Теорема

Для всякой системы вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ... \supset [a_n, b_n]$ такой, что длины отрезков стремятся к 0 ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$), существует *единственная* точка C, принадлежащая всем отрезкам.

Доказательство

1) Существование точки C

Множество левых концов отрезков $\{a_n\}$ на числовой прямой лежит левее множества правых концов $\{b_n\}$. $\forall n, m \; a_n \le b_m$. В силу аксиомы непрерывности вещественных чисел, существует точка C, разделяющая эти два множества: $\forall n, m \; a_n \le C \le b_m$, в частности $\forall n \; a_n \le C \le b_n$. Это значит, что точка C — общая точка для всех отрезков.

2) Единственность точки C

Предположим противное: пусть есть две точки, принадлежащие всем отрезкам: $\forall n \; c, c' \in [a_n, b_n] \; c \neq c'$

Тогда для всех номеров n выполняется неравенство: $|c - c'| \le b_n - a_n$. В силу существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$, для любого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}|c - c'|$. Тогда, начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $b_n - a_n < \frac{1}{2}|c - c'|$.

Противоречие. Единственность доказана.