2021 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目

(请先阅读"全国大学生数学建模竞赛论文格式规范")

A 题 "FAST"主动反射面的形状调节

中国天眼——500 米口径球面射电望远镜(Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope, 简称 FAST),是我国具有自主知识产权的目前世界上单口径最大、灵敏度最高的射电望远镜。它的落成启用,对我国在科学前沿实现重大原创突破、加快创新驱动发展具有重要意义。

FAST 由主动反射面、信号接收系统(馈源舱)以及相关的控制、测量和支承系统组成(如图 1 所示),其中主动反射面系统是由主索网、反射面板、下拉索、促动器及支承结构等主要部件构成的一个可调节球面。主索网由柔性主索按照短程线三角网格方式构成,用于支承反射面板(含背架结构),每个三角网格上安装一块反射面板,整个索网固定在周边支承结构上。每个主索节点连接一根下拉索,下拉索下端与固定在地表的促动器连接,实现对主索网的形态控制。反射面板间有一定缝隙,能够确保反射面板在变位时不会被挤压、拉扯而变形。索网整体结构、反射面板及其连接示意图见图 2 和图 3。

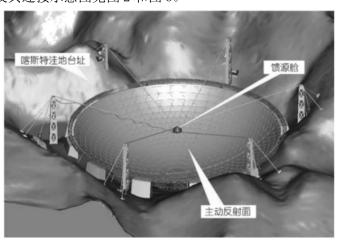


图 1 FAST 三维示意图

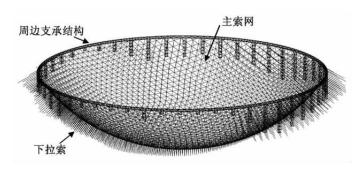


图 2 整体索网结构

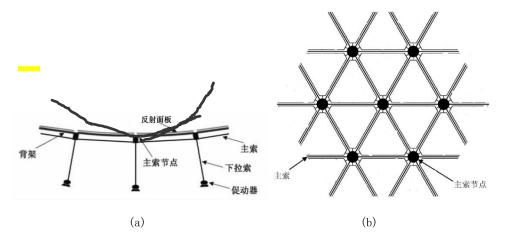


图 3 反射面板、主索网结构及其连接示意图

主动反射面可分为两个状态:基准态和工作态。基准态时反射面为半径约300米、口径为500米的球面(基准球面);工作态时反射面的形状被调节为一个300米口径的近似旋转抛物面(工作抛物面)。图4是FAST在观测时的剖面示意图,C点是基准球面的球心,馈源舱接收平面的中心只能在与基准球面同心的一个球面(焦面)上移动,两同心球面的半径差为F=0.466R(其中R为基准球面半径,称F/R为焦径比)。馈源舱接收信号的有效区域为直径1米的中心圆盘。当FAST观测某个方向的天体目标S时,馈源舱接收平面的中心被移动到直线SC与焦面的交点P处,调节基准球面上的部分反射面板形成以直线SC为对称轴、以P为焦点的近似旋转抛物面,从而将来自目标天体的平行电磁波反射汇聚到馈源舱的有效区域。

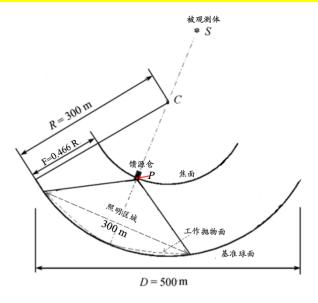


图 4 FAST 剖面示意图

将反射面调节为工作抛物面是主动反射面技术的关键,该过程通过下拉索与促动器配合来 完成。下拉索长度固定。促动器沿基准球面径向安装,其底端固定在地面,顶端可沿基准球面 径向伸缩来完成下拉索的调节,从而调节反射面板的位置,最终形成工作抛物面。

本赛题要解决的问题是:在反射面板调节约束下,确定一个理想抛物面,然后通过调节促动器的径向伸缩量,将反射面调节为工作抛物面,使得该工作抛物面尽量贴近理想抛物面,以

获得天体电磁波经反射面反射后的最佳接收效果。

请你们团队根据附录中的要求及相关参数建立模型解决以下问题:

- 1、当待观测天体S位于基准球面正上方,即 $\alpha = 0^{\circ}$, $\beta = 90^{\circ}$ 时,结合考虑反射面板调节因素,确定理想抛物面。
- 2、当待观测天体S位于 $\alpha = 36.795°$, $\beta = 78.169°$ 时,确定理想抛物面。建立反射面板调节模型,调节相关促动器的伸缩量,使反射面尽量贴近该理想抛物面。将理想抛物面的顶点坐标,以及调节后反射面 300 米口径内的主索节点编号、位置坐标、各促动器的伸缩量等结果按照规定的格式(见附件 4)保存在"result.xlsx"文件中。
- 3、基于第 2 问的反射面调节方案, 计算调节后馈源舱的接收比, 即馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比, 并与基准反射球面的接收比作比较。

附录: 要求及相关参数

- 1、主动反射面共有主索节点 2226 个,节点间连接主索 6525 根,不考虑周边支承结构连接的部分反射面板,共有反射面板 4300 块。基准球面的球心在坐标原点,附件 1 给出了所有主索节点的坐标和编号,附件 2 给出了促动器下端点(地锚点)坐标、基准态时上端点(顶端)的坐标,以及促动器对应的主索节点编号,附件 3 给出了 4300 块反射面板对应的主索节点编号。
 - 2、基准态下,所有主索节点均位于基准球面上。
- 3、每一块反射面板均为基准球面的一部分。反射面板上开有许多直径小于 5 毫米的小圆孔,用于透漏雨水。由于小孔的直径小于所观察的天体电磁波的波长,不影响对天体电磁波的反射, 所以可以认为面板是无孔的。
 - 4、电磁波信号及反射信号均视为直线传播。
 - 5、主索节点调节后,相邻节点之间的距离可能会发生微小变化,变化幅度不超过 0.07%。
 - 6、将主索节点坐标作为对应的反射面板顶点坐标。
- 7、通过促动器顶端的伸缩,可控制主索节点的移动变位,但连接主索节点与促动器顶端的下拉索的长度保持不变。促动器伸缩沿基准球面径向趋向球心方向为正向。假设基准状态下,促动器顶端径向伸缩量为0,其径向伸缩范围为-0.6~+0.6米。
 - 8、天体 S 的方位可用方位角 α 和仰角 β 来表示(见图 5)。

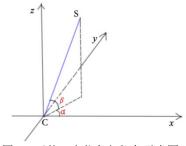


图 5 天体 S 方位角与仰角示意图