Теорема

Для существования предела функции, необходимо и достаточно выполнения критерия Коши:

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall u, v\ 0 < |u-a| < \delta,\ 0 < |v-a| < \delta \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon$

Доказательство

1) Необходимость

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$ из неравенства $0 < |x-a| < \delta$ вытекает неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$. Пусть для $u, v\ \in D(f)$ выполняются неравенства $0 < |u-a| < \delta,\ 0 < |v-a| < \delta$. Тогда $|f(u)-f(v)| \le |f(u)-b| + |f(v)-b| < 2\varepsilon$

2) Достаточность

Пусть выполнен критерий Коши. Рассмотрим последовательность x_n, для которой

$x_n \in D(f),\ x_n \ne a,\ x_n \to a$.

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\delta = \delta(\varepsilon)$ — число, фигурирующее в условии Коши.

Воспользуемся определением предела последовательности x_n и обозначим через n_δ номер, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \delta$ Пусть $n, m \ge n_\delta$ Тогда $0 < |x_n-a| < \delta,\ 0 < |x_n - a| < \delta$ и, по условию Коши $|f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $f(x_n)$ фундаментальна, и, в силу критерия Коши для последовательностей, сходится.

Докажем теперь, что предел $f(x)$ не зависит от выбора подходящей последовательности.

Пусть u_n и v_n — две подходящие последовательности. Образуем из них новую последовательность. Она тоже будет сходиться к a.