Sprawozdanie IX
Aproksymacja wielomianowa

Adam Łaba

8 maja 2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Aproksymacja wielomianowa

Aproksymacja opiera się na poszukiwaniu funkcji będącej przybliżonym rozwiązaniem jakiegoś problemu, którego przedstawienie w postaci analitycznej nie jest możliwe. Za pomocą pewnej funkcji przybliżającej, jesteśmy w stanie przybliżyć funkcję, której postaci analitycznej nie znamy w danym obszarze. Metoda aproksymacji jest wykorzystywana, gdy wartości w danych węzłach mogą być obciążone pewną niedokładnością.
Aproksymacja wielomianowa szuka rozwiązania w postaci funkcji wielomianowej. Problem sprowadza się do znalezienia współczynników *b* wielomianu zadanego stopnia:

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left[f_j - \sum_{i=0}^{m-1} b_i x_j^i\right] x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

które następnie są rozdzielane:

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_j x_j^k = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \left(\sum_{j=0}^{N-1} x_j^{i+k}\right),$$

po to, żeby zapisać powyższe równania w postaci:

$$r_k = \sum_{i=0}^{m-1} b_i g_{ik},$$

gdzie:

$$r_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j x_j^k,$$

oraz

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^{i+k}.$$

Po uwzględnieniu wszystkich elementów bazy k otrzymujemy układ równań, który następnie transponujemy i korzystamy z własności, że macierz G jest symetryczna. Ostatecznie, problem można zapisać w postaci:

$$Gb = r.$$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Aproksymowana funkcja

W tym zadaniu zajęliśmy się aproksymacją funkcji bazującej na:

$$g(x) = \exp(a_0 + a_1 x + a_2 x^2),$$

Gdzie: a_0 = -0.125, a_1 = 0.125, a_2 = -0.03125.

Funkcja, dla której przeprowadziliśmy aproksymację dodatkowo była urozmaicona poprzez wprowadzenie szumów i miała postać:

$$g_2(x) = g(x)(1 + \delta(x)),$$

gdzie:

$$\delta(x) = \alpha(U - 0.5),$$

a U to pseudolosowa liczba rzeczywista z przedziału [0, 1].

2.2 Wykonanie zadania

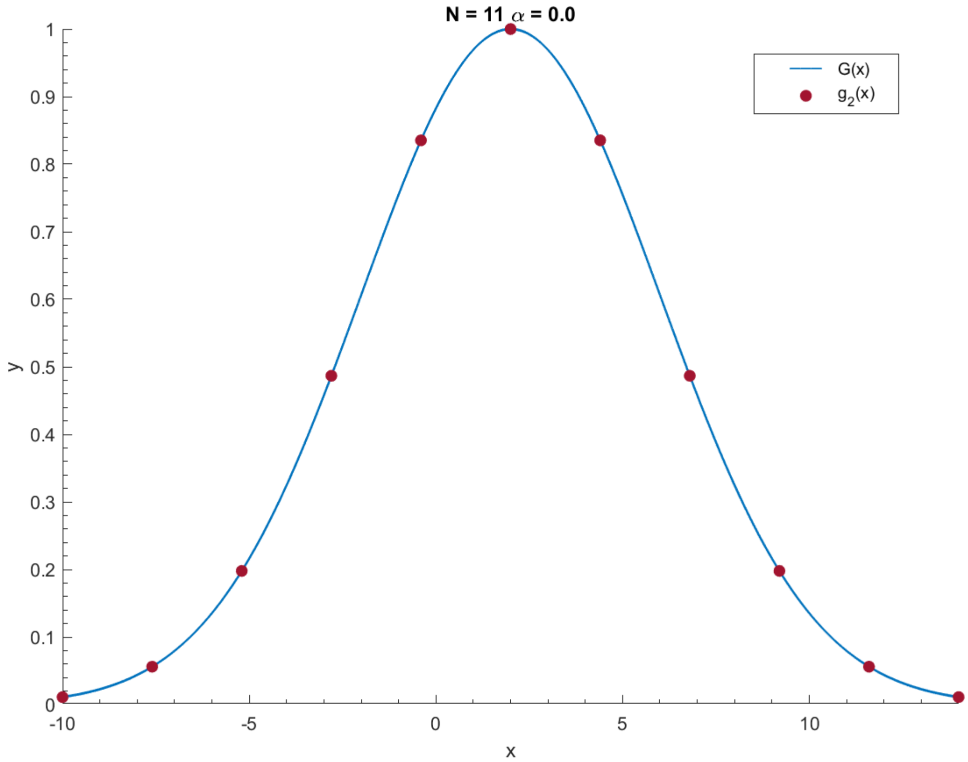
Funkcję aproksymowaliśmy dla węzłów równoodległych w liczbie: N = 11 i N = 101 dla wartości α = 0.0 i 0.5, za pomocą wielomianu 3-go stopnia w przedziale [-10, 14] z krokiem 0.01, za każdym razem zapisując wyniki do pliku. Dodatkowo, do pliku zostały zapisane wartości wyliczonych współczynników b_i w celu ich porównania z wartościami teoretycznymi. W celu rozwiązania układu równań została wykorzystana procedura z biblioteki GSL:

```
gsl_linalg_HH_svx(gsl_matrix *A, gsl_vector *x)
```

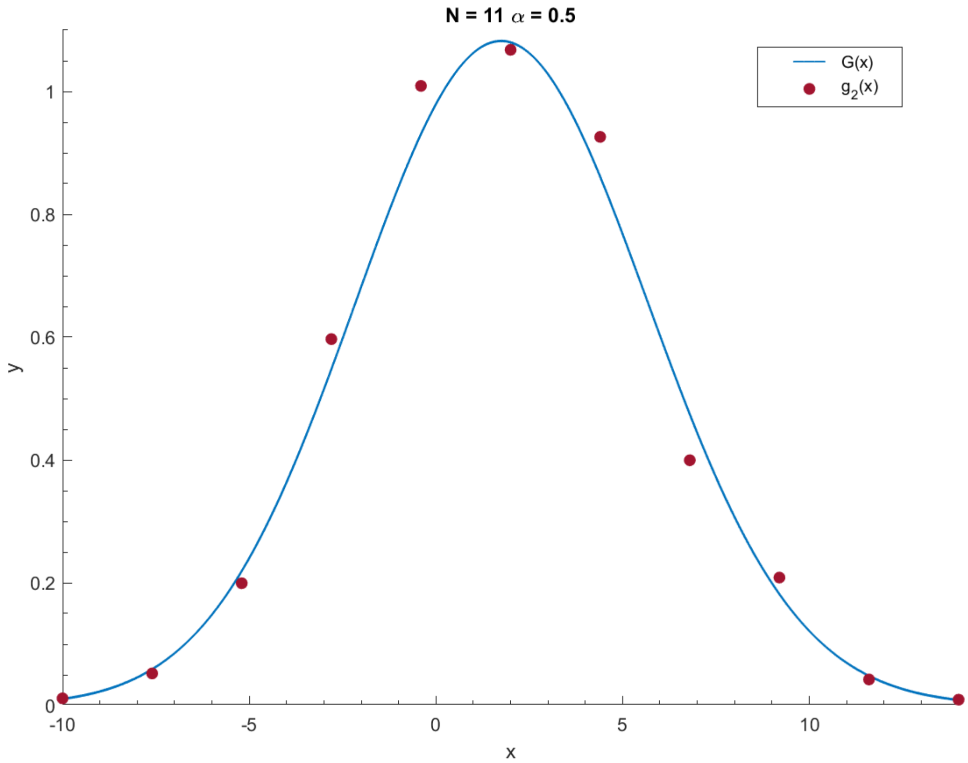
Funkcja przybliżająca została oznaczona jako $G(x)$. Na wykresach przedstawiono wartości funkcji aproksymowanej w węzłach i przebieg funkcji przybliżającej.

3. Wyniki

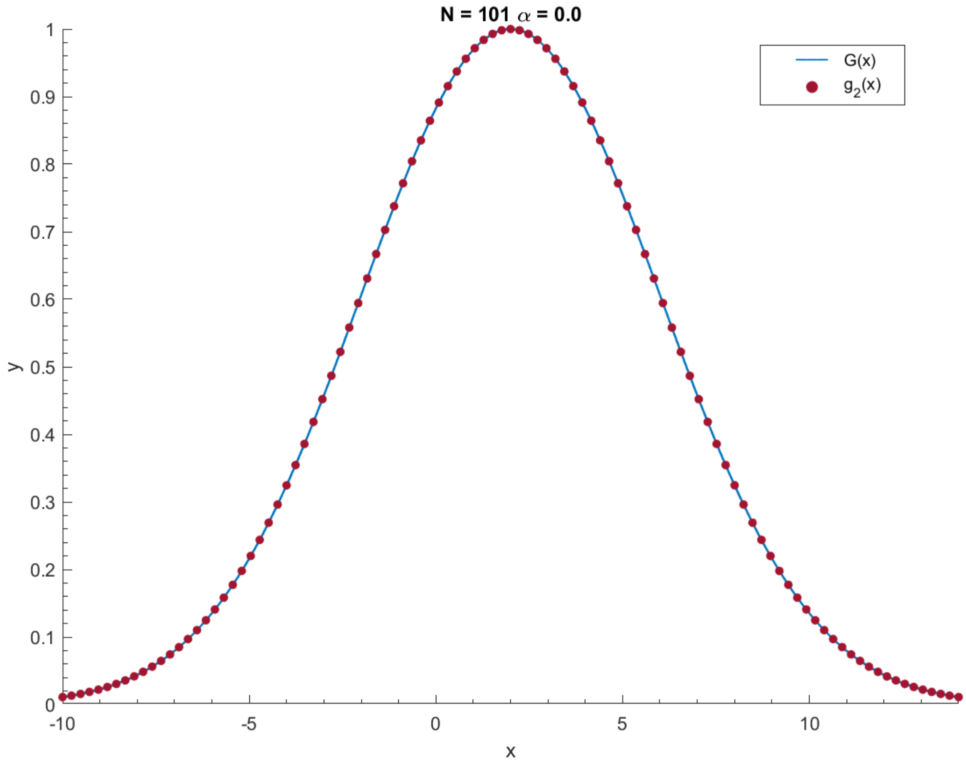
3.1 Wyniki dla 11 węzłów, α = 0.0



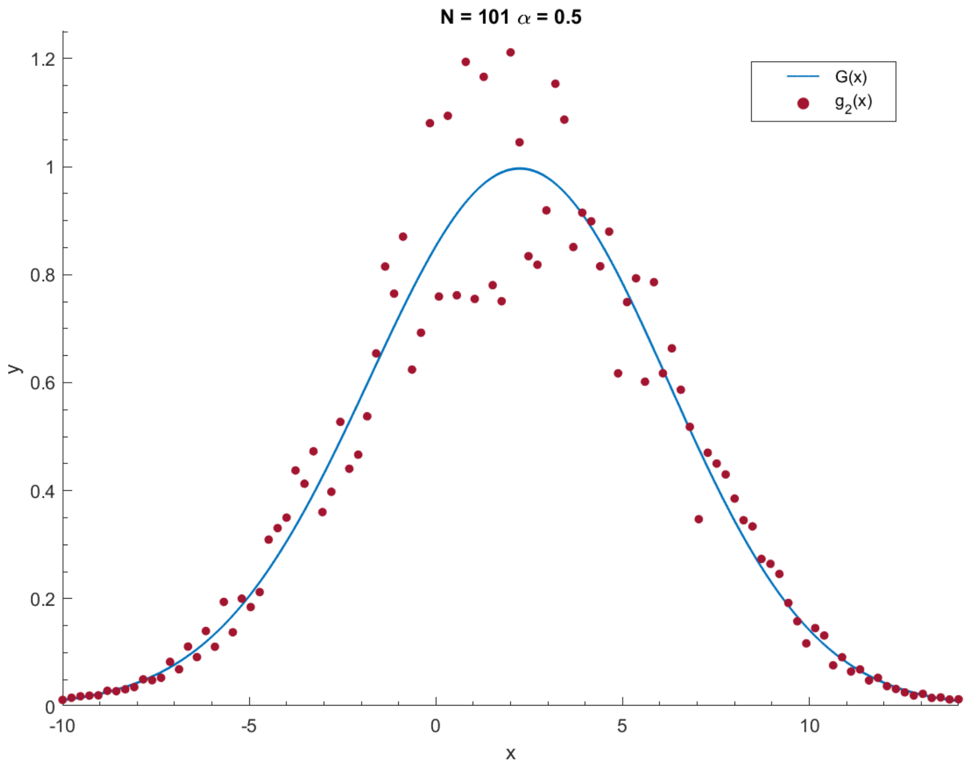
3.2 Wyniki dla 11 węzłów, α = 0.5



3.3 Wyniki dla 101 węzłów, α = 0.0



3.4 Wyniki dla 101 węzłów, α = 0.5



3.5 Porównanie współczynników wielomianu

Lp.	Wartość teoretyczna	Wartość numeryczna				
-	-	-	$N = 11$ $\alpha = 0.0$	$N = 11$ $\alpha = 0.5$	$N = 101$ $\alpha = 0.0$	$N = 101$ $\alpha = 0.5$
a_0	- 0.125	b_0	- 0.125	- 0.02093	- 0.125	- 0.159
a_1	0.125	b_1	0.125	0.1146	0.125	0.138
a_2	- 0.03125	b_2	- 0.03125	-0.03298	- 0.03125	-0.0302
-	-	b_3	$1.31 \cdot 10^{-17}$	$6.567 \cdot 10^{-5}$	$-7.904 \cdot 10^{-17}$	-0.00015

4. Wnioski

Aproksymacja sprawdza się w przypadkach, gdy znane przez nas wartości do których chcemy dopasować funkcję mogą być obarczone pewnym błędem.

Dla aproksymacji wielomianowej już dla stosunkowo małej ilości węzłów (11) otrzymane wyniki są satysfakcjonujące. Dla pomiarów obarczonych pewnym błędem wraz z ilością węzłów wzrasta dokładność funkcji przybliżającej.

Dla punktów nieobarczonych błędem aproksymacja ta jest bardzo precyzyjna – w przypadku tego zadania wszystkie istniejące współczynniki dla obu ilości węzłów pomiarowych są takie same, natomiast czwarty nieistniejący w rzeczywistej funkcji współczynnik b_3 w obu przypadkach jest rzędu $10^{-17.}$