Теорема

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на данном отрезке.

Доказательство

От противного. Предположим, что $f(x)$ непрерывна, но неограниченна: $\forall n\ \exists x_n : |f(x_n)| > n$
По теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая будет сходиться к пределу $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. По теореме о предельном переходе в неравенстве $a \le x_n \le b \Rightarrow a \le x_0 \le b$. Так как $f(x) \in C(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ $x_{n_k} \to x_0,\ |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ Полученное противоречие доказывает теорему.