

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Proporciones justas y otros encuentros

Objetivos de esta unidad

- Modelizar problemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas.
- Reconocer una ecuación lineal dada en cualquier formato y ser capaces de llevarla operando algebraicamente a forma $a_1x_1 + a_2x_2 = b$
- Manejar las operaciones de sumas de ecuaciones lineales y de multiplicación de una ecuación lineal por un número, que les sirva para reducir la cantidad de incógnitas de un sistema.
- Plantear y resolver problemas a partir de los sistemas de ecuaciones que los modelizan.
- Operar correctamente programas que resuelven ecuaciones lineales cargando los datos e interpretando las soluciones.
- Comprender que un modelo matemático más un dato nos proporciona una ecuación, y con dos datos podemos tener dos ecuaciones, y con dos ecuaciones un punto de intersección (que según las circunstancias podrá llamarse punto de equilibrio o punto de encuentro).

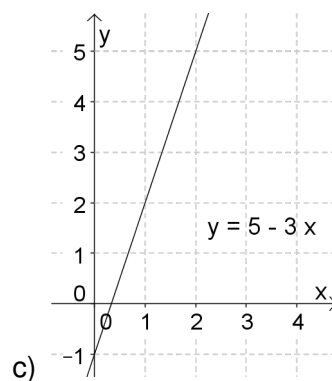
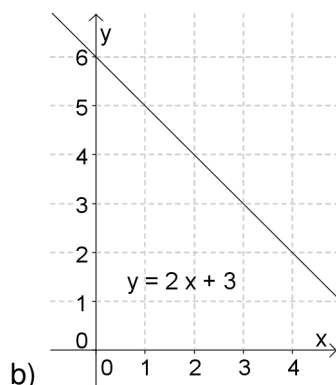
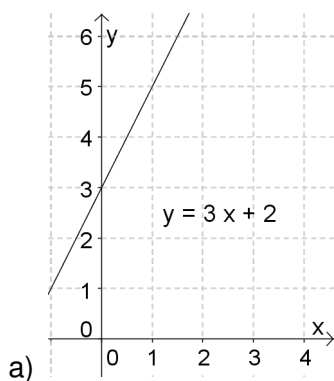
Problema 19. Sistemas. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x - 5y = 2 \end{cases}$

Problema 20. Solución. Decidan si $(2; 3)$ es solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 4y = 14 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$

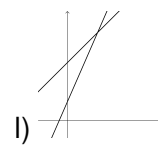
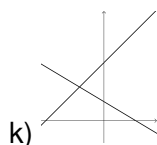
Problema 21. Gráfico y fórmula. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones formados por un gráfico y una fórmula.



Problema 22. Correspondencia. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones y gráficos.

i) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = -3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = -3 \end{cases}$



- Determinen qué sistema corresponde con qué gráfico sin resolver los sistemas.
- Expliquen por qué los otros no se corresponden entre sí.
- Escriban un sistema para el gráfico solitario.
- Dibujen un gráfico para el sistema sin compañero.

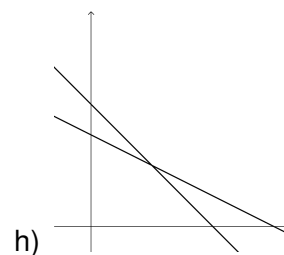
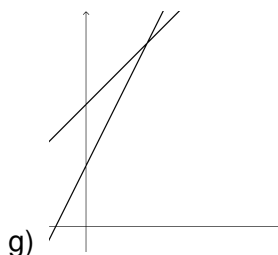
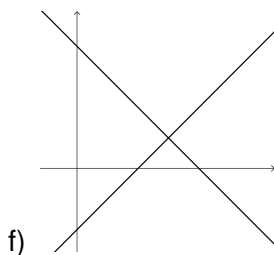
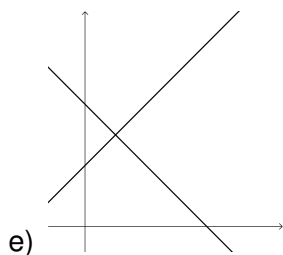
Problema 23. Correspondencia 2. Identifiquen sin hacer cuentas qué sistema corresponde a cada gráfico. Puede ser que haya sistemas y gráficos que no tengan correspondiente. Escriban en cada caso una explicación de por qué identifican la correspondencia, que tenga menos de 477 palabras.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$



Problema 24. Múltiple. En un examen de elección múltiple, se obtienen 4 puntos por cada respuesta correcta y se resta un punto por cada respuesta equivocada. Un estudiante respondió 17 preguntas y obtuvo 43 puntos. ¿Cuántas preguntas respondió correctamente y cuántas incorrectamente? [Tomado de: <https://iescomplutense.es/wp-content/uploads/2010/10/Hoja-06-Sistemas-de-ecuaciones-pend-3eso.pdf>]

- Identifiquen las incógnitas de este problema y asignen una letra a cada una de ellas.
- ¿Cuál o cuáles de los siguientes sistemas modelizan la situación?

(i) $\begin{cases} c + i = 43 \\ c + i = 17 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} c \cdot 4 - i \cdot 1 = 43 \\ c + i = 17 \end{cases}$

$$(iii) \begin{cases} c \cdot 4 + i \cdot 1 = 43 \\ c + i = 17 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} 4c - i = 43 \\ c = 17 - i \end{cases}$$

Problema 25. Quiosco. Marco, el hijo de Gonzalo, fue al quiosco de la esquina, compró 5 gaseosas y 3 chocolates y pagó \$190. Volvió al otro día, llevó 6 gaseosas y 2 chocolates, pagando \$180. ¿A qué precio se vende cada producto?

Problema 26. Libro. Lean la siguiente explicación extraída del libro Notas de Álgebra Lineal ([1]):

Decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones. Para pasar de un sistema a otro equivalente podemos efectuar las siguientes operaciones sobre las ecuaciones del sistema:

(i) Intercambiar dos ecuaciones de lugar.

Por ejemplo,

$$a) \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

los sistemas son equivalentes.

(ii) Multiplicar una ecuación por un número distinto de 0.

Por ejemplo,

$$a) \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$$

son sistemas equivalentes.

(iii) Reemplazar una ecuación por la ecuación que obtenemos al sumarle un múltiplo de otra.

Por ejemplo,

$$a) \begin{cases} x + 3y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$$

son sistemas equivalentes.

- ¿Cuál es el número por el que multiplicamos a la segunda ecuación en el ejemplo (ii) a) para obtener la ecuación (ii) b)?
- ¿Qué operaciones tuvimos que realizar en el sistema de ecuaciones del ejemplo (iii) a) para obtener el sistema equivalente (iii) b)?
- Ahora que han leído la explicación anterior vuelvan a resolver los problemas anteriores trabajando con sistemas equivalentes.

Problema 27. Granja. En una granja hay gallinas y ovejas. Si en total hay 30 animales y podemos contar entre todos 80 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántas ovejas hay en la granja?

Problema 28. Envasadora. Una envasadora de jugos tiene dos productos: cítrico y tropical. El jugo cítrico tiene el 70 % de jugo de naranja y 30 % de jugo de mango. El tropical tiene 20 % de jugo de naranja y 80 % de jugo de mango. ¿Cuántos litros de cada producto puede envasar si dispone de 450 litros de jugo de naranja y 800 litros de jugo de mango?

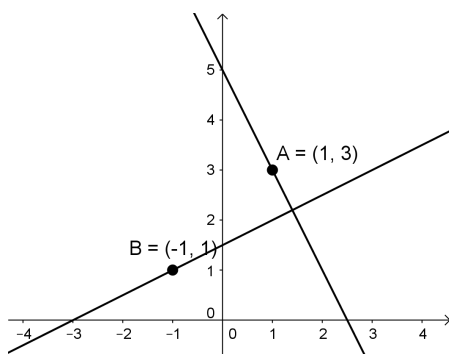
Problema 29. Pinturería. Una pinturería dispone de 650 litros de pintura azul y 200 litros de pintura blanca, para hacer dos tipos de mezcla: Adriática, que lleva 3 partes de azul por cada parte de blanca, y Tirrena, que lleva 4 partes de azul por cada parte de blanca. ¿Cuántos litros de cada mezcla debe hacer para agotar el stock de pintura blanca y azul?

Problemas adicionales

Problema 18. Lentes o gafas. En una empresa trabajan 60 personas. Usan lentes el 16 % de los varones y el 20 % de las mujeres. Si la cantidad total de personas con gafas es 11 ¿Cuántos varones y cuántas mujeres hay en la empresa?

Problema 19. No hay descuento. Por la compra de dos electrodomésticos pagamos \$7000. Si en el primer artículo nos hubiesen hecho un descuento del 10 % y en el segundo artículo un descuento del 8 % hubiésemos pagado \$6340. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

Problema 20. Estimen-Planteen-Comparen. Dadas las siguientes rectas graficadas en el plano:



- Estimen las coordenadas del punto de intersección.
- Planteen el sistema correspondiente y resolverlo.
- Comparen ambas soluciones.

Problema 21. Resolver sin resolver. Identifiquen, sin resolverlos, cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen las mismas soluciones. Escriban explicaciones detalladas de por qué logran identificarlos.

- $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - y = 22 \end{cases}$
- $\begin{cases} 4x + 8y = 24 \\ 44 + 2x = 2y \end{cases}$
- $\begin{cases} y = x - 22 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 11 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$

Problema 22. Paralelas. ¿Cuál de los siguientes pares de ecuaciones lineales representa gráficamente un par de rectas paralelas?

- $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = -\frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x = -3y + 6 \\ 4x = -6y - 12 \end{cases}$
- $\begin{cases} y - 2 = -\frac{3}{2}x \\ y = \frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$

Problema 23. Una vaca y un cerdo. Gustavo compró una vaca y un cerdo por \$20000 y los vendió por \$22600. ¿Cuánto pagó por cada animal, si la venta de la vaca le dio un 10 % de ganancia y la venta del cerdo le dio un 15 % de ganancia?

Problema 24. A inventar.

- Escriban un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que tenga solución $(-2; 5)$.
- Escriban un sistema de ecuaciones que no tenga solución y que una de sus rectas tenga pendiente -2 .
- Escriban un sistema de ecuaciones que no tenga solución y que una de sus rectas pase por el punto $(-5, 3)$.

Problema 25. Encuentro en RN 2. Un auto parte de Buenos Aires rumbo a Mar del Plata por una ruta a una velocidad constante de 75 Km/h. En el mismo momento, otro auto que se encuentra en una localidad situada a 25 Km. de Buenos Aires, en la misma ruta, parte rumbo a Mar del Plata de modo tal que a las 2 horas está a 175 Km. de Buenos Aires.

- ¿Se encuentran los autos en algún momento?
- ¿Cuándo?

c) ¿A qué distancia de Buenos Aires?

Problema 26. Joyas de fantasía. Una compañía de enchapado para joyas de fantasía fabrica dos mezclas distintas: Premium y Estándar, ambas a base de plata y oro. En la siguiente tabla se detalla la composición de las mismas:

	Polvo de oro (en g)	Polvo de plata (en g)
Mezcla Premium	7	3
Mezcla Estándar	4	6

La compañía posee un stock de 35 kg de polvo de oro y 30 kg de polvo de plata. ¿Cuántos kilos de cada tipo de mezcla debe fabricar para agotar el stock?

Problema 27. Fabrica de muebles. En una fabrica de muebles se producen dos modelos de placares (A y B). Para realzar el model A se requiere una hora para pintarlo y media hora para lustrarlo. Para el modelo B se necesita de una hora para cada proceso. Durante cada hora que la línea de muebles se está ensamblando, existen 200 horas de mano de obra disponibles para pintarlos y 160 horas para lustrarlos. ¿Cuántos placares de cada modelo pueden producirse por hora si se utilizan todas las horas de mano de obra disponibles?

Problema 28. Qué lambda. Hallen en cada caso el valor de λ para que la solución del sistema sea la que se indica.

a) $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ \lambda x + y = 9 \end{cases}$ Solución: $(x, y) = (1, -2)$

b) $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ \lambda x + y = 4\lambda \end{cases}$ Solución: $(x, y) = (-2, -3)$

Referencias

- [1] Alejandra Maestriperi et al. *Notas de álgebra lineal para el primer ciclo universitario*. Universidad Nacional de General Sarmiento, 2008.