Sprawozdanie II

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Adam Łaba

12 marca 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Rozkład LU macierzy

Rozkład LU polega na rozłożeniu macierzy A na dwie macierze L i U takie, że

$$A = L \cdot U,$$

gdzie macierz L jest macierzą trójkątną dolną, a macierz U - macierzą trójkątną górną. Proces rozkładu macierzy na macierze L i U nazywamy dekompozycją, rozkład LU służy do rozwiązywania układów równań liniowych. Dzięki temu, możemy przedstawiać równania

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

za pomocą równań prostszych:

$$L \cdot \vec{y} = \vec{b}$$
$$U \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

To, że macierze L i U są trójkątne znacznie ułatwia rozwiązywanie danych równań.

1.2 Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy rozłożonej na macierze L i U sprowadza się do wykorzystania twierdzenia Cauchy`ego:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Jako że wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem elementów na jej diagonali, problem ten staje się trywialny.

1.3 Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wskaźnik uwarunkowania macierzy określa, jak bardzo błąd związany z reprezentacją danych wejściowych będzie wpływać na błąd wyniku. Na podstawie jego wartości określa się problemy jako źle lub dobrze uwarunkowane. Oblicza się go, korzystając z norm, za pomocą wzoru:

$$cond = ||A||_{\alpha,\beta} \cdot ||A^{-1}||_{\alpha,\beta}.$$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Wykorzystana macierz

Macierz o rozmiarze 4x4, na której operowano, była dana równaniem:

$$A_{i,\,j} = \frac{1}{i+j+\delta} \quad i,\, j = 0,\, \ldots,\, 3,\, \delta = 2$$

2.2 Dekompozycja LU, wyznacznik macierzy A

Pierwszym krokiem było poddanie macierzy dekompozycji LU za pomocą funkcji z biblioteki GSL:

```
int gsl_linalg_LU_decomp(gsl_matrix *A, gsl_permutation *p, int *signum)
```

Funkcja ta, wykorzystując to, że macierz L na swojej diagonali ma same jedynki, nadpisuje macierz A jej rozkładem LU, na diagonali umieszczając elementy macierzy U. Następnie, znając elementy znajdujące się na diagonali macierz U wyznaczono wyznacznik macierzy A.

2.3 Wyznaczenie macierzy A^{-1}

Kolejnym krokiem było wyznaczenie macierzy odwrotnej A^{-1} korzystając z funkcji:

```
int gsl_linalg_LU_solve(gsl matrix *A, gsl_permutation *p, float b[n])
```

Funkcja ta posłużyła nam do rozwiązania n (czyli w naszym przypadku 4) układów równań z wektorami wyrazów wolnych b_n rozmiarów 4x1, które wyrażały się wzorem:

$$b_i = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$$

W ten sposób każdy z tych wektorów został nadpisany kolumną macierzy odwrotnej i łącząc je otrzymano macierz A^{-1}.

2.4 Iloczyn macierzy A i A^{-1}

Następnie obliczono iloczyn macierzy A i A^{-1}, korzystając z algorytmu Cauchy`ego:

```
for (i = 0; i < n; ++i) {
	for (j = 0; j < n; ++j) {
		C[i][j] = 0;
		for (k = 0; k < n; ++k)
			C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
}
```

Istnieją lepsze algorytmy do mnożenia macierzy, ale dla rozmiarów 4x4 algorytm Cauchy`ego jest zadowalający.

2.5 Obliczenie wskaźnika uwarunkowania macierzy

Ostatnim krokiem było obliczenie wskaźnika uwarunkowania macierzy. W tym ćwiczeniu jako normę wykorzystano:

$$||A||_{1,\,\infty} = \max|a_{i,\,j}|,\, 1 \leqslant i,\, j \leqslant n.$$

3. Wyniki

3.1 Elementy diagonalne macierzy U

$$a_{1,1} = 0.5,\ a_{2,2} = 0.033333,\ a_{3,3} = -0.001389,\ a_{4,4} = 0.000102,$$

3.2 Wyznacznik macierzy A

$$\det(A) = -2.362 \cdot 10^9.$$

3.3 Macierz A^{-1}

$$\begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix}.$$

3.4 Iloczyn macierzy A i A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2.2737 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 \\ -2.8422 \cdot 10^{-14} & 1 & 4.5475 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 0 & -2.2737 \cdot 10^{-13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.5 Wskaźnik uwarunkowania macierzy A

$$cond = 14700.$$

4. Wnioski

Według teorii iloczyn macierzy i macierzy do niej odwrotnej powinien dać macierzy jednostkową. W naszym przypadku w macierzy wynikowej poza jedynkami na diagonali pojawiły się inne wartości. Mimo tego, że bliskie zeru, to jednak od zera różne. Wynika to z niedokładności obliczeń komputerowych – jako że wskaźnik uwarunkowania macierzy A jest stosunkowo dużą wartością (14700), to macierz A jest problemem źle uwarunkowanym, więc przy wykorzystaniu jej przy obliczeniach komputerowych można spodziewać się wystąpienia błędów w wyniku. Dodatkowo, wyznacznik macierzy A ma stosukowo małą wartość (rzędu 10^{-9}).

Wynika z tego, że dla tej macierzy metoda LU nie jest metodą optymalną.