

Тонкостенный цилиндр

Для тонкостенного цилиндра момент инерции равен $\sum R^2 dm = R^2 \sum dm = mR^2$, т.к. все элементы тонкостенного цилиндра лежат на одинаковом расстоянии от оси вращения.

Толстостенный цилиндр

Для толстостенного цилиндра с радиусами R и R_1 можно записать:

$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r h dr$$

$$dJ = r^2 dm = 2\pi \rho h r^3 dr$$

Для получения момента инерции, проинтегрируем по радиусу:

$$J = \int_{R_1}^R dJ = 2\pi \rho h \int_{R_1}^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho h (R^2 - R_1^2)(R^2 + R_1^2)$$

Можно расписать объем и массу кольца:

$$V = \pi(R^2 - R_1^2)h$$

$$m = \rho V = \rho \pi(R^2 - R_1^2)h$$

Следовательно, момент инерции равен:

$$J = \frac{1}{2} m(R^2 + R_1^2)$$

Плоский диск

Плоский диск — это толстостенный цилиндр с нулевым радиусом $R_1 = 0$

Таким образом, момент инерции для него равен $J = \frac{1}{2} mR^2$