Unidad 3b: Modelos exponenciales

Vidas medias, amortizaciones e intereses

Objetivos de esta unidad

- Identificar y diferenciar tablas de datos que tienen variación exponencial de otras que tienen datos que varían cuadráticamente o linealmente.
- Saber identificar si es verosimil una afirmación de alguien que dice: *estos valores muestran un crecimiento exponencial*.

Problema 48. Población. Una población es actualmente de 200 y está creciendo a razón de $5\,\%$ por año.

a) ¿Cuál será la población el año que viene? ¿Y el siguiente?
b) Escriban una fórmula para la población P como función del tiempo t en años.
c) Tracen una gráfica de P versus t.
d) Estimen la población 10 años a partir de ahora.
e) Estimen el tiempo de duplicación de la población.

Problema 49. Automovil 1.[1] El precio de un automóvil usado disminuye con el tiempo, de manera que cada año cuesta el 15 % menos de lo que costaba el año anterior. Consideren que un auto determinado cuesta hoy $\$50000$.

a) ¿Cuánto costará dentro de un año? ¿Cuánto costará dentro de dos años?
b) Escriban una fórmula que permita calcular el precio del auto en función del tiempo. Determinen el dominio y grafiquen la función.
c) Un comprador tiene ahorrados $\$17000$. ¿Cuánto tiempo debería esperar, como mínimo, para poder comprar ese auto?

Defininción: Interés compuesto En el mundo financiero, un capital C (dinero expresado en unidades monetarias) se puede invertir, aumentando su valor en función de una cierta tasa de interés i y produciendo un monto M al cabo de una unidad temporal n.

Si al cabo de cada período transcurrido, los intereses se depositan en nuestra cuenta, hablamos de *interés compuesto*.

[1] Este problema, junto con los **Problema 53.**, **Problema 51.**, **Problema 57.** y **Problema 58.** están tomados del libro [1].

La expresión funcional correspondiente a esta definición es:

$$M = C(1+i)^n$$

Problema 50. Capital. Se invierte un capital inicial de $\$10000$ colocado al $18\,\%$ anual producto de la compra de un bono, con vencimiento a dos años.

a) Calculen el monto a recibir al finalizar el vencimiento del bono.
b) ¿Cuál debería ser la tasa de interés anual para recibir $\$18000$ al finalizar el bono.
c) Calculen el período de capitalización (n) para recibir $\$18000$ producto de la inversión inicial, con la tasa de interés del $18\,\%$ anual.

Problema 51. C14. Lean el siguiente texto:

Decaimiento radiactivo

Durante toda su vida las plantas y animales incorporan a su organismo, a través del aire que respiran y de los alimentos que ingieren, distintos elementos presentes en la atmósfera. Entre ellos está el carbono. Toda concentración de carbono de la atmósfera tiene una parte estable (carbono 12 o C12) y una parte radiactiva (carbono 14 o C14).

¿Qué es un átomo radiactivo?

Un átomo radiactivo es un átomo cuyo núcleo puede transformarse espontáneamente, dando lugar a otro átomo más estable. El C14, por ejemplo, es un isótopo radiactivo del C12.

Vida media.

Cualquier concentración de C14 va decayendo (transformándose) hasta convertirse en nitrógeno. Esta desintegración lleva un tiempo y se produce de manera que el tiempo que le lleva a una concentración de material radiactivo reducirse a la mitad es siempre el mismo (uno distinto para cada material). Por ejemplo, 32 g de un material radiactivo tardará un tiempo en desintegrarse, hasta que solo queden 16 g. Luego tardará el mismo tiempo en desintegrarse hasta que queden 8 g y el mismo tiempo en desintegrarse hasta que queden 4 g, etc. Este tiempo se llama vida media del material radiactivo.

La cantidad de C14 presente en un organismo va decayendo, pero también es renovada continuamente mientras el organismo vive, de manera que su proporción de C14 es constante. Cuando el organismo muere, ya no renueva su proporción de C14. Mientras la cantidad de C12, permanece estable en él, el C14 continúa decayendo en función del tiempo. Los científicos han podido comprobar que la vida media del C14 es 5730 años, es decir, que la concentración de C14 se reduce a la mitad cada 5730 años.

a) Supongan que la concentración constante de C14 en el carbono presente en un organismo es cierto número K. Escriban la fórmula que permite calcular la concentración de C14 en dicho organismo, en función del tiempo (medido en años), a partir del momento en que el organismo muere.
b) Grafiquen la función.
c) Los investigadores que estudiaron las pinturas rupestres de las cuevas de Altamira pudieron medir la proporción de C14 (tal vez en las sustancias orgánicas de la pintura o en otros restos orgánicos hallados en las cuevas) y determinaron que solo quedaba el 20 %

de la concentración inicial K. ¿Cómo pueden utilizar esta información para determinar la antigüedad de las pinturas?

Problema 52. Tabla 1. La tabla muestra algunos datos que correspoden a una función cuya fórmula todavía no conocemos.

a) Construyan una curva que pase por todos los puntos de la tabla, configurando las escalas de los ejes para que todos los puntos resulten visibles.

b) Escriban la fórmula de una función f cuyo gráfico sea la curva del punto anterior.

c) Completen la tabla con los valores que faltan.

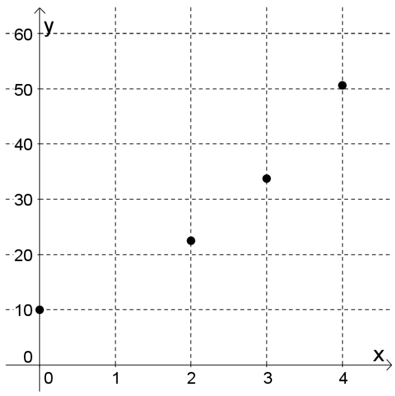
x	y
25	
30	729
50	
60	243
72	
90	81
100	
120	27

Problema 53. ( ) **Puntos 1.** La figura muestra algunos puntos del gráfico de una función exponencial f.

a) Estimen, mirando el gráfico, el valor de $f(2,3)$.

b) Escriban la fórmula de una función f que se corresponda con el gráfico.

c) Calculen $f(2,3)$ y comparen con el punto a).



Problema 54. Nicotina. La vida media de la nicotina en la sangre es de unas 2 horas. Una persona absorbe alrededor de $0{,}4$ mg de nicotina en el torrente sanguíneo al fumar un cigarrillo común y corriente.

a) Llenen los espacios de la siguiente tabla con la cantidad de nicotina restante en la sangre después de t horas.

b) Estimen el lapso de tiempo hasta que la cantidad de nicotina se reduzca a $0{,}04$ mg.

t (horas)	0	2	4	6	8	10
Nicotina (mg)	0.4					

Problema 55. Tabla 2. Determinen si cada una de las siguientes tablas de valores podría corresponder a una función lineal, a una función cuadrática, a una función exponencial, o a ninguna de ellas. Para cada tabla de valores que logren identificar, encuentren una fórmula para la función.

x	f(x)
0	10.5
1	12.5
2	14.9
3	17.7

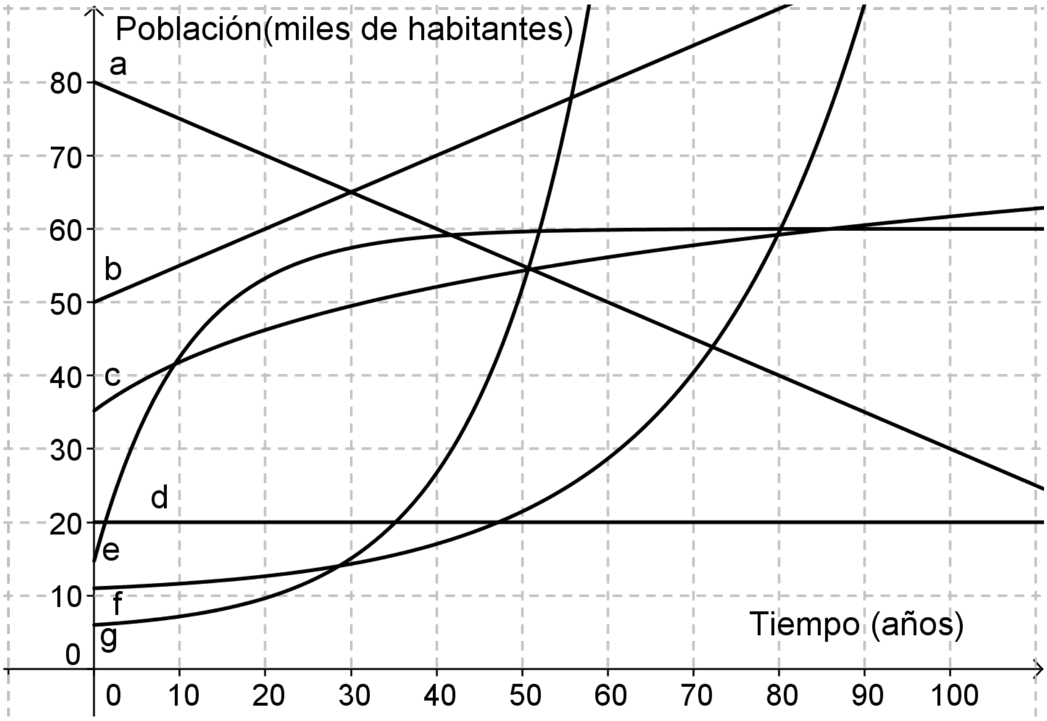
x	f(x)
0	10.5
1	12.5
2	18.9
3	36.7

x	f(x)
0	10.5
1	12.5
2	18.9
3	29.7

t	f(t)
-1	50.2
0	30.12
1	18.072
2	10.8432

u	g(u)
0	27
2	24
4	21
6	18

Problema 56. Gráficos. La figura ilustra gráficas de poblaciones de varias ciudades en función del tiempo. Relacione cada una de las siguientes descripciones con una gráfica y escriba una descripción para enlazar cada una de las gráficas restantes.



a) La población de la ciudad aumentó en 5 % por año.
b) La población de la ciudad aumentó en 8 % por año.
c) La población de la ciudad aumentó en 500 personas por año.
d) La población de la ciudad permaneció estable.

Problema 57. Cultivo 1. En un laboratorio se está estudiando un tipo de bacterias que se reproducen por bipartición cada 15 minutos. Se inicia un campo de cultivo con una bacteria a las 9:00 horas. Mediante el microscopio, se observa que a las 11:45, el campo de estudio tiene llena la mitad de su capacidad.

a) ¿A qué hora se llenará el campo de cultivo?
b) ¿Cuántas bacterias habrá cuando el campo de cultivo esté lleno?
c) Escriban la fórmula de la función que describe este fenómeno y determinen su dominio.

Problema 58. Cultivo 2. La función que describe el número de bacterias en un cultivo para cada momento, después de iniciado el mismo viene dada por la fórmula:

$$f(t) = 5 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$$

a) Construyan una tabla de valores y un gráfico para algunos valores válidos de t.
b) Interpreten el significado de los números 5, 2 y 30 que aparecen en la fórmula.
c) ¿Cuántas horas deberán transcurrir para que la población supere las 500000 bacterias?

Problema 59. Relación. Relacionen cada función exponencial con su gráfica. Existe la posibilidad que no todas coincidan. Si se diera ese caso determinen fórmulas y gráficos para los que no estén relacionados.

a) $f(x) = 5^x$

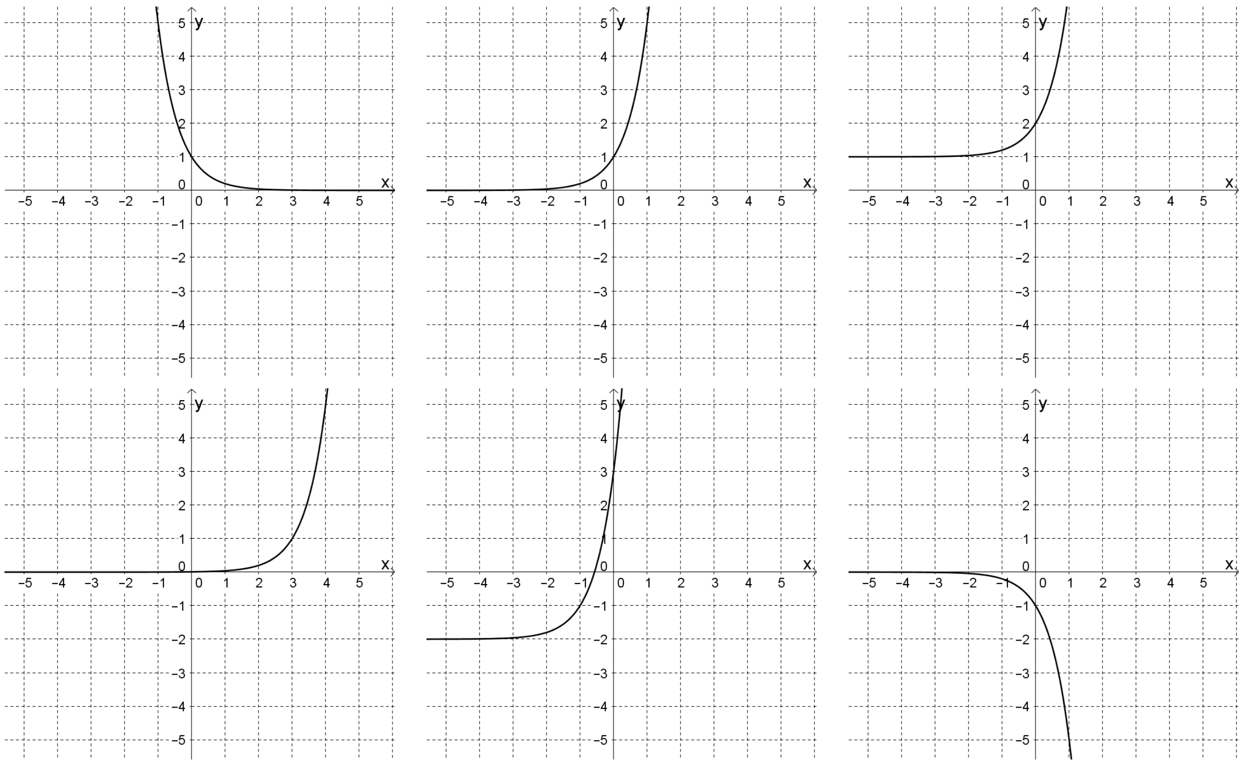
b) $f(x) = 5^{-x}$

c) $f(x) = -5^x$

d) $f(x) = 5^x + 2$

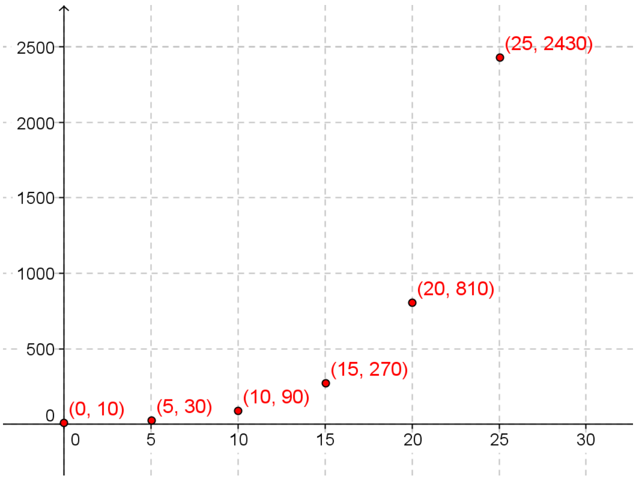
e) $f(x) = 5^{x-3}$

f) $f(x) = 5^{x+1} - 2$



Problemas adicionales

Problema 38. Puntos 2. La figura muestra algunos puntos del gráfico de una función exponencial f.



a) Estimen, mirando el gráfico, el valor de $f(23)$.

b) Escriban la fórmula de una función f que se corresponda con el gráfico.

c) Calculen $f(23)$ y comparen con el punto a).

Problema 39. Plazo Fijo. Marcela inverte sus ahorros en un plazo fijo durante un año renovándolo todos los meses. Los datos que se conocen están dados en la siguiente tabla donde C es el capital obtenido en el período t.

t	C
0	
1	15225
2	15453.38
3	15685.18
4	
5	16159.26
6	16401.65

a) ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Marcela al momento de realizar el plazo fijo?

b) ¿Y al cuarto mes?

c) ¿Cuánto dinero le entregó el banco al cabo de un año?

d) Da una expresión que indique el capital que obtiene Marcela con su inversión en el tiempo t.

e) Una amiga de Marcela invirtió sus ahorros en otro banco donde le daban una tasa de interés mensual del $1^{o}\,\%$. ¿La inversión que hizo Marcela fue mejor que la de su amiga?

Problema 40. Mercado automotor. Una experta en el mercado automotriz afirma que un auto cero kilómetro pierde el $20\,\%$ de su valor el primer año, en los años siguientes va perdiendo el $5\,\%$ de valor anual, pero nunca baja del $50\,\%$ del valor del cero kilómetro. ¿Qué clase de modelo matemático puede describir la depreciación del auto descripto por la experta?

Problema 41. Celular 1. Investiguen que función describe el tiempo de descarga de su celular. Piensen cómo diseñarían un experimento para hallar esa función. Si no se les ocurre cómo hacerlo vayan a leer el ítem a) de este problema.

a) Tomen nota de la nivel de carga de la batería en varios momentos del día y con los datos obtenidos hallen la función que mejor describe el proceso de descarga.

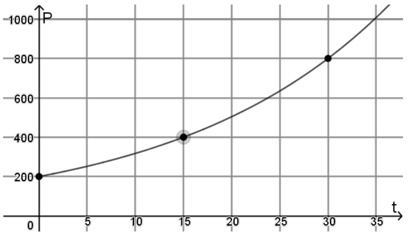
b) Reproduzcan el experimento mientras el celular esta reproduciendo música. Comparen las funciones obtenidas. ¿Qué resultado obtuvieron?

Problema 42. Celular 2. Investiguen que función describe el tiempo de carga de su celular. Piensen cómo diseñarían un experimento para hallar esa función. Si no se les ocurre cómo hacerlo vayan a leer el item a) de este problema.

a) Tomen nota de la nivel de carga de la batería en varios momentos durante el proceso de carga y con los datos obtenidos hallen la función que mejor describe el proceso de carga.

b) Comparen la función obtenida con la obtenida en el problema anterior. ¿Qué resultado obtuvieron?

Problema 43. El crecimiento poblacional de la ciudad A está representado en el gráfico que se muestra a continuación. El crecimiento poblacional de la ciudad B viene dado por la expresión $P(t) = 800(1,05)^t$. En ambos casos el tiempo en años está medido desde 1970.



a) ¿Qué ciudad tiene la población inicial más baja?, ¿qué cantidad es? ¿Cuál es la población de la Ciudad A en el año 1985? ¿En qué año la población de la ciudad B será de 1500 habitantes?

b) Si se mantienen las tasas de crecimiento, ¿alguna vez las ciudades tendrán la misma población? Justificá.

Referencias

[1] Claudio Salpeter. *Confluencias Matemática 3 ES*. Estrada, 2011.