Теорема

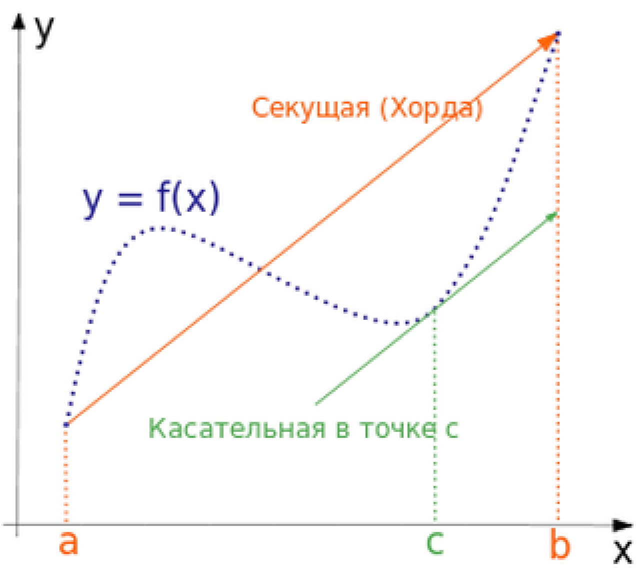
Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует точка $\xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Доказательство

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Поскольку линейная функция непрерывна и дифференцируема при всех $x \in D(f)$, то $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $F(a) = 0$, $F(b) = 0$, т.е. $F(a) = F(b)$ и к функции $f(x)$ применима теорема Ролля. По теореме Ролля $\exists \xi \in (a,b) : F'(\xi) = 0$ $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, отсюда $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, т.е. $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Геометрический смысл



(Касательная параллельна секущей)

Следствие

Если $f(x)$ дифференцируема на отрезке (a,b) и $f'(x) = 0$, то $f(x)$ — константа.

Доказательство

$\forall x, y \; \exists c : \; f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) = 0 \Rightarrow \forall x, y \; f(y) = f(x)$