Prerequisiti matematici

- *Sistemi di riferimento*
- *Angoli*
- *Concetto di derivata*
- *Concetto di integrale*

Prerequisiti

Prerequisiti matematici

- *Sistemi di riferimento*
- *Angoli*
- *Concetto di derivata*
- *Concetto di integrale*

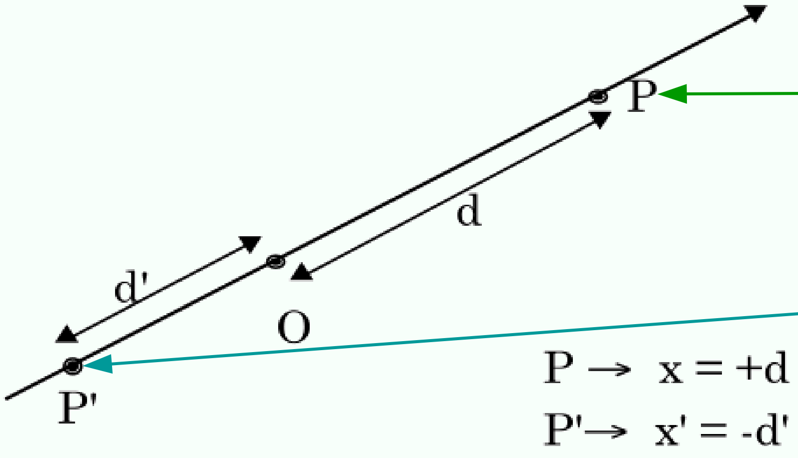
Prerequisiti

Sistemi di riferimento: 1D

Come indicare la **posizione di un punto su di una retta**:

- Per rappresentare la posizione di un punto su di una retta si sceglie in maniera arbitraria un punto della retta, O, come origine del riferimento e si fissa sempre in maniera arbitraria un verso sulla retta (*retta orientata, asse orientato*).

- Utilizzando la definizione operativa di lunghezza, si può misurare la distanza tra l'origine O ed il generico punto sulla retta: sia *d* per il punto P e *d'* per il punto P'.
Si assegna al punto la coordinata *x* uguale alla distanza da O presa con il segno più (+) se il punto viene **dopo O** quando la retta viene percorsa nel verso fissato, con il segno meno (-), se il punto viene **prima di O** quando la retta viene percorsa nel verso fissato.

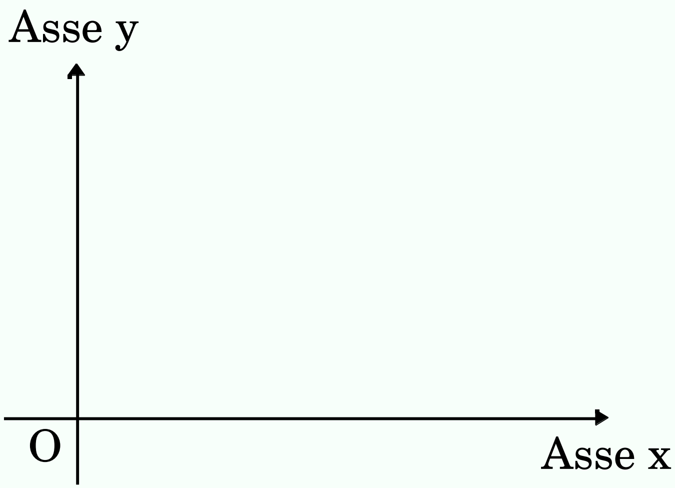


Nel caso della figura, la coordinata di P è positiva, quella di P' è negativa.

Sistemi di riferimento: 2D

Posizione di un punto nel piano

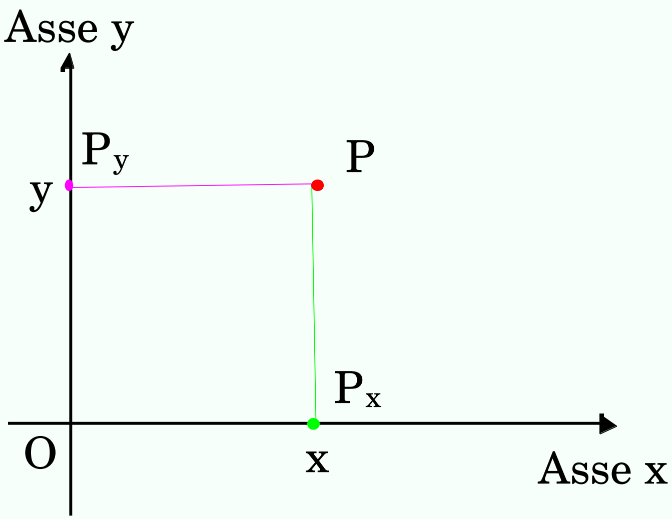
Per specificare la posizione di un punto in un piano si introduce un sistema cartesiano formato da due assi orientati perpendicolari tra loro: *asse x* e *asse y*.
Le origini dei due assi orientati sono fissate in modo da coincidere con il loro punto di intersezione. L'orientazione dell'asse y viene scelta in modo che l'asse x per sovrapporsi all'asse y deve essere ruotato di 90 gradi in senso antiorario.



Sistemi di riferimento: 2D

Rappresentazione cartesiana

La posizione di un generico punto P del piano può essere descritta specificando la coppia ordinata (x,y) dove x rappresenta la posizione del punto *proiezione P_x sull'asse x* (determinata utilizzando la definizione precedentemente data di posizione di un punto su una retta); analogamente y rappresenta la posizione del punto *proiezione P_y sull'asse y*.



I punti proiezione P_x e P_y sugli assi x e y possono essere determinati *in modo univoco* mandando da P le perpendicolari rispettivamente all'asse x e all'asse y.

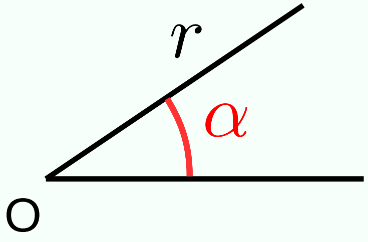
Prerequisiti matematici

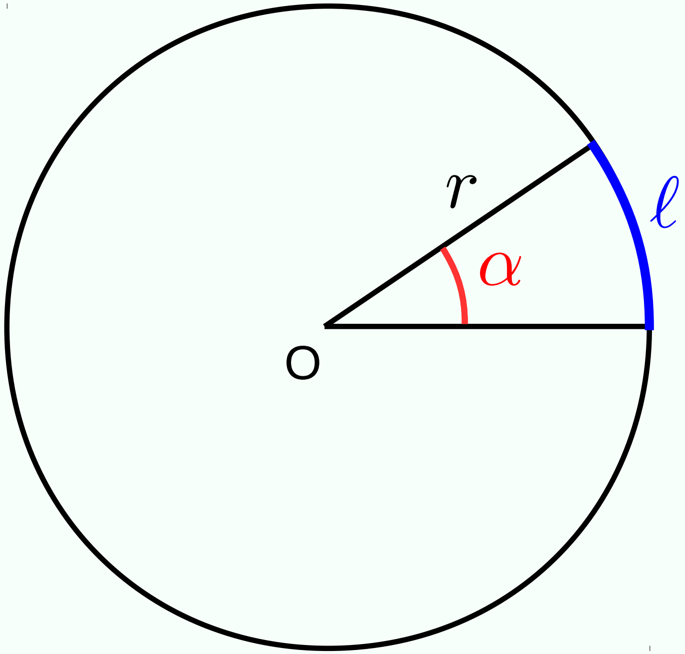
- *Sistemi di riferimento*
- *Angoli*
- *Concetto di derivata*
- *Concetto di integrale*

Prerequisiti

Angoli: dettaglio

L’angolo individua la frazione di piano delimitato da due semirette che di dipartono dalla stessa origine O. Per misurare l’angolo si costruisce una circonferenza con centro in O e raggio arbitrario r. Si misura quindi la porzione di circonferenza, l’arco, delimitata dall’angolo da misurare. La *misura dell’angolo* è data, per definizione, dal rapporto tra la lunghezza dell’arco e il raggio della circonferenza.





$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$

$$360° : 2\pi = \theta(\text{in gradi}) : \theta(\text{in rad})$$

$$1rad\left(\text{in gradi}\right) = \frac{360°}{2\pi\,\text{rad}}1\text{rad} = 57.29°$$

Prerequisiti matematici

- *Sistemi di riferimento*
- *Angoli*
- *Concetto di derivata*
- *Concetto di integrale*

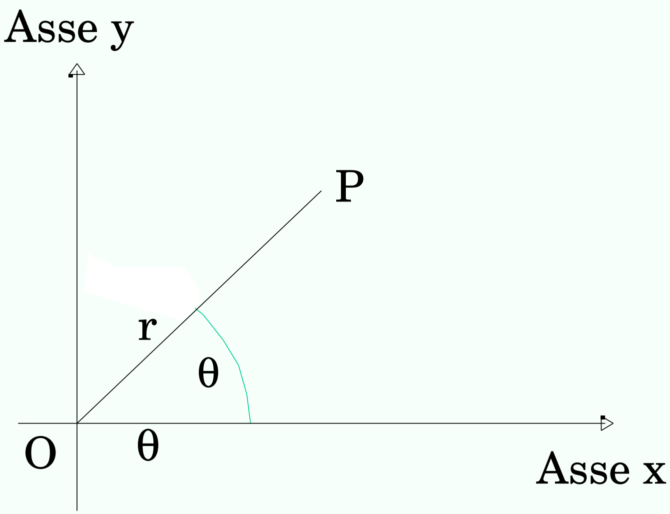
Prerequisiti

Sistemi di riferimento: 2D

Rappresentazione polare

Una maniera alternativa per rappresentare la posizione del punto P nel piano è quella di specificare la coppia ordinata (r,θ) in cui r è la distanza di P dall'origine O e θ è l'angolo che la retta passante per O e P ed orientata da O a P forma con un asse orientato arbitrariamente y scelto nel piano, per esempio l'asse x.

L'angolo, espresso in *radianti*, è positivo se l'asse di riferimento, nel nostro caso l'asse x, deve essere ruotato in senso antiorario per sovrapporlo alla retta orientata passante per O e P, negativo in caso contrario.

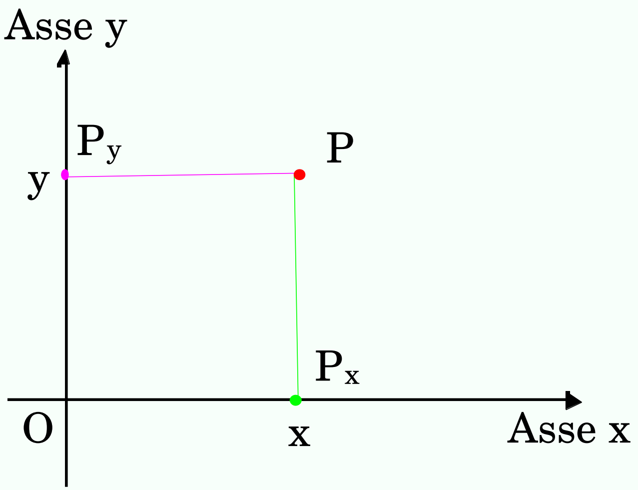


Sistemi di riferimento: 2D

Equivalenza delle due rappresentazioni

Le due rappresentazioni cartesiana (P ≡ (x,y)) e polare (P ≡ (r,θ)), sono ovviamente equivalenti.

Valgono infatti le seguenti relazioni per passare dall'una all'altra delle due rappresentazioni.



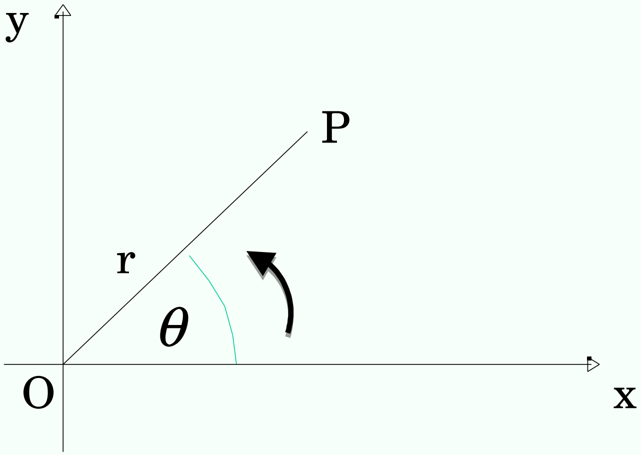
Da Cartesiane a Polari:

$$r^2 = x^2 + y^2;\ r \in [0, \infty] \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$x > 0 \ : \quad \theta = \arctan(y/x)$$

$$x < 0 \ : \quad \theta = \arctan(y/x) + \pi$$

$$x = 0 \ : \quad \begin{cases} \theta = \pi/2 \quad (\text{se } y > 0) \\ \theta = 3\pi/2 \quad (\text{se } y < 0) \end{cases}$$



Da Polari a Cartesiane:

$$x = r\cos(\theta)$$

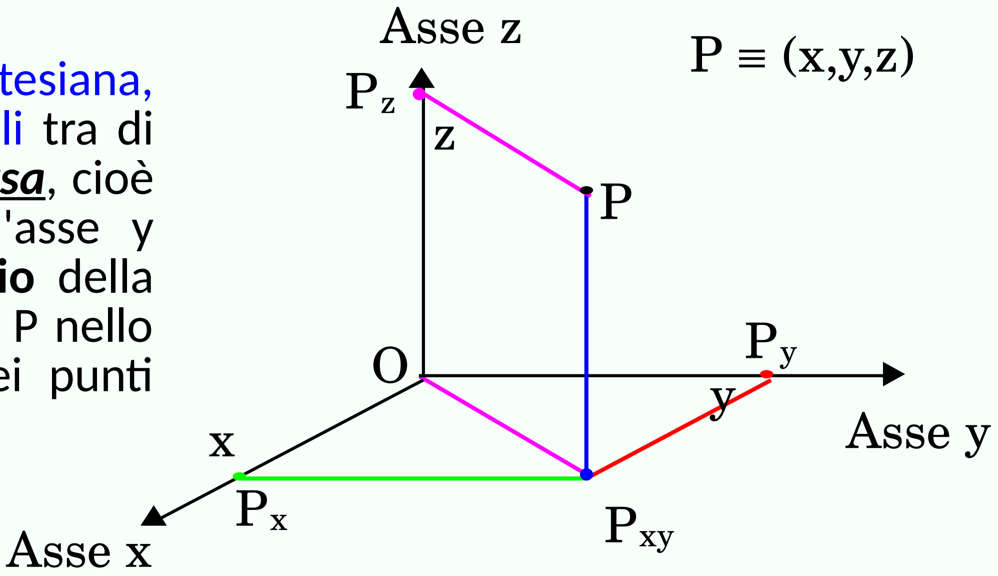
$$y = r\sin(\theta)$$

Sistemi di riferimento: 3D

Posizione di un punto nello spazio.

Rappresentazione cartesiana.

Introduciamo una terna di riferimento cartesiana, costituita da tre assi orientati, x,y,z, ortogonali tra di loro. In particolare useremo una *terna* ***destrorsa***, cioè con l'asse x disposto secondo il **pollice**, l'asse y secondo **l'indice**, e quello z secondo il **medio** della mano destra. La posizione del generico punto P nello spazio sarà determinata dalle coordinate dei punti proiezione sugli assi orientati x,y e z.



Per determinare i punti proiezione sugli assi cartesiani si manda da P la parallela all'asse z fino ad incontrare il piano xy: si determina così il punto P_{xy} proiezione di P sul piano xy.

– Si congiunge con un segmento l'origine O con il punto P_{xy}. La proiezione P_x di P sull'asse x si determina mandando da P_{xy} la parallela all'asse y fino ad intersecare l'asse x, mentre la proiezione P_y di P sull'asse y si determina mandando da P_{xy} la parallela all'asse x fino ad intersecare l'asse y.

– La proiezione di P sull'asse z, P_z, si determina mandando da P un segmento parallelo al segmento P_{xy} .

Introduction

- *Sistemi di riferimento*
- *Angoli*
- *Concetto di derivata*
- *Concetto di integrale*

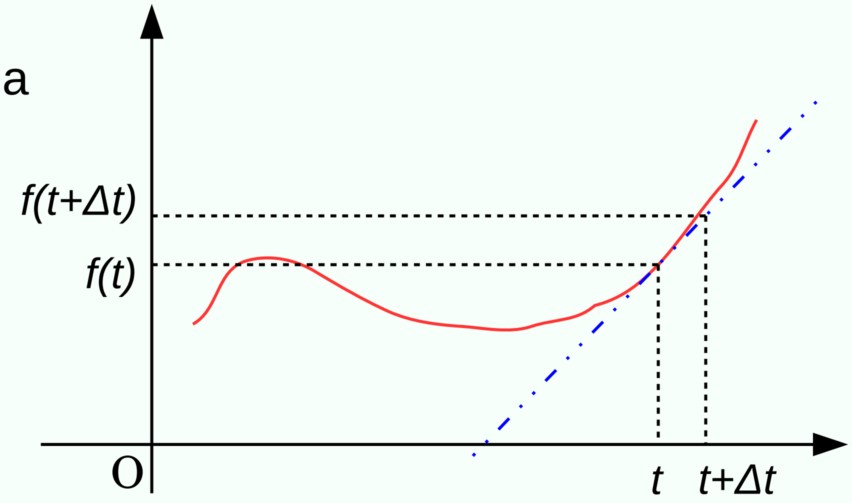
Prerequisiti

Concetto di derivata

La **derivata di una funzione *f(t)*** è definita da

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

il limite per intervallo Δt che tende a zero del rapporto incrementale.



Significato: è la pendenza della tangente al grafico nel punto *t*, il coefficiente angolare locale del grafico cartesiano. Ci dice *come sta cambiando la grandezza f* (è la variazione istantanea). Esempi nella vita quotidiana: inflazione, velocità, etc.

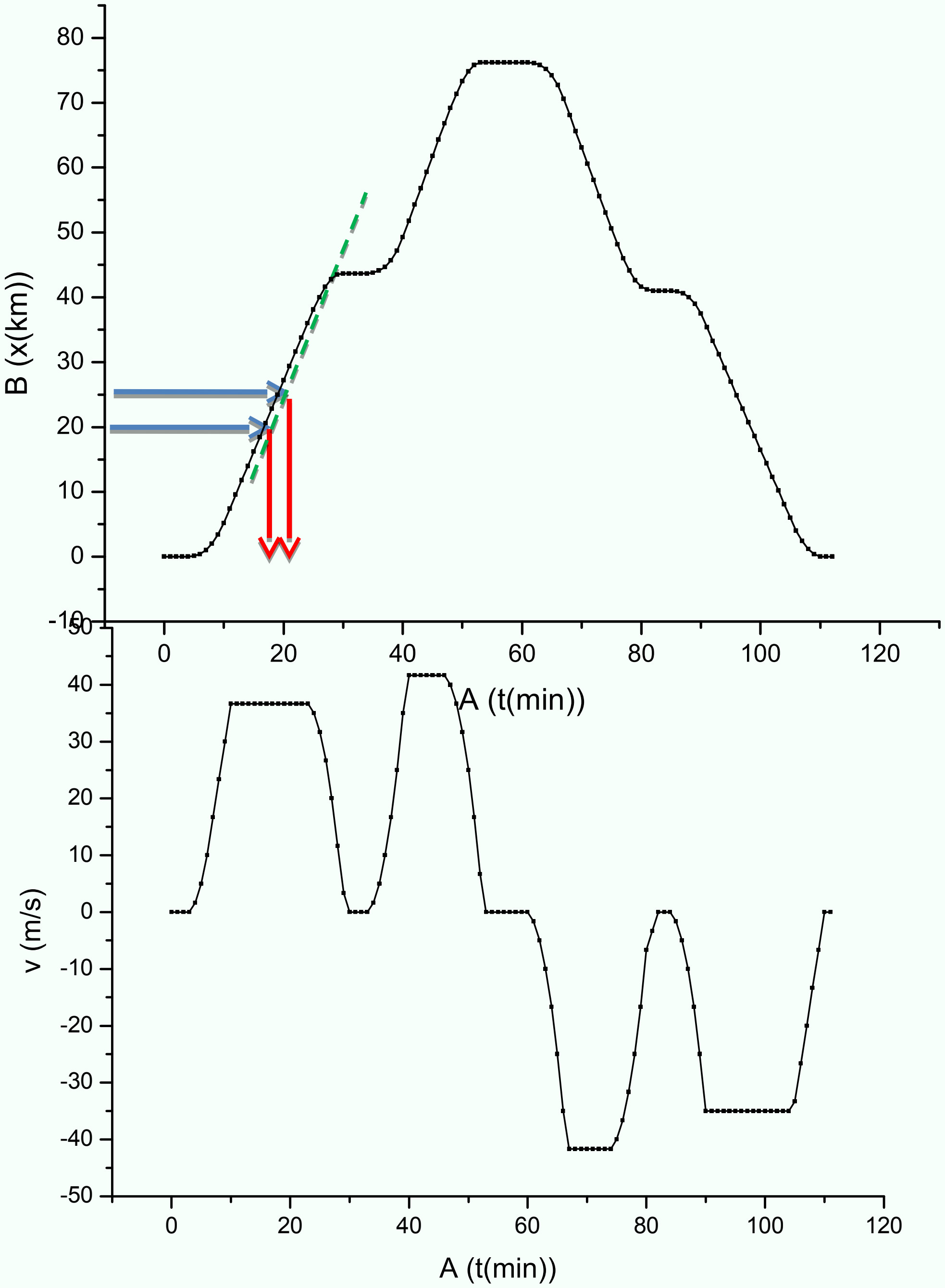
Se *f(t)* è una grandezza fisica che dipende dal tempo la sua derivata viene determinata dalla misura di *f(t)* ad istanti successivi, separati da un “campionamento” Δt. Tanto più è frequente il campionamento, quanto più sarà accurata la determinazione della variazione istantanea (e dunque della derivata).

Concetto di derivata

La funzione f(t) è la posizione su una linea di un treno nel tempo

Δt = 1 min

$$\langle v\rangle = \frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$



Derivate di alcune funzioni notevoli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t^n\right] = n\,t^{n-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\,\sin(t)\right] = \cos(t) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\,\ln(t)\right] = \frac{1}{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^t\right] = e^t \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\,\cos(t)\right] = -\sin(t)$$

Regole importanti per le derivate

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a g(t)\right] = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g(t)\right]$$

derivata del prodotto per uno scalare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f(t) + g(t)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f(t)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g(t)\right]$$

derivata della somma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f(t)\cdot g(t)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f(t)\right]\cdot g(t) + f(t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g(t)\right]$$

derivata del prodotto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f\big(g(t)\big)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}\left[f(g)\right]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g(t)\right]$$

derivata di una funzione composta

Introduction

- *Sistemi di riferimento*
- *Angoli*
- *Concetto di derivata*
- *Concetto di integrale*

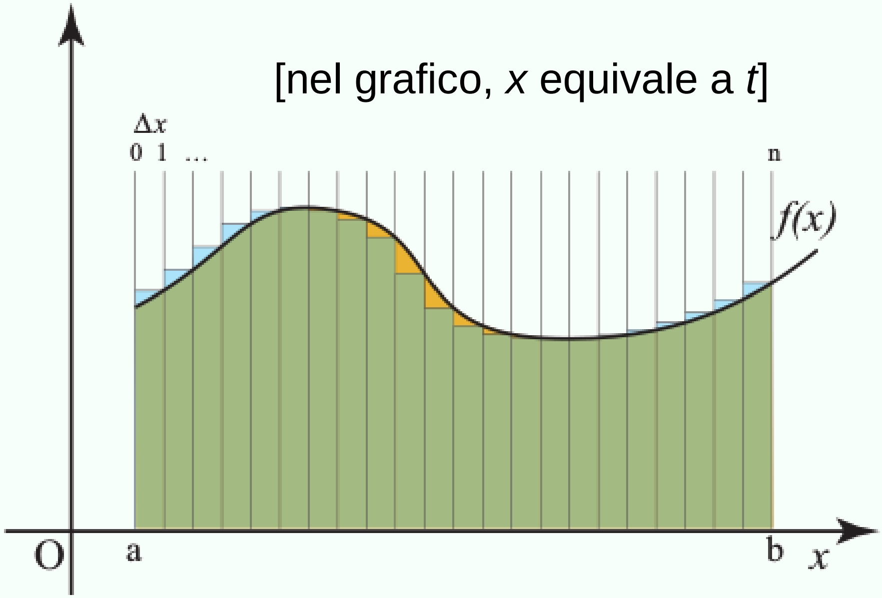
Prerequisiti

Integrale: l'inverso della derivata

L'**integrale di una funzione *f(t)*** è definito da

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\sum_{i=1}^{(b-a)/\Delta t} f(t_i)\Delta t\right]$$

[nel grafico, *x* equivale a *t*]



Significato: esso rappresenta l'area sottesa dalla curva *f(t)*, approssimata come somma delle aree di rettangoli, dividendo l'intervallo [a,b] in *n* = (*b*-*a*)/Δ*t* parti.

La derivata dell'integrale è la funzione stessa, dunque l'integrale rappresenta l'operazione inversa a quella della derivata (a meno di costanti):

$$\boxed{\frac{dF(t)}{dt} = f(t)}$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Esempio: $\int_0^\pi \sin t\, dt = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$

Algebra vettoriale

- *Grandezze scalari e grandezze vettoriali*
- *Somma e sottrazione di vettori*
- *Prodotto scalare*
- *Derivata di un vettore*

Gettys

capitolo 2

Algebra vettoriale

- *Grandezze scalari e grandezze vettoriali*
- *Somma e sottrazione di vettori*
- *Prodotto scalare*
- *Derivata di un vettore*

Gettys

capitolo 2

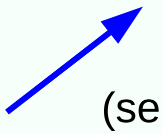
Una *grandezza* ***scalare*** è associata a un numero reale (+errore) + unità di misura

Una *grandezza* ***vettoriale*** è associata a:

- direzione
- verso
- valore numerico >0 (***modulo***)

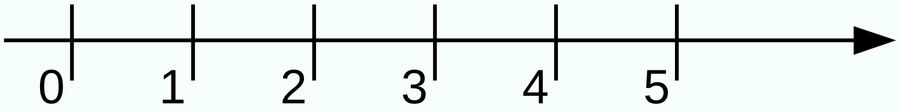
notazione per i vettori:

$\vec{v}$ oppure $\underline{v}$ oppure $\mathbf{v}$



(segmento orientato)

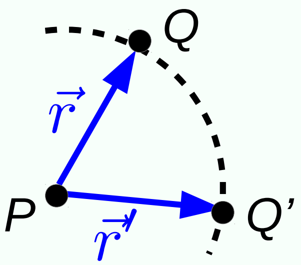
Le grandezze scalari sono così dette perché il numero reale può essere riportato su di una retta orientata (→ ***scala***)



per es.: *lunghezza*, *massa*, *energia*, *tempo*, *distanza*, *temperatura*, …

Le grandezze vettoriali obbediscono ad una loro algebra, chiamata ***Algebra Vettoriale***:
È necessario operare sia sulla direzione, sia sul verso, sia sul modulo!

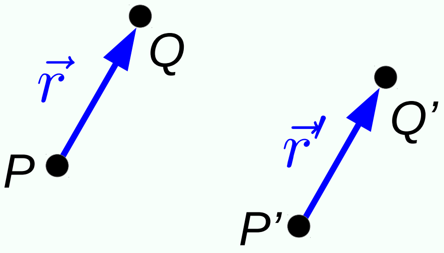
per es.: *velocità, accelerazione, spostamento* (si noti la differenza con il concetto di distanza), …



Andare da un punto *P* a un punto *Q* dello spazio è **diverso** che andare da *P* a *Q'*, nonostante la *distanza percorsa* sia la *stessa*!

(cambia infatti la direzione, ma non il modulo di $\vec{r}$)

Identità tra vettori: due vettori sono identici quando hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso

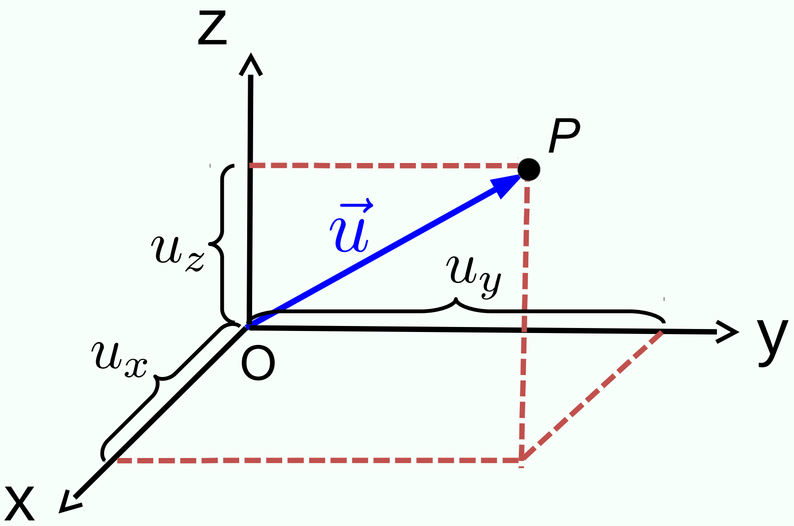


$$\vec{r} = \vec{r}'$$

Se muovo un vettore parallelo a se stesso senza cambiare la lunghezza, il vettore ***non*** cambia

---

Vettore posizione nello spazio tridimensionale: occorre prima di tutto definire un **sistema di riferimento** di assi cartesiani e un'origine



Il punto P è localizzato dal vettore $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$ ed è individuato dalle tre coordinate x,y,z nel sistema di riferimento

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

Le proiezioni del vettore $\vec{u}$ sugli assi cartesiani individuano le tre componenti del vettore

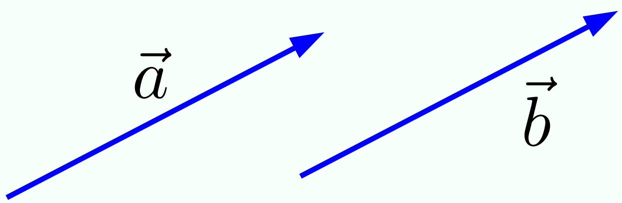
Dato quindi un sistema di riferimento con assi e origine, il vettore si identifica con una terna di numeri reali.

se il punto P si sposta nel tempo, indicheremo il vettore con $\overrightarrow{OP}(t)$ o $\vec{u}(t)$

Significato di una relazione vettoriale

Consideriamo una relazione vettoriale semplice $\vec{a} = \vec{b}$

Dire che il vettore $\vec{a}$ è uguale al vettore $\vec{b}$ implica che i due vettori hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso.



In termini di componenti ciò significa che comunque si scelgano due (nel piano, tre nello spazio) direzioni mutuamente ortogonali, le componenti cartesiane dei due vettori sono uguali.

La singola equazione vettoriale risulta pertanto equivalente a due (nel piano, tre nello spazio) equazioni scalari tra le componenti.

Scegliendo le direzioni degli assi coordinati x,y,z si ha

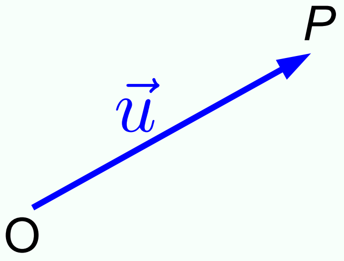
$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$$

L'equazione vettoriale è sempre la stessa, qualunque sia il sistema di riferimento cartesiano scelto. Le tre equazioni scalari mantengono *solo la forma* passando da un sistema di riferimento ad un altro: infatti i valori delle componenti saranno diverse in sistemi di riferimento diversi.

L'algebra dei vettori prescinde dal sistema di riferimento

→ le leggi fisiche (relazioni tra vettori) ***non** dipendono* dal sistema di riferimento

Operazioni tra vettori corrispondono a operazioni tra le componenti



$|\vec{u}| \equiv u$ è chiamato ***modulo*** o intensità del vettore (lunghezza del segmento)

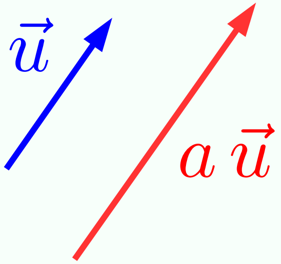
Il modulo è sempre *maggiore o uguale a zero*: $u \geq 0$

Prodotto di uno scalare per un vettore

$$a \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$a\,\vec{u} = (a\,u_x, a\,u_y, a\,u_z)$$

In pratica si moltiplica ogni singola componente di $\vec{u}$ per il numero reale a



$a\,\vec{u}$ è un vettore

- → con la stessa direzione di $\vec{u}$
- → con lo stesso verso di $\vec{u}$ se $a > 0$
  con verso opposto ad $\vec{u}$ se $a < 0$
- → con modulo $|a\vec{u}| = |a|u$

Algebra vettoriale

- *Grandezze scalari e grandezze vettoriali*
- *Somma e sottrazione di vettori*
- *Prodotto scalare*
- *Derivata di un vettore*

Gettys
capitolo 2

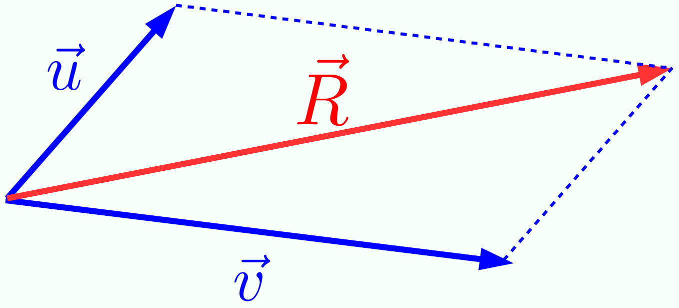
Somma di vettori

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, v_z + v_z)$$

$\vec{u} + \vec{v} \equiv \vec{R}$

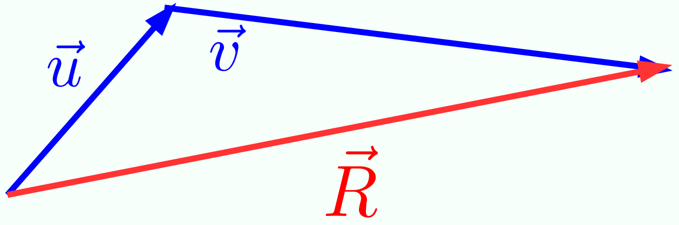
$\vec{R}$ è anche chiamato **risultante** della somma

1) Metodo del parallelogramma



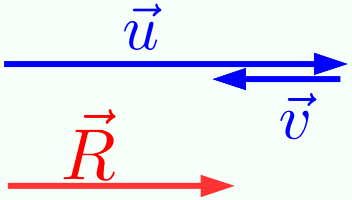
- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ iniziano dallo stesso punto
- si costruisce il parallelogramma
- $\vec{R}$ è la sua *diagonale*

2) Metodo triangolare (o punta-coda)



- la coda del secondo vettore parte dove finisce la testa del primo
- la somma è la congiungente inizio-fine

Se i vettori sono paralleli, la somma è come quella algebrica:



Somma di vettori

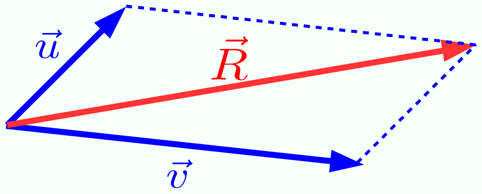
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, v_z + v_z)$$

$\vec{u} + \vec{v} \equiv \vec{R}$

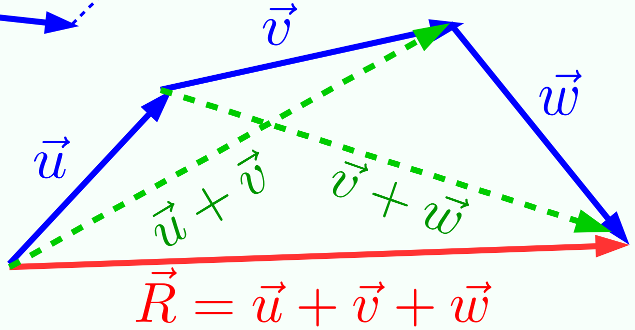
$\vec{R}$ è anche chiamato **risultante** della somma

Valgono le seguenti proprietà:

→ ***Commutativa*** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



→ ***Associativa*** $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

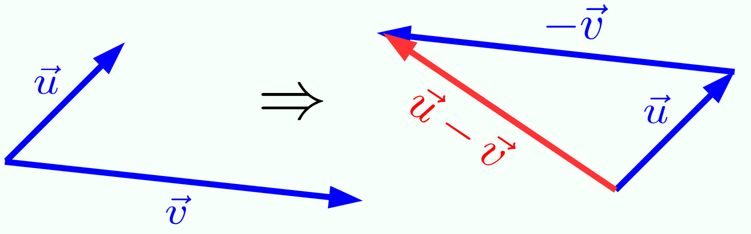


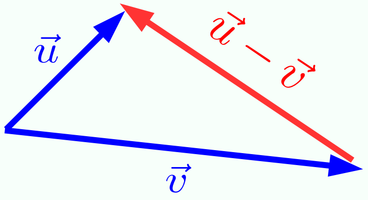
Sottrazione di vettori

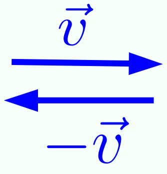
$$\vec{u} - \vec{v} = (\vec{u}) + (-\vec{v})$$

$-\vec{v}$ *vettore opposto*

(stessa direzione e modulo di $\vec{v}$, ma verso opposto)



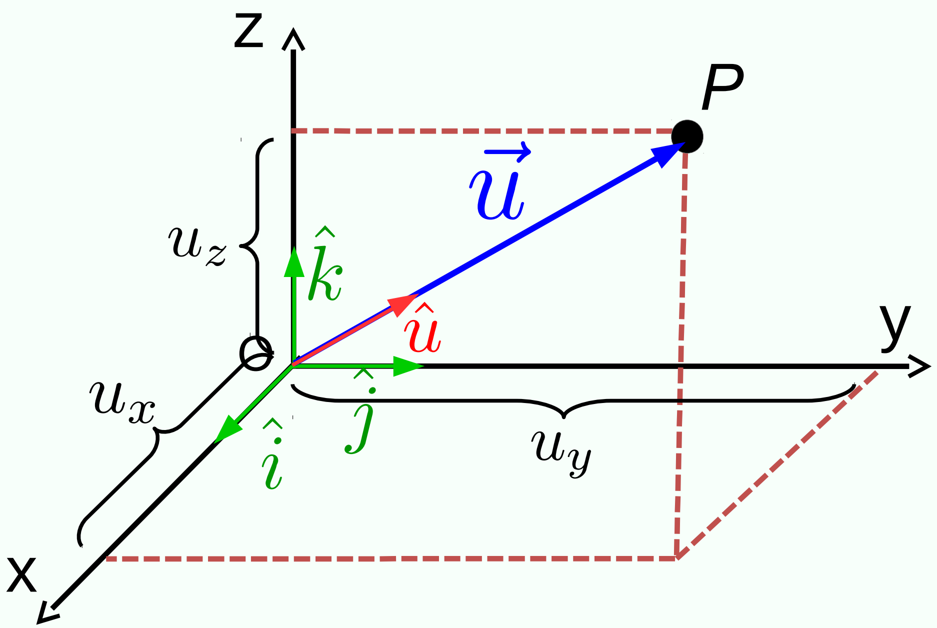




Alternativamente:
diagonale del parallelogramma che connette le punte: $\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}$

Vettore scomposto in componenti

Al vettore si può associare un ***versore*** con stessa direzione e verso, ma modulo 1: $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{u}$



dati gli assi cartesiani, si possono individuare i tre versori $\hat{\imath},\ \hat{\jmath},\ \hat{k}$ orientati come gli assi

$$\boxed{\begin{cases} x \rightarrow \hat{\imath} \\ y \rightarrow \hat{\jmath} \\ z \rightarrow \hat{k} \end{cases}}$$

tali versori costituiscono una ***base***

Tutte le operazioni si possono trattare considerando le “proiezioni” del vettore secondo gli assi di un sistema cartesiano.

Le proiezioni sono i ***vettori componenti***: $\begin{cases} \vec{u}_x = u_x \hat{\imath} \\ \vec{u}_y = u_y \hat{\jmath} \\ \vec{u}_z = u_z \hat{k} \end{cases}$

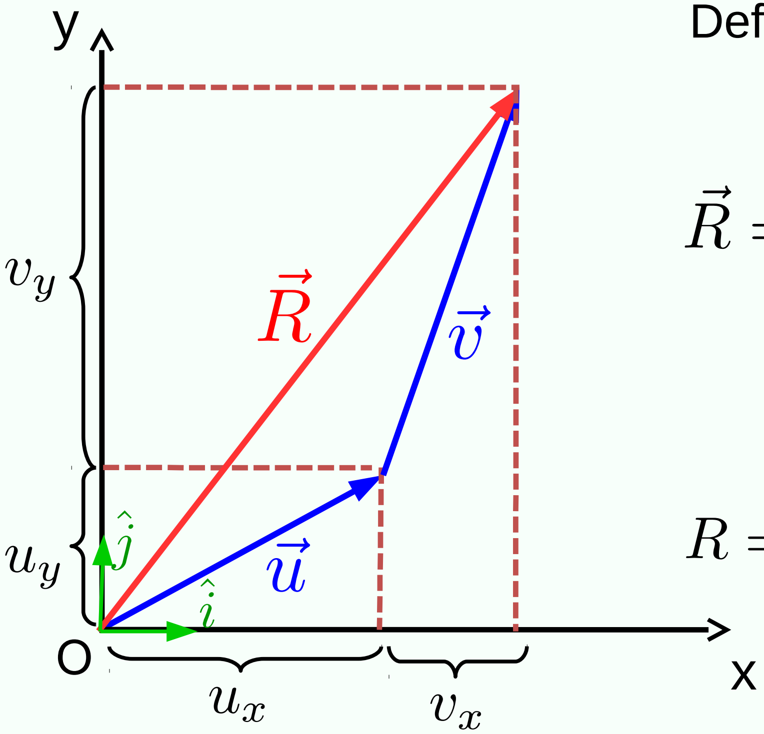
$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_x + \vec{u}_y + \vec{u}_z \\ &= u_x \hat{\imath} + u_y \hat{\jmath} + u_z \hat{k} \end{aligned}$$

Il ***modulo*** di un vettore è la sua *lunghezza*: $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Somma vettoriale in componenti (2D)

Tutte le operazioni si possono trattare considerando le “proiezioni” dei vettore secondo gli assi di un sistema cartesiano ortogonale.

Vediamo un semplice esempio in due dimensioni: $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$

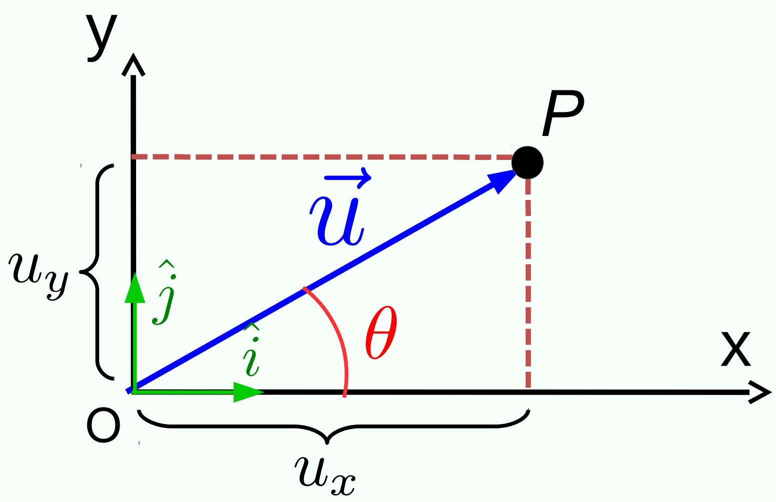


Definiamo i versori lungo gli assi: $\begin{cases} \vec{u}_x = u_x\boxed{\hat{\imath}} \\ \vec{u}_y = u_y\boxed{\hat{\jmath}} \end{cases}$

$$\begin{aligned}\vec{R} = \vec{u} + \vec{v} &= (u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath}) + (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}) \\ &= (u_x + v_x)\hat{\imath} + (u_y + v_y)\hat{\jmath}\end{aligned}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(u_x + v_x)^2 + (u_y + v_y)^2}$$

Coordinate polari in 2D $|\vec{u}|,\ \theta$



$$\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y = u_x\hat{i} + u_y\hat{j}$$

$$|\vec{u}| = u; \quad |\vec{u}_x| = u_x; \quad |\vec{u}_y| = u_y$$

$$\hat{i} = \frac{\vec{u}_x}{u_x} \qquad \hat{j} = \frac{\vec{u}_y}{u_y}$$

Componenti del vettore
in coordinate polari:

$$\boxed{\begin{cases} u_x = u\ \cos\theta \\ u_y = u\ \sin\theta \end{cases}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{u_y}{u_x}$$

perciò:
$$\begin{cases} \theta = \arctan\dfrac{u_y}{u_x} \quad (\text{se } u_x > 0) \\ \theta = \arctan\dfrac{u_y}{u_x} + \pi \quad (\text{se } u_x < 0) \\ \theta = \pi/2 \quad (\text{se } u_x = 0,\ u_y > 0) \\ \theta = 3\pi/2 \quad (\text{se } u_x = 0,\ u_y < 0) \end{cases}$$

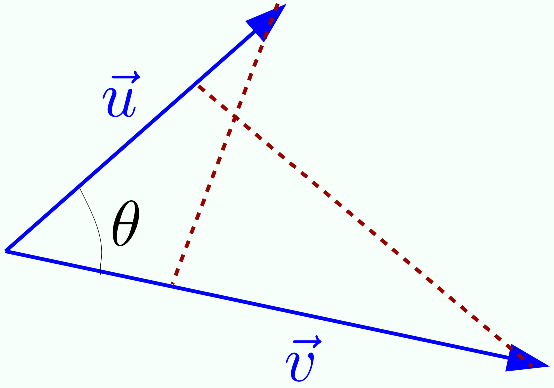
$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{u^2\cos^2\theta + u^2\sin^2\theta}$$

Algebra vettoriale

- *Grandezze scalari e grandezze vettoriali*
- *Somma e sottrazione di vettori*
- *Prodotto scalare*
- *Derivata di un vettore*

Gettys
capitolo 2

Prodotto scalare



due vettori → uno scalare

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\theta}$$

Il modulo di $\vec{u}$ per la proiezione di $\vec{v}$

Il modulo di $\vec{v}$ per la proiezione di $\vec{u}$

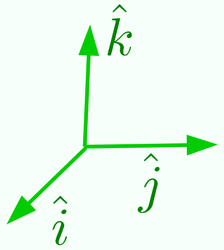
θ è l'angolo compreso tra i due vettori

$$\text{se } \vec{u} \parallel \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{v} = u\,v$$

$$\text{se } \vec{u} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

- Proprietà ***commutativa***: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Proprietà ***distributiva***: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Prodotto scalare



Il prodotto scalare equivale alla sommatoria del prodotto tra la componenti

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{i}\cdot\hat{i}=1;\ \hat{i}\cdot\hat{j}=0\\ \hat{i}\cdot\hat{k}=0;\ \hat{j}\cdot\hat{j}=1\\ \hat{j}\cdot\hat{k}=0;\ \hat{k}\cdot\hat{k}=1\end{aligned}}$$

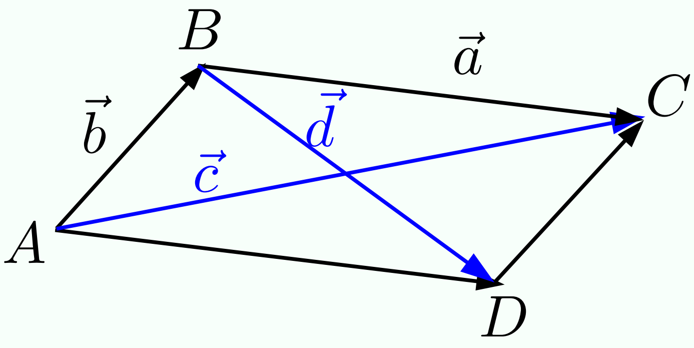
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}} = (u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k})\cdot(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k})$$

$$= u_xv_x\,\hat{i}\cdot\hat{i} + \cancel{u_xv_y\,\hat{i}\cdot\hat{j}} + \cancel{u_xv_z\,\hat{i}\cdot\hat{k}}$$

$$+\cancel{u_yv_x\,\hat{j}\cdot\hat{i}} + u_yv_y\,\hat{j}\cdot\hat{j} + \cancel{u_yv_z\,\hat{j}\cdot\hat{k}}$$

$$+\cancel{u_zv_x\,\hat{k}\cdot\hat{i}} + \cancel{u_zv_y\,\hat{k}\cdot\hat{j}} + u_zv_z\,\hat{k}\cdot\hat{k}\ \boxed{= u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z}$$

Consideriamo un parallelogramma:



$$\vec{a}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}=\overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}=\overrightarrow{BD}$$

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|\ \Rightarrow\ \vec{d}\perp\vec{c}$$

(triangolo isoscele)

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = a^2+\cancel{\vec{b}\cdot\vec{a}}-\cancel{\vec{a}\cdot\vec{b}}-b^2$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\vec{c}\cdot\vec{d}=a^2-b^2$$

Algebra vettoriale

- *Grandezze scalari e grandezze vettoriali*
- *Somma e sottrazione di vettori*
- *Prodotto scalare*
- *Derivata di un vettore*

Gettys

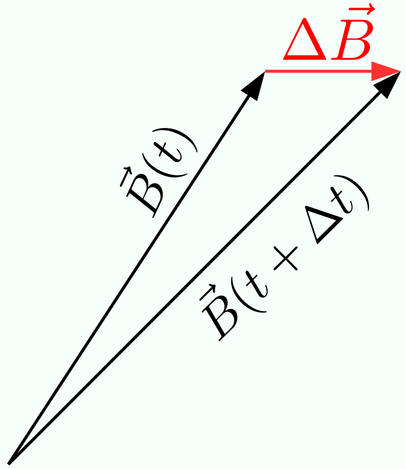
capitolo 2

Derivata di un vettore

Se un vettore $\vec{B}(t)$ è funzione del tempo, si può definire la sua derivata rispetto al tempo come il limite per Δt che tende a zero del rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta\vec{B}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{B}(t+\Delta t) - \vec{B}(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{B}(t+\Delta t) - \vec{B}(t)}{\Delta t}}$$



In componenti, è la derivata delle componenti (è un operatore lineare)

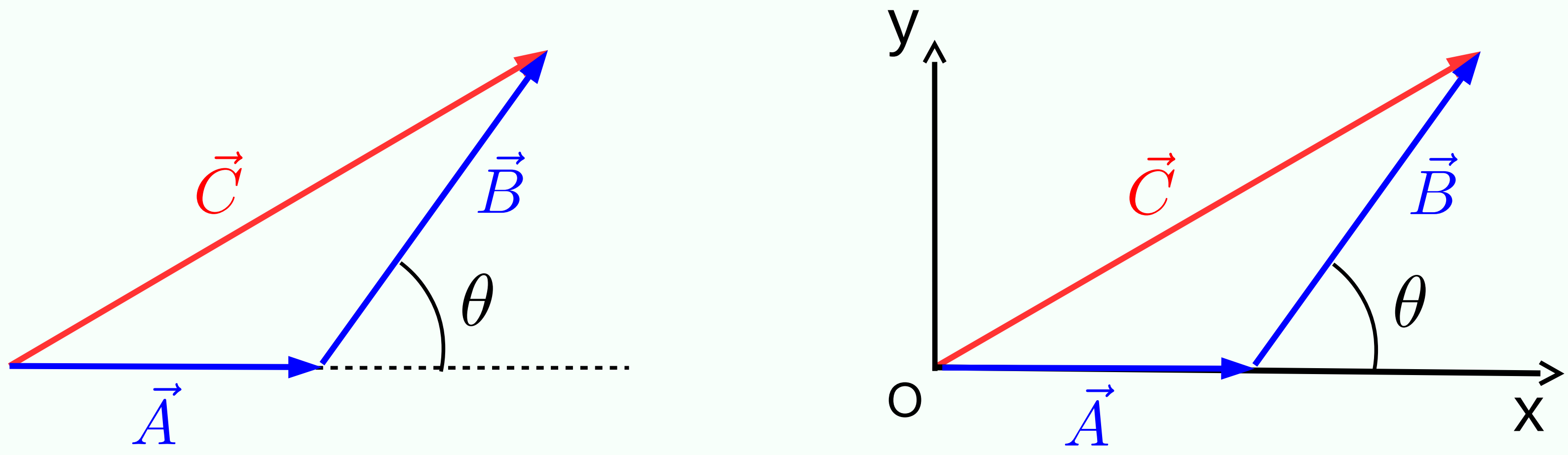
$$\vec{B}(t) = B_x(t)\hat{i} + B_y(t)\hat{j} + B_z(t)\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \frac{dB_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dB_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dB_z(t)}{dt}\hat{k}$$

Qualche esercizio…

Esercizio 1

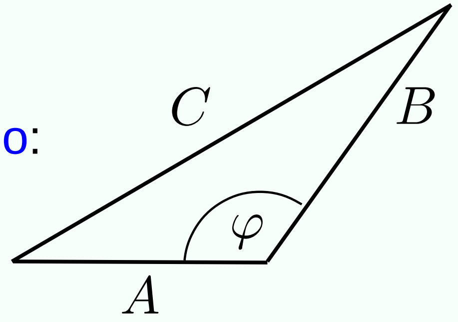
Trovare il modulo di $\vec{C}$, sapendo $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$ e l'angolo θ



$$\begin{cases} A_x = A\cos(0) = A \\ A_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = B\cos\theta \\ B_y = B\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_x = A + B\cos\theta \\ C_y = B\sin\theta \end{cases}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(A + B\cos\theta)2 + (B\sin\theta)^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

è analogo al teorema del coseno:



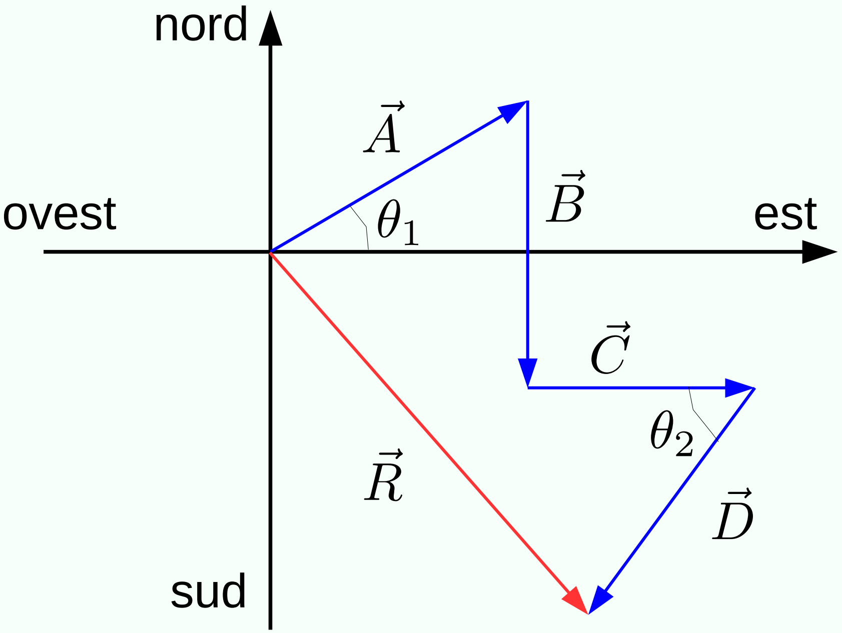
$$\varphi = \pi - \theta$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\varphi}$$

Esercizio 2

Un gruppo di escursionisti si muove in tappe rettilinee successive.
Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano orientato secondo I punti cardinali.
Sapendo che le quattro tappe corrispondono ai vettori spostamento $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$,
E sapendo che partono dall’origine, trovare il punto di arrivo.

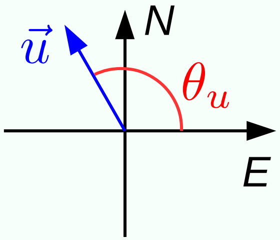
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$



$$\vec{A} = \begin{cases} A = 10\,km \\ \theta_1 = 30°\text{NE} \end{cases} \quad \vec{B} = \begin{cases} B = 8\,km \\ \text{S} \end{cases}$$

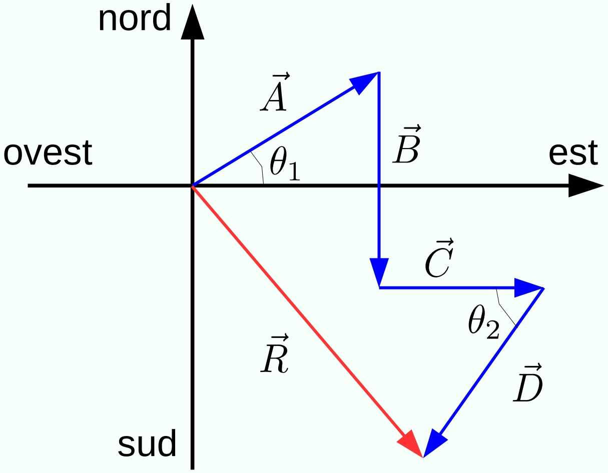
$$\vec{C} = \begin{cases} C = 8\,km \\ \text{E} \end{cases} \quad \vec{D} = \begin{cases} D = 10\,km \\ \theta_2 = 45°\text{SO} \end{cases}$$

Soluzione



Convenzione sugli angoli:

$$\theta_A = \theta_1; \; \theta_B = \tfrac{3}{2}\pi; \; \theta_C = 0; \; \theta_D = \pi + \theta_2$$



Per definizione $R = \sqrt{R_E^2 + R_N^2}$ dove R_E e R_N denotano la sommatoria delle componenti proiettate sull'asse est (risp. nord) dei singoli vettori spostamento.

$$R_E = A\cos\theta_A + B\cos\theta_B + C\cos\theta_C + D\cos\theta_D$$

$$R_N = A\sin\theta_A + B\sin\theta_B + C\sin\theta_C + D\sin\theta_D$$

da cui, inserendo i numeri, si trova: $R_E = 9.59\,km; \; R_N = 10.07\,km$

$$R = 13.9\,km$$

$$\theta_R = -\arctan\left(\frac{R_N}{R_E}\right) = -46.4^\circ = 313.6^\circ$$

Esercizio 3

Verificare che i due vettori $\vec{u} = (3, -5, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6, 24)$ sono perpendicolari

Esercizio 4

Determinare le componenti del vettore bidimensionale $\vec{a}$ sapendo che:

– $\vec{a}$ è ortogonale al vettore $\vec{b} = (-5, 3)$

– il modulo del vettore $\vec{a}$ vale: $|\vec{a}| = \sqrt{17}$

Soluzione:
$\vec{a} = \left(3\sqrt{2}/2, 5\sqrt{2}/2\right)$

Esercizio 5

Dimostrare che un triangolo sul piano, con vertici $A = (1, 0),\ B = (1, 1),$ $C = (7/5, 1/5),$ è rettangolo.