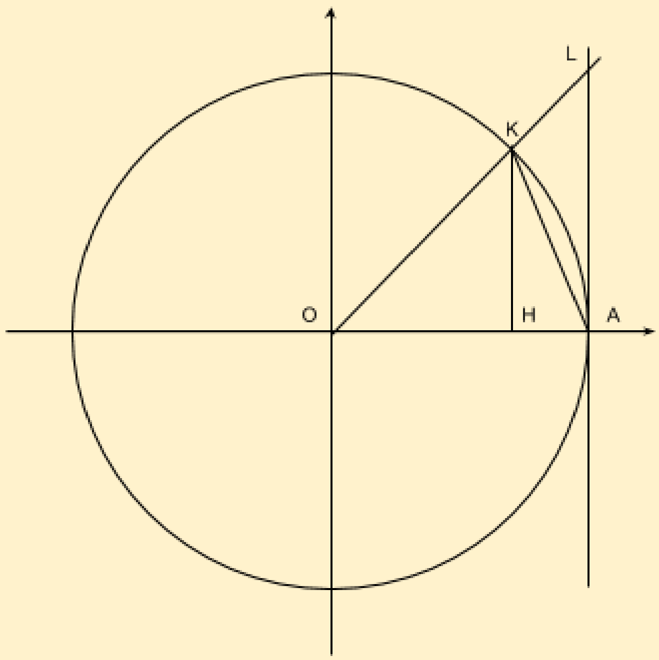
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin(x)}{x}\right) = 1$$

Доказательство:

1) Рассмотрим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{sin(x)}{x}\right)$ и $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\frac{sin(x)}{x}\right)$



2) Пусть $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, отложим этот угол на единичной окружности.

Очевидно: $S_{\triangle OKA} < S_{sektOKA} < S_{\triangle OAL}$ (1)

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2}|OA||KH| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot sin(x) = \frac{sin(x)}{2}$$
$$S_{sectOKA} = \frac{1}{2}R^2 x = \frac{x}{2}$$
$$S_{\triangle OAL} = \frac{1}{2}|OA||LA| = \frac{tg(x)}{2}$$

3) *Таким образом:* $\frac{sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg(x)}{2}$.

4) $x \to 0+ \;\Rightarrow\; sin(x) > 0;\; x > 0;\; tg(x) > 0$

$\frac{sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg(x)}{2} \mid \times 2$, перейдем к обратным числам

$\frac{1}{sin(x)} > \frac{1}{x} > \frac{1}{tg(x)} \mid \times sin(x)$

$1 > \frac{sin(x)}{x} > cos(x) \mid$ перейдем к пределам

$1 \geq \lim\limits_{x \to 0+} (\frac{sin(x)}{x}) \geq \lim\limits_{x \to 0+} (cos(x))$

$1 \geq \lim\limits_{x \to 0+} (\frac{sin(x)}{x}) \geq 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to 0+} (\frac{sin(x)}{x}) = 1$

5) Для $x \to 0-$:

$$\lim_{x \to 0-} (\frac{sin(-x)}{-x}) = \lim_{-x \to 0+} (\frac{-sin(x)}{-x}) = \lim_{x \to 0+} (\frac{sin(x)}{x}) = 1$$

6) Поскольку пределы для $x \to 0+$ и $x \to 0-$ существуют и равны 1, предел $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{sin(x)}{x}) = 1$.
