

Sprawozdanie VIII

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Adam Łaba

30 kwietnia 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Interpolacja funkcjami sklejanymi

Interpolacja za pomocą funkcji sklejanych opiera się na podziale przedziału, w którym interpolujemy funkcję, na n podprzedziałów znajdujących się między kolejnymi węzłami interpolacyjnymi. Następnie dla każdego z tych podprzedziałów znajdujemy wielomian dopasowania lokalnego, który poza spełnieniem warunków interpolacji w danym podprzedziale, dodatkowo globalnie spełnia warunki sklejania tak, aby funkcja utworzona z połączenia kolejnych wielomianów dopasowania była ciągłą i miała ciągłe pochodne (była regularna).

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis rozwiązania

Rozwiązanie problemu uzyskujemy poprzez rozwiązanie układu równań liniowych:

$$A\vec{m} = \vec{d},$$

którego generator prezentuje się:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i,$$

Gdzie: m_i to poszukiwane wartości drugich pochodnych w węzłach. Współczynnik lambda:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \mu_i = 1 - \lambda_i.$$

Elementy wektora wyrazów wolnych d :

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right).$$

Odległości międzywęzłowe:

$$h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Dodatkowo, warunki na pierwsze i drugie pochodne na brzegach są narzucone:

$$m_0 = \alpha, m_{n-1} = \beta.$$

Ostatecznie, układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \dots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \dots \\ d_{n-2} \\ \text{beta} \end{bmatrix}.$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań wartość funkcji interpolującej dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$ wyznaczamy w oparciu o wzór:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i,$$

gdzie stałe całkowania mają postać:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (m_i - m_{i-1})$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1} \frac{h_i^2}{6}.$$

2.2. Interpolowane funkcje

W ramach tego ćwiczenia przeprowadzono interpolację funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f_2(x) = \cos(2x).$$

2.3. Wykonanie zadania

W rozwiązaniu został wykorzystany program napisany w języku C, wykorzystujący własne implementacje procedur do wykonywania kolejnych czynności jak i gotowe procedury pochodzące z biblioteki GSL.

Procedury samodzielnie zaimplementowane:

- procedura służąca do wyznaczania drugich pochodnych w węzłach
- procedura do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym

W celu rozwiązania układu równań została wykorzystana procedura z biblioteki GSL:

`gsl_linalg_HH_svx(gsl_matrix *A, gsl_vector *d)`

gdzie A – macierz układu, d – wektor wyrazów wolnych (zostaje nadpisany wektorem będący rozwiązaniem układu m).

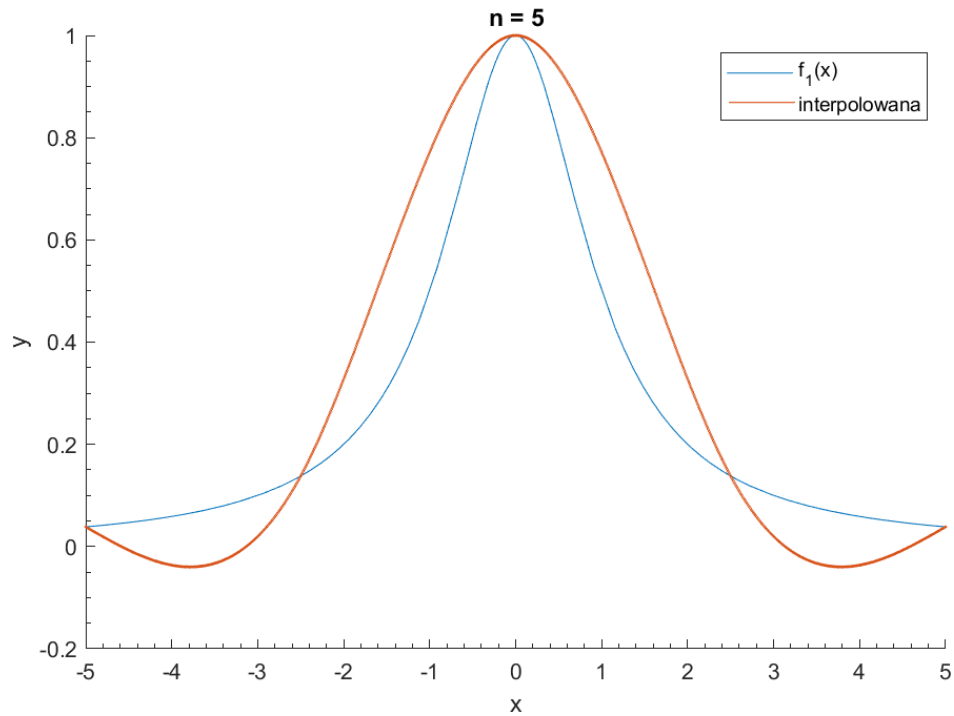
Ostatecznie, przeprowadzaliśmy interpolacje obu funkcji dla liczby węzłów $n = 5, 8, 21$ w przedziale $[-5, 5]$ z krokiem równym 0.01. Dla każdego przypadku do pliku zapisywane były uzyskane wyniki w celu porównania ich z rzeczywistym przebiegiem funkcji. Dodatkowo, dla $n = 10$ dla f_1 wyznaczono wartości drugich pochodnych w celu porównania ich z wartościami “dokładniejszymi”, uzyskanymi przy wykorzystaniu wzoru:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \delta x) - 2f(x) + f(x + \delta x)}{(\delta x)^2},$$

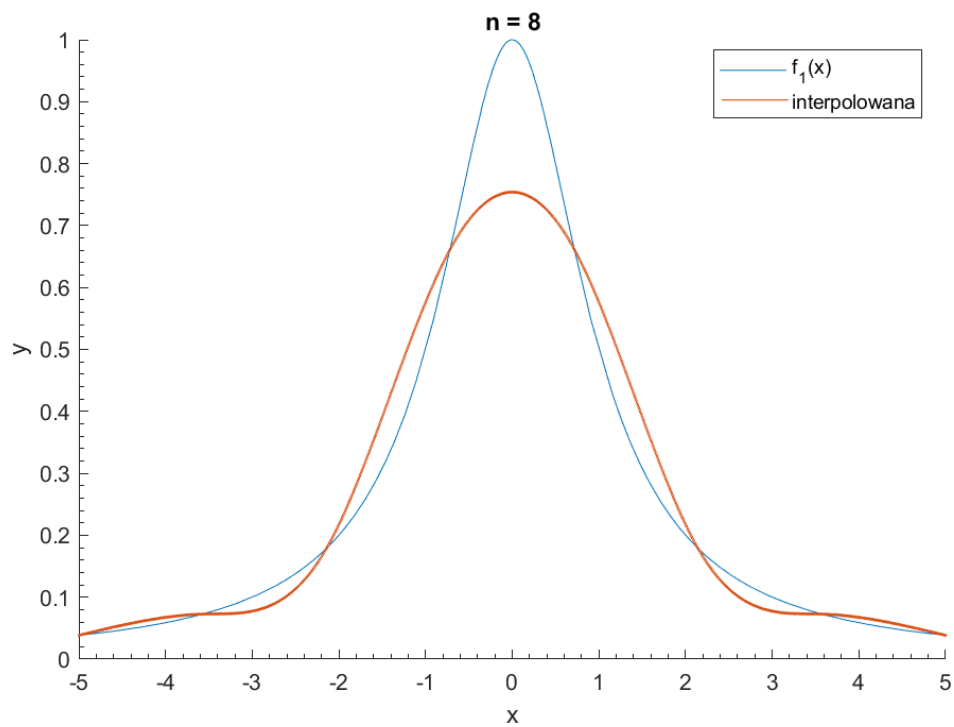
gdzie za δx przyjmujemy 0.01.

3. Wyniki

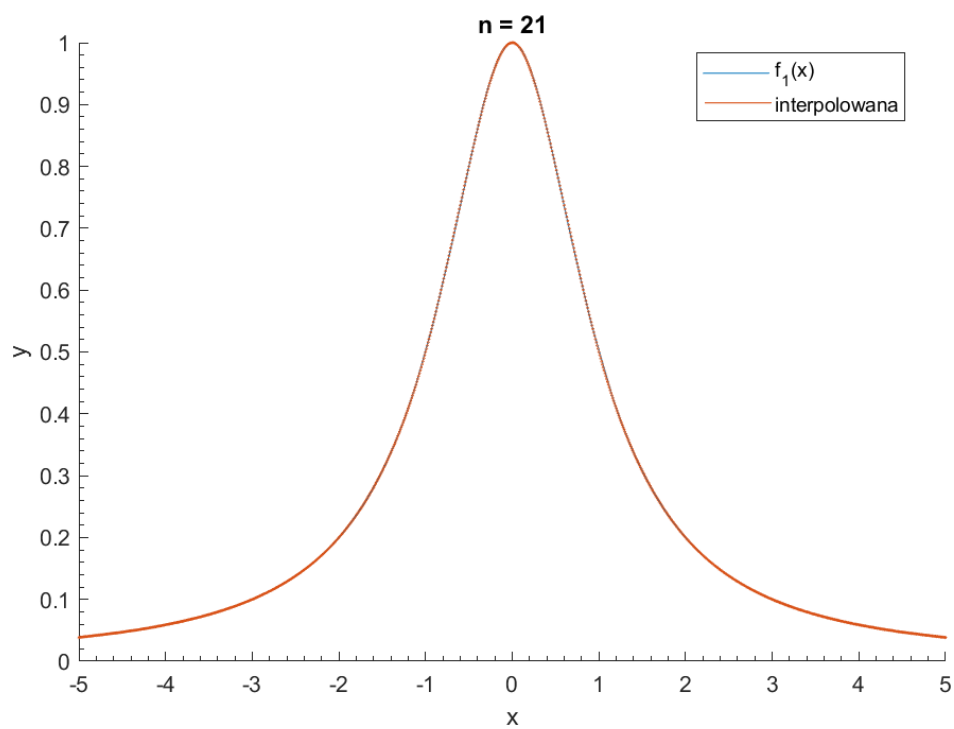
3.1. Interpolacja $f_1(x)$



rys1. Wyniki dla $n = 5$ zestawione z interpolowaną funkcją

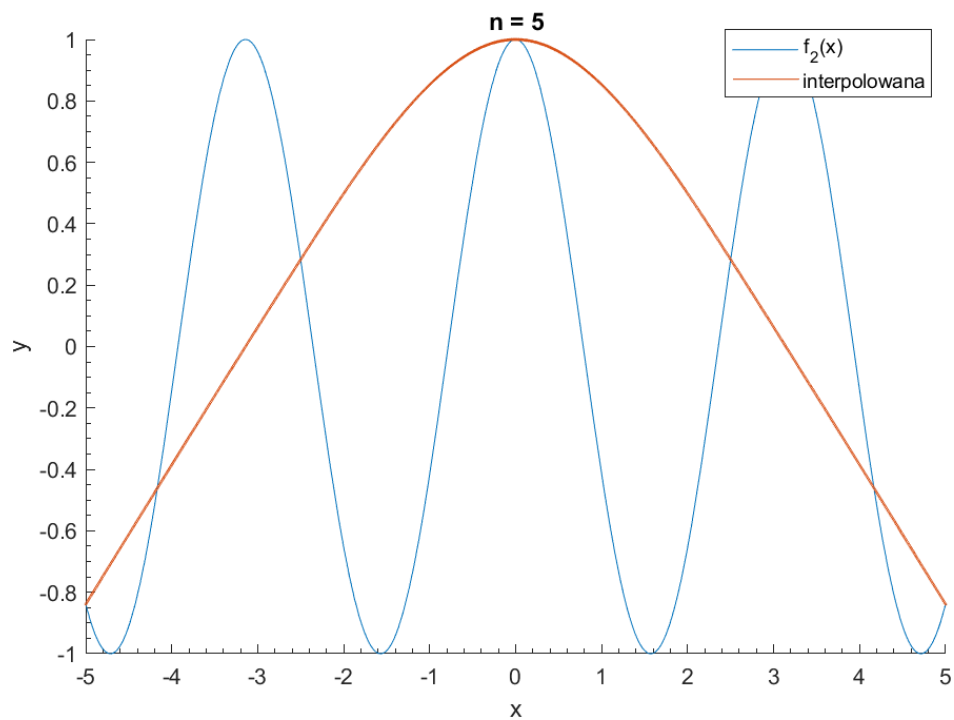


rys2. Wyniki dla $n = 8$ zestawione z interpolowaną funkcją

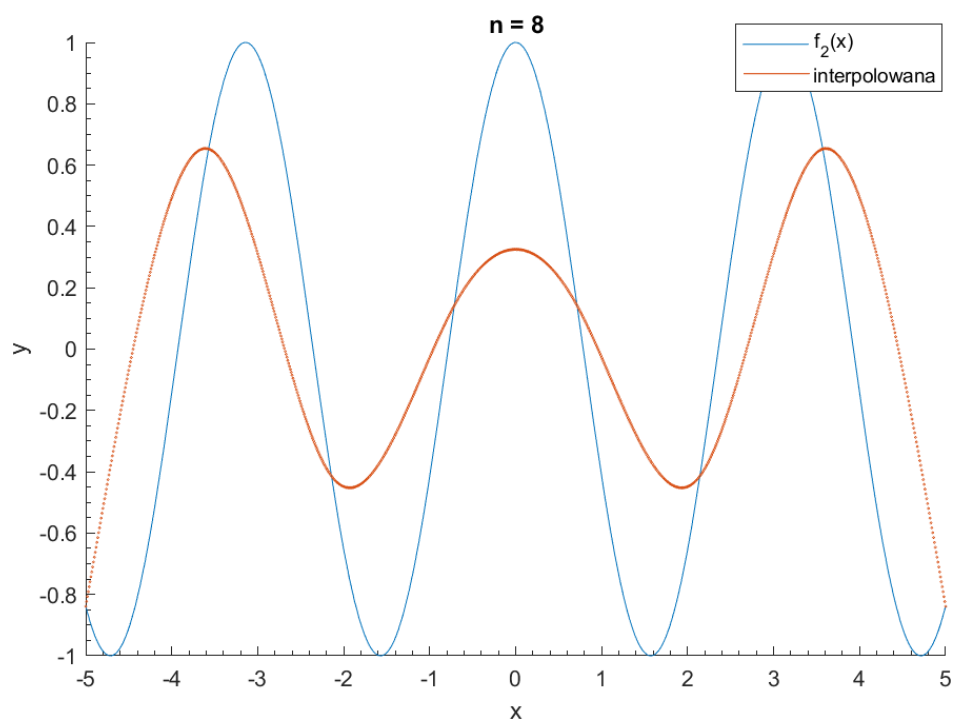


rys3. Wyniki dla $n = 21$ zestawione z interpolowaną funkcją

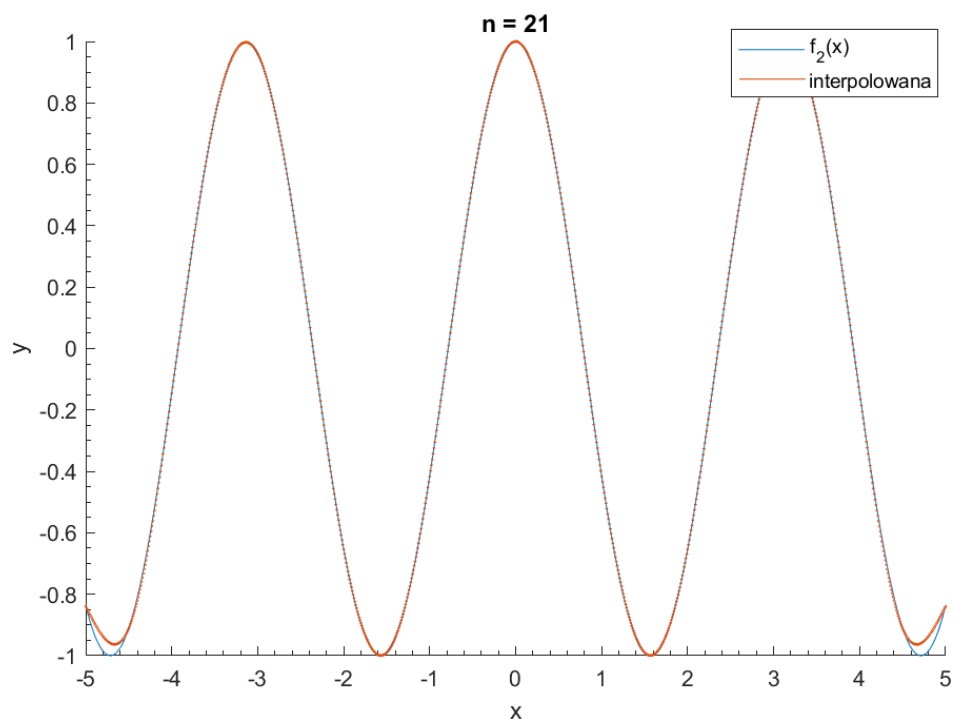
3.2. Interpolacja $f_2(x)$



rys4. Wyniki dla $n = 5$ zestawione z interpolowaną funkcją

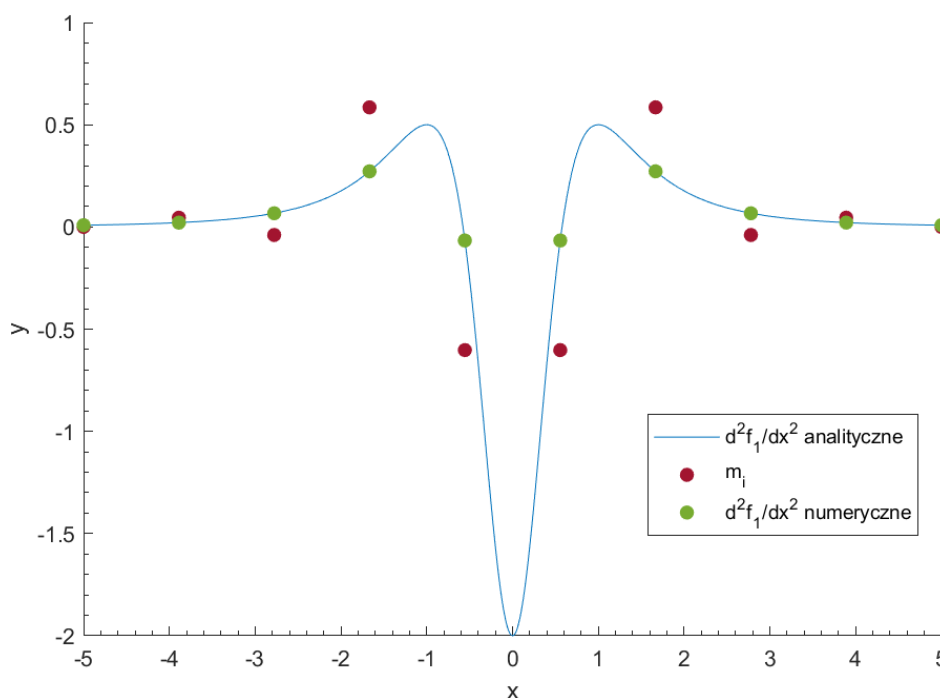


rys5. Wyniki dla $n = 8$ zestawione z interpolowaną funkcją



rys6. Wyniki dla $n = 21$ zestawione z interpolowaną funkcją

3.3. Porównanie wartości drugich pochodnych $f_1(x)$, $n = 10$



rys7. Porównanie m_i , drugiej pochodnej f_1 analitycznej oraz numerycznej

4. Wnioski

Jak można wywnioskować na podstawie wykresów, wraz ze wzrostem ilości węzłów interpolacji wzrasta jakość interpolacji. Mimo wykorzystania węzłów równoodległych, dla interpolacji funkcjami sklejanymi efekt Rungego nie jest zauważalny.

Zastosowana metoda do obliczania drugich pochodnych nie zawsze pokrywa się z wartościami analitycznymi, szczególnie rozbieżność jest zauważalna dla punktów bliskich zera. Wraz z oddalaniem się od zera wartości drugich pochodnych obliczone tą metodą są coraz bliższe do wartości rzeczywistych.

Można wywnioskować, że metoda interpolacji funkcjami sklejanymi pozwala na uzyskanie lepszych wyników niż metoda Lagrange'a. Dodatkowo, efekt Rungego dla węzłów równoodległych nie jest zauważalny, więc nic nie stoi na przeszkodzie, aby wykorzystać węzły równoodległe.