

Analysis and Quantitative Evaluation of Large Networks
Using Spectral Distributions
スペクトル分布を用いた大規模ネットワークの分析と定量的
評価について

by

Naoki Murakami
村上直輝

A Senior Thesis
卒業論文

Submitted to
the Department of Information Science
the Faculty of Science, the University of Tokyo
on January 29, 2021
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science

Thesis Supervisor: Hiroshi Imai 今井浩
Professor of Information Science

ABSTRACT

To analyze the properties and structure of a network, one of the very important tools is the spectrum, or eigenvalue distribution. However, since computing the full eigendecomposition is expensive, large networks have been analyzed by using only part of the spectrum. Recently, a method for calculating the entire eigenvalue distribution has been developed, but the analysis and application of the spectrum have not yet been deeply considered.

In this paper, we firstly discuss the quantitative evaluation of spectra and its applications. For quantitative evaluation and comparison of spectral densities, we suggest applying the concepts of divergence and metric of discrete probability distributions to spectral distributions. This allows an intuitive comparison based on the structure of networks. As an application, a fast search algorithm for similar spectra using cosine distance is also discussed. Secondly, we analyze the distribution of the overall spectrum of theoretical graphs and real-world networks. Then, we discuss the relation between the network properties and the spectrum. As a result, for sparse networks, there is a large correspondence between the local structure of the network, called a motif, and the distribution of eigenvalues. In addition, we find that a graph in which vertices connected to neighbors have a sharp spectrum found in complex networks. Furthermore, we illustrate that graphs with vertices connected randomly have the semicircular spectra found in Erdős-Rényi random graphs.

This study explains a quantitative evaluation and application of spectra and shows that the shape of the spectra can give us information about the network properties. This means that the spectral analysis is an effective tool for clarifying the network properties.

論文要旨

ネットワークの性質や構造を分析する上で、スペクトルは非常に重要な指標となり得る。しかし、大規模ネットワークについては、計算量の問題からスペクトルの一部を利用した分析しか行われていなかった。近年スペクトル全体を計算する手法が考案されたが、スペクトルの分析や応用などはまだ深く考えられていない。

本研究では、はじめにスペクトルの定量的評価とその応用方法について議論する。スペクトル分布の定量的な評価や比較のために、離散確率分布に対するダイバージェンスや距離の概念を流用することを提案する。これにより、ネットワークの構造に基づいた直感的な比較が可能になる。応用方法として cosine distance を用いた類似のスペクトルを高速に検索する手法についても言及する。次に、理論的に得られるグラフと実世界のネットワークのスペクトル全体の分布を分析し、ネットワークの性質とスペクトルの対応について考察する。結果として、平均次数が小さい疎なネットワークについては、モチーフと呼ばれるネットワークの局所的な構造と固有値の分布が大きく対応していることが分かった。また、近くの頂点同士が隣接するようなグラフは、複雑ネットワークに見られるような鋭いスペクトルを持つ。さらに、頂点同士の隣接にランダム性があるグラフは、Erdős-Rényi ランダムグラフに見られる半円状のスペクトルになることを例示する。

本研究はスペクトルの定量的評価や応用法について提案するとともに、スペクトルの形状からネットワークの性質についての情報が得られることを示した。これによりスペクトルの分析がネットワークの性質解明に有効な手段であることがわかる。