Unidad 3a: Modelos cuadráticos

Aceleraciones, ingreso cuadrático, máximos y mínimos primera parte

Objetivos de esta unidad

- Comprender que un modelo matemático más un dato nos proporciona una ecuación, y con dos datos podemos tener dos ecuaciones, y con dos ecuaciones un punto de intersección (que según las circunstancias pordrá llamarse punto de equilibrio o punto de encuentro).
- Comprender que las funciones lineales y la regla de tres no son sufiencientes para hacer buenos modelos matemáticos de la realidad y que en muchos casos la realidad requiere de modelos más sofisticados para ser representada o aproximada.
- Comprender las tres formas de escritura básicas de las funciones cuadráticas, teniendo bien claro qué representan los coeficientes en cada caso y pudiéndolas usar para modelizar problemas eligiendo en cada caso la más adecuada.
- Identificar y diferenciar tablas de datos que tienen variación cuadrática de otras que tienen datos que varían linealmente.

Problema 30. Bolita. Una bolita de vidrio es lanzada hacia arriba desde 1 m de altura y con una velocidad de 15 m/s. Si la variable t representa el tiempo (medido en segundos), la altura (en metros) a la que estará la bolita en cada instante viene dada por la fórmula

$$f(t) = -5t^2 + 15t + 1$$

a) ¿A qué altura del piso estará la bolita 0,5 s después de ser lanzada?
b) ¿A qué altura estará 2 s después de ser lanzada?
c) ¿Se puede asegurar que la bolita estuvo ascendiendo durante los primeros dos segundos desde que fue lanzada?
d) Observen que, para esta función, es $f(0) = 1$. ¿Qué significa esta información en el contexto del problema?
e) Observen que $f(3) = 1$ y $f(4) = -19$ ¿Qué significan estos valores en el contexto del problema?
f) ¿Cuánto tarda la bolita en llegar al piso?

Problema 31. Helados. La ganancia diaria que tiene una heladería está de acuerdo con los kilos de mercadería que vende y se describe por la siguiente fórmula:

$$f(x) = -x^2 + 40x - 300$$

a) ¿Para qué valores de x tiene sentido la función $f(x)$.
b) ¿Cuánto dinero pierde si no vende ningún kilo de helado en el día?
c) ¿Cuántos kilos tiene que vender para obtener la mayor ganancia diaria?

Problema 32. Expresión 1. Para cada ítem hallen una expresión de una función cuadrática f que verifique que:

a) Sus raíces son 2 y -3.
b) Sus raíces son 2 y -3 y que además pase por el punto $(1;16)$.
c) Su vértice es el punto $(1;2)$.
d) Su vértice es el punto $(1;2)$ y que además pase por el punto $(2;5)$.
e) $f(2) = f(8) = 4$ y que su coeficiente principal sea -2.

Problema 33. Expresión 2. Obtengan la expresión de la función cuadrática, cuyo gráfico cumple las siguientes condiciones:

a) Tiene vértice en el origen y pasa por $(1;3)$.
b) Tiene el vértice en $(0;3)$ y pasa por $(1;1)$.
c) Tiene raíces $x = -2$ y $x = -4$, y el coeficiente del término cuadrático es 1.

Problema 34. Naranjos. Un productor tiene una plantación de una hectárea con 40 naranjos. Cada uno de ellos produce 500 naranjas por año. Si decide aumentar la cantidad de plantas, sucede que por cada planta que incorpora a la parcela, la producción de cada naranjo disminuye en 5 unidades.

a) Elaboren una tabla para estudiar cómo varía la producción de naranjas por planta a medida que cambia la cantidad de plantas.
b) Elaboren una tabla para estudiar cómo varía la producción total de naranjas a medida que cambia la cantidad de plantas.
c) ¿Qué preguntas se harían si se pusieran el sombrero del productor?

Problema 35. Parcela costeña. El propietario de un campo quiere plantar cierto tipo de lechuga en una parcela de forma rectangular lindera con un río. Para evitar destrozos de las vacas decide que debe cerrarlo con alambre tejido. Dispone de 70 m de alambre tejido, aprovechará que un lado del terreno da sobre el río y solamente pondrá alambrado en los otros lados.

a) Den una fórmula que exprese la superficie de la parcela en función de uno de los lados de la misma.
b) Encuentren la longitud de los lados si la superficie cercada fuera de 500 m^2.

Problema 36. Asteroide. En un pequeño asteroide, un niño fanático de los corderos y temeroso de los baobabs arroja una piedra hacia arriba. La tabla correspondiente a las alturas y (en metros) de la piedra en función del tiempo t (en segundos) es la siguiente:

t	y
0	1
1	10
2	17
3	22
4	25

a) Estudien las variaciones de alturas y tiempos en la tabla. ¿Es uniforme la variación? ¿Y la variación de la variación?
b) Escriban una fórmula cuadrática que describa la altura en función del tiempo.
c) ¿En qué instante la piedra alcanza su altura máxima? ¿Cuál es esta altura?

Problema 37. Expresión 3. Completen:

La función cuadrática cuyo gráfico corta al eje de ordenadas (eje y) en 10 y tiene raíces -1 y 5 tiene expresión en forma canónica, $f(x) = \dots$

Problema 38. Expresión 4.

a) Hallen la expresión de una función cuadrática que verifique las siguientes condiciones:
- su eje de simetría sea $x = 3$;
- su gráfico corte al eje x en 1 y
- su gráfico corte al eje y en -2.

b) Grafiquen la función, indicando las raíces y el vértice.

Problema 39. Graficar muchas. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas, realicen su gráfico, tratando de utilizar la mínima cantidad de elementos.

a) $f(x) = 2x^2 - 6x - 3$
b) $f(x) = -x^2 + 4 + 1{,}5$
c) $f(x) = 3(x-1)(x+4)$
d) $f(x) = -(x+7)(2x-3)$
e) $f(x) = (x+7)(x-3) + 2$
f) $f(x) = -x^2 + 100$
g) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 8$
h) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 8$
i) $f(x) = 2(x+3)^2 - 72$
j) $f(x) = x^2 + (x-1)(x+1)$
k) $f(x) = 3x^2 - 12$

Problema 40. Tres puntos. Las siguientes tablas corresponden a dos funciones cuadráticas distintas. Para cada tabla hallen la expresión de la función cuadrática que corresponda.

x	y
0	6
4	6
8	14

x	y
0	6
5	6
8	14

Problema 41. Canónica.() Dadas las siguientes funciones definidas en el conjunto de los números reales:

a) Hallen el máximo o el mínimo valor que puede alcanzar cada una y determinen en qué valor de x lo alcanza:
   (i) $f(x) = (x-3)^2 - 4$
   (ii) $g(x) = -2(x-3)^2 - 4$

b) Para cada una de las funciones anteriores, estudien si el gráfico de la función corta al eje x y en qué valores lo hace.

Problema 42. Intersección 1. Sabiendo que el eje de simetría de la función cuadrática $f(x) = 3x^2 + bx - 1$ es la recta de ecuación $x = -\frac{2}{3}$ obtengan las coordenadas de los puntos de intersección de la función cuadrática con la recta $y - 8x = 6$.

Problema 43. Intersección 2. Hallen, si existen, las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola determinadas por $y = (x-2)^2 + 2$ y la recta dada por $y = x + 2$. Representen gráficamente.

Problema 44. Intersección 3. Hallen, si existen, las coordenadas de los puntos de intersección de las parábolas determinadas por $y = (x-2)^2 + 2$ y $y = x(x+2)$. Representen gráficamente.

Problema 45. Cañón y cañita. Desde una plataforma se disparan verticalmente y al mismo tiempo una bala de cañón y una cañita voladora. Las ecuaciones que dan sus respectivas alturas y (en metros) en función del tiempo t (en segundos) desde el disparo son:

Bala de cañón: $y = -5t^2 + 25t + 5$ Cañita voladora: $y = 15t + 5$

a) Representar gráficamente ambas funciones. ¿Cuántas veces los dos explosivos objetos voladores se encontrarán a la misma altura? ¿En qué instantes aproximadamente?
b) Calcular mediante ecuaciones el o los instantes en que la cañita y la bala de cañón están a la misma altura.
c) ¿Qué altura máxima alcanza cada objeto?

Problema 46. Ingreso cuadrático. La función que permite construir un modelo de los ingresos de una empresa en función de la cantidad de artículos que venden es $I(q) = (50-q)q$, y la del costo total es $C(q) = 10q + 60$.

a) Determinen cuántos artículos deben venderse para poder cubrir los costos.
b) Indiquen el dominio en que estas funciones tienen sentido para el enunciado del problema.

Problema 47. Mesas ratonas. Un fabricante puede producir mesas ratonas a un costo de $\$500$ por unidad. Estudios de mercado indican que si las mesas se venden a p pesos cada una, la cantidad mensual vendida está relacionada con el precio de venta según la expresión $q(p) = 2500 - p$ mesas.

a) Expresar la función que describe el beneficio mensual del fabricante como función de la variable p.
b) Determinar cuál será el precio de venta que produce mayor beneficio.

Problemas adicionales

Problema 29. Estación de servicio. El beneficio semanal de una estación de servicio, de acuerdo con los litros de nafta sin plomo que vende, se describe por la siguiente fórmula: $B(q) = -q^2 + 46q - 205$. La variable x se mide en miles de litros y el beneficio en pesos. La estación de servicio tiene capacidad de comercializar 50 mil litros por semana.

a) ¿Cuánto dinero pierde si no vende ningún litro de nafta?

b) ¿Cuántos litros se deben vender para que el beneficio sea máximo?

c) ¿Para qué cantidad de litros no hay pérdida ni ganancia?

d) ¿Cuántos litros de combustible deberían venderse para que la actividad sea rentable?.

Problema 30. Club Naútico. Un club náutico ofrece paseos en motos de agua a $\$300$. Se sabe que a ese precio tiene 900 clientes y que, por cada $\$10$ de rebaja en el precio del paseo, atrae a 50 clientes más.

a) ¿Cuánto debería cobrar el club por el paseo para maximizar sus ingresos?

b) Calculen el ingreso máximo del club.

c) ¿Para qué precios el ingreso decrece?

Problema 31. Viajero. Un viajero quiere alcanzar un tren en marcha. Las funciones que relacionan la posición y el tiempo son en cada caso: viajero: $p(t) = 400t$; tren: $p(t) = 500 + 30t^2$.

a) ¿Llega a producirse el alcance?

b) ¿En qué instante?

Problema 32. Piedra. Se deja caer una piedra desde el techo de un edificio que mide 80 m de altura y se quiere describir cómo varía la altura de la piedra en relación con el tiempo. La relación es la siguiente: $h(t) = 80 - 5t^2$, con t expresado en segundos y h en metros.

a) ¿A qué altura se encuentra la piedra después de un segundo, y después de dos segundos y medio?

b) ¿Cuántos segundos tarda la piedra en alcanzar una altura de 20 m?

c) ¿En qué instante la piedra toca el suelo?

d) ¿Cuánto tarda la piedra en recorrer los primeros 20 m? ¿Y en recorrer las últimos 20 m antes de alcanzar el suelo?

e) ¿Cuántos metros recorre la piedra en los primeros 2 segundos? ¿Y en los últimos dos segundos antes de alcanzar el suelo?

Problema 33. Dos móviles Dos móviles se desplazan de manera que para cada instante de tiempo t sus posiciones vienen dadas por:

Móvil 1: $f(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{17}{4}$
Móvil 2: $g(t) = \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}$

a) Se sabe que el Móvil 1 partió en el instante 0 y que el Móvil 2 partió desde la posición 0. ¿Quién partió antes?

b) ¿En qué instantes y en qué posiciones se cruzaron?

c) Cuando se cruzaron, ¿estaban viajando uno hacia el otro o iban los dos en el mismo sentido?

Problema 34. Den coordenadas del vértice, eje de simetría y ecuación de la parábola que resulta de trasladar $y = -x^2$

a) Tres unidades a la derecha y cuatro hacia arriba.

b) Una unidad a la izquierda y tres hacia abajo.

Problema 35. Una fábrica de marionetas tiene dos formas de evaluar su rendimiento. Si importa marionetas, la ganancia en función de la cantidad de docenas de marionetas vendidas, está dada por la función $f(x) = 100 + (x - 10)(x - 30)$. Alternativamente, si en vez de importarlas las fabrica en su planta de Pacheco, la ganancia en función de la cantidad de docenas de marionetas vendidas, estaría dada por la función $g(x) = 3x + 70$. ¿Cuántas docenas de marionetas deberían venderse para que sea más conveniente fabricar marionetas en la planta de Pacheco que importarlas?

Problema 36. Un grupo de montañistas hace sus prácticas semanales, uno de los ejercicios con que practican consiste en tirar de una cuerda elástica atada a un poste. La tensión que se produce en el elástico, t segundos después de comenzar a tirar de la cuerda, está dada por la siguiente fórmula: $f(t) = 615t - 35t^2 - 105.$

a) Determinen dentro de qué dominio es válida esta función.

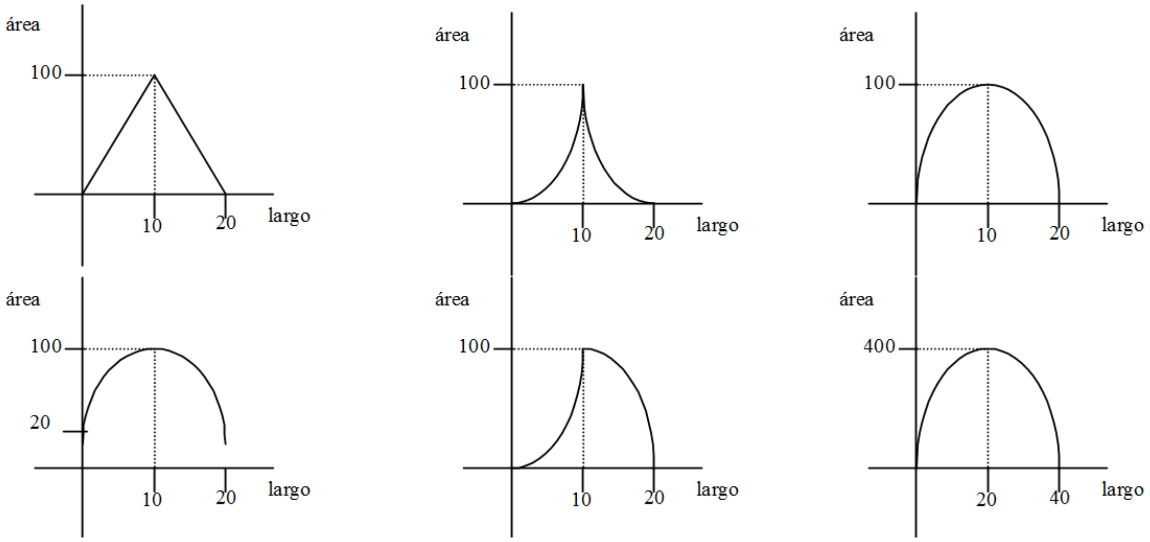
b) Calculen el valor de la tensión máxima y en qué momento se alcanza.

Problema 37. Un granjero quiere delimitar una región rectangular con un alambre de 40 m para hacer una zona de cultivos. Este terreno limita con el terreno de un único vecino que tiene construida su medianera de más de 40 m de largo. Sobre dicha medianera se quiere apoyar uno de los bordes que delimitan la zona de cultivos. Todo el recinto será bordeado por el alambre, incluso el lado que está contra la medianera.

a) Como el dueño de la medianera es el vecino, el granjero deberá solicitarle autorización para hacer uso de la misma, indicándole qué parte de ella será ocupada. Indiquen por lo menos cuatro posibles dimensiones de la zona de cultivo, explicitando para cada caso, qué longitud estaría apoyada sobre la medianera.

b) ¿De qué dimensiones debería hacer el granjero la zona de cultivo si quiere maximizar su cosecha? En este caso, ¿qué le informaría a su vecino respecto de la longitud utilizada de su medianera?

c) Decidan, justificando adecuadamente (tanto el/los que eligen como los que descarten) si alguno de ellos describe el área del rectángulo formado en función de la longitud del lado que fuera apoyado sobre la medianera. Si ninguno de los gráficos responde a lo pedido, propongan un gráfico que correspondería.


área
100
10
20
largo
área
100
10
20
largo
área
100
10
20
largo
área
100
20
10
20
largo
área
100
10
20
largo
área
400
20
40
largo