Czas działania [s], n = 10^4	1.031250	6176.094238

4. Wnioski

Metoda sprzężonych gradientów jest efektywnym sposobem do rozwiązywania układów równań postaci $Ax = b$ dla macierzy wstęgowych. Porównując ją do metody Gaussa-Jordana, kolosalna różnica w czasie działania wynika ze znacznie mniejszej złożoności algorytmu SG (w każdej iteracji tylko raz mnożymy macierz z wektorem) oraz ograniczonej liczby iteracji. Warto dodać, że chociaż w tym zadaniu zajmowaliśmy pamięć dla całej macierzy, to macierze wstęgowe o szerokości wstęgi m można zapisywać korzystając z $2m + 1$ wektorów.