

Электростатическое поле в вакууме

Кулоном экспериментально установлено, что на точечный заряд q_1 в вакууме со стороны другого точечного заряда q_2 действует сила:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r \quad (1)$$

Вектор \vec{e}_r всегда направлен в сторону того заряда, на который действует сила \vec{F} (в данном случае от q_2 к q_1). Таким образом, если заряды имеют одинаковый знак, действие этой силы способствует их отталкиванию, и наоборот, если знаки разные, заряды притягиваются. Введя радиус-вектор \vec{r} , по модулю равный расстоянию между зарядами и направленный как \vec{e}_r , формулу можно переписать:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \quad (2)$$

Поскольку сила электростатического взаимодействия зависит только от зарядов и расстояния между ними, действует принцип суперпозиции:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i} \quad (3)$$

Если зафиксировать заряд q и рассматривать силу, с которой он действует на произвольный заряд q_1 , очевидно, что отношение этой силы к величине q_1 зависит только от q и расстояния между зарядами. Можно ввести вспомогательную величину, показывающую, какая сила действует со стороны зафиксированного заряда на единичный:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (4)$$

Любая группа неподвижных зарядов создает поле сил, называемое электростатическим. Величина \vec{E} называется напряженностью такого поля. Таким образом, сила, действующая на заряд q_1 в поле с напряженностью \vec{E} равна:

$$\vec{F} = q_1 \vec{E} \quad (5)$$

Чтобы соблюдался закон Кулона, вектор \vec{E} должен быть направлен от положительных зарядов к отрицательным.

Поскольку принципу суперпозиции подчиняется сила электростатического взаимодействия, этому же принципу подчиняется напряженность:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (6)$$

Чтобы сделать электростатическое поле наглядным, вводят линии напряженности – ориентированные кривые, касательная к которым в любой точке совпадает по направлению с \vec{E} , и густота которых выбрана так, чтобы на единицу перпендикулярной линиям поверхности приходилось такое их количество, которое совпадало бы со значением E . Ясно, что изобразить все линии поля на бумаге невозможно, однако они помогают определить направление \vec{E} и то, как этот вектор изменяется в пространстве.

От векторного поля \vec{E} можно перейти к скалярному. Требуется найти скалярную величину, определенную в каждой точке поля, показывающую, куда направлен вектор \vec{E} , и чему равен его модуль. Для этого распишем по определению работу A перемещения заряда q' , находящегося в поле заряда q из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 F \vec{e}_r d\vec{l} \quad (7)$$

Скалярное произведение $(\vec{e}_r; d\vec{l})$ дает приращение модуля радиус-вектора dr . Таким образом, криволинейный интеграл сводится к определенному:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right) \quad (8)$$

Поскольку сила электростатического взаимодействия центральна, ее поле консервативно. Следовательно, работа сил поля представима как убыль потенциальной энергии заряда:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} \quad (9)$$

Отсюда:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + const \quad (10)$$

Константа $const$ выбирается таким образом, чтобы потенциальная энергия q' на бесконечном удалении от заряда, создающего поле, была равной нулю. Ясно, что $const = 0$.

Поле создано зарядом q , заряд q' может быть произвольным. Отношение $\frac{W_p}{q'}$ зависит только от поля. Мы нашли некую скалярную величину, характеризующую поле в каждой его точке:

$$\varphi = \frac{W_p}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (11)$$

Эта величина называется потенциалом электростатического поля.

Аддитивность потенциальной энергии и принцип суперпозиции \vec{E} дают аддитивность потенциала:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (12)$$

Таким образом, потенциальная энергия заряда равна:

$$W_p = q'\varphi \quad (13)$$

Похоже на случай с напряженностью.

Из консервативности сил поля \vec{E} , во-первых, следует, что работа этих сил по замкнутому контуру равна нулю ($r_1 = r_2$). Во-вторых, соблюдаются следующие соотношения:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (14)$$

Это можно переписать с помощью дифференциального оператора набла:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right) = -\vec{\nabla}\varphi \quad (15)$$

Получили связь напряженности и потенциала, нашли скалярную величину, характеризующую изменение напряженности поля в пространстве.

Для наглядности важно понимать, что напряженность в любой точке направлена в сторону убыли потенциала.

С помощью соотношения $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ можно найти напряженность, зная потенциал. Обратная операция тоже осуществима и описана нами выше:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \quad (16)$$