Sprawozdanie VII

Interpolacja Lagrange'a z optymalizacją położeń węzłów

Adam Łaba

24 kwietnia 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja Lagrange'a

Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonej wartości funkcji w dowolnym punkcie w oparciu o zbiór punktów, dla których wartość funkcji jest znana (zwanych węzłami interpolacji). Polega to na znalezieniu funkcji interpolującej F(x), która w węzłach interpolacji będzie przyjmować wartości takie same jak funkcja interpolowana.

Interpolacja Lagrange`a szuka rozwiązania problemu w postaci funkcji wielomianowej. Dla n + 1 węzłów interpolacji tworzymy wielomian $W_n(x)$ stopnia n, za pomocą którego wyznaczamy potem przybliżoną wartość funkcji interpolowanej w punkcie x korzystając ze wzoru:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{k=0 \wedge k \neq j}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)},$$

gdzie: x_j - j-ty węzeł interpolacji, y_j - wartość w tym węźle, x - położenie międzywęzłowe dla którego szukamy przybliżonej wartości funkcji.

1.2 Zera wielomianów Czebyszewa

Przy doborze węzłów interpolacyjnych optymalne położenia stanowią zera wielomianów Czebyszewa. W takiej sytuacji nie mamy do czynienia z węzłami równomiernie rozmieszczonymi, ale zagęszczonymi na krańcach przedziału. Takie rozmieszczenie pozwala na uzyskanie najmniejszego oszacowania błędu. Zera wielomianów Czebyszewa wyznaczamy w oparciu o wzór:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\frac{2m+1}{2n+2}\pi + (b+a)\right], \;\; m = 0, 1, \ldots, n,$$

gdzie: x_m – m-ty węzeł interpolacji, b - górna granica przedziału, a – dolna granica przedziału.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Dana funkcja

Funkcja, którą interpolowaliśmy, dana była równaniem:

$$f(x) = \exp(-x^2).$$

Wyznaczaliśmy przybliżone wartości funkcji w przedziale [-5, 5] z krokiem 0.01.

2.2 Wykonanie zadania

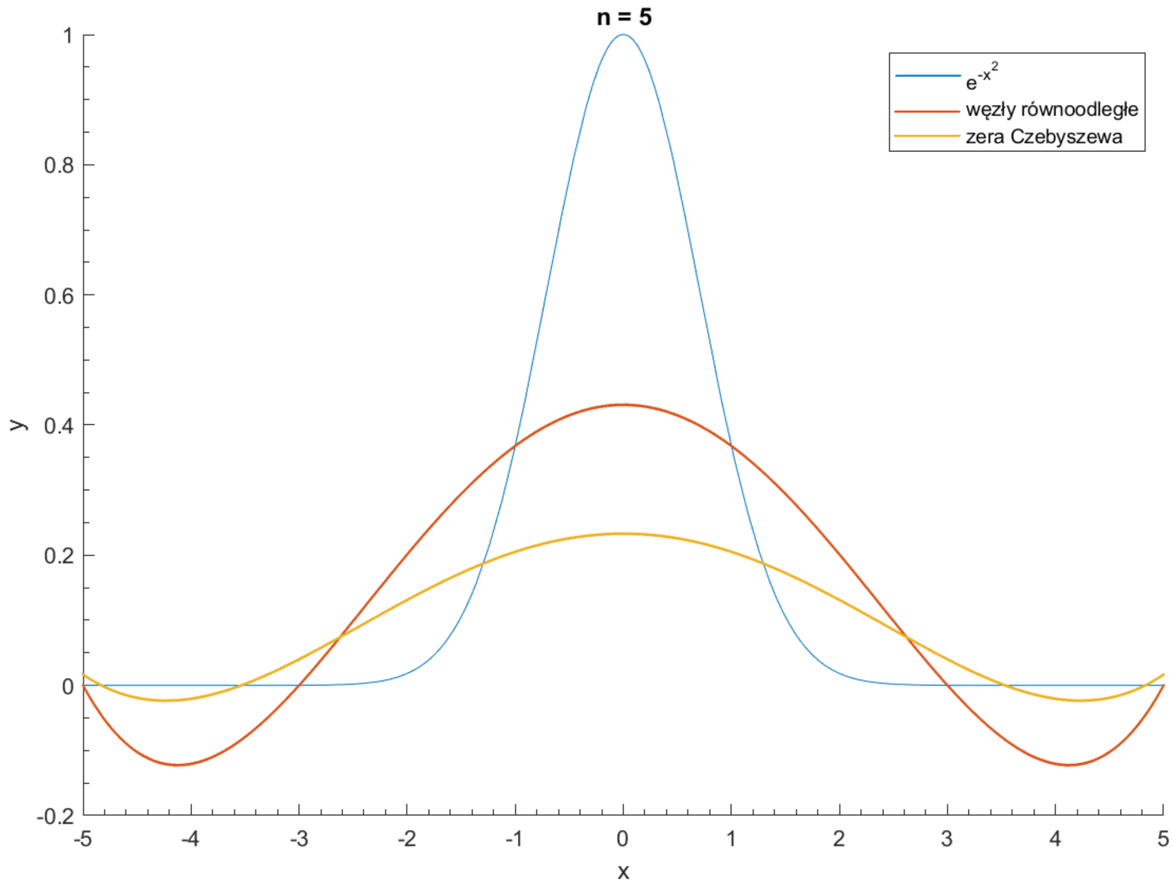
Dla danej funkcji, przy wykorzystaniu interpolacji Lagrange'a, wyznaczaliśmy przybliżone wartości w położeniach międzywęzłowych, zmieniając sposób rozłożenia węzłów (węzły równoodległe, zera wielomianów Czebyszewa) oraz ilość węzłów (5, 10, 15, 20).

Zadanie zostało zrealizowane przy wykorzystaniu własnej implementacji funkcji służącej do obliczania przybliżonej wartości funkcji dla danego położenia międzywęzłowego (opartej o interpolację Lagrange'a) oraz własnej implementacji funkcji służącej do obliczania kolejnych zer wielomianu Czebyszewa.

Wyniki przybliżonych wartości dla kolejnych konfiguracji ilości węzłów i sposobu ich wyznaczenia były zapisywane do pliku, w celu późniejszego przedstawienia ich na wykresie.

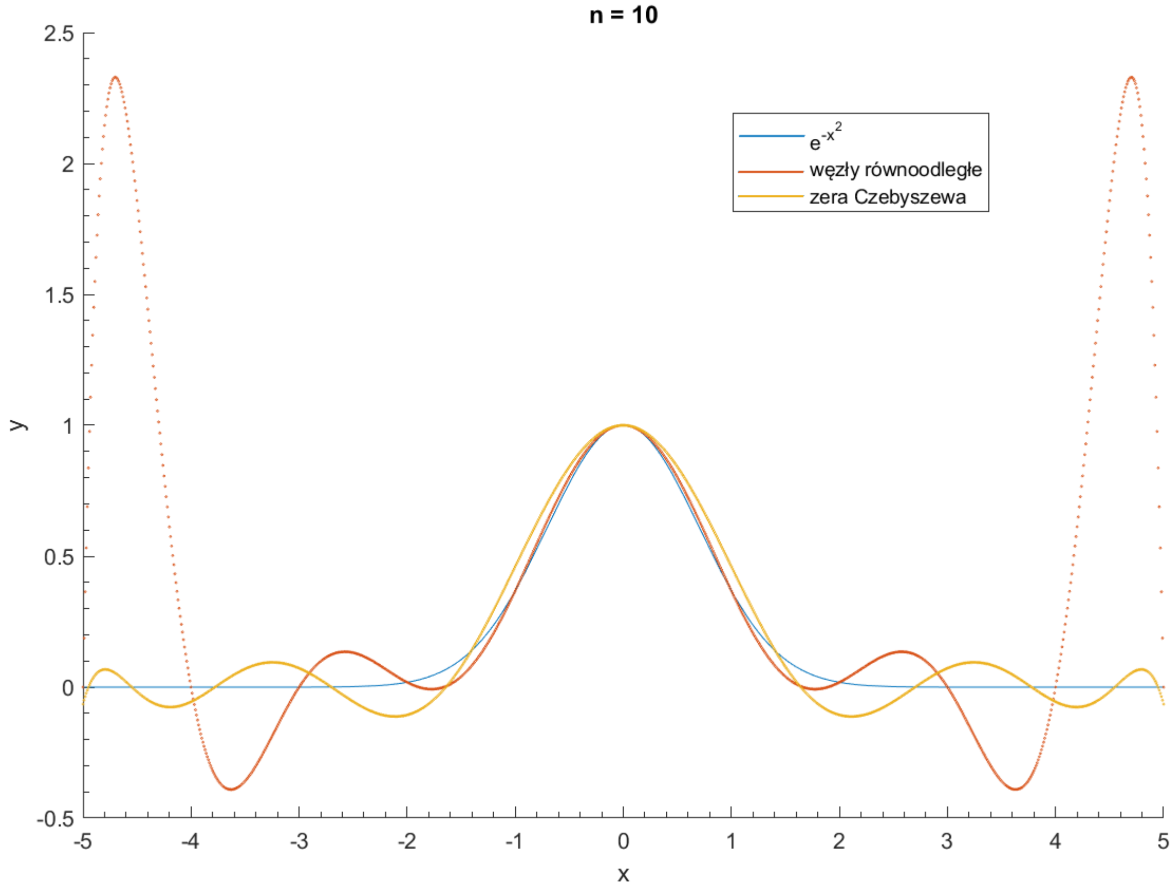
3. Wyniki

3.1 Wyniki dla n = 5



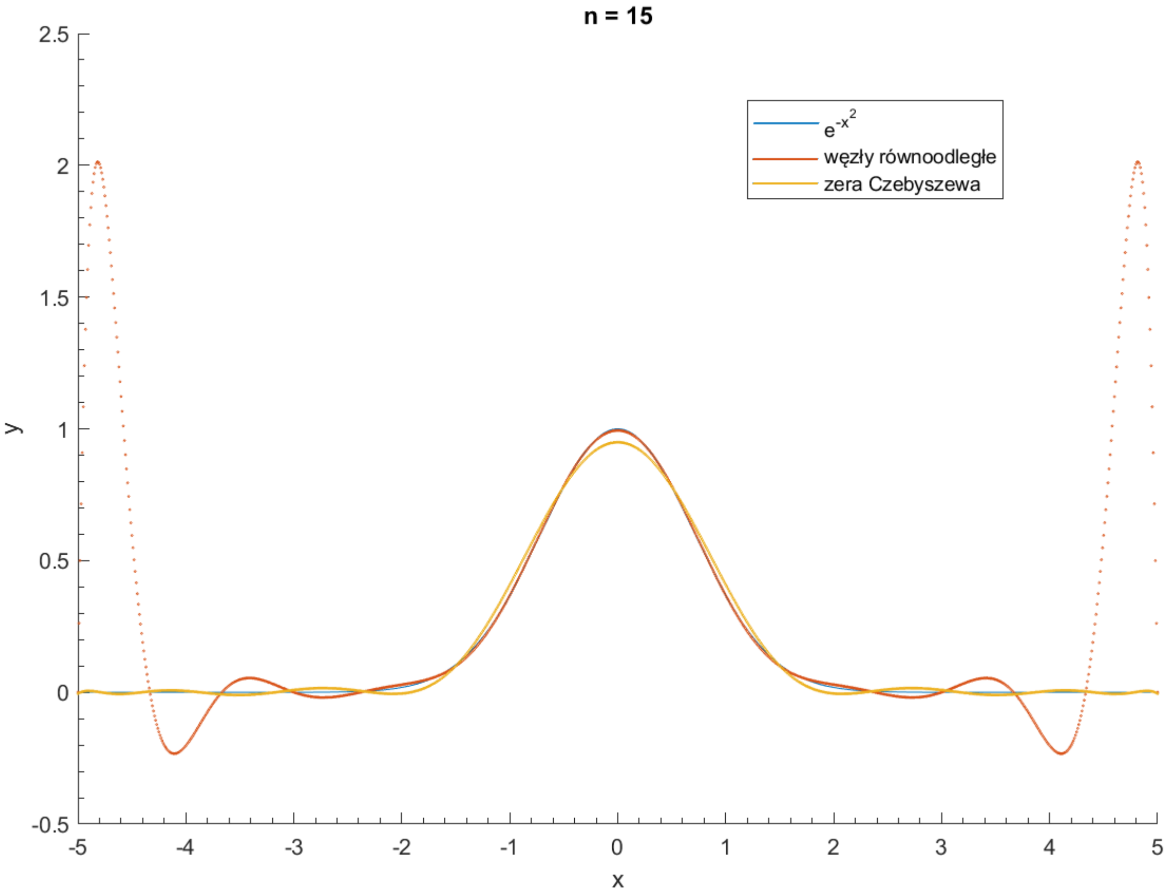
rys1. Wyniki dla n = 5 zestawione z interpolowaną funkcją

3.2 Wyniki dla n = 10



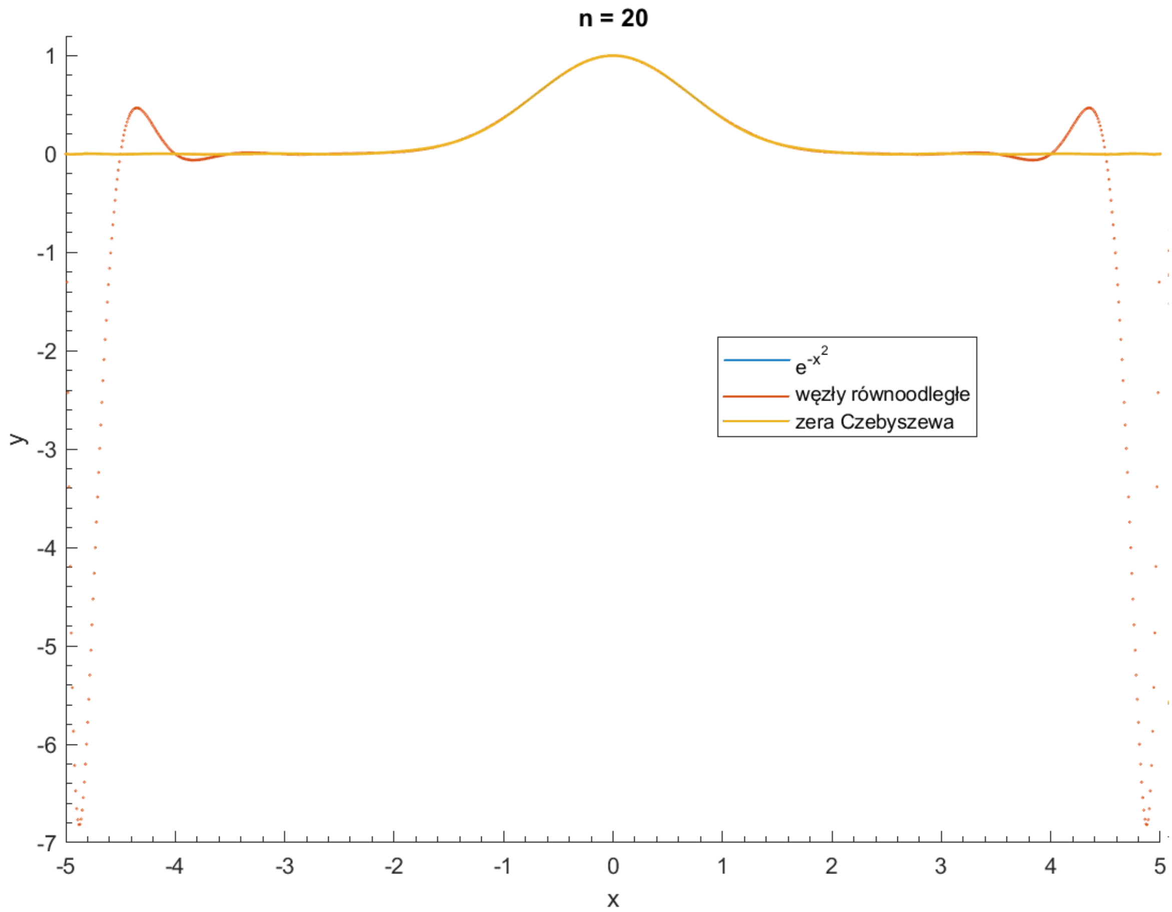
rys2. Wyniki dla n = 10 zestawione z interpolowaną funkcją

3.3 Wyniki dla n = 15



rys3. Wyniki dla n = 15 zestawione z interpolowaną funkcją

3.4 Wyniki dla n = 20



rys4. Wyniki dla n = 20 zestawione z interpolowaną funkcją

4. Wnioski

Dla interpolacji przy wykorzystaniu węzłów równoodległych wraz ze wzrostem liczby węzłów zauważamy coraz lepsze dopasowanie w centrum interpolowanego przedziału, natomiast w punktach bliskich do granicy górnej i dolnej funkcja interpolująca coraz mocniej odbiega od funkcji interpolowanej. Zjawisko to nazywane jest efektem Rungego: mimo zwiększania liczby węzłów interpolacyjnych, jakość interpolacji się pogarsza.

Dla interpolacji przy wykorzystaniu zer wielomianu Czebyszewa jako węzłów interpolacji, wraz ze wzrostem liczby węzłów funkcja interpolująca jest coraz bliższa funkcji interpolowanej.

Wynika stąd, że dobór węzłów interpolacji ma bezpośredni wpływ na jakość dopasowania. Dla węzłów zagęszczonych blisko granic przedziału (jak np. zera Czebyszewa) wraz ze wzrostem liczby węzłów interpolacja będzie coraz dokładniejsza, natomiast dla węzłów równoodległych za sprawą efektu Rungego otrzymamy efekt odwrotny - jakość dopasowania będzie spadać.