Теорема

Определения предела функции по Гейне и Коши эквивалентны

Доказательство

1) Г $\rightarrow$ К

Пусть у функции $f(x)$ существует предел по Гейне $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Предположим, что у нее нет аналогичного предела по Коши. Напишем отрицание:

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \exists x \in D(f),\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| \geq \varepsilon$

Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$ (будем обозначать $x_\delta = x_n$). Тогда начиная с некоторого номера N будет выполняться $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Но $|f(x) - b| \geq \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает, что из предела по Гейне следует предел по Коши.

2) К $\rightarrow$ Г

Пусть у функции $f(x)$ существует предел по Коши $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Выберем подходящую последовательность x_n, $x_n \in D(f),\ x_n \rightarrow a,\ x_n \neq a$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, укажем для него такое δ, что для всех $x \in D(f)$ $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, для $\delta > 0$ найдется такой номер n_δ, что для всех $n \geq n_\delta$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \delta$. Это означает, что для всех $n \geq n_\delta$ будет выполняться $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.