Unidad 4: Derivada

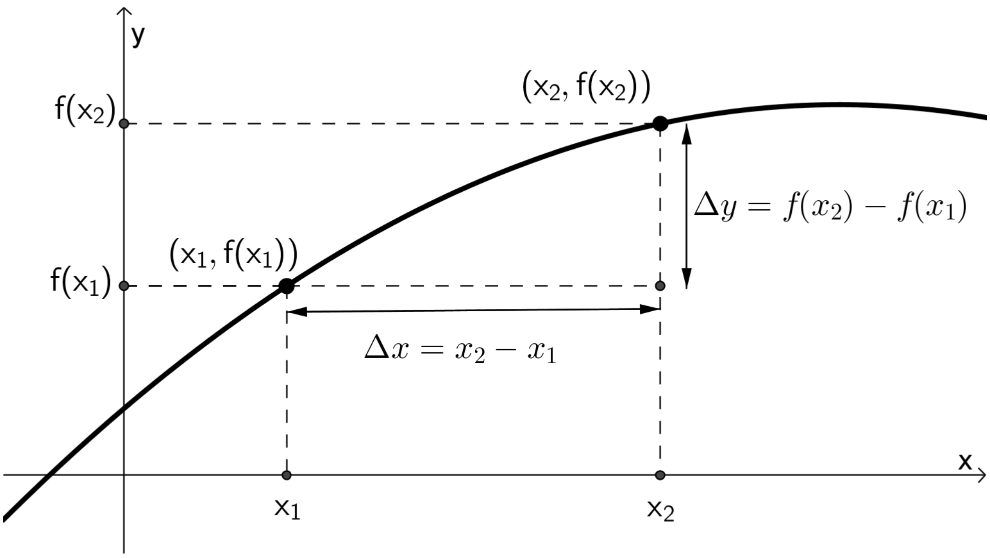
Razones de cambio, velocidades, variaciones de precios y demandas, costos e ingresos.

Objetivos de esta unidad

- Interpretar la variación de las funciones que modelizan distintos fenómenos, a través de la lectura de sus gráficos y tablas.
- Comprender la relación entre una función y su derivada.
- Construir gráfica y analíticamente la derivada de una función, y reconstruir la función a partir de su derivada.
- Utilizar la derivada como herramienta para estudiar los comportamientos de las funciones.
- Manejar con seguridad fórmulas de rectas secantes y tangentes a un gráfico, sabiendo claramente que significado tiene la pendiente.
- Modelizar y resolver los siguientes tipo de situaciones usando la derivada.
  - De movimiento.
  - De costos e ingresos.
  - De rectas tangentes a funciones.
  - De identificación de máximos y mínimos relativos.
- Apropiarse de un proyecto de aprendizaje, que implique autonomía, compromiso y constancia en el estudio.

Definición: Razón de cambio

$$m = \frac{\text{Variación en } y}{\text{Variación en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Encontrarán que esta definición es idéntica a la definición de pendiente de una función lineal. Lo que cambia es que la función no tiene porqué ser lineal. En particular si la función f es la posición p de un móvil a lo largo de un camino en función del tiempo t, la razón de cambio se llama *velocidad media*. **Definición: Velocidad media**

$$V_m = \frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}$$

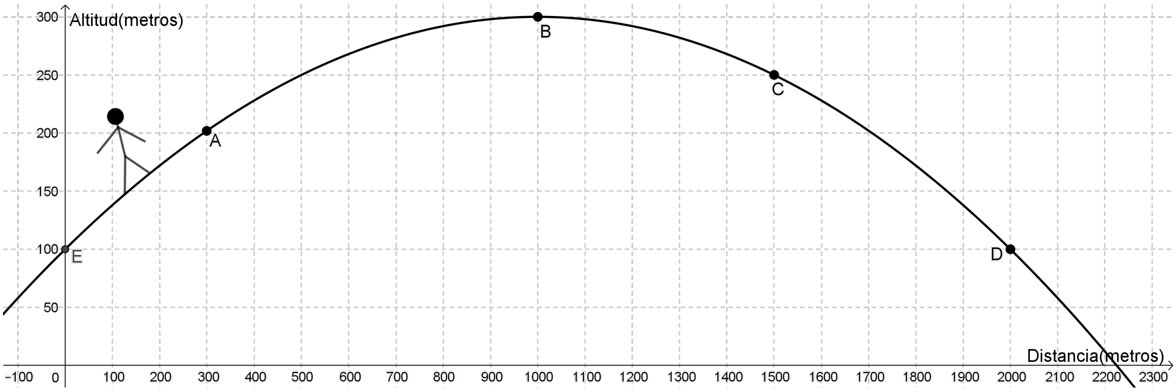
¡Cuidado! ¡No confundir con un promedio de velocidades que NOOOOO es lo mismo!

Problema 60. Razón de cambio 1. Consideren la función $f(x) = -x^2 + 4x$. Grafíquenla.

a) Calculen razones de cambio entre los valores dados (Si es necesario, relean varias veces la definición anterior).
   (i) $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$
   (ii) $x_1 = 1$ y $x_2 = 1{,}5$
   (iii) $x_1 = 1$ y $x_2 = 1{,}1$
   (iv) $x_1 = 1$ y $x_2 = 1{,}01$
   (v) $x_1 = 1$ y $x_2 = 1{,}001$
   (vi) $x_1 = 1$ y $x_2 = 1{,}0001$
b) ¿Qué tienen en común los cálculos anteriores?
c) ¿A qué valor se va aproximando los cálculos efectuados?
d) Trazen, en el gráfico que realizaron, las rectas que tengan como pendiente el valor de razón de cambio calculado en cada caso y que, además, pase por el punto $(1; f(1))$.
e) Dibujen la recta que pasa por $(1; f(1))$ que tenga como pendiente el número al que se va aproximando las razones de cambio halladas.

Problema 61. Colina. Supongan que el gráfico representa la silueta de una colina. Las medidas de altitud y distancia (medida en horizontal) que va recorriendo una caminante, que llamaremos Renata, estan expresadas en metros.

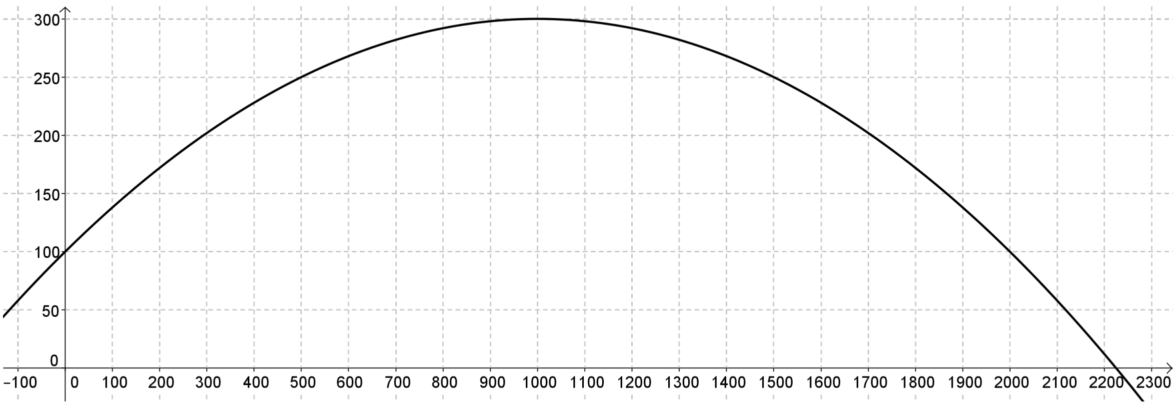
El fabricante del GPS que lleva Renata en la caminata tiene una aplicación que va tomando mediciones (pueden ser distancias y altitudes) a lo largo de la caminata y le va informando a Renata un número que indica la *dificultad* de andar por la colina. La *dificultad* está asociada al esfuerzo de subir y a la facilidad de bajar.



a) Diseñen su propio indicador de dificultad de andar por un terreno con colinas. Este indicador debe cumplir las siguientes premisas y debe estar expresado en una fórmula que pueda ser usada por cualquiera.
   (i) Ser un único número que debe tomar valor positivo si el camino va en subida y valor negativo si el camino va en bajada.
   (ii) Entre dos puntos del camino en subida debe tomar valor más alto en aquel en el cual el terreno sea más empinado.
   (iii) Entre dos puntos del camino en bajada debe tomar valor más bajo en aquel en el cual la bajada sea más pronunciada.
   (iv) Debe tomar la información para calcular el valor del indicador de las mediciones del GPS.

b) Calculen el indicador de dificultad para los puntos A, B, C, D y E, marcados en el gráfico.

Problema 62. Razón de cambio en cuadrática. Supongan que el gráfico representa la variación de la posición de un móvil en función del tiempo t.



a) Escriban un párrafo haciendo una interpretación del gráfico, describiendo la posición a lo largo de una ruta. Incluyan un comentario sobre los rangos de valores para los que el gráfico tiene sentido y los valores para los que no lo tiene.

b) Supongan ahora que el gráfico representa la variación del costo de producción de un bien en función de la cantidad de bienes producidos. Escriban un párrafo haciendo una interpretación del gráfico. Incluyan un comentario sobre los rangos de valores para los que el gráfico tiene sentido y los valores para los que no lo tiene.

c) Sabemos que la curva es la gráfica de la parábola de ecuación $y = -\frac{1}{5000}x^2 + \frac{2}{5}x + 100$. Calculen la razón de cambio de la función entre $x = 300$ y $x = 900$.

d) Calculen la razón de cambio de la función entre $x = 300$ y $x = 400$.

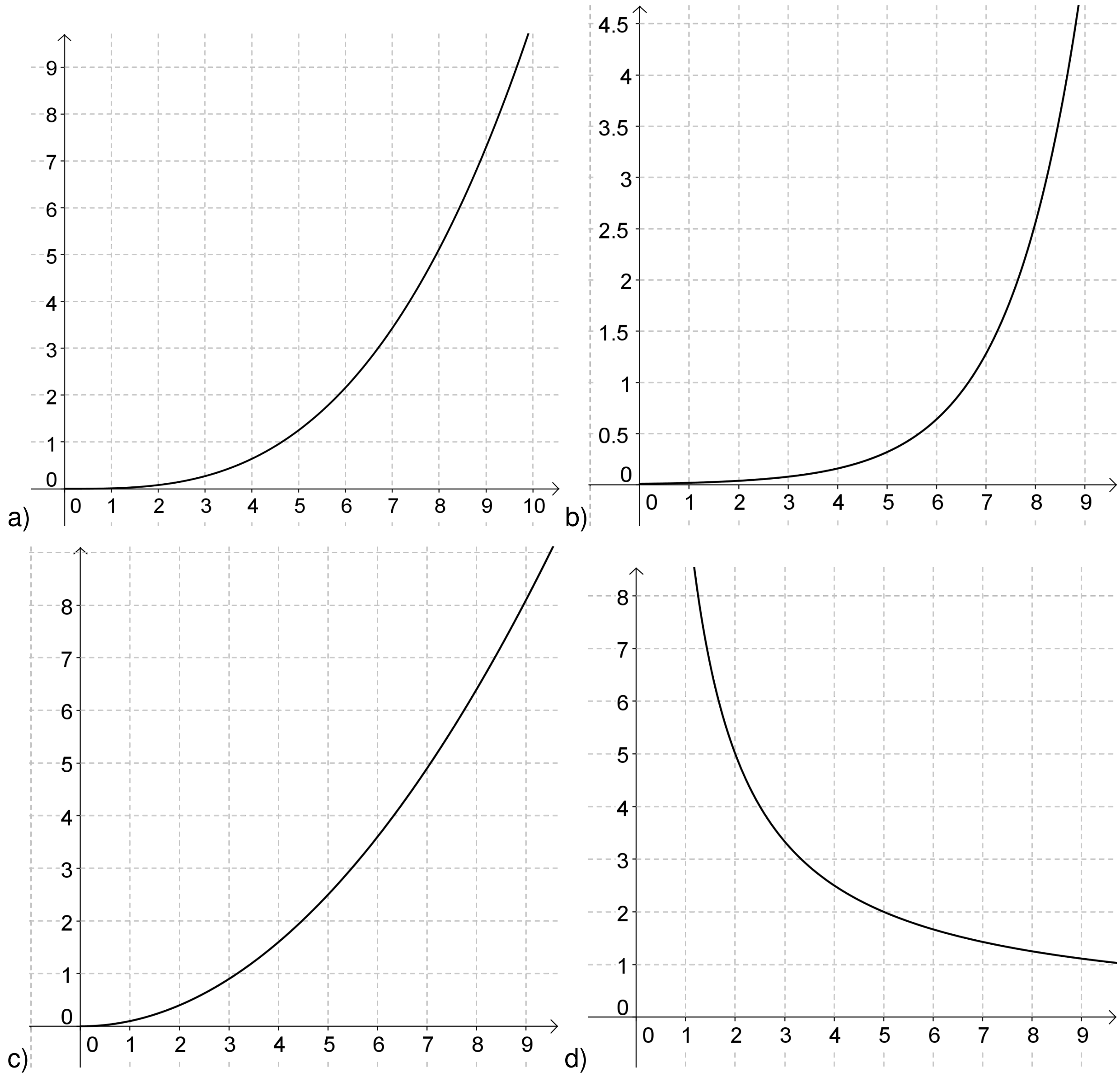
e) Calculen la razón de cambio de la función entre $x = 300$ y $x = 310$.

f) Calculen la razón de cambio de la función entre $x = 300$ y $x = 301$.

g) Extraigan conclusiones.

h) Realicen una tabla de distintos pares de puntos del gráfico que difieran en 100 unidades en el eje x y estudien las razones de cambio.

Problema 63. Razón de cambio en gráficos. Para cada uno de los siguientes gráficos.



a) Calculen las razones de cambio entre valores enteros consecutivos de las x. ¿Cuál es la mejor forma de organizar estos datos?

b) Identifiquen a qué funciones corresponden estos datos.

c) Grafiquen estas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos con las funciones que les dieron origen.

Problema 64. El auto es veloz. Cada una de las siguientes funciones describe la posición de un automóvil en función del tiempo. Considérenlas para $t \geq 0$.

a) $f_1(t) = -2t^2 + 6t$
b) $f_2(t) = -3t^2 + 15t$
c) $f_3(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 3t$
d) $f_4(t) = \frac{1}{4}t^2$
e) $f_5(t) = \frac{1}{10}t^2$
f) $f_6(t) = 3^t$

Deduzcan en cada caso la función que da la velocidad del automóvil en cada instante t.

Definición: Razón de cambio instantánea
La *razón de cambio instantánea* de una función f en un punto x_1 se define como el valor al que se aproxima la *razón de cambio* cuando se toman intervalos cada vez más cortos dentro de los cuales está el punto x_1.

Definición: Velocidad instantánea
La *velocidad instantánea* de un objeto en el tiempo t_1 se define como el valor al que se aproxima la *velocidad media* cuando se toman intervalos cada vez más cortos dentro de los cuales está el tiempo t_1.

Definición: Derivada de una función en un punto
La *derivada* de una función f en un punto x_1 se define como la *razón de cambio instantánea* de una función f en un punto x_1. Esta derivada es un valor que coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva definida por la función f en el punto x_1. En particular si la función f es la posición de un objeto a lo largo de una trayectoria en función del tiempo, la derivada de esa función en un instante t_1 es la velocidad instantánea en ese instante t_1.

Definición: Función derivada
Para una función f definimos la *función derivada* o simplemente *derivada*, como la función que llamaremos $f'(x)$ que para cada x está definida como la derivada de f en el punto x.

Definición: Costo Marginal
Se define como la razón de cambio instantánea de la función costo. Expresado de otra manera es la derivada de la función costo. En economía el costo marginal se entiende como la variación en el costo total ante el aumento de una unidad en la cantidad producida, es decir, es el costo de producir una unidad adicional.

Problema 65. Juguete. Una empresa decide fabricar un determinado juguete considerando un modelo de costo total, en miles de pesos, dado por la siguiente ecuación que depende de la cantidad q de juguetes que se fabrican $C(q) = 110 + 4q + 0,02q^2$.

a) Calculen el costo de la fabricación de 50 y de 51 juguetes. ¿Cuál es la diferencia entre los costos de fabricar 51 juguetes y 50? ¿Cómo calcularía la tasa de variación del precio cuando cambia el número de juguetes fabricados?

b) Supongan por un momento que la variable cantidad de juguetes puede entenderse como continua (aunque sea discreta porque los juguetes son unidades enteras, piensen por qué). La tasa de variación puede pensarse como $C(q+1) - C(q)$. Si en lugar de incrementar la variable q en una unidad lo hacemos en una cantidad infinitamente pequeña h tenemos que la tasa es $\frac{C(q+h)-C(q)}{h}$, cociente que es muy similar a $C'(q)$ cuando h es 'pequeño'. Como se ve, esto nos dice que la tasa de variación instantánea puede aproximarse utilizando la derivada del costo. Los economistas llaman a la misma el Costo Marginal. Calculen la función de costo marginal y utilícela para calcular la tasa de variación del costo al fabricar 50 juguetes. Comparen los resultados con los del item anterior.

Propiedades de derivada y derivadas de las funciones básicas

Las propiedades de la derivada permiten operar como reglas de derivación y combinándolas construir reglas de derivación más complejas.

$f(x)$	$f'(x)$
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$
$g(x) - h(x)$	$g'(x) - h'(x)$
$a \cdot g(x)$	$a \cdot g'(x)$
$g(x) \cdot h(x)$	$g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x

Problema 66. Calcular 1. Calculen la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3$
c) $f(x) = 3x - 1$
d) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$

Problema 67. Inventar 1. Inventen dos funciones polinómicas que sean distintas, pero que tengan la misma derivada.

Problema 68. Tangente 1. Consideren la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

a) Escriban la ecuación de la recta que es tangente al gráfico de f en el punto $(4, 1)$.
b) Lo mismo que en el ítem anterior, pero en el punto $(0, 1)$.

Problema 69. Tangentes 2. Para cada caso, calculen las ecuaciones de las rectas tangentes a los gráficos de las funciones en los valores indicados.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ en $x_0 = -1$, $x_0 = 0$ y $x_0 = 3{,}5$.
b) $g(x) = -x^2 + 2x - 5$ en $x_0 = x_v$ (x del vértice). ¿Podrías haber hallado la ecuación de la recta tangente sin calcular la derivada?
c) $h(x) = 3x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$ en $x_0 = -2$, $x_0 = 1$ y $x_0 = \frac{1}{2}$.
d) $i(x) = -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 5$ en los puntos máximos y/o mínimos de la función. ¿Es necesario calcular la derivada para encontrar las ecuaciones de estas rectas tangentes?

Problema 70. Tangente 3. La recta tangente al gráfico de una cierta función f en $x = 0$ tiene ecuación $y = 5x - 2$.

a) ¿Cuánto vale $f'(0)$?
b) Si en $x = 3$ la recta tangente tiene ecuación $y = -2x + 3$, ¿cuánto vale $f(3)$?
c) ¿Cómo puede ser la fórmula de la función f? ¿Es única la respuesta?

Problema 71. Aviones. La ley de costo de una fábrica de aviones es de $C(x) = 50 + 4x - 12x^2 + 2x^3$ pudiendo fabricarse un mínimo de un avión y un máximo de ocho aviones.

a) Calculen el costo marginal para $x = 5$. ¿Cuál es el significado de este resultado?
b) Determinen para qué nivel de producción existe un costo marginal mínimo. ¿Qué quiere decir esto para el problema?

Problema 72. Pelotita Lunar. En la Luna la aceleración de la gravedad es seis veces menor que en la Tierra. Un cañón ubicado en la superficie lunar dispara una pelotita hacia arriba. La fórmula que describe la altura h de la pelotita (medida en metros) en función del tiempo t (medido en segundos) es:

$$h(t) = 9t - \frac{5}{6}t^2$$

a) Den una función que indique, en cada instante de tiempo, la velocidad instantánea de la pelotita.

b) ¿En qué momento alcanza la pelotita su altura máxima? ¿Cuál es esa altura y cuál es la velocidad de la pelotita en ese momento?

c) Determinen dos instantes de tiempo entre los cuales la velocidad media de la pelotita haya estado entre 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

d) ¿Existe algún momento en que su velocidad haya sido exactamente 4,6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

e) ¿Qué velocidad tenía la pelotita a los $1{,}5$ s?

Problema 73. Maxi. Maxi sale de su casa a dar un paseo en bicicleta. El gráfico muestra la posición de Maxi (respecto de su casa que está en el 0 y medida en kilómetros) en función del tiempo (medido en horas).

Observen el gráfico y respondan las siguientes preguntas:

a) ¿En qué intervalos de tiempo Maxi se alejaba de su casa y en cuáles se acercaba?

b) ¿En qué instantes su velocidad fue 0?

c) ¿En qué intervalos de tiempo su velocidad fue positiva y en cuáles fue negativa? ¿Qué interpretación tiene en este contexto una velocidad negativa?

d) Buscando coherencia con las respuestas anteriores, dibujen a mano un gráfico aproximado de la velocidad en función del tiempo.

e) ¿Es posible que $f(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t^2$? Si la respuesta es Sí, determinen la fórmula de la función derivada f' y vuelvan a analizar las preguntas anteriores considerando la información que f' les puede brindar.

Problema 74. Beneficio Máximo. Una compañía puede vender los artículos que produce a $\$200$ cada uno. Si el costo por número de unidades está dado por la función $C_u(q) = 2q^2 + 40q$ y además hay un costo fijo de $\$1400$, determinen cuántas unidades deberían producirse para que se obtenga el máximo beneficio. ¿Cuál es dicho beneficio?

Problema 75. Beneficio. Supongan que el precio de venta en pesos de un cierto artículo se determina de acuerdo con la cantidad de artículos q que se fabrican, de acuerdo con la siguiente ley: $p(q) = 78q - 2q^2$. Además, el costo de fabricación por cada unidad producida es de $\$528$, la empresa tiene un costo fijo de $\$1200$ y se sabe que, por razones de producción, no es posible fabricar más de 30 artículos. Con esta información:

a) Calculen el precio de fabricar 10 artículos.
b) Determinen el ingreso por las ventas en este caso y los costos.
c) ¿Cuál es el beneficio para el productor? ¿Gana o pierde dinero?
d) Determinen un modelo que permita calcular el beneficio del productor en función de la cantidad de artículos fabricados.
e) ¿Qué debería hacer el productor para asegurarse el mejor beneficio posible?

Problema 76. Modelo. En un modelo económico, el precio de cierto artículo se rige mediante la expresión dada por $p(q) = 70 - \frac{3}{2}q - \frac{1}{15}q^2$ donde q es la cantidad de artículos producidos. Además el costo de fabricación se da por $C(q) = 50q + 5$. Supongamos que la mayor producción posible es de 15 artículos.

a) Determinen el costo de fabricar 8 artículos, el precio de venta en ese caso y la ganancia que le queda en tal caso al fabricante.
b) Escriban una fórmula que permita calcular la ganancia en términos de la cantidad q de artículos fabricados.
c) Determine las condiciones para las cuales se optimiza la ganancia.

Problema 77. Autopista 1. En una autopista hay una limitación de velocidad de 100 km/h. Un automóvil la recorre durante el intervalo de t que va de 0 a 3 horas, de manera que su posición en función de tiempo viene dada por

$$p(t) = -10t^3 + 56t^2$$

¿Cumple con la reglamentación de velocidad?

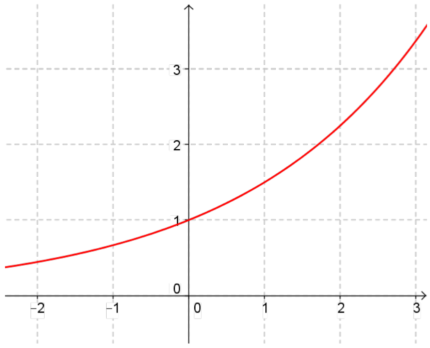
Problema 78. Mamelucos Ergonómicos. El ingreso de una fábrica de mamelucos ergonómicos viene dado por la función $I(q) = 100q - q^2$.

a) Hallen el ingreso marginal.
b) Determinen el nivel de producción que maximiza el ingreso e indique cuál es ese ingreso.
c) Realicen la gráfica de la función ingreso y de la función ingreso marginal. Indique el dominio y la imagen.
d) Se sabe que el costo de producción (por unidad) de los mamelucos ergonómicos es de $\$25$ y el costo fijo es de $\$150$. Hallen la función Beneficio.
e) Hallen el nivel de producción que optimiza el beneficio.

Problema 79. Hisopos. Una fábrica de *hisopos hiposonoros* vende cada caja a \$13. El costo total de producir q (en miles de cajas) se describe mediante la función $C(q) = 400 - 20q^2 + q^3$ donde C se mide en miles de pesos.

a) Determinen el nivel de producción que maximiza el beneficio. ¿Cuál es ese beneficio?
b) ¿Cuál es el costo marginal de producir cien mil cajas? Expliquen el significado.

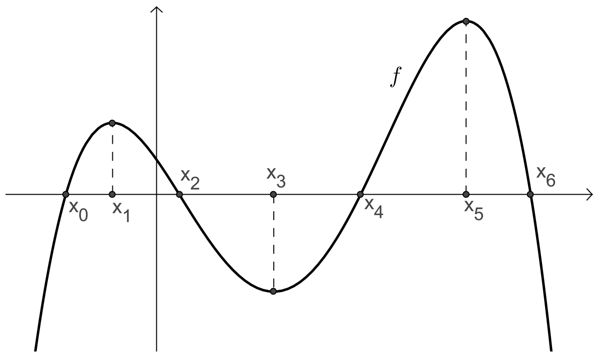
Problema 80. No me acuerdo. El siguiente gráfico corresponde a alguna función f de cuya fórmula no podemos acordarnos.



a) Considerando –como se vio en clase– que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en ese punto, intenten imaginar y graficar los puntos $(-2, f'(-2))$, $(-1, f'(-1))$, $(0, f'(0))$, $(1, f'(1))$, $(2, f'(2))$ y $(3, f'(3))$.

b) Tracen un esbozo del gráfico de la función f'.

Problema 81. Condiciones 1. Observando el gráfico de la función f,



a) Identifiquen un intervalo en el que se cumplan las siguientes dos condiciones:

$$f(x) \geq 0 \text{ y } f'(x) \leq 0;$$

b) Identifiquen otro intervalo en el que se cumplan estas otras dos condiciones:

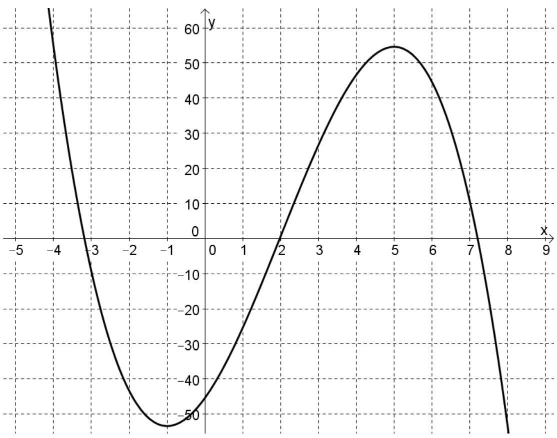
$$f(x) \leq 0 \text{ y } f'(x) \leq 0.$$

c) Dibujen el gráfico de una función $g(x)$ que cumpla las condiciónes $g(x) \leq 0$ y $g'(x) \geq 0$ en el intervalo $(-1, 4)$ y que además tenga un mínimo local en $x = -1$.

Problema 82. Extremos 1. Encuentren los extremos locales de cada una de las siguientes funciones. ¿Son máximos o mínimos locales? ¿Cómo lo pueden decidir?

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$

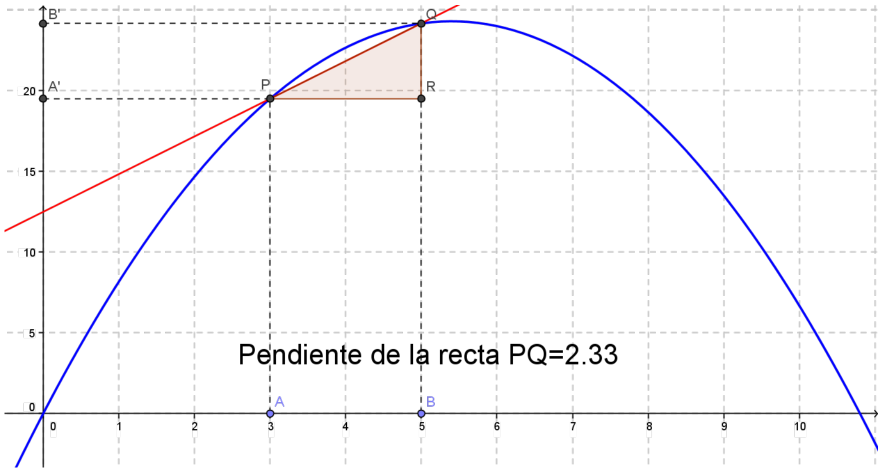
Problema 83. Extremos 2. Dado el siguiente gráfico de la derivada de $f(x)$



a) Analicen máximos; mínimos; intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Tracen un gráfico aproximado de $f(x)$

Problema 84. Parábola. Se sabe que la parábola de la figura responde a la ecuación del **Problema Problema 72.**.



a) ¿Qué cuentas hay que hacer para obtener el número $2{,}33$ que se lee en el cartel de la figura? Escriban una sola expresión que contenga a todas las cuentas involucradas.

b) La parábola es el gráfico de la altura de la pelotita en función del tiempo. ¿Cuál es la interpretación física del número $2{,}33$ del mencionado cartel?

Problema 85. Calcular 2. Calculen la derivada de cada una de las funciones del **Problema Problema 64.**.

Problema 86. Tangente 4. Consideren la recta *L* de ecuación $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ y su punto $A = \left(2, \frac{3}{2}\right)$. Encuentren la ecuación de una función cuadrática f de modo tal que la recta *L* resulte tangente al gráfico de f en el punto A.

Problema 87. Tangente 5. Si $f(x) = x^2 - 3x + 1$, ¿es cierto que la ecuación de la recta tangente a f en (2;-1) es $y = 2x - 3$?

Problema 88. Inventar 2. Cierta función f verifica las siguientes dos condiciones:

(i) $f'(3) = 5,$ (ii) $f'(2) \neq 5$

a) Inventen una posible fórmula para f.

b) Si f representa la posición de un vehículo en función del tiempo, ¿qué significan las condiciones (i) y (ii) de la pregunta *a*)?

Problema 89. Condiciones 2. Cierta función f verifica las siguientes dos condiciones:

(i) $f'(1) = 4,$ (ii) $f'(-1) \neq 3$

a) Inventen una posible fórmula para f.

b) Si f representa la cantidad de agua que sale por una canilla en función del tiempo, ¿qué significan las condiciones (i) y (ii) de la pregunta *a*)?

Problema 90. Automóvil. Un automóvil viaja por una ruta. La posición del auto sobre la ruta (medida en km) entre dos momentos determinados (medidos en minutos) está descripta por la función:

$$f : [5; 9] \to \mathbb{R} / f(t) = 8t^2 - 60t + \frac{245}{2}$$

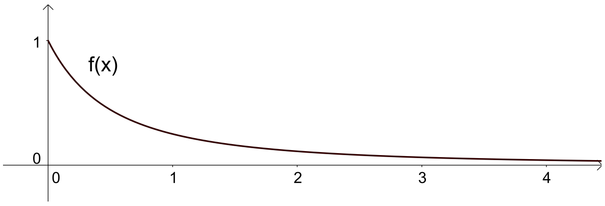
a) Identifiquen cuáles son esos dos instante y calculen la cantidad de kilómetros que recorrió el automóvil durante el tiempo transcurrido entre ellos.
b) Determinen a qué velocidad viajaba el automóvil a los 7 minutos.
c) Determinen si es cierto que durante ese período el auto viaja cada vez más lento.

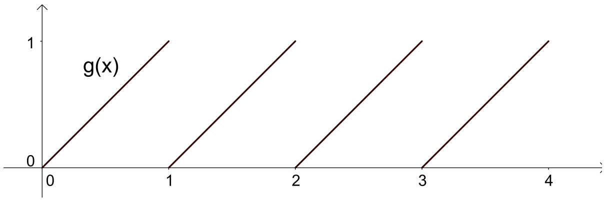
Problemas adicionales

Problema 44. Para la función $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$, calculen la ecuación de la recta tangente a su gráfico que posee la mayor pendiente.

Problema 45. Escriban un texto de no más de 1000 palabras con todas las ideas, representaciones, aplicaciones y conocimientos que tengan sobre la derivada de una función.

Problema 46. Dadas las funciones f y g definidas por los gráficos de la figura, confeccionen los gráficos de:





a) Las derivadas de f y de g.

b) Un par de funciones que tengan a f y g como derivadas.

Problema 47. Si una función $g(x)$ es cuadrática, su derivada es una función lineal representada por la ecuación de una recta.

a) Explicá en un breve texto en qué se relacióna esa recta con la recta tangente al gráfico de la función $g(x)$ en un punto.

b) ¿Es posible que la recta tangente a $g(x)$ en $x = x_0$ coincida con $g'(x)$, para alguna g y algún x_0? Si la respuesta fuera afirmativa da un ejemplo de esa g y ese x_0, si fuera negativa explicá por qué no pueden coincidir.

Problema 48. ¡La imaginación al poder!

a) Inventá, proponiendo la fórmula, una función f que verifique:

$$f(2) > 0, \ f'(2) < 0, \ f'(4) > 0$$

b) Suponé que la función inventada representa la posición de un vehículo en función del tiempo y escribí un breve texto que describa el movimiento del cuerpo durante los 0 y los 5 s (¿A qué distancia del 0 comenzó? ¿Se alejaba del 0 o se acercaba? ¿Iba cada vez más rápido o cada vez más despacio?, etc.)

Para seguir estudiando en biblioteca

En esta sección recomendamos algunos libros e indicamos problemas que está bueno resolver para seguir practicando y aprendiendo.

El libro [3] es una excelente fuente problemas. Si bien es un libro orientado a economistas y administradores, tiene problemas de todo tipo que requieren hacer modelos matemáticos con funciones y sus derivadas, lo que, a nuestro juicio, pone a prueba la comprensión de estos temas. En algunos casos es posible que se necesite recurrir a funciones que no hemos repasado o cuya derivada no hemos aprendido a calcular, en ese caso pasen al problema siguiente. También van a encontrar problemas que usan tecnicismos económicos, como *costo marginal*, *ingreso marginal*, *depreciación lineal*, etc. pasénlos de largo a menos que tengan muchas ganas de aprender economía. En ese caso pueden usar este mismo libro para aprender esos conceptos. La sección de problemas 11.3 de la página 504 y siguientes tiene muchos de estos problemas de modelización. En algunos el modelo viene dado; en otros deben armarlo a partir de lo que dice el enunciado. Lo mismo ocurre con la sección de problemas 13.6 de la página 607 y siguientes.

El libro [1] tiene muy buenos problemas que figuran bajo el título de ACTIVIDADES. Hay un solo ejemplar en biblioteca. En las páginas 172 a la 175 recomendamos hacer los problemas del 1 al 6, el 11, los problemas 20 al 22, 28, 30 al 32 y del 38 al 45. En las páginas 193 y 194 recomendamos hacer los problemas del 27 al 37.

El libro [2] de nuestra vecina Universidad Nacional de General Sarmiento es una muy buena referencia para un curso introductorio de matemática. Hay varios ejemplares en biblioteca. Recomendamos de este libro los problemas de extremos absolutos de las páginas 405 y 406.

Referencias

[1] Álvarez, Fernando and Ruiz, Andrés. *Límites, Matemáticas I*. Vicens Vives, 1998.

[2] Adriana Aragón, Juan Pablo Pinasco, Claudio Schifini, and Alejandro Varela. *Introducción a la matemática para el Primer Ciclo Universitario*. Universidad Nacional de General Sarmiento, 2008.

[3] F. Haeussler Jr., Ernest, S. Paul, Richard, and Richard J. Wood. *Matemáticas para administración y economía 12a Ed.* Pearson Educación, 2008.