

# Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - *considerazioni energetiche*
  - *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

**Dispense “Modelli della Fisica”**

Prof. Cornolti

## Leggi della dinamica ed equazioni differenziali

Nella descrizione della dinamica di un sistema, possiamo sfruttare i principi di conservazione (energia, quantità di moto, ...), se applicabili, ma questo non ci darà mai la completa risoluzione della **legge del moto**, cioè  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

Si deve invece applicare la **seconda legge della dinamica** e quindi **risolvere l'equazione differenziale** che da essa deriva:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i}$$

Per esempio, in 1D:  $ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, a_i\right) \Rightarrow x(t)$

Esempi semplici (ma che descrivono i sistemi dinamici più comuni): sistemi la cui dinamica è descritta da **equazioni lineari a coefficienti costanti**

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + A \Rightarrow \boxed{a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = A} \Rightarrow x(t)$$

# Equazioni differenziali in meccanica

Spesso la soluzione delle equazioni del moto si ottiene attraverso la risoluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

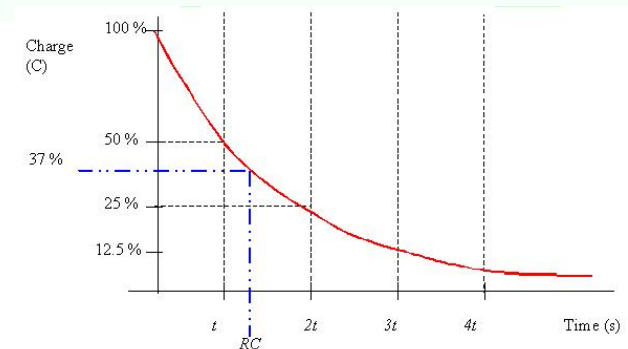
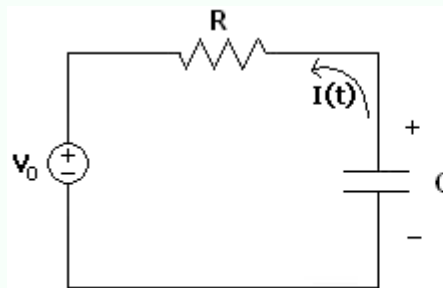
L'uso delle equazioni differenziali è rilevante in meccanica, ma è spesso utile anche in altri campi, perché le stesse equazioni differenziali regolano l'evoluzione temporale in sistemi diversi.

Per esempio, le equazioni differenziali del **primo ordine** regolano:

- il moto in un fluido viscoso;
- la carica e scarica di un condensatore;
- la crescita della popolazione di una colonia di batteri che interagiscono con una quantità limitata di cibo;
- il decadimento radioattivo
- etc ...



$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

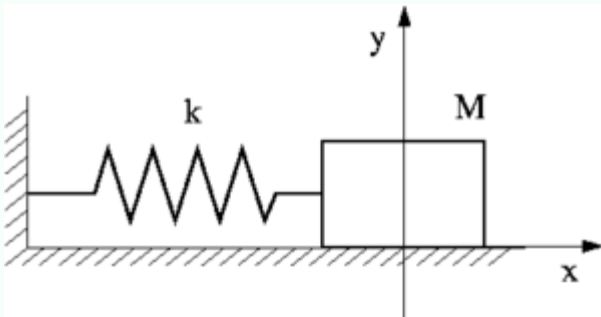


$$\frac{Q(t)}{C} + R \frac{dQ(t)}{dt} = 0$$

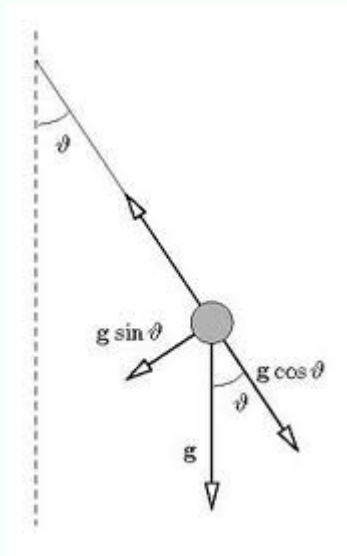
# Equazioni differenziali in meccanica

Le equazioni differenziali del secondo ordine regolano altri fenomeni, come ad esempio:

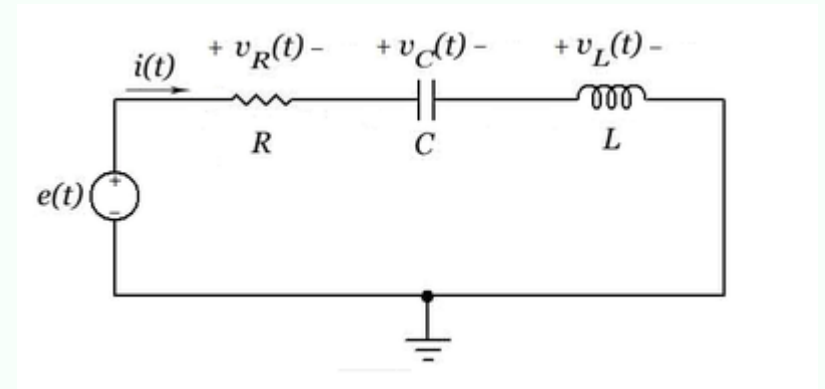
- il moto di una massa legata ad una molla;
- il moto del pendolo;
- le oscillazioni delle cariche in un circuito risonante con capacità  $C$  e induttanza  $L$ ,
- etc ...



$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$



$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \phi$$



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

# Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - *considerazioni energetiche*
  - *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

**Dispense “Modelli della Fisica”**

Prof. Cornolti

# Equazioni differenziali in meccanica

In generale si definisce un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$(*) \quad a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

( $n$  è chiamato **ordine** dell'equazione differenziale)

associata a (\*) c'è sempre l'equazione omogenea:

$$(**) \quad a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Se  $x = u(t)$  è soluzione di (\*\*), allora anche  $A u(t)$  è soluzione (con  $A$  costante).

Se  $x = u(t)$  e  $x = v(t)$  sono soluzioni di (\*\*), allora anche una *qualunque combinazione lineare*  $w(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$  è soluzione di (\*\*) (dove  $c_1$  e  $c_2$  sono costanti).

Inoltre, se  $x = u(t)$  è soluzione dell'equazione differenziale (\*) e se anche  $x = v(t)$  è soluzione di (\*), allora  $w(t) = u(t) - v(t)$  è soluzione dell'equazione omogenea (\*\*).

# Equazioni differenziali in meccanica

$$\begin{aligned} (*) \quad & a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \\ (**) \quad & a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \end{aligned}$$

$u_f(t) + w(t)$   
 $w(t)$   
 $V_0$

Si può dimostrare che, se  $w(t)$  è una qualsiasi soluzione di tutte le possibili soluzioni dell'equazione omogenea  $(**)$  (che costituiscono l'insieme  $V_0$ ), e  $u_f(t)$  è una soluzione particolare dell'equazione differenziale  $(*)$



al variare di  $w(t)$  all'interno di  $V_0$ , tutte le soluzioni di  $(*)$  sono date da  $u(t) = u_f(t) + w(t)$ .

Quindi basta trovare una qualunque soluzione particolare di  $(*)$  + tutte le soluzioni di  $(**)$  (impresa di solito più facile) per trovare tutte le soluzioni di  $(*)$ .

# Equazioni differenziali in meccanica

L'esempio più semplice di dinamica è il *moto uniformemente accelerato*.

L'equazione differenziale è: (1.\*)  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_0 \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_0}{m}$   
dove  $F_0$  è una forza costante.

L'omogenea associata è: (1.\*\*\*)  $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$

Quali funzioni  $x(t)$  soddisfano la (1.\*\*\*)?

Tutti e solo i polinomi di grado uguale o inferiore al primo.

E la soluzione particolare della (1.\*)? Integrando si ottiene:  $u_f(t) = \frac{F_0}{2m} t^2$

Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale (1.\*) sarà:

$$x(t) = \frac{F_0}{2m} t^2 + c_1 t + c_2$$



# Equazioni differenziali in meccanica

$$x(t) = \frac{F_0}{2m}t^2 + c_1t + c_2$$

$c_1$  e  $c_2$  sono costanti arbitrarie

2 per le equazioni differenziali del secondo ordine, 1 per quelle del primo ordine.

Tali costanti si trovano imponendo le **condizioni iniziali**:  $x(t=0)$ , e  $v(t=0)$  che dobbiamo conoscere per risolvere il problema.

Nell'esempio sopra menzionato,  $x(0) = x_0 = c_2$  e  $v(0) = v_0 = c_1$ .

Ciò equivale alla legge del moto che abbiamo visto in passato:

$$a = \frac{F_0}{m}; \quad x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

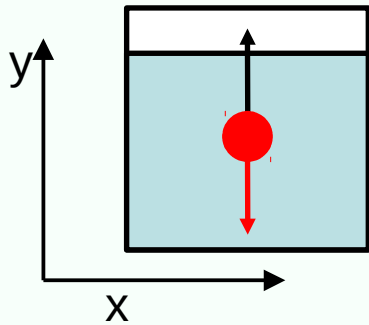
# Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - *considerazioni energetiche*
  - *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

**Dispense “Modelli della Fisica”**

Prof. Cornolti

## Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante



$$\uparrow \vec{F}_v = -\gamma \vec{v}$$

Forza di attrito viscoso

$$\downarrow \vec{F}_P = -mg \hat{j}$$

Forza peso

Trascuriamo la spinta di Archimede (corpo puntiforme)

$$(m\vec{a})_y = \left( \sum_i \vec{F}_i \right)_y = -mg - \gamma v_y$$

$$\Rightarrow ma = m \frac{dv}{dt} = -mg - \gamma v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{\gamma}{m} v$$

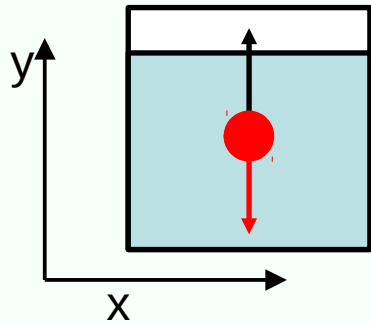
$$m/\gamma = \tau;$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g$$

È un'equazione differenziale del primo ordine (compare solo la derivata prima).

## Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante



$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \quad (*)$$

Per risolvere la (\*), bisogna prima trovare tutte le soluzioni dell'omogenea:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad (**)$$

**L'unica funzione la cui derivata è proporzionale a sé stessa, cambiata di segno, è l'esponenziale:**  $v(t) = Ae^{-t/\tau}$  con  $\tau = m/\gamma$  ed  $A$  costante arbitraria.

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (\*) si trovano sommando le soluzioni dell'omogenea (\*\*) e una soluzione particolare di (\*).

## Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \quad (*)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad (**)$$

Una **soluzione particolare della (\*)** la si trova pensando alla **velocità limite** che viene raggiunta a tempi lunghi: infatti da (\*) emerge che, se il corpo parte da fermo ( $v=0$ ), all'inizio la sua velocità aumenta, ma non la sua derivata che tende a diminuire.

Via via la derivata diminuisce fino a raggiungere lo zero. Quando la derivata della velocità è zero *l'accelerazione è nulla*. Questa condizione la si raggiunge quando:

$$0 = \frac{v}{\tau} + g = \frac{\gamma v}{m} + g \quad \longrightarrow \quad v = v_{\text{lim}} = -\frac{m}{\gamma} g = -\tau g$$

La velocità limite ha segno negativo, perché il corpo è diretto verso il basso.

## Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \quad (*)$$

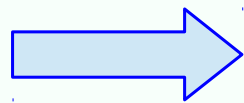
$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad (**)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (\*) si trovano sommando le soluzioni dell'omogenea (\*\*) e una soluzione particolare di (\*).

$$v(t) = v_{\text{lim}} + Ae^{-t/\tau}$$

La costante arbitraria A si trova imponendo la condizione iniziale  $v(t = 0) = 0$ :

$$0 = v_{\text{lim}} + Ae^{-0/\tau} = v_{\text{lim}} + A \quad \text{da cui} \quad A = -v_{\text{lim}}.$$

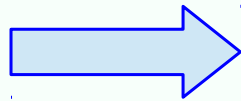


$$v(t) = v_{\text{lim}} (1 - e^{-t/\tau})$$

## Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \quad (*)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad (**)$$

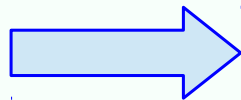


$$v(t) = v_{\text{lim}} (1 - e^{-t/\tau})$$

---

Se invece la condizione iniziale fosse stata  $v(0) = v_0$  con  **$v_0$  maggiore di  $v_{\text{lim}}$**  (per esempio se il corpo viene scagliato dentro il fluido viscoso), allora:

$$v_0 = v_{\text{lim}} + Ae^{-0/\tau} = v_{\text{lim}} + A \quad \text{da cui} \quad A = v_0 - v_{\text{lim}}.$$



$$v(t) = v_{\text{lim}} + (v_0 - v_{\text{lim}})e^{-t/\tau}$$

## Corpo immerso in un mezzo viscoso in campo gravitazionale costante

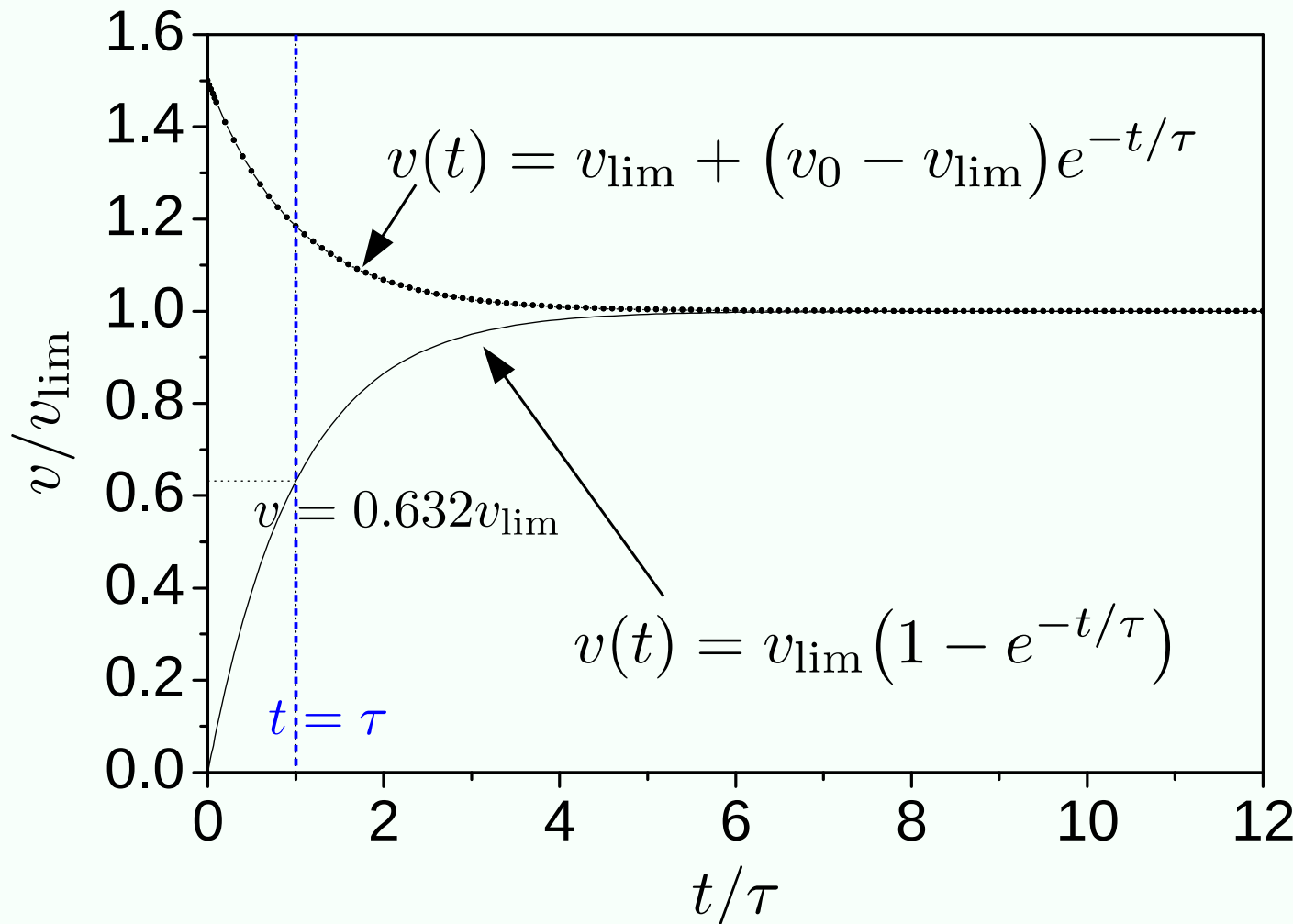
In un diagramma tempo-velocità, le funzioni viste prima hanno questo andamento, entrambe tendenti a  $v_{\text{lim}}$  per tempi grandi:

$$v_{\text{lim}} = -\frac{m}{\gamma}g = -\tau g$$

$$\frac{m}{\gamma} = \tau$$

Il tempo caratteristico è dato dal rapporto del termine inerziale (massa) rispetto al termine dissipativo.

Tanto maggiore è la viscosità del liquido (o minore è la massa dell'oggetto), quanto prima viene raggiunta la velocità limite.





# Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - *considerazioni energetiche*
  - *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

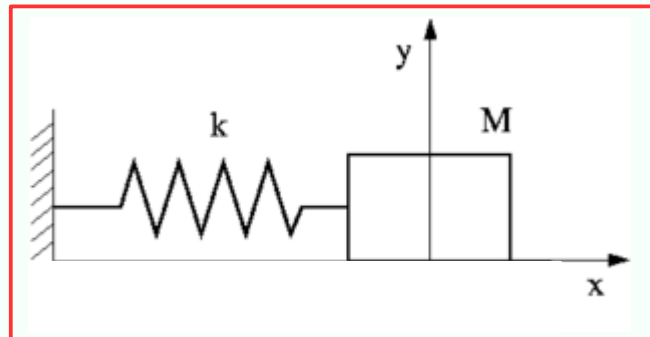
**Dispense “Modelli della Fisica”**

**Gettys**  
Capitolo 14

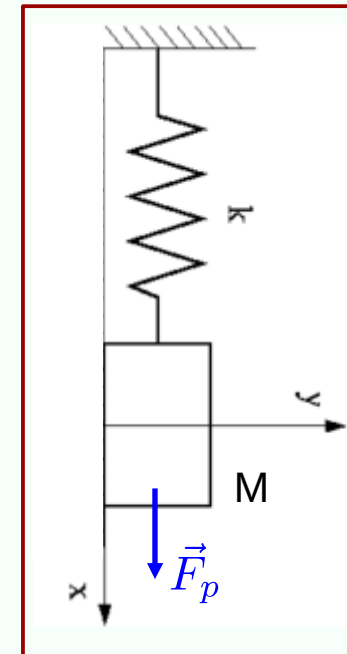
# Oscillatore armonico

Un esempio di **equazione differenziale di secondo grado** che rappresenta molti sistemi fisici è quello dell'oscillatore armonico. Un oscillatore armonico può essere schematizzato mediante una **molla** di costante elastica  $k$ , con attaccato un corpo di massa  $m$ .

**caso A:** La molla può essere orizzontale e il corpo trovarsi su un piano orizzontale privo di attrito



**caso B:** oppure essere verticale con il corpo di massa  $m$  appeso.



Nel secondo caso la forza peso (costante) si aggiunge alla forza della molla.

# Oscillatore armonico

I casi A e B sono esaustivi dell'oscillatore armonico:

**B**: equazione differenziale dell'oscillatore armonico con **forza costante applicata**  $F_0$ ;

**A**: equazione **omogenea associata**.

$$(*) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \quad (\text{caso B})$$

$$(**) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{caso A})$$

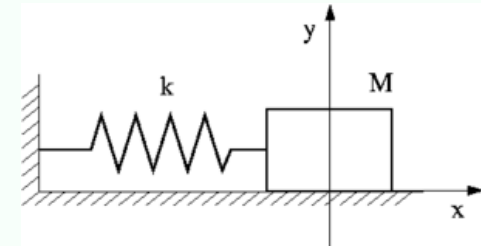
$$\text{dove } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si noti che  $\omega_0$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo tempo, è ricavabile a partire da  $k$  ed  $m$  (costanti note del problema) e non dipende dall'ampiezza del moto.

Risolvendo la  $(**)$  (omogenea) si otterranno tutte le possibili soluzioni, a meno di due costanti arbitrarie determinate dalle condizioni iniziali di posizione e velocità.

## Oscillatore armonico (caso A)

$$(**) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$



La soluzione deve essere tale che **la sua derivata seconda sia uguale a sé stessa cambiata di segno**. Le uniche funzioni capaci di ciò sono il **seno** ed il **coseno**:

$$\frac{d^2}{dt^2} [\cos(\omega_0 t)] = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \quad \frac{d^2}{dt^2} [\sin(\omega_0 t)] = -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

Perciò tutte le possibili soluzioni di (\*\*) sono combinazioni lineari di seno e coseno:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

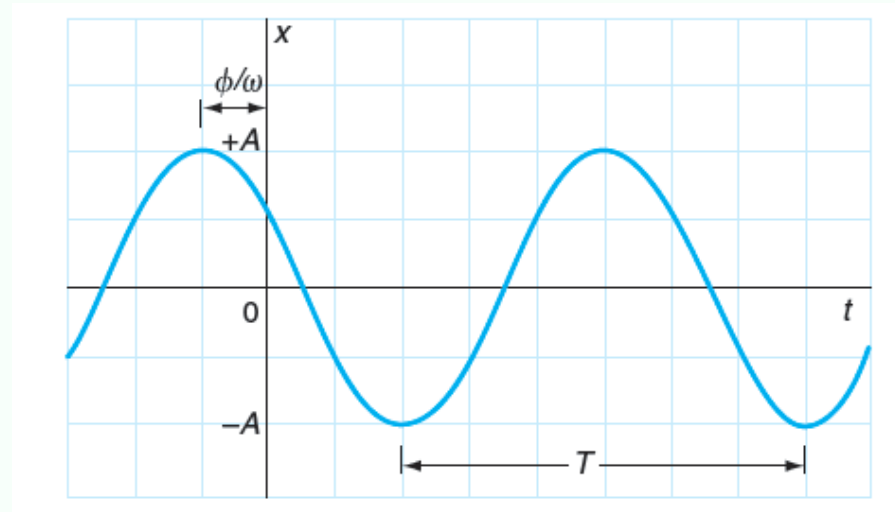
oppure, passando attraverso le formule di addizione (trigonometria):

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

con

$$c_1 = A \cos \varphi; \quad c_2 = -A \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = -c_2/c_1; \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$



## Oscillatore armonico (caso A)

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \text{ oppure } x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La velocità quindi è:  $v(t) = \frac{dx}{dt} = -c_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + c_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$

e l'accelerazione:  $a(t) = \frac{dv}{dt} = -c_1 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - c_2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t)$

Le coppie di costanti arbitrarie  $(c_1, c_2)$  oppure  $(A, \phi)$  si determinano a partire dalle condizioni iniziali  $x(t=0)$  e  $v(t=0)$ :

$$x(0) = c_1$$

$$v(0) = c_2 \omega_0$$

oppure

$$x(0) = A \cos(\varphi)$$

$$v(0) = -A \omega \sin(\varphi)$$

Una volta determinate  $c_1$  e  $c_2$ , la soluzione generale della (\*\*) è quindi data.

Il **moto** è di tipo **oscillatorio sinusoidale in t, con pulsazione  $\omega_0$** . Poiché

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

la pulsazione  $\omega_0$  e il periodo  $T = 2\pi/\omega_0$  sono determinati completamente dai valori della costante elastica  $k$  della molla e della massa  $m$  del corpo attaccato ad essa.

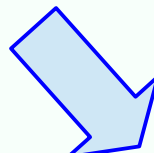
## Oscillatore armonico (caso A)

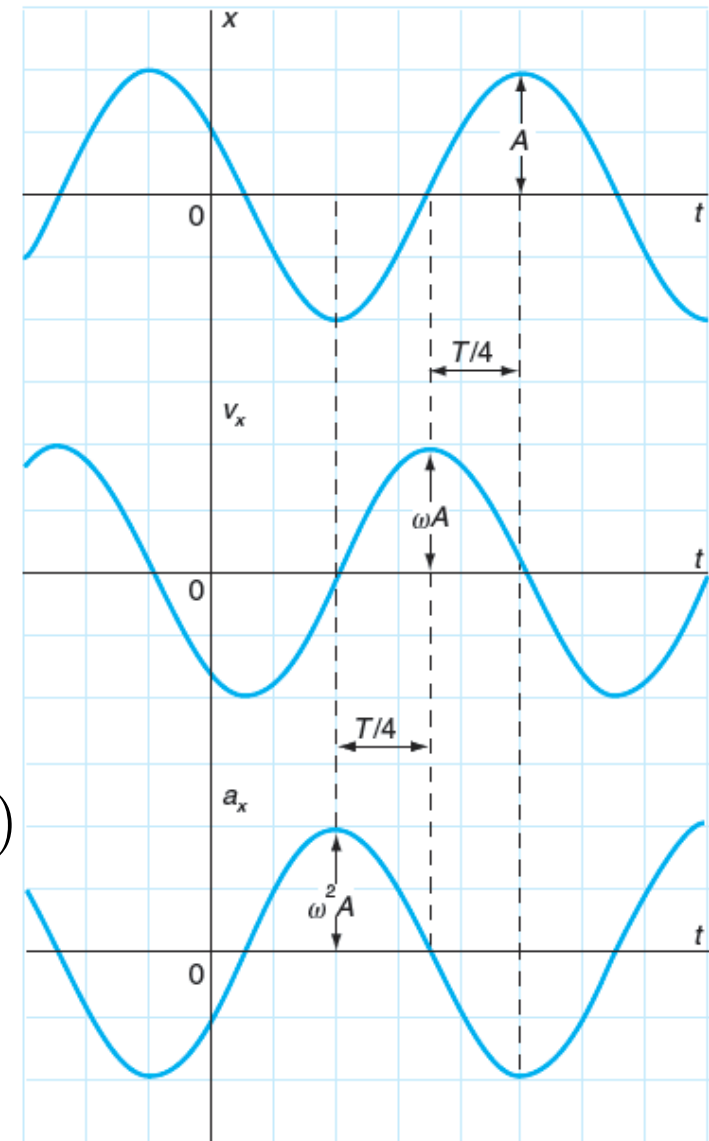
Considerando dunque le condizioni iniziali:

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{v(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$v(t) = -x(0)\omega_0 \sin(\omega_0 t) + v(0) \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= -x(0)\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - v(0)\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ &= -\omega_0^2 x(t) \end{aligned}$$


$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$



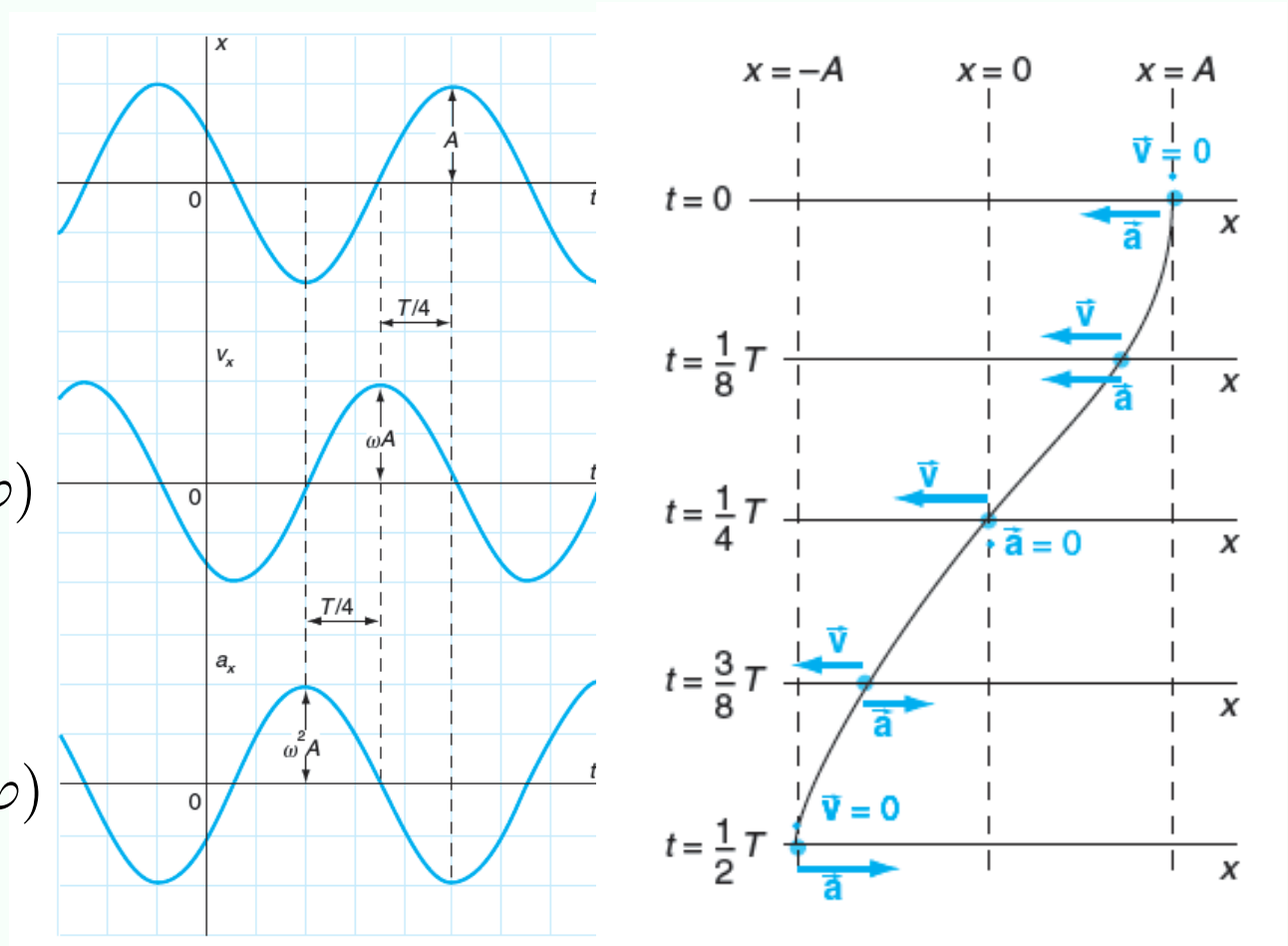
# Oscillatore armonico (caso A)

Usando la formula con ampiezza e fase:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{la relazione è soddisfatta per ogni } t$$

## Oscillatore armonico (caso B)

Che cosa succede se è presente la forza costante  $F_0$ ?

$$(*) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}$$

La soluzione generale è la somma di tutte le possibili soluzioni dell'omogenea (che abbiamo appena visto) più una soluzione particolare della (\*).

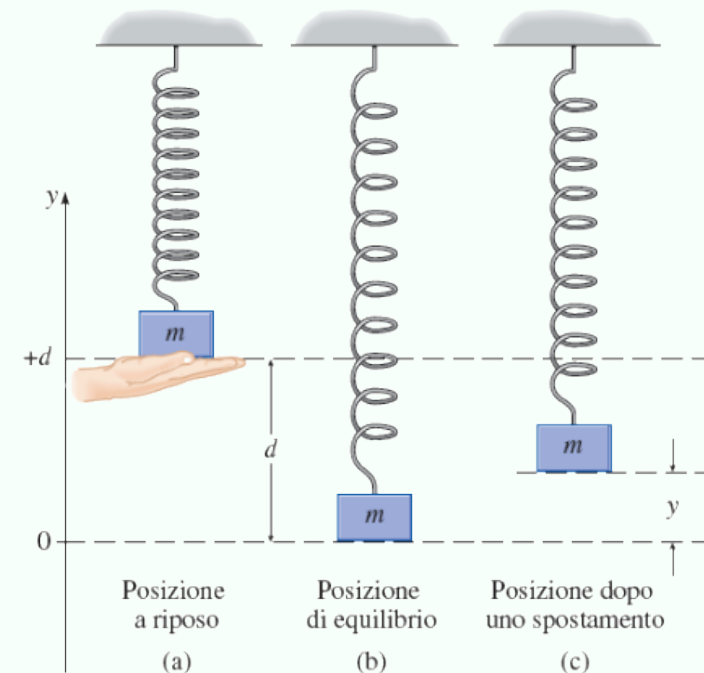
La più semplice soluzione particolare della (\*) è:  $x(t) = x_0 = F_0/k$

La soluzione generale sarà del tipo oscillante con pulsazione  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  rispetto ad un punto di equilibrio non nullo:

$$x(t) = x_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

potremmo ridefinire l'asse  $x$  in modo tale che  $X = x - x_0$  e ritroveremmo il caso dell'omogenea.

La forza costante non cambia la frequenza di oscillazione, solo il punto intorno al quale oscilla.





# Dinamica di sistemi fisici

- *Introduzione*
- *Equazioni differenziali lineari*
- *Moto in un fluido viscoso*
- *Oscillatore armonico*
  - *considerazioni energetiche*
  - *pendolo semplice*
- *Soluzione di equazioni differenziali lineari (facoltativo)*
- *Oscillatore armonico smorzato e forzato (facoltativo)*

**Dispense “Modelli della Fisica”**

**Gettys**  
Capitolo 14

# Considerazioni energetiche

La **frequenza di oscillazione** dell'oscillatore armonico è determinata dalla costante elastica della molla e dalla massa:  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Non varia al variare dell'**ampiezza di oscillazione**, la quale invece è direttamente associata all'**energia del sistema**.

Si ricordi che il sistema è conservativo (la forza elastica è conservativa).

$$(**) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t)$$

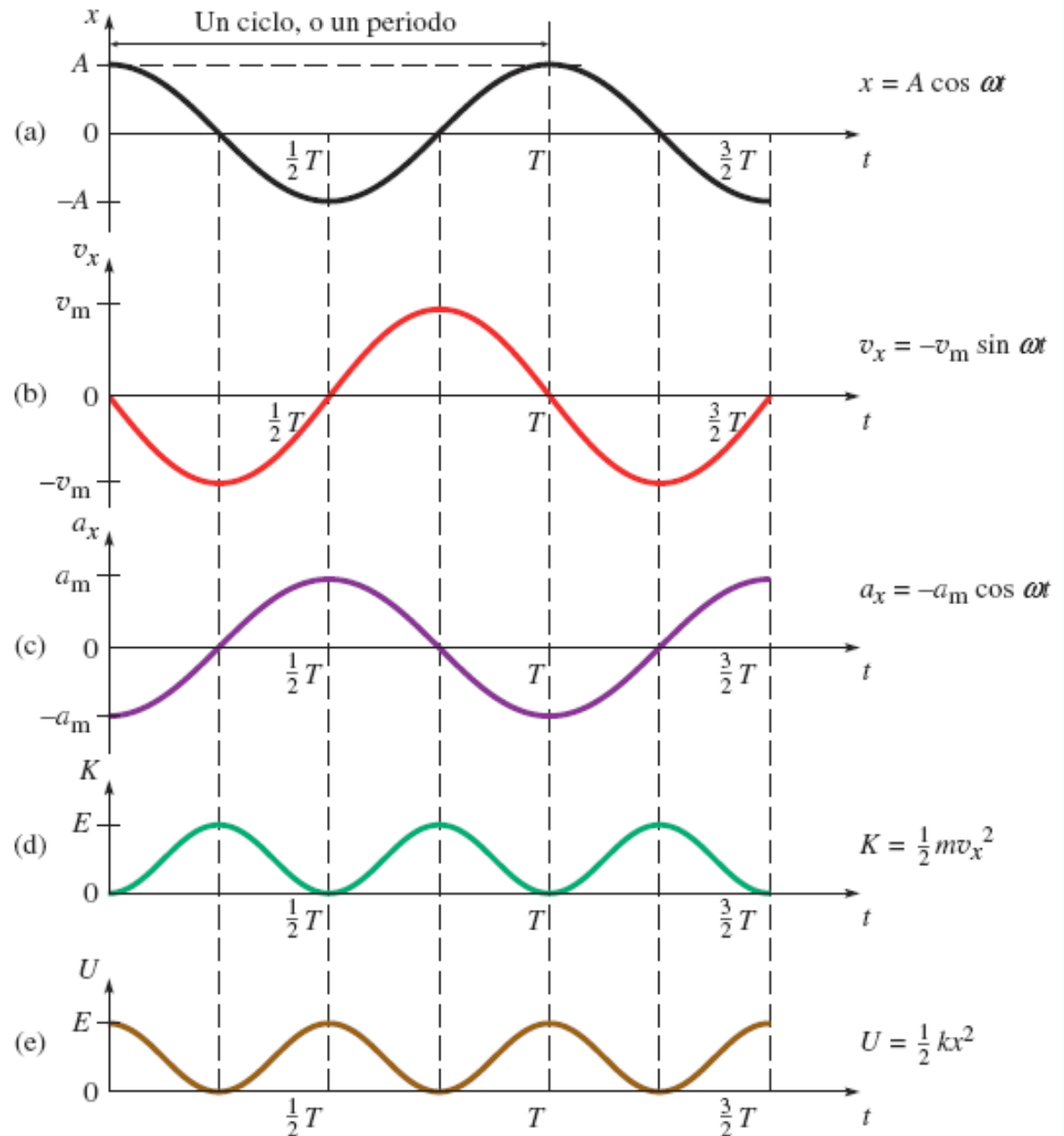
# Considerazioni energetiche

Le soluzioni sono sinusoidali.  
Le funzioni trigonometriche oscillano fra -1 e 1.

Ad ogni intervallo  $\Delta t = T$   
otteniamo la stessa posizione  
con la stessa velocità.

In modulo:

- la massima estensione  $x_{\max}$   
si ha per  $|x_{\max}| = A$ ;
- la massima velocità  $v_{\max}$   
si ha per  $|v_{\max}| = \omega_0 A$ ;
- la massima accelerazione  
si ha per  $|a_{\max}| = \omega_0^2 A$ .



## Considerazioni energetiche

Consideriamo ora come condizioni iniziali quelle in cui il corpo si trovi in  $x = x_0$  con velocità nulla (massima estensione della molla).

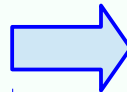
Allora  $x(0) = x_0$  e  $v(0) = 0$ , e quindi

$$x(0) = A \cos \varphi = x_0$$

$$v(0) = -A\omega_0 \sin \varphi = 0$$


$$\varphi = 0 \text{ e } A = x_0$$

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \\ v(t) = -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ a(t) = -x_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

L'energia potenziale è data da:  $U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_0^2 [\cos(\omega_0 t)]^2$

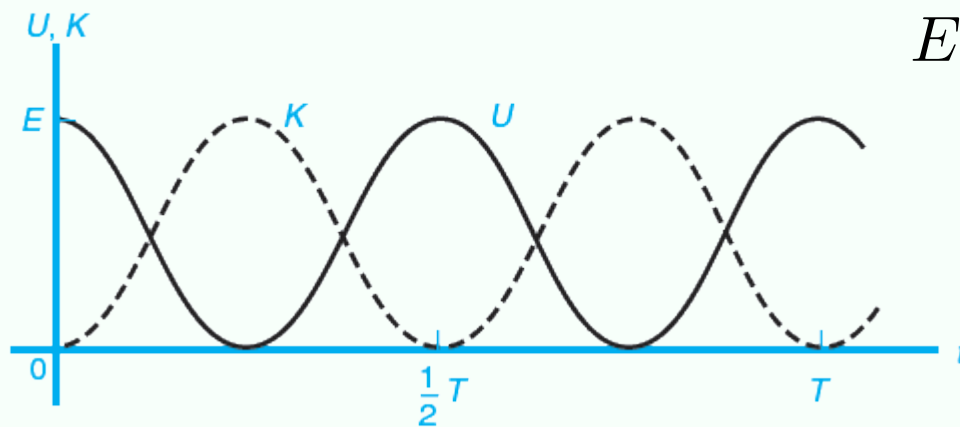
L'energia cinetica è data da:  $K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2 [\sin(\omega_0 t)]^2$   
 $= \frac{1}{2} kx_0^2 [\sin(\omega_0 t)]^2$

# Considerazioni energetiche

L'energia potenziale è data da:  $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 [\cos(\omega_0 t)]^2$

L'energia cinetica è data da:  $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 [\sin(\omega_0 t)]^2$

La somma di energia potenziale + cinetica deve essere una costante del moto (ricordiamo che **la forza elastica è conservativa**):



$$E = U + K$$

$$= \frac{1}{2}kx_0^2 [\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)]^2$$



$$E = \frac{1}{2}kx_0^2$$

L'energia meccanica totale è costante ed è uguale all'energia potenziale posseduta all'istante iniziale + energia cinetica posseduta all'istante iniziale.

Nel tempo, un tipo di energia si trasforma nell'altra e viceversa

# Considerazioni energetiche

L'energia potenziale è data da:  $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 [\cos(\omega_0 t)]^2$

L'energia cinetica è data da:  $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 [\sin(\omega_0 t)]^2$

La somma di energia potenziale + cinetica deve essere una costante del moto (**la forza elastica è conservativa**):

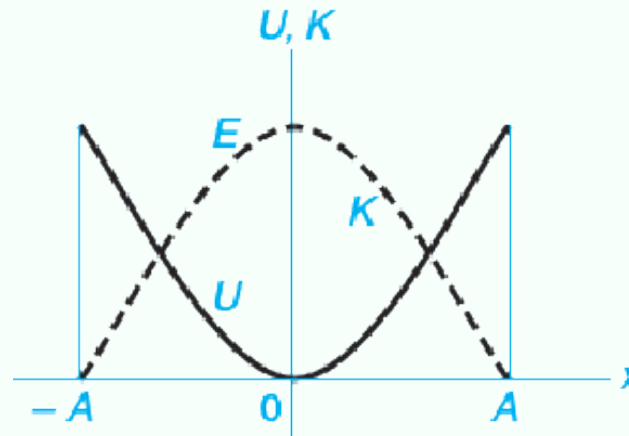


$$E = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Da sopra si vede che c'è un legame stretto fra l'energia del sistema e l'ampiezza di oscillazione  $x_0$  (o massima ampiezza) del sistema.

$$K = E - U = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$$



# Considerazioni energetiche

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_0^2 [\cos(\omega_0 t)]^2$$

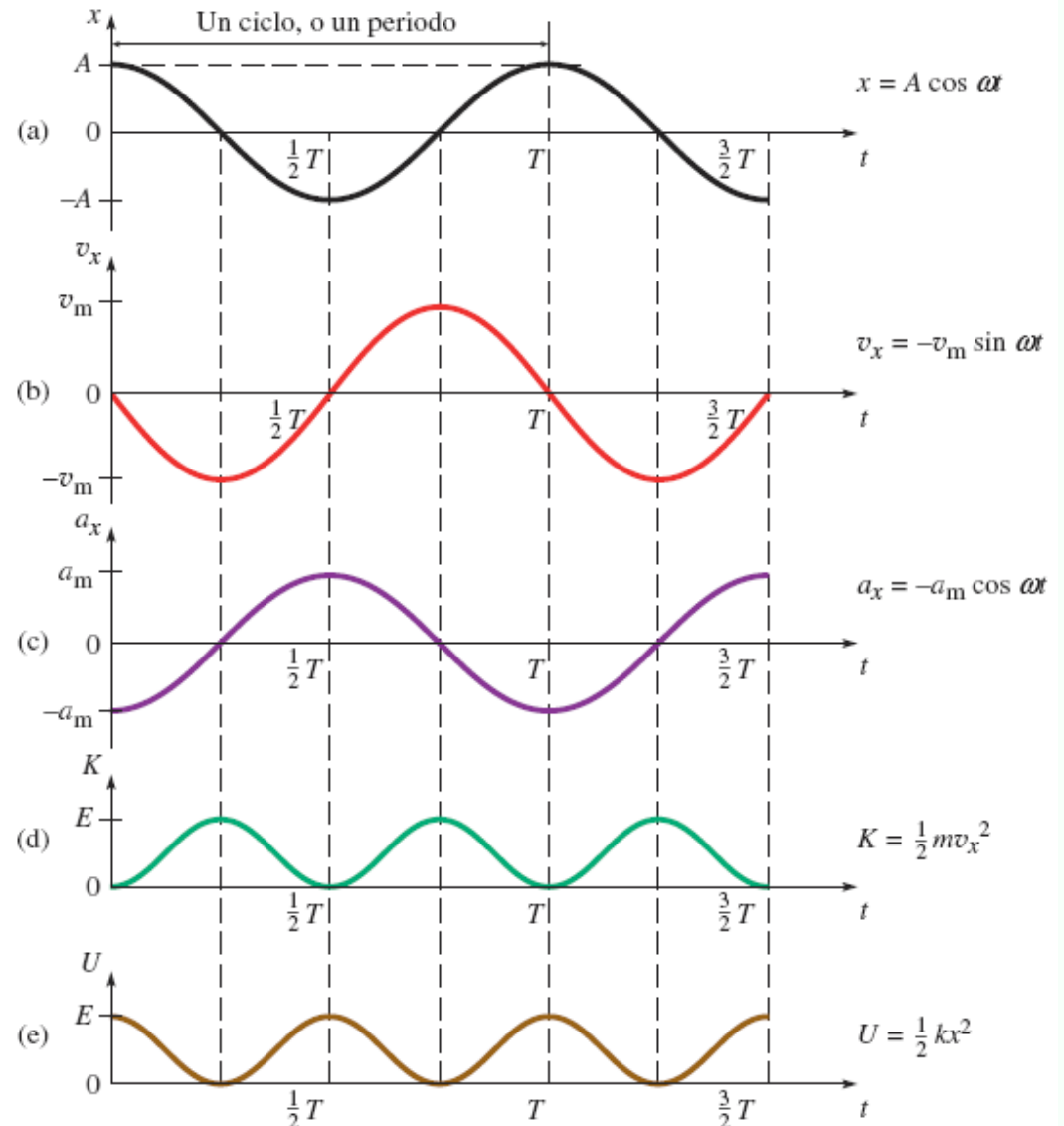
$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kx_0^2 [\sin(\omega_0 t)]^2$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

L'energia cinetica si annulla ogni qualvolta la posizione  $x$  raggiunge la ampiezza massima di oscillazione.

D'altra parte, quando il corpo passa per  $x = 0$  dove l'energia potenziale è nulla (molla non estesa né compressa) l'energia cinetica è massima.

L'energia meccanica passa da una forma all'altra con un andamento periodico con periodo pari a  $\pi/\omega_0$  (la metà del periodo dello spostamento).



# Considerazioni energetiche

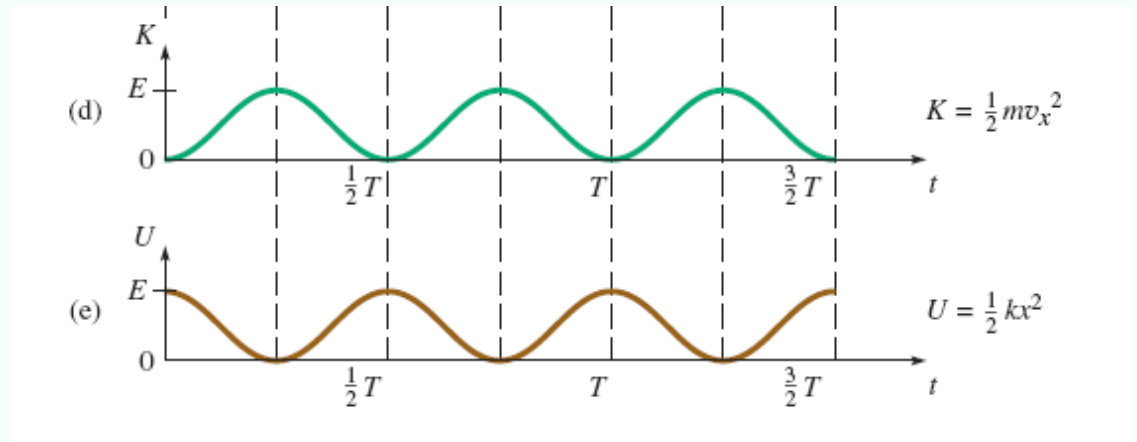
L'energia meccanica passa da una forma all'altra con un andamento periodico con **periodo** pari a  $\pi/\omega_0$  (la **metà** del periodo dello spostamento).

$$E = \frac{1}{2} k x_0^2$$

infatti abbiamo che:

$$U = \frac{1}{2} k x_0^2 [\cos(\omega_0 t)]^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 \left[ \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2} \right] = \frac{1}{4} k x_0^2 [1 + \cos(2\omega_0 t)]$$

$$K = \frac{1}{2} k x_0^2 [\sin(\omega_0 t)]^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 \left[ \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2} \right] = \frac{1}{4} k x_0^2 [1 - \cos(2\omega_0 t)]$$





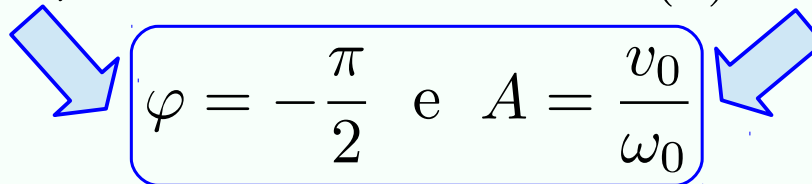
## Considerazioni energetiche

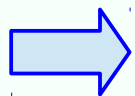
Se le condizioni iniziali fossero invece state tali che il corpo si trovasse in  $x = 0$  (molla non estesa) con una certa velocità non nulla  $v_0$ ,

allora  $x(0) = 0$  e  $v(0) = v_0$ , e quindi

$$x(0) = A \cos \varphi = 0$$

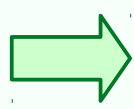
$$v(0) = -A\omega_0 \sin \varphi = v_0$$


$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ e } A = \frac{v_0}{\omega_0}$$


$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ v(t) = -v_0 \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ a(t) = -v_0\omega_0 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

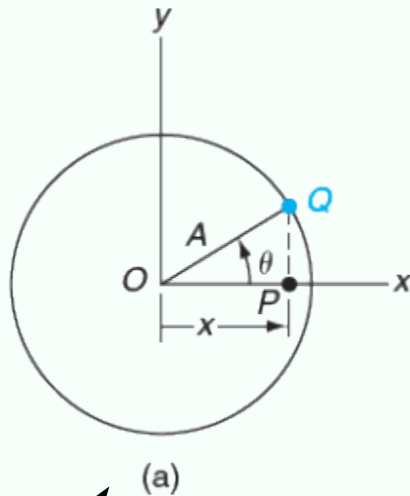
L'energia potenziale è data da:  $U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[ \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \right]^2$ ;  $\left[ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right]$

L'energia cinetica è data da:  $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[ \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \right]^2$

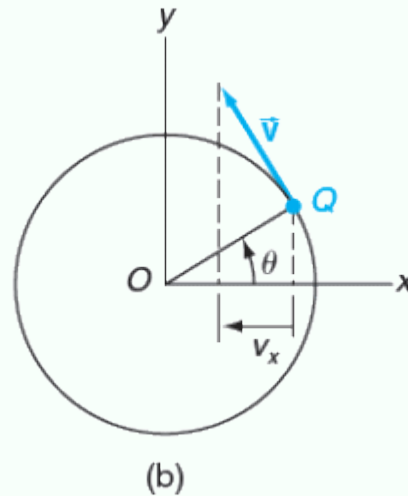

$$E = U + K = \frac{1}{2} m v_0^2$$

# Oscillatore armonico

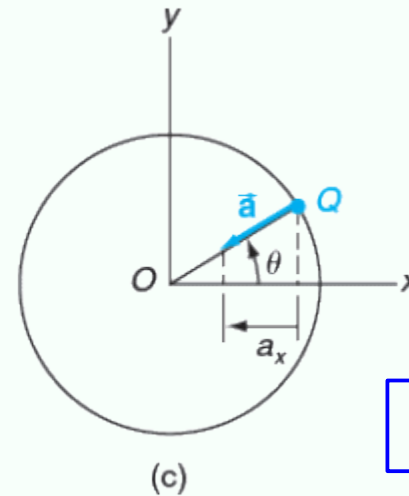
Il moto armonico può anche essere visto come la proiezione in una componente di un moto circolare uniforme.



$$x(t) = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \phi)$$



$$v_x(t) = v \cos(\theta + \pi/2) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$



$$a_x(t) = a \cos(\theta + \pi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\theta = \omega t + \phi$$

