1 习题

例题 1

$\exists x>0$，使得$\dfrac{4x^2+1}{2x}-3m+m^2<0$成立，求实数$m$的取值范围

解:

原不等式可化为：$m^2-3m<-(\dfrac{4x^2+1}{2x})=-(2x+\dfrac{1}{2x})$

问题转化为：$m^2-3m<-(2x+\dfrac{1}{2x})_{max}$。

$\because x>0$，$\therefore 2x+\dfrac{1}{2x}\geq 2\sqrt{2x\cdot\dfrac{1}{2x}}=2$。当且仅当$x=\dfrac{1}{2}$时取等。

$\therefore -(2x+\dfrac{1}{2x})$的最大值为$-2$。

$\therefore m^2-3m<-2 \iff m^2-3m+2<0 \iff (m-1)(m-2)<0$

解得：$1<m<2$

例题 2

若正实数a，b满足$a+b=1$，则$ax^2+\big(3+\dfrac{1}{b}\big)x-a=0$的根的最大值为？

解:

解：设方程为$ax^2+\left(3+\dfrac{1}{b}\right)x-a=0$。由韦达定理可知，两根之积$x_1x_2=\dfrac{-a}{a}=-1$。

这表明方程必有一正根和一负根。我们要求的是根的最大值，即正根的最大值。

设正根为x（$x>0$），则另一根为$-\dfrac{1}{x}$。

两根之和为$x_1+x_2=x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3+\frac{1}{b}}{a}=-\dfrac{3b+1}{ab}$。

$x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3b+1}{ab}=-\dfrac{3b+a+b}{ab}=-\left(\dfrac{4b+a}{ab}\right)=-\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

我们要求x的最大值。因为$x>0$，$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$是一个增函数。因此，要使x最大，就需要使$x-\dfrac{1}{x}$最大。

这等价于求$-\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$的最大值，也就是求$\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$的最小值。

权方和：$\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{(2+1)^2}{a+b}=9$。当且仅当$\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}$，即$a=2b$时取等。

又$\because a+b=1 \therefore 2b+b=1 \implies b=\dfrac{1}{3},a=\dfrac{2}{3}$。

所以$x-\dfrac{1}{x}$的最大值为-9。即$x^2+9x-1=0$。

解得$x=\dfrac{-9\pm\sqrt{81+4}}{2}$。因为$x>0$，所以$x=\dfrac{-9+\sqrt{85}}{2}$。

例题 3

已知集合$A=\{x|0\leq x\leq a\}$，集合$B=\{x|m^2+5\leq x\leq m^2+6\}$。若命题“$\exists m\in\mathbb{R}$，$A\cap B=\emptyset$”为假命题，则实数$a$的取值范围？

解:

解：设命题p为：“$\exists m\in\mathbb{R}$，$A\cap B=\emptyset$”。题目指出命题p为假命题，则其否定形式$\neg p$必为真命题。

$\neg p$：“$\forall m\in\mathbb{R}$，$A\cap B\neq\emptyset$”。这意味着对于任意实数m，集合A和集合B的交集都非空。

集合$A=[0,a]$，集合$B=[m^2+5,m^2+6]$。

$\because m^2\geq 0,\therefore m^2+5\geq 5$。集合$B$是一个始终在区间$[5,+\infty)$内的、长度为1的闭区间。

要使A与所有可能的B都有交集，A必须覆盖B可能出现的所有范围，即$[5,+\infty)$。

因此$A=[0,a]$必须是$[0,+\infty)$，这意味着$a\to+\infty$，这在实数a的取值范围中是不可能的。

我们**怀疑**原命题可能存在印刷错误，正确的应该是：“$\forall m\in\mathbb{R}$，$A\cap B=\emptyset$”为假命题。

那么其真命题形式是：“$\exists m\in\mathbb{R}$，$A\cap B\neq\emptyset$”。

这意味着，存在至少一个实数m，使得集合A和B的交集不为空。

要使$A=[0,a]$和$B=[m^2+5,m^2+6]$有交集，需要满足$a\geq m^2+5$。

我们需要存在至少一个m使得$a\geq m^2+5$成立。

函数$f(m)=m^2+5$的最小值为5（当$m=0$时）。

为了让不等式$a\geq m^2+5$有解，a必须大于或等于m^2+5的最小值。

所以，$a\geq 5$。

因此，实数a的取值范围是$[5,+\infty)$。

例题 4 (19 题)

若集合 $\{x|px^2+8x-4=0\}=\{q\}$，则$p+q$的取值可以为？

解:

若集合$\{x|px^2+8x-4=0\}=\{q\}$，这意味着方程$px^2+8x-4=0$只有一个解，这个解就是q。

一个方程只有一个解，需要分两种情况讨论：

情况一：该方程为一元一次方程

当$p=0$时，方程变为一个一元一次方程：$8x-4=0$。解得$x=\frac{1}{2}$。

此时，集合为$\{\frac{1}{2}\}$，所以$q=\frac{1}{2}$。$p+q=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$。

情况二：该方程为一元二次方程且判别式为 0

当$p\neq 0$时，该方程为一元二次方程。要使其只有一个解，判别式Δ必须为0。

$\Delta=b^2-4ac=8^2-4(p)(-4)=64+16p$。

令$\Delta=0$，则：$64+16p=0$，解得$p=-4$。

此时，方程为$-4x^2+8x-4=0$。唯一的解$q=\frac{-b}{2a}=\frac{-8}{2(-4)}=1$。

此时，$p+q=-4+1=-3$。

综上所述，$p+q$的取值可以为$\frac{1}{2}$或-3。

例题 5 (20 题)

已知实数m,n,p且$m>1,mn-n-2m^2=0,m^2+n+4=4m+p$,则下列结论正确的是：

$A.\quad n>m\quad B.\quad p>m\quad C.\quad p<n\quad D.\quad n<p$

解:

1.分析第一个方程 : $mn - n - 2m^2 = 0$

$n(m-1) = 2m^2$

因为$m > 1$,所以$m - 1 > 0$,我们可以得到:

$n = \dfrac{2m^2}{m-1}$

2.比较 n 和 m (选项 A)

$n - m = \dfrac{2m^2}{m-1} - m = \dfrac{2m^2 - m(m-1)}{m-1} = \dfrac{m^2+m}{m-1}$

因为$m > 1$,所以分子$m^2 + m > 0$,分母$m - 1 > 0$。

$\therefore n - m > 0 \implies n > m.$ 所以选项 A 正确。

3.分析第二个方程 : $m^2 + n + 4 = 4m + p$

$p = m^2 - 4m + 4 + n = (m-2)^2 + n$

4.比较 p 和 n (选项 C, D)

$p - n = (m-2)^2 \geq 0$

这意味着$p \geq n$. 仅当 m=2 时 p=n。

所以选项 C (p<n) 错误，选项 D (n<p) 不总是成立。

5.比较 p 和 m (选项 B)

我们已经证明了$p \geq n$ 且$n > m$。

根据不等式的传递性，$p \geq n > m \implies p > m.$

所以选项 B 也正确。

结论 : 如果这是单选题，题目可能存在问题，因为 A 和 B 都正确。如果这是多选题，则选 A 和 B。