# Unidad 5: Integrales

## *Primitivas que calculan Áreas*

**Objetivos de esta unidad**

- Comprender las relaciones entre gráficos de posición, velocidad y aceleración. Comprender las relaciones entre caudal y agua acumulada y otras magnitudes físicas.
- Comprender el concepto geométrico de integral como área bajo una curva. Operar con sumas y restas de áreas, logrando resolver situaciones donde estas operaciones son necesarias.
- Comprender la relación entre una función, su función integral y su función derivada.
- Comprender que la integral de una curva $f$ en un intervalo puede ser una función $F$ de uno de los extremos del intervalo. Cómo se utiliza esa función en relación al cálculo de área bajo la curva. Por qué una función puede tener muchas primitivas que difieren en una constante. Cómo funciona la regla de Barrow.

**Problema 91. Antiderivada 1.**

a) Hallen una función cuya derivada sea: $f'(x) = 6x^2 - 44x + 200$.

b) Hallen otra diferente que cumpla la misma condición.

c) ¿Cuántas funciones diferentes podemos encontrar?

**Problema 92. Antiderivada 2.** El costo marginal de una fábrica viene dado por: $C'(x) = 2x + 3$.

a) Hallen la función Costo sabiendo que el costo de producir $20$ unidades es de $\$500$.

b) ¿Cuál es el costo de producir $50$ unidades?

**Problema 93. Antiderivada 3.** En una empresa los costos fijos mensuales ascienden a la suma de $\$2500$. El costo marginal está dado por la expresión $C'(q) = q^2 + 7q + 6$.

a) Determinen la función Costo total.

b) Determinen el costo total si la empresa produce $60$ unidades.

**Problema 94. Antiderivada 4.** El costo marginal de una fábrica viene dado por $C'(x) = 3x^2 - 84x + 600$ y los costos fijos son de $\$5000$. La fábrica puede producir hasta $50$ unidades por día. El producto se vende a $\$780$.

a) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el Beneficio sea máximo?

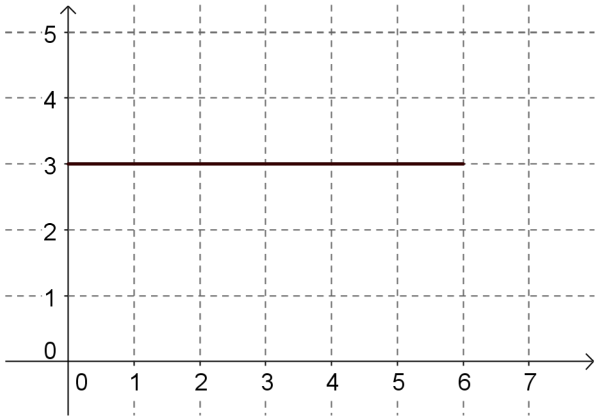
b) ¿Cuál es ese Beneficio máximo?

c) ¿Cuál es el Costo, el Ingreso y el Beneficio si se producen $20$ unidades?

**Problema 95. Antiderivada ingreso.** Encuentren la función Ingreso sabiendo que el ingreso marginal es:

$$I'(q) = q^2(q + 10).$$

**Problema 96. Automóvil 1.** El siguiente es un gráfico de la velocidad de un automóvil en función del tiempo.




a) Realicen un posible gráfico de la posición del automovil en función del tiempo.

b) Inventen un relato de manera que el gráfico corresponda con el mismo. Den unidades a las dos coordenadas del gráfico para que sean consistentes con el relato.

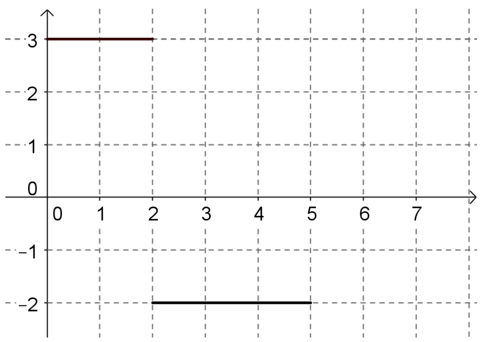
c) ¿De qué posición salió el automóvil?

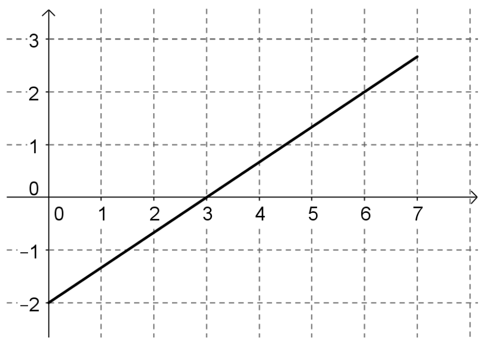
d) ¿Cuál es el espacio recorrido a los $3$ minutos?

e) ¿Cuál es el área entre la gráfica y el eje del tiempo, entre el instante cero y el instante $3$?

f) Comparen los resultados obtenidos en los dos items anteriores. ¿Se verifica el mismo fenómeno para otros instantes?

**Problema 97. Automóvil 2.** Como en el problema anterior, los siguiente son gráficos de la velocidad de un automóvil en función del tiempo. Respondan las mismas preguntas que en el problema anterior.




**Problema 98. Automóvil 3.** Todos ustedes han tenido la experiencia de viajar en vehículos motorizados. Cuando suben, esos vehículos se encuentran detenidos (no es recomendable subirse a los vehículos motorizados en movimiento). Cuando suben el conductor del vehículo acelera para que el mismo gane velocidad.

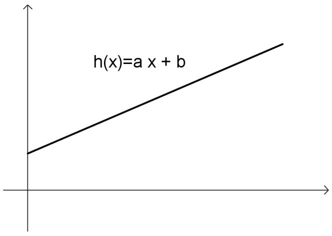
a) Critiquen los gráficos anteriores en relación a la verosimilitud de la descripción del fenomeno de acelerar.

b) ¿Cómo habría que redibujar los gráficos para representar aceleraciones más cercanas a la realidad?

**Problema 99. Primitivas.** Calculen las primitivas de las funciones presentadas en el **??**

**Problema 100. Area bajo la recta.** Calculen una fórmula $G(x)$ que de el valor del área bajo la recta $g(x) = 2x + 1$ hasta el eje $x$ de coordenadas. La fórmula debe calcular el área en el intervalo $[0, 5]$. ¿Cómo cambia la fórmula si se calcula el área bajo la recta en el intervalo $[0, x_0]$?

**Problema 101. Area bajo la recta generalizada.** Un compañero de ustedes, cuyo nombre vamos a mantener en el anonimato, sugirió la idea calcular el área bajo la recta genérica $h(x) = ax + b$ dónde tanto $a$ como $b$ son mayores que cero. Esta área estará dada por la función $H(x)$ y dará el valor del área bajo el gráfico de $h(x)$ desde 0 hasta un valor de $x$ variable y mayor que cero.

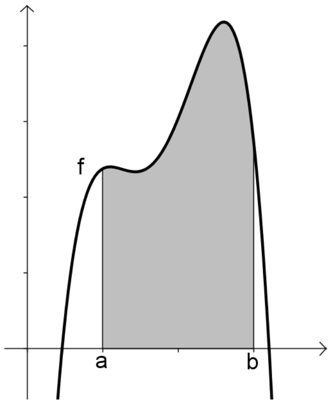



a) Calculen la función $H(x)$ que da el área bajo la curva $h(x) = ax + b$.
b) Analicen qué pasa si $a$ es negativo y $b$ es positivo.
c) Analicen qué pasa si $b$ es negativo y $a$ es positivo.
d) Analicen qué pasa si tanto $a$ como $b$ son negativos.

**Primitiva. Integral definida. Regla de Barrow.**

**Definición: Primitiva.**
Dada $f(x)$ se llama **primitiva** de $f$ y se anota como $F(x)$, a una función que cumple que $F'(x) = f(x)$.

**Definición: Integral definida.**
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ calcula el área sombreada bajo el gráfico de $f$, como se observa en la figura.




**Definición: Regla de Barrow.**
Barrow, amigo de Newton, desarrolló la siguiente fórmula para calcular la integral definida.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

**Propiedades de integral.**

Las propiedades de la integral permiten operar como reglas de integración.

Si $f(x) = g(x) + h(x)$ entonces $\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(x)\mathrm{d}x + \int h(x)\mathrm{d}x$

Si $f(x) = a \cdot g(x)$ entonces $\int f(x)\mathrm{d}x = a \int g(x)\mathrm{d}x$

Si $f(x) = a$ entonces $\int f(x)\mathrm{d}x = ax + c$

Si $f(x) = x^n$ entonces $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

Si $f(x) = e^x$ entonces $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x + c$

Si $f(x) = \frac{1}{x}$ entonces $\int f(x)\mathrm{d}x = ln(x) + c$

**Problema 102. Area 1.** Hallen el área de la región limitada por los gráficos de las funciones $f$ y $g$ dadas a continuación, escribiendo todos los cálculos que permiten obtenerla.

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5,$ $\quad g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

b) $f(x) = 2x^2 - 2x - 1,$ $\quad g(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 4,$ $\quad g(x) = x + 1$

**Problema 103. Area 2.** Hallen el área de la región limitada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 2x + 7$, escribiendo todos los cálculos que permiten obtenerla.

**Problema 104. Area 3.** Calculen el área de la región limitada por el gráfico de la función $f$ y el eje $x$, entre los valores de $x$ en los que $f$ tiene sus extremos locales, siendo $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^2 + 13x + 6$.

**Problema 105. Área y extremo.** Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$.

a) Hallen el máximo y el mínimo de la función.

b) Esbocen un gráfico aproximado.

c) Sea $a$ el valor donde la función tiene un mínimo. Hallen $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

d) Sombreen en el gráfico la región correspondiente a ese área.

**Problema 106. Área y tangente.** Dada la función $f(x) = -x^2 + 8x + 4$.

a) Hallen la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función en el punto $x = 2$.

b) Hallen el área limitada por el eje $y$, la función $f(x)$ y la recta tangente hallada.

c) Realicen un gráfico de la situación planteada, sombreando el área calculada.

# Problemas adicionales

**Problema 49.** Lean atentamente la siguiente descripción.

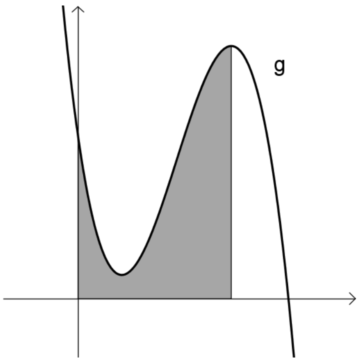
a) Construyan un gráfico con todos los objetos que se detallan.
   (i) $f$ es una función definida solo para $x \geq 0$, dada por la fórmula

   $$f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 7x + 3$$

   (ii) *L* es la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ en que $f$ alcanza su valor máximo.

b) Calculen el área de la región del primer cuadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$) limitada por el eje $y$, el gráfico de $f$ y la recta *L*.

**Problema 50.** Este problema requiere un plan. Datos disponibles: la fórmula de la función $g$. Conocimientos disponibles: comprender bien qué es la derivada y la integral y poder usarlas para resolver problemas, ser capaces de derivar e integrar la función $g$.




a) Escriban un plan con la cantidad pasos necesarios para calcular el área sombreada de la figura.

b) Expliquen, con el mayor detalle posible, qué ideas ponen en juego en el plan del punto anterior.

c) Una de las siguientes funciones es la derivada de la función $g$ del gráfico, $r(x) = 6x^2 - 16x + 7$ y $s(x) = -6x^2 + 16x - 7$. Decidan cuál es la correcta y expliquen por qué la eligen.

d) Reconstruyan la $g$ y calculen el valor del área sombreada ejecutando el plan trazado en el ítem a) sabiendo que la ordenada al origen de $g$ es igual a $2$.

**Problema 51.** Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$.

a) Hallen el máximo y el mínimo de la función.

b) Esbocen un gráfico aproximado.

c) Sea $a$ el valor donde la función tiene un mínimo. Hallen $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

d) Sombreen en el gráfico el área correspondiente.

**Problema 52.** Dada la función $f(x) = -x^2 + 8x + 4$.

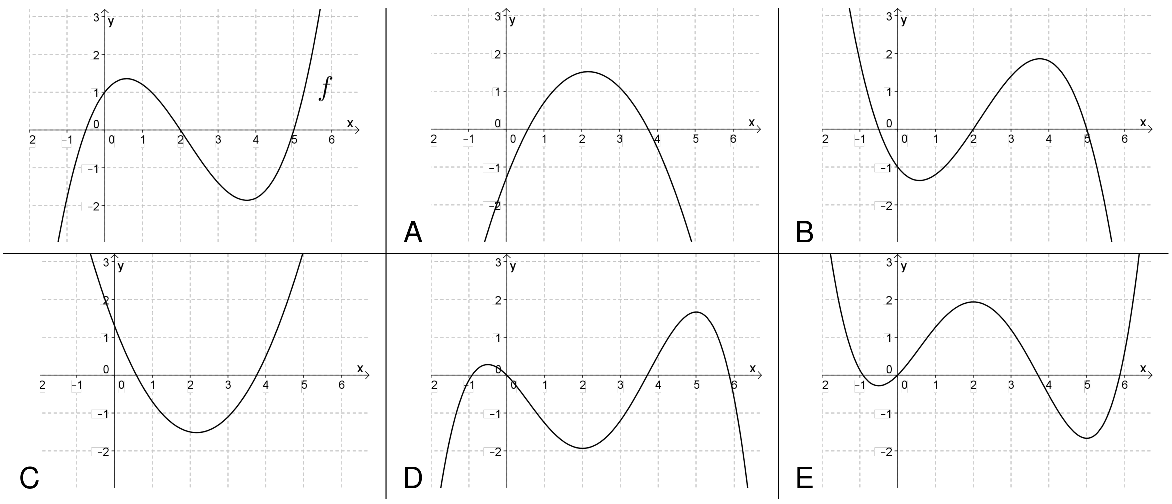
a) Hallen la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función en el punto $x = 2$.

b) Hallen el área limitada por el eje $y$, la función $f(x)$ y la recta tangente hallada.

c) Realicen un gráfico de la situación planteada, sombreando el área calculada.

**Problema 53.** En la siguiente serie de gráficos el primero corresponde a una función $f$.

Decidan cuál de los demás gráficos puede ser el de la derivada de $f$ y cuál, el de una primitiva de $f$. Justifiquen la elección de los gráficos y por qué descartaron los restantes.



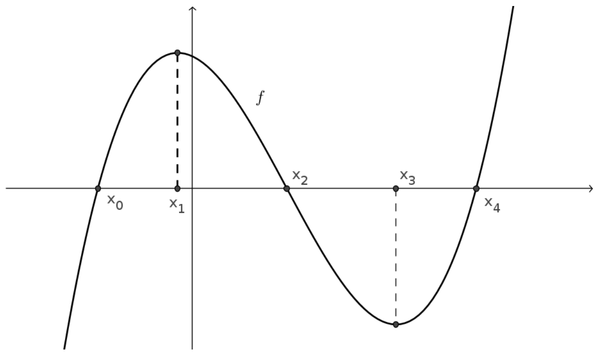

**Problema 54.** Observando el gráfico de la función $f$, y llamando $F$ a una primitiva de $f$ (es decir, $F'(x) = f(x)$),

a) identifiquen los valores de $x$ para los cuales $F$ tiene un máximo local y los valores para los cuales tiene un mínimo local.

b) identifiquen un intervalo en el que se cumpla que $F(x)$ y $f(x)$ son ambas crecientes.

c) identifiquen otro intervalo en el que se cumpla que $F(x)$ y $f(x)$ son ambas decrecientes.

d) Sabiendo que $G'(x) = g(x)$, dibujen el gráfico de una función $g$ de manera que: $G$ sea decreciente y $g$ sea creciente en el intervalo $(-1, 3)$ y que además $G$ tenga un máximo local en $x = 5$.




**Problema 55.** Hallen el área de la región limitada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 7$, escribiendo todos los cálculos que permiten obtenerla.

**Problema 56.** Un ciclista realiza una prueba de velocidad recorriendo sólo 100 m. Una buena descripción de la velocidad (medida en metros por segundo) en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por la fórmula

$$v(t) = \frac{1}{3}t^2$$

a) ¿Qué distancia recorre entre los 6 y los 9 segundos de su recorrido?

b) ¿Cuánto tiempo le lleva recorrer los 100 m?

**Problema 57.** Un río desemboca en un embalse. La cantidad de agua (medida en $\frac{m^3}{s}$) que llega por el río entre dos momentos determinados está descripta por la función:

$$f : [2; 4] \to \mathbb{R} / f(x) = -200x^3 + 3600x^2 - 21600x + 45700$$

a) Identifiquen cuáles son esos dos momentos y calculen la cantidad de agua que entra al embalse durante el tiempo transcurrido entre ellos.

b) Determinen si es cierto que durante ese período cada vez entra más agua.

**Problema 58.** Una pileta se está llenando con agua mediante una canilla. En un momento dado (que tomaremos como tiempo $0$) se comienza a cerrar la canilla hasta que se llega a cerrar totalmente. La cantidad de agua que contiene la pileta (en litros) en función del tiempo (minutos) está dada por la función:

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R} / f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 1500$$

a) ¿Cuál es el tiempo $t_1$ en el cual la canilla se cierra totalmente?
b) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta cuando se comenzó a cerrar la canilla?
c) ¿Cuántos litros de agua entraron a la pileta desde que se empezó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?
d) ¿Cuál es la cantidad media (o promedio) de litros por minuto ($\frac{l}{m}$) que entraron a la pileta desde que se comenzó a cerrar la canilla hasta que se terminó de cerrar?
e) ¿Cuál es la cantidad media de $\frac{l}{m}$ que entraron a la pileta entre el minuto $3$ y el minuto $5$ después de que se empezó a cerrar la canilla?
f) ¿Cuál es la cantidad exacta de $\frac{l}{m}$ que estaban saliendo por la canilla a los cuatro minutos de haber empezado a cerrarla?
g) ¿Podrías definir una función que describa la cantidad de agua que salía por la canilla en cada momento entre que se empezó y se terminó de cerrar?

**Problema 59.** Ante la misma situación que el problema anterior, pero con otra pileta y otra canilla, sabemos que la función que describe la cantidad de agua que sale por la canilla desde que se comienza hasta que se termina de cerrar está dada por:

$$f : [0; t_1] \to \mathbb{R} / f(x) = 2x^2 - 116x + 882$$

a) ¿Cuál es el tiempo $t_1$ en el cual la canilla se cierra totalmente?
b) ¿Cuántos litros de agua entraron en la pileta durante el período en que se fue cerrando la canilla?
c) ¿Cuántos litros de agua entraron en la pileta durante los primeros $7$ minutos en que se estaba cerrando la canilla?
d) ¿Podrías describir una fórmula que para cada instante $t$ calcule la cantidad de agua que entró en la pileta desde que se comenzó a cerrar la canilla?
e) Si cuando se comenzó a cerrar la canilla la pileta contenía 1000 litros de agua, definan una fórmula que calcule la cantidad de agua que contenía la pileta en cada instante entre que se empezó y se terminó de cerrar la canilla.

## Para seguir estudiando en biblioteca

En esta sección recomendamos algunos libros e indicamos problemas que está bueno hacer para seguir practicando y aprendiendo.

Como mencionamos en la misma sección de la Unidad anterior, el libro Matemáticas para administración y economía de Ernest Haeussler et al. [1] es una excelente fuente problemas. Recomendamos los problemas de la sección de problemas 14.10 de las páginas 673 y siguientes.

Los capítulos 5, 6 y 7 del libro Calculo Aplicado de Deborah Hughes-Hallett et al. [2] constituyen la mejor introducción al tema de integración con excelentes explicaciones y problemas para practicar y poder evaluar si comprenden el tema. Es altamente recomendable dedicarle tiempo a su lectura. Todavía no hay ejemplares en biblioteca pero pueden conseguir copia de esos capítulos en fotocopiadora.

# Referencias

[1] F. Haeussler Jr., Ernest, S. Paul, Richard, and Richard J. Wood. *Matemáticas para administración y economía 12a Ed.* Pearson Educación, 2008.

[2] Deborah Hughes-Hallet, Andrew M. Gleason, Patti F. Lock, and Daniel E. Flath. *Cálculo aplicado, Segunda edición*. CECSA, 2004.