

Ограниченность числового множества

Множество X называется:

- 1) ограниченным *сверху*, если $\exists M : \forall x \in X \Rightarrow x \leq M$, M — верхняя грань X
- 2) ограниченным *снизу*, если $\exists m : \forall x \in X \Rightarrow x \geq m$ m — нижняя грань X
- 3) просто *ограниченным*, если $\exists M : \forall x \in X \Rightarrow |x| \leq M$

Точная верхняя/нижняя грань, определение №1

- 1) Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества X называется *точной верхней гранью* X и обозначается $M = \sup X$
- 2) Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества X называется *точной нижней гранью* X и обозначается $m = \inf X$

Точная верхняя/нижняя грань, определение №2

$$M = \sup x \Leftrightarrow \{\forall x \in X \Rightarrow x \leq M\} \wedge \{\forall x' \in X : x' < M \Rightarrow \exists x \in X : x' < x\}$$

$$m = \inf x \Leftrightarrow \{\forall x \in X \Rightarrow x \geq m\} \wedge \{\forall x' \in X : x' > m \Rightarrow \exists x \in X : x < x'\}$$

(первое условие — ограниченность, второе — возможность “подойти” к грани)

Точная верхняя/нижняя грань, определение №3

Число M называют точной верхней гранью множества X , если

$$\{\forall x \in X : x \leq M\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists x(\varepsilon) : x > M - \varepsilon\}$$

Аналогично для \inf

определения 1, 2, 3 эквивалентны