1 灵宝一高数学竞赛

一、单选题（本题共 8 小题，每题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，仅一项符合题目要求）

① 下列函数中最小值为 4 的是（）

$$A.\ y = 4x + \frac{1}{x}$$
$$C.\ \text{当} x < \frac{3}{2}\text{ 时，} y = 2x - 1 + \frac{1}{2x-3}$$
$$D.\ y = \sqrt{x^2+5} + \frac{4}{\sqrt{x^2+5}}$$

② 购买同一种物品，可采用两种策略：第一种不考虑价格升降，每次购买数量固定；第二种不考虑价格升降，每次购买花费固定。假设连续两天购买，第一天价格为 p_1，第二天价格为 p_2（$p_1 \neq p_2$），则下列选项正确的是（）

A. 第一种方式购买单价为 $\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}$

B. 第一种方式购买单价为 $\frac{p_1+p_2}{2}$

C. 第一种方式购买单价更低

D. 第二种方式购买单价更低

③ 函数 $y = [x]$ 称为高斯函数（取整函数），表示不大于 x 的最大整数（如 $[1.5] = 1, [-2.3] = -3, [3] = 3$）。则不等式 $4[x]^2 - 12[x] + 5 \leq 0$ 成立的充分不必要条件是（）

A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$

B. $[1, 2]$

C. $[1, 3)$

D. $[1, 3]$

④ 已知函数 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ 在区间 $[0, m]$ 上的值域为 $[1, 5]$，则 m 的取值范围是（）

A. $(0, 2]$

B. $(0, 4]$

C. $[2, 4]$

⑤ 若函数 $y = f(x)$ 的大致图象如图所示（图略），则 $f(x)$ 的解析式可能是（）

$$A.\ f(x) = \frac{x}{|x|-1}$$
$$B.\ f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$
$$C.\ f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$
$$D.\ f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

⑥ 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2}, & x\in[0,\frac{1}{2})\\ 3x^2, & x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$，若存在 $x_1<x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1\cdot f(x_2)$ 的取值范围为 ()

A. $\left[\frac{3}{4},1\right)$

B. $\left[\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

D. $\left[\frac{3}{8},3\right)$

C. $\left[\frac{3}{16},\frac{1}{2}\right)$

⑦ 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，对任意 $x_1\neq x_2$ 都有 $[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)>0$。若 $f(x^2-3x+a)>f(x-2a^2-6a)$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(4,+\infty)$

B. $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

D. $\left[-\frac{1}{2},4\right]$

⑧ 定义 $min\,M$ 表示数集 M 中的最小值，已知不全为 0 的实数 x,y，二元函数 $f(x,y)=min\left\{x,\frac{x}{x^2+y^2}\right\}$，则 $f(x,y)$ 的最大值为 ()

A. 0

C. 1

D. 2

二、多项选择题（本题共 3 小题，每题 6 分，共 18 分。全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错得 0 分）

9. 下列命题为假命题的是 ()

A. 命题“$\exists x_0>0, x_0^2-5x_0+6>0$”的否定是“$\forall x\leq 0, x^2-5x+6\leq 0$”

B. 若函数$f(x+1)$ 的定义域为$[1,4]$，则函数$f(x)$ 的定义域为$[2,5]$

C. 二次函数$y=x^2-x-6$ 的零点为$(-2,0)$ 和$(3,0)$

D.“$a^2=b^2$”是“$a=b$”的必要不充分条件

10. 已知 a,b 为正实数，且 $ab+2a+b=16$，则 ()

A. $2a+b$ 的最小值为 8

B. $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}$ 的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. ab 的最大值为 8

D. $b+\frac{1}{9-a}$ 的最小值为$\frac{6\sqrt{2}-1}{10}$

11. 给出下列四个命题，其中真命题的是 ()

A. 已知函数$f(x)=x^2-(2a+1)x+5$，若对任意$x_1,x_2\in(4,+\infty)$，当$x_1>x_2$ 时总有$f(x_1)-f(x_2)>x_2-x_1$，则实数a 的取值范围是$(-\infty,4]$

B. 存在不同的实数k，使得关于x 的方程$(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$ 分别恰有 2 个和 4 个不同实根

C. 存在不同的实数k，使得关于x 的方程$(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$ 分别恰有 5 个和 8 个不同实根

D. 存在不同的实数k，使得关于x 的方程$(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$ 分别恰有 0 个和 3 个不同实根

三、填空题（本题共 3 小题，每题 5 分，共 15 分）

12. 不等式 $\dfrac{2x-1}{x+2} \le 1$ 的解集为 ________。
13. 下列几个命题：

    (a) ① 函数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 2]$；
    (b) ② 函数 $f(x) = 2|x-2| + 5|x+1|$ 的最小值是 6；
    (c) ③ 函数 $y = x + \sqrt{x-1}$ 的值域为 $[0, +\infty)$；
    (d) ④ 已知 $f(x) + 2f(-x) = 3x + x^2$，则 $f(1) = -\dfrac{8}{3}$；
    (e) ⑤ 命题 $p: y \ge 3$ 是命题 $q: y$ 的最小值是 3 的充要条件；
    (f) ⑥ 若函数 $f(x) = \begin{cases} (2+3a)x - 1, & x > 1 \\ 4ax - x^2, & x \le 1 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 $[\dfrac{1}{2}, 2]$。

    其中正确命题的序号分别是 ________。
14. 已知 a, b 均为正数，且 $a + b = 1$，$c > 1$，则 $\left(\dfrac{a^2+1}{2ab} - 1\right)c + \dfrac{\sqrt{2}}{c-1}$ 的最小值为 ________。

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15. 已知命题 p：实数 x 满足 $x^2 - 10x + 16 \le 0$，命题 q：实数 x 满足 $x^2 - 4mx + 3m^2 \le 0$（其中 $m > 0$）。
    (1) 若 $m = 1$，且命题 p 和 q 中至少有一个为真命题，求实数 x 的取值范围；
    (2) 若 q 是 p 的充分条件，求实数 m 的取值范围。
16. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + b$。
    (1) 若 $f(x) \le 0$ 的解集为 $\{x \mid 1 \le x \le 2\}$，求 a, b 的值；
    (2) 若 $b = 2$，求不等式 $f(x) \le 0$ 的解集；
    (3) 在 (1) 的条件下，若对任意 $x > 1$，不等式 $\dfrac{f(x)+1}{ax-1} \ge 2k^2 + k$ 恒成立，求实数 k 的取值范围。
17. 某学校要建造一个长方体形体育馆，其地面面积为 240 m^2，体育馆高 5 m。甲工程队报价为：馆顶每平方米造价 100 元，前后两侧墙壁平均造价每平方米 150 元，左右两侧墙壁平均造价每平方米 250 元，设体育馆前墙长为 x 米。
    (1) 当 $x \in (0, 50)$ 时，体育馆前墙长度为多少时，甲工程队报价最低？
    (2) 当 $x \in (0, t]$（$0 << t < 50$）时，乙工程队给出的整体报价为 $12000 + 500\left(\dfrac{a+1152}{x} + a\right)$ 元（$a > 0$）。若无论体育馆前墙长度 x 为多少米，乙工程队都能中标，试求 a 的取值范围。
18. 问题：已知 a, b, c 均为正实数，且 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$，求证：$a + b + c \ge 9$（当且仅当 $a = b = c = 3$ 时，等号成立）。
    证明：$a + b + c = (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) = 3 + \left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}\right) + \left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}\right) + \left(\dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{c}\right) \ge 3 + 2 + 2 + 2 = 9$。
    学习上述解法并解决下列问题：
    (1) 已知 a, b, c 均为正实数，且 $a + b + c = 4$，求 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b} + \dfrac{9}{c}$ 的最小值；
    (2) 已知 a, b, x, y 均为正实数，且 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，求证：$a^2 + b^2 \ge (x+y)^2$；
    (3) 求 $T = \sqrt{3-2t} + \sqrt{t-1}$ 的最大值，并求出使得 T 取得最大值时 t 的值。
19. 已知函数 $f(x) = |3x^2 - ax| + x^2 - x + 1$（$x > 0$），$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$。
    (1) 若 $a = 1$，求函数 $f(x)$ 的值域；
    (2) 若 $a \le 0$，试判断 $g(x)$ 的单调性并证明；
    (3) 对 $\forall t \in [3, 4]$，$\exists x_1, x_2 \in [\dfrac{1}{8}, 2]$（$x_1 \ne x_2$），使得 $t = g(x_1) = g(x_2)$，求实数 a 的取值范围。