Вычисление электрических полей по теореме Гаусса

Теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$ гласит: поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность равен заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью, деленому на ε_0:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

Если часть поверхности, поток через которую не равен нулю, является эквипотенциальной, модуль $\vec{E}$ можно вынести из-под знака интеграла. Воспользуемся этим для вычисления полей разных заряженных фигур.

Для бесконечной плоскости с поверхностной плотностью σ эквипотенциальными поверхностями являются плоскости, параллельные данной. В качестве замкнутой поверхности удобно взять прямой цилиндр, образующие которого перпендикулярны заряженной плоскости. Тогда:

$$E \oint d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

$$E = \frac{q}{2S\varepsilon_0} \tag{3}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{4}$$

Легко видеть, что в случае двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей напряженность поля между ними равна $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, а снаружи поле отсутствует.

Для заряженной сферы эквипотенциальными поверхностями являются сферы. Если радиус выбранной поверхности меньше радиуса заряженной сферы, то такая поверхность не охватывает зарядов, поэтому $E = 0$. Допустим, ее радиус r больше радиуса заряженной сферы R:

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \tag{6}$$

Таким образом, внутри сферы поле отсутствует, а снаружи соответствует полю точечного заряда, сконцентрированного в центре сферы.

Случай шара с объемной плотностью заряда ρ аналогичен предыдущему с той разницей, что сфера радиуса $r < R$ тоже охватывает заряды:

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \tag{7}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, \quad r \le R \tag{8}$$

ρ можно заменить на $\frac{3q}{4\pi R^3}$:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r, \quad r \le R \tag{9}$$

Снаружи шар создает поле, совпадающее с полем сферы того же заряда и радиуса:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad r > R \tag{10}$$