Cinematica del punto materiale (I)

- *Vettore posizione e traiettoria del punto*
- ***Velocità** media istantanea*
- ***Accelerazione** media e instantanea*
- *Legge oraria del moto*
- *Casi particolari in una dimensione*

Gettys

capitolo 3

Cinematica del punto materiale (I)

- *Vettore posizione e traiettoria del punto*
- ***Velocità** media istantanea*
- ***Accelerazione** media e instantanea*
- *Legge oraria del moto*
- *Casi particolari in una dimensione*

Gettys

capitolo 3

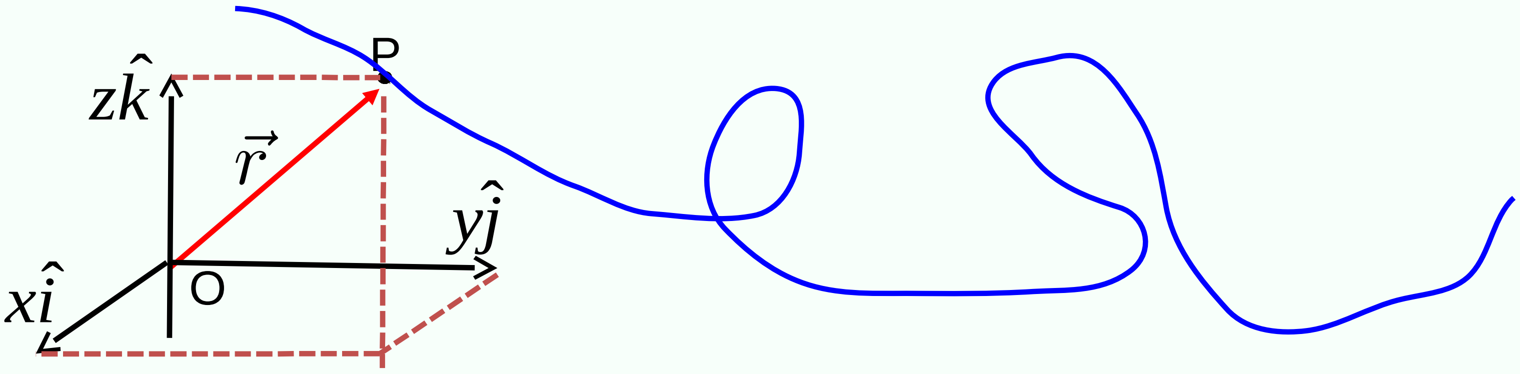
La ***cinematica*** descrive il moto di un punto materiale.

$$\vec{r}(t) \equiv \overrightarrow{OP}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

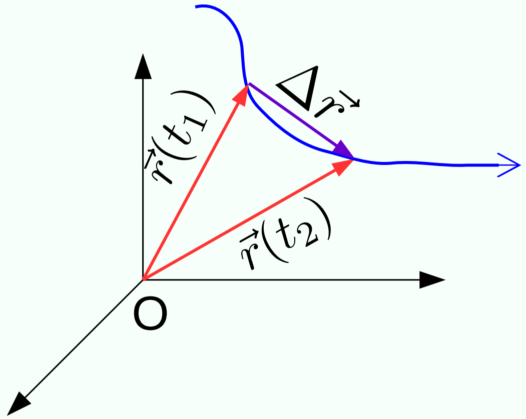
3 coordinate descrivono il moto in 3D.

$\vec{r}(t)$ *raggio vettore* o ***vettore posizione***: ci dice come si muove il punto materiale nel tempo. È la posizione in ogni istante.

L'insieme dei punti P (posizione) nel tempo descrive la ***traiettoria*** nello spazio.



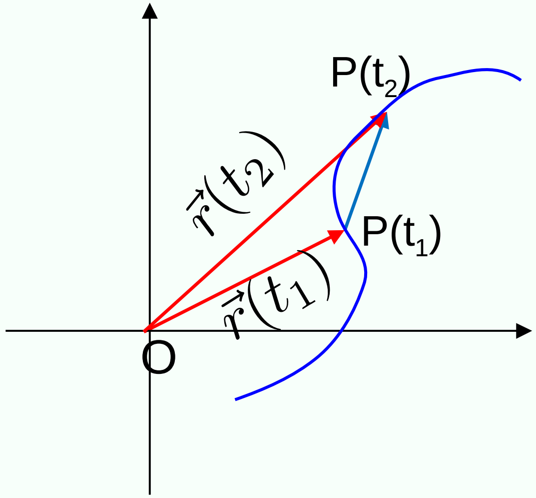
Se valutiamo la posizione in due istanti (t_1 e t_2) possiamo ottenere un nuovo vettore $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ detto anche vettore spostamento $\vec{s}(t)$, che consente di stimare in ogni istante l'evoluzione di $\vec{r}(t)$.

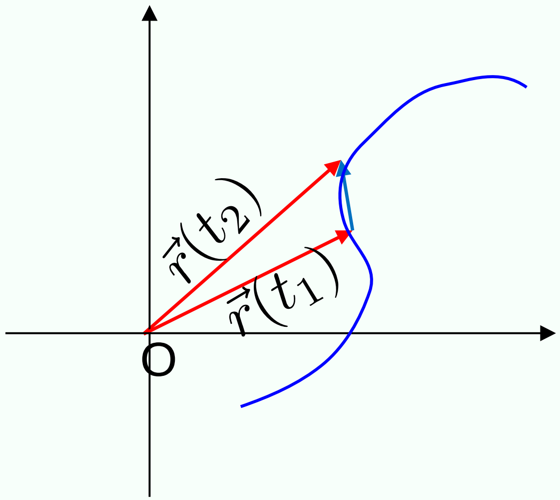


È una differenza fra vettori:

$$\vec{s}(t) \equiv \Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

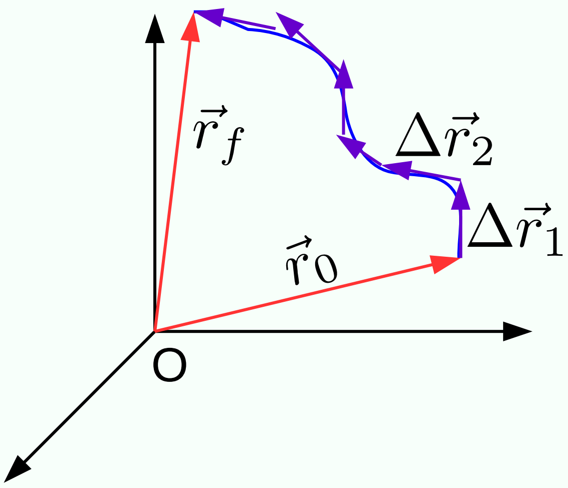
Via via che t_1 e t_2 sono più vicini, il vettore spostamento diventa parallelo alla tangente alla traiettoria.





Se consideriamo istanti successivi, con successivi spostamenti (supponendo di avere un campionamento sufficientemente accurato e Δt piccolo a sufficienza) descriviamo l'intera traiettoria al variare del tempo:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_0 + \sum_j \Delta\vec{r}_j$$



Cinematica del punto materiale (I)

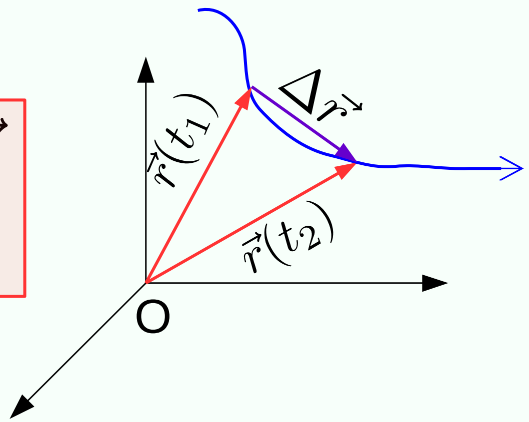
- *Vettore posizione e traiettoria del punto*
- ***Velocità** media e istantanea*
- ***Accelerazione** media e instantanea*
- *Legge oraria del moto*
- *Casi particolari in una dimensione*

Gettys

capitolo 3

Si definisce il vettore **velocità media** come il rapporto fra lo spostamento e l'intervallo di tempo:

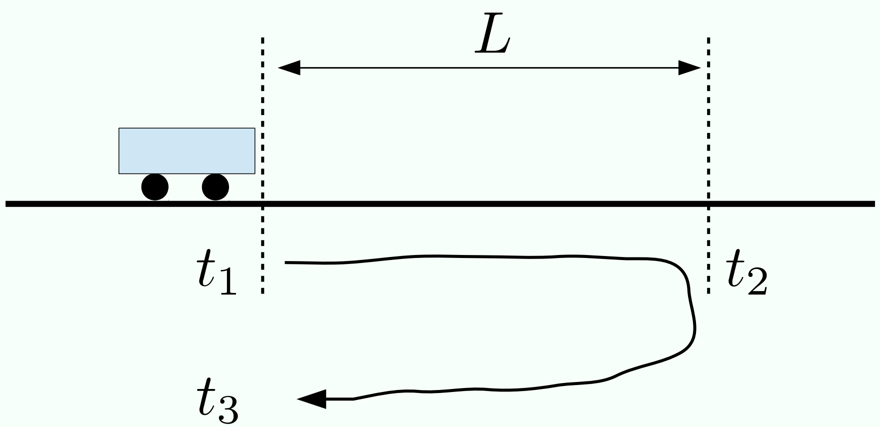
$$\boxed{\langle\vec{v}\rangle} = \vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \boxed{= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$



Dimensioni: $[v] = [L][T]^{-1}$

Unità di misura: metri al secondo – $m\ s^{-1}$

La **velocità media** dipende dall'intervallo di valutazione, non tiene conto delle posizioni e variazioni intermedie. Esempio:



$$\vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{L}{t_2 - t_1}\hat{i}$$

$$\vec{v}_m(t_1, t_3) = 0$$

Se invece fissiamo un tempo di riferimento $t = t_1$ e consideriamo un $t_2 = t + \Delta t$ con *Δt piccolissimo*, otteniamo la **velocità istantanea** in t, definita come *derivata dello spostamento rispetto al tempo*.

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \boxed{\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)}$$

Cinematica del punto materiale (I)

- *Vettore posizione e traiettoria del punto*
- ***Velocità** media e istantanea*
- ***Accelerazione** media e instantanea*
- *Legge oraria del moto*
- *Casi particolari in una dimensione*

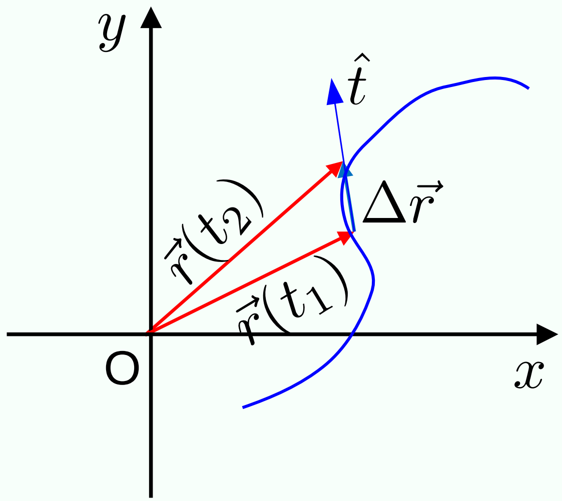
Gettys

capitolo 3

La **velocità istantanea** è un vettore *proporzionale allo spostamento infinitesimo*, quindi è ***tangente alla traiettoria***, in qualunque istante del moto.

$$\vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_m \parallel \Delta \vec{r}}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \parallel \hat{t}$$



Le componenti di $\vec{v}(t)$ sono le derivate delle componenti del vettore posizione.

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

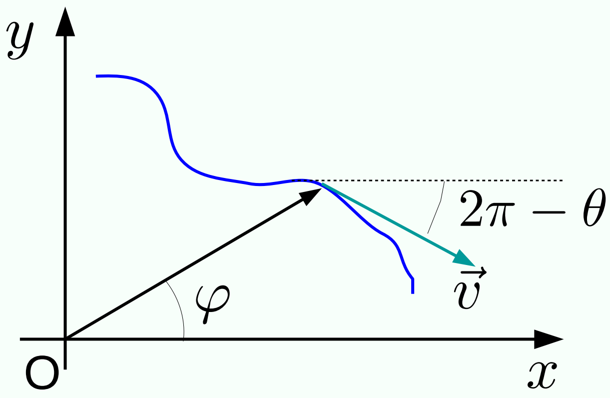
$$= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

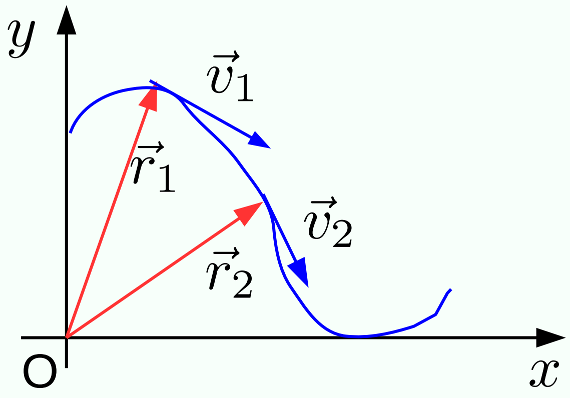
$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

In 2D, date le componenti, posso conoscere modulo e direzione (angolo)



$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\begin{aligned} v_x &= |\vec{v}| \cos\theta \\ v_y &= |\vec{v}| \sin\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]$$



La velocità $\vec{v}(t)$ può variare nel tempo, in direzione e modulo.

La traiettoria _non_ descrive da sola le variazioni di velocità.

Esempio: in auto posso percorrere la stessa strada ad andatura (modulo) costante o modulando l'andatura con freno e acceleratore.

Domanda: come si descrivono le variazioni di velocità?

Cinematica del punto materiale (I)

- *Vettore posizione e traiettoria del punto*
- ***Velocità** media e istantanea*
- ***Accelerazione** media e instantanea*
- *Legge oraria del moto*
- *Casi particolari in una dimensione*

Gettys

capitolo 3

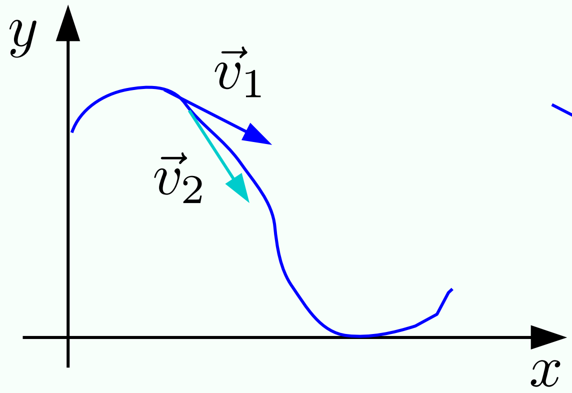
Stima con _rapporto incrementale_: ***accelerazione media***

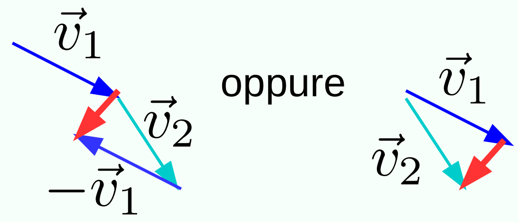
$$\langle \vec{a}(t) \rangle = \vec{a}_m(t) = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Variazione di velocità fra *t* e t + Δ*t*

Dimensioni: [L] $[T]^{-2}$

Unità di misura: m / s^2





La variazione istantanea nel tempo della velocità è descritta dall'**accelerazione** (istantanea):

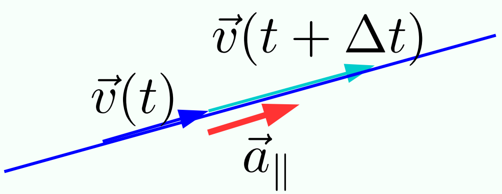
$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

L'accelerazione è _diversa da zero_ se:

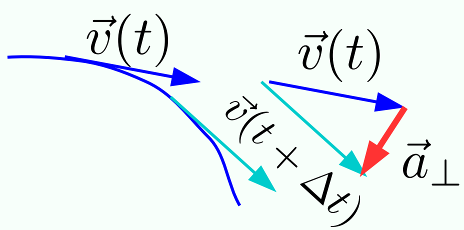
→ la velocità cambia ***modulo***

→ la velocità cambia ***direzione***

1) componente parallela alla traiettoria



2) componente perpendicolare alla traiettoria



Cinematica del punto materiale (I)

- *Vettore posizione e traiettoria del punto*
- ***Velocità** media e istantanea*
- ***Accelerazione** media e instantanea*
- *Legge oraria del moto*
- *Casi particolari in una dimensione*

Gettys

capitolo 3

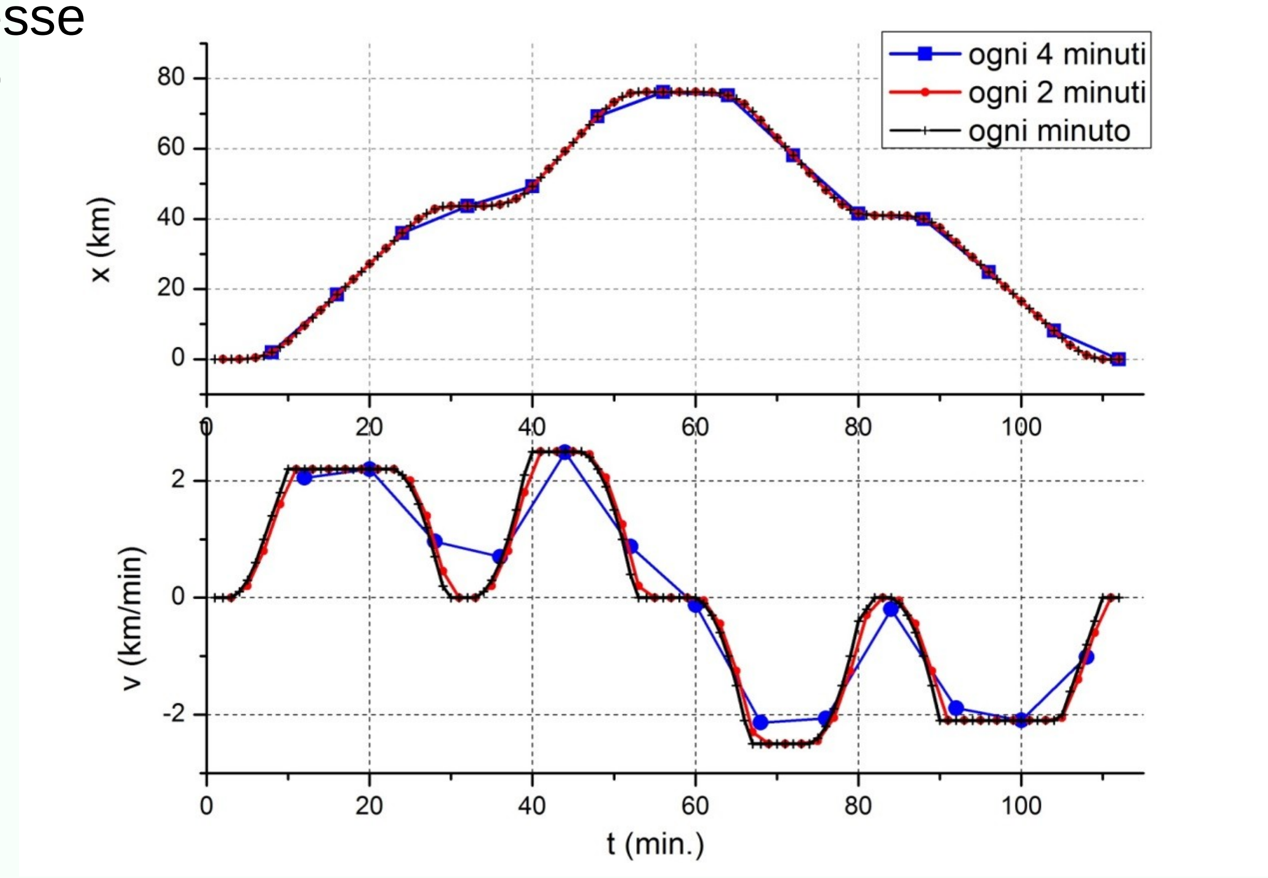
Nel caso semplice di **moto 1D**, sapendo la **legge oraria** di un corpo nel tempo, descritta dalla relazione *f(t)*, si trovano ***velocità*** e ***accelerazione***:

$$x = f(t)$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

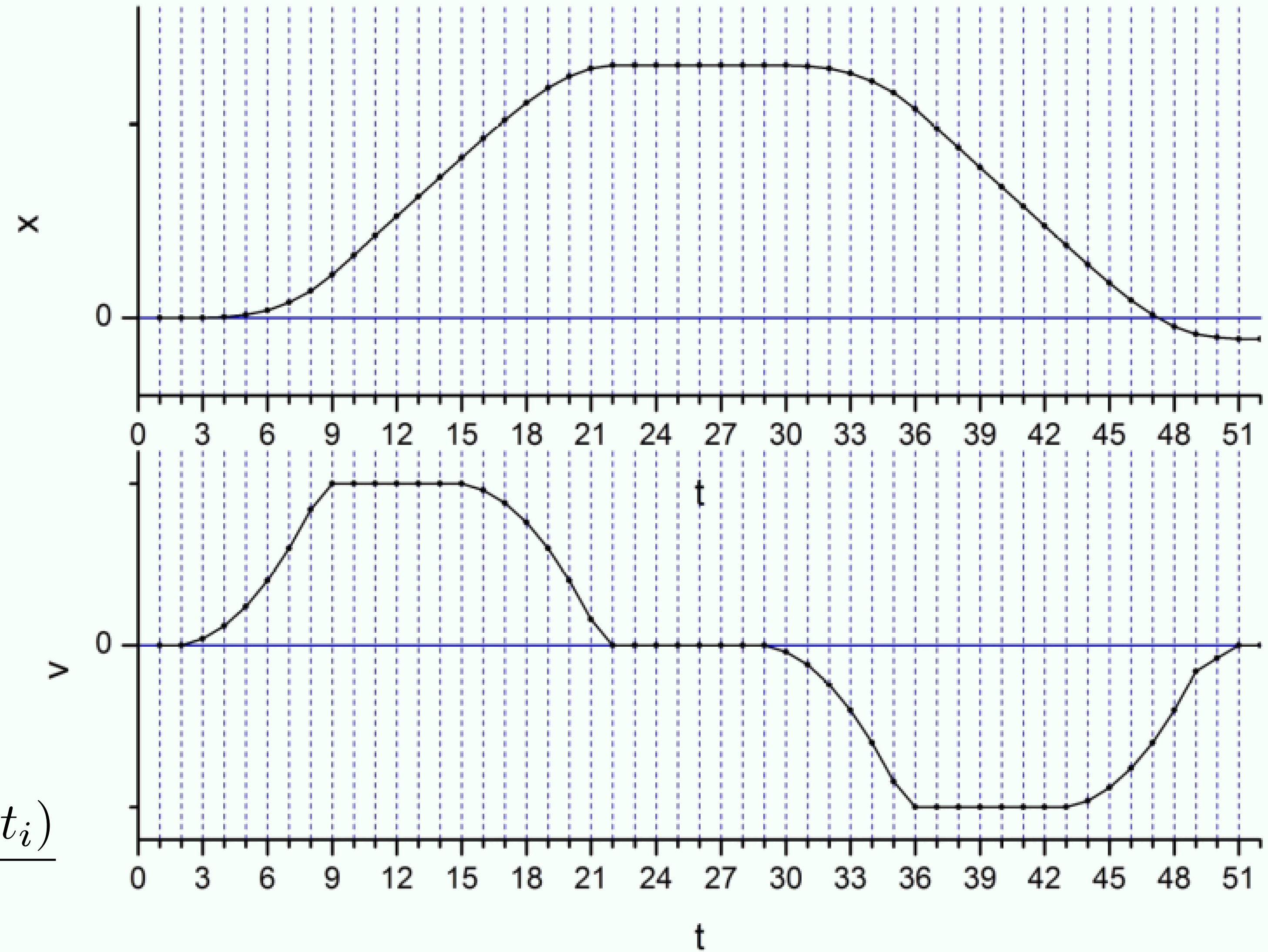
I dati $[x(t_i), x(t_{i+1})]$ sono *discreti*, le derivate si possono calcolare come rapporti incrementali; esse sono tanto più esatte, quanto più i dati sono acquisiti a intervalli piccoli $\Delta t = (t_{i+1} - t_i)$



$$\langle v \rangle_i = v_m(t_i) = \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t}$$

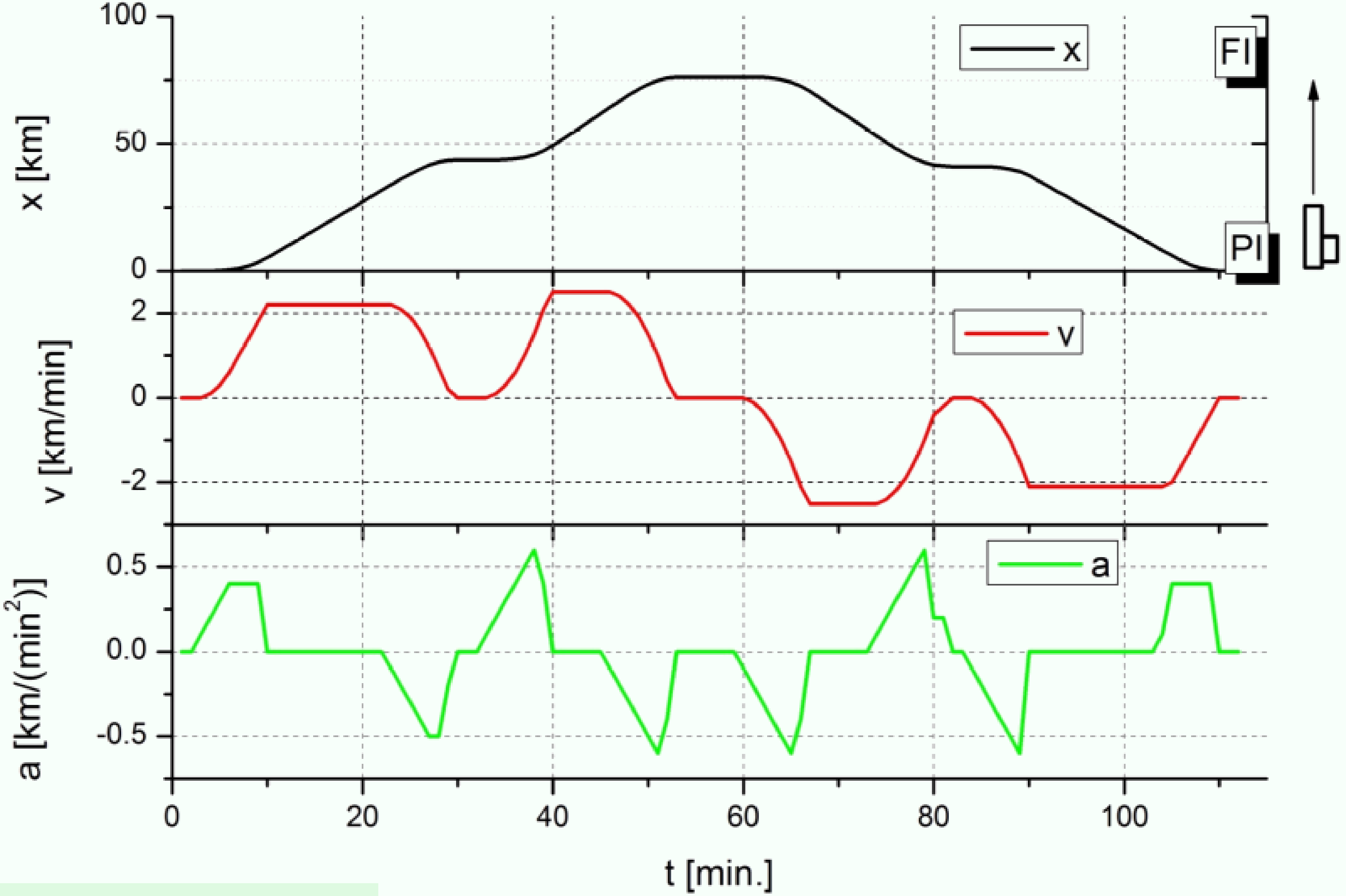
Un *buon campionamento* è quando Δt è così piccolo che v_m *sembra continua*

$$t_i = t_0 + \sum_{j=1}^{i} \Delta t_j = t_0 + i\Delta t$$



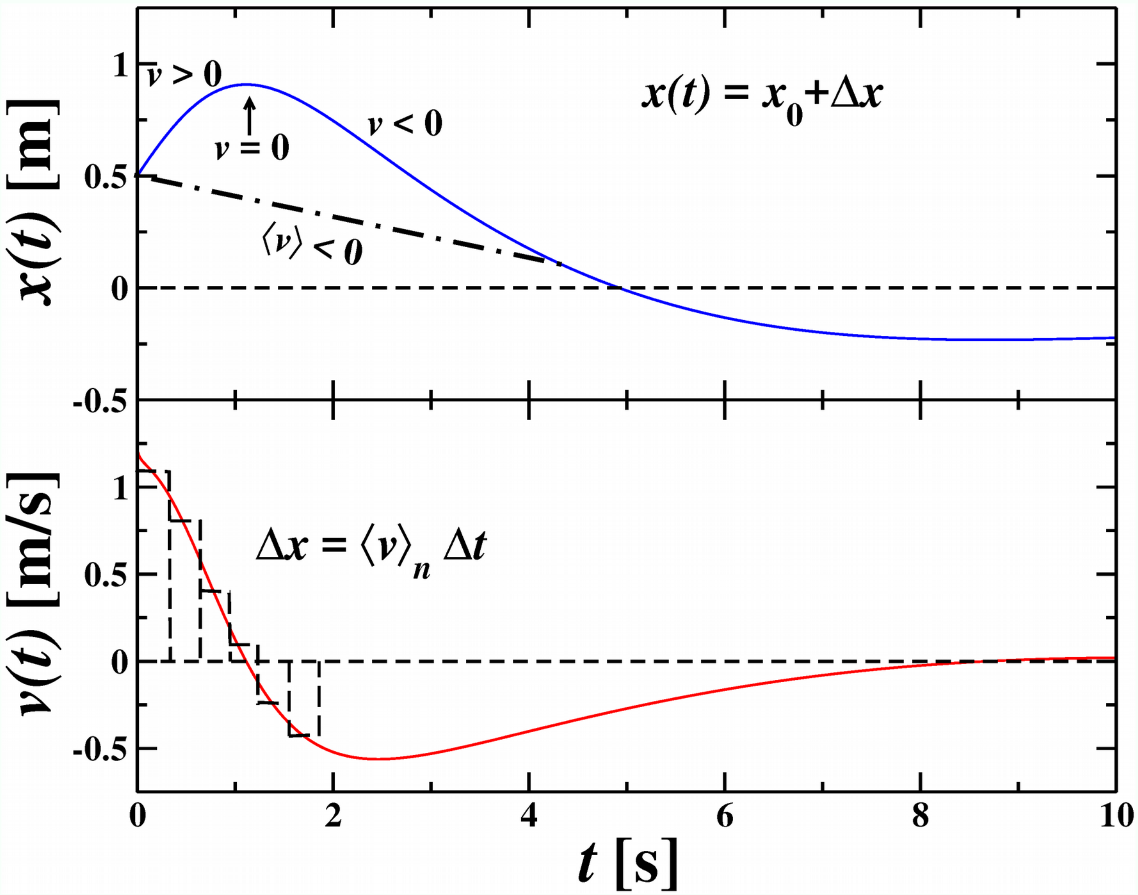
$$\langle v \rangle_i = v_m(t_i)$$
$$= \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$



$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Percorso inverso: da velocità a posizione, da accelerazione a velocità

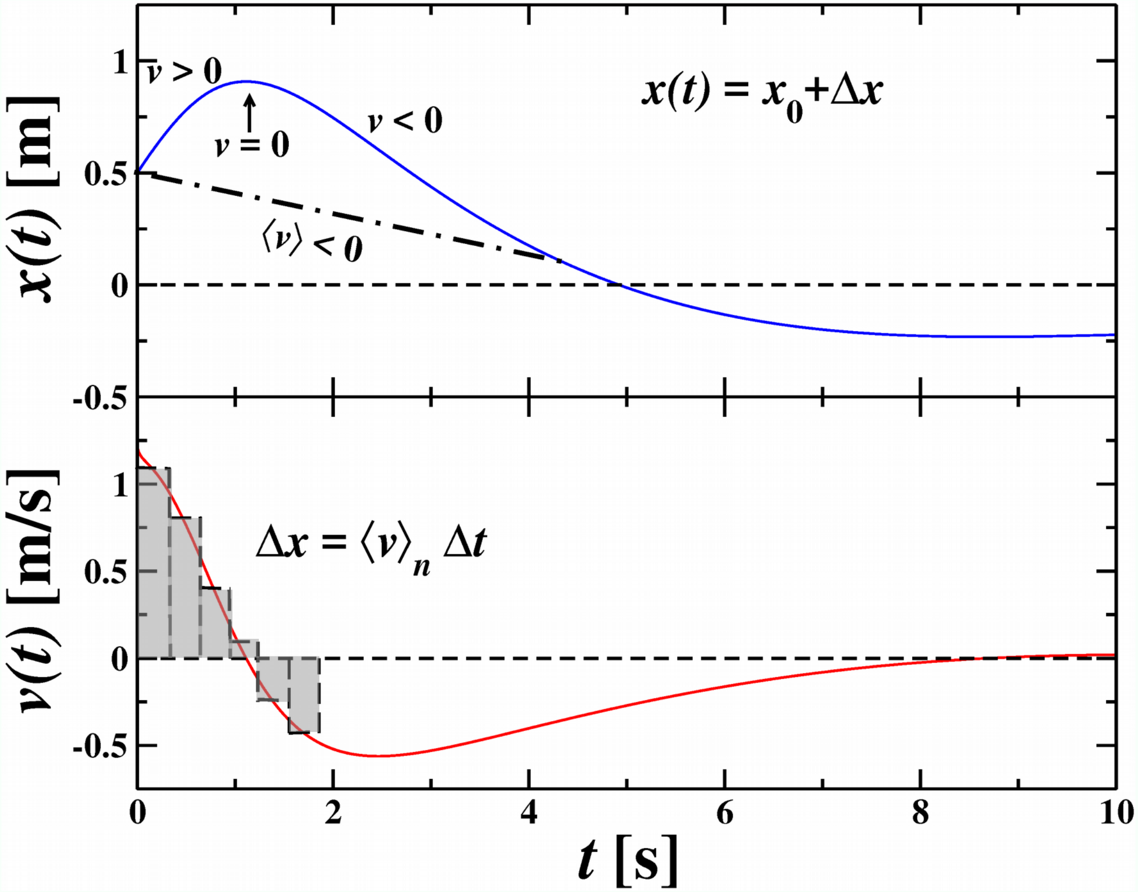


La velocità è la pendenza del tratto della retta che rappresenta x(t).

$$\langle v \rangle_n \, \Delta t = \Delta x_n$$

$$\Delta x = \sum_n \Delta x_n = \sum_n \langle v \rangle_n \, \Delta t$$

Percorso inverso: da velocità a posizione, da accelerazione a velocità



La velocità è la pendenza del tratto della retta che rappresenta x(t).

$$\langle v \rangle_n \, \Delta t = \Delta x_n$$

$$\Delta x = \sum_n \Delta x_n = \sum_n \langle v \rangle_n \, \Delta t$$

Per **Δt piccolo**, bisogna effettuare il passaggio all'integrale

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_n \Delta x_n = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_n \langle v \rangle_n \, \Delta t = \int v \, dt \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 + \int v \, dt$$

Lo spostamento è uguale all'*area sotto la curva* fra i punti iniziale e finale nel grafico velocità-tempo.

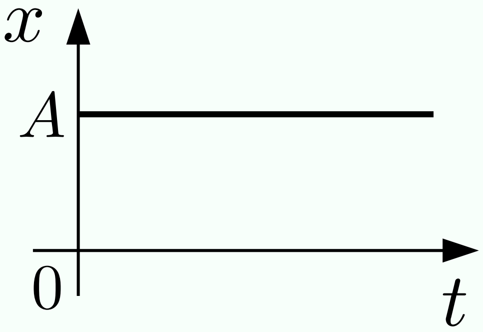
Cinematica del punto materiale (I)

- *Vettore posizione e traiettoria del punto*
- ***Velocità** media e istantanea*
- ***Accelerazione** media e instantanea*
- *Legge oraria del moto*
- *Casi particolari in una dimensione*
  - stato di quiete
  - moto a velocità costante
  - moto ad accelerazione costante

Gettys
capitolo 3

1) Stato di quiete

$$x(t) = A$$



$$v_m = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

Il punto rimane fermo in A.

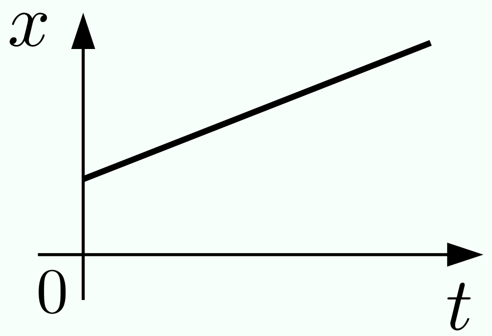
→ La velocità è zero.
→ L'accelerazione è zero.

2) Velocità costante

La pendenza è la stessa: $\langle v \rangle = v_m = \text{cost.}$

$$\boxed{x(t) = A + Bt}$$

Spostamenti uguali sono percorsi in tempi uguali



$$v_m = \frac{(A + Bt_2) - (A + Bt_1)}{t_2 - t_1} = B; \qquad \boxed{v = \frac{dx}{dt} = B}$$

$$a_m = \frac{B - B}{\Delta t} = 0 \qquad \boxed{a = 0}$$

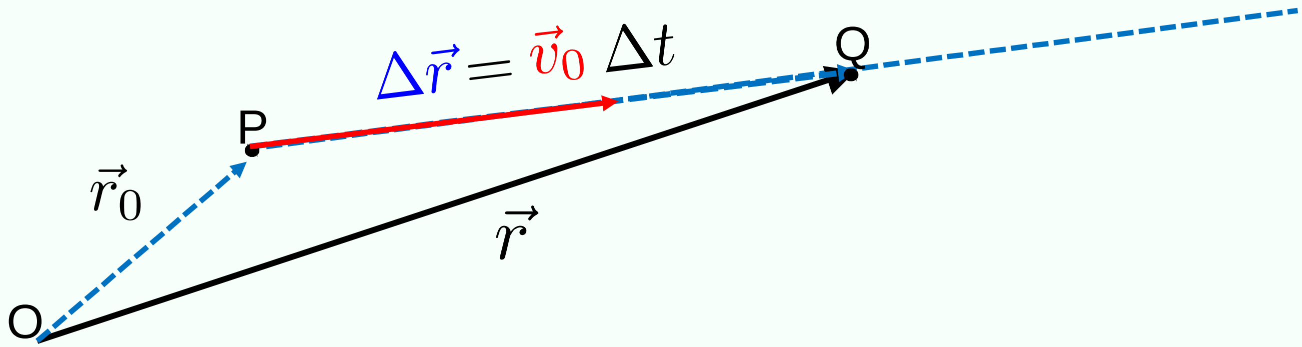
Moto uniforme
o a velocità costante $x(t) = x_0 + v_0 t$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{v = \frac{dx}{dt} = v_0,} \quad \boxed{a = \frac{dv}{dt} = 0}$$

2) Velocità costante:

Dato che la velocità vettoriale è costante, la velocità media è sempre uguale.

Lo spostamento avviene *lungo una retta*.
Moto rettilineo uniforme.

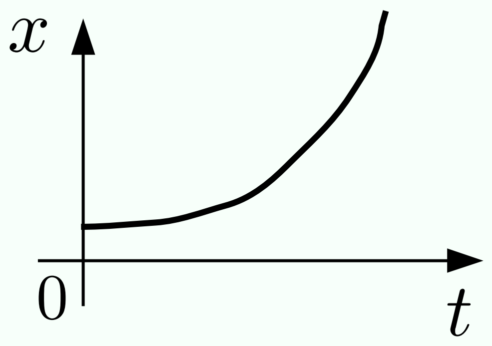


$$\vec{v}_0 = \langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad\Longrightarrow\quad \vec{r} - \vec{r}_0 = \Delta\vec{r} = \vec{v}_0\,\Delta t$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0)}$$

3) Accelerazione costante

$$x(t) = A + Bt + Ct^2$$



La velocità cambia *linearmente* nel tempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct$$

L'accelerazione è *costante*:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2C = \mathrm{cost.}$$

Moto uniformemente accelerato
o ad accelerazione costante

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$\Longrightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at, \quad a = \frac{dv}{dt}$$

3) Accelerazione costante

Moto uniformemente accelerato
o ad accelerazione costante

$$\underbrace{x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a\, t^2}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + a\, t$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{v - v_0}{a} & (1) \\ a = \dfrac{v - v_0}{t} & (2) \end{cases}$$

Sostituendo (1) nell'espressione per *x(t)* si ha: $x = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} \cancel{a} \frac{(v - v_0)^2}{a^{\cancel{2}}}$

da cui: $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$

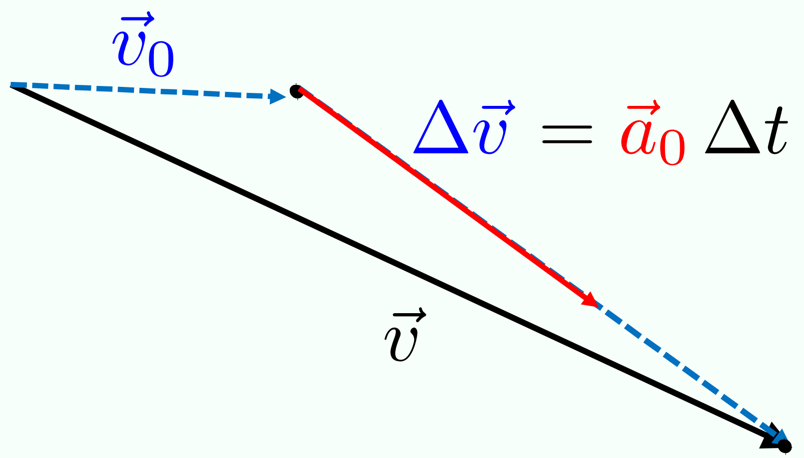
Sostituendo (2) nell'espressione per *x(t)* si ha: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{v - v_0}{\cancel{t}} t^{\cancel{2}}$

da cui: $\boxed{x = x_0 + \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t}$

3) Accelerazione costante:

Se l'accelerazione è costante, l'accelerazione media è sempre uguale e quindi la variazione della velocità avviene sempre lungo una *retta*.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 = \text{cost.}}$$



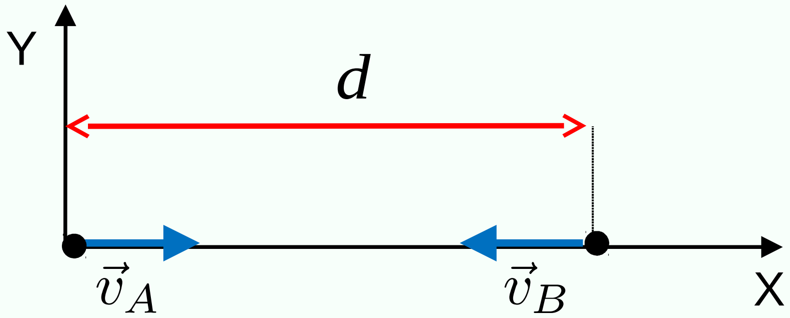
$$\vec{a}_0 = \langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad\Longrightarrow\quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-t_0}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\,(t-t_0)$$

Qualche esercizio…

Esercizio (1): composizione delle velocità.

Due corpi si muovono a velocità costante in direzione orizzontale uno verso l'altro. Quando e dove si incontrano?



$$d = 10\,m$$

$$\vec{v}_A = 2\frac{m}{s}\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_B = -3\frac{m}{s}\,\hat{i}$$

$$\begin{cases} x_A(t) = v_A\,t \\ x_B(t) = d + v_B\,t \end{cases}$$

Si incontrano all'istante *t**:

$$\boxed{x_A(t^*) = x_B(t^*)} \quad \Rightarrow \quad v_A t^* = d + v_B\,t^*$$

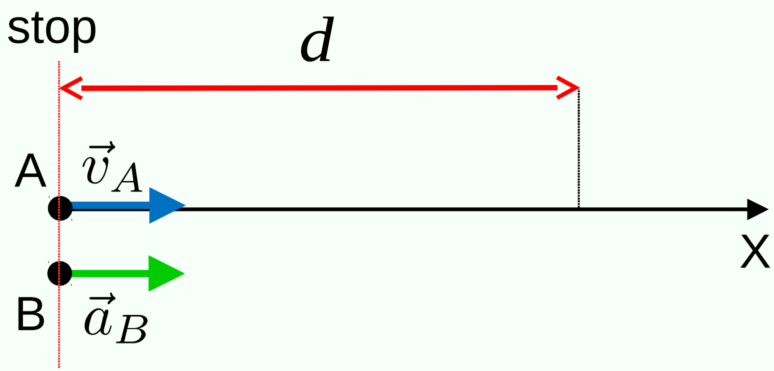
da cui

$$(v_A - v_B)t^* = d \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{d}{v_a - v_b} = \frac{10}{(2-(-3))}s = 2s$$

$$x_A(t^*) = v_a\,t^* = 4m$$

Esercizio (2): automobili che si rincorrono.

L'automobile A, viaggiando a velocità costante $\vec{v}_A$, supera l'automobile B che è ferma ad un segnale di stop. Quando A e B sono affiancate, B comincia a muoversi con accelerazione costante $\vec{a}_B$. Quando e dove si incontrano?
A che velocità va B quando sorpassa A?



$$\vec{v}_A = 18\frac{m}{s}\,\hat{i}; \quad \vec{a}_A = 0$$

$$\vec{a}_B = 4.6\frac{m}{s^2}\,\hat{i}; \quad \vec{v}_B^{\,0} = 0$$

$$\begin{cases} x_A(t) = \cancel{x_0} + v_A\,t \\ x_B(t) = \cancel{x_0} + \cancel{v_B^0}\,t + \frac{1}{2}a_B\,t^2 \end{cases}$$

Si incontrano quando

$$\boxed{x_A(t^*) = x_B(t^*) = d}$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}a_B\,t^* = v_A$$

Da cui: $t^* = \dfrac{2v_A}{a_B} = 7.8\,s; \quad x_A(t^*) \equiv d = v_A\,t^* = 140\,m$

Per trovare la velocità alla quale va B nel momento del sorpasso, si usa la formula del moto uniformemente accelerato: $v_B(t^*) = \cancel{v_B^0} + a_B\,t^* = 36\frac{m}{s}$

Esercizio (3): centometrista.

Un velocista percorre 100 metri in 10 secondi.
Nei primi 15 metri va ad accelerazione costante, poi nei restanti 85 metri va a velocità costante.

Calcolare:

– la velocità finale; [sol. 11.5 m/s]

– il tempo impiegato per percorrere i primi 15 metri [sol. 2.6 s]
e quelli impiegato per percorrere i successivi 85 metri; [sol. 7.4 s]

– il modulo dell’accelerazione per i primi 15 metri. [sol. 4.4 m/s^2]