Теорема

Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Доказательство

Докажем от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела: $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = b$.

Это значит, что

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n > N_1\ |x_n - a| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n > N_2\ |x_n - b| < \varepsilon$

Для определенности будем считать, что $a > b$, а $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Тогда:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n > N_1\ |x_n - a| < \frac{a-b}{2}$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n > N_2\ |x_n - b| < \frac{a-b}{2}$

Если взять за $N = \max(N_1, N_2)$, то оба неравенства удовлетворены:

$(\ |x_n - a| < \frac{a-b}{2}) \land (\ |x_n - b| < \frac{a-b}{2})$

Раскрывая модули, получаем:

$(a - \frac{a-b}{2} < x_n < a + \frac{a-b}{2}) \land (b - \frac{a-b}{2} < x_n < b + \frac{a-b}{2})$

Отсюда следует, что $(x_n < \frac{a-b}{2}) \land (x_n > \frac{a-b}{2})$, что является заведомо ложным утверждением.

Следовательно, $a = b$ и предел единственный.