Теорема

Если последовательность сходится и ее предел ненулевой, то начиная с некоторого номера N она знак членов последовательности сохраняется.

Доказательство

(для положительного предела, для отрицательного — аналогично)

Предел положителен $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ a > 0$.

По определению предела последовательности:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon < a$, тогда, начиная с некоторого номера N:

$|x_n - a| < \varepsilon < a$

Если $x_n - a > 0$, то $x_n > a > 0$, т.е. $x_n > 0$

Если $x_n - a < 0$, то $a - x_n < a$, т.е. $x_n > 0$

Таким образом, доказано, что начиная с некоторого номера N знак членов последовательности сохраняется