1 2025 年 10 月数学联考

例题 1.1

不等式 $ax^2+ax-1<0$ 对一切实数 x 恒成立的 a 的取值集合为 $\mathbb{A}$，集合 $\mathbb{B}=\{x|x^2+mx-2m-2<0\}$.

① 求集合 $\mathbb{A}$;

② 若“$x\in\mathbb{A}$”是“$x\in\mathbb{B}$”的充分条件，求 m 的取值范围.

---

① 设函数 $f(x)=ax^2+ax-1$。要使不等式 $f(x)<0$ 对一切实数 x 恒成立, 必须分情况讨论 a 的取值.

- 若 $a>0$, 则二次函数开口向上, 当 $x\to\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$, 不可能恒小于 0.
- 若 $a=0$, 不等式变为 $-1<0$, 恒成立. 所以 $a=0$ 是解的一部分.
- 若 $a<0$, 二次函数开口向下. 为使 $f(x)<0$ 恒成立, 其图像必须完全在 x 轴下方, 这意味着它与 x 轴没有交点, 即判别式必须小于 0. $\Delta=a^2-4(a)(-1)=a^2+4a<0$. 解得 $a(a+4)<0$, 即 $-4<a<0$.

综合以上情况, a 的取值范围是 $(-4,0]$. 因此, $\mathbb{A}=\{a|-4<a\le 0\}=(-4,0]$.

② 题目条件“$x\in\mathbb{A}$”是“$x\in\mathbb{B}$”的充分条件, 即 $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{B}$.
将第 (1) 问求出的集合 $\mathbb{A}$ 代入, 有 $(-4,0]\subseteq\{x|x^2+mx-2m-2<0\}$.
设 $g(x)=x^2+mx-2m-2$. 要使 $(-4,0]\subseteq\{x|g(x)<0\}$, 需要 $g(x)<0$ 在区间 $(-4,0]$ 上恒成立.
由于 $g(x)$ 是一个开口向上的抛物线, 要使其在闭区间上小于 0, 只需保证在区间端点处函数值小于等于 0 即可.
即 $g(-4)\le 0$ 且 $g(0)\le 0$.

- $g(-4)=(-4)^2+m(-4)-2m-2=16-4m-2m-2=14-6m\le 0 \implies m\ge\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$.
- $g(0)=0^2+m(0)-2m-2=-2m-2\le 0 \implies -2m\le 2 \implies m\ge -1$.

要同时满足两个条件, 必须取它们的交集, 即 $m\ge\frac{7}{3}$. 因此, m 的取值范围是 $[\frac{7}{3},+\infty)$. ■

例题 1.2

① 若 $ax^2-ax+1>0$ 的解集为 $\{x|x\ne b\}$，求 a,b 的值；

② 当 $x\ge 1$ 时，$ax^2-ax+1>-a+2$ 恒成立，求 a 的取值范围；

③ 求关于 x 的不等式 $ax^2-ax+1>3x-2$ 的解集。

---

① 因为不等式 $ax^2-ax+1>0$ 的解集为 $\{x|x\ne b\}$, 说明抛物线 $y=ax^2-ax+1$ 开口向上, 且与 x 轴只有一个交点.
所以 $a>0$ 且判别式 $\Delta=(-a)^2-4a=a^2-4a=0$.
解得 $a=4$.
此时不等式为 $4x^2-4x+1>0$, 即 $(2x-1)^2>0$, 解集为 $\{x|x\ne\frac{1}{2}\}$.
所以 $b=\frac{1}{2}$.
综上, $a=4,b=\frac{1}{2}$.

② 当 $x\ge 1$ 时, $ax^2-ax+1>-a+2$ 恒成立, 即 $a(x^2-x+1)-1>0$ 恒成立.
设 $g(x)=a(x^2-x+1)-1$.
令 $h(x)=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$.
当 $x\ge 1$ 时, $h(x)$ 是增函数, 所以 $h(x)_{\min}=h(1)=1$.

- 若 $a>0$, $g(x)$ 的最小值为 $a\cdot h(x)_{\min}-1=a-1$. 要使 $g(x)>0$ 恒成立, 只需 $a-1>0$, 解得 $a>1$.
- 若 $a=0$, 不等式变为 $1>2$, 不成立.
- 若 $a<0$, $g(x)$ 随 $h(x)$ 的增大而减小. 由于 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上无上界, $g(x)$ 无下界, 不可能恒大于 0.

所以 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.∞

③ 不等式 $ax^2 - ax + 1 > 3x - 2$ 可化为 $ax^2 - (a+3)x + 3 > 0$. 因式分解得 $(ax-3)(x-1) > 0$.

- 当 $a > 0$ 时, 抛物线开口向上. 两根为 $x = 1$ 和 $x = 3/a$.
  - 若 $a > 3$, 则 $3/a < 1$. 解集为 $x < 3/a$ 或 $x > 1$.
  - 若 $a = 3$, 则 $3/a = 1$. 不等式为 $3(x-1)^2 > 0$, 解集为 $x \neq 1$.
  - 若 $0 < a < 3$, 则 $3/a > 1$. 解集为 $x < 1$ 或 $x > 3/a$.
- 当 $a = 0$ 时, 不等式为 $-3x + 3 > 0$, 解集为 $x < 1$.
- 当 $a < 0$ 时, 抛物线开口向下. 两根 $x = 1$ 和 $x = 3/a$. 因为 $a < 0$, 所以 $3/a < 0 < 1$. 解集为 $3/a < x < 1$. ■