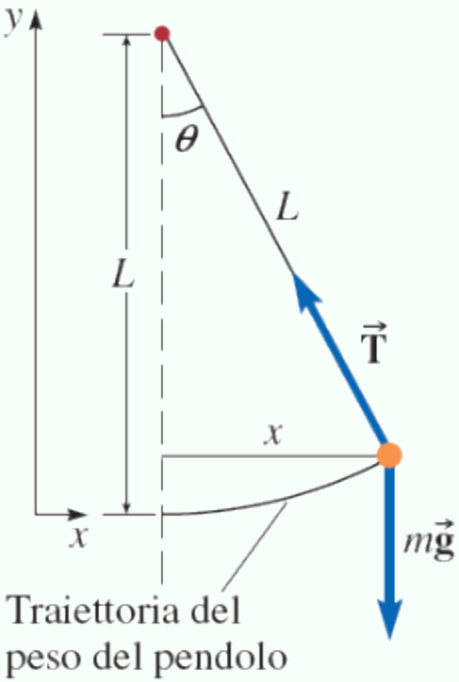
Dinamica di sistemi fisici

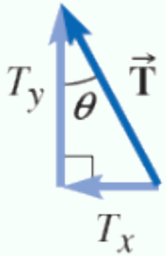
- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

Dispense "Modelli della Fisica"

Gettys
Capitolo 14

Pendolo semplice





Un altro esempio la cui soluzione dell'equazione del moto è del tipo visto per l'oscillatore armonico è il **pendolo** nel *regime di* *piccole oscillazioni*:

Data una massa *m* legata ad una corda tesa inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza *L*, l'equazione del moto si risolve notando che *il moto avviene lungo un arco di circonferenza*.

Le forze in gioco sono la tensione della corda e la forza peso. Occorrre scrivere lo spostamento in coordinate polari, *s* = *L*θ, dove θ è l'angolo che la corda forma con la verticale.

Equazioni del moto:

$$\begin{cases} -T + mg\cos\theta = -m\dfrac{v^2}{L} & \text{componente radiale} \\ -mg\sin\theta = mL\dfrac{d^2\theta}{dt^2} & \text{componente tangenziale} \end{cases}$$

Pendolo semplice

Consideriamo la *componente tangenziale*: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0$

per *piccoli angoli* si può usare l'espansione in serie di Taylor al primo ordine

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

Già da 30° (0.52 rad) si ha che $\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0} \quad \left[\text{con } \Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\right]$$

La soluzione per le piccole oscillazioni (cioè per $\sin\theta \approx \theta$) sarà del tipo:

$$\boxed{\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi)}$$

con pulsazione Ω e periodo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

Si noti che il periodo ***non*** dipendente dalla massa *m* o dalle condizioni inziali, ma **solo** dalla lunghezza del pendolo**.**

Pendolo semplice

La soluzione per le piccole oscillazioni (cioè per $\sin\theta \approx \theta$) sarà del tipo:

$$\boxed{\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi)}$$

con pulsazione Ω e periodo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

La velocità angolare, istante per istante, è:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) = -\Omega A \sin(\Omega t + \phi)$$

Le costanti arbitrarie A e ϕ si determinano dalle **condizioni iniziali**:

1) partendo da fermo con una deflessione θ_0 rispetto alla verticale:

$$\begin{cases} \theta_0 = \theta(0) = A\cos\phi \\ 0 = \dfrac{d\theta(0)}{dt} = -\Omega A \sin\phi \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \theta_0 = A;\ \phi = 0 \ \Rightarrow\ \theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t)$$

2) partendo dalla verticale, con velocità non nulla v_0:

$$\begin{cases} 0 = \theta(0) = A\cos\phi \\ \dfrac{v_0}{L} = \dfrac{d\theta(0)}{dt} = -\Omega A \sin\phi \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \phi = \tfrac{\pi}{2};\ A = -\tfrac{v_0}{\Omega L} \ \Rightarrow\ \theta(t) = \tfrac{v_0}{\Omega L}\sin(\Omega t)$$

Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

Dispense "Modelli della Fisica"

Gettys
Capitolo 14

Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti

(es. moto di un corpo in liquido viscoso)

$$\frac{dx}{dt} = ax + b \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} - ax = 0$$ omogenea associata

Per trovare tutte le soluzioni dell'omogenea si cerca una **forma del tipo esponenziale**:

$$x_{\mathrm{omog}} = Ae^{\lambda t} \quad \Rightarrow \; \lambda Ae^{\lambda t} - aAe^{\lambda t} = 0 \; \Rightarrow \; \lambda = a$$

Se esiste una soluzione particolare, che non dipende dal tempo (per es. $x(t) = -b/a$), allora si chiama **soluzione di equilibrio**. Si ottiene ponendo a zero la «velocità», cioè annullando la derivata prima.
I sistemi lineari a coefficienti costanti hanno sempre un equilibrio in $x=0$
I sistemi non omogenei ce l'hanno in $x = -b/a$

Le soluzioni dei modelli sono di due tipi (dipendono dal segno di *a*):

1. quelle che **divergono per *t* → ∞** ⟶ sistemi ***instabili***
2. quelle che **convergono alla soluzione limite** ⟶ sistemi ***stabili***

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

(es. Oscillatore armonico)

Il caso generale è dato da:

(*) $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + C(t)\frac{dx}{dt} + D(t)x = F(t)}$$

con la sua equazione omogenea associata:

(**) $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + C(t)\frac{dx}{dt} + D(t)x = 0}$$

Se *F* e *D* sono coefficienti costanti, una soluzione particolare dell'equazione (*) è la *funzione costante* ***x = F/D***. Essa viene anche chiamata: *soluzione di equilibrio*.

Quindi la soluzione generale sarà la costante *F/D* sommata allo spazio di soluzioni dell'omogenea associata (**).

(**) $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Dx = 0}$$

Per trovare la soluzione dell'omogenea associata, si può tentare una ***funzione esponenziale***, che si era rilevata vincente nel caso dell'equazione di primo grado:

$$x_{\mathrm{omog}}(t) = Ae^{\lambda t}$$

Sostituendola nella (**) abbiamo:

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} + C\lambda Ae^{\lambda t} + DAe^{\lambda t} = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda^2 + C\lambda + D)Ae^{\lambda t} = 0$$

La funzione sarà soluzione dell'omogenea quando il **polinomio di secondo grado** (detto **polinomio caratteristico**) sarà **nullo**.

È quindi sufficiente determinarne le **radici λ_1 e λ_2**, per avere le due soluzioni di (**).

Tutte e sole le soluzioni dell'omogenea sono una combinazione lineare delle due soluzioni: $x_{\mathrm{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Polinomio caratteristico e soluzioni

Tutte e sole le soluzioni dell'omogena sono una combinazione lineare delle due soluzioni: $x_{\mathrm{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Le due soluzioni λ_1 e λ_2 vengono dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 + C\lambda + D = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2 - 4D} \right)$$

A seconda del segno del *discriminante* $d = C^2 - 4D$ le soluzioni possono essere reali, immaginarie pure o complesse. Vediamo i possibili casi.

Polinomio caratteristico e soluzioni

Tutte e sole le soluzioni dell'omogena sono una combinazione lineare delle due soluzioni: $x_{\mathrm{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Le due soluzioni λ_1 e λ_2 vengono dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 + C\lambda + D = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2 - 4D} \right)$$

A seconda del segno del *discriminante* $d = C^2 - 4D$ le soluzioni possono essere reali, immaginarie pure o complesse. Vediamo i possibili casi.

Caso 1: $d > 0$

Le due soluzioni sono entrambe reali $\Rightarrow$ $\boxed{x_{\mathrm{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$

A seconda del ***segno*** di λ_1 e λ_2 i termini sono divergenti o convergenti. Nel caso λ_1 e λ_2 siano entrambe negative, la soluzione dell'omogenea tende a zero e quella dell'equazione originaria tende alla soluzione di equilibrio (la particolare già trovata).

Polinomio caratteristico e soluzioni

Tutte e sole le soluzioni dell'omogena sono una combinazione lineare delle due soluzioni: $x_{\mathrm{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Le due soluzioni λ_1 e λ_2 vengono dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 + C\lambda + D = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}\right)$$

A seconda del segno del *discriminante* $d = C^2 - 4D$ le soluzioni possono essere reali, immaginarie pure o complesse. Vediamo i possibili casi.

Caso 2: $d = 0$

Le due soluzioni sono entrambe reali e uguali a: $\lambda = -C/2$

$\Rightarrow$ In tal caso la soluzione dell'omogenea è il prodotto tra l'esponenziale e un polinomio di primo grado.

$$x_{\mathrm{omog}}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{C}{2}t}$$

Se C è positivo, questa soluzione tende a zero per tempi lunghi.

Polinomio caratteristico e soluzioni

Tutte e sole le soluzioni dell'omogena sono una combinazione lineare delle due soluzioni: $x_{\text{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Le due soluzioni λ_1 e λ_2 vengono dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 + C\lambda + D = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}\right)$$

A seconda del segno del *discriminante* $d = C^2 - 4D$ le soluzioni possono essere reali, immaginarie pure o complesse. Vediamo i possibili casi.

Caso 3: $d < 0$

Le soluzioni sono numeri complessi coniugati: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-C \pm i\sqrt{4D - C^2}\right)$

e possono essere scritte come: $\lambda_1 = \alpha + i\beta; \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$

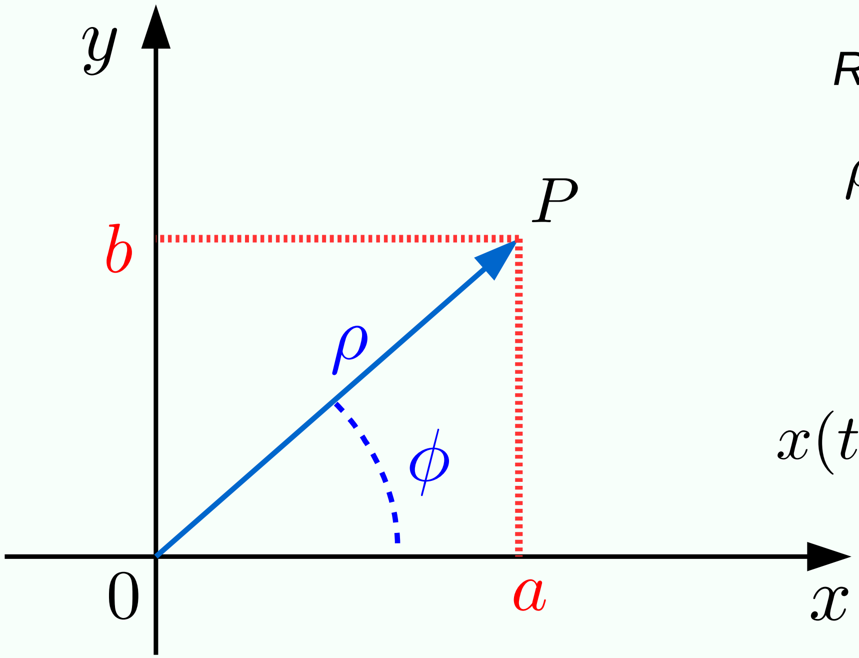
con $\alpha = -\frac{1}{2}C\,; \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4D - C^2}\right)$

Parentesi sui numeri complessi
e loro rappresentazione nel piano di Argand

Rappresentazione cartesiana:

$$\boxed{z = a + ib} \qquad i^2 = -1 \qquad \mathrm{Re}\ z = a; \quad \mathrm{Im}\ z = b$$

$$z^* = a - ib \qquad |z|^2 = z\,z^* = a^2 + b^2$$



Rappresentazione polare: $\boxed{z = \rho\, e^{i\phi}}$

$$\rho = |z| \qquad e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\big[A e^{i(\omega t + \phi)}\big] = A\cos(\omega t + \phi)$$

Polinomio caratteristico e soluzioni

Tutte e sole le soluzioni dell'omogena sono una combinazione lineare delle due soluzioni: $x_{\text{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Le due soluzioni λ_1 e λ_2 vengono dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 + C\lambda + D = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}\right)$$

A seconda del segno del *discriminante* $d = C^2 - 4D$ le soluzioni possono essere reali, immaginarie pure o complesse. Vediamo i possibili casi.

Caso 3: $d < 0$

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta; \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

$$\begin{aligned} x_{\text{omog}}(t) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}\left[c_1 e^{i\beta t} + c_2 e^{-i\beta t}\right] \\ &= e^{\alpha t}\left[(c_1 + c_2)\cos(\beta t) + i(c_1 - c_2)\sin(\beta t)\right] \end{aligned}$$

Se c_1 e c_2 sono una complessa coniugata dell'altra $(c_2 = c_1^*)$, allora:

$$\boxed{x_{\text{omog}}(t) =} e^{\alpha t}\left[a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)\right] = \boxed{e^{\alpha t}\left[A\cos(\beta t + \phi)\right]}$$

Polinomio caratteristico e soluzioni

Tutte e sole le soluzioni dell'omogena sono una combinazione lineare delle due soluzioni: $x_{\text{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Le due soluzioni λ_1 e λ_2 vengono dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 + C\lambda + D = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}\right)$$

A seconda del segno del *discriminante* $d = C^2 - 4D$ le soluzioni possono essere reali, immaginarie pure o complesse. Vediamo i possibili casi.

$\boxed{\text{Caso 3: } d < 0}$

Se c_1 e c_2 sono una complessa coniugata dell'altra $(c_2 = c_1^*)$, allora:

$$\boxed{x_{\text{omog}}(t) = e^{\alpha t}\left[A\cos(\beta t + \phi)\right]}$$

La soluzione ha un carattere oscillatorio, la cui pulsazione è: $\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{4D - C^2}$
e ampiezza esponenziale, che diverge o converge a zero a seconda del ***segno*** di *C*.

C=0; λ_1,λ_2 immaginari puri $\Rightarrow$ carattere oscillatorio e ampiezza costante (oscillatore armonico)

Sistemi stabili

Oscillatore armonico ≡ Pendolo con piccole oscillazioni ≡ Circuito LC

→ due soluzioni nel tempo che corrispondono a moti sinusoidali – **sistema stabile**

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega_0^2 x} \qquad \lambda^2 = -\omega_0^2 \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0}$$

$$x(t) = \alpha_1 e^{-i\omega_0 t} + \alpha_2 e^{i\omega_0 t}$$

$$\dot{x}(t) = -i\omega_0\alpha_1 e^{-i\omega_0 t} + i\omega_0\alpha_2 e^{i\omega_0 t}$$

Scegliendo le condizioni iniziali per avere una soluzione reale si ha:

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

→ Vedremo che è possibile ripetere la stessa trattazione anche se c'è un termine dissipativo (oscillatore smorzato …)

Riassunto sul polinomio caratteristico

$$\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\mathrm{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Le due soluzioni λ_1 e λ_2 vengono dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 + C\lambda + D = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}\right)$$

polinomio caratteristico

In base al segno di $d = C^2 - 4D$ soluzioni reali, immaginarie pure o complesse.

Caso 1: $d > 0$ — Soluzioni *entrambe reali*: $x_{\mathrm{omog}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Caso 2: $d = 0$ — *Una soluzione reale*: $x_{\mathrm{omog}}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{C}{2}t}$

Soluzioni divergenti o convergenti, a seconda del ***segno*** di λ_1 e λ_2.

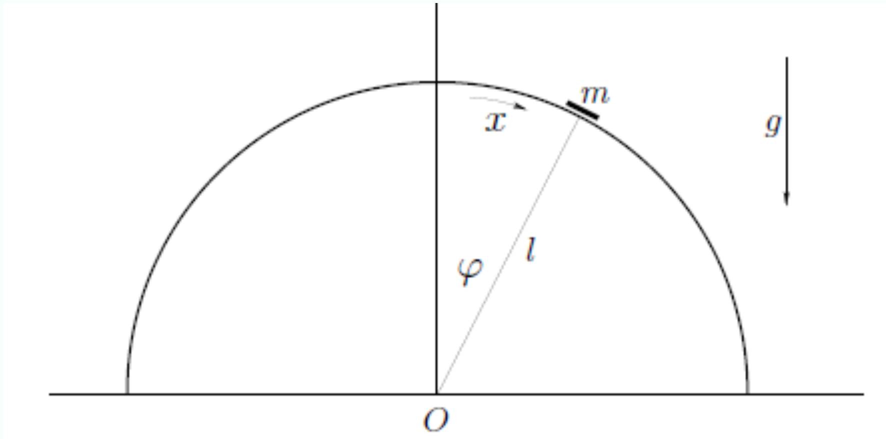
Caso 3: $d < 0$ — *Soluzioni complesse*: $x_{\mathrm{omog}}(t) = e^{-Ct/2}\left[A\cos(\beta t + \phi)\right]$

Soluzione con carattere oscillatorio, la cui pulsazione è $\beta \equiv \sqrt{4D - C^2}/2$,
e ampiezza esponenziale, che diverge o converge a zero a seconda del ***segno*** di *C*.

$C = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ sono immaginari puri e l'ampiezza è costante (oscillatore armonico)

Esempio: pendolo rovesciato

Si consideri un piccolo disco in prossimità del punto più alto di un cilindro con l'asse parallelo al suolo, in presenza di gravità. Il raggio *l* del cilindro e l'arco *x* sono misurati a partire dal punto più alto. Il disco scivola senza attrito.



La componente della forza di gravità nella direzione del moto (tangente al cilindro) è: $F = mg \sin\varphi \quad (\varphi = x/l)$.

Nell'intorno di $x=0$ abbiamo che: $\sin(x/l) \approx x/l$ (sviluppo di Taylor al 1° ordine)

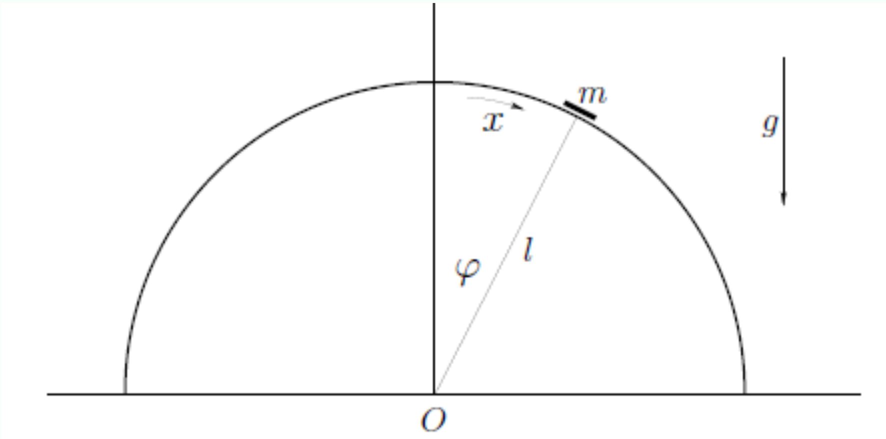
accelerazione tangenziale:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l}x} \equiv \Omega^2 x \qquad \text{con} \quad \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

caratteristica costitutiva del problema:
ne descrive le proprietà di forza e inerzia
(non dipende dal tempo o dalle condizioni iniziali)

Esempio: pendolo rovesciato

Si consideri un piccolo disco in prossimità del punto più alto di un cilindro con l'asse parallelo al suolo, in presenza di gravità. Il raggio *l* del cilindro e l'arco *x* sono misurati a partire dal punto più alto. Il disco scivola senza attrito.



$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l}x \equiv \Omega^2 x$$

equazione lineare omogenea del secondo ordine

Cerchiamo soluzioni della forma generica esponenziale con argomento da determinare:

$x(t) = \alpha e^{\lambda t} \;\Rightarrow\; \lambda^2 = \Omega^2$ da cui $\lambda_{1,2} = \pm\Omega = \pm\sqrt{g/l}$

Due soluzioni nel tempo che corrispondono rispettivamente a dipendenza esponenziale positiva e negativa:

$$x(t) = \alpha_1 e^{\Omega t} + \alpha_2 e^{-\Omega t}$$

Esempio: pendolo rovesciato

Due soluzioni nel tempo che corrispondono rispettivamente
a dipendenza esponenziale positiva e negativa:

$$x(t) = \alpha_1 e^{\Omega t} + \alpha_2 e^{-\Omega t} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \Omega \alpha_1 e^{\Omega t} - \Omega \alpha_2 e^{-\Omega t}$$

Le costanti arbitrarie si determinano a partire dalle condizioni iniziali *x*(0) e *v*(0):

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{\Omega}\right) = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{g/l}}\right) \ ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{\Omega}\right) = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{\sqrt{g/l}}\right)$$

Le funzioni hanno una componente che tende esponenzialmente a zero e una che tende all'infinito. Al crescere di *t*, *x* e *v* crescono all'allontanarsi dal vertice.
Si noti che il modello è valido ***solo se*** $x \ll l$.

Esistono delle condizioni iniziali particolari per cui *una delle componenti viene meno*:

$$v_0 = -\Omega x_0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \ ; \qquad v_0 = +\Omega x_0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

Il primo caso è un moto in cui, fissata la posizione iniziale, la velocità iniziale è tale che riporta il punto sulla sommità, arrivandoci con *v*=0.
Il secondo è un caso con *x* e *v* concordi col solo andamento esponenziale crescente.

Questi vengono chiamati ***modi normali***: per essi *x*(*t*)/*v*(*t*) ***non*** dipende dal tempo.

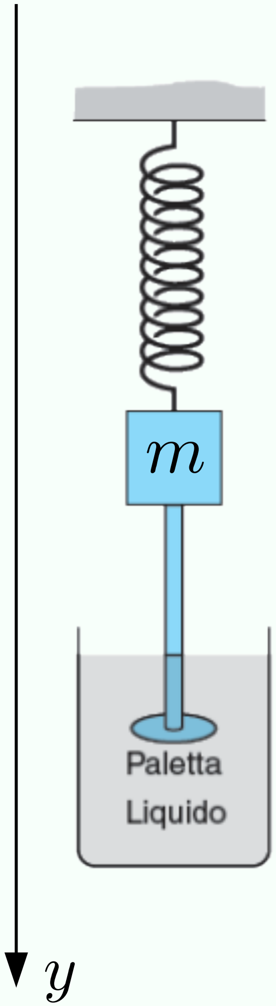
Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

Dispense "Modelli della Fisica"

Gettys
Capitolo 14

Oscillatore armonico smorzato



Legge del moto (componente *y*):

$$\sum F_y = -ky - bv_y + mg = ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

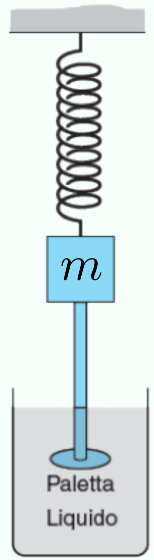
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = g}$$

Perciò l'equazione omogenea associata è:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \nu\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0} \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,; \ \nu = \frac{b}{m}$$

di cui una soluzione particolare è: $y_P = \dfrac{mg}{k}$

Esempi: pendolo in aria – altalena;
oscillatore armonico in fluido viscoso – ammortizzatore



$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{dove} \;\; \nu = \frac{b}{m} > 0; \;\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} \;\Rightarrow\; \lambda^2 + \nu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\left(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\omega_0^2}\right)$$

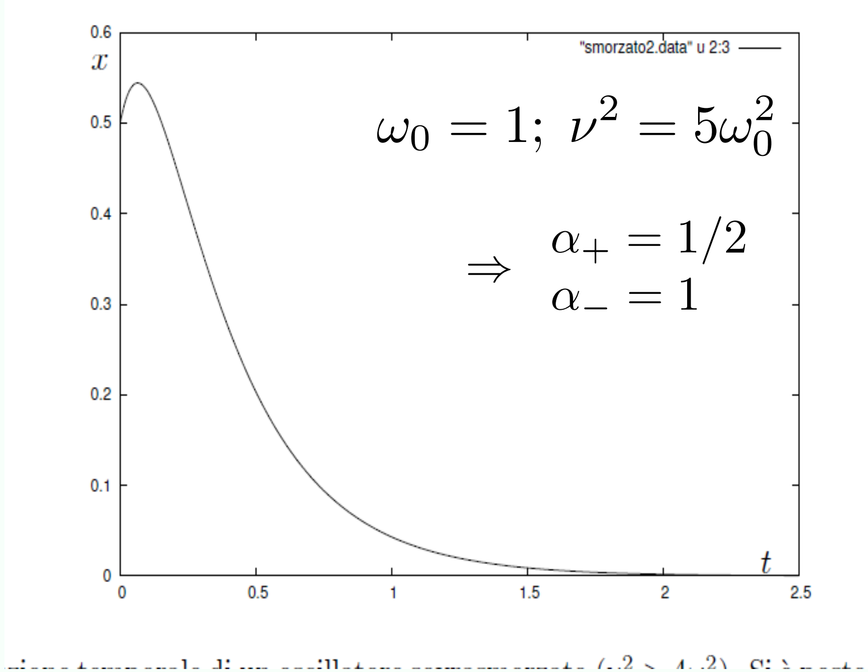
Caso 1: $\boxed{\nu^2 > 4\omega_0^2}$

→ *attrito molto forte* (***sovrasmorzato***)

Valori reali e negativi per λ. La soluzione è combinazione di esponenziali che tendono a zero per tempi infiniti:

$$x(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} + \alpha_- e^{\lambda_- t}$$

Va all'equilibrio (x_{eq}=v_{eq}=0) senza compiere oscillazioni, al massimo supera il punto morto una volta – ***stabilità nodale***.

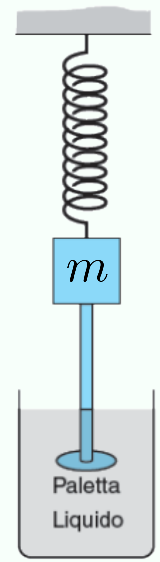


Esempi: pendolo in aria – altalena;
oscillatore armonico in fluido viscoso – ammortizzatore

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{dove } \nu = \frac{b}{m} > 0;\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + \nu\lambda + \omega_0^2 = 0}$$

$$\lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\left(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\omega_0^2}\right)$$



Caso 2: $\boxed{\nu^2 < 4\omega_0^2}$

→ *attrito piccolo*

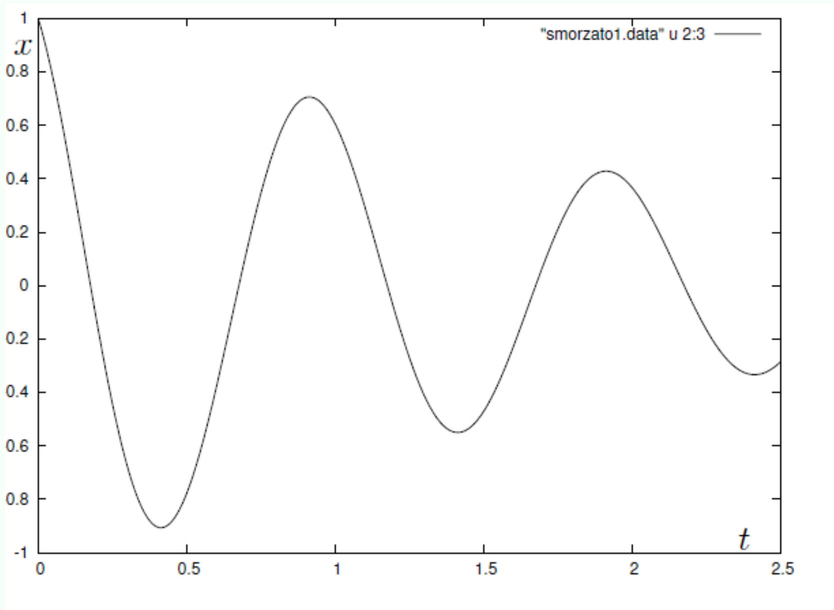
$$\lambda_\pm = -\frac{\nu}{2} \pm i\omega_1$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}$$

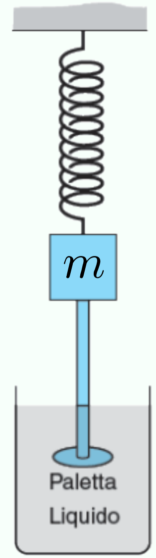
Valori complessi per λ. La soluzione è una combinazione di esponenziali con parte reale negativa e con parte immaginaria:

$$x(t) = e^{-\frac{\nu t}{2}}\left(\alpha_+ e^{+i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t}\right)$$

Oscillazione con ampiezza decrescente verso la posizione di equilibrio ($x_{eq}=v_{eq}=0$) – ***stabilità focale***.



Esempi: pendolo in aria – altalena;
oscillatore armonico in fluido viscoso – ammortizzatore



$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{dove} \;\; \nu = \frac{b}{m} > 0; \; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + \nu\lambda + \omega_0^2 = 0}$$

$$\lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\left(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\omega_0^2}\right)$$

Riassumendo, se lo smorzamento è piccolo, cioè per $\boxed{\nu^2 < 4\omega_0^2}$

$\Rightarrow$ la soluzione può essere scritta come:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}$$

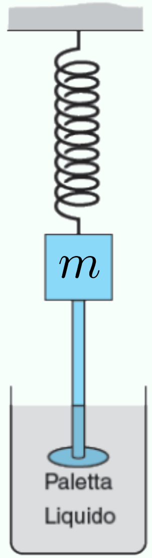
$$x(t) = e^{-\frac{\nu t}{2}} A\cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\nu}{2} e^{-\frac{\nu t}{2}} A\cos(\omega_1 t + \phi) - \omega_1 e^{-\frac{\nu t}{2}} A\sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \left(\frac{\nu^2}{4} - \omega_1^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}t} A\cos(\omega_1 t + \phi) + 2\omega_1 \frac{\nu}{2} e^{-\frac{\nu t}{2}} A\sin(\omega_1 t + \phi)$$

Esempi: pendolo in aria – altalena;
oscillatore armonico in fluido viscoso – ammortizzatore

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{dove} \;\; \nu = \frac{b}{m} > 0; \;\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + \nu\lambda + \omega_0^2 = 0}$$

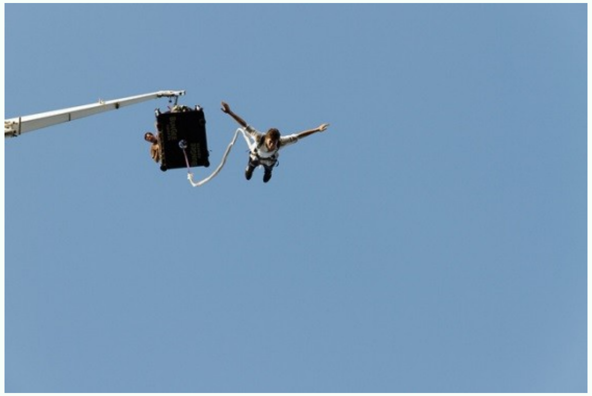
$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\Big(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\omega_0^2} \Big)$$

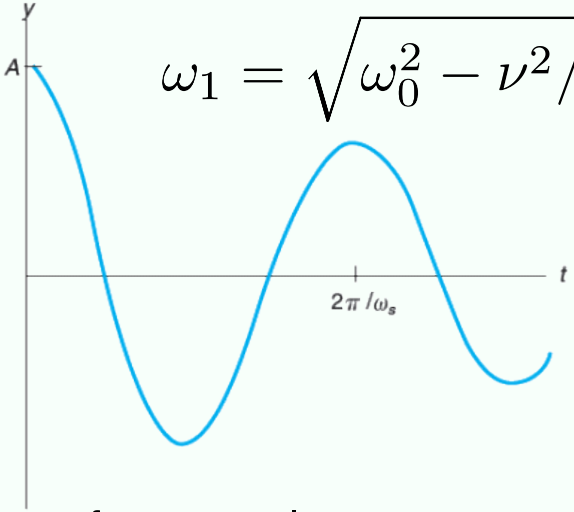
Riassumendo, se lo smorzamento è piccolo, cioè per $\boxed{\nu^2 < 4\omega_0^2}$

$\Rightarrow$ la soluzione può essere scritta come:

$$x(t) = e^{-\frac{\nu t}{2}} A \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}$$



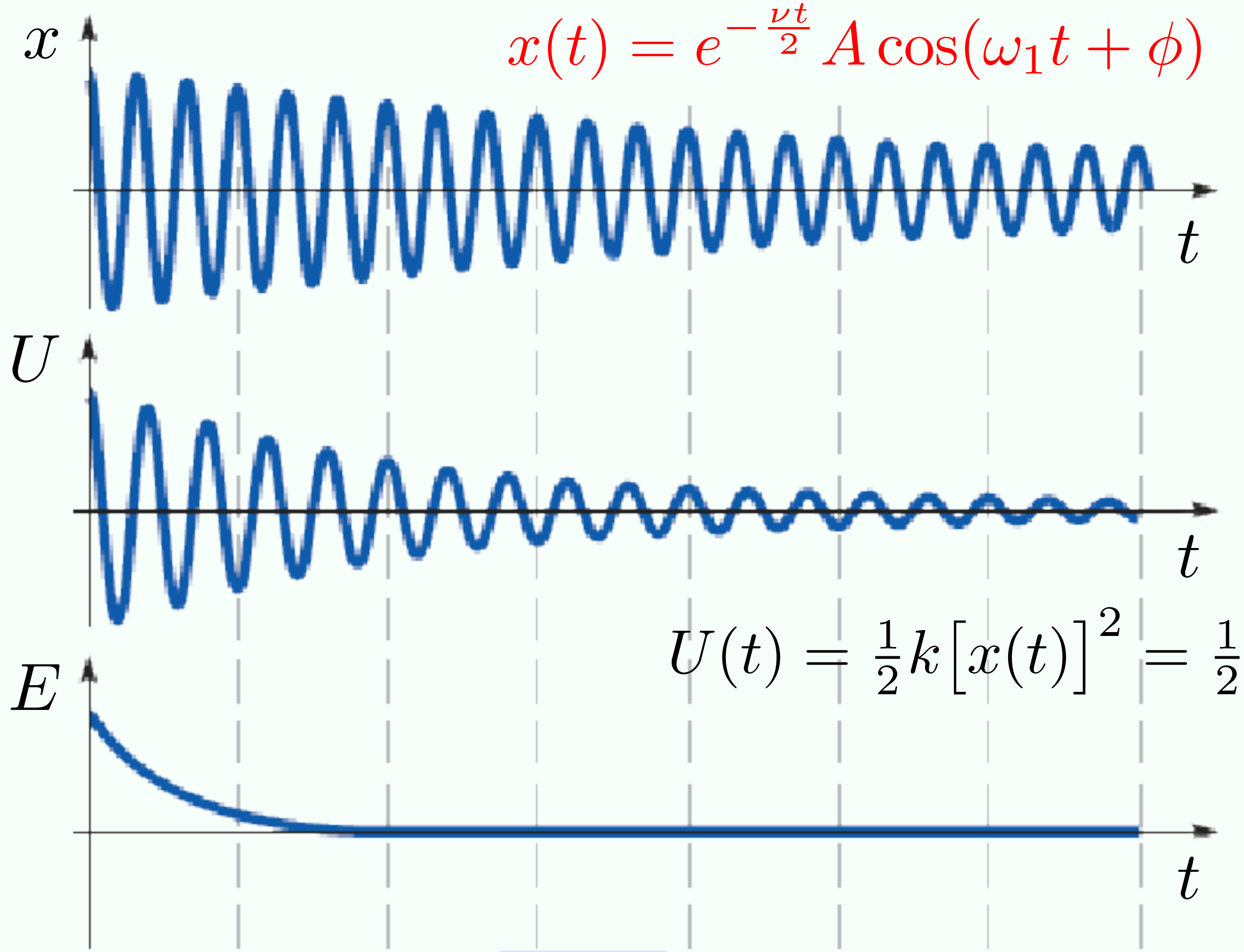


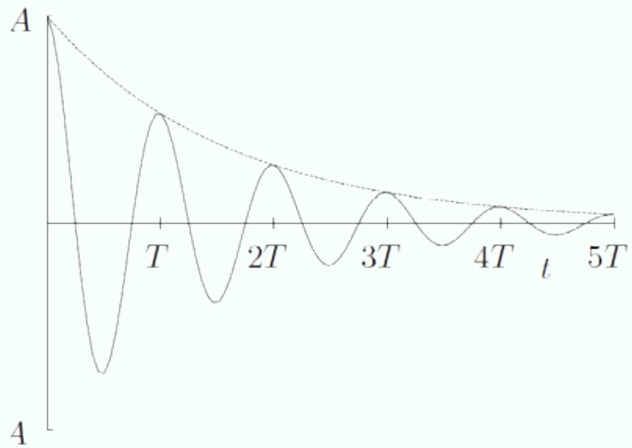
Moto oscillatorio con frequenza leggermente minore che nel caso non dissipativo e ampiezza che diminuisce nel tempo.

Oscillazioni smorzate: attrito piccolo

Via via che il tempo passa, l'ampiezza si riduce e quindi anche l'energia meccanica.

$$x(t) = e^{-\frac{\nu t}{2}} A \cos(\omega_1 t + \phi)$$



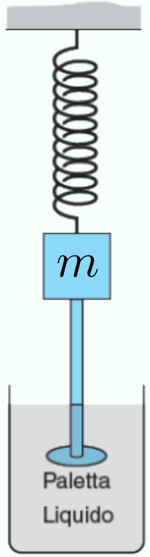


$$U(t) = \tfrac{1}{2} k \left[x(t)\right]^2 = \tfrac{1}{2} k e^{-\nu t} A^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi)$$

$$E(t) = U(t) + K(t) = \tfrac{1}{2} k \left[x_0\, e^{-\frac{\nu t}{2}}\right]^2 = \tfrac{1}{2} k x_0^2\, e^{-\nu t}$$

Esempi: pendolo in aria – altalena;
oscillatore armonico in fluido viscoso – ammortizzatore

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{dove} \;\; \nu = \frac{b}{m} > 0; \; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + \nu\lambda + \omega_0^2 = 0}$$

$$\lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\left(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\omega_0^2}\right)$$

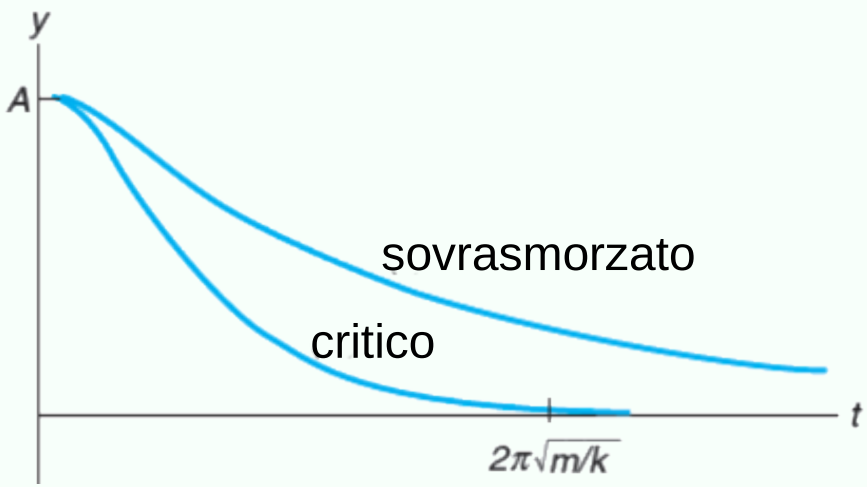
Caso 3: $\boxed{\nu^2 = 4\omega_0^2}$ $\quad \lambda = \lambda_\pm = -\nu/2$

→ *attrito intermedio*

La soluzione è il prodotto tra l'esponenziale e un polinomio di primo grado:

$$x(t) = e^{-\frac{\nu t}{2}}\left(Bt + C\right)$$

Smorzamento critico.



Nel caso sovrasmorzato (1) avevamo:

$$x(t) = e^{-\frac{\nu t}{2}}\left(\alpha_+ e^{+\gamma_s t} + \alpha_- e^{-\gamma_s t}\right) \qquad \text{con} \;\; \gamma_s = \tfrac{1}{2}\sqrt{\nu^2 - 4\omega_0^2}$$

Oscillatore armonico instabile amplificato

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Può accadere che il termine associato alla velocità (dissipazione) sia positivo → **$\nu < 0$**.

In altri termini, si può avere un ***attrito viscoso positivo***, cioè che avviene nella stessa direzione del moto e proporzionale alla velocità: $\vec{F} = \tilde{b}\vec{v}$.

Tali attriti possono essere realizzati in natura con circuiti elettrici a reazione positiva [RLC con un circuito R_0L_0 + amplificatore].

Le soluzioni sono ancora del tipo: $x(t) = e^{-\frac{\nu t}{2}}\left(\alpha_+ e^{+i\omega_1 t} + \alpha_- e^{-i\omega_1 t}\right)$
ma con $\nu < 0$.

⇨ l'ampiezza cresce nel tempo, mentre il sistema oscilla

L'unica soluzione che non diverge è quella con $x_0 = v_0 = 0$ – ***instabilità focali***.

C'è un punto di equilibrio, ma basta il minimo disturbo che sposti dalle condizioni di equilibrio perché si inneschi una debole oscillazione che via via cresce in ampiezza fino a che non intervengono altri fattori.

Modelli di questo tipo descrivono: formazione delle onde del mare in presenza di vento, pulsazioni delle cellule cardiache, oscillazioni dell'aria in strumenti musicali.

Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - → *considerazioni energetiche*
  - → *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

Dispense "Modelli della Fisica"

Gettys
Capitolo 14

Oscillazioni forzate

Se al sistema di prima si aggiunge una forza esterna che forza il moto con legge sinusoidale: $F(t) = F_0 \cos(\omega_E t)$, la risposta [spostamento y(t)] è:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_E t)}$$

$$\left[\omega_0 = \sqrt{k/m}\right]$$

$$\boxed{y(t) = A_0 \cos(\omega_E t + \phi_E)}$$

funzione oscillante, con periodo analogo alla forzante, e forse con moto sfasato…

$$\frac{dy}{dt} = -A_0\omega_E \sin(\omega_E t + \phi_E)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -A_0\omega_E^2 \cos(\omega_E t + \phi_E)$$

perciò:

$$-A_0\omega_E^2 \cos(\omega_E t + \phi_E)$$

$$+A_0\omega_0^2 \cos(\omega_E t + \phi_E) =$$

$$= \frac{F_0}{m}\cos(\omega_E t)$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)}; \quad \phi_E = 0$$

Oscillazioni forzate e smorzate

Al sistema di prima si aggiunga anche la forza viscosa, oltre alla forzante esterna sinusoidale. La risposta (lo spostamento y(t)) è:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \nu\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_E t)}$$

$$\left[\omega_0 = \sqrt{k/m}; \ \ \nu = b/m\right]$$

$$\boxed{y(t) = A_0\cos(\omega_E t + \phi_E)}$$

$$A_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + 2\nu\omega_E^2}}$$

$$\tan\phi_E = \frac{\nu\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$$

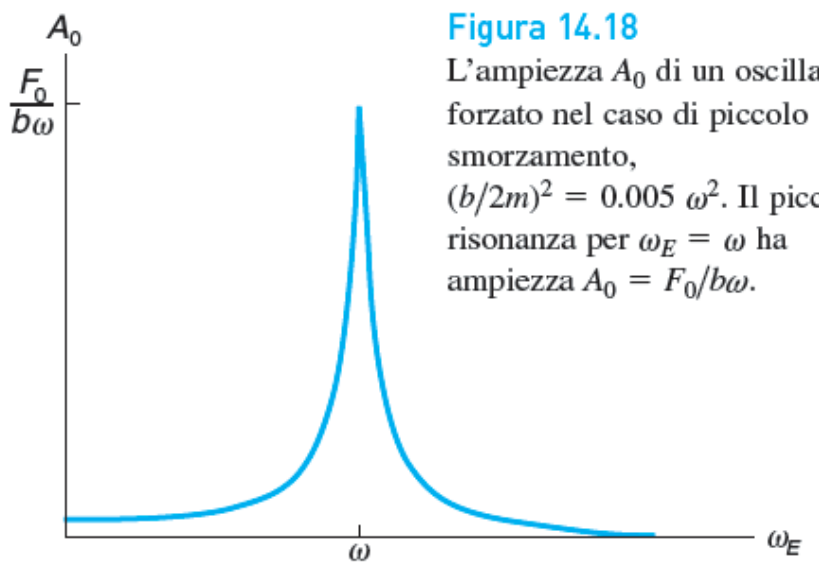


Figura 14.18
L'ampiezza A_0 di un oscillatore forzato nel caso di piccolo smorzamento, $(b/2m)^2 = 0.005\ \omega^2$. Il picco di risonanza per $\omega_E = \omega$ ha ampiezza $A_0 = F_0/b\omega$.

L'ampiezza è costante nel tempo, perché la forza esterna compie lavoro, che compensa le perdite per dissipazione.

La massima ampiezza si ha in corrispondenza della frequenza di risonanza (analoga a quella dell'oscillatore armonico ideale).