Теорема

Пусть дана непрерывная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$. Пусть $M=\sup f(x)$, $m=\inf f(x)$. Тогда эти значения конечны $-\infty<m\le M<\infty$ и достигаются, т.е. существуют такие x_m, x_M, что $f(x_m)=m,\ f(x_M)=M$.

Доказательство

Пусть $f(x)$ — функция, отвечающая условиям теоремы. $M=\sup f(x)$. Возьмем последовательность чисел a_m таких, что $\lim a_m=M$ и $a_m<M$. Для каждого m найдется точка x_m такая, что $a_m<f(x_m)$. По теореме Больцано-Вейерштрасса из последовательности x_m можно выделить сходящуюся последовательность $\{x_{m_k}\}$, предел которой лежит на нашем отрезке. Для любого x_m справедливо $a_m<f(x_{m_k})<M$. По теореме о трех последовательностях $\lim f(x_{m_k})=M$ и в силу непрерывности функции существует точка x_0 такая, что $\lim f(x_{m_k})=f(x_0)$, и, следовательно, $M=f(x_0)$. Таким образом функция $f(x)$ ограничена и достигает своей верхней грани при $x=x_0$. Аналогично для нижней грани.