Sprawozdanie 1.1
Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Adam Łaba
5 marca 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Metoda Gaussa-Jordana

Układ algebraicznych równań liniowych (UARL) za pomocą metody Gaussa-Jordana rozwiązuje się w następujący sposób:

1) Zapisanie układu równań w macierzy rozszerzonej, czyli składającej się z macierzy współczynników przy niewiadomych i kolumny wyrazów wolnych

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ 3a+b &= 4 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

2) Następnie doprowadzamy macierz do postaci schodkowej za pomocą operacji elementarnych (czyli zamiana kolumn/wierszy miejscami, dodanie wiersza do innego przemnożonego przez pewną wartość, przemnożenie wiersza przez liczbę różną od zera).

3) Sprawdzamy, czy rozwiązanie istnieje - jeśli rząd macierzy współczynników jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej, to rozwiązanie układu równań znajduje się w kolumnie wyrazów wolnych

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis ćwiczenia

Ćwiczenie polegało na wykorzystaniu metody G-J do wyznaczenia kolejnych wychyleń oscylatora harmonicznego.

Korzystając z drugiej zasady dynamiki:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t).$$

Korzystając z ilorazu różnicowego można przybliżyć lewą stronę równania do postaci:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t)-2x(t)+x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}.$$

Dodając oznaczenia $\Delta t = h$, $xi = x(ih)$ dochodzimy do równania, które pozwala nam na wyznaczenie kolejnej wartości wychylenia na podstawie dwóch poprzednich wartości:

$$x_{i+1} + \left(\omega^2 h^2 - 2\right)x_i + x_{i-1} = 0.$$

Aby być w stanie wyliczyć dowolne i-te położenie, musimy jeszcze poznać warunki początkowe. Wychylenie $x_0 = A$, a $v_0 = (x_1 - x_0)/h$.

2.2 Wyniki

Korzystając z danych:
k/m = 1 $v_0 = 0$ *A = 1* *h = 0.1*.

Utworzyłem macierz kwadratową, która:

- na głównej przekątnej (a_{11} ... a_{nn}) posiada wartości 1,
- na przekątnej a_{21} ... a_{nn-1} posiada wartości 1.99, czyli $\omega^2 h^2 - 2$ (za wyjątkiem a_{21}, które równe jest -1),
- na przekątnej a_{31} ... a_{nn-2} posiada wartości 1.

Jest to macierz współczynników. Aby stworzyć z niej macierz rozszerzoną, konieczna jest jeszcze kolumna wyrazów wolnych:

- pierwszy element $a_1 = 1$ (= *A*),
- drugi element $a_2 = 0$ (= $v_0 h$),
- każdy kolejny element, aż do n-tego jest równy 0.

W ten sposób, doszedłem do macierzy, którą można rozwiązać metodą G-J. Podstawiając za *n* 200, za pomocą programu obliczyłem 200 kolejnych wychyleń i przedstawiłem otrzymane wyniki na wykresie, dodatkowo zestawiając je z funkcją cosinus:

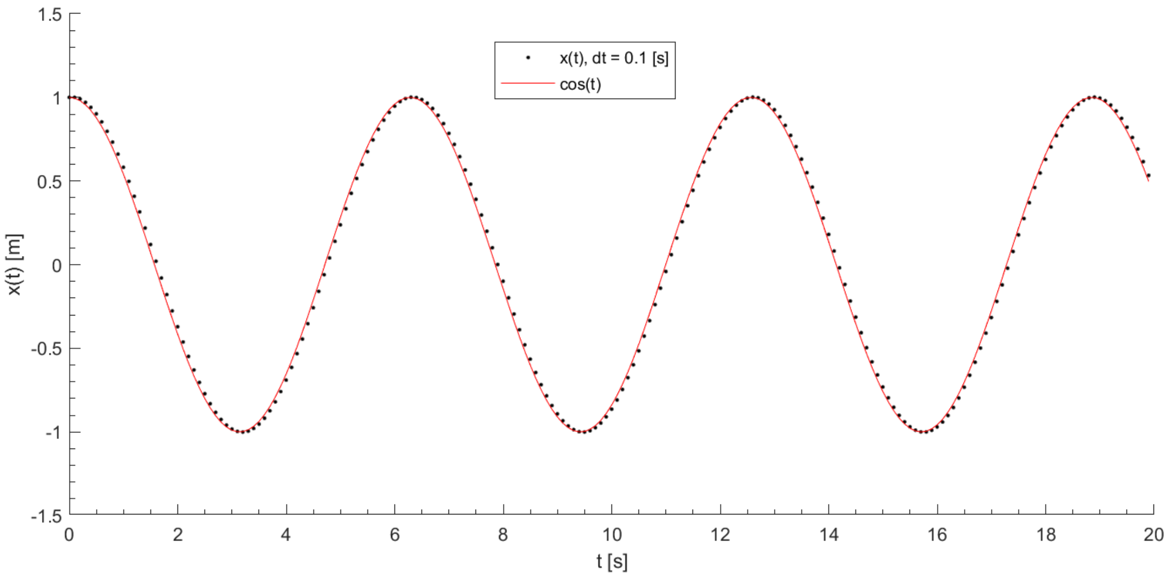

fig1. Otrzymane dane przedstawione na wykresie, zestawione z funkcją cosinus

Jak można zauważyć wyniki układają się tak, jak funkcja cosinus.

3. Wnioski

Wykorzystanie implementacji metody Gaussa-Jordana do rozwiązywania UARL w programach obliczeniowych pozwala nam na szybkie rozwiązania układów równań (prawie) dowolnych rozmiarów. Otrzymane wyniki układają się tak, jak funkcja cosinus, czego można się było spodziewać po oscylatorze z danym wychyleniem początkowym (= *A*).