Плоская электромагнитная волна

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в нейтральной непроводящей однородной среде ($\rho = 0$, $j = 0$, $\varepsilon = const$, $\mu = const$). Пусть волна одномерна: ось x перпендикулярна волновым поверхностям. $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не зависят от координат y и z. Преобразуем соответствующим образом уравнения Максвелла, написанные в координатной форме:

$$0 = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu\mu_0 = 0 \tag{2}$$

$$0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 = 0 \tag{4}$$

Отсюда следует, что E_x и H_x не могут зависеть ни от x, ни от t, а значит, поля перпендикулярны распространению волны: электромагнитные волны поперечные (если нет постоянных полей E_x и H_x).

Два последних уравнения (1) и два последних уравнения (3) можно объединить в две независимые группы:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{5}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{6}$$

Для описания плоской электромагнитной волны достаточно взять одну из систем уравнений (5) или (6), положив компоненты, фигурирующие в другой системе, равными нулю.

Возьмем для описания волны уравнения (5), положив $E_z = H_y = 0$. Продифференцируем первое уравнение по x и произведем замену: $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial H_z}{\partial t}) = (\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial H_z}{\partial x})$, подставим $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ из второго уравнения и получим волновое уравнения для H_z:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{7}$$

Продифференцируя по x второе уравнение и проведя аналогичные преобразования, получим волновое уравнение для H_z:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \tag{8}$$

Простейшим решением этих уравнений являются функции:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \tag{9}$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \tag{10}$$

Подставим в уравнения (5) эти функции:

$$kE_m \sin(\omega t - kx + \varphi_1) = \mu\mu_0 \omega H_m \sin(\omega t - kx + \varphi_2) \tag{11}$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx + \varphi_2) = \varepsilon\varepsilon_0 \omega E_m \sin(\omega t - kx + \varphi_1) \tag{12}$$

Отсюда следует, что для удовлетворения волновых уравнений необходимо равенство фаз:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{13}$$

А также выполнение соотношений:

$$kE_m = \mu\mu_0 \omega H_m \tag{14}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \omega E_m = kH_m \tag{15}$$

Перемножив эти равенства, находим:

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2 \tag{16}$$

Таким образом, колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой $\varphi_1 = \varphi_2$, а амплитуды этих векторов связаны соотношением

$$E_m \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{17}$$

Можно записать решения волновых уравнений и в векторном виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx), \quad \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx) \tag{18}$$