Эквивалентные бесконечно малые, таблица эквивалентностей, ПЗП, ВЗП

Эквивалентные бесконечно малые

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *бесконечно малыми* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$

Для эквивалентных бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ принята запись: $\alpha \sim \beta$

Таблица эквивалентностей

Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, в пределах можно заменить содержащие ее функции на эквивалентные.

Функция содержащая $\alpha(x)$	**Эквивалентна**
$\sin(\alpha(x))$	$\alpha(x)$
$\tan(\alpha(x))$	$\alpha(x)$
$\arcsin(\alpha(x))$	$\alpha(x)$
$\arctan(\alpha(x))$	$\alpha(x)$
$\ln(1 + \alpha(x))$	$\alpha(x)$

$1 - \cos\alpha(x)$	$(\alpha(x))^2/2$
$a^{\alpha(x)} - 1$	$\alpha(x)\ln a$

$(1 + \alpha(x))^p - 1$	$p\alpha(x)$
$(1 + \alpha(x))^{1/p} - 1$	$\alpha(x)/p$

Многие эквивалентности могут быть доказаны через $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ с применением *ПЗП* и *ВЗП*

Первый замечательный предел (ПЗП)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел (ВЗП)

$$\lim_{t \to 0}(1 + t)^{1/t} = e$$