Sprawozdanie IV

Uogólniony (symetryczny) problem własny - wyznaczanie modów własnych struny w 1D

Adam Łaba

26 marca 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Równanie struny

Funkcja, która opisuje wychylenie w czasie i przestrzeni drgającej struny ma postać:

$$\psi = \psi(x, t).$$

Równanie falowe opisujące dynamikę struny:

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dt^2},$$

Gdzie N jest naciągiem struny, a ρ - liniowym rozkładem gęstości. W celu rozwiązania tego równania musimy najpierw dokonać separacji zmiennych, podstawiając

$$u(x)\theta(t) = \psi(x, t),$$

oraz dzieląc przez θu. W ten sposób otrzymujemy:

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{1}{u} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} = const = -\lambda,$$

Gdzie λ jest kwadratem częstości własnej drgań. W ten sposób otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda \frac{\rho(x)}{N} u.$$

Następnie, wiedząc, że struna przymocowana jest w punktach odległych od jej środka o $L/2$ wyprowadzamy siatkę równoległych węzłów $x = x_i$, $u(x) = u_i$, $\rho(x) = \rho_i$. Odległość między tymi węzłami jest równa:

$$\Delta x = \frac{L}{n+1}.$$

Teraz możemy wyznaczyć położenie węzła w przestrzeni:

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dzięki temu możliwe jest dokonanie dyskretyzacji równania różniczkowego poprzez podstawienie trójpunktowego ilorazu różnicowego centralnego za drugą pochodną:

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda \frac{\rho_i}{N} u_i.$$

1.2 Uogólniony problem własny

Powyższe równanie można zapisać w postaci macierzowej:

$$Au = \lambda Bu,$$

Co stanowi tzw. uogólniony problem własny. Macierze A i B wypełniane są w sposób:

$$A_{i,j} = (-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1})/\Delta x^2 \qquad B_{i,j} = \frac{\rho_i}{N}\delta_{i,j},$$

gdzie

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

jest deltą Kroneckera.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Przyjęte wartości parametrów

W zadaniu przyjęliśmy: $L = 10$, $n = 200$, $\rho(x) = 1 + 4\alpha x^2$, $N = 1$.

2.2 Wykonanie zadania

Pierwszym krokiem było utworzenie macierzy A i B oraz odpowiednie ich wypełnienie. W pętli iteracyjnej, iterując po $\alpha \in [0,100]$ z krokiem $\Delta\alpha = 2$, za każdym razem rozwiązywaliśmy uogólniony problem własny korzystając z metody biblioteki GSL:

```
int gsl_eigen_gensymmv(gsl_matrix *A, gsl_matrix *B, gsl_vector
    *eval,gsl_matrix *evec, gsl_eigen_gensymm_workspace *w)
```

Gdzie eval to wektor wartości własnych, a evec to macierz o rozmiarach *n x n*, w kolumnach której zapisane są wektory własne, a w jest wektorem pomocniczym. Uzyskane w ten sposób rozwiązanie znajdujące się w wektorze eval i macierzy evec jest nieposortowane, więc w każdej iteracji należało jeszcze posortować je za pomocą kolejnej funkcji z biblioteki GSL:

```
int gsl_eigen_gensymmv_sort(gsl_vector *eval, gsl_matrix
    *evec,gsl_eigen_sort_t sort_type);
```

Po każdej iteracji zapisywano do pliku wartości pierwiastków z 6 najmniejszych wartości własnych. Dodatkowo w pierwszej i ostatniej iteracji zapisano wektory własne odpowiadające 6 najmniejszym wartościom własnym.

3. Wyniki

3.1 Zależność zmiany wartości własnych w funkcji parametru α

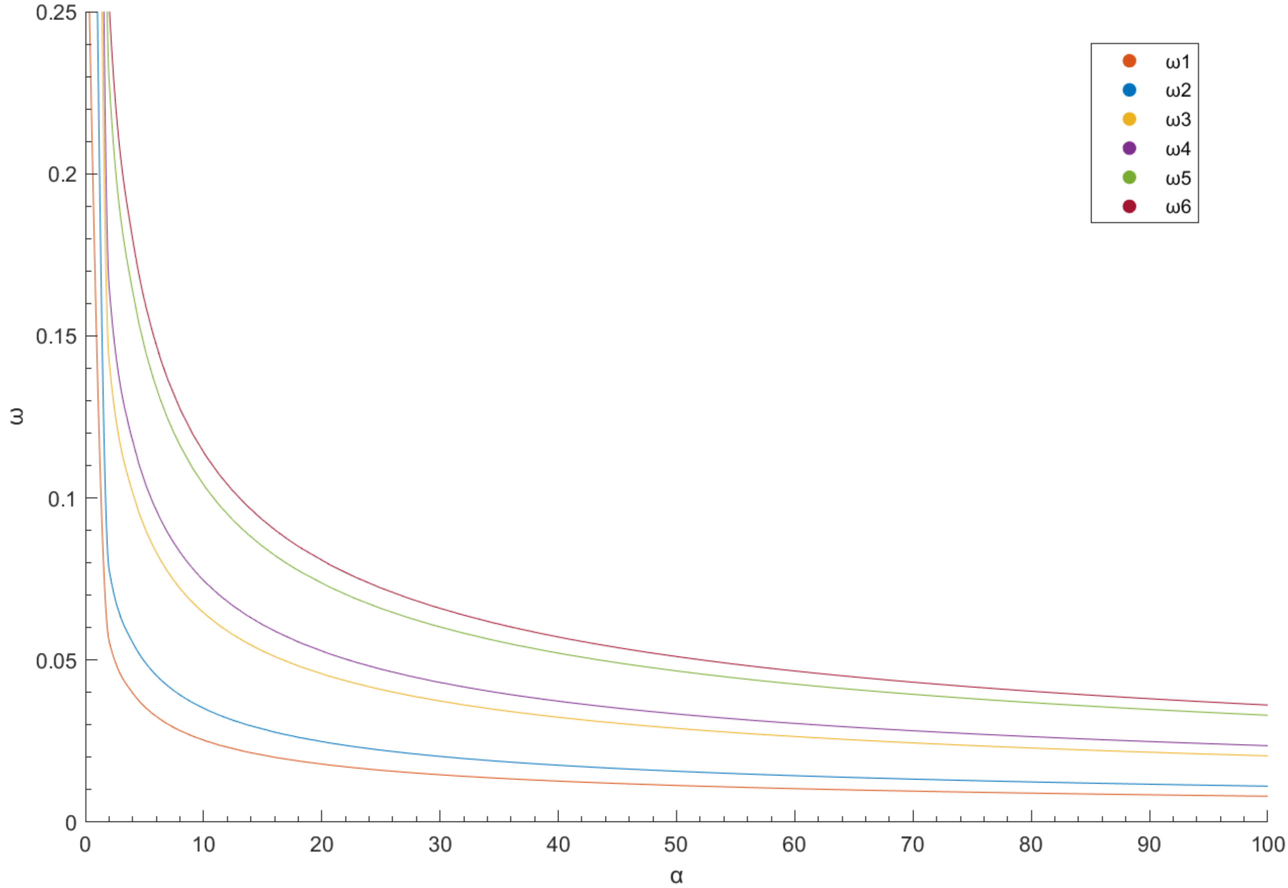

fig1. ω = f(α), zakres osi pionowej ograniczony do 0.25

3.2 Wykresy wektorów własnych odpowiadających 6 najmniejszym wartościom dla α = 0

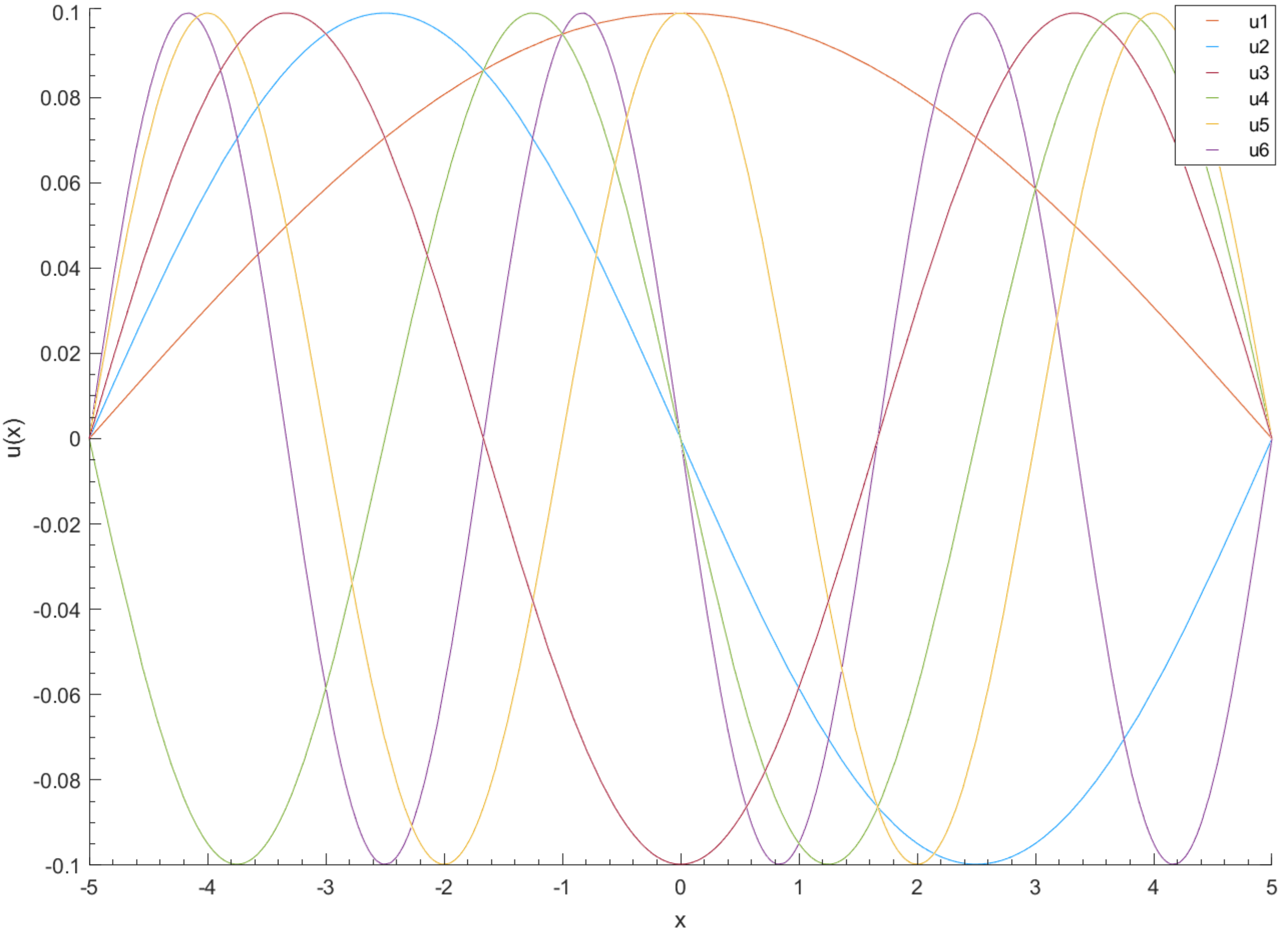

fig2. u = f(x), α = 0

3.3 Wykresy wektorów własnych odpowiadających 6 najmniejszym wartościom dla α = 100

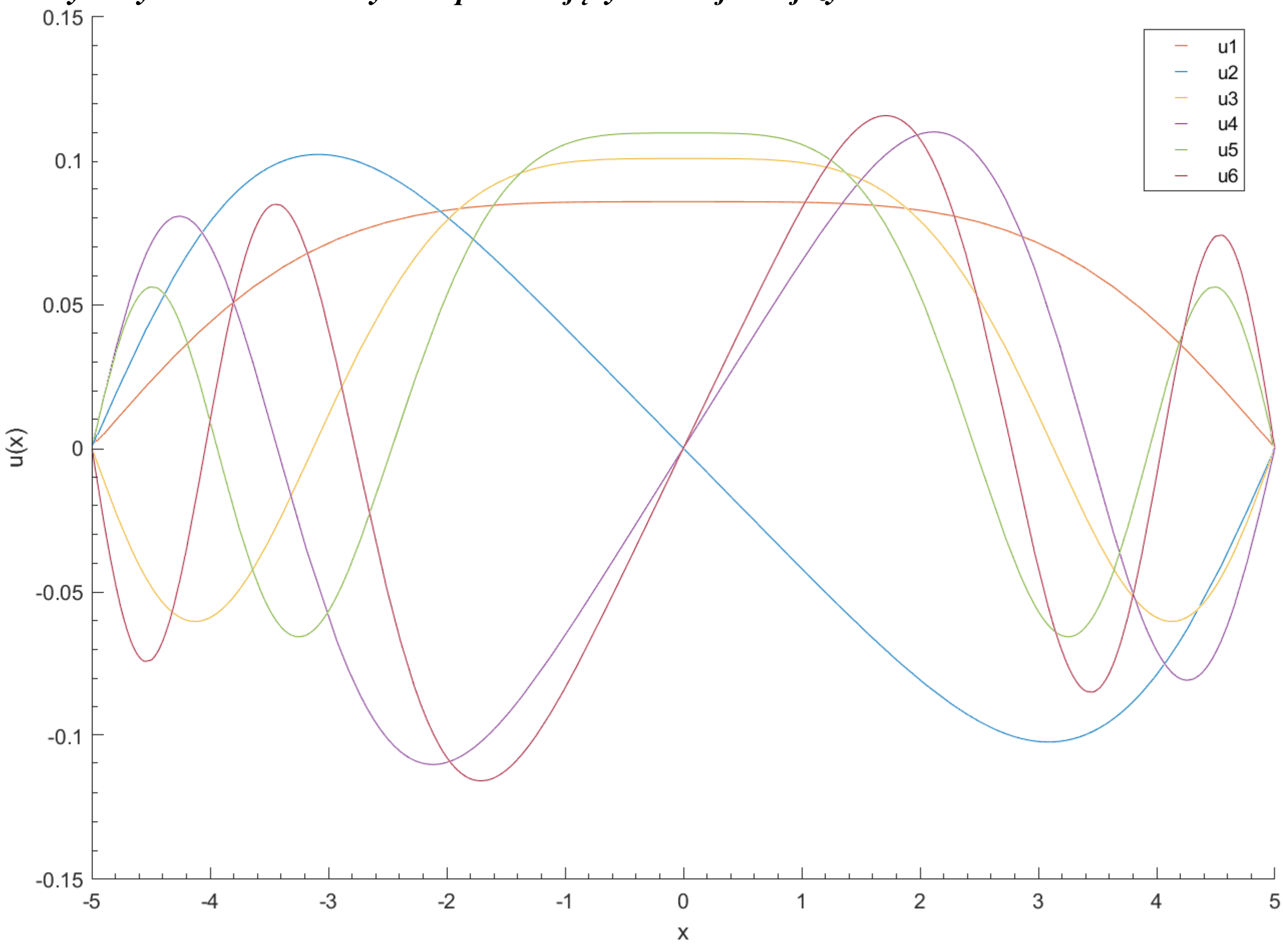

fig3. u = f(x), α = 100

4. Wnioski

Uzyskane wyniki są nierozróżnialne z przykładowymi wynikami z opisu ćwiczenia. Krzywa ω = f(α) ma charakter wykładniczy, natomiast u = f(x) prezentuje przebieg sinusoidalny.

Wraz ze wzrostem wartości alfa (czyli wzrostem liniowego rozkładu gęstości) ω (czyli częstotliwość drgań) wzrasta. Wpływa to na zmiany widoczne na wykresach – struny 1, 3 i 5 mają zauważalnie poszerzone części centralne. Dodatkowo można zauważyć zmiany amplitud.