

Теорема

Из всякой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, которая будет сходящейся.

Доказательство

т.н. “метод Больцано”:

Пусть дана ограниченная последовательность. Из ограниченности следует, что все ее члены лежат на некотором отрезке числовой прямой. Обозначим его $[a_0, b_0]$. Разделим его пополам и выберем отрезок, содержащий бесконечное число членов последовательности, обозначим его $[a_1, b_1]$. Далее будем делить отрезки пополам и выбирать те, в которых содержится ∞ число членов. Получим систему вложенных отрезков:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

Поскольку длина последующего отрезка в два раза меньше длины предыдущего, очевидно, что длины отрезков стремятся к нулю.

По теореме о системе вложенных отрезков, существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам. И вблизи этой точки находится бесконечное число членов последовательности, следовательно, эта точка предельная, что говорит о существовании подпоследовательности, сходящейся к этой точке.