可換環論

—— commutative algebra ——

PDF 置き場

最新版 PDF(GoogleDrive)

2024 年 1 月 18 日 9:45pm

はじめに

自分用のノートでしかない。self-contained は目指さないし、書籍の受け売りしか無いと思う。とりあえず [アティマク] M.F.Atiyah & I.G.Macdonald. **可換代数入門**, 2006. に書いてあることをまとめていこうと思う。いつリンクが失効するかわからないが、この PDF の最新版の GoogleDrive のリンクを貼っておく。
https://drive.google.com/file/d/1LbAQoggS-AScyO6N4G_ousNUVxeYsc5u/view?usp=sharing

また、断らない限り「環」は**乗法単位元を持つ可換環**を指す。

目次

第 1 章
環とイデアル

1.1　環

定義 1.1.1：環

集合 $A \neq \varnothing$ と演算 $+, \cdot$ と $0, 1 \in A$ の組 $(A, +, \cdot, 0, 1)$ が[†1]次の条件を満たす時、$(A, +, \cdot, 0, 1)$ は**環**であるという (省略して A を環ということもある。)。

(R-1) 加法 $+$、乗法 $\cdot$ についての結合則が成り立つ。
(R-2) 0 は加法、1 は乗法の単位元である。
(R-3) 各 $a \in A$ は加法逆元を持つ。
(R-4) 加法について可換則が成り立つ。
(R-5) 分配則が成り立つ。

さらに、

(R-6) 乗法について可換則が成り立つ。

も満たす時、A は**可換環**であるという。

[†1] $1 \neq 0$ でなくともよい

環はフランス語で「anneau」と書く。これが環をよく $A, B, \ldots$ と書く理由であろうか。環を R と書くこともよくあるが、これは明確に「ring」の頭文字であろう。**先にも述べたが、以後断りがない限り、「環」といえば「可換環」を意味する。**

では、準同型写像を定義する。環の構造を保つ (演算との整合性がある) 次の写像が重要視される。

定義 1.1.2：準同型写像

A, B を環とし、$f : A \to B$ を写像とする。f が**準同型写像**であるとは、以下の条件を満たすことをいう。

(RH-1) 任意の $x, y \in A$ に対して、$f(a+b) = f(a) + f(b),\ f(ab) = f(a)f(b)$
(RH-2) 単位元 1 について $f(1) = 1$

f と逆な準同型写像 $g : B \to A$ があるとき、A と B は**同型**であるという[†1]。

[†1] ここでは、圏 **CRing** における同型射の意味でこのように書いたが、f が全単射であれば、その逆写像は自動的に準同型写像となる。したがって、「f が全単射であるとき」と書いても同じことである。

定義 1.1.3：CRing

可換環を対象、準同型写像を射とすると圏を得られる。この圏を **CRing** と書く。

零環でなく、0 以外の元がすべて単元であるような環を体という。

定義 1.1.4：体

A を環とする。$1 \neq 0$ であって、0 以外の元がすべて単元であるとき、A は**体 (field)** であるという。

体の記号としてよく用いられる「K」はドイツ語で体を意味する「Körper」の頭文字である[†1]。
環 A の部分集合は必ずしも環とはならないが、$A' \subset A$ であって、A の演算 (の制限) で環となっているものを部分環という。

定義 1.1.5：部分環

A を環、$A' \subset A$ を部分集合とする。A' が A の演算の制限で環となっているとき、A' は A の**部分環**であるという。

数学的構造を保つような単射を埋め込みという。単射環準同型 $f : A \to B$ があるとき、A は B(と同型な環) の部分環と思える。

[†1] 少し話は変わるが、複素数全体を意味する $\mathbb{C}$ は complex number の頭文字というよりは、フランス語「nombre complexe」から来ていると考えるのが正しいかもしれないと『複素解析』(高橋礼司, 東京大学出版会) にあった。記号の導入がブルバキによるものであるからだ。

命題 1.1.6：埋め込みの原理 [勘どころ, p.33]

$f : A \to B$ は単射環準同型とする。このとき、次の条件を満たすような環 C と環の同型写像 $g : B \to C$ の組 (C, g) が少なくとも 1 つ存在する。

(1) A は C の部分環である。
(2) 写像 $i : A \hookrightarrow C$ により自然な埋め込み $i(a) = a$ を表すと、$i = g \circ f$ が成り立つ。

とくに B が体なら、C は A を部分環として含む体である。

$$\begin{tikzcd} C & B \arrow[l, "g"', "\sim"] \\ A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

部分環ではないが、重要視される部分集合としてイデアルがある。

定義 1.1.7：イデアル

$I \subset A$ が次の条件を満たすとき、I は A のイデアルであるという[†1]。

(I-1) $I \neq \varnothing$
(I-2) I は和に関して閉じている。
(I-3) 任意の $x \in I$ と $a \in A$ に対して、$ax \in I$ である。

$A = (1), \{0\} = (0)$ を自明なイデアルという。A と異なるイデアルを真のイデアルという。

[†1] 「イデアルである」って言いたくなりますよね。

体には次の性質がある。

命題 1.1.8

$A \neq 0$ を環とするとき、以下は同値である。

(1) A は体である
(2) A のイデアルは自明なものしかない。
(3) A から $B \neq 0$ へのすべての環準同型写像は単射である。

イデアルは加法に関するアーベル群であるから、A を加法によってアーベル群とみれば剰余群 A/I を得る。これは環ともなっている。

定義 1.1.9：剰余環

A を環、I をそのイデアルとする。商集合 A/I に以下の演算を入れる。

- $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$
- $(x + I)(y + I) = xy + I$

これは well-defined であり、この演算により A/I は環となる。この環を A の I による**剰余環**という。
$A/A = \{0\},\ A/(0) = A$ であることはすぐにわかる。

剰余環は射によって特徴づけられる。剰余環の普遍性は次のようになる。

命題 1.1.10：剰余環の普遍性

$f : A \to B$ を環の射とし、I を A のイデアルとする。このとき、

$$I \subset \mathrm{Ker}\, f$$

であることと、準同型 $\bar{f} : A/I \to B$ であって、標準的射影 $p : A \to A/I$ に対して、以下の図式を可換とするようなものがただ 1 つ存在することは同値である。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \\ A/I \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

この普遍性を満たす他の環があれば、それは A/I と環として同型となる。
環のイデアルと剰余環の間には重要な対応関係がある。

命題 1.1.11

A を環、$\mathfrak{a}$ を A のイデアルとする。

$$\mathbb{X} := \{\bar{\mathfrak{b}} \mid \bar{\mathfrak{b}} \subset A/\mathfrak{a} \text{はイデアル}\}$$
$$\mathbb{Y} := \{\mathfrak{b} \mid A \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a} \text{はイデアル}\}$$

とする。また、$\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ を標準的な全射とする。このとき、π の像による以下の対応がある

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{Y} & \longrightarrow & \mathbb{X} \\
\uplus & & \uplus \\
\mathfrak{b} & \longmapsto & \pi(\mathfrak{b}) \\
\pi^{-1}(\overline{\mathfrak{b}}) & \longleftarrow & \overline{b}
\end{array}
$$

これは全単射であり、次の性質がある。

- 包含関係を保つ
- 素イデアルであるという性質を保つ
- 極大イデアルであるという性質を保つ

なお、一般には準同型によるイデアルの像はイデアルではない。ところが、全射準同型によるイデアルの像はイデアルとなる。実際、$I \subset A$ をイデアルとし、$f : A \to B$ を全射環準同型とする。$x', y' \in f(I)$ に対して、$f(x) = x', f(y) = y'$ となる $x, y \in I$ が存在する。このとき、

$$x' + y' = f(x) + f(y) = f(x + y) \in f(I)$$

である。また、$b \in B$ に対して、f の全射性から、$f(a) = b$ となる $a \in A$ が存在するので、

$$bx' = f(a)f(x) = f(ax) \in f(I)$$

となる。

一方、準同型によるイデアルの逆像は常にイデアルとなる。

1.2 零因子

$xy=0$ なら $x=0$ または $y=0$ というのはよく普段使うことであろう。しかし、これは一般の環では常には成り立たない。それが成り立つような環を整域という。

定義 1.2.1：零因子と整域

A を環、$x \in A$ とする。ある $y \in A - \{0\}$ が存在し $xy=0$ が成り立つとき、x を**零因子**という。

A が零環でなく、任意の $x \in A - \{0\}$ が零因子でないとき、A を**整域**という。

零因子の例として、ベキ零元がある。$x \in A$ が**ベキ零元**であるとは、ある $n>0$ が存在して、$x^n=0$ となることをいう。
例えば体は整域である。

1.3 素イデアルと極大イデアル

定義 1.3.1：素イデアル

環 A の真のイデアル $\mathfrak{p} \subsetneq A$ であって、次の性質を満たすものを**素イデアル (prime ideal)** という。

$$\forall x, y \in A,\ xy \in \mathfrak{p} \implies x \in \mathfrak{p} \text{または} y \in \mathfrak{p}$$

A の素イデアル全体の集合を $\mathrm{Spec}(A)$ と書く[†1]。これを**スペクトル**、**スペクトラム**、**プライム・スペクトラム**などという。

[†1] これにはザリスキー位相という位相が入り、重要な考察対象となる。

定義 1.3.2：極大イデアル

環 A の真のイデアル $\mathfrak{m} \subsetneq A$ であって、次の性質を満たすものを**極大イデアル (maximal ideal)** という。

$$\forall \mathfrak{a} \subsetneq A : \text{イデアル},\ \mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subsetneq A \implies \mathfrak{a} = \mathfrak{m}$$

A の極大イデアル全体の集合を $\mathrm{Max}(A)$ と書く。

素イデアルや極大イデアルの言葉を用いれば次の性質が成り立つ。

命題 1.3.3

A を環、$\mathfrak{p}, \mathfrak{m} \subset A$ を真のイデアルとする。

(1) $\mathfrak{p}$ は素イデアルである $\iff$ $A/\mathfrak{p}$ は整域である。
(2) $\mathfrak{m}$ は極大イデアルである $\iff$ $A/\mathfrak{m}$ は体である。

したがって、極大イデアルは素イデアルである。
イデアルの対応定理 (命題 1.1.11 (p.3)) は素イデアルであるという性質を保つと述べたが、これは次のようなことである。

命題 1.3.4：素イデアルの対応定理

A を環とし、$\mathfrak{a} \subset A$ をイデアルとする。

$$V(\mathfrak{a}) \coloneqq \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$$

とすると[†1]、$V(\mathfrak{a})$ と $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ の間には標準的な全射 $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ の像による包含を保つ一対一対応がある。

[†1] 一般的な記号で、「Vanish」に由来する。

一般に、準同型によるイデアルの逆像がイデアルであることを述べた (全射の場合に限り、像もイデアル)。そこで、素イデアルや極大イデアルの逆像が素イデアル、極大イデアルであるかが気になる。
実際、素イデアルの逆像は素イデアルとなる。一方、極大イデアルの逆像は極大イデアルとなるとは限らない。

命題 1.3.5：素イデアルの逆像は素イデアル

A, B を環、$f : A \to B$ を環準同型とする。$\mathfrak{q} \subset B$ を素イデアルとする。このとき、$f^{-1}(\mathfrak{q})$ は A の素イデアルである。

証明： $\pi : B \to B/\mathfrak{q}$ を標準的な全射とする。$\pi \circ f : A \to B/\mathfrak{q}$ の核を考えると、

$$\mathrm{Ker}(\pi \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}\,\pi) = f^{-1}(\mathfrak{q})$$

である。したがって、$A/f^{-1}(\mathfrak{q}) \cong \mathrm{Im}(\pi \circ f) \subset B/\mathfrak{q}$ である。
したがって、$A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ は整域であり、$f^{-1}(\mathfrak{q})$ は素イデアルである。 ■

極大イデアルの逆像が極大イデアルでない例を与える。体の極大イデアルは 0 のみであることに注目する。$i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ を包含写像とする。$\mathbb{Q}$ の極大イデアル 0 の f による逆像は 0 であるが、これは $\mathbb{Z}$ の極大イデアルではない。たとえば (2) は 0 を真に包む $\mathbb{Z}$ の真のイデアルである。

定理 1.3.6：Krull の極大イデアル存在定理

全ての環 $A \neq 0$ は少なくとも 1 つの極大イデアルを持つ。

Krull(Wolfgang Krull,1899-1971) は可換環論に対する貢献を残したドイツの数学者である。

これは選択公理依存の定理である。また、実はこれは ZF 上選択公理と同値な命題である (https://alg-d.com/math/ac/krull.html)。この定理により、特に素イデアルを持つということがわかる (極大イデアルは素イデアル)。

系 1.3.7

$\mathfrak{a} \neq (1)$ を A のイデアルとすると、A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ であって、$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ となるものが存在する。

系 1.3.8

A の全ての非単元 a に対して、ある極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在して、$a \in \mathfrak{m}$ となる。

証明： $\mathfrak{a} = (a) \neq (1)$ に対して上の系を適用する。 ■

定義 1.3.9：局所環・剰余体・半局所環

ただ 1 つの極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ環 A を**局所環 (local ring)** という。その極大イデアルを明示して $(A, \mathfrak{m})$ と書くことも多い。

このとき、体 $A/\mathfrak{m}$ を A の**剰余体**という。

極大イデアルが有限個である環を**半局所環 (semi local ring)** という。

1.4 ベキ零根基とジャコブソン根基

定義 1.4.1：イデアルの根基

A を環、I をそのイデアルとする。このとき、

$$\sqrt{I} := \{x \in A \mid \exists n > 0,\ x^n \in I\}$$

はイデアルとなる。これを I の**根基 (radical)** という。

定義 1.4.2：ベキ零根基

環 A のベキ零元全体がなす集合を

$$\mathrm{nil}(A) := \sqrt{(0)} = \{x \in A \mid \exists n > 0,\ x^n = 0\}$$

と書く。これはイデアルとなる[†1]。これを A の**ベキ零根基 (nilradical)** という。

[†1] 一般に根基がイデアルであることから従う。二項定理による。

根基 $\sqrt{I}$ は標準的な全射 $\pi : A \to A/I$ によるベキ零根基 $\mathrm{nil}(A/I)$ の引き戻しで書ける。

$$\sqrt{I} = \pi^{-1}(\mathrm{nil}(A/I))$$

したがって、先にベキ零根基を定義して、それがイデアルであることを証明した場合についても、そこから根基がイデアルであるといえる。

根基に関する計算規則をいくつか挙げる。

命題 1.4.3：[アティマク, p.13]

環 A のイデアル $I, J, \mathfrak{p}$ について次が成り立つ。

(1) $\sqrt{I} \supset I$
(2) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
(3) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$
(4) $\sqrt{I} = (1) \iff I = (1)$
(5) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$
(6) $\mathfrak{p}$ が素イデアルなら、任意の $n > 0$ に対して $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$

イデアルの根基が互いに素であればイデアルは互いに素である。

命題 1.4.4

I, J を環 A のイデアルとする。$\sqrt{I}$ と $\sqrt{J}$ が互いに素なら、I と J は互いに素である。

命題 1.4.5

$A/\mathrm{nil}(A)$ は 0 と異なるベキ零元を持たない。

環には「被約」という整域に似た (整域より弱い) 性質があるが、これは $A/\mathrm{nil}(A)$ が被約であることを意味する。

定義 1.4.6：被約

環 A が 0 以外のベキ零元を持たないとき、A は**被約 (reduced)** であるという。

例えば整域は 0 以外の零因子を持たない。ベキ零元は零因子であるから、整域は被約である。

ベキ零根基は素イデアルの共通部分として書ける。

命題 1.4.7

環 A について、

$$\mathrm{nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{p} = \bigcap \mathrm{Spec}(A)$$

が成り立つ。

証明： [安藤可換環論, p.10],[アティマク, p.8] ■

系 1.4.8

環 A のイデアル I について、

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$$

が成り立つ。

証明：

$$\sqrt{(0)} = \mathrm{nil}(A/I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/I)} \mathfrak{p}$$

であった。また、標準的な全射 $\pi : A \to A/I$ の像によるイデアルの対応を主張する素イデアルの対応定理 (命題 1.3.4 (p.5)) により、$V(I)$ と $\mathrm{Spec}(A/I)$ の間には一対一対応があり、

$$\sqrt{I} = \pi^{-1}(\mathrm{nil}(A/I))$$

であることから、

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$$

である。 ■

全ての素イデアルの共通部分がベキ零根基であった。では極大イデアルの共通部分はどうだろうか、となるがこれはジャコブソン根基とよばれるものである。

定義 1.4.9：ジャコブソン根基

環 A のすべての極大イデアルの共通部分 $\mathrm{J}(A)$ を A の**ジャコブソン根基 (Jacobson radical)** という。

$$\mathrm{J}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} \mathfrak{m} = \bigcap \mathrm{Max}(A)$$

である。

極大イデアルは素イデアルであるから、

$$\mathrm{J}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} \mathfrak{m} \subset \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{m} = \mathrm{nil}(A)$$

命題 1.4.10：ジャコブソン根基の特徴づけ [アティマク, p.8]

環 A に対して、

$$\mathrm{J}(A) = \{x \in A \mid \forall a \in A,\ 1 - xa \text{ は単元}\}$$

である。

とくに、$x \in \mathrm{J}(A)$ に対して、$1 - x$ は単元である[†1]。

[†1] たとえば中山の補題の証明に使われる

1.5　イデアルに関する演算

[安藤可換環論, pp.32-] に対応する。
イデアルの最も基本的な演算に共通部分を取る操作と、積と和が考えられる。

定義 1.5.1：イデアルの共通部分と和と積

A を環、Λ を集合とする。各 $\lambda \in \Lambda$ に対してイデアル $I_\lambda \subset A$ が定まっているとする。
イデアルの共通部分

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$$

は再びイデアルとなる。A のイデアルは包含関係に関して完全束となる。
以下でイデアルの和 $\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ を定義する。

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda := \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \;\middle|\; x_\lambda \in I_\lambda,\ \text{有限個を除く}\lambda \in \Lambda\text{に対して}x_\lambda = 0 \right\}$$

有限個の和の場合、$I_1 + \cdots + I_n$ のように書くことが多い。
次に、$\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ を有限集合とする。このとき、以下でイデアルの積 $I_1 \cdots I_n$ を定義する。

$$I_1 \cdots I_n := \left\{ \sum^{\text{有限和}} x_1 \cdots x_n \;\middle|\; x_\lambda \in I_\lambda \right\}$$

つまり、全ての積 $x_1 \cdots x_n\ (x_\lambda \in I_\lambda)$ で生成されるイデアルである。

イデアルの和集合は一般にはイデアルとはならない。
これらの演算は全て可換である (ただし、積に関しては可換環だからこそ可換となる。)。例えば

$$I_1 \cap I_2 = I_2 \cap I_1,\ I_1 + I_2 = I_2 + I_1,\ I_1 I_2 = I_2 I_1$$

のようになる。そして、結合的である。

$$(I_1 \cap I_2) \cap I_3 = I_1 \cap (I_2 \cap I_3),\ (I_1 + I_2) + I_3 = I_1 + (I_2 + I_3),\ (I_1 I_2) I_3 = I_1 (I_2 I_3)$$

また、積と和は分配的である。I, J, K を A のイデアルとするとき、

$$I(J + K) = IJ + IK$$

が成り立つ。
$\cap$ と $+$ は分配的ではない。ただし、(当然だが)$J, K \subset I$ であれば、

$$I \cap (J + K)\ (= J + K) = I \cap J + I \cap K$$

が成り立つ。
また、一般に

$$(I + J)(I \cap J) = I(I \cap J) + J(I \cap J) \subset IJ + JI = IJ$$

が成り立つ。一方、

$$IJ \subset I \cap J$$

であるから、$I + J = (1)$ (I と J が互いに素) ならば、$I \cap J = IJ$ となる。
次に、イデアル商を定義する。

定義 1.5.2：イデアル商 (コロンイデアル)

M を A-加群、L, N を M の部分加群とする。このとき、

$$(L : N) := \{a \in A \mid aN \subset L\}$$

は A のイデアルとなり、これを L と N の**イデアル商 (ideal quotient)**、または**コロンイデアル (colon ideal)** という。

A 自身 A 加群 (作用を A の積で入れる) であり、A のイデアル I, J は A の部分加群である。したがって、イデアルのイデアル商 $(I : J)$ も当然定義できる。単項イデアル $J = (x)$ に対して、$(I, J) = (I, x)$ と表される。[アティマク, p.12] の定義は最初からイデアルに対してされているが、上はそれを少し拡張した形となっている。
次に、A 加群に対して零化イデアルを定義する。これはイデアル商によって表すことができる。

定義 1.5.3：零化イデアル

M を A-加群とする。このとき、

$$\mathrm{Ann}(M) := \{a \in A \mid aM = 0\} = (0 : M)$$

は A のイデアルとなり、これを M の**零化イデアル (annihilator ideal)** という。
環 A を明示する場合には $\mathrm{Ann}_A(M)$ と書くこともある。

上と同様に、A のイデアルは A-加群とみなせるから、イデアルの零化イデアルも同様に定義される。単項イデアル (x) の零化イデアルは $\mathrm{Ann}((x)) = \mathrm{Ann}(x)$ と略記される。

$$\mathrm{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$$

である。

零化イデアルを用いて、A の全ての零因子の集合 D は

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \mathrm{Ann}(x)$$

と表される。

イデアル商について次の計算規則が成り立つ。[アティマク, p.13][安藤可換環論, p.34]

命題 1.5.4：イデアル商の計算規則

有限集合 N と A のイデアル $I,\ J,\ K,\ I_k,\ J_k\ (k \in N)$、$A$-加群 M の部分加群 L, N について次が成り立つ。

(1) $I \subset (I : J)$
(2) $(I : J)J \subset I$ （これはイデアル商の定義そのまま）
(3) $\big((I : J) : K\big) = (I : JK) = \big((I : K) : J\big)$
(4) $\left(\bigcap_{k \in N} I_k : J\right) = \bigcap_{k \in N} (I_k : J)$
(5) $\left(I : \sum_{k \in N} J_k\right) = \bigcap_{k \in N} (I : J_k)$
(6) $\mathrm{Ann}(N + L) = \mathrm{Ann}(N) \cap \mathrm{Ann}(L)$
(7) $(L : N) = \mathrm{Ann}((L + N)/L)$

1.6　拡大と縮約

- ぱいおつ日記「素イデアルの拡大とか縮約とか」
- プチ定義集:イデアルの拡大・縮小

環準同型によるイデアルの逆像は常にイデアルとなる。一方、像はイデアルとは限らない。そこで、次のようにして新たなイデアルを定義する。

定義 1.6.1：拡大と縮約

A, B を環、$f : A \to B$ を環準同型とする。

(1) A のイデアル I に対し、像 $f(I)$ が生成する B のイデアル $Bf(I)$ を I の f による**拡大 (extension)** といい、I^e で表す。
(2) B のイデアル J に対し、逆像 $f^{-1}(J)$ を J の f による**縮約 (contraction)** といい、J^c で表す。

f が全射の場合は、$f(I)$ そのものが I の拡大である。

$A \subset B$ と思える場合には、$I^e = IB$ である (さらにいえば部分環なら I に等しい。)。$J^c = J \cap A$ である。記号の乱用だが $A \subset B$ とみなせない場合についても、f の誤解のおそれがないとき、I の拡大を IB、J の縮約を $J \cap A$ と表す。これは [青雪江, p.42, 命題 1.8.17] の記号の乱用と同じである。

環準同型写像 $f : A \to B$ は次のように分解することができる [アティマク, p.15]。

$$A \xrightarrow{p} f(A) \xrightarrow{j} B$$

たぶん p は f の終域を $f(A)$ に狭めた全射で、j は包含写像であろう。書いてないからわからない。

さて、拡大や縮小について次の性質が成り立つ。

命題 1.6.2

$f : A \to B$ を環準同型写像、$I \subset A,\ J \subset B$ をイデアルとする。このとき、次が成り立つ。

(1) $I \subset I^{ec},\quad J \supset J^{ce}$ となる。記号の乱用を用いれば、$I \subset IB \cap A,\quad J \supset (J \cap A)B$ となる。
(2) $J^c = J^{cec},\quad I^e = I^{ece}$ となる。記号の乱用を用いれば、$J \cap A = \big((J \cap A)B\big) \cap A,\quad IB = \big((IB) \cap A\big)B$ となる。
(3) A, B の部分集合をそれぞれ

$$\mathcal{C} := \{J^e \mid J \subset B\text{はイデアル}\} \subset A$$
$$\mathcal{E} := \{I^c \mid I \subset A\text{はイデアル}\} \subset B$$

で定める。このとき、

$$\mathcal{C} = \{I \mid I^{ec} = I\}, \qquad \mathcal{E} = \{J \mid J^{ce} = J\}$$

さらに、次の全単射が定まる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \Cup & & \Cup \\ I & \longmapsto & I^e \\ J^c & \longleftarrow & J \end{array}$$

(1) の等号が成り立たない例を与える。

例 1.6.3： https://mathlog.info/articles/1622

$A = \mathbb{C}[t^2, t^5],\ B = \mathbb{C}[t]$ とする (多項式環)。$f : A \to B$ を包含写像とする。このとき I を A のイデアル、J を B のイデアルとすると、記号の乱用ではなく厳密に $I^e = IB,\ J^c = J \cap A$ と書ける。

(1) A のイデアル $I = (t^2)$ に対し、$t^5 \in IB \cap A$ かつ $t^5 \notin I$
(2) B のイデアル $J = (t)$ に対し、$t \notin (J \cap A)B$ かつ $t \in J$

縮約や拡大とイデアル商、根基の関係が述べられた演習問題がある [アティマク, p.16]。

第 2 章
加群

2.1 加群と加群の準同型

定義 2.1.1：加群

A を環 (常に可換環)、$M \neq \varnothing$ を集合とし、演算 $+: M \times M \to M$、A の M への作用 $\bullet: A \times M \to M$ が定まっているものとする。また、$0 \in M$ とする。さらに、各 $a \in A$ に対して、$\bullet$ により写像 $a\,\bullet: M \to M$ が定まる。これを a によるスカラー倍という。

これらが次の条件を満たすとき、組 $(M, +, \bullet, 0)$ は A-**加群**であるという。

(M-1) $(M, +)$ はアーベル群である。
(M-2) 任意の $a \in A$ に対して、スカラー倍 $a\,\bullet$ は群準同型である。
(M-3) A の単位元 $1 \in A$ によるスカラー倍 $1\,\bullet$ は M の恒等写像 1_M である。
(M-4) 任意の $a, b \in A$ に対して、$(ab)\,\bullet = (a\,\bullet) \circ (b\,\bullet)$ であり、かつ $(a+b)\,\bullet = (a\,\bullet) + (b\,\bullet) : m \mapsto a \bullet m + b \bullet m$ である。

さらに、簡単に M を A-加群ということがあるが、A の作用が異なれば、M が等しくとも異なる加群であることに注意せねばならない (もとは作用なども含めた組を加群と定めたのだから、それはそう。)。

ここでは見た目のために A の作用を $\bullet$ で書いたが、以後 $\cdot$ で表す。また、$a \cdot m$ を am と略記することも多い。

定義 2.1.2：準同型写像

$(M, +_M, \bullet, 0_M)$, $(N, +_N, *, 0_N)$ を A-加群とする。写像 $f: M \to N$ が次を満たすとき、A-**線形写像**または、A-**準同型写像**という (または、A 加群の圏の射ということで、単に射ということもある)。

(1) $f: M \to N$ は群準同型である。
(2) 任意の $a \in A$ に対して、$f \circ (a\,\bullet) = (a\,*) \circ f$ である。すなわち、$f(ax) = af(x)$

このような A-準同型写像全体の集合を $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ または A が文脈上明らかなときは $\mathrm{Hom}(M, N)$ で表す。$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は A-加群となる (和は写像の和 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$、スカラー倍は N のスカラー倍写像との合成 $(af)(x) = af(x)$ により定まる。)。

$\mathrm{End}_A(M) \coloneqq \mathrm{Hom}_A(M, M)$ とする。これは写像の合成により乗法を定め、id_M を乗法の単位元とすることで環となる。

定義 2.1.3：圏 A-$\mathbf{Mod}$

A を環とする。対象を A-加群、射を A-加群の準同型とする圏があり、これを A-$\mathbf{Mod}$ とかく。

以下、面倒なので A 加群の射ということがあるが、それは A-$\mathbf{Mod}$ の射のことで、A 加群の準同型にほかならない。

例 2.1.4：加群の例

(1) A のイデアルは A-加群である。とくに A 自身も A-加群である。
(2) A が体のとき、ベクトル空間である。
(3) $A = \mathbb{Z}$ のときは、スカラー倍を忘れることで、関手 $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ ができ、この逆の関手は当たり前に定義できる作用を入れることで得られる。これにより、$\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod} \cong \mathbf{Ab}$ は圏同型である。
(4) K を体、$A = K[x]$ とすれば、A-加群 M とは線形写像を持つ K ベクトル空間である。まず、$K \subset K[x]$ とおもうことで、K の作用が M に入り、K-ベクトル空間である。さらに、$f(x) \in K[x]$ に対して $\bar{f}(v) \coloneqq f(x) \cdot v$ とすることで、線形写像 $\bar{f}: M \to M$ が定まる。$\bar{f}$ が和を保つことは、$\bar{f}$ は $f(x)$ によるスカラー倍であることから明らか (加群の公理 (M-2))。さらに、K のスカラー倍を保つことについては、$a \in K$ に対して $a\bar{f}(v) = a \cdot (f(x) \cdot v) = (af(x)) \cdot v = (f(x)a) \cdot v = f(x)(av) = \bar{f}(av)$ であることからわかる。つまり、$K[x]$ 加群とは $K[x]$ の元を線形写像とみなせるような加群であるということだ。
(5) 群環 例 2.8.5 (p.27)

注意 2.1.5：加群の構造射

M を A 加群とすると、各 $a \in A$ に対してスカラー倍写像が定まっていた。これはつまり、写像

$$\begin{array}{rccl} m: & A & \longrightarrow & \mathrm{End}(M) \\ & \cup & & \cup \\ & a & \longmapsto & m_a : v \mapsto a \cdot v \end{array}$$

が定まるということである ($\mathrm{End}(M)$ は群準同型 $M \to M$ の集合で、これは写像の合成を積として環となる。)。これは環準同型である。

逆に、アーベル群 M と環 A に対して、上のような環準同型が与えられたとする。このとき、M には A 加群の構造が入る。$\cdot: A \times M \to M$ を、$a \cdot v = m_a(v)$

と定めると

- $a(v+w) = m_a(v+w) = m_a(v) + m_a(w) = av + aw$
- $(a+b)v = m_{a+b}(v) = m(a+b)(v) = (m(a)+m(b))(v) = m(a)(v) + m(b)(v) = m_a(v) + m_b(v) = av + aw$
- $(ab)v = m_{ab}(v) = m(ab)(v) = (m(a) \circ m(b))(v) = m(a)f_b(v) = m_a(f_b(v)) = a(bv)$
- $1 \cdot v = m_1(v) = m(1)(v) = \mathrm{id}_M(v) = v$

となるからである。

つまり、上のような環準同型を与えることと、A 加群の構造を与えることは同値である。

また、任意の A-加群 M に対して、A 加群としての同型 $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$ である。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(A, M) & \longrightarrow & M \\ \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

とすればよい。逆写像は、$m \in M$ に対して、$f(1) = m$ となる f を取れば良い。任意の $a \in A$ に対して、$f(a) = af(1)$ であるから、そのような f は一意に定まる。これらは互いに逆対応を与える。

次に、A 加群の射に対して定まる重要な部分加群を定義する。

定義 2.1.6：像と余像、核と余核

$f : M \to N$ を A 加群の射とする。このとき、

- 像: $\mathrm{Im}\, f := f(M)$
- 核: $\mathrm{Ker}\, f := \{m \in M \mid f(m) = 0\}$
- 余像: $\mathrm{Coim}\, f := M / \mathrm{Ker}\, f$
- 余核: $\mathrm{Coker}\, f := N / \mathrm{Im}\, f$

と定める。これらは全て A 加群である。

この記号を用いれば、準同型定理は次のようなものである。

命題 2.1.7：準同型定理

$f : M \to N$ を A 加群の射とする。このとき、A 加群の同型

$$\mathrm{Coim}\, f \cong \mathrm{Im}\, f$$

がある。

さらにここで、次のような標準的包含、標準的射影を定める。

$$\begin{aligned} \ker f &: \mathrm{Ker}\, f \hookrightarrow M \quad ; m \mapsto m \\ \mathrm{im}\, f &: \mathrm{Im}\, f \hookrightarrow N \quad ; n \mapsto n \\ \mathrm{coker}\, f &: N \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\, f \quad ; n \mapsto n + \mathrm{Im}\, f \\ \mathrm{coim}\, f &: M \twoheadrightarrow \mathrm{Coim}\, f \quad ; m \mapsto m + \mathrm{Ker}\, f \end{aligned}$$

すると、以下のような状況になっている。それぞれの色の矢印はそれぞれ完全列である。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & & & 0\ (\text{exact}) \\
& \mathrm{Ker}\, f \arrow[dr, hook, "\ker f"] & & & & \mathrm{Coker}\, f \arrow[ur] & \\
& & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{coim}\, f"] \arrow[dr, shift right, "\mathrm{coker}(\ker f)"'] & & N \arrow[ur, two heads, "\mathrm{coker}\, f"] & & \\
& & & \mathrm{Coker}(\ker f) = \mathrm{Coim}\, f \cong \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, f) \arrow[ur, hook, "\mathrm{im}\, f"] \arrow[ur, shift right, "\ker(\mathrm{coker}\, f)"'] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0\ (\text{exact}) & &
\end{tikzcd}$$

2.2　普遍性 (universality)

商加群などには普遍性がある。それについてまとめることにしよう。

2.2.1　普遍性とは

普遍性について簡単に説明する[†2]。ここには圏論的な視点がある。圏は対象と射の組である。そして、射によってあらゆる性質が記述される。集合論的な視点では、「内部構造」が重視される。集合論において考察されるのは圏論における対象にあたるものである。写像はその対象の構造を調べるためにあった。圏論ではこの主従関係が反転し、対象自体の内部構造についてはそれほど気に留めず、対象同士の相互関係が主たる考察対象となるのである。

普遍性の命題は、各々の対象を圏論的に再定義しているものと思える。各々の対象が「このように振る舞うだろう」と期待される性質を射を用いて表現したものが普遍性であるのだ。

例えば圏論では対象同士の直積は普遍性によって定義される。その直積は必ずしも存在しない ($\mathbf{Set}$ では通常の意味での直積が圏論的直積と一致し、2 つの対象に対して直積が必ず存在する)。加群においても、テンソル積は (多くの場合) 普遍性によって定義される。加群のテンソル積は構成法があり、必ず存在することが言えるが、普遍性によってそのようなテンソル積はただ 1 つしか無いことがわかる。

普遍性による定義の利点は、存在するとは限らないが、存在したら有力な概念を抽出できる点にある。存在しない可能性のある対象の特徴づけをするには、「その対象が持つべき性質」に頼る他なく、その有力な主張が普遍性なのである。

2.2.2　加群の対象の普遍性

以下では A を可換環としているが、A を可換とは限らない環、加群は左 A 加群とした場合に成り立つものである (したがって、当然可換環とした場合にも成立する。)。以下は [高間代トポ, p.217-] および [層ホモ, p.11-] を参考にする。

命題 2.2.1：核・余核の普遍性 [層ホモ, p.12]

A を環、$f : M \to M'$ を A 加群の射とする。また、$i : \operatorname{Ker} f \to M$ を標準的包含、$p : M' \to \operatorname{Coker} f$ を標準的射影とする。このとき、$(\operatorname{Ker} f, i)$ および $(\operatorname{Coker} f, p)$ は次の普遍性を持つ。

(核の普遍性) 任意の A 加群 N に対して、写像

$$\begin{array}{cccc} i_* : & \operatorname{Hom}_A(N, \operatorname{Ker} f) & \longrightarrow & \{g \in \operatorname{Hom}_A(N, M) \mid f \circ g = 0\} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & h & \longmapsto & i \circ h \end{array}$$

は well-defined な全単射である。

特に、$\forall g \in \operatorname{Hom}_A(N, M)$ s.t. $f \circ g = 0$ に対して、$\exists ! h \in \operatorname{Hom}_A(N, \operatorname{Ker} f)$ s.t. $i \circ h = g$

(余核の普遍性) 任意の A 加群 N に対して、写像

$$\begin{array}{cccc} p^* : & \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Coker} f, N) & \longrightarrow & \{g \in \operatorname{Hom}_A(M', N) \mid g \circ f = 0\} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & h & \longmapsto & h \circ p \end{array}$$

は well-defined な全単射である。

特に、$\forall g \in \operatorname{Hom}_A(M', N)$ s.t. $g \circ f = 0$ に対して、$\exists ! h \in \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Coker} f, N)$ s.t. $h \circ p = g$

次の図式が可換であり、青と赤の写像に一対一対応がある。

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "f"] & M' \\ \forall N \arrow[u, dashed, "\exists ! h"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

図 1　核の普遍性

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dashed, "\exists ! h"] \\ & & \forall N \end{tikzcd}$$

図 2　余核の普遍性

なお、圏論的には $\operatorname{Ker} f$ は $f : M \to M'$ と $0 : M \to M'$ の equalizer(等化子) である。より正確には、包含写像 i との組 $(\operatorname{Ker} f, i)$ が f と 0 の equalizer である [すべ Kan, p.22]。さらに、$(\operatorname{Coker} f, p)$ は f と 0 の coequalizer(余等化子) である。このことを鑑みれば、次のような図式で普遍性を書くほうがわかりやすい。

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \\ \forall N \arrow[u, dashed, "\exists ! h"] \arrow[ur, "g"] & & \end{tikzcd}$$

図 3　核の普遍性 2

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dashed, "\exists ! h"] \\ & & \forall N \end{tikzcd}$$

図 4　余核の普遍性 2

これらは核・余核の特徴付けでもある。例えば、核の普遍性の $\operatorname{Ker} f$(緑色の部分) をすべてある A 加群 K に、i を i' に変えたものが成り立っている ((K, i') にも上の普遍性がある) とすると、同型 $\operatorname{Ker} f \cong K$ がある。

つまり、次のようなことである。以下の図式が可換であるとする

このとき、以下の図式を可換とするような同型射 $\hat{h} : \operatorname{Ker} f \to K$ が一意的に存在する (上の図式の左側の三角形を膨らませて、真ん中に $\operatorname{Ker} f$ を書き、$\operatorname{Ker} f$ の普遍性から得られる図式を書き込んだもの)。

[†2] 参考:普遍性〜それは何であるべきか〜

$$\begin{tikzcd} \color{green}K \arrow[r, "i'"] & M \arrow[r, "f"] & M' \\ \color{blue}\forall N \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \color{green}K \arrow[drr, bend left, "i'"] & & & \\ & \operatorname{Ker} f \arrow[ul, "\exists! \hat{h}"'] \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "f"] & M' \\ & \color{blue}\forall N \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "0"'] \arrow[uul, dashed, bend left, "\exists! h'"] & & \end{tikzcd}$$

これは、$N = \operatorname{Ker} f, N = K$ として普遍性を用い、さらに i_*, i'_* の単射性を用いることで示せる [高間代トポ, p.218]。

余核についても状況は同じである。可換図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & M' \arrow[r, "p'"] \arrow[dr, "g"] & \color{green}C \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\ & & \color{blue}\forall N \end{tikzcd}$$

があるとき、ある A 加群の同型射 $\hat{h} : \operatorname{Coker} f \to C$ がただ 1 つ存在して、以下の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} & & & \color{green}C \arrow[ddl, dashed, bend left, "\exists! h'"] \\ M \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"] \arrow[urr, bend left, "p'"] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \arrow[ur, "\exists! \hat{h}"] & \\ & & \color{blue}\forall N & \end{tikzcd}$$

この余核の普遍性から商加群の普遍性を得る。

系 2.2.2：商加群の普遍性

A 加群 M, L と M の部分加群 $N \subset M$ を与える。このとき、

$$N \subset \operatorname{Ker} f$$

であれば、準同型 $\bar{f} : M/N \to L$ であって、標準的射影 $p : M \to M/N$ に対して、以下の図式を可換とするようなものがただ 1 つ存在する。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & L \\ M/N \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

この $\bar{f}$ を f により M/N 上に誘導される準同型 (induced homomorphism) と呼ぶ。

証明： $i : N \to M$ を標準的包含とすると、$\operatorname{Coker} i = M/\operatorname{Im} i = M/N$ である。また、$N \subset \operatorname{Ker} f$ であることは、$f \circ i = 0$ であることと同値である。したがって、余核の普遍性により、ある A 加群の射 $\bar{f} : M/N \to L$ がただ 1 つ存在して、

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "0"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"] & \operatorname{Coker} f = M/N \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\ & & \color{blue}\forall L \end{tikzcd}$$

は可換となる。この右側の三角形が得たかった可換図式である。 ■

2.3 部分加群に関する演算

A 加群について以下の同型が成り立つ。

命題 2.3.1

(1) $L \supset M \supset N$ を A 加群とするとき、

$$(L/N)/(M/N) \cong L/M$$

(2) $M_1, M_2 \subset M$ を部分加群とするとき、

$$(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2)$$

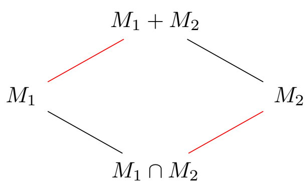

図 5 (2) の同型のイメージ

証明：

(1) $\theta : L/N \twoheadrightarrow L/M$ という全射準同型が well-defined である (いずれも $N \subset M$ から従う)。さらに、$\operatorname{Ker}\theta = \{x + N \mid x \in M\} = M/N$ であるから、準同型定理により、$\operatorname{Coim}\theta \cong \operatorname{Im}\theta$ すなわち $(L/N)/(M/N) \cong L/M$

(2) 合成写像 $M_2 \to M_1 + M_2 \twoheadrightarrow (M_1 + M_2)/M_1$ は全射であり、その核は $M_1 \cap M_2$ であることから従う。

または、$\theta : M_1 + M_2 \to M_2/(M_1 \cap M_2)$ を $\theta(m_1 + m_2) = m_2 + M_1 \cap M_2$ で定めると、これは well-defined。実際、$m_1 + m_2 = m_1' + m_2'$ ならば、$m_1 - m_1' = m_2' - m_2 \in M_1 \cap M_2$ であるから、$m_2 + M_1 \cap M_2 = m_2' + M_1 \cap M_2$ である。さらに、全射である。核は明らかに M_2 である。 ■

また、加群に対してもイデアルの場合と同様にイデアル商が定義される。これについては加群でも通用する定義をすでに書いている (定義 1.5.2 (p.9))。それを再掲する。イデアル商や零化イデアルに関する計算規則は命題 1.5.4 (p.10) を参照せよ。

定義：イデアル商 (コロンイデアル)

M を A-加群、L, N を M の部分加群とする。このとき、

$$(L : N) \coloneqq \{a \in A \mid aN \subset L\}$$

は A のイデアルとなり、これを L と N の**イデアル商 (ideal quotient)**、または**コロンイデアル (colon ideal)** という。

定義：零化イデアル

M を A-加群とする。このとき、

$$\operatorname{Ann}(M) \coloneqq \{a \in A \mid aM = 0\} = (0 : M)$$

は A のイデアルとなり、これを M の**零化イデアル (annihilator ideal)** という。

A 加群を明示するために、$\operatorname{Ann}_A(M)$ のように書くことがある。

M を A 加群とする。M を零化するようなイデアル、すなわち $I \subset \operatorname{Ann}(M)$ となるようなイデアル $I \subset A$ に対し、次のような作用を定めることにより M は A/I 加群とみなすことができる。$[x] \in A/I$ に対し、$[x] \cdot m = x \cdot m$ と定めればよい。これは well-defined である。実際、$[x] = [x']$ ならば $x - x' \in I$ であるから、$(x - x')m = 0$ となる。したがって、$x \cdot m = x' \cdot m$ である。

次に加群の忠実性を定義する。

定義 2.3.2：忠実

M を A 加群とする。$\operatorname{Ann}_A(M) = 0$ となるとき M は**忠実 (faithful)** であるという。

$\operatorname{Ann}_A(M) = I$ のとき、M は A/I 加群とみることができた。

$$\operatorname{Ann}_{A/I}(M) = \{[x] \in A/I \mid [x]M = 0\} = \{[x] \in A/I \mid xM = 0\} = \{[x] \in A/I \mid x \in I\} = 0$$

であることから、M は A/I 加群として忠実である。

また、イデアルと部分加群の積が定義できる。部分加群同士の積は定義できない。

定義 2.3.3

M を A 加群、$I \subset A$ をイデアルとする。このとき、I と M の積 IM を

$$IM \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ a_i \in I,\ m_i \in M \right\}$$

で定める。

定義 2.3.4：有限生成

加群が $\{x_i\}_{i\in I}$ によって

$$M = \sum_{i\in I} Ax_i$$

によって表せるとき、$\{x_i\}_{i\in I}$ を M の生成系という。

有限な生成系を持つとき、有限生成であるという。

2.4　直和と直積

定義 2.4.1：直積と直和

$\{M_i\}$ を A 加群の族とする。このとき、**直積**と**直和**をそれぞれ

$$\prod_{i\in I} M_i \coloneqq \{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i\}$$
$$\bigoplus_{i\in I} M_i \coloneqq \{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i,\ \text{almost all } m_i = 0\}$$

で定める。これらはともに A 加群となる。

添字集合が有限ならば、直和と直積は一致する。直和は直積の部分加群である。
直和と直積には次の普遍性がある。

命題 2.4.2：直積と直和の普遍性

$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A 加群の族とする。
また、添字 $\mu \in \Lambda$ に対する標準的射影 $\pi_\mu : \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M_\mu$、標準的包含 $i_\mu : M_\mu \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ を定めておく。
このとき、組 $\left(\prod_{\lambda\in\lambda} M_i, \{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\lambda}\right)$ および $\left(\bigoplus_{\lambda\in\lambda} M_\lambda, \{i_\lambda\}_{\lambda\in\lambda}\right)$ に対して次の普遍性が成り立つ。

(直積の普遍性) 任意の A 加群 N に対して、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A\left(N, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_A(N, M_\lambda) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & \{\pi_\lambda \circ f\}_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

は全単射である。
特に、任意の A 加群 N と任意の A 加群の族 $\{f_\lambda : N \to M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して、$\forall\lambda \in \Lambda,\ \pi_\lambda \circ f = f_\lambda$ をみたす準同型 $f : N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ が一意的に存在する。

(直和の普遍性) 任意の A 加群 N に対して、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N\right) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_A(M_\lambda, N) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & \{f \circ i_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

は全単射である。
特に、任意の A 加群 N と任意の A 加群の族 $\{f_\lambda : M_\lambda \to N\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して、$\forall\lambda \in \Lambda,\ f \circ i_\lambda = f_\lambda$ をみたす準同型 $f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} \forall N \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"] \\ & M_\lambda \end{tikzcd}$$

図 6　直積の普遍性

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & \forall N \end{tikzcd}$$

図 7　直和の普遍性

書いていることは同じなのだが、次のように書くと双対概念であることがわかりやすいであろう。直積は圏論的な積 (直積)、直和は圏論的な余積 (余直積) である。

$$\begin{tikzcd} & & \forall N \arrow[ddll, bend right, "f_\mu"'] \arrow[ddl, bend right, "f_{\mu'}"] \arrow[d, dashed] \arrow[ddr, bend left, "f_{\mu''}"'] \arrow[ddrr, bend left] & & \\ & & \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[dll, "\pi_\mu"] \arrow[dl, "\pi_{\mu'}"'] \arrow[dr, "\pi_{\mu''}"] \arrow[drr] & & \\ M_\mu & M_{\mu'} & & M_{\mu''} & \cdots \end{tikzcd}$$

図 8　直積の普遍性 2

$$\begin{tikzcd} & & \forall N & & \\ & & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[u, dashed] & & \\ M_\mu \arrow[uurr, bend left, "f_\mu"] \arrow[urr, "\pi_\mu"] & M_{\mu'} \arrow[uur, bend left, "f_{\mu'}"'] \arrow[ur, "\pi_{\mu'}"'] & & M_{\mu''} \arrow[uul, bend right, "f_{\mu''}"] \arrow[ul, "\pi_{\mu''}"] & \cdots \arrow[uull, bend right] \arrow[ull] \end{tikzcd}$$

図 9　直和の普遍性 2

ここから、直積と直和も一意的である (上の普遍性を満たすものとして直積と直和を定義した場合に同型を除いて一意) とわかる。
まずは直積について述べる。別の A 加群 P と、準同型の族 $\{\pi'_\lambda : P \to M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が直積の普遍性を満たしており、次の図式が可換である場合を考える。

$$\begin{tikzcd} \forall N \arrow[r, dashed, "\exists! f'"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & P \arrow[d, "\pi'_\lambda"] \\ & M_\lambda \end{tikzcd}$$

このとき、次のような可換図式を満たす同型写像 $\hat{f} : \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to P$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
& & P \arrow[dl, bend left, "\pi'_\lambda"] \\
\forall N \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] \arrow[urr, dashed, bend left, "\exists! f'"] & \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ur, "\exists! \widehat{f}"] \arrow[d, "\pi_\lambda"] & \\
& M_\lambda &
\end{tikzcd}$$

直和の普遍性も同様である。別の A 加群 S と、準同型の族 $\{i'_\lambda : M_\lambda \to S\}_{\lambda\in\Lambda}$ が直和の普遍性を満たしており、次の図式が可換である場合を考える。

$$\begin{tikzcd}
M_\lambda \arrow[r, "i'_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & S \arrow[d, dashed, "\exists! f'"] \\
& \forall N
\end{tikzcd}$$

このとき、次のような可換図式を満たす同型写像 $\hat{f} : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to S$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
& & S \arrow[dl, dashed, bend left, "\exists! f'"] \\
M_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] \arrow[urr, bend left, "i'_\lambda"] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ur, "\exists! \widehat{f}"] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & \\
& \forall N &
\end{tikzcd}$$

2.5　有限生成加群

A を環とする。A 加群 M が有限生成であるとは、M の生成系が有限集合であることをいう。これは A 代数としての有限生成とは異なることに注意したい。たとえば、1 変数多項式環 $A[t]$ を考えてみよう。これは A の積により A 加群ともなり、A からの包含写像を構造射として A 代数でもある (定義 2.8.1 (p.26))。

$A[t]$ の A 代数としての生成元は t である。一方、A 加群としての $A[t]$ の生成元は $1, t, t^2, \ldots$ である。A 加群としての構造には積が入っていないため、t^2 などを t からつくることはできない。よって、t のみが生成元というわけにはいかないといったところか。

定義 2.5.1：自由加群

A 加群 M が**自由加群**であるとは、

$$M \cong \bigoplus_{i\in I} A$$

の形に書けることを言う。右辺は $A^{(I)}$ のように書くことがある。

この定義から、有限生成自由 A 加群は $A \oplus \cdots \oplus A$ という n 個の直積に同型である。これは A^n と表される。習慣として、A^0 は零加群 0 を意味する。

有限生成加群について次の同値が成り立つ。

命題 2.5.2

次は同値である。

(1) M は有限生成 A 加群

(2) ある整数 $n > 0$ に対して、M は A^n の剰余加群に同型である。

[アティマク, p.32, 命題 2.4] はケーリー・ハミルトンの定理の一般化とでもいうべき定理である[†3]。これはのちの中山の補題とも関連する。

命題 2.5.3：ケーリー・ハミルトンの定理 [アティマク, p.32]

M を有限生成 A 加群、$\phi : M \to M$ を自己 A 準同型とする。このとき、ある多項式 $P(X) \in A[X]$ が存在して、$P(\phi) = 0$ となる (A 加群 $\mathrm{End}_A(M)$ の等式)。とくに P はモニックとしてとれる。

さらに、$\mathfrak{a} \subset A$ をイデアルとし、$\phi(M) \subset \mathfrak{a}M$ を満たすものとする。このとき、上で取ったモニック多項式 P の最高次以外の係数は $\mathfrak{a}$ の元として取れる。つまり、

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\phi + a_n = 0 \qquad (a_i \in \mathfrak{a})$$

となる。

この主張における a_j は $x \in M$ を $a_j x \in M$ に対応させる準同型であることに注意せよ。

証明： $M = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle_A$ とする。このとき、任意の i に対して、

$$\phi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (a_{ij} \in A)$$

と書ける。これを

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij}\phi - a_{ij}) \cdot x_j = 0$$

と書き直す (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ)。これは $(\delta_{ij}\phi - a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathrm{End}_A(M))$ によって、次の形で書ける[†1]:

$$(\delta_{ij}\phi - a_{ij})_{ij} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

さらに、この両辺に左から $(\Delta_{ji})_{ij}$ を掛けると、

$$\det((\delta_{ij}\phi - a_{ij}))E_n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

となる。ただし、ここで Δ_{ij} とは $(\delta_{ij}\phi - a_{ij})_{ij}$ の (i,j) 余因子である。

$\det((\delta_{ij}\phi - a_{ij}))$ は、全ての生成元を 0 に写す写像である。したがって、これは零写像にほかならない。この行列式を展開したものを $P(X)$ とおけば、$P(X) \in A[X]$ であり、モニック多項式となる。

さらに、$\phi(M) \subset \mathfrak{a}M$ となる場合には、証明最初の赤字の部分を $\mathfrak{a}$ の元とすることができ、それにより $P(X)$ の最高次以外の係数は $\mathfrak{a}$ の元とできる (さらにいえば、$a_i \in \mathfrak{a}^i$ とできる。)。 ■

[†1] ただし、ここで各成分における $\psi \in \mathrm{End}_A(M)$ と $x \in M$ の積は $\psi(x)$ であると解釈する。それ以外は普通と同様である。

この命題から次の系を得る。次の系も中山の補題と呼ばれることがある。

[†3] しっかり見ていないが、https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kawaguch/pdf/11RingModule.pdf の p.25 は参考になるかもしれない

系 2.5.4：[アティマク, p.32, 系 2.5]

M を有限生成 A 加群とし、イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ を $\mathfrak{a}M = M$ を満たすものとする。このとき、次を満たす $x \in A$ が存在する:

- $xM = 0$
- $x + \mathfrak{a} = 1 + \mathfrak{a}$

この命題の適用において気をつけるべきことは、あくまでも $\mathfrak{a}M = M$ は集合としての等号であり、加群の同型ではないということである。集合として異なるが加群として同型なものにこれを適用してはならない。例 2.5.7 (p.21) でその例を与える。

証明： $\phi = \mathrm{id}_M$ とする。$\phi(M) = \mathrm{id}_M(M) = M \subset \mathfrak{a}M$ が成り立つので、命題 2.5.3 (p.20) により、

$$1 + a_1 + \cdots + a_n = 0 \in \mathrm{End}_A(M)$$

となる $a_i \in \mathfrak{a}$ が存在する。したがって、

$$x = 1 + a_1 + \cdots + a_n \in A$$

と書けば[†1]、この x は条件を満たす。■

[†1] ここでは異なるものを同じ記法で書いているが、$\mathrm{End}_A(M)$ の元としての a_i は a_i 倍写像であることに注意せよ。

次に中山の補題を述べる。中山の補題とよばれるものは複数ある[†4]。これらは **NAK の補題**とよばれることもある。NAK は「NAKAYAMA」の略ではない。この定理は **Krull-東屋の定理**ともよばれる。これより、中山、東屋、Krull の頭文字を取って NAK である [松村可換環論, p.10]。

命題 2.5.5：中山の補題 [アティマク, p.32, 命題 2.6]

M を有限生成 A 加群、イデアル $I \subset A$ は $I \subset \mathrm{J}(A)$ を満たすものとする。このとき

$$M = IM \implies M = 0$$

が成り立つ。

証明：

証明 1 系 2.5.4 (p.21) により $xM = 0$ かつ $x + I = 1 + I$、すなわち $1 - x \in I$ となる $x \in A$ が存在する。$I \subset \mathrm{J}(A)$ であることより、$1 - x \in \mathrm{J}(A)$ であり、$1 - (1 - x) = x \in A^\times$ である。したがって、$M = x^{-1}xM = x^{-1}0 = 0$ となる。

証明 2 ■

次も中山の定理とよばれることがある命題である。

系 2.5.6：中山の補題 [アティマク, p.33, 系 2.7]

M を有限生成 A 加群、N を M の部分加群、$I \subset \mathrm{J}(A)$ を A のイデアルとする。このとき、

$$M = IM + N \implies M = N$$

が成り立つ。
とくに、$M = IM$ ならば $M = 0$ である。

証明： $N + IM = M$ なので、

$$\begin{aligned}
I(M/N) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(m_i + N) \;\middle|\; n > 0,\ a_i \in I,\ m_i \in M \right\} \\
&= \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \right) + N \;\middle|\; n > 0,\ a_i \in I,\ m_i \in M \right\} \\
&= (IM + N)/N \\
&= M/N
\end{aligned}$$

となる。したがって、中山の補題 (命題 2.5.5 (p.21)) により $M/N = 0$ となり、$M = N$ がしたがう。■

中山の補題は有限生成加群に対する命題である。有限生成を抜いた反例を与える。その前に、系 2.5.4 (p.21) を適用すると危険な例を与える。

例 2.5.7：中山の補題が適用できない例 1

A を環、$a \in A$ を零因子でないものとする。A 加群として $A \cong aA = (a)A$ である。実際、

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & aA \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

と定めれば、これは全射であり、$ax = ay$ とすると $a(x - y) = 0$ で、a は零因子でないので、$x - y = 0$ すなわち $x = y$ となることから単射である。A 加群の準同型であることはよいから、これは同型である。

[†4] たとえば https://takataninote.com/ring2/nakayama-lemma.html を参照せよ。

したがって系 2.5.4 (p.21) により $x \in A$ であって、$xA = 0$ かつ $1 - x \in (a)$ となるものが存在する。$xA = 0$ より $x = 0$ である。したがって、$-1 \in (a)$ となり、a は単元であるとわかる。

$A = \mathbb{Z},\ a = 2$ はこの証明の矛盾を指摘する例である。矛盾点は系 2.5.4 (p.21) を適用したことにある。

このように、集合論的には $A \neq aA$ であるのに、加群の同型のみで中山の補題を適用できると考えてはならない。

次に、有限生成であることを外した場合の反例を与える。https://takataninote.com/ring2/nakayama-lemma.html

例 2.5.8：中山の補題が適用できない例 2

$R = \mathbb{C}[X],\ \mathfrak{p} = (X)$ とする。$\mathfrak{p}$ は A の素イデアルだから、それによる局所化を考えることができ、$A = R_{\mathfrak{p}},\ I = xR_{\mathfrak{p}}$ とおく。

ここで、(A, I) は局所環となっている [青雪江, 命題 1.8.20]。

$K = \mathrm{Frac}(A)$ とすると、これは有限生成ではない A 加群である[†1]。このとき、$K = IK$ だが $K \neq 0$ である。

[†1] これがよくわかっていない。とりあえず現時点での理解を書いておく。$A = R_{\mathfrak{p}} = \{f(x)/g(x) \mid f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x],\ g(x) \notin (x)\}$ である。A の $\mathrm{Frac}(A)$ への作用は $a \in A, x \in \mathrm{Frac}(A)$ に対して、$\mathrm{Frac}(A)$ での積により $a \cdot x := (a/1)x$ と定める。なぜ有限生成じゃない？

もう一つ例を与える (代数学第一のノートより)。

例 2.5.9：中山の補題が適用できない例 3

p を素数とすると、$A = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, p \nmid s \right\}$ は $pA = p\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{pm}{s} \,\middle|\, p \nmid s,\ m \in \mathbb{Z} \right\}$ を極大イデアルとする可換な局所環である[†1]。$\mathrm{J}(A) = pA$ である。

$M = \mathbb{Q}$ は A の元との積により自然に A 加群と思うことができる。それにより、$M = \mathbb{Q} = \mathrm{J}(A)M$ である。中山の補題によれば $M = 0$ であるはずだが、そうでない。

これは、M が A 上有限生成でないことによる。

[†1] $\mathbb{Z}_{(p)}$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアル (p) による局所化である

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を局所環とする。A 加群 M に対して $M/\mathfrak{m}M$ は $\mathfrak{m}$ により零化されるので、$k = A/\mathfrak{m}$ 加群とみることができるのであった。M が有限生成 A 加群で、その生成系を $\{x_1, \ldots, x_r\}$ とすれば、$M/\mathfrak{m}M$ は k ベクトル空間として $x_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, x_r + \mathfrak{m}M$ で生成される。

この逆として、中山の補題を適用することで次の命題を得る。

命題 2.5.10

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を局所環、M を A 加群とする。$\dim_k(M/\mathfrak{m}M) = r$ ならば、M は r 個の元で生成される。

証明： $x_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, x_r + \mathfrak{m}M$ が $M/\mathfrak{m}M$ の k ベクトル空間としての基底となるような $x_1, \ldots, x_r \in M$ をとる。ここで、$x_1, \ldots, x_r$ で A 上生成される M の部分加群を N とする。

$$
\begin{aligned}
M/\mathfrak{m}M &= \langle x_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, x_r + \mathfrak{m}M \rangle_k \\
&= \sum_{i=1}^{r} (A/\mathfrak{m})(x_i + \mathfrak{m}M) \\
&= \left\{ \left(\sum_{i=1}^{r} a_i x_i \right) + \mathfrak{m}M \,\middle|\, a_i \in A \right\} \qquad (\because\ k \text{ 加群の構造の定め方}) \\
&= (N + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M
\end{aligned}
$$

となるから、$M = N + \mathfrak{m}M$ となる。

$\mathrm{J}(A) = \mathfrak{m}$ であるから、中山の補題 (系 2.5.6 (p.21)) を適用することができて、$M = N$ となる。 ■

2.6　完全列

定義 2.6.1：完全列

A 加群と A 加群の射の列

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

が $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ を満たすとき、M_i で**完全 (exact)** であるという。任意の M_i で完全であるとき、この列は**完全列 (exact sequence)** であるという。

完全列について次は基本的である。

命題 2.6.2

(1)　$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$　が完全である　$\Longleftrightarrow$　f は単射である。

(2)　$M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$　が完全である　$\Longleftrightarrow$　f は全射である。

(3)　$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$　が完全である　$\Longleftrightarrow$　f は単射であり、g は全射である。さらに g は $\mathrm{Coker}(f) = M/f(M')$ から M'' への同型射を誘導する (これは単なる準同型定理 $M/\mathrm{Im}(g) = M/\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Coim}(g) \cong \mathrm{Im}(g)$)。

(3) の形の完全列を**短完全列**という。任意の完全列は短完全列への分解ができる。実際、完全列

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

が与えられたとする。$N_i = \mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ とおけば、短完全列

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow M_i \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow 0$$

を得る。

図式化すると次のようになる。連続する同じ色の矢印が短完全列である。

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
& \mathrm{Im}(f_{i-1}) = N_{i-1} = \mathrm{Ker}(f_i) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{Im}(f_i) = N_i = \mathrm{Ker}(f_{i+1}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{Im}(f_{i+1}) = N_{i+1} = \mathrm{Ker}(f_{i+2}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{Im}(f_{i+2}) = N_{i+2} = \mathrm{Ker}(f_{i+3}) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\cdots M_{i-2} \arrow[ur] \arrow[rr, "f_{i-1}"] & & M_{i-1} \arrow[ur] \arrow[rr, "f_i"] & & M_i \arrow[ur] \arrow[rr, "f_{i+1}"] & & M_{i+1} \arrow[ur] \arrow[rr, "f_{i+2}"] & & M_{i+2} \cdots
\end{tikzcd}$$

命題 2.6.3：[アティマク, p.34, 命題 2.9]

(1)　A 加群と A 加群の射の列

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

が完全であることの必要十分条件は、任意の A 加群 N に対して、次の列が完全になることである:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Hom}_A(M', N)$$

(2)　A 加群と A 加群の射の列

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$$

が完全であることの必要十分条件は、任意の A 加群 M に対して、次の列が完全になることである:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Hom}_A(M, N'')$$

次はホモロジー代数における完全ホモロジー列の特別な場合である。

命題 2.6.4：[アティマク, p.35, 命題 2.10]

次の A 加群と A 加群の射の可換図式を考える (各行は完全)。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \text{ (exact)} \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"'] & N \arrow[r, "v'"'] & N'' \arrow[r] & 0 \text{ (exact)}
\end{tikzcd}$$

このとき、次のような完全列が存在する。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f') \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Ker}(f'') \xrightarrow{d}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Coker}(f') \xrightarrow{\overline{u'}} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\overline{v'}} \mathrm{Coker}(f'') \longrightarrow 0 \text{ (exact)}$$

ここで、$\overline{u}, \overline{v}$ は u, v の制限写像、$\overline{u'}, \overline{v'}$ は u', v' から誘導される写像である。

加法的関数とよばれる特別な関数と完全列の間の関係を述べる。

定義 2.6.5：加法的関数

C を A 加群の族とし、$(G, +)$ をアーベル群とする。$\lambda : C \to G$ が**加法的 (additive)** であるとは、次を満たすことを言う。

<u>条件</u>　全ての項が C に属する任意の短完全列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

に対して (この場合は $M, M', M'' \in C$)

$$\lambda(M') + \lambda(M'') = \lambda(M)$$

となる[†1]。

[†1] [アティマク] には $\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') = 0$ の形で載っているが、上の書き方の方が見やすいかなと思った。

命題 2.6.6

C を A 加群の族とし、

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

を A 加群の完全列とする。ただし、ここで現れる全ての加群 M_i とすべての射の Ker は C の元であるものとする。

このとき、C 上の任意の加法的関数 λ は次を満たす。

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) = 0$$

証明： 完全列を短完全列に分解できた。この分解によって得られる短完全列も再び全ての項が C に属するようなものである。ここに加法的関数の定義を適用することで命題の式を得る。■

2.7　加群のテンソル積

定義 2.7.1：双線形写像 (bilinerar)

M, N, P を A 加群とする。写像 $f : M \times N \to P$ が次の条件を満たすとき、A **双線形 (bilinear)** であるという。

(1) 任意の $x \in M$ に対して、$f(x, ?) : N \to P, \quad y \mapsto f(x, y)$ が A 線形
(2) 任意の $y \in N$ に対して、$f(?, y) : M \to P, \quad x \mapsto f(x, y)$ が A 線形

次に、A 加群 M, N からテンソル積とよばれる A 加群 $M \otimes N$ を普遍性により構成して定義する 。

2.8 代数

- K 代数の定義は難しきものなりと云々

色々な本で「代数」や「多元環」が定義されているが、その定義の見た目が少し違う。ところがこれらは同じ概念なので、そのことについて記す。

定義 2.8.1：R-代数

環準同型 $\varphi : R \to B$ が与えられているとき、組 $(B.\varphi)$ を R-**代数**であるという。f を R-代数 B の構造射という。(B, f) を単に B と書くこともある。
2 つの R-代数 $(B, \varphi_B), (C, \varphi_C)$ に対して、これらの間の R-代数の射とは、環準同型 $f : B \to C$ であって、次を可換にするものをいう。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[dr, "\varphi_C"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

R-代数の圏とは、対象を R-代数、射を R-代数の射とするような圏をいう。

注意 2.8.2

- R-代数 B は構造射 φ によって
$$rb := \varphi(r)b$$
と作用が定まり、R-加群となる。
- $R = K$ が体で、$B \neq 0$ であれば、構造射は単射であるから、K を構造射による B における像 $\varphi(K)$ と同一視することにより、K-代数 B は部分環として K を含む。

次に、多元環を定義する。これを代数ということもある。結局同じ概念なので、どちらでもよいのだが、下の定義のほうがお気持ちがわかるだろう。

定義 2.8.3：多元環

R, B を環とする[†1]。B が次の条件を満たすとき、B を R-**多元環**という。

(A-1) B は R 加群
(A-2) 任意の $x, y \in B$ と $r \in R$ に対して、
$$(rx)y = x(ry) = r(xy)$$
が成り立つ。

[†1] 一般に定義する場合、R を可換環、B は可換とは限らない環としてよい

B の積を、B 自身の B への右作用と考えてみよう (可換環なので右左はどうでもいいのだが、右作用と思っておくほうが下の式は見やすいはず)。つまり、$x \cdot y = xy$ と、積によって作用を定めるのだ。これは、x に y が作用する形である。この 2 つ目の条件 (A-2)
$$(rx)y = r(xy)$$
は、「r の作用と y の作用の可換性」と見ることができる。これは、「乗法と R の作用の整合性」という条件である。
整合性とは、たとえば環では加法と乗法の整合性が分配則により定まっている。R 加群 M には、R の加法と M への R の作用の整合性が分配則で、R の乗法と R の作用の整合性が結合則により定まっている。いずれも、「操作の可換性」である。環の分配則は「掛けてから足す=足してから掛ける」という操作の可換性を表す。多元環の条件 (A-2) もそのような操作 (作用) の可換性により見ることができた。

注意 2.8.4

(A-2) の条件は次の条件に書き換えることができる (次の条件を (A-2) に書き直すこともできる)。

- 任意の $r_1, r_2 \in R$ と $x, y, z \in B$ に対して、
$$(r_1x + r_2y)z = r_1(xz) + r_2(yz), \qquad x(r_1y + r_2z) = r_1(xy) + r_2(xz)$$

$r_1 = r_2 = 1$ とすれば、
$$(x + y)z = xz + yz, \qquad x(y + z) = xy + xz$$
という B の分配法則の式を得る。つまり、B を単なる R-加群としても、その上に積 $(x, y) \mapsto xy$ さえ定義されていれば、B は単位元の存在を仮定しない広義の (可換とも限らない) 環となる。

R-代数 (B, φ) が R-多元環であることをみよう。B-が R-加群であることは良いので、(A-2) を確認すれば良い。$x, y \in B,\ r \in R$ をとる。
$$\begin{aligned}(rx)y &= \big(\varphi(r)x\big)y = \varphi(r)(xy) = r(xy) \\ &= x\varphi(r)y = x\big(\varphi(r)y\big) = x(ry)\end{aligned}$$
となるので、R-多元環である。
一方、R-多元環は (次に説明する適切な構造射によって)R-代数となる。まず、B は R 加群なので
$$\begin{array}{rccc} m : & R & \longrightarrow & \mathrm{End}_B(B) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & r & \longmapsto & m_r : x \mapsto rx \end{array}$$

という環準同型がある ($m_r \in \mathrm{End}_B(B)$、つまり B の B への (積による) 作用を保つということについては、(A-2) の条件からでる。)。さらに、

$$\begin{array}{ccc} e : \mathrm{End}_B(B) & \xrightarrow{\sim} & B \\ \cup\!\! & & \cup\!\! \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

という同型があるから、結局 $e \circ m : R \to B$ という構造射により $(B, e \circ m)$ は R-代数となる。

例 2.8.5：群環

$(R, +, \bullet, 0_R, 1_R)$ を可換環、$(G, *, 1_G)$ を群とする。A を R 上 G を基底とする自由 R-加群とする。つまり、A は

$$\sum_{g \in G} a_g \cdot g \qquad (a_g \in R,\ \text{有限個の } g \text{ を除いて} a_g = 0)$$

という形の元[†1]全体の集合である。このような A を $R[G]$ と表す。

$R[G]$ の元には次のように積を定義でき、これによって環の構造が入る。

$$\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g\right)\left(\sum_{h \in G} b_h \cdot h\right) := \sum_{g,h \in G} (a_g \bullet b_h) \cdot (g * h)$$

乗法の単位元は 1_G である[†2]。

このようにして $R[G]$ には R-多元環 (代数) の構造が入る。これを R 上の**群環**という。

$g \in G$ と $1_R \cdot g \in R[G]$ が、$r \in R$ と $r \cdot 1_G \in R[G]$ と同一視される。

群環においては、R の元と G の元との積は交換可能である。実際

$$gr = (1_R \cdot g)(r \cdot 1_G) = (1_R \bullet r) \cdot (g * 1_G) = (r \bullet 1_R) \cdot (1_G * g) = (r \cdot 1_G)(1_R \cdot g) = rg$$

となるからである。

このようにして、演算が 1 つしかない群を演算が 2 つある環に埋め込むことができる。

[†1] 有限和であることに注意。無限和は定義されない。
[†2] 左辺のそれぞれが有限和なので、$a_g b_h \neq 0$ となる g, h は有限個であり、右辺も有限和となっている。

とくに $R = K$ を (可換) 体、G を有限群とするときに、$K[G]$ は有限群の表現論において重要な役割を果たす。簡単には、有限群 G の K 上の線形表現と、群環 $K[G]$ 上の有限生成加群が一対一対応する。それについて下に記すことにする[†5]。

群の表現について復習しよう。

定義 2.8.6：群の表現

G を群、V を体 K 上のベクトル空間とする。

$$\mathrm{GL}(V) := \{f : V \to V \mid f \text{は } K\text{-線形同型}\}$$

とする。これは写像の合成を演算として群となる。

ベクトル空間 V と群準同型 $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ の組 (V, φ) を群 G の K 上の**表現**という。

φ が明らかな場合には、V を G の表現と書くこともあり、$\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ を G の表現と書くこともある。

$\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ を K 上の表現とすると V は左 $K[G]$ 加群である。実際、加群の構造射

$$\begin{array}{ccc} K[G] & \longrightarrow & \mathrm{End}(V) \\ \cup\!\! & & \cup\!\! \\ \sum a_g g & \longmapsto & v \mapsto \sum a_g \varphi(g)(v) \end{array}$$

によって左 $K[G]$ 加群の構造が入る。

逆に、左 $K[G]$ 加群 V が与えられたら、加群の構造射 $\alpha : K[G] \to \mathrm{End}_K(V)$ がある。このとき、G の K 上の表現として

$$\begin{array}{ccc} \psi : G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ \cup\!\! & & \cup\!\! \\ g & \longmapsto & \alpha(g) : x \mapsto g \cdot x \end{array}$$

がある。$\alpha(g) \in \mathrm{GL}(V)$ であることは、α は準同型なので、$\alpha(g) \circ \alpha(g^{-1}) = \alpha(gg^{-1}) = \alpha(1_G) = \mathrm{id}_V$ となることからわかる。

この対応は互いに逆であることがすぐ確かめられる。

さらに、表現 $\varphi_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ $(i = 1, 2)$ と表現の準同型 $f : (V_1, \varphi_1) \to (V_2, \varphi_2)$ が与えられたとする。表現の**準同型** $f : (V_1, \varphi_1) \to (V_2, \varphi_2)$ とは[†6] K 線形写像 $f : V_1 \to V_2$ であって、任意の $g \in G$ に対して以下の図式が可換となるものをいう。

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\varphi_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

[†5] 有限群でなくともこの対応はあるので、下では有限群とは述べていない。ところが、普通無限群の表現を考えるときは、位相群やリー群などの構造が入っているものを考え、表現についても連続性や微分可能性を持つものを考える。そのため、普通この対応を言うときは有限群に限ったことを言うらしい。よくわかっていないけどね。なお、以下は次を参考にした。[群と表現の話,3.2],[Isomorphism of categories,Example] ともに 2024-01-10 閲覧
[†6] ノーテーションが一般的かはわからないが、表現の準同型は V_i だけでなく、表現 φ_i も関与するのだから、それを明示する書き方が良いであろう

このとき、$f: V_1 \to V_2$ は左 $K[G]$ 加群の準同型となる。確かめるべきは $K[G]$ の作用を保つことのみであるが、任意の $\sum a_g g \in K[G]$ に対して、

$$f\Big(\Big(\sum a_g g\Big)v\Big) = f\Big(\sum a_g \varphi_1(g)(v)\Big) = \sum a_g (f \circ \varphi_1(g))(v) = \sum a_g \varphi_2(g)(f(v)) = \Big(\sum a_g g\Big) f(v)$$

となるから、たしかに左 $K[G]$ 加群の準同型である。

逆に、$f: V_1 \to V_2$ を左 $K[G]$ 加群の準同型とする。$\alpha_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ を加群の構造射とする。表現 $\varphi_i : G \to \mathrm{GL}(V_i);\ g \mapsto \alpha_i(g)$ が定まっていた。任意の $g \in G$ に対して、$\varphi_2(g) \circ f = f \circ \varphi_1(g)$ を示せば、f が表現の準同型であるとわかる。任意の $v \in V_1$ と $g \in G$ に対して、

$$\varphi_2(g) \circ f(v) = \alpha_2(g) \circ f(v) = g \cdot f(v) = f(g \cdot v) = f(\alpha_1(g)(v)) = f \circ \varphi_1(g)(v)$$

となるので、f は表現の準同型である。

このように、射についても互いに逆の対応があることがわかる。

注意 2.8.7

次のような圏を考える。

- 対象を群 G の K 上の表現 (φ, V)、射を表現の準同型とするような圏 **Rep**(とここでは書くことにする。)
- 対象を左 $K[G]$-加群、射を $K[G]$-準同型とする圏 $K[G]$-**Mod**

上に述べた対応は関手 $F: \mathbf{Rep} \to K[G]\text{-}\mathbf{Mod},\ G: K[G]\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Rep}$ を与える。

- $(\varphi, V) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Rep})$ に対して、$F((\varphi, V)) = V$
- $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{Rep})$ に対して、$F(f) = f$
- $V \in \mathrm{Ob}(K[G]\text{-}\mathbf{Mod})$ に対して、$G(V) = (\psi, V)$　ただし、ψ は上の説明で与えたもの。
- $f \in \mathrm{Mor}(K[G]\text{-}\mathbf{Mod})$ に対して、$G(f) = f$

実際 F については

- $f: (\varphi_1, V_1) \to (\varphi_2, V_2)$ とすれば、$F(f): F(\varphi_1, V_1) \to F(\varphi_2, V_2)$
- $F(f \circ g) = f \circ g = F(f) \circ F(g)$
- 任意の $(\varphi, V) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Rep})$ に対して、$F(\mathrm{id}_{(\varphi, V)}) = \mathrm{id}_V$

となっている。G も同様。

ここで、F と G は互いに逆 (**CAT** の射として逆) の関手であることがわかる (上にした議論による)。これにより、**Rep** と $K[G]$-**Mod** は圏同型である。

付録 A
アティマクの記号との対応

- ベキ零根基 $\mathfrak{N} = \mathrm{nil}(A)$
- ジャコブソン根基 $\mathfrak{R} = \mathrm{J}(A)$ (よく $\mathrm{rad}(A)$ のように書くが、アティマクの記号は R のフラクトゥールである。)
- 根基 $r(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

付録 B
圏論

圏論の本には様々なものがあるが、とりあえずはわかりやすいと思った入門 PDF[圏と関手] または、[すべ Kan] を参考にすることにする。

B.1　圏と関手の定義

https://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf

定義 2.1.1：圏の定義

圏 (category)C とは、2 つの (集合とは限らない) あつまり $\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Mor}(C)$ の組 $(\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Mor}(C))$ であって、以下の条件を満たすものをいう。また、元 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ を**対象 (object)**、$f \in \mathrm{Mor}(C)$ を**射 (morphism)** という。

(cat-1) 各 $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対して、ドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{dom}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ とコドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{cod}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ が定まっている。
$\mathrm{dom}(f) = a, \mathrm{cod}(f) = b$ であることを、$f : a \to b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書き表す。
$a, b \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して、

$$\mathrm{Hom}_C(a, b) := \{f \in \mathrm{Mor}(C) \mid \mathrm{dom}(f) = a, \mathrm{cod}(f) = b\}$$

と書く。

(cat-2) 2 つの射 $f, g \in \mathrm{Mor}(C)$ が $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ を満たすとき、f と g の**合成射**と呼ばれる射 $g \circ f$ が定められていて、$g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(g)$ となる。

(cat-3) 射の合成は結合律を満たす。即ち、$f : a \to b,\ \ g : b \to c,^h : c \to d$ に対して、$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成り立つ。

(cat-4) 各 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して、**恒等射**と呼ばれる射 $\mathrm{id}_a : a \to a$ が存在して、射の合成に関する単位元となる (1_a とも書く)。即ち、$f : a \to b$ に対して $f \circ \mathrm{id}_a = f,\ \mathrm{id}_b \circ f = f$ である。

文脈上明らかな場合、$a \in \mathrm{Ob}(C),\ \ f \in \mathrm{Mor}(C)$ を単に $a \in C,\ \ f \in C$ のように書くことがある。

要するに、ある数学的対象と、その間の構造を保つ写像の組を 1 つのデータとして扱うというモチベーションである。

例 2.1.2：集合の圏

「集合の集合」は考えられないことは有名であろう。しかし、集合の圏は考えられる。$\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ は「集合の集合」のようなものを考えることに相当する。

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) :=$「全ての集合の集まり」と定める。
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{Set}) := \{f \mid f$ はある集合 X からある集合 Y への写像$\}$ と定める。
- X から Y への写像 f に対して、$\mathrm{dom}(f) := X,\ \ \mathrm{cod}(f) := Y$ と定める。
- 車の剛性は通常の写像の合成で定める。結合律は満たす。
- 集合 X に対して、恒等射 1_X を恒等写像 $X \to X$ で定める。射の合成に関する単位元となることも良い。

こうして、圏 **Set** は得られた。

例 2.1.3：圏の例

- 群を対象、群準同型を射とする圏 **Grp** がある。
- アーベル群を対象、群準同型を射とする圏 **Ab** がある。
- 単位元 1 をもつ環を対象、環準同型を射とする圏 **Ring** がある。
- 単位元 1 をもつ可換環を対象、環準同型を射とする圏 **CRing** がある。
- 可換環 R について、対象を R-加群、射を R-加群準同型とする圏 R-**Mod** がある。
- 位相空間を対象、連続写像を射とする圏 **Top** がある。

圏の準同型とでもいうべき関手を定義する。

定義 2.1.4：関手

C, D を圏とする。C から D への**関手 (functor)**$F : C \to D$ とは、

- $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に $F(a) \in \mathrm{Ob}(D)$ を
- $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に $F(f) \in \mathrm{Mor}(D)$ を

を対応させる関数であって、以下を満たすものである。

(1) $f : a \to b$ のとき、$F(f) : F(a) \to F(b)$ である。
(2) $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ のとき、$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である。
(3) $a \in C$ に対して、$F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ である。

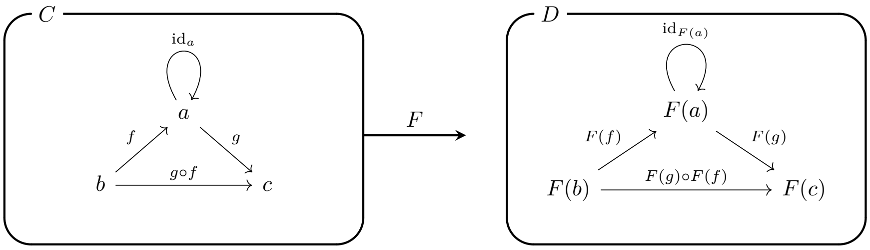

図 10　関手

群の「構造を忘れる」忘却関手の例を挙げる。

例 2.1.5

$U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ を以下のように定義する。

- 群 $\langle G, \cdot \rangle \in \mathbf{Grp}$ に対して、$U(\langle G, \cdot \rangle) := G$ と定める (群に対して、演算を忘れた集合を対応させる)。
- 群準同型 $f : G \to G'$ に対して、$U(f) := f$ と定める (群準同型は写像である)。

このように定めた U は関手である。このように、構造を忘れる関手 U を一般に**忘却関手 (forgetful functor)** という。

$f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{Grp})$ が群の同型写像なら、$U(f) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ は集合の同型写像 (全単射) となる。これは一般の関手に関して成り立つ性質である。このため、一般の圏における同型を定義する。

定義 2.1.6：同型

C を圏、$a, b \in \mathrm{Ob}(C)$ とする。

(1) C の射 $f : a \to b$ が**同型射** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある射 $g : b \to a$ が存在して、$g \circ f = \mathrm{id}_a,\ f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる。
(2) a と b が同型 ($a \cong b$ で表す) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある同型射 $f : a \to b$ が存在する。

$f : a \to b$ を同型射とすると、$g : b \to a$ であって、$g \circ f = \mathrm{id}_a,\ f \circ g = \mathrm{id}_b$ となるものは唯一である (群の逆元の一意性と同じ)。そこで、このような g は f に対して一意に定まるので、g を f^{-1} で表し、f の**逆射**という。

この意味で、例えば位相空間の同相は「$X \cong Y$ であるとは、互いに逆な連続写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ が存在することをいう」の方が圏論的には良さそうだと思えるのである。(圏論ではそもそも考察対象が射であるのだが、射は考察に値するもの、つまり数学的構造を保つものとしてとっているはずである。位相空間の場合、射といえばもう連続写像なのである。)

例 2.1.7：同型射の例

- 圏 $\mathbf{Set}$ における同型射とは全単射のことで、逆射は逆写像である。
- 圏 $\mathbf{Grp}$ における同型射とは、群の同型写像のことである。
- 圏 $\mathbf{Top}$ における同型射とは、同相写像のことである。

先程の、「$\mathbf{Grp}$ の同型射を関手で写したものが、$\mathbf{Set}$ の同型射である」ということのより一般的な命題を述べる。

命題 2.1.8：関手は同型射を同型射に写す。

C, D を圏、$F : C \to D$ を関手とする。このとき、$f : a \to b$ が C の同型射ならば、$F(f) : F(a) \to F(b)$ は D の同型射である。
とくに、$F(f)^{-1} = F(f^{-1})$ である。
したがって、$a \cong b$ ならば $F(a) \cong F(b)$ である。

証明： $f : a \to b$ を同型射とすると、$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_a,\ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_b$ である。これらに関手 F を適用して、$F(f^{-1}) \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(a)},\ F(f) \circ F(f^{-1}) = \mathrm{id}_{F(b)}$ を得る。したがって、$F(f)$ は同型射である。また、$F(f)^{-1} = F(f^{-1})$ である。 ■

B.2　圏の例

例 2.2.1：空圏 $\mathbb{0}$

$\mathrm{Ob}(C) = \mathrm{Mor}(C) = \varnothing$ とすれば C は圏である。これを**空圏 (empty category)** といい、$\mathbb{0}$ で表す。

例 2.2.2：一点圏 $\mathbb{1}$

対象を $*$ のみ、射は id_* のみとする。これは圏である。これを**一点圏 (one-point category)** もしくは**終圏 (terminal category)** といい、$\mathbb{1}$ で表す。

$$\begin{tikzcd} * \arrow[loop above, "\mathrm{id}_*"] \end{tikzcd}$$

例 2.2.3：$\mathbb{2}$

対象を a, b の 2 つとし、射は恒等射 $\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_b$ と $f : a \to b$ ただひとつだけとする。これは圏である。$\mathbb{2}$ で表す。

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "f"] & b \arrow[loop right, "\mathrm{id}_b"] \end{tikzcd}$$

例 2.2.4：$\mathbb{3}$

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[loop above, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[loop left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"] & & c \arrow[loop right, "\mathrm{id}_c"] \end{tikzcd}$$

は圏であり、これを $\mathbb{3}$ で表す。

例 2.2.5：$\rightrightarrows$ と $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & b \arrow[loop right, "\mathrm{id}_b"] \end{tikzcd}$$

は圏である。これを $\rightrightarrows$ で表す。

また、

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "f"] & b \arrow[loop above, "\mathrm{id}_b"] & c \arrow[l, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_c"] \end{tikzcd}$$

も圏である。これを $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$ で表す。

例 2.2.6：モノイド

M をモノイド (群の定義から逆元の存在を除いたもの) とする。このとき、以下のように定めると対象がただ 1 つ $*$ であるような圏 C を得る[†1]。

- $\mathrm{Ob}(C) := \{*\}$
- $\mathrm{Hom}_C(*, *) := M$
- 射の合成をモノイド M の積で定める。

こうしてモノイドから対象が 1 つの圏を得ることができる。逆に、対象が 1 つ $*$ である圏 C に対して、$M := \mathrm{Hom}_C(*.*)$ として、M の二項演算を射の合成で定義すればモノイドが得られる。

これにより、モノイドと「対象がただ 1 つの圏」は同一視される。

注意 2.2.7：locally small な圏

実際には上の主張は正しくない。正しくするには、C を「**locally small な圏**」とすればよい。

一般に、任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, b)$ が集合となる圏を locally small な圏という。

つまり、正しくはモノイドとは対象がただ 1 つの locally small な圏である。

以下、断らない限り圏は locallu small であるとする。

このようにしてモノイド M を圏 C とみなすとき、C の射 f が同型であるとは、f がモノイド M の元として逆元を持つことである。

つまり、群とは「対象がただ 1 つですべての射が同型となる (locally small な) 圏」であるということができる。

[†1] たぶんこの $*$ が何であるかというのは指定していない。たとえば、$M = *$ としてもいいはず。

例 2.2.8 : 離散圏

X を集合とする。このとき、$\mathrm{Ob}(C) \coloneqq X$ で射は恒等射のみとすれば、C は圏である。これを**離散圏**という。通常、集合はこの方法で圏とみなす[†1]。

[†1] 当たり前だが、これは集合 X そのものを圏とみなす方法である。**Set** とは別の話である。

ここまで圏の例を上げてきたわけだが、このような「圏すべての集まり」も圏とできる。「圏と関手のなす圏」$\mathbf{CAT}$ を定義する🐈。

例 2.2.9 : CAT 🐈🐱😻

次のように定めると、圏となる[†1]。

- 圏を対象とする。
- 圏 C から圏 D への射とは、関手 $C \to D$ のこととする。
- 関手 $F : C \to D,\ G : D \to E$ に対して、合成関手 $GF : C \to E$ を次で定義する[†2]。
  - ⋆ $a \in C$ に対して、$GF(a) \coloneqq G(F(a))$
  - ⋆ C の射 $f : a \to b$ に対して、$GF(f) \coloneqq G(F(f))$
- 圏 C に対して、恒等射 $\mathrm{id}_C : C \to C$ を次で定義する (これを**恒等関手**という)
  - ⋆ $a \in C$ に対して、$\mathrm{id}_C(a) \coloneqq a$
  - ⋆ C の射 $f : a \to b$ に対して、$\mathrm{id}_C(f) \coloneqq f$

この圏を $\mathbf{CAT}$ と書く。

これを用いて、圏の同型を圏 $\mathbf{CAT}$ における同型として定義できる。つまり、圏 C と圏 D が同型 $C \cong D$ であるとは、

- ある関手 $F : C \to D,\ G : D \to C$ が存在して、$GF = \mathrm{id}_C,\ FG = \mathrm{id}_D$

となることである。このような F と G が存在すれば、C の対象や射と D の対象や射が 1 対 1 に対応する。「圏としての形が同じ」ということである。

[†1] これは危ないところがあるらしい。実際調べると、本当に全ての圏を集めたものは擬圏とよばれるものらしい。locally small な圏すべてを考えれば問題ないということだろうか

[†2] $G \circ F$ を GF と書くことが多い。

B.3　関手の例

例 2.3.1：冪集合を対応させる関手

X, Y を集合、$f : X \to Y$ を写像とする。$F(X) \coloneqq \mathcal{P}(X)$ を冪集合として、$Ff : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ を、$S \in \mathcal{P}(X)$ に対して $Ff(S) \coloneqq f(S)$ で定める。これにより、$F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は関手となる。

例 2.3.2：離散圏の関手

集合 X, Y を離散圏とみなす。このとき、X, Y の射は恒等射しかないから、関手 $X \to Y$ は写像 $X \to Y$ と同一視される (関手は射の対応も与えるが、射が恒等射しかないことにより、射の対応は一意である。)。

関手とならないようなものを考えてみよう。位相空間 X に対して、$F(X)$ で「X 上の複素数値連続関数全体がなす集合」を表すことにする。このとき、連続写像 $f : X \to Y$ に対して、写像 $Ff : F(Y) \to F(Y)$ が $g \in F(Y)$ に対して $Ff(g) \coloneqq g \circ f$ で定義できる。このようにして、関手 $F : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ は定まるだろうか。答えは否。定まらない。関手なら、$F(f) : F(X) \to F(Y)$ とならねばならないが、逆になってしまっているからだ。しかし、「逆向きになること」を除けば関手のような条件を満たしている:

- $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ に対して、$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ (もちろんこれも逆になっている)
- $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$

このような逆向きになる「関手」(関手ではない) を「反変関手」という。

定義 2.3.3：反変関手

C, D を圏とする。C から D への**反変関手 (contravariant functor)**$F : C \to D$ とは、$a \in \mathrm{Ob}(C)$ に $F(a) \in \mathrm{Ob}(D)$ を、$f \in \mathrm{Mor}(C)$ に $F(f) \in \mathrm{Mor}(D)$ を対応させる関数であって、以下を満たすものである。

(1) $f : a \to b$ のとき、$F(f) : F(b) \to F(a)$ である。
(2) $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ のとき、$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ である。
(3) $a \in C$ に対して、$F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ である。

反変関手に対して、通常の関手のことを**共変関手 (covariant functor)** という。

「共変関手」と「反変関手」の違いは意識する必要があまりない。以下のような反転圏を用いることで、反変関手は共変関手と思えるのである。

定義 2.3.4：反転圏

C を圏とする。このとき、C^{op} を以下のように定める。

- 対象 $a \in C$ に対して、新しい対象 a^{op} を用意し、$\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) \coloneqq \{a^{\mathrm{op}} \mid a \in \mathrm{Ob}(C)\}$ と定める。
- 射 $f \in C$ に対して、新しい射 f^{op} を用意し、$\mathrm{Mor}(C^{\mathrm{op}}) \coloneqq \{f^{\mathrm{op}} \mid f \in \mathrm{Mor}(C)\}$ と定める。
- $\mathrm{dom}(f^{\mathrm{op}}) \coloneqq \mathrm{cod}(f)^{\mathrm{op}},\quad \mathrm{cod}(f^{\mathrm{op}}) \coloneqq \mathrm{dom}(f)^{\mathrm{op}}$ と定める。すなわち、$f : a \to b$ のとき、$f^{\mathrm{op}} : b^{\mathrm{op}} \to a^{\mathrm{op}}$ である。
- $f^{\mathrm{op}} : a^{\mathrm{op}} \to b^{\mathrm{op}},\ g^{\mathrm{op}} : b^{\mathrm{op}} \to c^{\mathrm{op}}$ に対して、射の合成 $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} : a^{op} \to c^{\mathrm{op}}$ $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} \coloneqq (f \circ g)^{\mathrm{op}}$ と定める。
- $\mathrm{id}_{a^{\mathrm{op}}} \coloneqq \mathrm{id}_a^{\mathrm{op}}$ とする。

このように定めた C^{op} は圏であり、C の**反転圏 (opposite category)**、**逆圏**、**双対圏**などという。
簡単には、全ての射の向きを反対にした圏である。
通常は $a^{\mathrm{op}}, f^{\mathrm{op}}$ などといちいち書かずに、単に a, f のように表す。

例 2.3.5：反変関手

反変関手 $C \to D$ とは、共変関手 $C^{\mathrm{op}} \to D$ のことである。
反変関手 $F : C \to D$ とは

(1) $f : a \to b$ のとき、$F(f) : F(b) \to F(a)$ である。
(2) $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ のとき、$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ である。
(3) $a \in C$ に対して、$F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ である。

を満たすものだった。
上のような反変関手 F が与えられているとする。$a^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}})$ に対して $F'(a^{\mathrm{op}}) \coloneqq F(a) \in \mathrm{Ob}(D)$ を、$f^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Mor}(C^{\mathrm{op}})$ に対して $F'(f^{\mathrm{op}}) \coloneqq F(f) \in \mathrm{Mor}(D)$ を対応させる関数 F' を改めて考えることにすれば

(1') $f^{\mathrm{op}} : b^{\mathrm{op}} \to a^{\mathrm{op}}$ のとき、$F(f^{\mathrm{op}}) : F(b) \to F(a)$ である。
(2') $\mathrm{dom}(f^{\mathrm{op}}) = \mathrm{cod}(g^{\mathrm{op}})$ のとき、$F(f^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}}) = F((g \circ f)^{\mathrm{op}}) = F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ である。
(3') $a^{\mathrm{op}} \in C^{\mathrm{op}}$ に対して、$F'(\mathrm{id}_{a^{\mathrm{op}}}) = F'(\mathrm{id}_a^{\mathrm{op}}) = F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ である。

となり、$F' : C^{\mathrm{op}} \to D$ は共変関手である。
これを反変関手 $F : C \to D$ と同一視するということ?

B.4　双対

双対性とは、圏 C の性質と、反転圏 (双対圏)C^{op} の双対的な性質の間の対応である。圏 C についての命題が与えられると、各射の dom と cod を入れ替え、射の合成の順序を入れ替えることにより、C^{op} についての対応する双対命題が得られる。双対性とは、この操作により命題の真偽が不変であるという主張である。

圏 C で正しい主張は圏 C^{op} でも正しい主張、圏 C で正しくない主張は圏 C^{op} でも正しくない主張である。

例 2.4.1：直積と余直積

圏 C における $a, b \in \mathrm{Ob}(C)$ の余直積とは、圏 C^{op} における $a, b \in \mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}})$ の直積である。

B.5　2 変数の射

この節は alg-d さんの次の動画を参考に、テンソル積の理解を深めることを目的とする。2 変数の射とは alg-d さんの造語である。

(1) 【圏論】「2 変数の射」を考える
(2) 【圏論】(余) 極限の入門動画【初心者向け】
(3) 【圏論】関手圏:定義と例
(4) 【圏論】テンソル積とは「2 変数の射」のための物である
(5) 【圏論】普遍性とは全単射のこと【極限】

$f : X \times Y \to Z$ という **Set** の射がある。これを 2 変数の射というのは違和感がないだろう。これを圏 C に一般化することを考えよう。
$a, b, c \in \mathrm{Ob}(C)$ とし、

$$f : (a \text{ と } b \text{ から作った対象}) \to C$$

という圏 C の射を考えることができればよい。一般の圏においても直積 $a \times b$ という概念がある。直積は必ずしも存在しないのだが、ここでは考えている圏 C では存在するとして話を進める[†7]。そこで、圏 C の射

$$f : a \times b \to c$$

というのを考えることになる。
Set の 2 変数の射に特徴的な性質として、「一方の変数を固定できる」というものがある。つまり、$x_0 \in X$ として、

$$g(y) := f(x_0, y)$$

とすることで、

$$g = f(x_0, ?) : Y \to Z$$

という関数が得られるのである。
すると、「関数を与える関数」

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f} : & X & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z) \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longmapsto & f(x, ?) \end{array}$$

という **Set** の射が得られる。
逆に、$h : X \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z)$ が与えられると、$\overline{h}(x, y) := h(x)(y)$ によって $\overline{h} : X \times Y \to Z$ を得られる。
上の対応は互いに逆であり、結局次の全単射があることがわかる:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X \times Y, Z) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z)) \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longmapsto & \widetilde{f} \\ \overline{h} & \longleftarrow & h \end{array}$$

この性質を圏 C の射 $f : a \times b \to c$ についても考えたい。この f に対して、

$$\widetilde{f} : a \to \mathrm{Hom}_C(b, c)$$

という C の射を考えることができるだろうか。これは必ずしもそうでない。$\mathrm{Hom}_C(b, c)$ が C の対象になっているとは限らないからである。そこで、c^b という c と b から作った新たな対象[†8]をなにかしら固定して、

$$\widetilde{f} : a \to c^b$$

という C の射を考えよう。この射により

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_C(a \times b, c) & \cong & \mathrm{Hom}_C(a, c^b) \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longmapsto & \widetilde{f} \end{array}$$

という全単射がほしいのである。ところが、これでは c^b が何たるかが分からず、どうしようもない。そこで次のように定義をしてしまう。

定義 2.5.1

$b, c \in C$ に対して、c^b とは、$a, b, c \in C$ について "自然" な[†1]全単射

$$\mathrm{Hom}_C(a \times b, c) \cong \mathrm{Hom}_C(a, c^b)$$

が存在するような対象 $c^b \in C$ のことである。

[†1] 自然変換になっているという条件

このような c^b は必ずしもあるだろうか。

[†7] 生きていて遭遇する圏では存在することがほとんどなので、応用の上ではあると思って問題ない
[†8] この記号は集合論の記号からの援用である。

例 2.5.2：Set

Set の場合には、$b, c \in \mathbf{Set}$ に対して、$c^b \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, c)$ である。

例 2.5.3：CAT

$B, C \in \mathbf{CAT}$ に対して、C^B は関手圏とすればよい。詳しくは動画を参照。

では、アーベル群の圏 **Ab** でも同じものを考えようと思うが、$A, B, C \in \mathbf{Ab}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, C^B)$$

という自然な全単射を与える $C^B \in \mathbf{Ab}$ は存在しない。

そのようなものが存在すると仮定すれば、$A = 0$ のときに

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(0 \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(0, C^B) = \{0\}$$

となり、$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C)$ が常に一元集合であることが帰結される。しかし、これは誤りである。

そこで、発想を変える。今まで、

$$\mathrm{Hom}_C(a \times b, c) \cong \mathrm{Hom}_C(a, c^b)$$

という全単射を考えてきたわけだが、必ずしも $a \times b$ という直積を考える理由はない。さらに、$f : a \times b \to c$ という写像から話を始める、つまり左辺から話を始めていたわけだが、特段そうする理由もない。右辺から話を始めてもよいだろう。

そこで、先に c^b を構成してから話を始めることにする。**Ab** では $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C)$ を考えればよいのである。いままで、$\mathrm{Hom}_C(b, c)$ が必ずしも圏 C の対象とは限らなかったのが面倒だったわけだが、**Ab** においては $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C) \in \mathbf{Ab}$ なのだ。そこでテンソル積を次のように定義する。

定義 2.5.4：テンソル積

A と B の**テンソル積**とは、

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C))$$

という自然な全単射があるような $A \otimes B \in \mathbf{Ab}$ のことである。

さて、話を戻そう。

$$\begin{array}{cccc} f : A & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & f(a) : B \to C \end{array}$$

という **Ab** の射が与えられていれば、**Set** の場合と同様に

$$\begin{array}{ccc} \overline{f} : A \times B & \longrightarrow & C \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (a, b) & \longmapsto & f(a)(b) \end{array}$$

という写像を考えることができる。この場合も f と $\overline{f}$ は一対一対応している。ところが $\overline{f}$ はいわゆる双線形写像であるが、**Ab** の射ではないのである。そのようなものは、圏論的にはよくわからない射ということになる。

そこでテンソル積が登場する。f に対して、$\widetilde{f} : A \otimes B \to C$ というものを考えるのである。

Ab で素朴に 2 変数の射というのを考えようと思うと $\overline{f} : A \times B \to C$ を考えるかもしれないが、それは **Ab** の射にはなっていないから、代わりに $\widetilde{f} : A \otimes B \to C$ を考えようということである。テンソル積は 2 変数の射を考えるために出てくるものなのだ。

テンソル積はよく普遍性により特徴づけられるが、「普遍性とは全単射のこと[†9]」と思えば、テンソル積の定義の全単射を満たすような対象が存在することを主張していると思うことができる。

[†9] 本節最初にも載せた動画リストにあるが、【圏論】普遍性とは全単射のこと【極限】を参照せよ

付録 C
圏論 (「数学原論」より)

定義 3.0.1：ファイバー積 [数学原論, p.2]

X, Y, S を集合、$f : X \to S,\ g : Y \to S$ を写像とする。積集合 $X \times Y$ の部分集合

$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

を X と Y の S 上の**ファイバー積**という。写像を明示して、$X \times_{f,S,g} Y$ と書くこともある。

第 1 成分と第 2 成分への射影の制限もそれぞれ $\mathrm{pr}_1 : X \times_S Y \to X,\ \mathrm{pr}_2 : X \times_S Y \to Y$ と書く。

定義 3.0.2：圏 [数学原論, p.3]

集合 C, M と写像

$$s : M \to C, \quad t : M \to C, \quad c : M \times_{s,C,t} M \to M, \quad e : C \to M$$

で、次の図式が可換になるものからなる組 (C, M, s, t, c, e) を**圏**という。

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "t"] & M \times_{s,C,t} \times M \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "c"] & M \arrow[d, "s"] \\
C & M \arrow[l, "t"] \arrow[r, "s"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \times_{s,C,t} M \times_{s,C,t} M \arrow[r, "c \times 1_X"] \arrow[d, "1_M \times c"'] & M \times_{s,C,t} M \arrow[d, "c"] \\
M \times_{s,C,t} M \arrow[r, "c"'] & M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "1_C"'] \arrow[dr, "e"] & C \\
C & M \arrow[l, "t"] \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "(e \circ t, 1_M)"] \arrow[d, "(1_M, e \circ s)"'] \arrow[dr, "1_M"] & M \times_{s,C,t} M \arrow[d, "c"] \\
M \times_{s,C,t} M \arrow[r, "c"'] & M
\end{tikzcd}$$

(C, M, s, t, c, e) が圏であるとき、省略して C を圏と呼ぶことが多い。

写像 s を源 (source)、t を的 (target)、c を合成 (composition) とよぶ。

集合 C の元を圏 C の**対象 (object)** とよぶ。また、集合 C を「圏 C の対象の集合」とよび、$\mathrm{Ob}(C)$ で表すことが多い。

集合 M の元を圏 C の**射 (morphism)** とよぶ。$A, B \in \mathrm{Ob}(C)$ で、C の射 f が $s(f) = A, t(f) = B$ をみたすとき、f は A から B への射であるといい、$f : A \to B$ で表す。A から B への射全体の集合を

$$\mathrm{Hom}_C(A, B) = \mathrm{Mor}_C(A, B) := \{f \in M \mid s(f) = A, t(f) = B\}$$

で表す。

$(g, f) \in M \times M$ が、写像 c の定義域 $M \times_{s,C,t} M$ の元であるとき、f と g は合成できるという。左上の可換図式から $s(c(g, f)) = s(f), t(c(g, f)) = t(g)$ なので、$g \circ f := c(g, f)$ は $s(f)$ から $t(g)$ への射である。つまり、射 $f : A \to B$ と $g : B \to D$ の合成は $g \circ f : A \to D$ である。

右上の可換図式は f と g、g と h が合成できる時、結合則

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{3.0.3}$$

が成り立つことを表す。

左下の可換図式は、$A \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して、$e(A)$ は C の射 $e(A) : A \to A$ であることを表す。これを A の**単位射 (identity)** とよび、$1_A : A \to A$ で表す。

右下の可換図式は、射 $f : A \to B$ に対して、

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A \tag{3.0.4}$$

を表す。

注意 3.0.5：対象に焦点を当てた解釈 [数学原論, p.5]

圏 C とは、

(1) 対象の集合 C
(2) $A, B \in C$ に対して定まる射の集合 $\mathrm{Mor}_C(A, B)$
(3) C の射 $f : A \to B, g : B \to D$ に対して定まる合成射 $g \circ f : A \to D$
(4) $A \in C$ に対して定まる単位射 $1_A : A \to A$

からなり、合成に関する結合則 (3.0.3) (p.38) と、単位射の性質 (3.0.4) (p.38) を満たすものと考えることができる。

定義 3.0.6：可環単系 [数学原論, p.35]

圏 (C, M, s, t, c, e) の対象がただ 1 つであるとき、M を**単系 (monoid)**、**モノイド**とよび、写像 $c : M \times M \to M$ を[†1]M の**演算**とよぶ。
$e : C \to M$ の像のただ 1 つの元 (C の元は 1 つなので、像は 1 元) を M の単位元という。

[†1] C の対象がただ 1 つなので、$M \times M = M \times_C M$ となっているために、c の定義域はこのように書いて良い。

定義 3.0.7：群 [数学原論, p.7]

単系 M の全ての射が可逆であるとき、M を**群**という。$g \in M$ の逆射を g の逆元とよび、g^{-1} で表す。

とここまで書いたが、これは脇においておくことにする。

索引

参考文献

[すべ Kan] alg-d. **全ての概念は *Kan* 拡張である**. https://alg-d.com/math/category-theory/. 2021.

[アティマク] M.F.Atiyah & I.G.Macdonald. **可換代数入門**. 共立出版, 2006.

[安藤可換環論] 安藤 遼哉. **可換環論**.

[勘どころ] 後藤 四郎. **可換環論の勘どころ**. 共立出版, 2017.

[層ホモ] 志甫 淳. **層とホモロジー代数**. 共立出版, 2016.

[圏と関手] 松田 茂樹. **圏と関手**.

[数学原論] 斎藤 毅. **数学原論**. 東京大学出版会, 2020.

[松村可換環論] 松村 英之. **復刊 可換環論**. 共立出版, 2000.

[青雪江] 雪江 明彦. **代数学 *2* 環と体とガロア理論**. 日本評論社, 2010.

[高間代トポ] 高間 俊至. **代数トポロジーノート**. May 2023.