Определение

Функция $y = f(x)$ *равномерно непрерывна* на множестве $X \subseteq D(f)$ если:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x',\ x'',\ x',x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta) \ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Отрицание

$f(x)$ не является равномерно непрерывной на X, если

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \exists \ (x',\ x'',\ x',x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta) \ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$

Замечание

Если в определении равномерной непрерывности фиксировать точку $x'' = a$, то получим определение непрерывности функции $f(x)$ в точке $x'' = a$. Т.е. всякая равномерная непрерывная на X функция непрерывна на этом множестве

Теорема Кантора

Функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве (в частности — на отрезке) равномерно непрерывна на этом множестве.

Доказательство

Пусть X — замкнутое ограниченное множество и $f(x)$ непрерывна на X

От противного.

Предположим, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на этом множестве. Напишем отрицание:

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta = \delta(\varepsilon_0) > 0 \ \exists (x',\ x'',\ x',x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta) \ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$

Возьмем $\delta_n = \frac{1}{n}$ тогда по отрицанию $\exists (x'_n,\ x''_n,\ x'_n, x''_n \in X,\ |x'_n - x''_n| < \delta_n = \frac{1}{n}) \Rightarrow |f(x'_n) - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0 \star$

Таким образом, получили последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, для них выполняется соотношение $\star$.

Поскольку $\{x_n'\} \in X$, а X — ограниченное (по условию), то $\{x_n'\}$ — ограниченная последовательность. По теореме Больцана-Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т.е. $\exists \{x_{n_k}'\} \subseteq \{x_n'\} : \ x_{n_k}' \to a$. $\{x_{n_k}'\}$ подпослкдоватклньность. Поскольку X — замкнутое (по условию), $a \in X$. Из условия $\star$ $|x_{n_k}' - x_{n_k}''| < \frac{1}{n_k} \Leftrightarrow x_{n_k}' - \frac{1}{n_k} < x_{n_k}'' < x_{n_k}' + \frac{1}{n_k}$ $k \to \infty$. По теореме о трех последовательнотях $\exists \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}''$ =a, т.е. $x_{n_k}'' \to a,\ k \to \infty$

В силу непрерывности $f(x)$ и $f(x_{n_k}') \to f(a)$ и $f(x_{n_k}') \ \to f(a)$ тогда $|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \to |f(a) - f(a)| = 0$

Но по условию $\star$ $|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \geq \varepsilon_0 > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.