1 数学作业

例题 1.1

若正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 则 $ax^2+(3+\frac{1}{b})x-a=0$ 的根的最大值为?

设方程两根分别为 α, β，其中 $\alpha \le \beta$。由韦达定理，$\alpha \times \beta = \frac{-a}{a} = -1$。因为 a 是正实数，所以方程必有一正根和一负根。因此，较大根 $\beta > 0$。

将 β 代入原方程，我们得到：$a\beta^2 + \left(3+\frac{1}{b}\right)\beta - a = 0$

整理后可得：$a(1-\beta^2) = \left(3+\frac{1}{b}\right)\beta$

因为 $a>0, b>0, \beta>0$，所以 $\left(3+\frac{1}{b}\right)\beta > 0$。因此，$a(1-\beta^2) > 0$，可推得 $1-\beta^2>0$，即 $0<\beta<1$。

又因为 a, b 为正实数且 $a+b=1$，所以 $0<a<1$ 且 $0<b<1$。

将 $a=1-b$ 代入整理后的方程：$(1-b)(1-\beta^2) = \left(3+\frac{1}{b}\right)\beta = \frac{3b+1}{b}\beta$

化简后得：$b-b^2-b\beta^2+b^2\beta^2 = 3b\beta+\beta$

将上式整理为关于 b 的二次方程：$(\beta^2-1)b^2+(1-3\beta-\beta^2)b-\beta=0$

再两边同时 $\times -1$ 得：$(1-\beta^2)b^2+(\beta^2+3\beta-1)b+\beta=0$

因为 b 是实数，所以该二次方程的判别式 $\Delta \ge 0$。

$\Delta = (\beta^2+3\beta-1)^2 - 4(1-\beta^2)\beta \ge 0$

$\beta^4+9\beta^2+1+6\beta^3-2\beta^2-6\beta-4\beta+4\beta^3 \ge 0$

$\beta^4+10\beta^3+7\beta^2-10\beta+1 \ge 0$

由于 $\beta \ne 0$，不等式两边同除以 β^2：$\beta^2+10\beta+7-\frac{10}{\beta}+\frac{1}{\beta^2} \ge 0$

$\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)+10\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)+7 \ge 0$

令 $y=\beta-\frac{1}{\beta}$，则 $\beta^2+\frac{1}{\beta^2}=y^2+2$。

代入不等式：$y^2+2+10y+7 \ge 0$

$y^2+10y+9 \ge 0$

$(y+1)(y+9) \ge 0$

解得 $y \ge -1$ 或 $y \le -9$。

即 $\beta-\frac{1}{\beta} \ge -1$ 或 $\beta-\frac{1}{\beta} \le -9$。因为 $0<\beta<1$，所以 $\beta-\frac{1}{\beta}<0$。

- 对于 $\beta-\frac{1}{\beta} \ge -1$：
  因为 $\beta>0$，不等式两边同乘 β 得 $\beta^2-1 \ge -\beta$，即 $\beta^2+\beta-1 \ge 0$。
  解得 $\beta \ge \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\beta \le \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$。
  此解与 $0<\beta<1$ 的区间没有交集，故此情况不成立。

- 对于 $\beta-\frac{1}{\beta} \le -9$：
  因为 $\beta>0$，不等式两边同乘 β 得 $\beta^2-1 \le -9\beta$，即 $\beta^2+9\beta-1 \le 0$。
  解得 $\frac{-9-\sqrt{85}}{2} \le \beta \le \frac{-9+\sqrt{85}}{2}$。

综合 $0<\beta<1$ 和上述解集，我们得到 β 的取值范围是 $0<\beta \le \frac{-9+\sqrt{85}}{2}$。

因此，根 β 的最大值为 $\frac{-9+\sqrt{85}}{2}$。

解法二：

设方程 $ax^2+\left(3+\frac{1}{b}\right)x-a=0$ 的两根为 x_1,x_2。

由韦达定理得：$x_1x_2=\frac{-a}{a}=-1$。这表明方程必有一正根和一负根。我们要求的是根的最大值，即正根的最大值。

设正根为 x（$x>0$），则另一根为 $-\frac{1}{x}$。

两根之和为$x_1+x_2=x-\frac{1}{x}=-\frac{3+\frac{1}{b}}{a}=-\frac{3b+1}{ab}$。

利用“1 的代换”得：$x-\frac{1}{x}=-\frac{3b+1}{ab}=-\frac{3b+a+b}{ab}=-\left(\frac{4b+a}{ab}\right)=-\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)$

我们要求 x 的最大值：

$\because x>0$，$f(x)=x-\frac{1}{x}$ 是一个增函数。

$\therefore$ 要使 x 最大，就需要使 $x-\frac{1}{x}$最大。

这等价于求 $-\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 的最大值，也就是求 $\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 的最小值。

权方和： $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{(2+1)^2}{a+b}=9$。当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}$，即 $a=2b$ 时取等。

又 $\because a+b=1\therefore 2b+b=1\implies b=\frac{1}{3},a=\frac{2}{3}$。

$\therefore\left(x-\frac{1}{x}\right)_{max}=-9$。即 $x^2+9x-1=0$。

解得 $x=\frac{-9\pm\sqrt{81+4}}{2}$。

又 $\because x>0$，$\therefore x=\frac{-9+\sqrt{85}}{2}$。

■