Práctica 2
Lenguajes regulares

Ejercicio 1. El alfabeto $\Sigma = \{abrir, leer, escribir, cerrar\}$ representa operaciones que se pueden hacer sobre un archivo. Dar un autómata finito determinístico que acepte el lenguaje en el que:

- Inicialmente el archivo está cerrado.
- Si el archivo está abierto, se lo puede cerrar pero no se lo puede abrir.
- Si el archivo está cerrado, se lo puede abrir pero no se lo puede cerrar.
- Sólo se puede leer y escribir cuando el archivo está abierto.

Ejercicio 2. En el alfabeto $\Sigma = \{a, b, ", \backslash\}$ dar un autómata finito determinístico que acepte el lenguaje de las cadenas que empiezan y terminan con comillas (") y no pueden incluir comillas en el medio salvo en la secuencia de escape \". La contrabarra \ se utiliza exclusivamente en las siguientes secuencias de escape:

\"   \\

Por ejemplo, las siguientes palabras están en el lenguaje:

"aba"   "ba\"ba"   "\\"

y las siguientes palabras no están en el lenguaje:

"aba   "ba"ba"   "\a"

Ejercicio 3. Construir autómatas finitos determinísticos que reconozcan los siguientes lenguajes en el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$:

1. $\{\alpha : |\alpha| \text{ es par}\}$
2. $\{\alpha : |\alpha|_a \text{ es par}\}$
3. $\{\alpha : |\alpha|_a \text{ es par y } |\alpha|_b \text{ es par}\}$
4. $\{\alpha : |\alpha|_a \text{ es par o } |\alpha|_b \text{ es par}\}$
5. $\{\alpha : \ \alpha \text{ incluye a } aab \text{ como subcadena}\}$
6. $\{\alpha : \ \alpha \text{ no incluye a } aab \text{ como subcadena}\}$

7. $\{\alpha : \ \alpha$ incluye a aab como subcadena exactamente una vez$\}$

Ejercicio 4. Construir un autómata finito determinístico en el alfabeto $\Sigma = \{I, V\}$ que acepte el lenguaje de los números romanos del 1 al 8 (I, II, III, IV, V, VI, VII, $VIII$).

Ejercicio 5. Considerar las expresiones regulares extendidas con las siguientes operaciones:

> *Clausura positiva:* se escribe R^+ y representa la repetición una o más veces de cadenas de R, es decir $L(R^+) = L(R)^+$.
>
> *Opción:* se escribe $R?$ y representa la presencia opcional de una cadena de R, es decir $L(R?) = L(R) \cup \{\epsilon\}$.
>
> *Comodín:* se escribe $\bullet$ y representa cualquier símbolo del alfabeto, es decir $L(\bullet) = \{x \mid x \in \Sigma\}$.
>
> *Repetición entre n y m veces (con $n \leq m$):* se escribe $R\{n, m\}$ y representa la repetición entre n y m veces inclusive de cadenas de R, es decir $L(R\{n, m\}) = \bigcup_{i=n}^{m} L(R)^i$.

1. Escribir expresiones regulares que utilicen únicamente las operaciones ya conocidas y que sean equivalentes a R^+, $R?$, $\bullet$ y $R\{n, m\}$ respectivamente (es decir: deben denotar el mismo lenguaje).
2. ¿Cómo es el AFN que resulta de aplicar la construcción de Thompson en cada caso?

Ejercicio 6. Sean R, S, T expresiones regulares. Demostrar que:

1. $L((R^\star)^\star) = L(R^\star)$.
2. $L(R \cdot (S \mid T)) = L((R \cdot S) \mid (R \cdot T))$.
3. $\epsilon \in L(R \cdot S)$ si y sólo si $\epsilon \in L(R)$ y $\epsilon \in L(S)$.
4. $L(R^\star \mid S^\star) \subseteq L((R \mid S)^\star)$.
5. No vale $L((R \mid S)^\star) \subseteq L(R^\star \mid S^\star)$ en general.

Ejercicio 7. Describir el lenguaje denotado por cada una de las siguientes expresiones regulares:

1. $(a|b)a(a|b)^\star$
2. $b^\star ab^\star(a|\epsilon)b^\star$
3. $(ab)^\star(a|\epsilon) \mid (ba)^\star(b|\epsilon)$

Ejercicio 8. Dar expresiones regulares que reconozcan los siguientes lenguajes en el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$:

1. $\{\alpha : |\alpha| \text{ es par}\}$.
2. $\{\alpha : |\alpha|_a \text{ es par}\}$.
3. $\{\alpha : \alpha \text{ incluye a } aab \text{ como subcadena}\}$.
4. $\{\alpha : \alpha \text{ no incluye a } aab \text{ como subcadena}\}$. *Sugerencia:* observar que si hay dos a seguidas, todo el resto de la cadena a partir de ese punto no puede contener ninguna b.

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes expresiones regulares en el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$:

$$a^\star a \mid a^\star b$$

$$a^\star aa$$

1. Aplicar la construcción de Thompson para obtener un AFN que acepta el lenguaje denotado por la expresión regular.
2. Aplicar la construcción de subconjuntos al AFN para obtener un AFD que acepta el mismo lenguaje. *Nota:* recordar que **todos** los estados del AFD deben tener transiciones para **todos** los símbolos del alfabeto.
3. Convencerse de que en todas los lenguajes aceptados por los autómatas son los mismos que los que denotan las expresiones regulares.

Ejercicio 10. Para cada $n \geq 0$, considerar el lenguaje de las palabras capicúa de longitud $2n$ en el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L_n = \{\alpha\alpha^r : \alpha \in \Sigma^\star \text{ y } |\alpha| = n\}$$

1. Definir por inducción en n un autómata finito determinístico D_n que acepte el lenguaje L_n. (El autómata D_{n+1} que acepta el lenguaje L_{n+1} se construye a partir del autómata D_n que acepta el lenguaje L_n).
2. ¿Cuántos estados tiene D_n? Probarlo por inducción.

Ejercicio 11. Suponer que L es un conjunto finito de palabras $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Demostrar que existe un autómata finito determinístico que acepta el lenguaje L.

Ejercicio 12. Sea D_1 un autómata finito determinístico. Construir un AFD D_2 que acepta el lenguaje reverso al que acepta D_1, es decir:

$$L(D_2) = \{\alpha^r : \alpha \in L(D_2)\}$$

Ejercicio 13. Sea D_1 un autómata finito determinístico. Construir un AFD D_2 que acepta el complemento del lenguaje que acepta D_1, es decir:

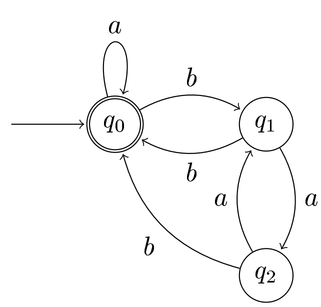
$$L(D_2) = \Sigma^\star \setminus L(D_1)$$

Ejercicio 14. Sean D_1 y D_2 autómatas finitos determinísticos. Demostrar en cada uno de los siguientes casos que se puede construir un autómata finito determinístico D_3 que cumple:

1. $L(D_3) = L(D_1)^\star$
2. $L(D_3) = L(D_1) \cdot L(D_2)$
3. $L(D_3) = L(D_1) \cup L(D_2)$
4. $L(D_3) = L(D_1) \cap L(D_2)$ – utilizar la siguiente identidad de conjuntos: $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, donde A^c denota el complemento de A.

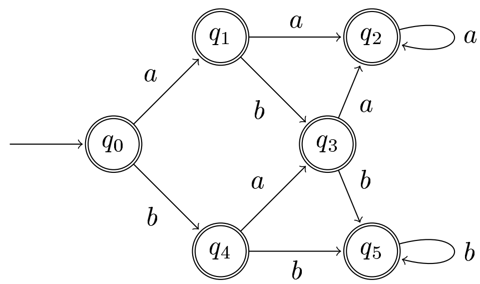
Ejercicio 15. Usando el método de las ecuaciones, construir expresiones regulares que denoten los lenguajes aceptados por cada uno de los siguientes autómatas no determinísticos:

1. $N_1 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\})$ donde δ está dada por las siguientes transiciones:



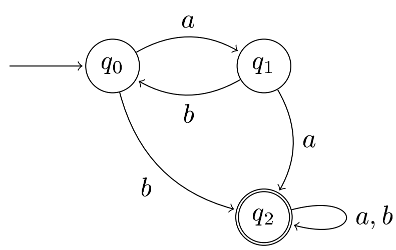
   Nota: si la a se piensa como un 0 y la b como un 1, el lenguaje es el de los números escritos en base binaria que son múltiplos de 3.

2. $N_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\})$ donde δ está dada por las siguientes transiciones. Notar que todos los estados son finales pero el autómata no acepta todas las cadenas en el alfabeto $\{a, b\}$ – por ejemplo, la cadena $aabb$ no es aceptada.



Nota: el lenguaje es el de las cadenas en las cuales a lo sumo un símbolo puede tener repeticiones.

3. $N_3 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ donde δ está dada por las siguientes transiciones:



Nota: el lenguaje es el de las cadenas que no son de la forma $(ab)^\star(a|\epsilon)$.

Ejercicio 16. Usando el lema de *pumping* y las propiedades de clausura de los lenguajes regulares[1] demostrar que los siguientes lenguajes en el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ **no** son regulares:

1. $L_1 = \{\alpha \in \Sigma^\star : \alpha = a^n b^n$ para algún $n \geq 0\}$ = "as seguidas de bs, con igual cantidad de a y b".
2. $L_2 = \{\alpha \in \Sigma^\star : \alpha = a^n b^n a^m$ para algún $n \geq 0$ y algún $m \geq 0\}$ = "palabras en el lenguaje L_1 seguidas de una cantidad arbitraria de as".
3. $L_3 = \{\alpha \in \Sigma^\star : \alpha = \alpha^r\}$ = "palabras capicúa".
4. $L_4 = \{\alpha \in \Sigma^\star : \alpha = \beta\beta$ para alguna $\beta \in \Sigma^\star\}$ = "palabras que constan de dos mitades iguales".
5. $L_5 = \{\alpha \in \Sigma^\star : |\alpha|_a = |\alpha|_b\}$ = "palabras con igual cantidad de a y de b".
6. $L_6 = \{\alpha \in \Sigma^\star : |\alpha|_a > |\alpha|_b\}$ = "palabras con más a que b".
7. $L_7 = \{\alpha \in \Sigma^\star : |\alpha|_a \neq |\alpha|_b\}$ = "palabras con distinta cantidad de a y de b".

[1]P. ej. "la intersección de dos lenguajes regulares es regular".