Sprawozdanie X

Poszukiwanie minimum wartości funkcji metodą największego spadku w 2D

Adam Łaba

18 maja 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Metoda największego spadku

Metoda największego spadku jest metodą iteracyjną poszukującą minimum zadanej funkcji bazując na danym położeniu początkowym. Na podstawie poprzedniego przybliżenia obliczamy kolejne korzystając ze wzoru:

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i - h \cdot \nabla f(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i},$$

gdzie:

$$\nabla f(\vec{r}) = \left[\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right].$$

Całość jest powtarzana, dopóki nie zostanie spełnione kryterium stopu. W przypadku tego ćwiczenia funkcję kryterium pełniła norma euklidesowa różnicy dwóch kolejnych przybliżeń (gdy była dostatecznie mała, przerywano działanie algorytmu). Czyli wtedy, gdy:

$$||\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i||_2 < \epsilon.$$

Po przerwaniu algorytmu ostatnie znalezione przybliżenie jest poszukiwanym minimum.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Wykorzystana funkcja

Funkcja, której minimum szukaliśmy dana była wzorem:

$$f(x,y) = \tfrac{5}{2}\left(x^2 - y\right)^2 + (1-x)^2,$$

a za położenie początkowe przyjęto:

$$\vec{r} = [-0.75, 1.75].$$

Dodatkowo, parametr *h* wykorzystywany do obliczania kolejnych przybliżeń wynosił 0.1.

2.2 Wykonanie zadania

Poszukiwanie minimum zostało przeprowadzone wykorzystując własną implementację metody w języku C. Pochodne były liczone numerycznie korzystając ze wzoru:

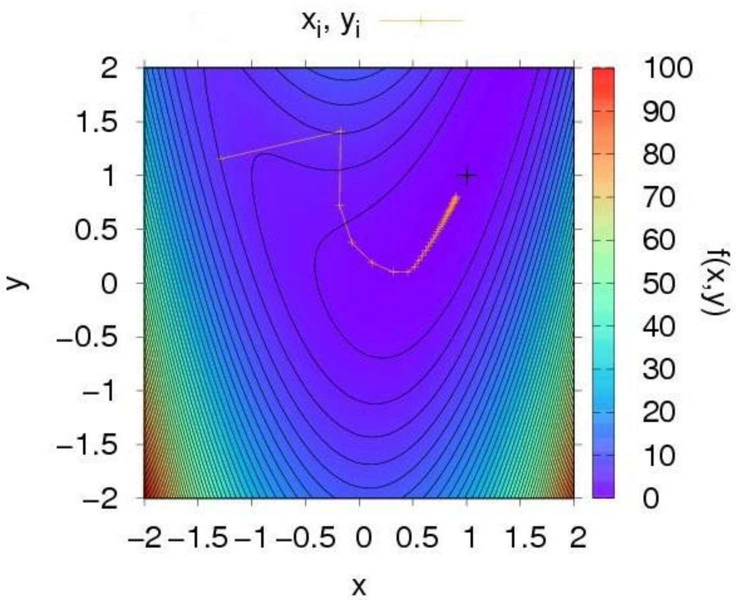
$$\frac{df(\vec{r})}{dx} = \frac{f(\vec{r} + \Delta \cdot \vec{e}_x) - f(\vec{r} - \Delta \cdot \vec{e}_x)}{2\Delta}$$
$$\frac{df(\vec{r})}{dy} = \frac{f(\vec{r} + \Delta \cdot \vec{e}_y) - f(\vec{r} - \Delta \cdot \vec{e}_y)}{2\Delta},$$

gdzie za Δ przyjęto 10^{-4}. Ćwiczenie zostało przeprowadzone dwukrotnie, dla dwóch różnych wartości ε: 10^{-2}, 10^{-3}. Wprowadzono także drugi warunek stopu – przekroczenie 1000 iteracji. W każdej iteracji do pliku zapisywano aktualne przybliżenie w celu późniejszego zaprezentowania wyników na wykresie.

3. Wyniki

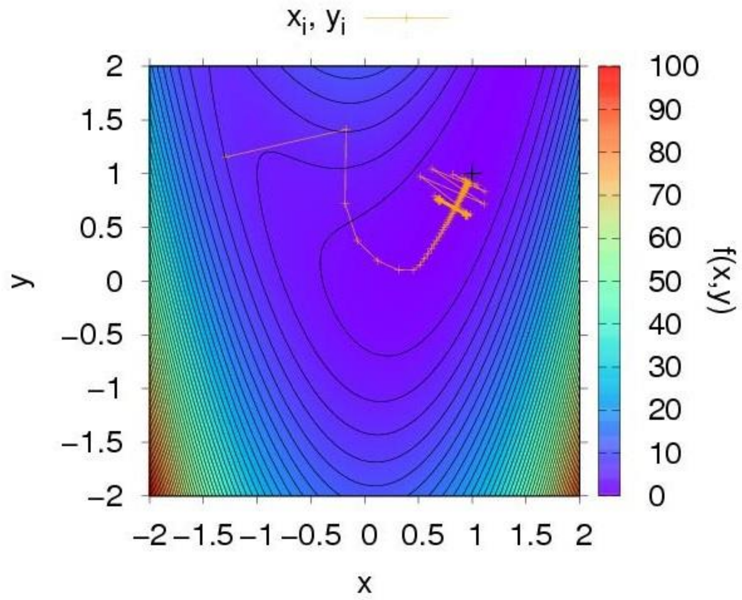
Na każdym wykresie w tle widoczna jest rzeczywista funkcja, czarnym plusem zaznaczone jest rzeczywiste minimum, a krzywa przedstawia kolejne przybliżenia.

3.1 Wyniki dla ε = 10^{-2}



Otrzymane przybliżenie minimum: [0.904394 0.801381], rzeczywiste: [1, 1].

3.2 Wyniki dla ε = 10^{-3}



Otrzymane przybliżenie minimum: [0.949205 0.621386], rzeczywiste: [1, 1].

4. Wnioski

W pierwszym przypadku, dla ε = 10^{-2} otrzymane przybliżenie równe [0.904394 0.801381] otrzymano przez spełnienie warunku stopu z normą, po 37 iteracji. Wynik ten jest dość odległy od rzeczywistego minimum w [1, 1].

W drugim przypadku, dla ε = 10^{-3} otrzymano przybliżenie [0.949205 0.621386], przez przekroczenie 1000 iteracji. Wynik ten jest mocno odległy od rzeczywistej wartości [1, 1].

Otrzymane wyniki wskazują na nieodpowiednio dobrany warunek stopu. Jak można zauważyć na drugim wykresie, niektóre wyniki były bardzo blisko rzeczywistego minimum, ale warunek stopu nie był dla nich spełniony. Wynika stąd, że optymalna wartość ε znajduje się gdzieś między dwoma przyjętymi w tym ćwiczeniu.

Utrzymywanie stałej wartości h również ma wpływ na obniżenie jakości otrzymanych wyników.

Na dużą różnicę między otrzymanymi wynikami a rzeczywistym minimum wpływ ma także wydłużenie konturu wartości funkcji celu. Przez to pojawiają się częste zmiany kierunków poszukiwań, widoczne na wykresach.