Теорема

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=a$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \ge b\ (x_n \le b)$,
то $a \ge b\ (a \le b)$

Доказательство

(для случая $a \ge b$)
От противного. Предположим, что начиная с некоторого номера N $x_n \ge b$. По определению предела:
$\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\ \forall n>N\ |x_n-a|<\varepsilon$
Выберем $\varepsilon=b-a$. Тогда, начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $|x_n-a|<b-a$. Отсюда следует, что $x_n<b$, а это противоречит условию.

Следствие 1

Если для двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера N $x_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} \le \lim\limits_{n\to\infty}\{y_n\}$

Следствие 2

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $x_n \in [a;b]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$