可換環論

—— commutative algebra ——

PDF 置き場

2024 年 1 月 4 日 2:31am

はじめに

自分用のノートでしかない。self-contained は目指さないし、書籍の受け売りしか無いと思う。とりあえず [アティマク] M.F.Atiyah & I.G.Macdonald. **可換代数入門**, 2006. に書いてあることをまとめていこうと思う。

また、断らない限り「環」は**乗法単位元を持つ可換環**を指す。

目次

第 1 章

環とイデアル

1.1　環

定義 1.1.1：環

集合 $A \neq \varnothing$ と演算 $+, \cdot$ と $0, 1 \in A$ の組 $(A, +, \cdot, 0, 1)$ が次の条件を満たす時、A は**環**であるという。

(1) 加法 $+$、乗法 $\cdot$ についての結合則が成り立つ。

(2) 0 は加法、1 は乗法の単位元である。

(3) 各 $a \in A$ は加法逆元を持つ。

(4) 加法について可換則が成り立つ。

(5) 分配則が成り立つ。

さらに、

(6) 乗法について可換則が成り立つ。

も満たす時、A は**可換環**であるという。

1.2　素イデアルと極大イデアル

定理 1.2.1：極大イデアルの存在

全ての環 $A \neq 0$ は少なくとも 1 つの極大イデアルを持つ。

これは選択公理依存の定理である。また、実はこれは ZF 上選択公理と同値な命題である。(https://alg-d.com/math/ac/krull.html)

系 1.2.2

$\mathfrak{a} \neq (1)$ を A のイデアルとすると、A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ であって、$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ となるものが存在する。

系 1.2.3

A の全ての非単元 a に対して、ある極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在して、$a \in \mathfrak{m}$ となる。

証明： $\mathfrak{a} = (a) \neq (1)$ に対して上の系を適用する。 ■

定義 1.2.4：局所環・剰余体・半局所環

ただ 1 つの極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ環 A を**局所環**という。

このとき、体 $A/\mathfrak{m}$ を A の**剰余体**という。

極大イデアルが有限個である環を**半局所環**という。

付録 A
圏論

定義 1.0.1：ファイバー積 [数学原論, p.2]

X, Y, S を集合、$f : X \to S,\ g : Y \to S$ を写像とする。積集合 $X \times Y$ の部分集合

$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

を X と Y の S 上の**ファイバー積**という。写像を明示して、$X \times_{f,S,g} Y$ と書くこともある。

第 1 成分と第 2 成分への射影の制限もそれぞれ $\mathrm{pr}_1 : X \times_S Y \to X,\ \mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$ と書く。

定義 1.0.2：圏 [数学原論, p.3]

集合 C, M と写像

$$s : M \to C, \quad t : M \to C, \quad c : M \times_{s,C,t} M \to M, \quad e : C \to M$$

で、次の図式が可換になるものからなる組 (C, M, s, t, c, e) を**圏**という。

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "t"] & M \times_{s,C,t} \times M \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "c"] & M \arrow[d, "s"] \\
C & M \arrow[l, "t"] \arrow[r, "s"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \times_{s,C,t} M \times_{s,C,t} M \arrow[r, "c \times 1_X"] \arrow[d, "1_M \times c"'] & M \times_{s,C,t} M \arrow[d, "c"] \\
M \times_{s,C,t} M \arrow[r, "c"'] & M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "1_C"'] \arrow[dr, "e"] & C \\
C & M \arrow[l, "t"] \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "(e \circ t, 1_M)"] \arrow[d, "(1_M, e \circ s)"] \arrow[dr, "1_M"] & M \times_{s,C,t} M \arrow[d, "c"] \\
M \times_{s,C,t} M \arrow[r, "c"] & M
\end{tikzcd}$$

(C, M, s, t, c, e) が圏であるとき、省略して C を圏と呼ぶことが多い。

写像 s を源 (source)、t を的 (target)、c を合成 (composition) とよぶ。

集合 C の元を圏 C の**対象 (object)** とよぶ。また、集合 C を「圏 C の対象の集合」とよび、$\mathrm{Ob}(C)$ で表すことが多い。

集合 M の元を圏 C の**射 (morphism)** とよぶ。$A, B \in \mathrm{Ob}(C)$ で、C の射 f が $s(f) = A, t(f) = B$ をみたすとき、f は A から B への射であるといい、$f : A \to B$ で表す。A から B への射全体の集合を

$$\mathrm{Hom}_C(A, B) = \mathrm{Mor}_C(A, B) := \{f \in M \mid s(f) = A, t(f) = B\}$$

で表す。

$(g, f) \in M \times M$ が、写像 c の定義域 $M \times_{s,C,t} M$ の元であるとき、f と g は合成できるという。左上の可換図式から $s(c(g, f)) = s(f), t(c(g, f)) = t(g)$ なので、$g \circ f := c(g, f)$ は $s(f)$ から $t(g)$ への射である。つまり、射 $f : A \to B$ と $g : B \to D$ の合成は $g \circ f : A \to D$ である。

右上の可換図式は f と g、g と h が合成できる時、結合則

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.0.3}$$

が成り立つことを表す。

左下の可換図式は、$A \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して、$e(A)$ は C の射 $e(A) : A \to A$ であることを表す。これを A の**単位射 (identity)** とよび、$1_A : A \to A$ で表す。

右下の可換図式は、射 $f : A \to B$ に対して、

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A \tag{1.0.4}$$

を表す。

注意 1.0.5：対象に焦点を当てた解釈 [数学原論, p.5]

圏 C とは、

(1) 対象の集合 C

(2) $A, B \in C$ に対して定まる射の集合 $\mathrm{Mor}_C(A, B)$

(3) C の射 $f : A \to B, g : B \to D$ に対して定まる合成射 $g \circ f : A \to D$

(4) $A \in C$ に対して定まる単位射 $1_A : A \to A$

からなり、合成に関する結合則 (1.0.3) (p.3) と、単位射の性質 (1.0.4) (p.3) を満たすものと考えることができる。

定義 1.0.6：可環単系 [数学原論, p.35]

圏 (C, M, s, t, c, e) の対象がただ 1 つであるとき、M を**単系 (monoid)**、**モノイド**とよび、写像 $c : M \times M \to M$ を[†1] M の**演算**とよぶ。
$e : C \to M$ の像のただ 1 つの元 (C の元は 1 つなので、像は 1 元) を M の単位元という。

[†1] C の対象がただ 1 つなので、$M \times M = M \times_C M$ となっているために、c の定義域はこのように書いて良い。

定義 1.0.7：群 [数学原論, p.7]

単系 M の全ての射が可逆であるとき、M を**群**という。$g \in M$ の逆射を g の逆元とよび、g^{-1} で表す。

とここまで書いたが、これは脇においておくことにする。

索引

参考文献

[アティマク] M.F.Atiyah & I.G.Macdonald. **可換代数入門**. 共立出版, 2006.

[数学原論] 斎藤 毅. **数学原論**. 東京大学出版会, 2020.