Определение

Последовательность называется ***последовательностью Коши***, или ***фундаментальной последовательностью***, если она удовлетворяет критерию Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall m \geq N, n \geq N \ |x_n - x_m| < \varepsilon$

Теорема

Если последовательность фундаментальна, то она сходится

Доказательство

1) Необходимость.

Пусть дана сходящаяся последовательность $\{x_n\}$. У нее есть предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. По определению:

$\forall \varepsilon \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ и распишем определение для m и n:

$\exists N = N(\frac{\varepsilon}{2}) : \forall m > N \ |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N = N(\frac{\varepsilon}{2}) : \forall n > N \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда справедливо неравенство:

$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| \leq |x_m - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2) Достаточность.

Пусть данная последовательность удовлетворяет критерию Коши, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall m, n \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда, в частности, будет верно:

$\exists N_1 = N_1(1) : \forall m \geq N_1, n = N_1 : |x_n - x_m| < 1$

Это значит, что $x_n - 1 < x_m < x_n + 1$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ ограниченная. По теореме Больцано-Вейерштрасса из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Докажем, что предел этой подпоследовательности совпадает с пределом последовательности.

Из фундаментальности следует, что для всех m, n начиная с N выполняется $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$

Для сходящейся подпоследовательности можно показать, что $\exists k : \forall n_k > N \ |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$

Тогда для любого $n > N$:

$|x_n - a| = |x_n - x_m + x_m - a| = [x_m = x_{n_k}] \leq |x_n - x_m| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon$