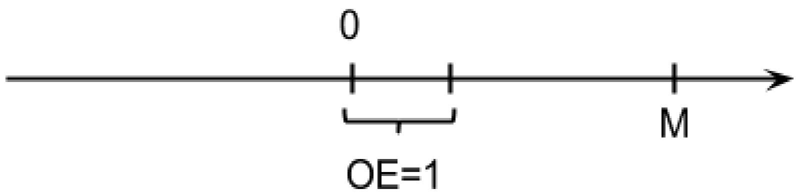
Числовая ось

Числовой осью назовем прямую с выбранной на ней точкой О (начало координат), масштабным отрезком ОЕ (его длина равна 1) и положительное направление от О к Е



Несоразмеримые отрезки

Существование несоразмеримых отрезков показывает, что ***не все точки числовой оси соответствуют рациональным числам***

Бесконечные десятичные дроби

Выясним, сколько раз единичный отрезок укладывается в ОМ. Возможны два случая:

1) Единичный отрезок укладывается в ОМ целое число раз a_0 с остатком *меньше 1.*

Тогда a_0 — *результат измерения отрезка ОМ по недостатку с точностью до 1.*

2) Единичный отрезок укладывается в ОМ целое число раз $a_0 + 1$

Выясним, сколько раз $1/10$ единичного отрезка укладывается в ОМ. Возможны те же два случая, обозначим результат за a_1

и считаем, что $a_0.a_1$ — *результат измерения отрезка ОМ по недостатку с точностью* $1/10$

Аналогичную операцию можно повторять сколь угодно раз, получая все более точные измерения.

$M \to a_0;\ a_0.a_1;\ \ldots\ a_0.a_1a_2\ldots a_n$

Таким образом, каждой точке М на числовой оси можно поставить в соответствие бесконечную десятичную дробь:

$a_0.a_1a_2\ldots$

Иногда дробь *периодическая*:

$a_0.a_1a_2\ldots a_n(c_1c_2\ldots c_k)(c_1c_2\ldots c_k)\ldots$

Эквивалентность и равенство рациональных чисел

Принято считать, что

$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.5(0);\ \frac{1}{2} \leftrightarrow 0.4999(9)$

Множество вещественных чисел

— Это множество бесконечных десятичных дробей с введенными на нем операциями порядка.

Модуль бесконечной десятичной дроби

Модулем бесконечной десятичной дроби будем называть взятое со знаком + его представление в виде бесконечной десятичной дроби, т.е.

Введение отношения порядка

Пусть $a = \pm a_0.a_1a_2...,\ b = \pm b_0.b_1b_2...$

1) $a = b$, если равны целые части $a_0 = b_0$ и десятичные $a_n = b_n$, а числа a и b имеют *один знак*
2) $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ...\ a_n = b_n,\ a_{n+1} > b_{n+1} \Rightarrow a > b,\ a \geq 0,\ b \geq 0$
3) $a \geq 0,\ b \leq 0\ \Rightarrow a \geq b$
4) a, b — вещественные $\Rightarrow a > b,\ b < 0 \Leftrightarrow |b| > |a|$

Множество вещественных чисел удовлетворяет всем аксиомам множества рациональных чисел