1 常见习题

例题 1

已知 $x>0,y>0$ 且 $x^2+y^2=x-y$，求 $\dfrac{x+y+1}{x+2y}$ 的最小值。

解：$\because x^2+y^2=x-y \iff \dfrac{x^2+y^2}{x-y}=1$

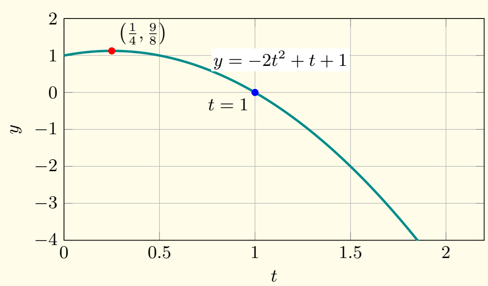
$$\therefore \frac{x+y+1}{x+2y}=\frac{x+y+\frac{x^2+y^2}{x-y}}{x+2y}=\frac{\frac{(x+y)\times(x-y)}{x-y}+\frac{x^2+y^2}{x-y}}{x+2y}=\frac{\frac{2x^2}{x-y}}{x+2y}=\frac{2x^2}{(x-y)(x+2y)}=\frac{2x^2}{x^2+xy-2y^2}$$

分子分母同除以x^2得：$\dfrac{2}{1+\frac{y}{x}-2(\frac{y}{x})^2}$。

令$\dfrac{y}{x}=t$（$t>0$），则分母变为：$1+t-2t^2$，整理得：$-2t^2+t+1$

当$t=-\dfrac{1}{2\times(-2)}$，即$t=\dfrac{1}{4}$时取得最大值$\dfrac{9}{8}$。

$$\therefore \frac{2}{1+\frac{y}{x}-2(\frac{y}{x})^2}\geq\frac{2}{\frac{9}{8}}=\frac{16}{9}$$



例题 2

已知正实数 a,b 满足 $\dfrac{1}{(2a+b)b}+\dfrac{2}{(2b+a)a}=1$，求 ab 的最大值。

解一：

左右同乘以ab得：$\dfrac{a}{2a+b}+\dfrac{2b}{2b+a}=ab$

令$\begin{cases}2a+b=m\\2b+a=n\end{cases}$ 则：$\begin{cases}a=\dfrac{2m-n}{3}\\b=\dfrac{2n-m}{3}\end{cases}$

$\therefore ab=\dfrac{\frac{2m-n}{3}}{m}+\dfrac{2\times\frac{2n-m}{3}}{n}=\dfrac{2m-n}{3m}+\dfrac{4n-2m}{3n}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}-(\dfrac{n}{3m}+\dfrac{2m}{3n})$

$\because \dfrac{n}{3m}+\dfrac{2m}{3n}\geq 2\sqrt{\dfrac{n}{3m}\cdot\dfrac{2m}{3n}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ （当$3n^2=6m^2$，即$n=\sqrt{2}m$，取等）

$\therefore ab_{max}=2-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

解二：

$\therefore ab=\dfrac{1}{2+\frac{b}{a}}+\dfrac{2}{2+\frac{a}{b}}$

令$\dfrac{b}{a}$为t（$t>0$），则原式变为：$ab=\dfrac{1}{2+t}+\dfrac{2}{2+\frac{1}{t}}$，显然$ab<\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2}<2$

即求$\dfrac{1}{2+t}+\dfrac{2}{2+\frac{1}{t}}$的最大值，为了方便设为$K$（$K=ab$，$k\in(0,2)$），则：

$K=\dfrac{1}{2+t}+\dfrac{2}{2+\frac{1}{t}}=\dfrac{1}{2+t}+\dfrac{2t}{2t+1}$

两边同乘以$(2+t)(2t+1)$，得

$(2+t)(2t+1)=(2t+1)+2t(t+2)$

化简，得：$(2K-2)t^2+(5K-6)t+2K-1=0$

$\because$ 等式成立，方程一定有解

$\therefore \Delta=(5K-6)^2-4(2K-2)(2K-1)=9K^2-36K+28\geq 0$

$\therefore K\geq 2+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$或$K\leq 2-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

又$\because K\in(0,2)$

$\therefore K\in(0,2-\dfrac{2\sqrt{2}}{3})$

ab的最大值为$,2-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

例题 3 (待定系数法)

已知 $a,b>0,$ 则$\dfrac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 的最大值？

对于 $a^2+b^2+c^2$ 形式，可以利用待定系数法配凑，例如：

$$a^2+b^2+c^2=a^2+\lambda b^2+(1-\lambda)b^2+c^2\geq 2\sqrt{\lambda}ab+2\sqrt{1-\lambda}bc$$

这样就会让 a,b,c 三者联系起来。把例中的 1 当作 $c^2=1$，则：

原式分母 $\geq 2\sqrt{\lambda}ab+2\sqrt{1-\lambda}b\cdot 1$

分子 $=ab+b$，ab项系数为1，b项系数也为1。我们需要对应项成比例：

$\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}$

解得$\lambda=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 原式 $\leq\dfrac{ab+b}{\sqrt{2}(ab+b)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

例题 4

已知 $a>0$，$b>0$，求$\dfrac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 的最大值。

利用上例的配凑思想可解。

例题 5

已知x，$y>0$，且$x+2y+\sqrt{xy}=2$，求$x+3y$的最大值。

利用基本不等式可知：$\sqrt{xy}\leq\dfrac{x+y}{2}$，原式变为：$2\leq x+2y+\dfrac{x+y}{2}$。

此时对比题目要求的结果是 x+3y。思考：如何才能让 $x+2y+\dfrac{x+y}{2}$（通过某种变换）$\rightarrow\quad x+3y$? 显然 $\dfrac{x+y}{2}$ 中，分子 x，y 前面有某种系数就可以。

但是的 $x+y$ 是由 $\sqrt{xy}$ 得来的，这是题目给出的条件，我们无法修改，我们应该如何做?

没办法改变条件，但可以对条件进行变形，利用 $a\times\dfrac{1}{a}$ 的特性，把 $\sqrt{xy}\rightarrow\sqrt{(a\cdot x)\times\dfrac{y}{a}}$；由基本不等式得：$\sqrt{(ax)\times\dfrac{y}{a}}\leq\dfrac{ax+\dfrac{y}{a}}{2}$

现在的问题就变成如何求出 a 的值。

原式变形为：$2=x+2y+\sqrt{(ax)\times\dfrac{y}{a}}\leq x+2y+\dfrac{ax+\dfrac{y}{a}}{2}=(\dfrac{a}{2}+1)x+(2+\dfrac{1}{2a})y$ 对比要求的结果：$x+3y$，x,y的系数比$1:3$

$\therefore\dfrac{\dfrac{a}{2}+1}{2+\dfrac{1}{2a}}=\dfrac{1}{3}\iff 3a^2+2a-1=0$

解得：$a=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\\ -\dfrac{4}{3}\end{cases}$

其实这二个解均可使用，但对于基本不等式，如果配的系数为负数，不满足使用条件，麻烦，取 $\dfrac{1}{3}$ 即可。

$\therefore 2=x+2y+\sqrt{(\frac{1}{3}x)\times\frac{y}{\frac{1}{3}}}=x+2y+\sqrt{\frac{x}{3}\times 3y}\le x+2y+\dfrac{\frac{x}{3}+3y}{2}=\dfrac{7}{6}x+\dfrac{7y}{2}=\dfrac{7}{6}(x+3y)$

$\therefore x+3y\ge 2\times\dfrac{6}{7}=\dfrac{12}{7}$