Теорема

Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

Доказательство

Чтобы доказать, что этот предел существует, докажем, что последовательность $\{\ (1+\frac{1}{n})^n\ \}$ монотонно возрастает и ограниченна сверху.

Воспользуемся формулой [бинома Ньютона](), выразим x_n и x_{n+1}:

$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}$

Перепишем:

$x_n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \ldots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})$

Аналогично для x_{n+1}:

$x_n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ldots(1-\frac{n}{n+1})$

Очевидно, что $x_{n+1} > x_n$. Это доказывает монотонность последовательности.

Далее, принимая во внимание соотношение $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}\ \forall k > 2$ (его можно доказать методом математической индукции), получаем:

$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$

Это доказывает ограниченность последовательности.

Применяя [теорему]() о существовании предела у монотонной и ограниченной последовательности, доказываем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Число e

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ обозначают числом $e \approx 2,718281828\ldots$