Теорема

Если функция имеет предел в некоторой точке, то он единственный

Доказательство

От противного. Предположим, что существуют два предела в точке a: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to c} f(x) = c$, причем $b \neq c$.

Распишем определения для произвольно взятого $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in D(f) \ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in D(f) \ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$

Выберем наименьшее из двух $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, так что

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$|b - c| = |b - f(x) + f(x) - c| \leq |f(x) - b| + |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = \frac{|b-c|}{2}$. Тогда $|b - c| < \frac{|b-c|}{2}$. $1 < \frac{1}{2}$. Противоречие. Предел единственен.