Теорема

Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b), и, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на $[a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Доказательство

а) Докажем, сначала, что в условиях теоремы $g(b) \neq g(a)$ От противного. Если $g(b) = g(a)$, то к $g(x)$ на отрезке $[a,b]$ применима теорема Ролля и по ней $\exists \xi : g'(\xi) = 0$, что невозможно по условию, т.е. $g(b) - g(a) \neq 0$

б) Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. Пусть функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). $F(a) = F(b) = 0$, т.е. к функции $F(x)$ применима теорема Ролля. По утверждению теоремы Ролля существует точка $\xi \in (a,b)$: $F'(\xi) = 0$, т.е. $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$, т.е. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$