

京都大学大学院工学研究科

社会基盤工学専攻修士論文

令和 8 年 2 月

Master's Thesis

Department of Civil and Earth Resources Engineering

Graduate School of Engineering

Kyoto University

February 2026



Refraction-Aware Gaussian Splatting for Shallow Water Bathymetry from UAV Imagery

京都大学大学院 工学研究科 社会基盤工学専攻

空間情報学講座

宇野 大輝

論文要旨

ACRS か ISPRS の内容を翻訳しているだけ。最後にどこまでできたか踏まえて書く。内容も増えるはず。

水中の3次元地形の計測は水深測量(Bathymetry)と呼ばれている。

浅水域においても、河床・海底の水深測量は、地形変動のモニタリング、ハザードシミュレーション、および水生生物の生息環境評価において極めて重要である。近年、無人航空機(Unmanned Aerial Vehicle: UAV)を用いた写真測量(Photogrammetry)は、広範囲を効率的に調査する手法として注目されている。しかし、空中から水底を撮影する際、水面で発生する光の屈折が、従来の写真測量における幾何学的仮定(共線性条件)を根本的に破綻させるという課題がある。既存の手法は、屈折を完全に正確に物理的正確性を持ってモデル化しない経験的な補正や反復的な後処理に依存するか、あるいは説明可能性を欠くブラックボックス的な深層学習モデルを用いるものが多く、形状の幾何学的忠実性と外観の写実性を両立させることは困難であった。

本論文では、この課題を解決するために、物理的に忠実な二媒質屈折モデルを再構成パイプラインに直接組み込んだ“Refraction-aware 3D Gaussian Splatting”を提案する。本手法の核心的な貢献は、水中の真の位置にある 3D Gaussian を、航空画像上の見かけの位置へと解析的にマッピングする微分可能なパラメータ変換の導入にある。これにより、標準的な 3D Gaussian Splatting の柔軟なフレームワークを維持しつつ、屈折あり画像からの密な 3 次元形状と詳細なテクスチャ情報の復元を実現した。

評価実験では、屈折以外の光学的要因を排除し厳密な検証を行うため、物理ベースのレイトレーシングにより生成された河床のシミュレーションデータセットを用いた。その結果、水深 10 m のスケールにおいて許容誤差 10 cm とした場合の幾何学的 F1 スコアは 96% を達成した。さらに、新規視点合成(Novel View Synthesis)においては、PSNR 25.9 dB、SSIM 0.93 という詳細な屈折なし画像の推定を達成した。提案手法により、平坦な水面条件下において、河川、湖沼、沿岸域の低コストかつ高頻度な 3D モニタリングが可能となり、水域リモートセンシング分野に新たな方法論的基盤を提供する。

目次

第1章 研究概要	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究課題	2
1.3 研究の目的と貢献	3
1.4 論文構成	4
第2章 研究背景と関連研究	5
2.1 浅水域における水深測量の重要性	6
2.2 既存の水深測量手法とその課題	8
2.2.1 音響測深 (Echo sounding)	8
2.2.2 航空レーザ測深 (Airborne LiDAR Bathymetry)	10
2.2.3 Spectrally Derived Bathymetry	11
2.2.4 空中写真測量 (Photogrammetric Bathymetry)	11
2.3 関連研究	12
第3章 背景理論	14
3.1 画像に基づく3次元復元 (3D Reconstruction from Images)	14
3.1.1 Structure from Motion	14
3.1.2 Multi-View Stereo	15
3.1.3 PatchMatch Stereo	18
3.1.4 Feed Forward 3D Reconstruction	20
3.2 Inverse Rendering as 3D Reconstruction	21
3.2.1 Analysis-by-Synthesis and Novel View Synthesis	22
3.3 Gaussian Splatting	25
3.3.1 2D Gaussian Splatting	30
3.4 届折を扱った関連手法	32
第4章 提案手法	33
4.1 Position Correction (位置の補正)	33

参考文献 36

TODO

■ ACRS か ISPRS の内容を翻訳しているだけ。最後にどこまでできたか踏まえて書く。内容も増えるはず。	2
■ 全体的に説明が簡潔すぎて、ボリューム感が足りない。エコトーンなど、研究の立ち位置を追加。GS に関しても増強。Intro と Prelim をきれいに書いて、方法までやってから書くべし。	1
■ 「」や () の全角、半角の不統一は後でまとめて置換する	1
■ 浅水域が存在量的にも重要だというふうにも見えるのですが、なぜこれまで測量が進んでこなかったのかをうまく説明できる流れにするのは難しそうなので、どちらかというと端っこでこれまで見逃されてきた、後回しにされてきたけれど、実は水と陸のエコトーンの部分にあたって生態的にも人の資源や観光利用において重要な場所であるというふうなことは書いていけないでしょうか。浅水域の定義みたいなものがあればいいと思いました。深さの範囲とか、川岸、湿地、砂浜、干潟などがそういう場所にあたると思います。浅水域の重要性をイメージできる画像もあれば。	1
■ エコトーンの文脈でより詳細に。まず、20intro の研究の意義でしっかり書いてから要約的にまとめる	1
■ ここは、20intro の関連研究で詳細に説明	1
■ こないで Ipad で読んだ、PB レンダリングの記事で分かりやすくまとめられていた。図を引用しても良いと思う。ちなみに https://imadr.me/pbr/ ちなみに Geometrical Optics に屈折は含まれるためこの表現は適切ではない	2
■ Yudha さんなどの手法が回帰	2
■ Survey 論文でも引用しとく	2
■ GS の簡潔な説明。Explicit で高速。編集可能性や解釈可能背が高い。詳細は 42prelimGS で詳細に説明。ラスタライズで屈折を表現するのは難しいが、うまくやったぞ。	3
■ これまでどんな問題に導入されてきたか、浅水域の写真測量の気体-液体屈折においてなぜ有効だと思われるか、イントロの中でも簡単に説明ができればいいと思いました。見る角度によって変化するものに対応とか、点を確率的なものに考えることで 0-1 の離散的ではなくより連続的な値が求められる?など。それが、結果としてはどうだったか、最後に考察で議論もしてもらいたいところです。	3
■ 日本語版の図を作成	3
■ + Field Work と実環境での検証、としてわけても良い	4

■ 浅水域を具体的に定義する文章を挿入。水底が視認可能な水域で、現実的には透明度が高く水面が穏やかな水域。具体的には、淡水では 2m、海水では 5m 程度が現実的。	5
■ White Ribbon を強調して示せるように、他の図を半透明に、White Ribbon を囲み強調する	5
■ 陸域は説得力がない。もっとストレートな研究を探す。エコトーンというワードだと出てこないかも。Geomorphology とかで調べる	8
■ 植生 = フォトリアルな見た目から判別というニュアンスを含め GS の NVS タスクの有用性を後に説明したい	8
■ Notion に ALB の資料をまとめたことあり	10
■ 何 m くらいまで測れるか。	10
Figure: Passive Remote Sensing と Active Remote Sensing の図。	10
Figure: 各手法の Pros & Cons を Table にする。手法、測定可能深度、空間解像度、浅水域での効率、コスト、頻度、安全性、備考	10
■ SDB に関して特化した Survey 論文があったように思える	11
■ Lyzenga 法や Stumpf 法などの引用	11
Figure: 図で屈折が既存の光の直進性や Pinhole モデルを成立させなくことを示す	12
■ いろいろな Photogrammetric Bathymetry 手法を達観。表で表すと見やすいか。。。	12
■ COLMAP では、Pixel wise なんちゃらで、MVS の新規研究も実装されている	14
Figure: MVS が SfM に続くパイプラインで構成されていることを示す図。フィックスターズの表す図を参考に	15
■ cite では、現在の設定では名前が表示されずただ、[8] のように番号のみになるため、別の方法や引用のフォーマットの設定を考える	16
■ Photometric Discrepancy を日本語で説明すると、	17
■ 元論文をよりしっかり読み込む。正しいか?	18
Figure: イシグロが良く示している収束を示す図を追加	19
■ Pixel wise View Selection が、この手法をいかに MVS へ拡張したか説明する。	19
■ このとき、画像間でのパッチ選択は非効率!?!?	19
■ 一方、Geometric Optics による光の直進性を仮定するが、これは屈折のある Scene では成立しない。(Reflection も一般的に苦手)	20
■ https://gemini.google.com/app/d37c008e08350238	20
■ DINO などの深層学習ベースの特徴抽出を解説。自分の提案手法の前処理にも、水面マスクに Dino を使用する	20
■ MASt3R ってそんな手法だっけ?	20
■ 根拠薄し	21
Figure: Optimization-based 手法と Feed-Forward 手法の処理フロー比較図 : Iterative なループを持つ前者と、Single Pass で完結する後者の対比。また、透明物体に対する挙動の違い（透過してしまうか、屈折を考慮するか）の概念図。	21

Figure: Rendering と Inverse Rendering を表す図	21
■ いらないと思う	22
Figure: NeRF と 3DGS の図。レイトレーシングとラスタライズの違いを表すイメージ。Survey 論文に合った。	23
Figure: NeRF の MLP の構造も図で載せたい。引用できる	23
Figure: NeRF と 3DGS の分類図。レンダリング速度と、データサイズの 2D プロット。Barron さんのレクチャー動画から。学習速度も入れれば、2 次元に収まらない。。2 個いるかな? できれば、MVS とともに含めて示せればいい。それだったら表が美しい	25
■ 自動運転	26
■ MCMC の説明も。?。これらのヒューリスティックスはデータセットや初期値に対して依存するため、それを克服するような MCMC といった手法も考案されている。	28
■ ローパスフィルタまでは説明しなくても良い。(3DGS でも説明していないから)。MipSplatting 説明しないといけない	31
Figure: 依然、木津川で再構成した際のアーティストを示す	31
■ メッシュの抽出には TSDF Fusion を用いている。	32
■ 今までの説明から、なぜ屈折を考慮した見た目(Photometric)を再現することで、屈折の影響を除去した正当な 3 次元形状を復元することが可能となるか。Analysis-by-Synthesis の観点から説明する。	33
■ どちらを入射角、屈折角と呼ぶか悩ましい。Ray — Tracing 的に視線をベースに考えると空気中が入射角だし、実際の Radiance を考えると水中が入射角である	34
■ ACRS で誤っていた数式を修正済	34
■ Implementation は後述だが、収束の速さから Newton を使用	35
■ 詳細な導出は Appendix で。ACRS で記述しているのでそれを翻訳	35
■ 実装は後述だが、中心差分法でなく、陰関数定理を用いた。そのため、水面高さや屈折率に対しても勾配を流し、屈折率やカメラ位置も最適化対象にすることができる	35

第1章 研究概要

全体的に説明が簡潔すぎて、ボリューム感が足りない。エコトーンなど、研究の立ち位置を追加。GSに関しても増強。IntroとPrelimをきれいに書いて、方法までやってから書くべし。

「」や「」の全角、半角の不統一は後でまとめて置換する

1.1 研究背景

浅水域が存在量的にも重要だというふうにも見えるのですが、なぜこれまで測量が進んでこなかったのかをうまく説明できる流れにするのは難しそうなので、どちらかというと端っこでこれまで見逃されてきた、後回しにされてきたけれど、実は水と陸のエコトーンの部分にあたって生態的にも人の資源や観光利用において重要な場所であるというふうなことは書いていけないでしょうか。浅水域の定義みたいなものがあればいいと思いました。深さの範囲とか、川岸、湿地、砂浜、干潟などがそういう場所にあたると思います。浅水域の重要性をイメージできる画像もあれば。

エコトーンの文脈でより詳細に。まず、20introの研究の意義でしっかりと書いてから要約的にまとめる

地球表面の大部分を覆う水域、特に沿岸部や河川などの浅水域(Shallow Water)は、人間社会の経済活動、防災、生態系保全において極めて重要な役割を果たしている。河川管理における氾濫原の地形変状把握[1]、沿岸域管理[2]、生態系の生息環境評価[3]など、水底の詳細な地形データを観測する水深測量(Bathymetry)は非常に重要である。しかしながら、これらの領域は従来の測量技術では取得が困難な空白地帯となりがちであった。

ここは、20introの関連研究で詳細に説明

伝統的な船舶搭載型マルチビームソナー(深浅測量・音響測深)は、一定の深度がある海域においては標準的な手法であるが、水深が極めて浅い河川や海岸線付近においては、船舶の座礁リスクなどの航行不可領域の存在により、その運用は著しく制限される。近年では、小型の無人水上艇(Unmanned Surface Vehicle: USV)を用いた水深測量が注目されているが[4-5]、マルチビームの指向角の制限により、浅水域においては走査幅(Swath Width)が狭く、面的な測量を行うには時間的コストが高くなるという、非効率性の問題も生じる。一方で、航空機搭載レーザ測深(ALB: Airborne LiDAR Bathymetry)は[6]、広域かつ高精度な計測が可能であるが、導入および運用コストが極めて高く、高頻度なモニタリングには不向きであるという経済的な障壁が存在する。

こうした背景の中、近年急速に普及したドローンなどの無人航空機(UAV: Unmanned Aerial Vehicle)を用いた写真測量(Photogrammetry)は、低コストかつ高解像度、高頻度なデータ取得が可能であることから、次世代の浅瀬測量技術として大きな期待を集めている。UAVにより空撮された多視点画像から、Structure-from-Motion(SfM)[7]、およびMulti-View Stereo(MVS)[8-9]を用いて3次元形状を復元す

るアプローチは、陸部においては既に広い用途で実用化されている [10–12]。これらの技術を水中に適用する場合、その手法は空中からの水深写真測量 (Photogrammetric Bathymetry) と呼ばれ、空中から撮像した多視点画像からの水中の三次元再構成問題と捉えることができる。水深写真測量には、光の反射や、水中での光の散乱・吸収による減衰、波による被写体の歪みなどの課題が存在するが、中でも最も根本的で重要な課題として取り組まれてきたのが光の屈折 (Refraction) である。

1.2 研究課題

既存の SfM・MVS アルゴリズムの大部分は、幾何光学 (Geometrical Optics) を前提としている。

こないで Ipad で読んだ、PB レンダリングの記事で分かりやすくまとめられていた。図を引用しても良いと思う。ちなみに <https://imadr.me/pbr/> ちなみに Geometrical Optics に屈折は含まれるためこの表現は適切ではない

すなわち、撮像 (Image Sensing) のプロセスにおいて、観測対象となる被写体から発せられる光は、被写体からカメラ中心まで直進することを仮定する。しかし、UAV による水中撮影においては、光は水中から空気中へ進む際に、水面と異なる媒質の境界でスネルの法則 (Snell's Law) に従って屈折する。この物理現象によって、カメラから見た被写体の「見かけの位置」(Apparent Appearance) は、実際の位置よりも浅く、近く、歪ませる。屈折の影響を無視し、既存の SfM・MVS アルゴリズムを適用する場合、水深が実際よりも浅く評価される。これに対処するために、従来は SfM・MVS の出力結果に屈折率に基づく補正を適用する手法 [13,14] や、点群とカメラフレームの位置関係から推定する手法 [15,16]、手動で計測した数カ所の真値をもとに出力結果の補正率を回帰で決定する手法

Yudha さんなどの手法が回帰

が提案してきた。こうした手法は、屈折の影響を補正する一方で、屈折の物理的特性を完全にモデル化しているわけではなく、視線角度依存性や多視点間の整合性を厳密に扱えないため、幾何学的精度には限界があった。直近では、[17] が、屈折の物理的特性を直接 SfM の最適化に組み込むことで、より高精度な再構成を実現する手法を提案している。しかし、この手法では、疎な出力結果を補うために、USV など高いコストを要する計測機器を用いた測量結果を用いた深層学習手法で補間する [18] 必要があり、学習データ不足とフィールド依存性という問題がある。

さらに、近年のコンピュータビジョン (Computer Vision)・コンピュータグラフィックス (Computer Graphics) の領域では、Neural Radiance Fields (NeRF) [19] や 3D Gaussian Splatting (3DGS) [20] といった、微分可能なレンダリング (Differentiable Rendering) を用いた新たな 3 次元表現・再構成手法が登場している。これらは任意視点における写真のようなリアルな新規視点合成 (Novel View Synthesis:NVS)において卓越した性能を示し、照明依存性、時間軸方向へ拡張、幾何情報の抽出といった多種多様な課題を克服するよう、日進月歩の進化を遂げている

Survey 論文でも引用しつく

。特に、NeRF のような陰的三次元表現 (Implicit Representation) は計算コストが高く、幾何的な走査や解釈が容易ではない一方、3DGS は明示的な三次元 Gaussian 点群表現 (Explicit Representation)を持ち、高速かつ直接的な形状操作が可能であるという利点を持つが、空気中から観測する水中屈折を

考慮した定式化は未だ十分になされていない。

1.3 研究の目的と貢献

GS の簡潔な説明。Explicit で高速。編集可能性や解釈可能度が高いため、詳細は 42prelimGS で詳細に説明。ラスタライズで屈折を表現するのは難しいが、うまくやったぞ。

これまでどんな問題に導入してきたか、浅水域の写真測量の気体-液体屈折においてなぜ有効だと思われるか、イントロの中でも簡単に説明ができればいいと思いました。見る角度によって変化するものに対応とか、点を確率的なものに考えることで 0-1 の離散的ではなくより連続的な値が求められるなど。それが、結果としてはどうだったか、最後に考察で議論もしてもらいたいところです。

以上の背景から、本修士論文では、UAV 空撮画像からの水中 3 次元復元において、物理的な屈折モデルを Gaussian Splatting(GS) のパイプラインに直接統合することで、幾何学的正確性と写実的な外観再現を両立させる新たな枠組み (Refractive-Aware Gaussian Splatting) を提案・実証する。本手法の核心的な貢献は、水中の真の位置にある 3D Gaussian を、UAV 空撮画像中の見かけの位置へと解析的にマッピングするパラメータ変換にある。この変換は、微分可能であるたり、GS の最適化過程に直接組み込むことで、屈折を含む入力画像から直接、屈折のない三次元シーン (3D Scene) を推定し、屈折の影響を排した密な 3 次元形状と詳細なテクスチャ情報の復元を実現する。

日本語版の図を作成

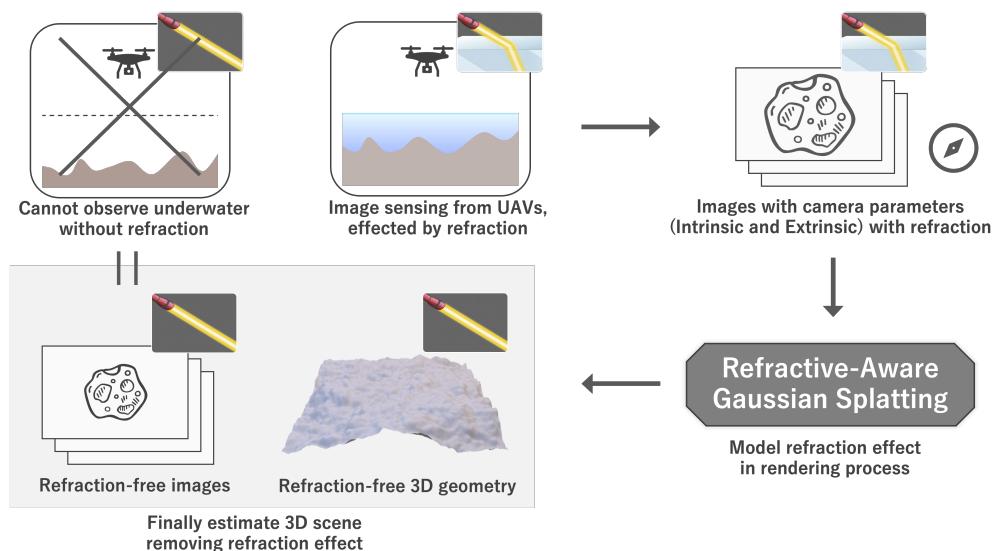


図 1-1: 空気中からの水深写真測量のタスクの概要。空中から水底を撮像したパラメータ既知の多視点画像を入力として、Refractive-Aware Gaussian Splatting を用いることで、屈折の影響を排除した水中の三次元シーンを再構成する。

検証においては、PBR レンダリング (Physically-Based Rendering:PBR) によってシミュレートされた合成データと実データの双方を用いて検証を行った。合成データでは、不観測地点からの再構成 3D モデルの視覚的品質を指す Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) が 25 dB を超え、提案手法から抽出した幾何情報では真値との幾何的復元精度を表す F1 スコア (F1-score) で 94% を超える結果を確認した。(合成データは深度 10 m、撮影高度 10 m のスケールである。完全に平面の水面とカメラパラメータ既知を仮

定し、屈折の影響のみを考慮し、反射や減衰、波など屈折以外の物理的影響は除外している。F1スコアは許容誤差 10 cm とした。) 実データにおいても、幾何的誤差 を確認するなど、実用的な空中からの水深写真測量としての方法を確認した。

1.4 論文構成

本論文は導入部である第 1 章を含め、全 6 章で構成される。第 2 章では、水深測量の概要と諸手法といった関連研究に関して述べる。第 3 章では、本研究の基盤となる Gaussian Splatting やコンピュータビジョンの諸手法の学術的背景と理論に関して記述する。第 4 章では、提案手法である Refractive-Aware Gaussian Splatting の詳細な理論と実装に関して記述する。第 5 章では、検証において用いた合成データと実データの双方を用いて、提案手法の性能を定性・定量的に検証する。

+ Field Work と実環境での検証、としてわけても良い

第 6 章では、研究の課題 (Limitation) と今後の課題 (Future Work) に関して述べ、研究の総括を行う。

第2章 研究背景と関連研究

浅水域を具体的に定義する文章を挿入。水底が視認可能な水域で、現実的には透明度が高く水面が穏やかな水域。具体的には、淡水では 2m、海水では 5m 程度が現実的。

地球表面のおよそ 7 割は、海や河川といった水域によって占められる。近年、日本財団 [21] と GEBCO(General Bathymetric Chart of the Oceans)[22] による国際プロジェクト「Seabed 2030」[23] の推進によって、深海域における海底地形図の整備は急速に進展している [24]。対照的に、陸域と水域の境界である「浅水域 (Shallow Water)」は、既存の測量技術では効率的な計測が難しく、水路測量分野において ‘White Ribbon’ と呼ばれるデータの空白地帯となっている。これは、海図や河川図において、陸域の地形データと深部の水深データとの間に挟まれ、有効な測量データが存在しないために白く描かれ、帯状をなすことに由来する。

一方、浅水域は、人間社会の経済活動、防災、そして生態系保全において決定的な役割を果たす領域である。本章では、浅水域における三次元計測の重要性を、河川管理および生態学 (エコトーン) の観点から概説し、現状の課題を整理する。

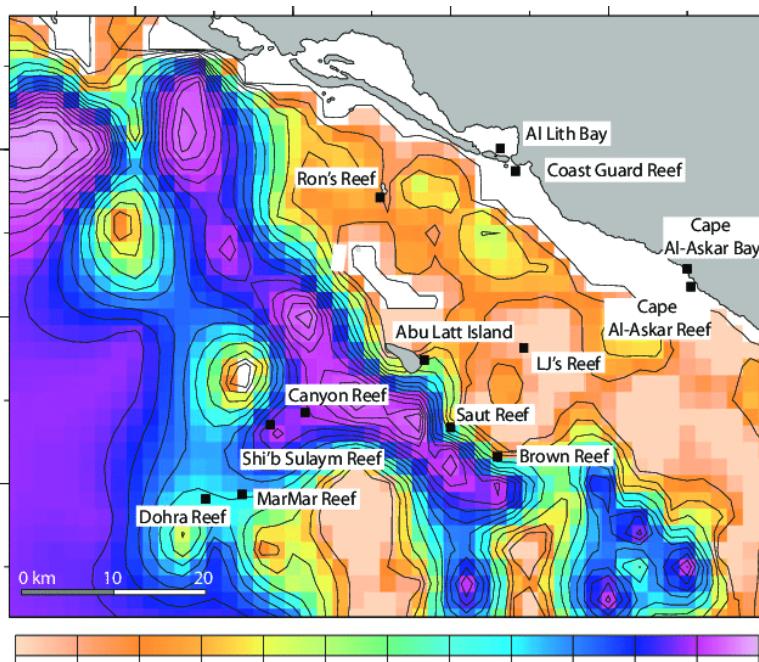


図 2-1: White Ribbon の実例。[25] より引用。[22] の提供する Gridded Bathymetry Data による海洋沿岸の水深測量図。白い領域は浅水域のため測量不能。

White Ribbon を強調して示せるように、他の図を半透明に、White Ribbon を囲み強調する

2.1 浅水域における水深測量の重要性

定期横断測量

河川および沿岸域の浅瀬は、洪水の流下能力を決定する重要な断面であり、津波や高潮に対する第一の防衛線として機能する。特に日本においては、河川法に基づき、一級河川を対象とした定期的な横断測量が義務付けられている [26]。

しかし、現行の定期横断測量には、空間分解能と安全性において重大な課題が存在する。標準的な測量間隔は 200 メートルピッチとされており、断面間の局所的な地形情報は欠落する。また、従来の水部計測は、有人船による音響測深や、測量員が直接川に入りポールで計測する手法に依存している。これらは、急流河川における事故のリスクの危険を伴うだけでなく、測線維持のための慎重な操船や作業を要するため、広範囲のデータ取得において著しく時間的効率を欠いている。したがって、河川マネジメント上重要であるにも関わらず、浅水域の詳細な地形情報は依然として空間解像度を欠く。



図 2-2: 一級河川縦横断測量の実例。[27] より引用。測量員によるポールによる計測には多大な労力と時間がかかる一方、疎な三次元情報しか得られない。

河川地形の時系列変化モニタリング

河川工学の観点からは、浅水域計測には「高解像度」に加え、「高頻度」なモニタリングが求められる。急峻な地形を有し、台風等による豪雨が頻発する日本の河川では、土砂移動が活発であり、出水のたびに局所地形が大きく変化する。そのため、5 年に 1 度といった従来の定期測量サイクルでは、洗掘や堆積といった動的な地形変化を捉えることができない。

この課題は、伝統的河川工法である「聖牛」などの機能評価において顕著に現れる。聖牛は丸太を組み上げた構造物であり(図 2-3)、河川砂州部に設置することで流速制御や砂州などの生息地形成を図る。「Nature-Based Solutions (NbS)」として近年再評価されている技術である。[1] は、京都府木津川における 6 年間にわたるモニタリングを通じ、聖牛設置地域一帯を観測し、聖牛の設置によって地形が大きく

変化することを明らかにした(図 2-4)。同研究が示すように、砂州が単調な地形から水路や池が点在する複雑な地形へと遷移する過程を定量的に評価するためには、陸域と水域をシームレスに、かつ高解像度で捉える三次元計測技術が必要不可欠である。

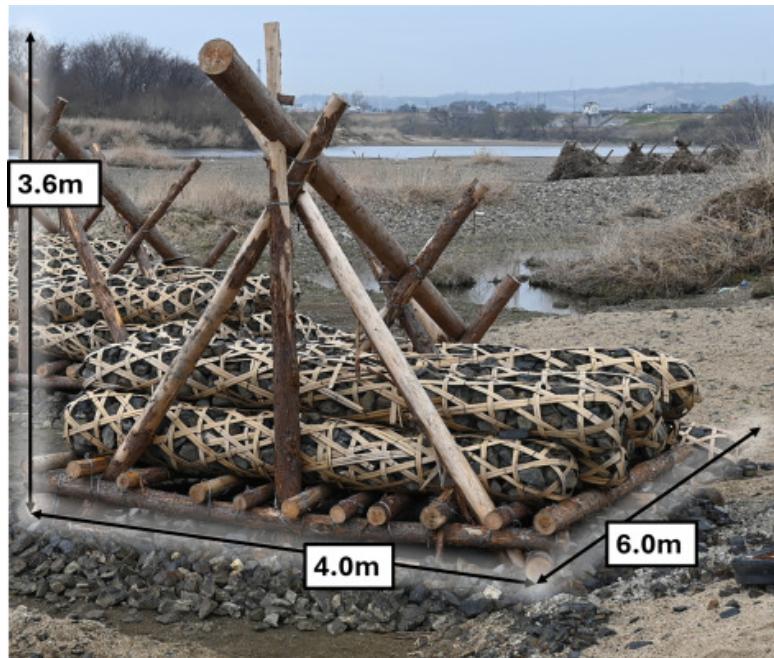


図 2-3: 聖牛の写真。[1] より引用。

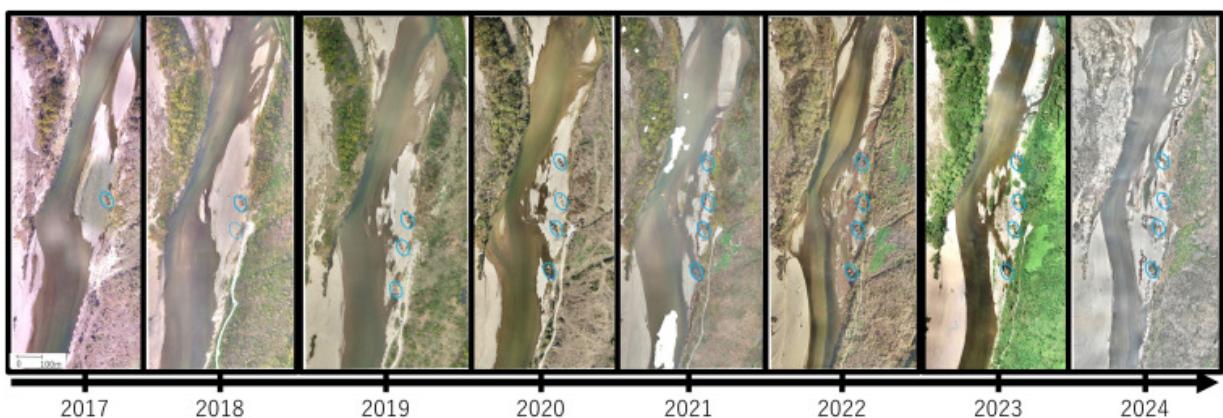


図 2-4: [1] より引用。聖牛による河川地形の時系列変化。

エコトーン

浅水域の重要性は、防災のみならず生態系保全の観点からも極めて高い。20世紀初頭に提唱された「エコトーン(Ecotone)」は、二つの異なる生態系が接し移行する境界領域を指し[28]、浅水域においては陸域から水域へと移行する水際線がこれに相当する。この領域は、陸と水双方の環境要因が作用することで、高い生物多様性を有する「エッジ効果(Edge Effect)」が発現する場として知られる[<empty citation>]。

エコトーンの形状と生態学的プロセスの関係については、多くの研究がなされている。例えば、[29]は乾燥地帯の植生分布が旧河道などの微地形に依存することを示し、[30]は珊瑚礁の三次元構造が生物

侵食速度や多様性に与える影響を報告している。

陸域は説得力がない。もっとストレートな研究を探す。エコトーンというワードだと出てこないかも。Geomorphology とかで調べる

これらの研究は、エコトーンの環境保全において、詳細な三次元地形情報が不可欠であることを示唆している。

浅水域エコトーンにおける生態系の豊かさは、太陽光の到達に由来する。水生植物や藻類の基礎生産が行われる水深帯は「有光層(Photic Zone)」と呼ばれ、水底まで十分な光が届くことが生物生息の条件となる。一方、写真測量は受動的光学手法(Passive Optical Method)であり、原理的に水底からの反射光を必要とするため、濁度や水深による制約を受ける手法である。従って、「生物多様性が高く計測ニーズのある浅水域」は、必然的に「光が水底まで達する写真測量が可能な場所」であると言える。深すぎて光が届かない領域は、従来の音響測深が有効な領域であるが、浅水域エコトーンにおいては、光学的計測は合理的なアプローチとなる。

また、エコトーンの理解には水域だけでなく連続する陸域の植生と地形の把握も同時に求められるため、水中のみを計測する USV 等による音響測深は適さない。

植生 = フォトリアルな見た目から判別というニュアンスを含め GS の NVS タスクの有用性を後に説明したい

以上の点から、陸域と浅水域を同時に、かつ高密度に計測可能な空中写真測量は、エコトーンの地形計測(Geomorphology)において最適な手法であると位置付けられる。



(a)



(b)

図 2-5: エコトーンの例: 浅水域一帯では、陸域と水域の地形中に多様な植生が見られる。

2.2 既存の水深測量手法とその課題

本節では、既存の水深測量技術を概観し、浅水域(Shallow Water)の三次元計測において生じる技術的課題を整理する。

2.2.1 音響測深(Echo sounding)

現在、水深測量(Bathymetry)の標準となっているのは、船舶に搭載したマルチビーム音響測深機(Multibeam Echosounder: MBES)である。MBES は船底から扇状(Fan-shape)に音波を発射し、走査線上の多数の計測点の水深を同時に取得することで、面的な地形図を作成する。深海域においては、一度の航行で数キロメートル幅の海底をスキャンできるため、Seabed 2030 のような全地球的海洋マッピング

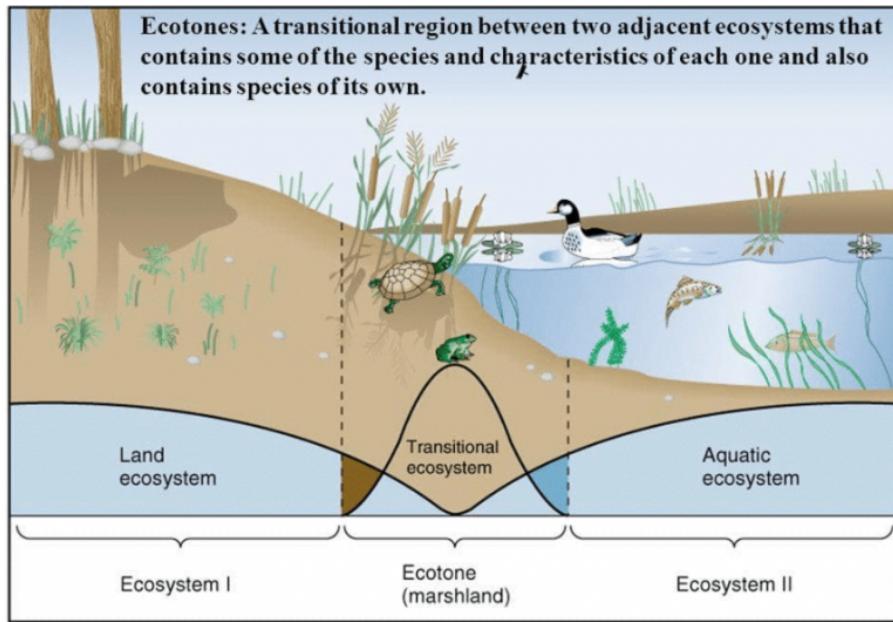


図 2-6: エコトーンの模式図。[31] より引用。陸域と水域の境界にあたる浅水域は、双方の生態系が重なり合う重要な領域である。

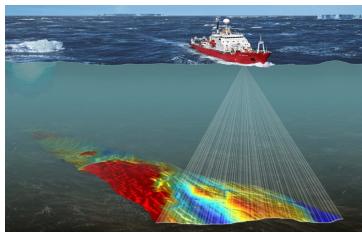
グプロジェクトの中核技術となっている。

しかし、浅水域において MBES の計測効率は劇的に低下する。MBES の走査幅 (Swath Width: SW) は、幾何学的に水深 D と指向角 θ (一般に $120^\circ \sim 150^\circ$) に依存して決定されるためである。第 2.2.1 小節が示すように、走査幅は水深に比例する:

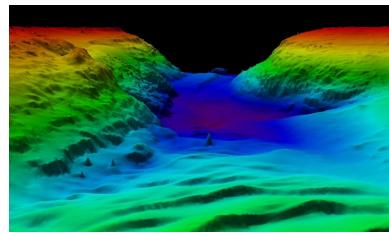
$$SW = 2D \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

水深 1000 m であれば 3000 m 以上の幅を一度に計測可能であるが、日本の河川のような水深 1 m ~ 2 m の環境では、走査幅はわずか 3 m ~ 8 m 程度に留まる。したがって、対象水域を網羅するためには、探査船は数十回もの往復(測線)を繰り返す必要があり、時間的・金銭的コストの増大を招く。また、送受波器の直下数十センチメートルは、音波の振動の余韻(リングング)といった制約により、計測が不可能となる(Teledyne Marine 社製: SeaBat T20-P では?? 深度 50 センチメートル以浅は、計測が不可能である)。

加えて、物理的な制約も存在する。有人調査船は、座礁のリスクがあるため船体の喫水より浅い場所には侵入できない。この課題に対し、近年では小型の無人水上艇 (Unmanned Surface Vehicle: USV) を用いた測量も研究されている [4:5]。USV は浅水域へのアクセスを可能にするが、流水環境下での姿勢制御や自己位置推定の難易度が高く、また走査幅の物理的制約(第 2.2.1 小節)は浅水域ではより一層深刻になるため、広範囲を高頻度で計測するには依然としてコストが高い。さらに、音響測深は水域のみに限定されるため、陸域から水域へ連続する地形を単独で計測することは不可能であり、UAV 写真測量等とのデータ統合が別途必要となる。



(a) マルチビームソナーの概念図



(b) マルチビームソナーによる水深測量図



(c) 無人水上艇 (USV) による水深測量例

図 2-7: マルチビームソナーによる水深測量。[4] より引用。

2.2.2 航空レーザ測深 (Airborne LiDAR Bathymetry)

航空レーザ測深 (Airborne LiDAR Bathymetry: ALB) は、航空機から水を透過する緑色レーザ (波長 532 nm 付近) を照射し、水面反射と水底反射の時間差から水深を求める技術である [6]。自らエネルギーを照射して観測を行うため、能動的リモートセンシング (Active Remote Sensing) に分類される。日本国内においても、国土交通省により一級河川の定期横断測量への導入が進められており [32]、陸域と水域をシームレスに、かつ高密度に計測できる点が大きな利点である。

Notion に ALB の資料をまとめたことあり

何 m くらいまで測れるか。

しかし、ALB には本研究が対象とする「浅水域の高頻度モニタリング」において、以下の決定的な欠点が存在する。

- **導入・運用コスト:** 有人航空機や大型ドローンに搭載する高出力 LiDAR は極めて高価 (数千万円規模) であり、運用コストも高い。国家規模で行う 5 年に 1 度の定期測量には適しているが、出水のたびに地形変化を追跡するような機動的な運用は経済的に難しい。
- **水質の影響:** 光学的計測である以上、濁度が高い水域ではレーザが散乱・減衰し、水底まで到達しない範囲では適用不可である。[32] によると、2 ~ 3 m 程度まで計測可能である。

Missing figure

Passive Remote Sensing と Active Remote Sensing の図。

Missing figure

各手法の Pros & Cons を Table にする。手法、測定可能深度、空間解像度、浅水域での効率、コスト、頻度、安全性、備考

2.2.3 Spectrally Derived Bathymetry

分光水深測量 (Spectrally Derived Bathymetry: SDB) は、Landsat や Sentinel-2 などのマルチスペクトル衛星画像の分光特性を利用し、放射伝達モデルに基づいて水深を推定する手法である [33]。

SDB に関して特化した Survey 論文があったように思える

本手法は受動的リモートセンシング (Passive Remote Sensing) に分類され、広域かつ低コストに水深情報を取得できる利点がある一方で、その推定原理に起因する理論的・実用的な制約が存在する。

SDB の基本原理は、水中における光の指数関数的な減衰に基づく。可視光領域において、水深が深いほど水底からの反射光は水柱による吸収・散乱を受けて減衰する。SDB はこの物理現象を利用し、主に青緑バンド (水中透過率が高い) と赤～近赤外バンド (水中減衰が大きい) の輝度比や、各バンドの反射率の対数線形モデル (Lyzenga 法や Stumpf 法など) を用いて水深を回帰的に推定する。

Lyzenga 法や Stumpf 法などの引用

SDB は海洋沿岸部等の広域な浅海域では有効な手法である一方、中小河川環境への適用においては、幾何学的アプローチである写真測量と比較して以下の本質的な限界を有する。

- **放射量依存性と水質・底質の不均一性:** SDB は幾何学的な三次元復元ではなく、観測された放射輝度 (Radiance) に基づく放射量的な推定 (Radiometric estimation) である。そのため、推定精度は水域に固有の光学的特性 (濁度やクロロフィル a 濃度) や、水底の底質 (砂、礫、植生) によるアルベドの空間的不均一性に強く依存する。
- **経験的モデルと現地データの必要性:** 一般的なバンド比法などの経験的モデルでは、輝度値を水深値へ変換するために現地での実測水深データを用いたキャリブレーション (回帰モデルの補正) が不可欠である。これは「計測なしで水深を得る」というリモートセンシングの利点を部分的に損なうものである。
- **空間解像度とミクセル問題:** Sentinel-2(10 m) や Landsat(30 m) などのオープンデータである衛星画像は、中小河川における三次元情報のニーズに対して解像度が不足する。1 ピクセル内に水域、陸域、河畔林が混在する「ミクセル (Mixed Pixel)」問題が発生し、水深推定を阻害する。

2.2.4 空中写真測量 (Photogrammetric Bathymetry)

以上の既存手法の課題を踏まえ、近年急速に普及したドローンなどの無人航空機 (Unmanned Aerial Vehicle: UAV) 用いた写真測量 (Photogrammetry) は、低コスト・高解像度・高頻度なデータ取得が可能であることから、浅瀬測量技術においても有効であると考えられる。UAV により空撮された多視点画像から、Structure-from-Motion (SfM) [7] および Multi-View Stereo (MVS) [8,9] を用いて 3 次元形状を復元するアプローチは、陸部においては既に広い用途で実用化されている [10–12]。この技術を水中に適用する場合、その手法は「空中からの水深写真測量 (Photogrammetric Bathymetry)」と呼ばれ、多視点画像からの水中三次元再構成問題として定式化される。しかし、これを実現するためには、光の反射

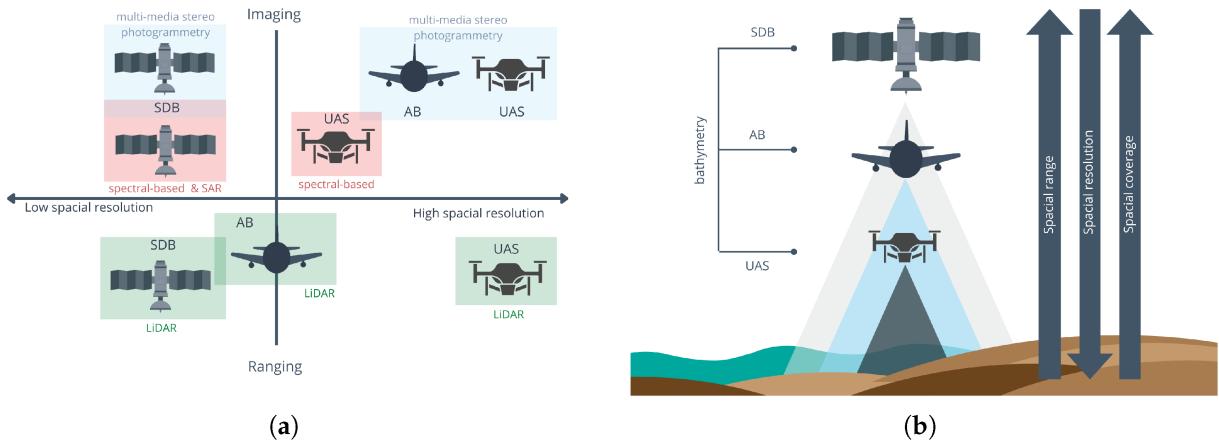


図 2-8: リモートセンシングによる水深測量技術の分類。[34] より引用。(a) 能動的・受動的手法の分類。(b) 各手法の空間分解能とカバレッジの関係。

や、水中での光の散乱・吸収による減衰、波による被写体の歪みなどの課題が存在するが、中でも最も根本的に重要な課題として、水面における「光の屈折 (Refraction)」を克服しなければならない。

Missing figure

図で屈折が既存の光の直進性や Pinhole モデルを成立させなくことを示す

既存の SfM/MVS アルゴリズムの大部分は、カメラと被写体が同一媒質（空気中）にあることを前提とし、光が直進するという幾何的な仮定に基づいている。しかし、上空からの水中撮影においては、光は水中から空気中へ進む際に、媒質境界（水面）でスネルの法則 (Snell's Law) に従って屈折する。この屈折現象により、カメラから観測される被写体の「見かけの位置 (Apparent Position)」は、実際の位置よりも浅く、かつ歪んで観測される。したがって、従来の陸上用アルゴリズムをそのまま適用すると、水深が過小評価され、復元形状が破綻する。本研究では、この屈折を物理的正確に考慮した (Refraction-aware) 新たな三次元再構成手法を導入することで、水面下の高精度な計測を実現する。

2.3 関連研究

いろいろな Photogrammetric Bathymetry 手法を達観。表で表すと見やすいか。。。

<https://www.notion.so/Photogrammetric-Bathymetry-2e002f0efa178010b4f3f365fdea4f29>
[34] からの引用。

表 2-1: Comparison of Refraction Correction Approaches for Bathymetric Remote Sensing

Reference	Methodological Workflow	Limitations & Performance
Woodget et al. [14]	Simple Refraction Correction (Nadir) <ul style="list-style-type: none"> Creates a Water Surface Model (WSM) from orthophotos and Digital Elevation Models (DEMs). Estimates apparent depth: (DEM Base – WSM). Applies Snell's law with pure water refractive index (1.34). Corrects DEM by applying the difference between estimated and corrected depths. 	Limitations: <ul style="list-style-type: none"> Assumes a flat water surface. Reduced effectiveness at depths > 0.4–0.7 m. <p><i>Note: Implementation details in [50].</i></p>
Dietrich et al. [16]	Geometric Refraction (Multi-camera) <ul style="list-style-type: none"> Uses SfM processing to find ground coordinates of IFOV and camera corners. Reconstructs water surface via GNSS edge measurement and point cloud digitization. Calculates apparent depth and angle of incidence (Snell's Law) per point. Derives true depth geometrically based on the shift between true and apparent positions. 	Performance: <ul style="list-style-type: none"> Accuracy: ± 0.01 m (0.02% flight alt). Precision: 0.06–0.08 m. Limitations: <ul style="list-style-type: none"> Requires flat surface and precise camera orientation. Best for clear, shallow water (min. turbidity). <p><i>Tool: pyBathySfM.</i></p>
Agrafiotis et al. [35]	Image-based Refraction Correction <ul style="list-style-type: none"> Generates dense point clouds via SfM-MVS from UAS data. Recovers depth using <i>DepthLearn</i> machine learning technique [26,53]. Corrects raw images for refraction using transformation and resampling. Reprocesses corrected images to generate a refraction-free 3D coastal model. 	Limitations: <ul style="list-style-type: none"> Relies on calm environmental conditions and clear water. Requires textured seabed (homogeneous areas challenge SfM-MVS).
Mandlburger et al. [36]	BathyNet (Deep Neural Network) <ul style="list-style-type: none"> Classifies Airborne LiDAR Bathymetry (ALB) points to generate a Digital Water Surface Model (DWSM). Corrects ALB bottom points for refraction and travel time. Intersects DWSM rays with DTM to determine oblique water distance. Trains a U-Net CNN using RGBC multispectral info and calculated distances. 	Performance: <ul style="list-style-type: none"> Bias accuracy: < 15 cm. Std. Dev: ≈ 40 cm. Limitations: <ul style="list-style-type: none"> Dependent on high-quality reference data (ALB). Limited generalizability (tested in clear lakes).

第3章 背景理論

3.1 画像に基づく3次元復元 (3D Reconstruction from Images)

画像を用いた測量は写真測量(Photogrammetry)と呼ばれ、古い歴史あり。<https://duplicate-3d.com/rd/2025-09-11-photogrammetry-history/> この記事を参考に。もともとは専門的な技能を持った人が、専用の機械(?)を用いて作成。

画像のデジタル化、イメージセンサの発明によりコンピュータビジョン(Computer Vision, CV)が始まる。Image Sensorから得た視覚情報から、人間や他の生物と同じように Computer や Machine に Scene を理解させる。

画像センサ(Image Sensor)が捉える情報は、本質的には3次元シーンから2次元平面への射影(Projection)である。この過程において、3次元空間の奥行き情報は1次元分欠落し、情報の「縮退」が発生する。3次元復元の主眼は、この失われた次元を幾何学的制約や事前知識(Priors)を用いて補完し、元のシーンの構造を逆問題として解くことにある。3次元情報は生物が自己が生きる世界を認識、理解するうえで必須の情報であり、ロボットの自己位置推定、環境認識などにも多大なニーズがあり、Computer Vision の主要タスクとして数多くの研究がなされ、今もめちゃくちゃレッドオーシャン。

古くから、単眼画像から形状を推定する手法として、輝度やテクスチャ、影などの手掛かりを利用する *Shape from X* ($X \in \{\text{shading, Silhouette, Texture, Focus, etc.}\}$) の研究が行われてきた。しかし、より頑健な復元を行うためには、視点移動を伴う複数枚の画像、あるいは動画(Image sequence)を用いて幾何的な整合性を元に手法が主流となった。この手法、タスクの総称を Structure from Motion (SfM) と呼ぶ。この SfM を起点とする、3D Vision for Geometry 手法の発達、高度な UI を備えた商用ソフト (Pix4D, Metashape, etc.) の出現、オープンソース化により、今日では Photogrammetry 技術は広く一般に普及した。

3.1.1 Structure from Motion

SfM は、複数の視点から撮影された画像群に基づき、カメラの内部・外部パラメータ(三次元的な動き)と、シーンの疎な(Sparse)3次元構造を同時に推定する手法である。Tomasi-Kanadeによる行列分解法に始まる。Hartley や Zisserman ら(2000年代)によって幾何学的理論の基礎が確立された。(VGGT のYoutube の対談動画で取り上げられていた。もう少し詳しくは、Harley 先生たちの本を参照。) 2016年に発表された COLMAP は、高い精度と汎用性、そして Open Source のプロジェクトとしての完成度から現在でもアカデミック分野でデファクトスタンダードとして広く利用されている。

COLMAP では、Pixel wise なんちゃらで、MVS の新規研究も実装されている

また、COLMAP により出力される、正確なカメラ内部パラメータ (Intrinsic) と外部パラメータ (Extrinsic) は、歪みのない画像 (Undistorted Images) は、後述する Dense Reconstruction や 新規視点合成タスク のための入力データとして、重要なパイプラインの一環を担っている。

In a typical incremental SfM pipeline, keypoints are firstly detected and matched across frames using feature detectors and descriptors such as SIFT [37]. Fundamental matrix F between two images is then calculated, commonly via eight-points algorithm [38] combined with random sample consensus (RANSAC) [39], which lead to camera pose recovery through singular value decomposition. New camera poses are iteratively registered via Perspective-n-Point algorithms, which align estimated 3D points with 2D features in new frames. Triangulation is subsequently applied to obtain additional 3D points from feature correspondences, and bundle adjustment (BA) [40] is finally performed to minimize reprojection error, refining both camera parameters and 3D points. 画像を貼るぞい!!!<http://theia-sfm.org/sfm.html>

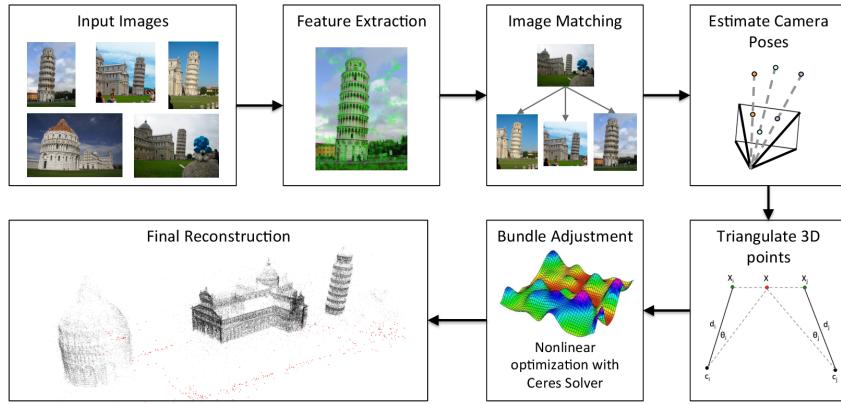


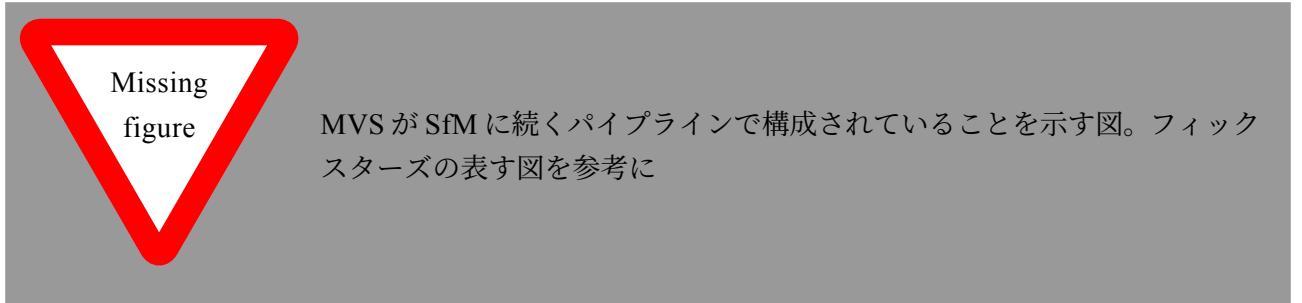
図 3-1: SfM Pipeline [41]

3.1.2 Multi-View Stereo

SfM などによって得られたカメラパラメータが既知の多視点画像群から、各画素単位で密な深度推定により、高密度な三次元復元を行うのが Multi-View Stereo (MVS) である。SfM の出力三次元情報が疎な (Sparse) 点群であるのに対して、MVS は物体表面の密な (Dense) な三次元点群やメッシュ (Mesh) を推定することから、MVS は Dense 3D Reconstruction (密な三次元再構成) のタスクを行っていると言える。これを達成するため、各画素における深度 (Depth) や法線 (Normal) といった幾何パラメータを、画像間の整合性 (Photometric Consistency)に基づいて最適化する手法がとられる。本節では、パッチベース手法の古典である PMVS [8] の概念を概観した後、現在のデファクトスタンダードなパイプライン (COLMAP [Schnberger2016ECCV_PatchMatchStereo]) の基礎となっている PatchMatch Stereo について詳述する。



図 3-2: PMVS Pipeline。[41] から引用。左から右にかけてそれぞれの画像は、(1) 入力された多視点画像の一例; (2) 検出された特徴点; (3) 初期マッチング後のパッチ; (4) 拡張とフィルタリング後のパッチ; (5) メッシュモデル。



PMVS:

Patch-based Multi-View Stereo (PMVS)

[Furukawa2010_PMVS] によって提案された Patch-based Multi-View Stereo (PMVS) は、物体表面を微小な平面パッチの集合としてモデル化し、これを拡張・最適化することで密な 3 次元形状を復元する手法である。本手法は、特徴点マッチングによる疎な初期復元から出発し、信頼度の高いパッチを周囲に拡張(Expand)していくアプローチをとる、物体表面の形状を密に 3 次元推定するための先駆的かつ代表的な手法である。

cite では、現在の設定では名前が表示されずただ、[8] のように番号のみになるため、別の方や引用のフォーマットの設定を考える

PMVSにおける基本単位であるパッチ B は、単なる画像の矩形領域ではなく、対象物体の表面に接する微小平面（局所接平面）の近似として定義される。パッチ B は以下のパラメータを持つ。

- **中心座標 $p_B \in \mathbb{R}^3$:** パッチの中心位置。
- **法線ベクトル $n_B \in \mathbb{R}^3$:** パッチの向きを表す単位法線ベクトル。
- **参照画像 R_B :** パッチ B を観測する画像の中で、光学的・幾何的に最も適した画像。
- **可視画像集合 V_B :** パッチ B がオクルージョンなく観測可能であり、かつ相関スコアが閾値以上となる画像の集合。

PMVS の処理は、特徴点からの初期化(Initialization)の後、以下の 3 つのステップ、拡張(Expansion)、フィルタリング(Filtering)、最適化(Optimization)を反復することで行われる。

1. **Initialization (初期化)**: SfM と同様に、各画像から特徴点検出・マッチングを行う [37]。ここから得られる疎な点群を Seed Patch として、初期の法線とともに最初のパッチ群を生成するよ。前処理としてカメラパラメータの取得に SfM を用いている場合、これらの特徴点と、Triangulation(三角測量)によって得られる疎な三次元点群はそのまま使用できる。
2. **Expansion (拡張)**: 物体の表面が滑らかに連続しているという仮定に基づき、パッチをシーンの表面に沿うように増殖させていく。既存のパッチ B を参照画像 R_B および可視画像集合 V_B に投影し、その隣接画素に対応する空間領域にパッチが存在しない場合、新たなパッチ B' を生成する。この際、親パッチ B の法線 \mathbf{n}_B と深さ情報を初期値として継承させることで、テクスチャが弱い領域であっても、隣接する確度の高い領域から表面を「張り出して」いくことが可能となる。
3. **Filtering (フィルタリング)**: 拡張プロセスによって生じた誤ったパッチを除去する。以下の 3 つの基準が主に用いられる。
 - **Visibility Consistency**: 複数のパッチが同一の視線上に存在する場合、カメラに近い方を残し、隠蔽される奥のパッチを削除する。
 - **Photometric Consistency**: 正規化相互相關 (NCC) 等を用いた画像間の整合性スコアが一定以下のパッチを外れ値として破棄する。
 - **Number of Views**: パッチを安定して観測できるカメラの台数 $|V(p)|$ が最小閾値未満のものを信頼性不足として削除する。
4. **Optimization (最適化)**: 各パッチの位置 p_B と法線 \mathbf{n}_B を微修正し、画像間の整合性を最大化する。具体的には、パッチ B を可視画像 $I \in V_B$ へ投影して得られる画素値と、参照画像 R_B 上の画素値との間の Photometric Discrepancy を最小化するよう、非線形最適化を行う。

$$g(p) = \frac{1}{|V(B) \setminus R(B)|} \sum_{I \in V(B), I \neq R(B)} g(B, I, R(B))$$

ここで, $g(B, I_1, I_2)$ は、パッチ B に対する、画像 I_1 と I_2 の間の Photometric Discrepancy を測定するための関数であり、NCC などを使用することができる。

Photometric Discrepancy を日本語で説明すると、

この際、パッチの法線 $\mathbf{n}(p)$ を考慮して各画像をホモグラフィ変換することで、視点による透視歪みを補正し、より正確なマッチングを実現している。

以上のプロセスを収束するまで繰り返すことで、初期の疎な点群は徐々に密度を増し、最終的に物体表面全体を覆う密な点群が得られる。[Furukawa2010_PMVS] の手法は、大域的な最適化を行う PatchMatch Stereo 等と比較して局所的な貪欲法に近い性質を持ち、計算コストが高いが、拡張ステップによる表面の連続性利用が強力であり、密な復元を実現するための歴史的に重要な手法である。

3.1.3 PatchMatch Stereo

PMVS が、信頼できる「種 (Seed)」から局所的に表面を拡張していくアプローチであるのに対し、[42] が提案した PatchMatch Stereo は、画像上のすべての画素に対して、個別の 3 次元平面パラメータ（深度と法線）を推定する手法である。

従来の局所ステレオマッチング手法は、マッチングウィンドウ内の深度が一定である（カメラに対して平行な平面：Fronto-parallel window）と仮定することが一般的であった。しかし、この仮定は傾いた面や曲面において成立せず、再構成精度の低下や「階段状」のアーティファクトを生む原因となっていた。これに対し、Bleyer らは各画素のウィンドウを 3 次元空間内の傾いた平面（Slanted Support Window）としてモデル化した。しかし、各画素に対して最適な平面パラメータ（深度および法線の向き）を決定しようとすると、その探索空間は連続値であり無限大となるため、従来の総当たり的な探索や離散ラベルを用いる手法（Graph Cuts など）は適用できない。

この問題を解決するために導入されたのが、Barnes らによる最近傍探索アルゴリズム ”PatchMatch” の概念をステレオ視に応用した推論フレームワークである。

元論文をよりしっかりと読み込む。正しいか？

平面モデルとマッチングコスト: 左画像の各画素 Γ に対し、3 次元平面 f_Γ を割り当てる。平面 f_Γ は 3 つのパラメータ $(a_{f_\Gamma}, b_{f_\Gamma}, c_{f_\Gamma})$ を持ち、画素 Γ の座標 (Γ_x, Γ_y) における深度 d_Γ は以下の式で表される。

$$d_\Gamma = a_{f_\Gamma} \Gamma_x + b_{f_\Gamma} \Gamma_y + c_{f_\Gamma}$$

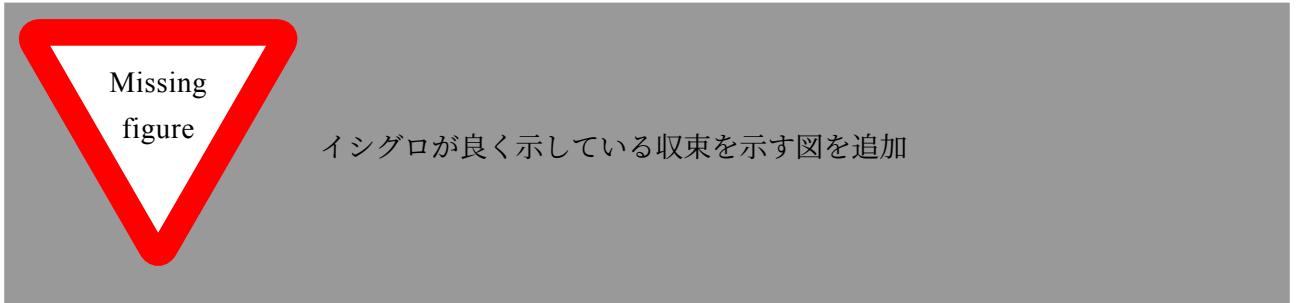
このモデルにより、画素ごとに異なる法線を持つ傾いた平面を表現でき、サブピクセル精度の深度推定が可能となる。最適化の目的は、各画素 Γ において、アグリゲーションコスト $m(\Gamma, f_\Gamma)$ を最小化する平面 f_Γ を、無限の候補空間 \mathcal{F} から見つけ出すことである。

$$f_\Gamma = \underset{f \in \mathcal{F}}{\operatorname{argmin}} m(\Gamma, f)$$

ランダム探索と伝播による推論: PatchMatch Stereo の核心は、ランダムな初期化状態から、空間的・視点的な相関を利用して「良い解」を画像全体に伝播 (Propagate) させるプロセスにある。アルゴリズムは、以下のステップを反復することで収束する。

1. **Random Initialization (ランダム初期化):** 初期状態では、すべての画素に対し、ランダムなパラメータを持つ平面（ランダムな深度と法線ベクトル）を割り当てる。
2. **Spatial Propagation (空間伝播):** 「隣接する画素は、同じ平面上に乗っている可能性が高い」という仮定を利用する。画像走査順序に従い、現在の画素 Γ とその近傍画素 Γ' （例えば左上の画素）を比較する。もし、近傍画素 Γ' の持つ平面 $f_{\Gamma'}$ を画素 Γ に適用した際のマッチングコストが、現在の平面 f_Γ よりも低くなるならば、画素 Γ は平面 $f_{\Gamma'}$ を自身の新たな推定値として採用し、コピーする。これにより、画像の一部で偶然「正解に近い平面」が見つかれば、その平面情報は波紋のように隣接画素へと広がり、領域全体が正しい平面で埋め尽くされていく。

3. **View Propagation (視点間伝播)**: ステレオ特有の拡張として、左右画像間の一貫性を利用する。左画像の画素 Γ の対応点である右画像の画素 Γ' が、より適切な平面パラメータを持っている場合、それを左画像座標系へ変換して取り込む。これにより、オクルージョン領域外での整合性が強力に担保される。
4. **Plane Refinement (平面の微調整)**: 伝播のみでは、既存の平面パラメータのコピーしか行われないため、真値へ到達できない。そこで、現在の平面パラメータに微小なランダム摂動 (Perturbation) を加え、コストが改善するかをテストする。反復が進むにつれて摂動の範囲を指數関数的に狭めていくことで、サブピクセルレベルでの高精度な収束を実現する。



この手法の利点は、巨大なコストボリューム (Cost Volume) をメモリ上に構築する必要がないため、高解像度画像や大きな視差範囲に対してもメモリ効率が良い点にある。また、連続空間での最適化を行うため、離散化に伴う量子化誤差が発生せず、極めて滑らかな曲面や急峻な傾斜面の復元に成功している。**Pixel wise View Selection** が、この手法をいかに MVS へ拡張したか説明する。

[42] は、基本的に 2 枚の画像 (ステレオペア) 間でのマッチングを前提としている。しかし、実際の SfM/MVS パイプラインでは、数十から数千枚の画像 (Multi-View) が入力され、かつそれらがインターネット上の写真のように撮影条件がバラバラな「非構造化 (Unstructured)」データである場合もある。このとき、画像間でのパッチ選択は非効率!?!?

この課題に対し、[43] は、PatchMatch Stereo のフレームワークを多視点へ拡張する際、「画素ごとの視点選択 (Pixelwise View Selection)」という概念を導入することで解決を図った。

多視点ステレオにおける最大の課題は、ある参照画像の画素 Γ を復元するために、「どのソース画像を使うべきか」が画素ごとに異なる点である。画像全体で一律にソース画像を選んでしまうと、オクルージョンや解像度の不一致により、特定の画素ではマッチングが破綻してしまう。COLMAP では、以下の 3 つの幾何学的事前分布 (Geometric Priors) を確率モデルに組み込み、各画素 Γ が自分自身にとって最適なソース画像を動的に選択しながら推論を行う。

1. **Triangulation Prior**: 十分なベースラインを持ち、三角測量の精度が保証される角度 (Triangulation Angle) で撮影された画像を優先する。角度が小さすぎる (視点が近すぎる) 画像は深度推定の不確定性が高いため除外される。
2. **Resolution Prior**: 参照画像とソース画像で、対象を捉えている解像度 (画素密度) が類似している画像を優先する。極端に解像度が異なる画像間でのマッチングは、エイリアシング等の問題を引き起こすためである。

3. **Incident Prior**: 推定された法線ベクトルに対し、カメラ視線が正対に近い（斜めすぎない）画像を優先する。これにより、極端な浅い角度から撮影された信頼性の低い画像の影響を排除する。

Schönberger らは、これらの幾何学的尺度とフォトメトリックな整合性を統合した確率的グラフィカルモデルを構築し、PatchMatch の反復プロセスの中で「深度・法線の推定」と「最適なソース画像の選択」を同時に最適化する手法を確立した。これにより、COLMAP は極めてノイズの多い非構造化データセットに対しても、Robust な密な三次元再構成を可能にした。

一方、Geometric Optics による光の直進性を仮定するが、これは屈折のある Scene では成立しない。(Reflection も一般的に苦手)

3.1.4 Feed Forward 3D Reconstruction

<https://gemini.google.com/app/d37c008e08350238>

DINO などの深層学習ベースの特徴抽出を解説。自分の提案手法の前処理にも、水面マスクに Dino を使用する

本研究の本筋である最適化ベース (Optimization-based) の手法とは対照的に、近年 (2023-2025 年)、大規模データセットと Deep Learning、特に Transformer アーキテクチャの発展により、幾何学的計算を推論 (Inference) として解く「フィードフォワード型 (Feed-Forward)」の手法が急速に台頭している。従来の手法 (SfM/MVS や NeRF/3DGS) が、入力シーンごとにパラメータを反復的に更新して解を探索するのに対し、フィードフォワード型の手法は、学習済みの膨大な事前知識 (Priors) を用いて、単一の順伝播処理のみで 3 次元構造を回帰するデータ駆動型 (Data-driven) のアプローチである。

このアプローチの代表例として、以下の手法が挙げられる。

- **Depth Anything [yang2024depthanything]**: 6200 万枚以上の画像から学習された基盤モデル (Foundation Model) であり、DINOv2[<empty citation>] バックボーンを活用することで、テクスチャのない領域や未知のシーンに対しても極めてロバストな单眼深度推定を実現している。しかし、出力はスケール不確定性を伴う 2.5 次元表現に留まり、多視点間での厳密な幾何学的整合性は保証されない。
 - **DUSt3R / MASt3R [wang2024dust3r leroy2025mast3r]**: 従来の SfM パイプライン (特徴点抽出、マッチング、バンドル調整) を完全に排除し、2 枚の画像から直接「ポイントマップ (Point Map)」を回帰する手法である。これにより、カメラパラメータを事前に与えることなく (Unposed)、エンドツーエンドでの 3 次元形状および Point Map からのカメラ姿勢の逆推定が可能となった。特に MASt3R は、。
- MASt3R ってそんな手法だっけ?
- **VGGT (Visual Geometry Grounded Transformer) [wang2025vggt]**: CVPR 2025 にて Best Paper Award を受賞した、現時点での到達点といえる手法である。VGGT は、任意の枚数の画像を入力とし、カメラパラメータ、深度、点群、そして追跡情報 (Tracks) の全てを同時に推論する。

これらの手法は、計算速度とロバスト性において革新的であるが、本研究が扱う「物理的に正確な表面再構成」の観点からは明確な限界も存在する。フィードフォワード手法はその性質上、学習データに深く性能を依存する。

そのため、屈折（Refraction）や透明物体（Transparency）を含むシーンにおいて、これらの手法は破綻しやすい。学習データ（ScanNet等）に透明物体が十分に、かつ物理的に正確なアノテーションと共に含まれていないため、フィードフォワードモデルはガラス表面を背景と混同したり、深度を平滑化してしまう傾向がある。

根拠薄し

対して、本研究で用いる Gaussian Splatting 等の最適化ベース手法は、屈折率（IOR）やスネルの法則を明示的にモデル化することで、こうした物理現象を正確に逆算することが可能である。

しかし、動画生成AIが流体や光の反射といった物理法則をデータから獲得しつつある現状[quan2025transparent]を鑑みると、将来的にはフィードフォワード手法も十分なデータスケールによって屈折を「学習」する可能性は否定できない。現時点では、幾何学的整合性と物理的忠実性を担保するためには、依然として物理モデルに基づく最適化が不可欠である。

Missing figure

Optimization-based 手法と Feed-Forward 手法の処理フロー比較図：Iterative なループを持つ前者と、Single Pass で完結する後者の対比。また、透明物体に対する挙動の違い（透過してしまうか、屈折を考慮するか）の概念図。

3.2 Inverse Rendering as 3D Reconstruction

Inverse Rendering

<https://gemini.google.com/app/0bb4c009393122eb>

コンピュータグラフィックス（CG）の古典的な課題は、3次元のシーン記述（形状、材質、光源）から2次元の画像を生成することである。この過程は「Forward Rendering（順方向レンダリング）」と呼ばれ、一般的にはレンダリングと呼ぶ。これを数学的な関数 R と見なすと、シーンパラメータ Θ から画像 I への写像 $I = R(\Theta)$ として表現できる。これに対し、Inverse Rendering（逆レンダリング）は、観測された画像 I_{obs} から、それを生成したシーンパラメータ Θ を推定する逆問題 $\Theta = R^{-1}(I_{obs})$ を解くことである。観測された画像群から3Dシーンを推定するという意味で、Inverse Renderingは画像からの三次元再構成の一例であるといえる。

しかし、物理的な世界から画像への射影は情報の損失（奥行きの消失、法線とテクスチャの混同など）を伴うため、この逆問題は本質的に不良設定問題（Ill-posed problem）となる。この困難な問題を、最適化手法を用いて解くための強力なフレームワークとして登場したのが、Differentiable Rendering（微分可能レンダリング）である。



Missing
figure

Rendering と Inverse Rendering を表す図

3.2.1 Analysis-by-Synthesis and Novel View Synthesis

現代の Inverse Rendering の多くは、Analysis-by-Synthesis というアプローチを採用している。これは、パラメータ Θ を直接回帰するのではなく、レンダリングされた画像 $R(\Theta)$ と観測画像 I_{obs} との間の再構成誤差 \mathcal{L} を最小化する最適化問題として定式化される。

$$\Theta^* = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(R(\Theta), I_{obs})$$

ここで \mathcal{L} は損失関数 (L2 ノルムや Perceptual Loss) である。この最小化問題を勾配降下法 (Gradient Descent) で解くためには、レンダリング関数 R がパラメータ Θ に関して微分可能である必要がある。すなわち、3D シーンパラメータ Θ に関する損失関数 \mathcal{L} の勾配 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta}$ を計算できなければならない。連鎖律 (Chain Rule) を適用すると、勾配は以下のように分解される。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial \Theta}$$

前半の $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I}$ (画像の画素値に対する Loss の勾配) は容易に計算できるが、後半の $\frac{\partial I}{\partial \Theta}$ (シーンパラメータの変化が画素値にどう影響するか) の計算は一般的な三次元形状表現である Mesh では難しい。

いらないと思う

第 3.2.1 小節の定式化によって、

微分可能レンダリングによる最適化

逆レンダリングを勾配法 (Gradient Descent) によって解くためには、レンダリングプロセスが微分可能 (Differentiable) である必要がある。(なんで勾配法で解く必要があるのか土木人に分かるように説明してあげないと。DL の発達とその最適化手法の根底にあることを言及) 微分可能レンダリング (Differentiable Rendering, DR) の枠組みでは、以下のループによって 3 次元シーンが最適化される。

1. **レンダリング:** 現在推定されている 3 次元シーン (形状・外観) から、仮想的な視点で画像を生成する。
2. **損失計算:** 生成された画像 (Rendered Image) と、実際に撮影された正解画像 (Source Image) との間の誤差 (Loss) を計算する。

3. **誤差逆伝播:** 微分可能なレンダラを介して、誤差の勾配 (Gradient) を 3 次元シーンのパラメータへと連鎖律に従って伝播させる。
4. **更新:** 勾配を用いて、3 次元シーンのパラメータを逐次更新する。

この手法は、幾何学的な特徴点のみならず、画像内の全画素の情報を最適化に利用できる従来の Bundle Adjustment も 2 次元画像座標上の特徴点を介して、3 次元シーンを構成する点群を再投影誤差を介し最小化するという点で、微分可能レンダリングの一種と捉えることができる。

Novel View Synthesis

従来の SfM や MVS の手法は Geometric Reconstruction として、主に幾何情報の復元に焦点を当てていた。実際の Scene は幾何情報 (Geometry) に加え、照明 (illumination)、テクスチャ (texture)、BRDF などでモデル化される表面特性などを含む。新規視点合成というタスクでは、ポーズを付与した画像から、その視点外からの新視点の画像を推定するタスクである。SfM や MVS が Geometric Reconstruction とするならば、新規視点合成は Appearance Reconstruction となる。Appearance には当然、Geometry の情報も含まれているため、Appearance Reconstruction は Geometry Reconstruction のタスクを暗に含んでいると言える。図を挿入して上げるぞ。(CG のレンダリングプロセスと、ベン図)

Neural Radiance Fields (NeRF)

<https://dl.acm.org/doi/10.1145/3758085> [44] からまとめる。微分可能レンダリングの代表例が NeRF (Neural Radiance Fields) である。

Missing figure

NeRF と 3DGS の図。レイトレーシングとラスタライズの違いを表すイメージ。Survey 論文に合った。

NeRF では、シーンをボクセルやポリゴンといった明示的な幾何構造ではなく、多層ペーセプトロン (MLP) を用いた「連続的な輝度場 (Radiance Field)」として表現する。これは、点群やメッシュといった、シーンの幾何情報を直接的にエンコードする Explicit Representation ではなく、関数を介して表現する Implicit Representation の一種である。

Missing figure

NeRF の MLP の構造も図で載せたい。引用できる

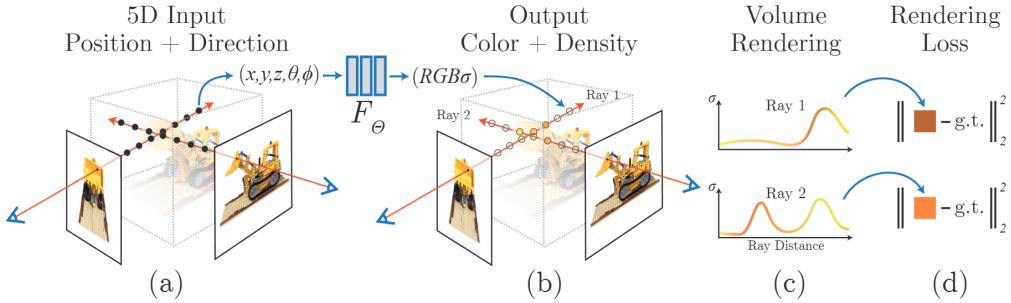


図 3-3: NeRF によるシーン表現と微分可能レンダリングの処理の概念図。[19]

から引用。(a) カメラ光線に沿って、5 次元座標(位置および視線方向)をサンプリング。(b) それらを MLP に入力し、色と volume density を出力させます。(c) ボリュームレンダリングを用い、画像を生成する。(d) 合成された画像と実際に観測された GT 画像との間の誤差を最小化することによって、シーン表現の最適化を行う。

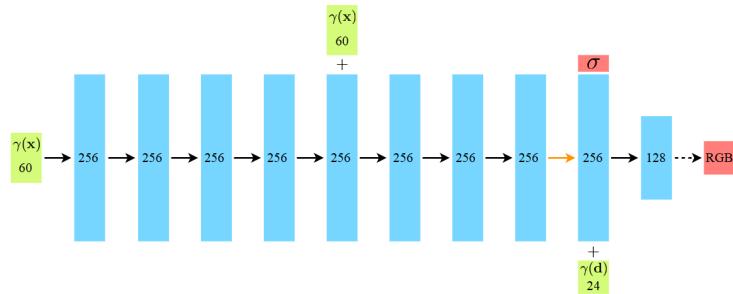


図 3-4: NeRF のネットワークアーキテクチャ。[19]

から引用。ネットワークアーキテクチャの詳細。入力となる 5 次元座標のうち、位置 x は 8 層の全結合層によって処理され、体積密度 σ と 256 次元の特徴ベクトルを出力する。この特徴ベクトルは視線方向 d と結合され、続く 1 層の全結合層を経て、視点依存 (view-dependent) の RGB 色が出力される。全ての層において活性化関数として ReLU を使用する。

具体的には、空間上の座標 (x, y, z) と視線方向 (θ, ϕ) を入力とし、その点における放射輝度 (RGB) と体積密度 (σ) を出力する関数 f_Θ を学習する。この表現を用いて、以下の Volumetric Rendering によりピクセル値を算出する。

$$C(\mathbf{r}) = \int_{t_n}^{t_f} T(t) \sigma(\mathbf{r}(t)) \mathbf{c}(\mathbf{r}(t), \mathbf{d}) dt$$

ここで $T(t)$ は透過率、 $\mathbf{r}(t)$ はレイ上の点を表す。この積分プロセスは離散的なサンプリングによって近似され、微分可能な形で実装される。ボリュメトリックレンダリングは、元来、煙や炎などの不均等な媒質を通過する光の伝播をモデル化を可視化するために開発されたものだが、メッシュなどのラスター化に含まれる離散性がなく、微分可能性を保つとともに、汎用的な Scene 表現に用いられる。これにより、複雑な光学的特性（反射や半透明など）を含むシーンにおいても、エンドツーエンドでの高精度な再構成が可能となった。

ピクセル色の決定には、古典的なボリュームレンダリングの原理が応用される。仮想的なカメラから放たれたレイ（光線）に沿って空間をサンプリングし、各サンプル点での密度 σ を重みとした放射輝度 \mathbf{c} の積分値を算出することで、最終的なピクセル値が決定される。この積分計算は離散的な総和として近似されるが、演算過程の全てが微分可能に保たれているため、レンダリング画像と実画像の二乗誤差を損失関数とし、MLP の重みをエンドツーエンドで最適化できる。しかし、NeRF は写真のような忠実度の自由視点合成を実現した一方で、実用上の重大な障壁も露呈させた。1 ピクセルの描画のためにレイに沿った数百回の MLP 推論を要する計算負荷の高さは、リアルタイムレンダリングを困難にし、またシーンごとに日単位の学習を要する点は、大規模なデータセットへの適用を制限している。また、3 次元シーンが MLP にエンコードされる点で、その解釈や編集可能性が乏しく、測量用途としての適用性に欠ける。これらの課題、すなわち「計算資源の集約性」と「暗黙的表現による編集の困難性」を克服しようとする動機が、後の明示的な幾何プリミティブを用いる手法への回帰を促すこととなった。

3.3 Gaussian Splatting

3D Gaussian Splatting

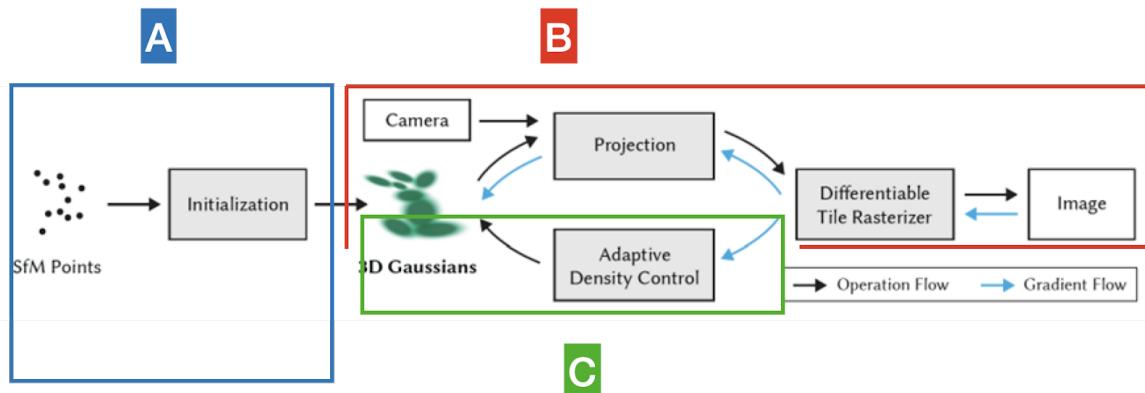


図 3-5: Gaussian Splatting のパイプライン。[20] より引用。

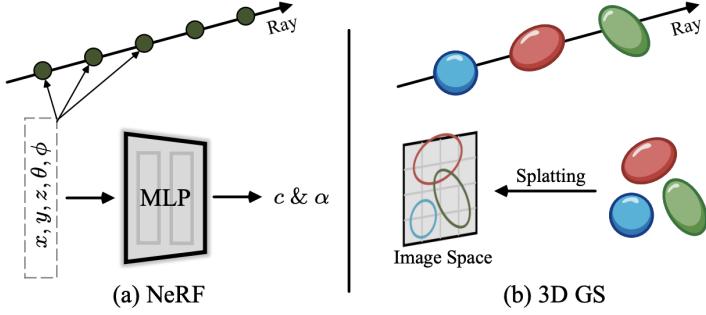


図 3-6: Gaussian Splatting と NeRF とレンダリング方式の違い。[45] より引用。(a) NeRF のレンダリング方式。(b) 3DGS のレンダリング方式。NeRF では各レイに沿ってサンプリングするため、計算コストが大きいが、GS ではラスタライズによる高速なレンダリングを実現する。これは GPU の描画パイプラインを効果的に流用する。ラスタライズにより 3D 空間の Gaussian を 2D 画像平面に投影することを ‘Splatting’ と表現している。

Missing figure

NeRF と 3DGS の分類図。レンダリング速度と、データサイズの 2D プロット。Barron さんのレクチャー動画から。学習速度も入れれば、2 次元に収まらない。。2 個いるかな？ できれば、MVS とともに含めて示せればいい。それだったら表が美しい

3D Gaussian Splatting (3DGS) は、新規視点合成において最先端 (SOTA) の結果を達成している近年の手法である [20]。その特徴は、フォトリアリスティックかつ高忠実度な 3 次元シーンのキャプチャ能力、高速な学習時間、そしてリアルタイムレンダリングにある。明示的な (Explicit) 3 次元表現である 3DGS は、Visual-SLAM [46–48]、アバター生成 [49·50]、フィードフォワード型 3 次元再構成 [51] など、幅広いタスクへの適用に成功している。その可能性はさらに広がり、衛星画像からの数値表層モデル (DSM) 生成 [52]、自動運転、そして水中 3 次元再構成 [53] といった様々な実世界アプリケーションへと拡張されている。

自動運転

3DGS のパイプラインは主に、レンダリングを行うフォワードパスと、最適化を行うバックワードパスの 2 つの段階で構成される。フォワードパスでは、3 次元ガウス分布 (3D Gaussians) の集合を、ラスタライズにより画像平面に投影することで画像を合成する。各ガウス分布は、中心位置 $p \in \mathbb{R}^3$ 、不透明度 $\alpha \in [0, 1]$ 、球面調和関数 (SH) によって表現される視点依存の色係数 $c(p, t_i) \in \mathbb{R}^3$ 、および 3 次元共分散行列 $\Sigma^{3D} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ という、最適化可能なパラメータセットによって定義される。これらのパラメータは、カメラパラメータを得る際に用いられる SfM で副次的に得られる粗点群を用いて初期化される (図 3-8A)。共分散行列 Σ^{3D} は、スケーリングベクトル $s \in \mathbb{R}^3$ から構成されるスケーリング対角行列 $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ と、回転クォータニオン (回転行列 $R \in SO(3)$ として表現) を用いて以下のように構成される：

$$\Sigma^{3D} = RSS^\top R$$

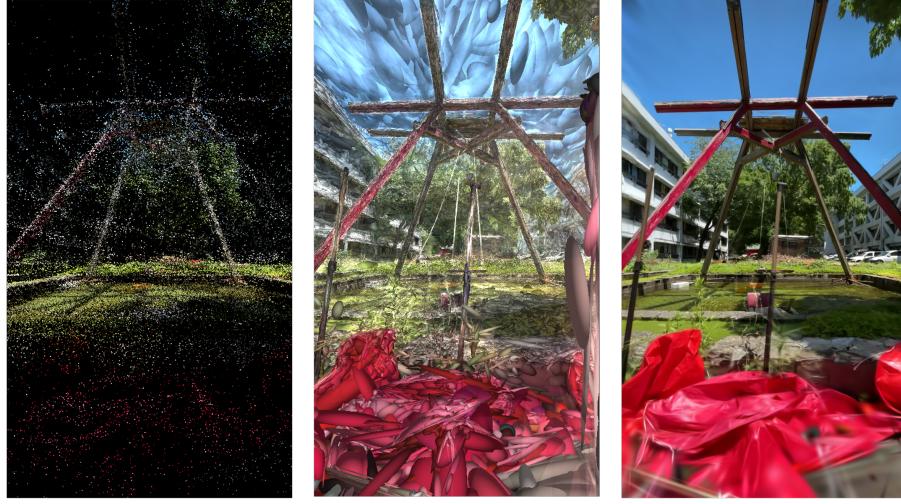


図 3-7: 点群と楕円体のレンダリング結果の比較。(a) 点群のレンダリング結果。(b) 楕円体のレンダリング結果。(c) 最終的な 3DGS のアルファブレンディングによるレンダリング結果。

点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対する対応する非正規化ガウス分布関数は以下で与えられる：

$$G(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^T (\Sigma^{3D})^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{p})\right)$$

フォワードパスにおいて、あるカメラ視点からの画像をレンダリングするために、これらのガウス分布はまず外部パラメータ行列 $[\mathbf{W}|\mathbf{t}]$ を用いてワールド座標系からカメラ座標系へと変換される。ガウス分布の中心位置 \mathbf{p} と 3 次元共分散行列は以下のように更新される：

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{\text{cam}} &= \mathbf{W}\mathbf{p} + \mathbf{t} \\ \Sigma_{\text{cam}}^{3D} &= \mathbf{W}\Sigma^{3D}\mathbf{W}^\top\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{W}_{\text{view}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は視点回転行列、 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ は平行移動ベクトルである。[\[54\]](#) の提案した射影手法に従い、カメラ空間における 3 次元共分散行列 Σ_{cam}^{3D} は 2 次元画像平面へと射影される。これは透視投影の一次近似(アフィン近似)のヤコビ行列 \mathbf{J} を用いて行われ、2 次元共分散行列 Σ^{2D} が得られる：

$$\Sigma^{2D} = \mathbf{J}\Sigma_{\text{cam}}^{3D}\mathbf{J}^\top$$

各ピクセルの最終的な RGB 値 $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ は、射影されたガウス分布をアルファブレンディングすることでレンダリングされる。ピクセルと重なるガウス分布の集合は、まず深度に基づいて手前から奥へとソートされ、視点依存色が以下のように累積される：

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^K c_k \alpha_k^{\text{pixel}} \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \alpha_j^{\text{pixel}}) \\ \text{where } \alpha_k^{\text{pixel}} &= \alpha_k G_k^{2D}\end{aligned}$$

ここで、 k はピクセルに重なる整列されたガウス分布の集合のインデックスである。

バックワードパスでは、最適化により測光誤差 (Photometric loss) を最小化する。これは $\mathcal{L}_1(\Gamma, \Gamma_{gt})$ 損失と D-SSIM 損失 $\mathcal{L}_{D-SSIM}(\Gamma, \Gamma_{gt})$ [55] の加重和である：

$$\mathcal{L} = (1 - \lambda)\mathcal{L}_1 + \lambda\mathcal{L}_{D-SSIM}$$

したがって、最適化問題は以下のように定式化される：

$$\underset{p, R, s, c, \alpha}{\operatorname{argmin}} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\Gamma, \Gamma_{gt})$$

これらの定式化により、パイプライン全体が完全微分可能となり、パラメータ $\Theta = \{\mathbf{p}, \mathbf{R}, \mathbf{s}, \mathbf{c}, \alpha\}$ は Adam を用いた勾配降下法 [56] によって最適化可能となる。(図 3-8B)

これらの勾配降下法のみでは、特に観測視点が少ない箇所 (Few Shot Area) などで、シーンの適切な一貫性に欠ける局所最適解に陥りやすい。これを解決するために 3DGS では Adaptive Density Control(ADC) というヒューリスティックな手法が導入されている。ある Gaussian に関して、その 2D 平面や 3D 空間における位置に対する誤差勾配 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}$ が大きい場合、その Gaussian は幾何的な誤差の大きいものであるという推察に基づいて分割 (Split)、複製 (Clone)、消去 (Prune) のいずれかの操作を行う。位置誤差勾配がある閾値を超え、さらにシーンに対して Gaussian が大きい場合は分割、小さい場合は複製を行う。また、不透明度 α が小さい Gaussian も消去する。効果的にシーンに寄与しない Gaussian を削除するため、一定のイテレーションごとにシーンの Gaussian の不透明度を一様に小さいものにリセットすることで、その後不透明度が向上しない Gaussian を削除できるようになる。

MCMC の説明も。?。これらのヒューリスティックスはデータセットや初期値に対して依存するため、それを克服するような MCMC といった手法も考案されている。

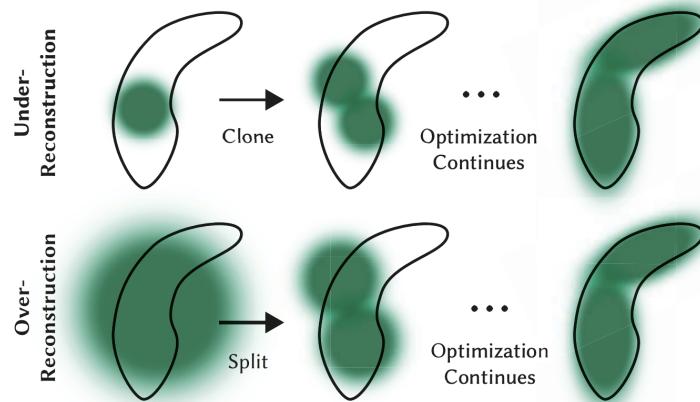


図 3-8: Adaptive Density Control(ADC) の操作。[20] より引用。Gaussian に流れる位置誤差勾配が大きい場合、サイズが小さい Gaussian に対しては、複製、サイズが大きい Gaussian に対しては、分割を行うことで、適切なサイズの Gaussian でシーンを満たす。

Algorithm 1: Novel 3DGS[20] における密度最適化アルゴリズム。[57] より引用。

Data: Scene of Gaussians G

```
for  $G_k \in G$  do
    // Densification
    if  $\tau_k \geq T_{grad}$  then
        if  $\max(s_k) > P_{dense} \cdot e_{scene}$  then
            | splitGaussian( $G_k$ )
        end
    else
        | cloneGaussian( $G_k$ )
    end
end
// Opacity Pruning
if  $\alpha_k < \alpha_{min}$  then
    | pruneGaussian( $G_k$ )
end
// Size Pruning
if  $\max(s_k) > 0.1 \cdot e_{scene}$  then
    | pruneGaussian( $G_k$ )
end
end
```

ここで、 τ_k は 2 次元位置誤差勾配の平均値、 P_{dense} は密度最適化のハイパーパラメータ、 T_{grad} は位置誤差勾配の閾値ハイパーパラメータ、 e_{scene} はシーンの範囲、 α_{min} は最小不透明度ハイパーパラメータである。

その最適化に要する学習時間は、30k のイテレーションによって 1 時間以内となり、当時 NVS の Sota であった Mip-NeRF360 [58] に比較して 10 倍以上の高速化を達成した。加えて、Ray-Tracing に比較し、既存の GPU 描画パイプラインの性能を引き出す Tile-Based レンダリングによって、100 fps 以上のリアルタイムレンダリングを実現したことで、インタラクティブな Scene の可視化が可能となった図 3-6。このプロセスを通じて得られた 3 次元ガウス分布の集合は、3 次元シーンを高忠実度で捉えることができる。

しかし、このパイプライン全体はピンホールカメラモデルと透視投影に依存しており、光が直線的に進むことを根本的な前提としている。この前提は、空気と水の境界での屈折が幾何学的矛盾を引き起こすような複数の媒質が介在する環境においては成立しない。この制限にもかかわらず、3DGS の明示的な 3 次元表現は、屈折の法則を数学的に定式化し、シーン表現の幾何学的パラメータそのものに直接適用することが可能とする。一方で、3DGS ではラスタライズによってレンダリングされるため、レイトレイシングのように容易に屈折の影響をモデル化することができない、という困難も生じる。

3.3.1 2D Gaussian Splatting

2D Gaussian Splatting(2DGS) [59] は、Photometric な一貫性に特化した 3DGS に対し、幾何的な一貫性を向上させることを目的とした派生手法である。3 次元シーンで観測される Radiance は、環境光が物体表面で反射したものから観測されるという前提から、3 次元シーンの各 Gaussian は物体表面に整列して配置されることを目指す MVS などの Geometric Reconstruction の一種とも言える。

2DGS の 3DGS との違いは、主に以下の 3 点である：

- 平らな 2 次元ガウス分布 (Surfel) プリミティブによる 3 次元シーン表現
- 正確な透視投影 (Perspective-accurate) による、2D Gaussian 集合の 2 次元画像平面への射影
- 幾何的な整合性を高める正則化の導入

2DGSにおいて、シーンは平らな 2 次元ガウス分布 (Surfel)(2D-oriented planar Gaussian disks) の集合として表現される。つまり、3DGS に比較し、スケーリングベクトル s のうち最小の成分が 0 と表現した Surfel として表現し、2DGS のプリミティブは、中心位置 \mathbf{p}_k 、主方向ベクトル \mathbf{t}_u と \mathbf{t}_v 、および対応するスケーリングベクトル $s = (s_u, s_v)$ によって表現される。(回転行列 \mathbf{R}_k 、不透明度 α_k と視線依存色 c_k は 3DGS と同様である。)

具体的には、3D 空間内の 2 次元ガウス分布は、ローカルな接平面 (u, v) 上で定義され、その幾何学的形状は同次変換行列 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ を用いて以下のようにパラメータ化される [59]。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} s_u \mathbf{t}_u & s_v \mathbf{t}_v & \mathbf{0} & \mathbf{p}_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、ローカル座標 $\mathbf{u} = (u, v)$ におけるガウス分布の強度は、標準的な 2 次元ガウス関数として定義される。

$$G(\mathbf{u}) = \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2}\right)$$

Perspective-Accurate Splatting via Ray-Splat Intersection

3DGS が採用しているアフィン近似による投影は、ガウス分布の中心から離れるにつれて近似誤差が増大し、視点によって深度が不整合になるという問題がある。これに対し 2DGS は、視線レイ (Ray) と 2 次元平面 (Splat) の交差判定 (Ray-Splat Intersection) を明示的に計算することで、正しい透視投影を実現する。

スクリーン空間上のピクセル座標 $\mathbf{x} = (x, y)$ を通る視線レイは、3 次元空間において直交する 2 つの平面 (x-plane と y-plane) の交線として定義できる。これを同次座標系の 4 次元平面ベクトル $\mathbf{h}_x = (-1, 0, 0, x)^\top, \mathbf{h}_y = (0, -1, 0, y)^\top$ として表現し、これらをワールド空間からスクリーン空間への変換行列 \mathbf{W} と、先述のローカル変換行列 \mathbf{H} を用いてガウス分布のローカル座標系へ逆変換する。ここで、平面の変換には逆転置行列 $(\mathbf{WH})^{-\top}$ を用いる必要があるが、これにより明示的な逆行列計算を回避し、数値的な安定性を保つことができる。

$$\mathbf{h}_u = (\mathbf{W}\mathbf{H})^\top \mathbf{h}_x, \quad \mathbf{h}_v = (\mathbf{W}\mathbf{H})^\top \mathbf{h}_y$$

この変換された平面 $\mathbf{h}_u, \mathbf{h}_v$ と、ローカル平面上の点 $(u, v, 1, 1)^\top$ との内積が 0 になるという条件から、交差点 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を以下の閉形式で高速に求めることができる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{h}_u^3 \mathbf{h}_v^4 - \mathbf{h}_u^4 \mathbf{h}_v^3} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_u^2 \mathbf{h}_v^4 - \mathbf{h}_u^4 \mathbf{h}_v^2 \\ \mathbf{h}_u^4 \mathbf{h}_v^1 - \mathbf{h}_u^1 \mathbf{h}_v^4 \end{pmatrix}$$

ここで \mathbf{h}^i はベクトルの第 i 成分を表す。これにより得られた $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を用いて $G(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ を評価することで、正確なレンダリングが可能となる。

また、2DGS 特有の問題として、視線が円盤に対して平行に近い角度 (Slanted viewpoint) になった際に、スクリーン上で線分に退化し、勾配消失やエイリアシングを引き起こす現象がある。これを防ぐため、2DGS ではローパスフィルタ σ を導入し、スクリーン空間での最小サイズを保証する以下のクリッピング処理を行う。

$$\hat{G}(\mathbf{x}) = \max \left\{ G(\mathbf{u}(\mathbf{x})), G\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}}{\sigma}\right) \right\}$$

この処理は実装上、最適化の安定性を確保するために極めて重要である。

ローパスフィルタまでは説明しなくても良い。(3DGS でも説明していないから)。MipSplatting 説明しないといけない

Regularization for Geometric Consistency

2DGS は Surfel 表現を持つが、単なる Photometric loss のみでは、3 次元再構成特有の不定性によりノイズの多い表面形状に収束してしまう傾向がある。そこで、幾何学的精度を向上させるために [58] で提案された 2 つ正則化項を GS フレームワークに導入している。

一つ目は **Depth Distortion Loss** (\mathcal{L}_d) である。3DGS のボリュームレンダリングは、レイ上の交点間の距離を考慮しないため、ガウス分布が前後に散らばるアーティファクトが生じやすい。2DGS では、レイ上の交差点深度 z_i とブレンディング重み ω_i を用いて、寄与の高いガウス分布同士の深度距離を最小化するように制約をかける。

Missing figure

依然、木津川で再構成した際のアーティストを示す

$$\mathcal{L}_d = \sum_{i,j} \omega_i \omega_j |z_i - z_j|$$

二つ目は **Normal Consistency Loss** (\mathcal{L}_n) である。2DGS のプリミティブは自身が法線ベクトル $\mathbf{n}_i =$

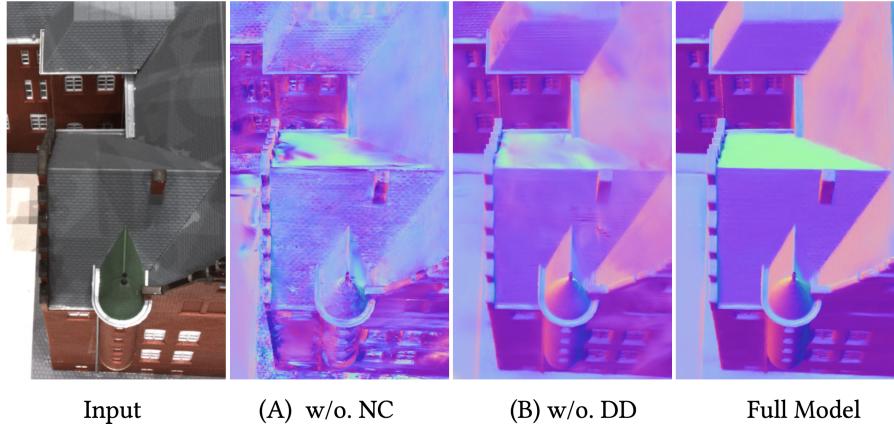


図 3-9: 2DGS の正則化項の効果。左から順に、入力画像、法線整合性正則化なしの表面法線、深度歪み正則化なしの表面法線、そして両方の正則化を適用した 2DGS の結果である。法線整合性正則化を適用しない場合、表面の法線方向にノイズが生じる。一方、深度歪み正則化を省略すると、法線マップがぼやけたものとなる。両方の正則化を併用することで、鋭く滑らかな表面形状を正確に再構成できている。

$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$ を持っている。ここで \times はベクトルの外積演算を表す。この明示的な法線と、レンダリングされた深度マップから推定される法線 \mathbf{N} （深度の勾配 ∇D から算出）との整合性を取ることで、滑らかな表面再構成を強制する。

$$\mathcal{L}_n = \sum_i \omega_i (1 - \mathbf{n}_i^\top \mathbf{N})$$

最終的な損失関数は、3DGS の Photometric loss に加え、これらの正則化項を加重和したものである。これらの幾何学的制約により、2DGS はノイズの少ない詳細なメッシュ抽出が可能となり、かつ 3DGS と同等のレンダリング速度と画質を維持している。

メッシュの抽出には TSDF Fusion を用いている。

3.4 屈折を扱った関連手法

RefractionNeRF や Refractive-aware MVS、Transparent GS、3DGRT などの諸手法をまとめる。勉強や検証に使えるか。

第4章 提案手法

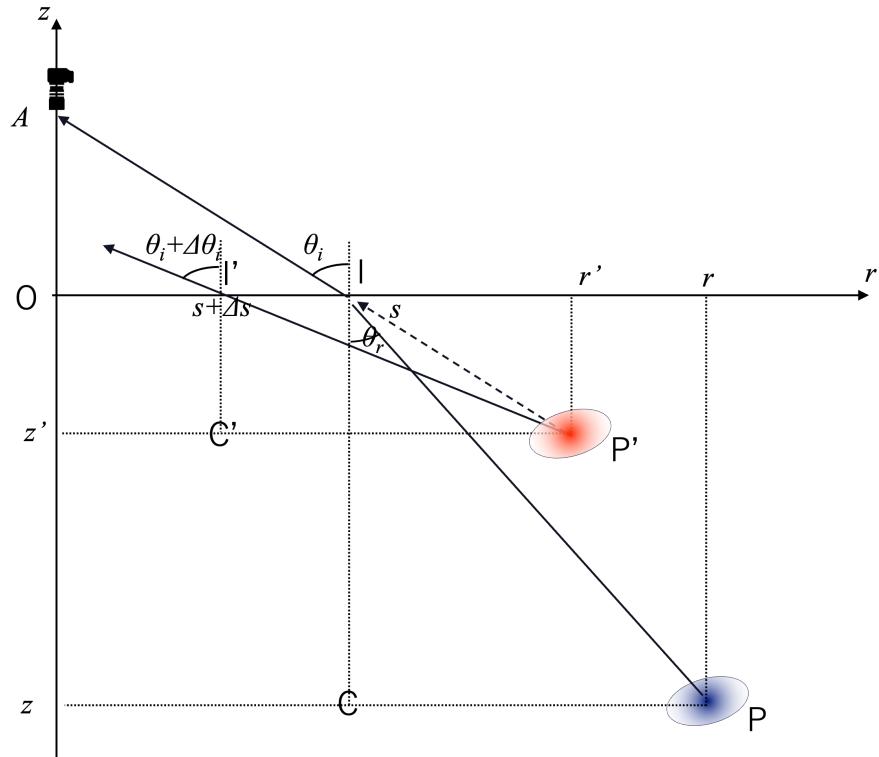


図 4-1: rz 平面における見かけの位置と実際の位置の関係。実際の位置が青色の Gaussian プリミティブで表される場合、見かけの Gaussian は赤色の位置で表される。

4.1 Position Correction (位置の補正)

本手法では、空気と水面の境界における光の屈折を考慮し、水中の 3 次元 Gaussian のパラメータを、見かけの位置に補正する。

今までの説明から、なぜ屈折を考慮した見た目 (Photometric) を再現することで、屈折の影響を除去した正当な 3 次元形状を復元することが可能となるか。Analysis-by-Synthesis の観点から説明する。

まず、カメラ座標系を定義する。カメラ中心を z 軸上の $(0, 0, H)$ 、水面を xy 平面 ($z = 0$)、水面法線ベクトルを $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ とする。ここで、水中の任意の Gaussian の中心位置を $\mathbf{p} = (x, y, z)$ ($z < 0$) とする。水面が平坦かつ静穏であると仮定した場合、屈折現象は視線方向に対して回転対称性を有する。したがって、幾何学的計算を簡略化するため、3 次元座標を動径方向距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を用いて 2 次元の rz 平面へと射影して議論を行う。既存手法 [13, 14, 16, 17] では考慮されていないが、あるカメラ位置か

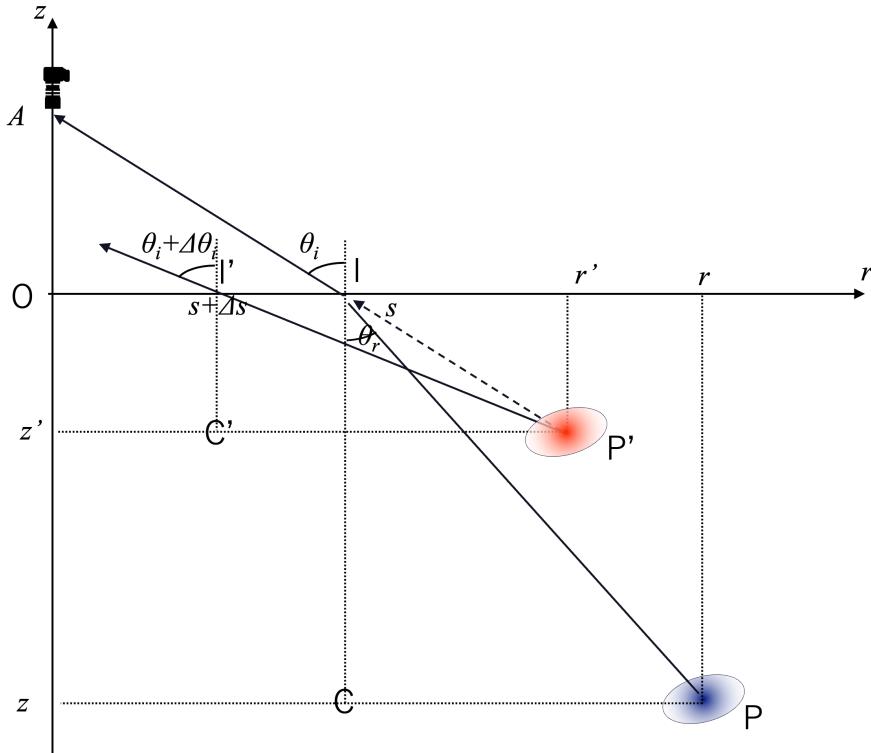


図 4-2: rz 平面における見かけの位置と実際の位置の関係。実際の位置が青色の Gaussian プリミティブで表される場合、見かけの Gaussian は赤色の位置で表される。

らの水中の一点はある見かけの位置に位置に一意にマッピングされる [60-61]。

屈折を考慮した際、カメラから観測される Gaussian の見かけの中心位置 (Apparent position) を $p' = (x', y', z')$ とし、rz 平面上での座標を (r', z') とする。カメラから p' へ向かう光線 (Ray) と水面との交点を $(s, 0)$ ($0 \leq s < r$) と定義する。また、入射角 (水中) を θ_r 、屈折角 (空気中) を θ_i とし、水の屈折率を n (空気の屈折率は 1) とすると、スネルの法則より次式が成立する。

どちらを入射角、屈折角と呼ぶか悩ましい。Ray - Tracing 的に視線をベースに考えると空気中が入射角だし、実際の Radiance を考えると水中が入射角である

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r$$

幾何学的拘束条件およびスネルの法則より、交点 s は以下の s に関する 4 次方程式の解 $0 \leq s < r$ として決定される [60]。

$$(1 - n^2)s^4 + 2(n^2 - 1)rs^3 + ((1 - n^2)r^2 - n^2H^2 + z^2)s^2 + 2n^2H^2rs - n^2H^2r^2 = 0$$

ACRS で誤っていた数式を修正済

この方程式の物理的に妥当な解 s は、Newton 法あるいは Ferrari の公式を用いることで数値的に算

出可能である。

Implementation は後述だが、収束の速さから Newton を使用

交点 s が求まれば、幾何学的な位置関係およびスネルの法則の微分関係 ($\triangle IPC, \triangle IP'C', \triangle I'P'C'$ における微小変化) を用いることで、見かけの位置 (r', z') は θ_i および θ_r の関数として以下の閉形式で導出される。

詳細な導出は Appendix で。ACRS で記述しているのでそれを翻訳

$$\begin{cases} r' = r + (n^2 - 1) \cdot z \cdot \tan^3 \theta_r \\ z' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \theta_i^3}{\cos \theta_r^3} \cdot z \end{cases}$$

ここで $z < 0$ および $n > 1$, $(\theta_i > \theta_r)$ であることから、 $r' < r$ かつ $|z'| < |z|$ が常に成立する。これは、水中の物体が屈折の影響により、実位置よりも「浅く」、かつ「光軸（直下）寄りに」観測されるという物理現象と合致する。なお、カメラ直下 (Nadir view: $r = 0$) の特異点においては、上式は $z' = z/n$ となり、これは従来の航空写真測量等で用いられる近似式 [14] と一致する。

提案手法を 3D Gaussian Splatting の学習プロセスに組み込むためには、この座標変換が微分可能でなければならない。すなわち、実空間上の位置 \mathbf{p} に対する見かけの位置 \mathbf{p}' の勾配 (Jacobian) が必要となる:

$$J_{app} = \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

実装は後述だが、中心差分法ではなく、陰関数定理を用いた。そのため、水面高さや屈折率に対しても勾配を流し、屈折率やカメラ位置も最適化対象にすることができる

本研究では、解析的な導出による計算コストと実装の複雑さを回避するため、中心差分法 (Central finite differences) を用いた数値微分により Jacobian を算出する。例えば、 x 成分に対する偏微分は次式で近似される。

$$\frac{\partial x'}{\partial x} \approx \frac{p'_x(x + \Delta x) - p'_x(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

この微分可能な「位置補正」モジュールにより、単に屈折率と水面高さを与えるだけで、歪んだ観測画像から屈折の影響を除去した正当な 3 次元形状を復元することが可能となる。

参考文献

- ¹T. Fujii, S. A. Kantoush, Y. Takemon, M. M. Al mamari, and T. Sumi, “Impact of the japanese traditional river training structure “seigyu (crib spur dike)” on river morphology and its geometrical changes”, *Nature-Based Solutions* **6**, 100180 (2024).
- ²D. Pasquali and A. Marucci, “The effects of urban and economic development on coastal zone management”, *Sustainability* **13**, 6071 (2021).
- ³J. Thomson, M. Taylor, K. Fryirs, and G. Brierley, “A geomorphological framework for river characterization and habitat assessment”, *Aquatic Conservation: Marine and Freshwater Ecosystems* **11**, 373–389 (2001).
- ⁴F. Giordano, G. Mattei, C. Parente, F. Peluso, and R. Santamaria, “Integrating sensors into a marine drone for bathymetric 3d surveys in shallow waters”, *Sensors* **16**, 41 (2015).
- ⁵M. Kurowski, J. Thal, R. Damerius, H. Korte, and T. Jeinsch, “Automated survey in very shallow water using an unmanned surface vehicle”, *IFAC-PapersOnLine* **52**, 12th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems, Robotics, and Vehicles CAMS 2019, 146–151 (2019).
- ⁶K. Saylam, J. R. Hupp, A. R. Averett, W. F. Gutelius, and B. W. Gelhar, “Airborne lidar bathymetry: assessing quality assurance and quality control methods with leica chiroptera examples”, *International Journal of Remote Sensing* **39**, 2518–2542 (2018).
- ⁷J. L. Schönberger and J.-M. Frahm, “Structure-from-motion revisited”, in Conference on computer vision and pattern recognition (cvpr) (2016).
- ⁸Y. Furukawa and J. Ponce, “Accurate, dense, and robust multiview stereopsis”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **32**, 1362–1376 (2010).
- ⁹Y. Furukawa and C. Hernández, *Multi-view stereo: a tutorial* (now Publishers Inc, 2015).
- ¹⁰S. P. Bemis, S. Micklethwaite, D. Turner, M. R. James, S. Akciz, S. T. Thiele, and H. A. Bangash, “Ground-based and uav-based photogrammetry: a multi-scale, high-resolution mapping tool for structural geology and paleoseismology”, *Journal of Structural Geology* **69**, 163–178 (2014).
- ¹¹C. Gomez and H. Purdie, “Uav- based photogrammetry and geocomputing for hazards and disaster risk monitoring – a review”, *Geoenvironmental Disasters* **3**, 10.1186/s40677-016-0060-y (2016).
- ¹²J. Igihaut, C. Cabo, S. Puliti, L. Piermattei, J. O’ Connor, and J. Rosette, “Structure from motion photogrammetry in forestry: a review”, *Current Forestry Reports* **5**, 155–168 (2019).
- ¹³R. M. Westaway, S. N. Lane, and D. M. Hicks, “Remote sensing of clear-water, shallow, gravel-bed rivers using digital photogrammetry”, *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* **67**, 1271–1282 (2001).
- ¹⁴A. S. Woodget, P. E. Carbonneau, F. Visser, and I. P. Maddock, “Quantifying submerged fluvial topography using hyperspatial resolution uas imagery and structure from motion photogrammetry”, *Earth Surface Processes and Landforms* **40**, 47–64 (2014).
- ¹⁵T. Murase, M. Tanaka, T. Tani, Y. Miyashita, N. Ohkawa, S. Ishiguro, Y. Suzuki, H. Kayanne, and H. Yamano, “A photogrammetric correction procedure for light refraction effects at a two-medium boundary”, *Photogrammetric engineering & remote sensing* **74**, 1129–1136 (2008).
- ¹⁶J. T. Dietrich, “Bathymetric structure-from-motion: extracting shallow stream bathymetry from multi - view stereo photogrammetry”, *Earth Surface Processes and Landforms* **42**, 355–364 (2016).

- ¹⁷A. Makris, V. C. Nicodemou, E. Alevizos, I. Oikonomidis, D. D. Alexakis, and A. Roussos, “Refraction-aware structure from motion for airborne bathymetry”, *Remote Sensing* **16**, 4253 (2024).
- ¹⁸P. Agrafiotis, D. Skarlatos, A. Georgopoulos, and K. Karantzalos, “Shallow water bathymetry mapping from uav imagery based on machine learning”, *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences* **XLII-2/W10**, 9–16 (2019).
- ¹⁹B. Mildenhall, P. P. Srinivasan, M. Tancik, J. T. Barron, R. Ramamoorthi, and R. Ng, “Nerf: representing scenes as neural radiance fields for view synthesis”, *Communications of the ACM* **65**, 99–106 (2021).
- ²⁰B. Kerbl, G. Kopanas, T. Leimkühler, and G. Drettakis, “3d gaussian splatting for real-time radiance field rendering”, *ACM Transactions on Graphics* **42**, 1–14 (2023).
- ²¹日本財団, 日本財団ホームページ, <https://www.nippon-foundation.or.jp/>, Accessed: 2026-01-06.
- ²²GEBCO, *Gebco homepage*, <https://www.gebco.net/>, Accessed: 2026-01-06.
- ²³S. 2030, *Seabed 2030 homepage*, <https://www.seabed2030.org/>, Accessed: 2026-01-06.
- ²⁴L. Trethewey and 千. 尼丁, *深海の地図をつくる : 五大洋の底をめぐる命がけの競争*, jpn (柏書房, 東京, 2025).
- ²⁵K. McMahon, M. Berumen, and S. Thorrold, “Linking habitat mosaics and connectivity in a coral reef seascapes”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **109**, 15372–6 (2012).
- ²⁶国. 水. 河川保全企画室, 河川定期縦横断測量業務実施要領・同解説, https://www.mlit.go.jp/river/shishin_guideline/kasen/pdf/sokuryo_youryo.pdf, Accessed: 2026-01-06, Apr. 2018.
- ²⁷長山学史, 株式会社 第一コンサルタンツ: 1 級河川縦横断測量関連, <https://www.daiichi-consul.com/works/測量・調査-works/4371>, Accessed: 2026-01-11, Sept. 2017.
- ²⁸D. S. Research Databases EBooks, *Ecotone*, <https://www.ebsco.com/research-starters/environmental-sciences/ecotone>, Accessed: 2026-01-06.
- ²⁹A. I. Casalini, P. J. Bouza, and A. J. Bisigato, “Geomorphology, soil and vegetation patterns in an arid ecotone”, *CATENA* **174**, 353–361 (2019).
- ³⁰C. T. Perry and L. Alvarez-Filip, “Changing geo - ecological functions of coral reefs in the anthropocene”, *Functional Ecology* **33**, edited by N. Graham, 976–988 (2018).
- ³¹INSIGHTSIAS, *Basic concepts of ecosystem: ecotone*, <https://www.insightsonindia.com/environment/basic-concepts-of-ecosystem/ecotone-ecological-niche/ecotone/>, Accessed: 2026-01-06.
- ³²国. 水. 河川保全企画室, 河川管理用三次元データ活用マニュアル(案), https://www.mlit.go.jp/river/shishin_guideline/kasen/pdf/3jigen_manual.pdf, Accessed: 2026-01-11, Feb. 2020.
- ³³J. He, S. Zhang, X. Cui, and W. Feng, “Remote sensing for shallow bathymetry: a systematic review”, *Earth-Science Reviews* **258**, 104957 (2024).
- ³⁴P. Kujawa and F. Remondino, “A review of image- and lidar-based mapping of shallow water scenarios”, *Remote Sensing* **17**, 10.3390/rs17122086 (2025).
- ³⁵P. Agrafiotis, K. Karantzalos, A. Georgopoulos, and D. Skarlatos, “Correcting image refraction: towards accurate aerial image-based bathymetry mapping in shallow waters”, *Remote Sensing* **12**, 10.3390/rs12020322 (2020).
- ³⁶G. Mandlburger, M. Kölle, H. Nübel, and U. Soergel, “Bathynet: a deep neural network for water depth mapping from multispectral aerial images”, *PFG - Journal of Photogrammetry, Remote Sensing and Geoinformation Science* **89**, 71–89 (2021).

- ³⁷D. G. Lowe, “Distinctive image features from scale-invariant keypoints”, *International Journal of Computer Vision* **60**, 91–110 (2004).
- ³⁸R. Hartley, “In defense of the eight-point algorithm”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **19**, 580–593 (1997).
- ³⁹M. A. Fischler and R. C. Bolles, “Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography”, in *Readings in computer vision* (Elsevier, 1987), pp. 726–740.
- ⁴⁰B. Triggs, P. F. McLauchlan, R. I. Hartley, and A. W. Fitzgibbon, “Bundle adjustment — a modern synthesis”, in *Vision algorithms: theory and practice* (Springer Berlin Heidelberg, 2000), pp. 298–372.
- ⁴¹C. Sweeney, *Theia multiview geometry library: tutorial & reference*, <http://theia-sfm.org>, Accessed: 2025-12-18.
- ⁴²M. Bleyer, C. Rhemann, and C. Rother, “Patchmatch stereo - stereo matching with slanted support windows”, in *Proceedings of the british machine vision conference 2011*, BMVC 2011 (2011), pp. 14.1–14.11.
- ⁴³J. L. Schönberger, E. Zheng, J.-M. Frahm, and M. Pollefeys, “Pixelwise view selection for unstructured multi-view stereo”, in *Computer vision - eccv 2016* (Springer International Publishing, 2016), pp. 501–518.
- ⁴⁴Y. Liao, Y. Di, H. Zhou, K. Zhu, M. Lu, Q. Duan, and J. Liu, “A survey on neural radiance fields”, *ACM Comput. Surv.* **58**, 10.1145/3758085 (2025).
- ⁴⁵G. Chen and W. Wang, “A survey on 3d gaussian splatting”, *ArXiv abs/2401.03890* (2024).
- ⁴⁶C. Yan, D. Qu, D. Xu, B. Zhao, Z. Wang, D. Wang, and X. Li, “Gs-slam: dense visual slam with 3d gaussian splatting”, in *2024 ieee/cvf conference on computer vision and pattern recognition (cvpr)* (June 2024), pp. 19595–19604.
- ⁴⁷J. Zheng, Z. Zhu, V. Bieri, M. Pollefeys, S. Peng, and A. Iro, “Wildgs-slam: monocular gaussian splatting slam in dynamic environments”, in *Proceedings of the ieee/cvf conference on computer vision and pattern recognition (cvpr)* (2025).
- ⁴⁸H. Matsuki, R. Murai, P. H. J. Kelly, and A. J. Davison, “Gaussian splatting slam”, in *2024 ieee/cvf conference on computer vision and pattern recognition (cvpr)* (June 2024), pp. 18039–18048.
- ⁴⁹A. Moreau, J. Song, H. Dhamo, R. Shaw, Y. Zhou, and E. Pérez-Pellitero, “Human gaussian splatting: real-time rendering of animatable avatars”, in *2024 ieee/cvf conference on computer vision and pattern recognition (cvpr)* (June 2024), pp. 788–798.
- ⁵⁰Z. Shao, Z. Wang, Z. Li, D. Wang, X. Lin, Y. Zhang, M. Fan, and Z. Wang, “Splattingavatar: realistic real-time human avatars with mesh-embedded gaussian splatting”, in *2024 ieee/cvf conference on computer vision and pattern recognition (cvpr)* (June 2024), pp. 1606–1616.
- ⁵¹Y. Chen, H. Xu, C. Zheng, B. Zhuang, M. Pollefeys, A. Geiger, T.-J. Cham, and J. Cai, “Mvsplat: efficient 3d gaussian splatting from sparse multi-view images”, in *Computer vision - eccv 2024* (Springer Nature Switzerland, Oct. 2024), pp. 370–386.
- ⁵²L. S. Aira, G. Facciolo, and T. Ehret, “Gaussian splatting for efficient satellite image photogrammetry”, in *2025 ieee/cvf conference on computer vision and pattern recognition (cvpr)* (June 2025), pp. 5959–5969.
- ⁵³H. Li, W. Song, T. Xu, A. Elsig, and J. Kulhanek, “WaterSplatting: fast underwater 3D scene reconstruction using gaussian splatting”, *3DV* (2025).
- ⁵⁴M. Zwicker, H. Pfister, J. van Baar, and M. Gross, “Ewa volume splatting”, in *Proceedings visualization, 2001. vis '01.* (2001), pp. 29–538.
- ⁵⁵Z. Wang, A. Bovik, H. Sheikh, and E. Simoncelli, “Image quality assessment: from error visibility to structural similarity”, *IEEE Transactions on Image Processing* **13**, 600–612 (2004).
- ⁵⁶D. P. Kingma and J. Ba, “Adam: a method for stochastic optimization”, arXiv preprint arXiv:1412.6980 (2014).

- ⁵⁷G. Grubert, F. Barthel, A. Hilsmann, and P. Eisert, “Improving adaptive density control for 3d gaussian splatting”, in [Proceedings of the 20th international joint conference on computer vision, imaging and computer graphics theory and applications](#) (2025), pp. 610–621.
- ⁵⁸J. T. Barron, B. Mildenhall, D. Verbin, P. P. Srinivasan, and P. Hedman, “Mip-nerf 360: unbounded anti-aliased neural radiance fields”, in [2022 ieee/cvf conference on computer vision and pattern recognition \(cvpr\)](#) (June 2022).
- ⁵⁹B. Huang, Z. Yu, A. Chen, A. Geiger, and S. Gao, “2d gaussian splatting for geometrically accurate radiance fields”, in [Special interest group on computer graphics and interactive techniques conference conference papers](#), SIGGRAPH ’ 24 (July 2024), pp. 1–11.
- ⁶⁰A. B. Nassar, “Apparent depth.”, Physics Teacher **32**, 526–29 (1994).
- ⁶¹G. T. Missailidis and I. Guilhon, “Determination of the position of an image formed by flat refracting surfaces at large angles of incidence: three different didactic approaches”, Revista Brasileira de Ensino de Física **47**, [10.1590/1806-9126-rbef-2024-0417](https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2024-0417) (2025).