Jacobi-Matrix

Jacobi Matrix aufstellen:

$$\begin{bmatrix}\dot{p}_e\\ \omega_e\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{P_1}(q) & \cdots & J_{P_n}\\ J_{O_1}(q) & \cdots & J_{O_n}\end{bmatrix}}_{J(q)} \dot{q},$$

Index wird so in die Frames gelegt:
i=0 ist der Origin, bzw. das MCS!
i=n ist letztes Frame, also unser TCP, bzw. der Endeffektor

Herleitung

$P(t) = f(\theta(t))$

$V = \frac{d}{dt} f(\theta(t))$ | chain-rule

$V = \underbrace{\frac{df}{d\theta}(\theta)}_{J} \cdot \dot{\theta}$

$$z_{i-1} = R^0_{i-1} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ist also die letzte Spalte der Rot-Matrix, die die Rotation des Frames i-1 relativ zum Origin beschreibt

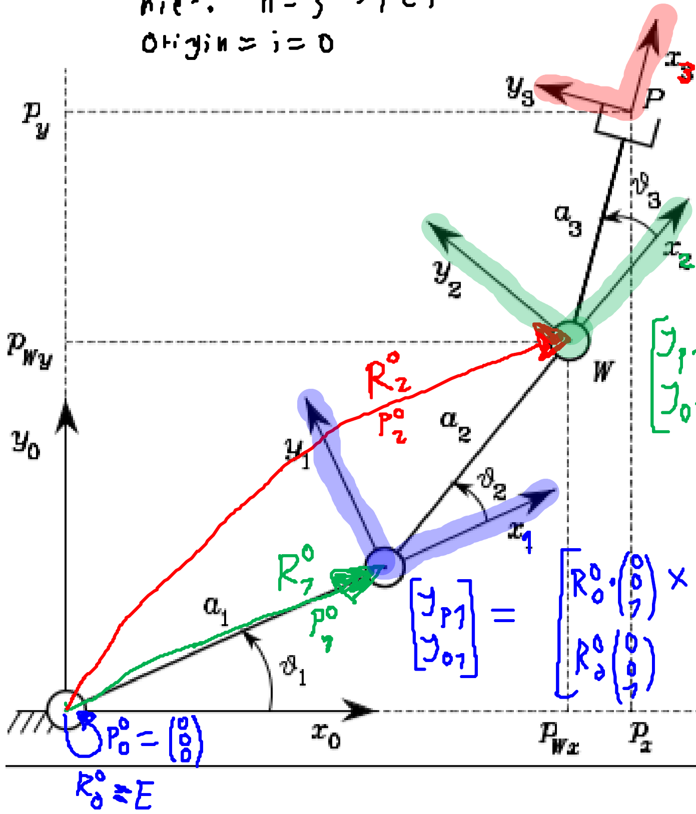
R^0_{i-1}: Rot-Matrix, Frame i-1, relativ zu Frame 0

$$\begin{bmatrix} J_{Pi}\\ J_{Oi}\end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1}\\ 0\end{bmatrix} & \text{translatorisches Gelenk}\\[1ex] \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1})\\ z_{i-1}\end{bmatrix} & \text{rotatorisches gelenk}\end{cases}$$

p_e: Position des Endeffektors $\to p^0_n$

p_{i-1}: Position von Frame i-1 rel zu Frame 0 $\to p^0_{i-1}$

hier: n = 3 -> TCP
Origin = i = 0



$$\begin{bmatrix} J_{P3}\\ J_{O3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^0_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \left(p^0_3 - p^0_2\right)\\ R^0_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_{P2}\\ J_{O2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^0_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \left(p^0_3 - p^0_1\right)\\ R^0_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_{P1}\\ J_{O1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^0_0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \left(p^0_3 - p^0_0\right)\\ R^0_0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{bmatrix}, \quad \text{mit } p^0_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\&\; R^0_0 = E = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Singularität:

Wenn J keinen vollen Rank hat, is es ne Singularität(An einer spezifischen Roboterarmorentierung) -> Eine Matrix hat genau dann keinen vollen Rank, wenn det(M)=0

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{\text{determinant}} \begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Beziehung zwischen Enddeffecktor (tip) und Joints:

$$V_{tip} = J\,\dot{\theta}_{joints}$$

$$\tau_{joints} = J^T f_{tip}$$

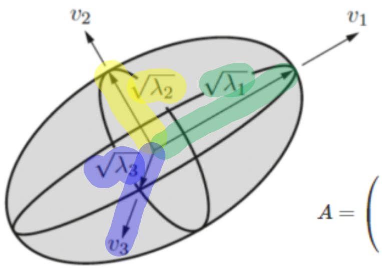
τ = Kräfte/Momente in Gelenke

f_{tip} = Kräfte an TCP

manipulability ellipsoid

- Instead of looking at the shape of the ellipsoid, it is useful to define a single measure
- Semi-axes are defined by singular values of J

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T)},\ \text{for } i = 1, \ldots, r$$



$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1.) Berechnen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -1 & 0 \\ 2 & (0-\lambda) & 0 \\ -2 & 2 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\cdot(0-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - (-1-\lambda)\cdot 2\cdot(-1) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2\end{aligned}$$

2.) Berechnen der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

(vgl. Kapitel "Kubische Gleichungen lösen")

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -1;$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Different measures for manipulability:

1. ratio of the longest and shortest semi-axes of the manipulability ellipsoid

$$\mu_1(A) = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(A)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(A)}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}} \geq 1$$

(smaller values are better)

2. condition number of the matrix A

$$\mu_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \geq 1$$

3. volume of the manipulability ellipsoid

$$\mu_3(A) = \sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots} = \sqrt{\det(A)}.$$

(a larger value is better)

force ellipsoid

$$(JJ^T)^{-1}$$