Теорема

Пусть $f(x)$ монотонна на связном множестве X и отображает это множество на связное множество Y. Тогда $f(x)$ непрерывна на X..

Доказательство

$f(x)$ монотонна, для определенности предположим : $f(x)$ монотонно возрастает на X

$\Leftrightarrow$ для произвольной $a \in X$ представим X в виде :

$X = X_1 \cup \{a\} \cup X_2$, где

$X_1 = \{x \in X : \ x \leq a\}$

$X_2 = \{x \in X : \ x \geq a\}$

Покажем, что $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \inf f(x)$ на X_1

$M = \sup f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x = x_\varepsilon \in X_1 : f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$

Возьмем за $\delta(\varepsilon) = a - x_\varepsilon$

$\forall (x, \ x \in X_1, a - \delta(\varepsilon) = x_\varepsilon < x < a) \Rightarrow M - \varepsilon < f(x) \leq M \Rightarrow M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$

т.е. $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = M$

Аналогично можно доказать, что

$\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = m = \inf f(x)$ на X_2

$M \leq f(x) \leq m$

Покажем, что не может быть строгого неравенства

Пусть, например, $f(a) < m$ СТРОГО!

тогда $\forall x_1 \in X_1 \, x_2 \in X_2 \Rightarrow f(x_1) \leq M \ \leq f(a) \ < \ m \ \leq f(x_2)$

следовательно, не все точки отрезка $[f(x_1); f(x_2)]$ принадлежат множеству Y, что противоречит связности множества $Y = E(f) = \{y : y = f(x), x \in X = D(f)\}$

полученное противоречие показывает, что на самом деле $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$

Это значит, что $\exists \lim\limits_{x \to a} f(a) = a, \ a -$ произвольная точка $\Leftrightarrow f(x)$ непрерывна на X