

## 例题 1

已知  $x > 0, y > 0$  且  $x^2 + y^2 = x - y$ , 求  $\frac{x+y+1}{x+2y}$  的最小值。

解:  $\because x^2 + y^2 = x - y \iff \frac{x^2 + y^2}{x - y} = 1$

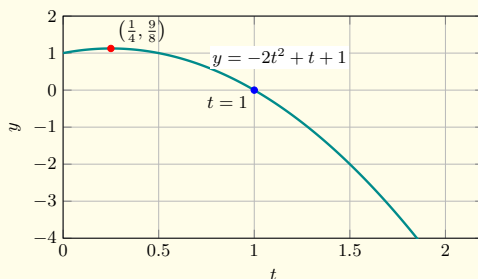
$$\therefore \frac{x+y+1}{x+2y} = \frac{x+y+\frac{x^2+y^2}{x-y}}{x+2y} = \frac{\frac{(x+y) \times (x-y)}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x-y}}{x+2y} = \frac{\frac{2x^2}{x-y}}{x+2y} = \frac{2x^2}{(x-y)(x+2y)} = \frac{2x^2}{x^2 + xy - 2y^2}$$

分子分母同除以  $x^2$  得:  $\frac{2}{1 + \frac{y}{x} - 2(\frac{y}{x})^2}$ 。

令  $\frac{y}{x} = t$  ( $t > 0$ ), 则分母变为:  $1 + t - 2t^2$ , 整理得:  $-2t^2 + t + 1$

当  $t = -\frac{1}{2 \times (-2)}$ , 即  $t = \frac{1}{4}$  时取得最大值  $\frac{9}{8}$ 。

$$\therefore \frac{2}{1 + \frac{y}{x} - 2(\frac{y}{x})^2} \geq \frac{2}{\frac{9}{8}} = \frac{16}{9}$$



## 例题 2

已知正实数  $a, b$  满足  $\frac{1}{(2a+b)b} + \frac{2}{(2b+a)a} = 1$ , 求  $ab$  的最大值。

解一:

左右同乘以 $ab$ 得:  $\frac{a}{2a+b} + \frac{2b}{2b+a} = ab$ 

$$\text{令} \begin{cases} 2a+b=m \\ 2b+a=n \end{cases} \text{ 则: } \begin{cases} a=\frac{2m-n}{3} \\ b=\frac{2n-m}{3} \end{cases}$$

$$\therefore ab = \frac{\frac{2m-n}{3}}{m} + \frac{2 \times \frac{2n-m}{3}}{n} = \frac{2m-n}{3m} + \frac{4n-2m}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \left(\frac{n}{3m} + \frac{2m}{3n}\right)$$

$$\therefore \frac{n}{3m} + \frac{2m}{3n} \geq 2\sqrt{\frac{n}{3m} \cdot \frac{2m}{3n}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{当 } 3n^2 = 6m^2, \text{ 即 } n = \sqrt{2}m, \text{ 取等})$$

$$\therefore ab_{\max} = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

解二:

$$\therefore ab = \frac{1}{2+\frac{b}{a}} + \frac{2}{2+\frac{a}{b}}$$

令 $\frac{b}{a}=t$  ( $t>0$ ), 则原式变为:  $ab = \frac{1}{2+t} + \frac{2}{2+\frac{1}{t}}$ , 显然 $ab < \frac{1}{2} + \frac{2}{2} < 2$

即求 $\frac{1}{2+t} + \frac{2}{2+\frac{1}{t}}$ 的最大值, 为了方便设为 $K$  ( $K=ab$ ,  $k \in (0, 2)$ ), 则:

$$K = \frac{1}{2+t} + \frac{2}{2+\frac{1}{t}} = \frac{1}{2+t} + \frac{2t}{2t+1}$$

两边同乘以 $(2+t)(2t+1)$ , 得

$$(2+t)(2t+1) = (2t+1) + 2t(2+t)$$

$$\text{化简, 得: } (2K-2)t^2 + (5K-6)t + 2K-1 = 0$$

 $\therefore$  等式成立, 方程一定有解

$$\therefore \Delta = (5K-6)^2 - 4(2K-2)(2K-1) = 9K^2 - 36K + 28 \geq 0$$

$$\therefore K \geq 2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ 或 } K \leq 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

又 $\because K \in (0, 2)$ 

$$\therefore K \in (0, 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3})$$

$$ab \text{ 的最大值为 } 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**例题 3 (待定系数法)**

已知  $a, b > 0$ , 则  $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$  的最大值?

对于  $a^2 + b^2 + c^2$  形式, 可以利用待定系数法配凑, 例如:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + \lambda b^2 + (1 - \lambda)b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{\lambda}ab + 2\sqrt{1 - \lambda}bc$$

这样就会让  $a, b, c$  三者联系起来。把例中的 1 当作  $c^2 = 1$ , 则:

$$\text{原式分母} \geq 2\sqrt{\lambda}ab + 2\sqrt{1 - \lambda}b \cdot 1$$

分子 =  $ab + b$ ,  $ab$ 项系数为1,  $b$ 项系数也为1。我们需要对应项成比例:

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \lambda}}$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{原式} \leq \frac{ab + b}{\sqrt{2}(ab + b)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{最大值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

#### 例题 4

已知  $a > 0, b > 0$ , 求  $\frac{ab + b}{a^2 + b^2 + 1}$  的最大值。

利用上例的配凑思想可解。

#### 例题 5

已知  $x, y > 0$ , 且  $x + 2y + \sqrt{xy} = 2$ , 求  $x + 3y$  的最大值。

利用基本不等式可知:  $\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$ , 原式变为:  $2 \leq x + 2y + \frac{x + y}{2}$ 。

此时对比题目要求的结果是  $x + 3y$ 。思考: 如何才能让  $x + 2y + \frac{x + y}{2}$  (通过某种变换)  $\rightarrow x + 3y$ ? 显然  $\frac{x + y}{2}$  中, 分子  $x, y$  前面有某种系数就可以。

但是的  $x + y$  是由  $\sqrt{xy}$  得来的, 这是题目给出的条件, 我们无法修改, 我们应该如何做?

没办法改变条件, 但可以对条件进行变形, 利用  $a \times \frac{1}{a}$  的特性, 把  $\sqrt{xy} \rightarrow \sqrt{(a \cdot x) \times \frac{y}{a}}$ ; 由基本不等式

$$\text{得: } \sqrt{(ax) \times \frac{y}{a}} \leq \frac{ax + \frac{y}{a}}{2}$$

现在的问题就变成如何求出  $a$  的值。

$$\text{原式变形为: } 2 = x + 2y + \sqrt{(ax) \times \frac{y}{a}} \leq x + 2y + \frac{ax + \frac{y}{a}}{2} = \left(\frac{a}{2} + 1\right)x + \left(2 + \frac{1}{2a}\right)y \text{ 对比要求的结果: } x + 3y,$$

$x, y$  的系数比 1 : 3

$$\therefore \frac{\frac{a}{2} + 1}{2 + \frac{1}{2a}} = \frac{1}{3} \iff 3a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\text{解得: } a = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{cases}$$

其实这二个解均可使用, 但对于基本不等式, 如果配的系数为负数, 不满足使用条件, 麻烦, 取  $\frac{1}{3}$  即可。

$$\begin{aligned} \therefore 2 &= x + 2y + \sqrt{\left(\frac{1}{3}x\right) \times \frac{y}{\frac{1}{3}}} = x + 2y + \sqrt{\frac{x}{3} \times 3y} \leq x + 2y + \frac{\frac{x}{3} + 3y}{2} = \frac{7}{6}x + \frac{7y}{2} = \frac{7}{6}(x + 3y) \\ \therefore x + 3y &\geq 2 \times \frac{6}{7} = \frac{12}{7} \end{aligned}$$

### 例

已知  $a, b > 0, a + 2b = 2$ , 则  $\frac{a^2 + 1}{a} + \frac{2b^2}{b + 1}$  的最小值?

第二项不好折, 但看到  $b^2$  和  $(b + 1)$ , 在拆分的情景下, 应考虑  $(b + 1)(b - 1) = b^2 - 1$ 。原式  $= a + \frac{1}{a} + \frac{2(b^2 - 1) + 2}{b + 1} = a + \frac{1}{a} + 2(b - 1) + \frac{2}{b + 1} = a + 2b - 2 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b + 1}$ , 由条件知前三项为 0, 则变成  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b + 1}$ , 应用 1 的代换或权方和速解  $= \frac{9}{4}$ , ……略。