Legge di Gauss

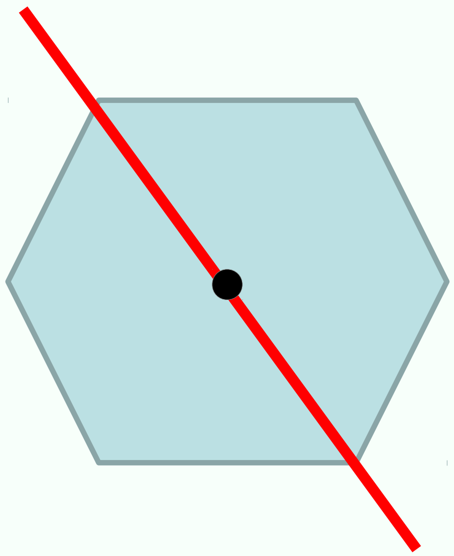
- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico (facoltativo)*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

Gettys II

Capitolo 2

Simmetria

Un'operazione di simmetria (in questo caso nel piano) porta il poligono regolare ***in se stesso***.

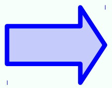


In questo caso operazioni di simmetria sono, ad esempio:

→ riflessione rispetto ad un piano che passa per due vertici opposti (individuato dalla retta rossa);

→ rotazione di 30° intorno all'asse perpendicolare al piano della lavagna, passante per il centro dell'esagono.

Se il poligono regolare è una distribuzione di carica, e l'operazione di simmetria porta il poligono in se stesso, allora il campo complessivo generato in tutto lo spazio deve rimanere invariato in seguito a queste operazioni di simmetria.



Concetti basati sulla simmetria e il teorema di Gauss permetteranno di trovare **facilmente** il campo generato da distribuzioni di carica con opportune simmetrie.

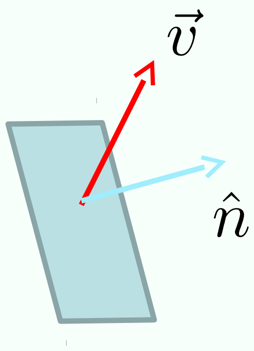
Legge di Gauss

- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico (facoltativo)*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

Gettys II
Capitolo 2

Flusso di un campo vettoriale

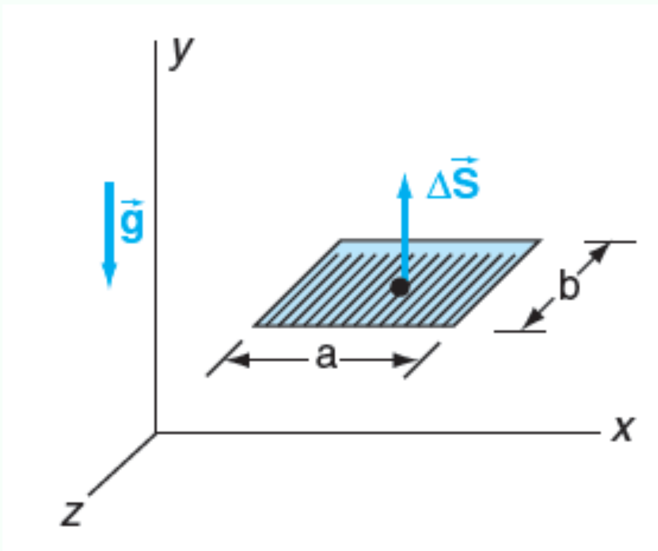
Definizione: $\boxed{\Phi_v = \vec{v} \cdot \Delta\vec{S} = \vec{v} \cdot \hat{n}\,\Delta S}$



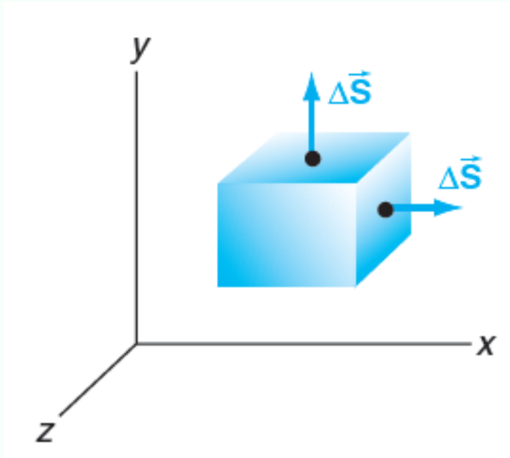
La _superficie orientata_ $\Delta\vec{S}$ è individuata da un versore perpendicolare.

$$\Delta\vec{S} = \Delta S\,\hat{n}$$

Il flusso è una grandezza ***scalare***, proporzionale al numero di linee di campo che attraversano una data unità di superficie.



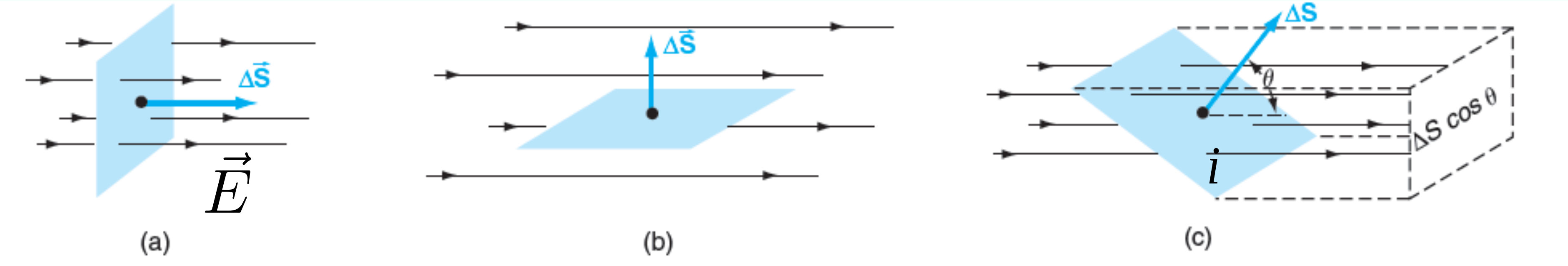
$$\Phi_g = \vec{g} \cdot \Delta\vec{S} = -g\,\Delta S = -gab$$



Quando una superficie è chiusa (racchiude una regione di spazio), $\Delta\vec{S} = \Delta S\,\hat{n}$ è diretta verso l'esterno del volume racchiuso.

Flusso del campo elettrico

Definizione: $\boxed{\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \vec{E} \cdot \hat{n}\, \Delta S}$ Unità di misura (SI): N m^2 / C



Il flusso è *massimo* se il campo elettrico è ***perpendicolare*** alla superficie, mentre è *nullo* se il campo elettrico è ***parallelo*** alla superficie.

$$\Delta\Phi_{Ei} = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = E_i\, \Delta S_i\, \cos\theta_i = E_{\perp i}\, \Delta S_i = E_i\, \Delta S_{\perp i}$$

Questa è la definizione generale per un campo vettoriale uniforme, attraverso una superficie piana qualunque contrassegnata con *i*.

→ Cosa succede se il campo non è uniforme, o la superficie non è piana?

Flusso del campo elettrico

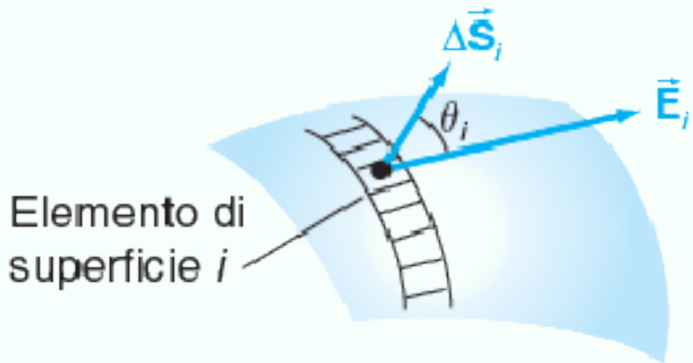
In generale, occorre seguire la seguente procedura:

1) dividere la superficie in *elementi infinitesimi* (così piccoli che il campo è costante, attraverso ognuno di essi);
2) calcolare il *flusso infinitesimo* *i*-esimo su ciascun elemento *i*;
3) *sommare* su tutti gli elementi infinitesimi.

Prendendo il limite $\Delta S_i \rightarrow 0$, si trova il seguente integrale:

$$\boxed{\Phi_E = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{S}_i} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

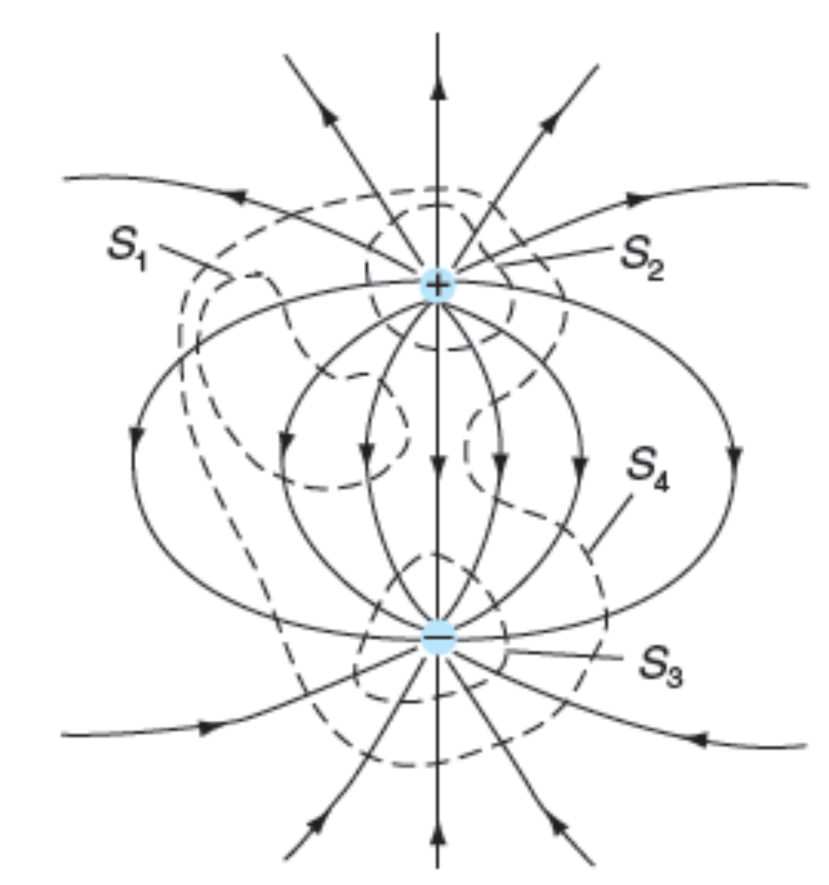
$$= \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_S E \cos\theta \, dS$$



Flusso e linee del campo elettrico

Si può guardare il flusso attraverso una superficie chiusa qualunque (il versore $\hat{n}$ è sempre diretto verso l'esterno).

Flusso totale = Numero linee uscenti – Numero linee entranti



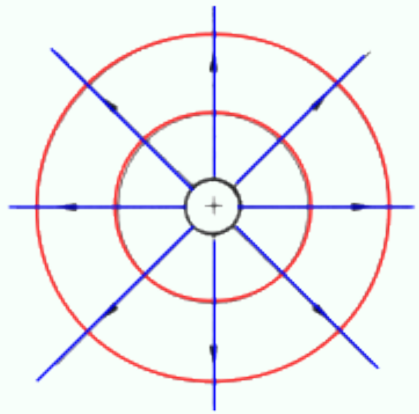
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E_n \, dS$$

Quattro superfici gaussiane nel campo di un dipolo. Le superfici sono rappresentate in sezione trasversale, e le linee tratteggiate corrispondono all'intersezione delle superfici stesse con il piano della figura. Osservando le linee di forza, si può verificare che $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 > 0$, $\Phi_3 < 0$, e $\Phi_4 = 0$.

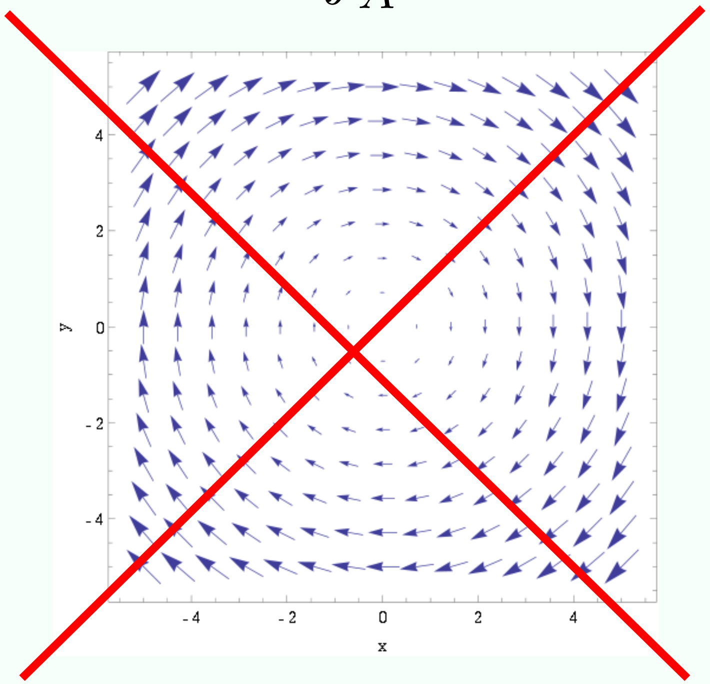
Linee del campo elettrico: proprietà

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

La circuitazione del campo elettrico è sempre nulla.
Le linee di forza non tornano mai su se stesse.



$$\Delta V_{AA} = -\int_A^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$



Le **superfici equipotenziali** sono quelle ***perpendicolari*** *alle linee di campo*.

Infatti lungo di esse la differenza di potenziale non cambia, perché l'integrale di linea è nullo.

Legge di Gauss

- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico (facoltativo)*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

Gettys II
Capitolo 2

Teorema di Gauss

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica contenuta all'interno della superficie per una costante universale.

$$\boxed{\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_e}$$

costante Coulomb

Teorema di Gauss: carica puntiforme

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E_n \, dS = E \, A = \frac{k_e q}{\cancel{r^2}} 4\pi \cancel{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

area della sfera

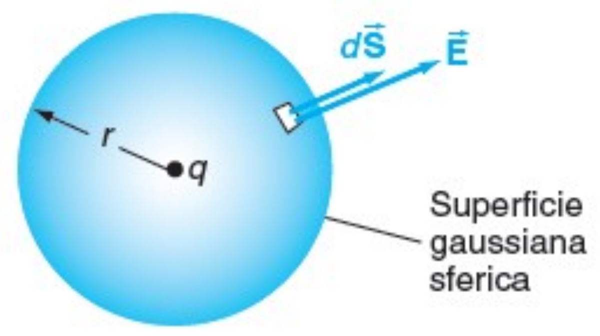


Figura 2.7
Calcolo del flusso dovuto al campo prodotto da una carica puntiforme posta nel centro di una superficie gaussiana sferica.

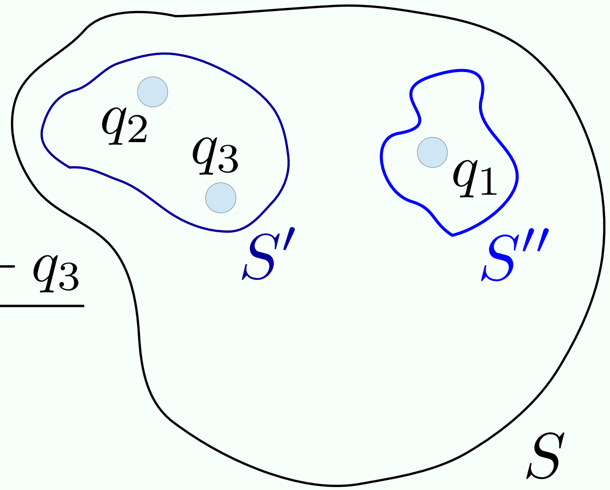
Si trova quindi, indipendentemente da *r,* che:

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Il flusso totale del campo elettrico attraverso una superficie sferica chiusa S è proporzionale alla carica *q* **all’interno della superficie**.

Teorema di Gauss: più cariche puntiformi

Se vi sono più cariche, vale il *principio di sovrapposizione*.

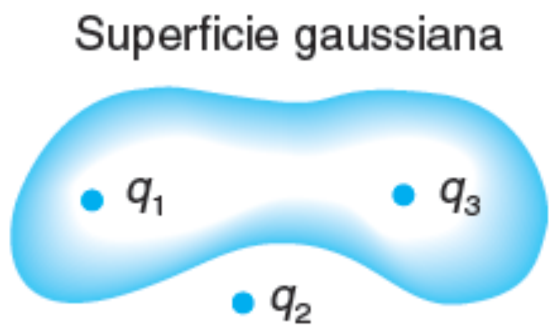


$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3\right) \cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_2 + q_3}{\varepsilon_0} \qquad \oint_{S''} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

Si definisce ***superficie gaussiana*** una superficie chiusa attraverso la quale si calcola il flusso del campo elettrico



Delle tre particelle cariche, la 1 e la 3 sono all'interno della superficie gaussiana, mentre la 2 è all'esterno. Servendosi del principio di sovrapposizione, $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \vec{\mathbf{E}}_3$, si trova che il flusso attraverso la superficie è $\Phi_E = (q_1 + q_3)/\varepsilon_0$. La particella 2 non contribuisce al flusso.

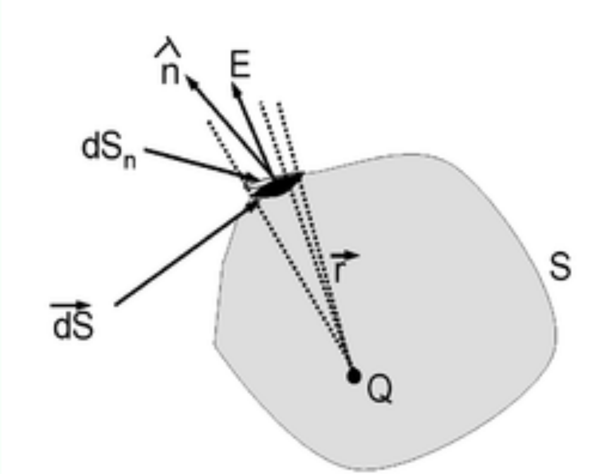
Teorema di Gauss: caso generale

- Il flusso totale è proporzionale a $N_{\text{linee campo}}$
- L'intensità del campo è pari a $N_{\text{linee campo}}$ / Area
- $N_{\text{linee campo}}$ è proporzionale alla carica all'interno
- Ogni linea uscente dalla carica deve passare dalla superficie

<u>Teorema di Gauss:</u> il flusso totale del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa che circonda la carica puntiforme *q* è dato da *q* / ε_0.

Definizione di angolo solido:
Superficie sottesa / distanza^2

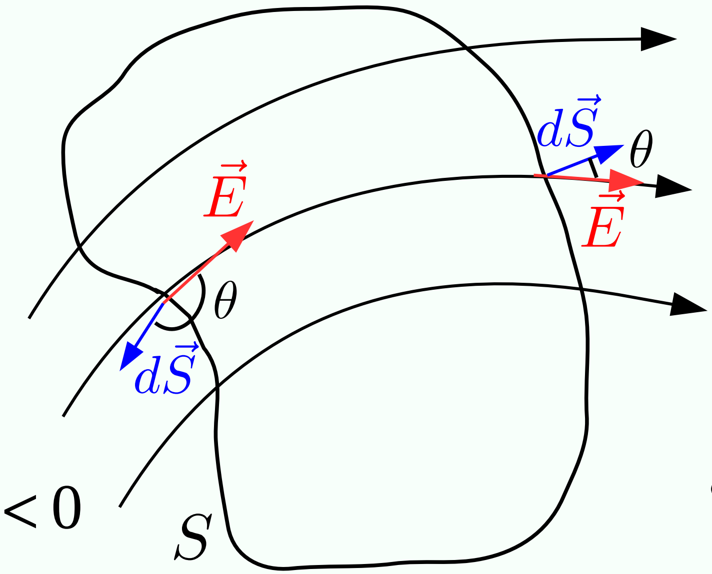
$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$



- Consideriamo una superficie sferica di raggio *r*
- L'area è proporzionale al quadrato del raggio
- L'angolo solido è definito come il rapporto tra area e raggio al quadrato
- L'angolo corrispondente a tutto lo spazio è $\Omega_{spazio} = \frac{A_{sfera}}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$

Teorema di Gauss

Se la carica interna è zero, il flusso è nullo: $\Phi_E = \int\int_S E\,\cos\theta\,dS = 0$



$\cos\theta > 0$

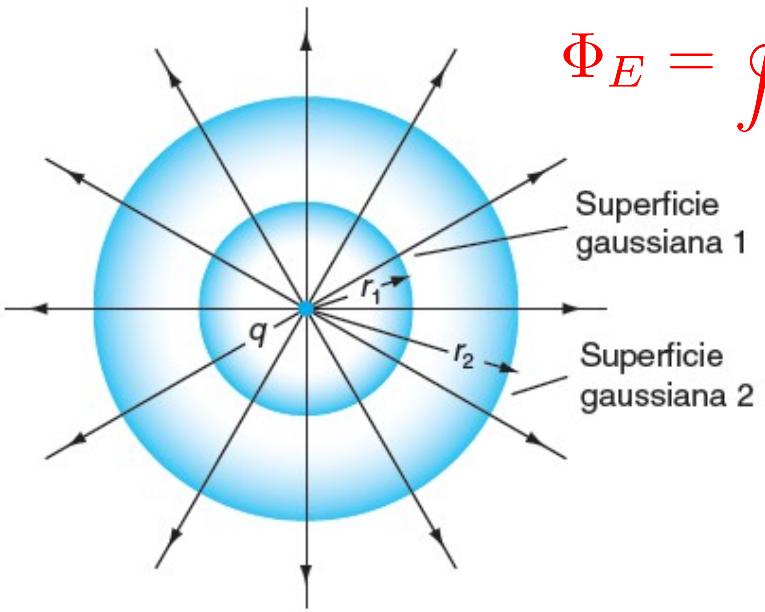
$\cos\theta < 0$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint E_n\,dS = 0$$

Si può guardare il flusso attraverso una superficie chiusa qualunque
(il versore *n* è sempre diretto verso l'esterno) come la differenza di linee di campo:

Flusso totale = *N* linee uscenti – *N* linee entranti = 0

Teorema di Gauss



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

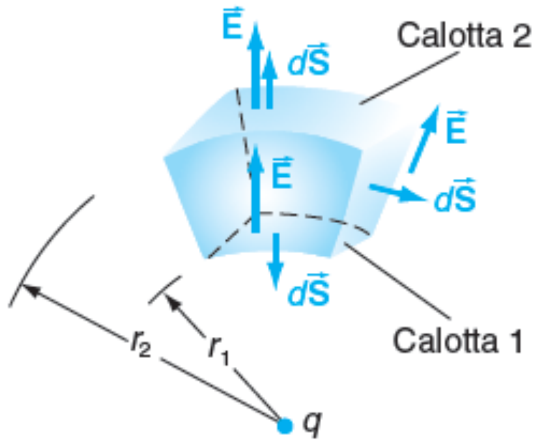
Due sfere gaussiane di raggi differenti hanno come centro comune una stessa particella carica. Le linee di forza sono continue e vanno dalle cariche positive a quelle negative, cosicché il numero delle linee che attraversano ciascuna delle superfici sferiche è lo stesso. Ma, per il teorema di Gauss, anche i flussi attraverso le due superfici sono uguali. Pertanto, per superfici di questo tipo, il flusso è proporzionale al numero delle linee che le attraversano.

Il flusso totale del campo elettrico attraverso una superficie sferica è proporzionale alla carica *q* all'interno della superficie.

1) il flusso totale è proporzionale alle linee di campo;
2) il numero *N* di linee è proporzionale alla carica all'interno;
3) ogni linea uscente dalla carica deve passare dalla superficie.

La differenza di flusso fra le due superfici 1 e 2 è zero.

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$
$$= \iint_{S_1} -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} dS$$
$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \Delta S_1$$



Flusso del campo generato da una particella carica attraverso una superficie a forma di blocco arrotondato. La superficie è formata da due calotte sferiche e da quattro facce piane. Il flusso attraverso ciascuna faccia piana è nullo, e i flussi attraverso le due calotte sferiche sono uguali e opposti, quindi il flusso relativo all'intera superficie è nullo.

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q\,\Delta S_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{q\Delta S_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = -\Phi_1$$

Stesso angolo solido

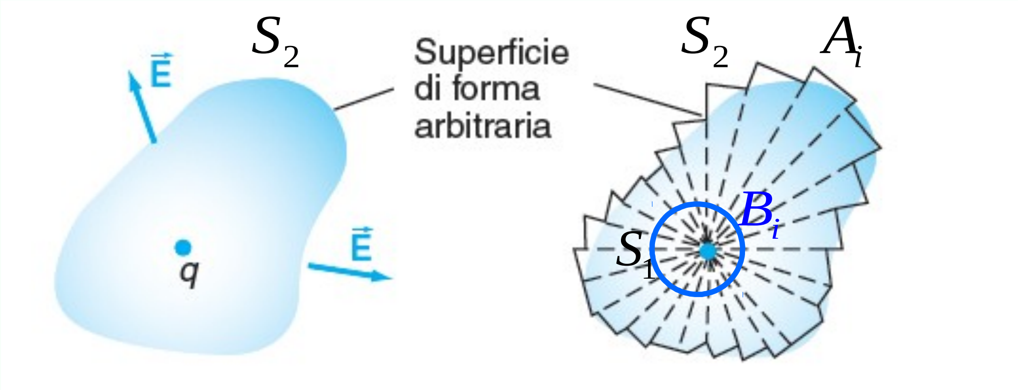
$$\Delta S_2 = \Delta S_1 (r_2/r_1)^2$$

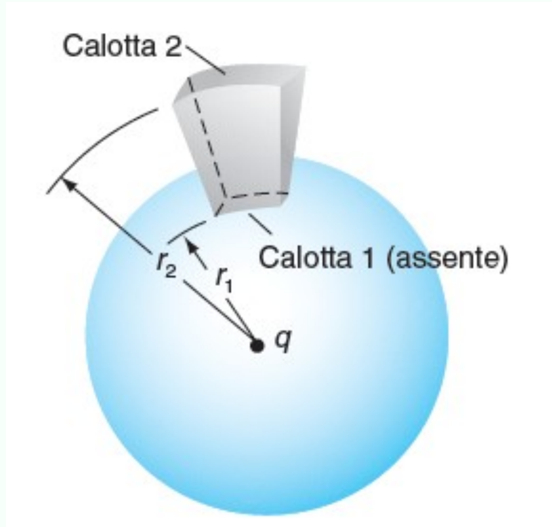
$$\boxed{\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 = 0}$$

Il flusso totale del campo elettrico attraverso una superficie arbitraria con carica puntiforme all'esterno è nullo.

[si scompone in calottte]

$$\Phi_{\text{calotta 2}} - \Phi_{\text{calotta 1}} = 0 = \Phi_{\text{sfera 2}} - \Phi_{\text{sfera 1}}$$





$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \iint_{A_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \iint_{B_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Il flusso attraverso superfici parallele alla direzione radiali è nullo, quello attraverso superficie trasversali A_i e B_i è lo stesso.

Perciò il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa di forma arbitraria che contiene una carica è ***uguale*** a quello attraverso una superficie sferica con al centro la carica.

Legge di Gauss

- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico (facoltativo)*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

Gettys II
Capitolo 2

Campi diversi da quello elettrico (facoltativo)

Campo gravitazionale
da massa m puntiforme:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GMm}{mr^2}\hat{r} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

$$\Phi_g = \oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint g_n \, dS$$

Teorema di Gauss: il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è uguale alla massa contenuta all'interno della superficie per una costante universale.

$$\boxed{\Phi_g} = \oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -\frac{GM}{r^2} 4\pi r^2 \boxed{= -4\pi GM}$$

Il flusso totale del campo gravitazionale attraverso una superficie sferica chiusa è proporzionale alla massa M ***all'interno*** della superficie.

→ è un risultato della ***dipendenza del campo da 1/r²*** : $\boxed{\vec{g} \propto \frac{\hat{r}}{r^2}}$

Campi diversi da quello elettrico (facoltativo)

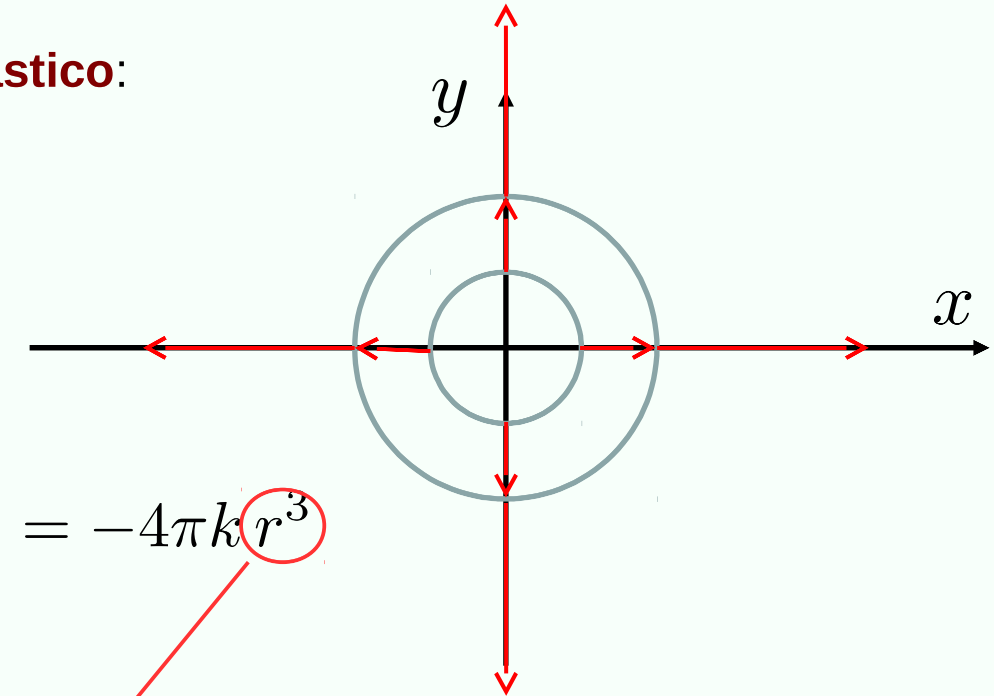
Se la forza non dipende da $1/r^2$, il flusso in generale dipende dal raggio!

Supponiamo che esista un **campo elastico**:

$$\vec{K} = -k\vec{r}$$

⇩

$$\Phi_K = \oint \vec{K} \cdot d\vec{S} = -kr(4\pi r^2) = -4\pi k r^3$$



Il flusso in questo caso ***dipende*** dal raggio della superficie sferica

→ **Il teorema di Gauss vale solo per campi con dipendenza $1/r^2$**

Legge di Gauss

- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

Gettys II
Capitolo 2

Legge di Gauss

- *Premessa: simmetrie*
- *Flusso del campo elettrico*
- *Teorema di Gauss*
- *Applicazioni a campi diversi da quello elettrico*
- *Esempi:*
  - → *sfera carica cava*
  - → *sfera carica piena*
  - → *cilindro o filo carico*
  - → *piano infinito carico*
  - → *condensatore*

Gettys II

Capitolo 2

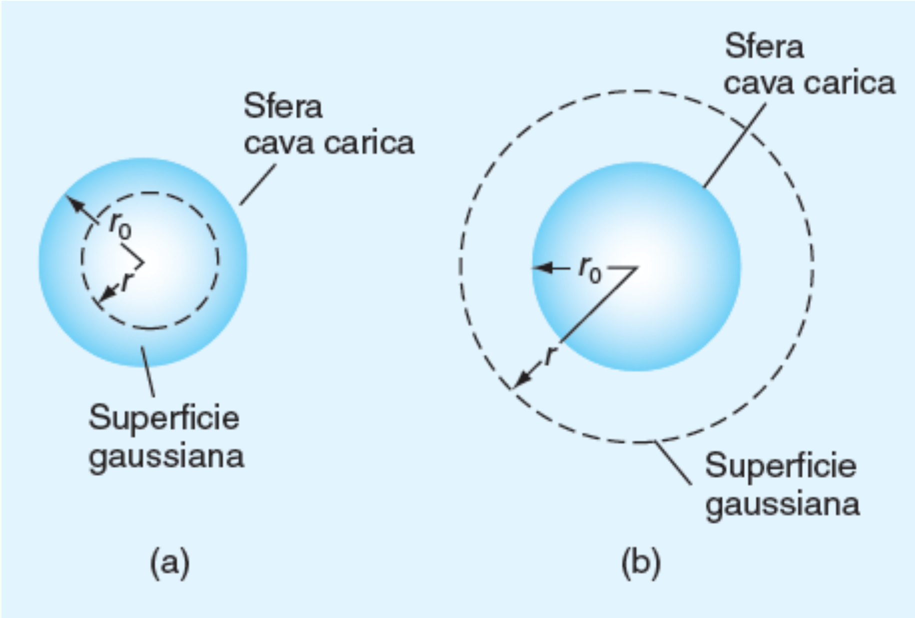
Sfera carica cava

Sia data una superficie sferica carica isolante (guscio sferico di raggio r_0).
La carica Q è distribuita uniformemente in superficie.

Densità superficiale di carica: $\sigma = Q/A = Q/(4\pi r_0^2)$

Consideriamo una superficie gaussiana sferica concentrica con il guscio sferico.

Il campo elettrico è ***radiale***, per ragioni di **simmetria sferica** (se ci fosse una componente non radiale, un'operazione di simmetria muterebbe l'orientazione di tale componente).



Il campo è radiale e uguale in modulo per tutti i punti equidistanti dal centro.

Il flusso allora è di facile calcolo:

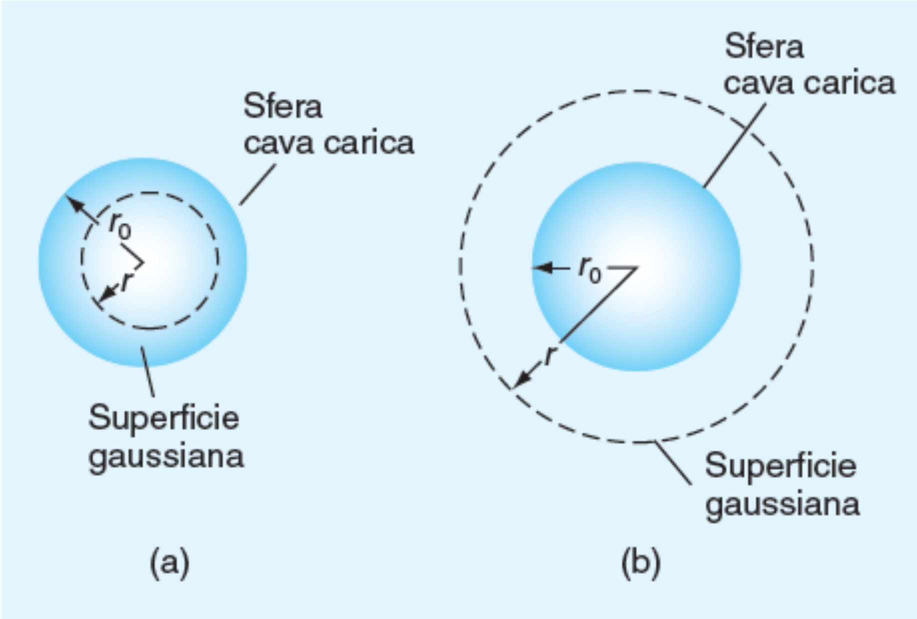
$$\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \oint \hat{r} \cdot d\vec{S} = E_r \oint_S dS = E_r\, 4\pi r^2$$

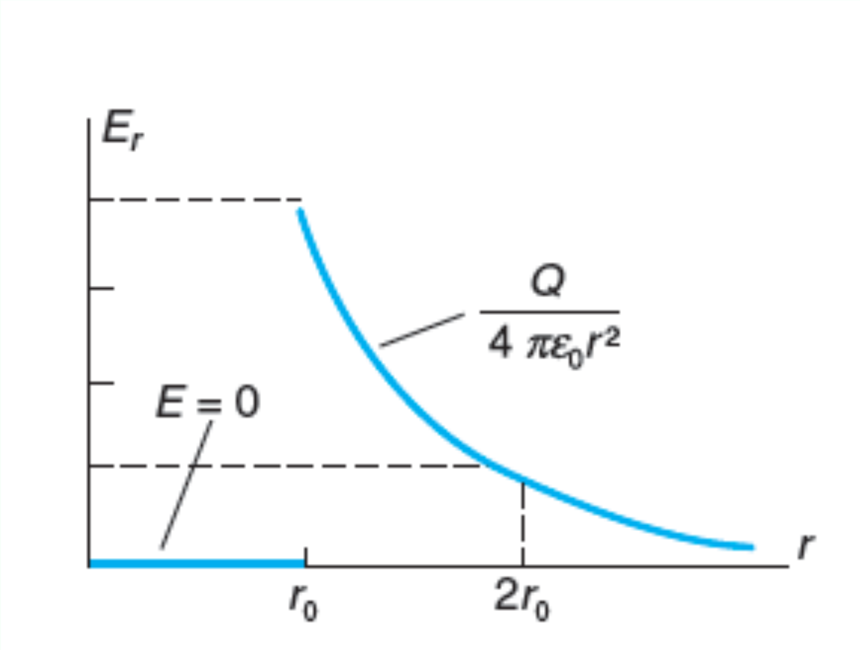
Sfera carica cava

Sia data una superficie sferica carica isolante (guscio sferico di raggio r_0).
La carica Q è distribuita uniformemente in superficie.

Si hanno ***due casi***: fuori dal guscio la carica è quella totale; dentro il guscio la carica è zero. Il campo segue di conseguenza.

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \Phi_E = E_r\, 4\pi r^2$$

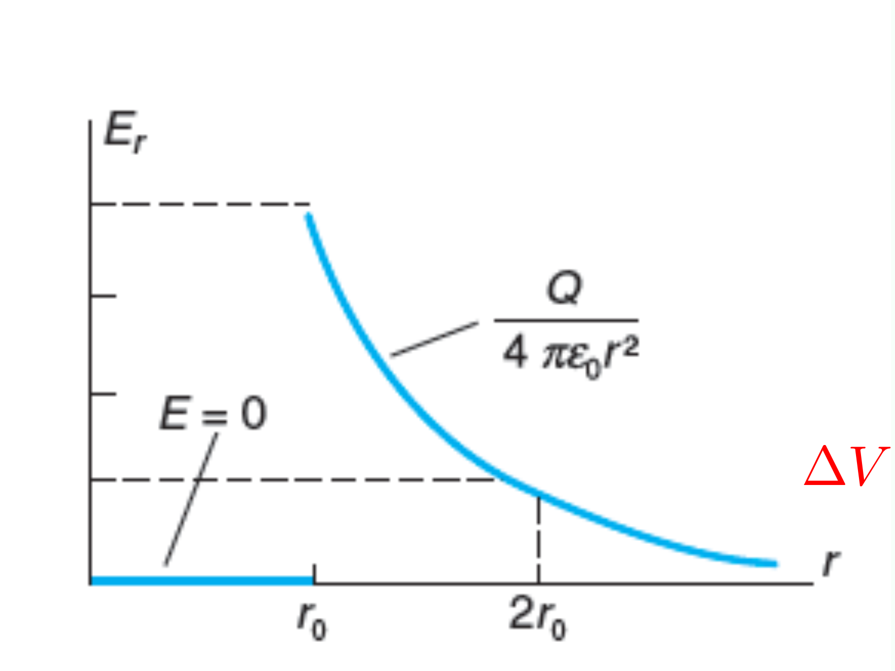




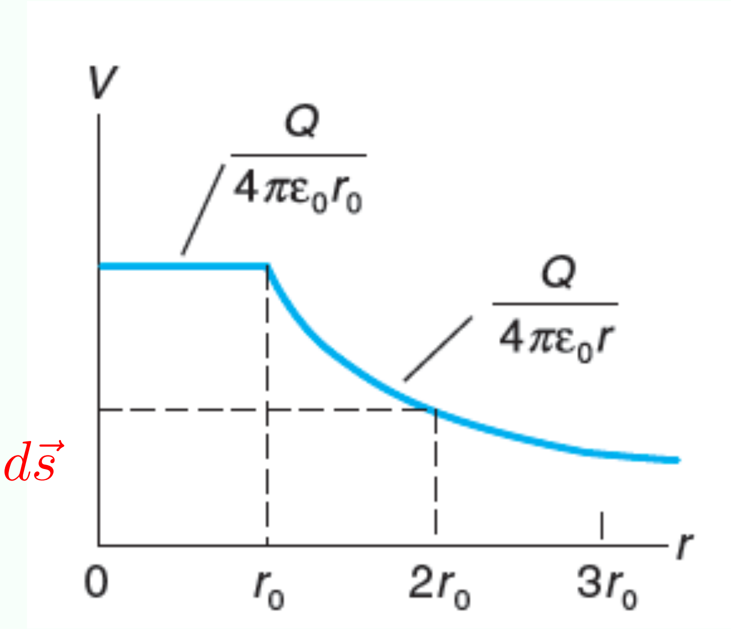
$$\begin{cases} r \geq r_0 \;\Rightarrow\; E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} = \dfrac{k_e Q}{r^2} \\ r < r_0 \;\Rightarrow\; E = 0 \end{cases}$$

Sfera carica cava: potenziale elettrico

Sia data una superficie sferica carica isolante (guscio sferico di raggio r_0).
La carica Q è distribuita uniformemente in superficie.



$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



$$\begin{cases} r \geq r_0 \;\Rightarrow\; E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} \\ r < r_0 \;\Rightarrow\; E = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} r \geq r_0 \;\Rightarrow\; V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r} \\ r < r_0 \;\Rightarrow\; V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r_0} \end{cases}}$$