Jacobi-Matrix

Jacobi Matrix aufstellen:

$$\begin{bmatrix}\dot{p}_e \\ \omega_e\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{P_1}(q) & \cdots & J_{P_n} \\ J_{O_1}(q) & \cdots & J_{O_n}\end{bmatrix}}_{J(q)} \dot{q},$$

Index wird so in die Frames gelegt:
i=0 ist der Origin, bzw. das MCS!
i=n ist letztes Frame, also unser TCP, bzw. der Endeffektor

Herleitung

$p(t) = f(\theta(t))$

$v = \frac{d}{dt} f(\theta(t))$ | chain-rule

$v = \underbrace{\frac{df}{d\theta}(\theta)}_{J} \cdot \dot{\theta}$

$$z_{i-1} = R^0_{i-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ist also die letzte Spalte der Rot-Matrix, die die Rotation des Frames i-1 relativ zum Origin beschreibt

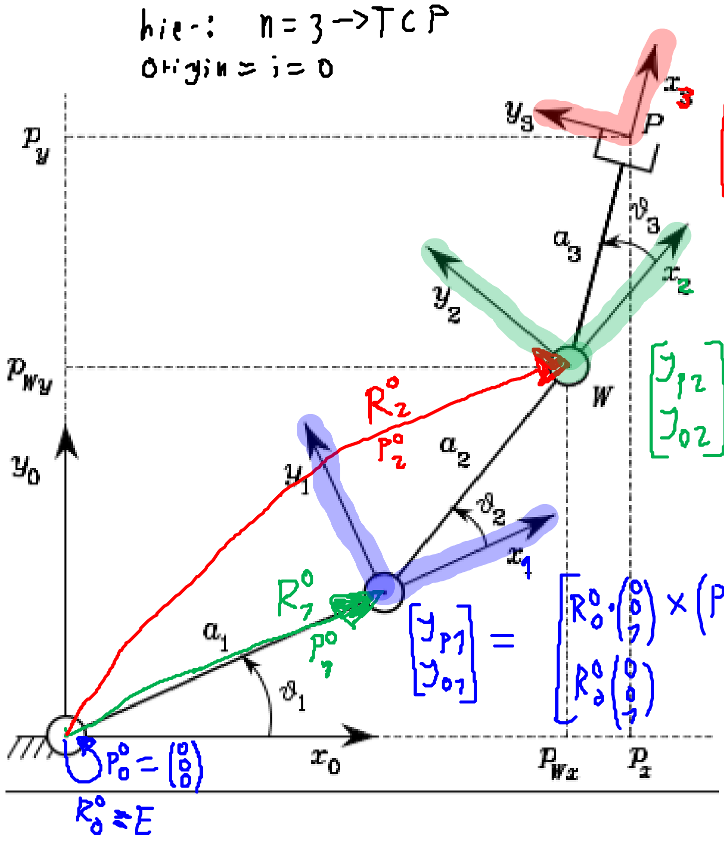
R^0_{i-1} ↳ Rot-Matrix, Frame i-1, relativ zu Frame 0

$$\begin{bmatrix} J_{Pi} \\ J_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{translatorisches Gelenk} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{rotatorisches gelenk} \end{cases}$$

p_e ↳ Position des Endeffektors ↳ p^0_n

p_{i-1} ↳ Position von Frame i-1 rel zu Frame 0 ↳ p^0_{i-1}

hier: $n = 3 \rightarrow$ TCP
Origin $= i = 0$



$$\begin{bmatrix} J_{P3} \\ J_{O3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^0_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times (p^0_3 - p^0_2) \\ R^0_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_{P2} \\ J_{O2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^0_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times (p^0_3 - p^0_1) \\ R^0_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_{P1} \\ J_{O1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^0_0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times (p^0_3 - p^0_0) \\ R^0_0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad \text{mit } p^0_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\&\; R^0_0 = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Singularität:

Wenn J keinen vollen Rank hat, is es ne Singularität(An einer spezifischen Roboterarmorentierung) -> Eine Matrix hat genau dann keinen vollen Rank, wenn det(M)=0

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{\text{determinant}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Beziehung zwischen Enddeffecktor (tip) und Joints:

$$V_{tip} = J\dot{\theta}_{joints}$$

$$\tau_{joints} = J^T f_{tip}$$

τ = Kräfte/Momente in Gelenke

f_{tip} = Kräfte an TCP