Теорема

Если множество вещественных чисел содержит хотя бы один элемент и ограничено сверху/снизу, то у этого множества существует его точная верхняя/нижняя грань.

Доказательство

(Для верхней грани, для нижней — аналогично)

Если множество M ограничено сверху, существует непустое множество $\overline{M} \neq \varnothing$ — множество всех верхних граней множества M. По аксиоме о непрерывности множества вещественных чисел:

$\forall m \in M, \overline{m} \in \overline{M}\ \exists \varepsilon : m \leq \varepsilon \leq \overline{m}$ Отсюда следует, что ε — верхняя грань множества M и то, что эта верхняя грань — наименьшая, т.е. ε — точная верхняя грань. $\varepsilon = \sup M$, теорема доказана.

Доказательство (по Барменкову)

(Для верхней грани, для нижней — аналогично)

Пусть X — числовое множество, ограниченное сверху, непустое. Т.е. $\exists M : \forall x \in X \Rightarrow x \leq M$

Возможны случаи:

1) Среди элементов множества X есть хотя бы одно неотрицательное вещественное число

2) Все элементы X — отрицательные вещественные числа

В силу ограниченности множества X, все целые части чисел $x \in X$ будут меньше или равны М. Это значит, что среди целых частей $x \in X$ найдется наибольшая. Обозначим ее $\bar{x}_0$. Далее выберем числа вида $\bar{x}_0.x_1x_2...$ — числа, целая часть которых совпадает с $\bar{x}_0$. Среди этих чисел можно найти числа с наибольшим $x_1 = \bar{x}_1$. Аналогично выбираем наибольшее x_2, x_3 ...

Получили конструктивный процесс нахождения наибольшего числа. Будем считать, что $\exists \bar{x} = \bar{x}_0.\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_2...$

Остается доказать, что $\sup X = \bar{x}$

Для этого нужно проверить условия: $\{\forall x \in X \Rightarrow x \leq \bar{x}\}$ и $\{\forall x' \in X,\ x' < \bar{x}\ \exists \bar{x}' \in X:\ x' < \bar{x}'\}$

Первое условие почти очевидно, т.к. $\bar{x}$ — наибольший элемент X.

Для второго условия рассмотрим вышеописанные два случая:

1) В X есть хотя бы одно неотрицательное число.

Обозначим это число за x'.

По определению: $x' < \bar{x}' \Leftrightarrow x_0' = \bar{x}_0',\ x_1' = \bar{x}_1' \ ...\ x_n' < \bar{x}_n'$

Этот $\bar{x}'$ будет таким, что второе условие доказано.

2) Все элементы X — отрицательные вещественные числа вида $-x_0.x_1x_2...x_n$

Тогда из того, что $x_0 > 0 \Rightarrow \exists \bar{x}_{0_{\text{наим.}}}$ из X.

Можно найти наименьшее число $\bar{x}_0.\bar{x}_1\bar{x}_2...$

Тогда во $\sup X = -\bar{x}_0.\bar{x}_1\bar{x}_2...$