Теорема

Если непрерывная функция, определенная на вещественном интервале принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

Доказательство

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - C$. Она непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $g(a) < 0,\ g(b) > 0$. Покажем, что существует такая точка $c \in [a,b]$, что $g(c) = 0$. Разделим отрезок $[a,b]$ точкой x_0 на ва равных по длине отрезка, тогда либо $g(x_0) = 0$ и нужная точка $c = x_0$ найдена, либо $g(x_0) \neq 0$ и тогда на концах одного из полученных отрезков функция $g(x)$ принимает значения разных знаков.
Обозначив полученный отрезок $[a_1, b_1]$, разделим его снова на два равных по длине отрезка и т.д. Тогда, либо через конечное число шагов придем к искомой точке c, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ по длине стремящихся к нулю и таких, что $g(a_n) < 0 < g(b_n)$. Пусть c — общая точка всех отрезков $[a_n, b_n]$, тогда $c = \lim a_n = \lim b_n$ и в силу непрерывности функции $g(x)$: $g(c) = \lim g(a_n) = \lim g(b_n)$.

Поскольку $\lim g(a_n) \leq 0 \leq \lim g(b_n)$, получим, что $g(c) = 0$