I principi della dinamica

- *Definizione di massa e di forza*
- *Scomposizione della forza in componenti*
- *Leggi di Newton*
  - prima legge di Newton (1º principio della dinamica)
  - seconda legge di Newton (2º principio della dinamica)
  - terza legge di Newton (3º principio della dinamica)

Gettys
capitolo 5

Cinematica: descrive il moto di un punto materiale.

In 1D abbiamo: $x = f(t);\; v = \frac{dx}{dt};\; a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

In 3D, occorrono tre coordinate per descrivere il moto.

Domanda: quali sono le cause delle variazioni del moto?

Dinamica: ***descrive le cause delle variazioni del moto.***
Per adesso rappresentiamo i corpi come puntiformi.

Dinamica del punto materiale: il moto del corpo e le forze che agiscono si intendono *riferiti a un punto nello spazio*, descritto dalle coordinate (*x*,*y*,*z*).

Se vi fossero più dettagli o gradi di libertà $\Rightarrow$ dinamica dei sistemi.

I principi della dinamica

- *Definizione di massa e di forza*
- *Scomposizione della forza in componenti*
- *Leggi di Newton*
  - prima legge di Newton (1º principio della dinamica)
  - seconda legge di Newton (2º principio della dinamica)
  - terza legge di Newton (3º principio della dinamica)

Gettys
capitolo 5

Prima di cominciare, è utile introdurre due grandezze: **massa e forza**.

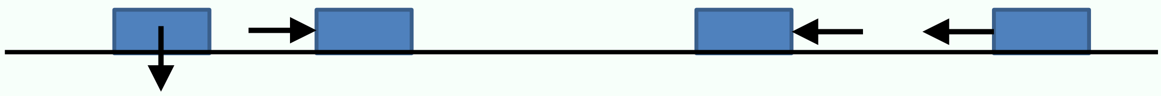
1) La **massa** di un corpo è la *resistenza alle variazioni di velocità* che la materia oppone all'azione di una forza (*massa inerziale*).
Essa costituisce una proprietà intrinseca del corpo.

– Si tratta di una grandezza *scalare* e *additiva*.
(se si uniscono due oggetti di massa m_1 e m_2, la massa totale è $m_{12} = m_1+m_2$)

– Unità misura MKS nel Sistema Internazionale: *kg* (chilogrammo)

2) La **forza** è una quantità **vettoriale** che descrive le interazioni fra corpi.
Importante *intensità* ma anche *direzione* e *verso*.

Esempio: quali fra queste forze $\vec{F}$ sono uguali ?



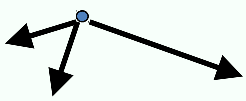
N.B.: le forze sono *vettori applicati* (è importante *dove* vengono applicati) che perturbano lo stato di «quiete relativa» dei corpi, in virtù della loro intensità, direzione, tempo di applicazione, punto di applicazione e massa del corpo su cui la forza è applicata.

Le forze ***non*** causano il movimento, ma le ***variazioni*** di movimento.

Una forza è il risultato dell'interazione del corpo con altri corpi (ambiente)

spesso varie forze

$$\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ldots,\ \vec{F}_n$$



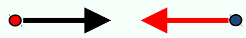
risultante delle forze

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

Forze:

Caratteristiche:

1) sono grandezze **vettoriali**;



2) si presentano a coppie: se ho due corpi A e B $\Rightarrow \vec{F}_{A,B},\ \vec{F}_{B,A}$
3) $\vec{F}$ è proporzionale all'accelerazione (variazione di velocità);
4) $\vec{F}$ può deformare un oggetto;
5) principio di sovrapposizione delle forze: le forze si sommano come vettori.

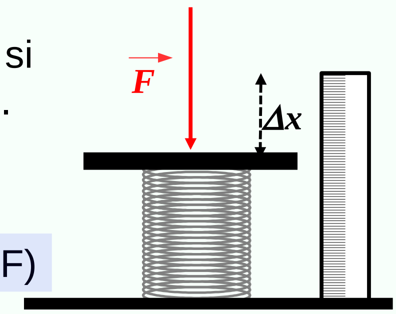
$[F] = [M]\,[L]\,[T]^{-2}$

Unità misura MKS: **Newton.** $1\ N = 1\ kg\ m\ s^{-2}$

Definizione operativa: 1 N è la forza applicata ad un corpo di massa 1 kg che produce un'accelerazione di 1 m/s^2

Da un punto di vista pratico, per misurare una forza si sfrutta la proprietà che essa ha di deformare oggetti. Solitamente vi sono dinamometri (bilance a molla) tarati sulla forza peso.

L'allungamento Δx è proporzionale alla forza ($\Delta x \propto F$)



Forze:

Le forze che agiscono su corpi macroscopici possono essere **attive**

1) **a distanza** (forze lungo raggio);

2) **a contatto** (forze a corto raggio)

Le forze che agiscono **a distanza** non richiedono che i corpi su cui agiscono siano a contatto. Esempi: le 4 interazioni fondamentali.

- Interazione gravitazionale; determina il moto del Sole, dei pianeti ma anche la caduta dei gravi (mediata da “gravitone”?)
- Interazioni elettromagnetiche, esercitate su e da corpi carichi elettricamente (mediata dai fotoni)
- Interazione nucleare debole (mediata dai bosoni W e Z)
- Interazione nucleare forte (mediata dai gluoni)
  (le ultime due intervengono a livello nucleare e subnucleare)

Le forze che agiscono **a contatto** fra corpi macroscopici di solito derivano da interazioni elettromagnetiche fra atomi e molecole costituenti la materia. Esempi:

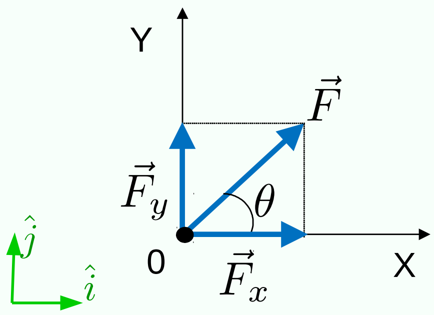
- Forze esplicate dai vincoli (tensione di funi, fili, corde; forza normale associata a una superficie che si oppone alla sua deformazione)
- Forze di attrito
- Forze elastiche (interazioni elettromagnetiche che si oppongono alle deformazioni dei corpi)

I principi della dinamica

- *Definizione di massa e di forza*
- *Scomposizione della forza in componenti*
- *Leggi di Newton*
  - prima legge di Newton (1º principio della dinamica)
  - seconda legge di Newton (2º principio della dinamica)
  - terza legge di Newton (3º principio della dinamica)

Gettys
capitolo 5

Essendo una grandezza vettoriale, una forza può essere scomposta in componenti.

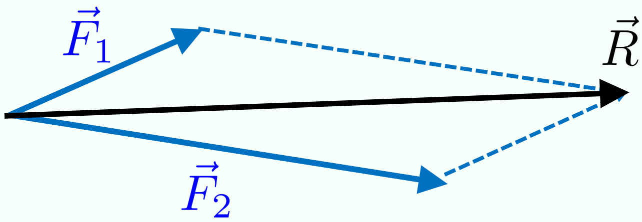


$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$$

$$\vec{F} \cdot \hat{i} = F_x = F\cos\theta$$
$$\vec{F} \cdot \hat{j} = F_y = F\sin\theta$$

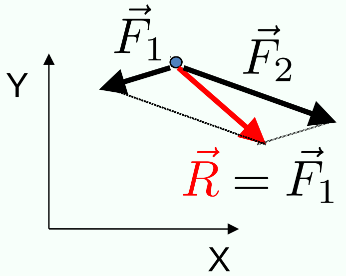
Per trovare la componente di una forza lungo una direzione, si può fare il prodotto scalare per il versore che ha la direzione voluta.

Le forze si compongono: ***somma di vettori***



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Somma anche in componenti:



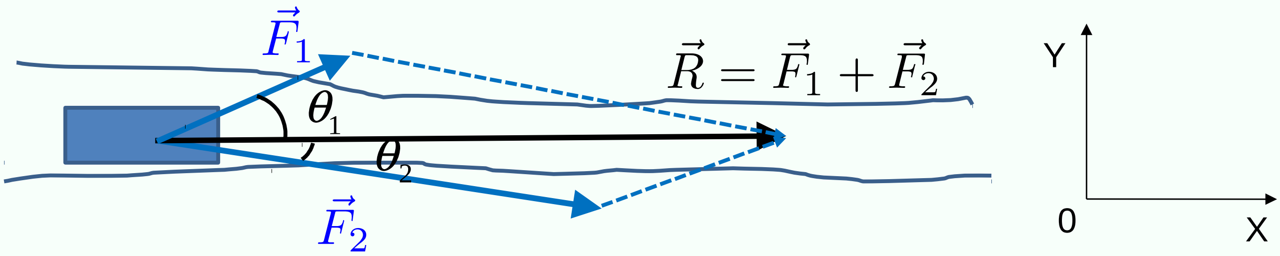
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$$

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} \end{cases}$$

Esercizio: barca trainata da due cavalli.



Somma in componenti: $\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \sin\theta_1 - F_2 \sin\theta_2 \end{cases}$

Se si vuole che la barca vada dritta, deve esserci solo la componente lungo x:

$$\underline{R_y = F_1 \sin\theta_1 - F_2 \sin\theta_2 = 0} \quad \Longrightarrow \quad F_1 \sin\theta_1 = F_2 \sin\theta_2$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

I principi della dinamica

- *Definizione di massa e di forza*
- *Scomposizione della forza in componenti*
- *Leggi di Newton*
  - prima legge di Newton (1º principio della dinamica)
  - seconda legge di Newton (2º principio della dinamica)
  - terza legge di Newton (3º principio della dinamica)

Gettys
capitolo 5

I tre principi della dinamica (o di Newton)

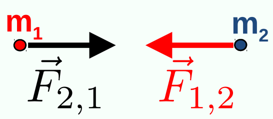
1) Se la risultante delle forze che agiscono su un corpo è **nulla** il corpo permane nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = 0, \;\; \vec{v} = \text{cost.}$$

2) Se la risultante è **diversa da zero**, si produce una accelerazione (variazione del moto) proporzionale alla risultante delle forze che agiscono sul corpo. La costante di proporzionalità è la massa (inerziale).

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

3) **Azione e reazione**: se vi sono due corpi interagenti 1 e 2, ognuno di essi esercita sull'altro una forza: queste forze hanno la stessa intensità, stessa direzione ma verso opposto.



$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$

I principi della dinamica

- *Definizione di massa e di forza*
- *Scomposizione della forza in componenti*
- *Leggi di Newton*
  - prima legge di Newton (1º principio della dinamica)
  - seconda legge di Newton (2º principio della dinamica)
  - terza legge di Newton (3º principio della dinamica)

Gettys
capitolo 5

Prima legge di Newton

Se su un corpo **non agiscono forze** (o la loro risultante è nulla), il corpo permane nel suo **stato di quiete** o **moto rettilineo uniforme**.

Si parla anche di **principio di inerzia**: se il corpo è fermo, esso rimane fermo. Se il corpo si muove di moto rettilineo uniforme, esso preserva il suo stato di moto a velocità costante.

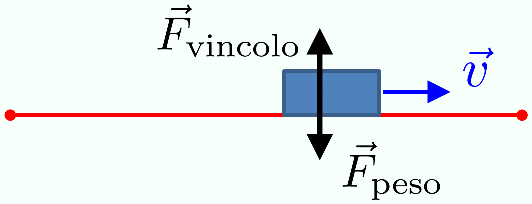
$$\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = 0, \quad \vec{v} = \text{cost.}}$$

Esempi:

→ nello spazio interstellare non vi è interazione (i corpi sono lontani); la velocità è dunque costante in modulo e direzione;

→ si consideri un corpo su una superficie orizzontale priva di attrito, in equilibrio traslazionale:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$



Prima legge di Newton

Un sistema di riferimento è ***inerziale*** se, appurato che la risultante delle forze che agisce sul corpo è nulla, il corpo, osservato nel sistema di riferimento, o è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = 0, \;\; \vec{v} = \mathrm{cost.}$$

Un sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme (velocità costante in modulo e direzione) rispetto a un sistema di riferimento inerziale è anch'esso un sistema di riferimento inerziale.

I principi della dinamica

- *Definizione di massa e di forza*
- *Scomposizione della forza in componenti*
- *Leggi di Newton*
  - prima legge di Newton (1º principio della dinamica)
  - seconda legge di Newton (2º principio della dinamica)
  - terza legge di Newton (3º principio della dinamica)

Gettys
capitolo 5

Seconda legge di Newton

Se la risultante è diversa da zero, si produce un'accelerazione (variazione del moto) proporzionale alla risultante delle forze che agiscono sul corpo.
La costante di proporzionalità è la massa (inerziale).

$$\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

Le forze NON causano il moto,
ma le sue variazioni!

$$\frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i = \vec{a} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{m}\sum_i (F_i)_x = a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{1}{m}\sum_i (F_i)_y = a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \dfrac{1}{m}\sum_i (F_i)_z = a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Il 2° principio permette, note le forze, di studiare il moto del corpo:
dalle accelerazioni si risale, per via integrale, alla legge oraria.

$\vec{a}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{r}(t)$ Equazioni del moto

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\,\Delta t \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\,\Delta t$$

I principi della dinamica

- *Definizione di massa e di forza*
- *Scomposizione della forza in componenti*
- *Leggi di Newton*
  - prima legge di Newton (1º principio della dinamica)
  - seconda legge di Newton (2º principio della dinamica)
  - terza legge di Newton (3º principio della dinamica)

Gettys
capitolo 5

Prima + seconda legge di Newton

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} = 0,\; \vec{v} = \mathrm{cost.}$$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}; \quad \vec{R} \parallel \vec{a}$$

1° principio: *condizione necessaria* perché un corpo sia fermo (equilibrio statico) o abbia velocità costante (equilibrio traslazionale) è che la risultante delle forze che agiscono sul corpo sia nulla.

2° principio: se la risultante è diversa da zero, si produce un'accelerazione proporzionale ad essa. La costante di proporzionalità è la massa (inerziale).

→ I primi due principi sono validi **solo** in sistemi di riferimento inerziali, cioè che si muovono di moto rettilineo uniforme fra loro.

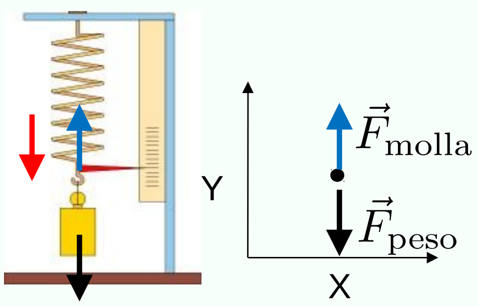
→ Dato un sistema di riferimento ***inerziale***, in cui la prima legge è valida, ***tutti*** I sistemi di riferimento che si muovono a velocità relativa costante (moto rettilineo uniforme) rispetto a quello soddisfano la prima legge.

→ Anche la seconda legge vale ***solo*** nei *sistemi inerziali.*
(Esempio: un ascensore in salita non è sistema inerziale!).

Le forze si sommano (come vettori): vale il **principio di sovrapposizione lineare**.

Per trovare le forze su un corpo occorre disegnare il *diagramma di corpo libero*, che permette di trovare la forza risultante che agisce sul corpo dalla loro composizione.

Esempi: Pesata di un corpo con un dinamometro (bilancia a molla):

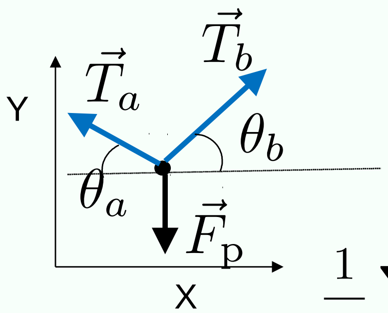


La bilancia misura la forza peso che agisce sull'oggetto

$$\left(F_{molla} = F_{peso} \right)$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\rm molla} + \vec{F}_{\rm peso} = F_{\rm molla}\,\hat{j} - F_{\rm peso}\,\hat{j}$$
$$= \left(F_{\rm molla} - F_{\rm peso}\right)\hat{j} = m\vec{a} = 0$$

Esempio di equilibrio statico: oggetto sospeso a due fili



$$\boxed{0 = m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{T}_a + \vec{T}_b + \vec{F}_\mathrm{peso}}$$

$$\frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} T_b\cos\theta_b - T_a\cos\theta_a = 0 & \text{asse } x \\ -F_\mathrm{p} + T_b\sin\theta_b + T_a\sin\theta_a = 0 & \text{asse } y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} T_b/T_a = \cos\theta_a/\cos\theta_b \\ -F_\mathrm{p} + T_a\cos\theta_a\tan\theta_b + T_a\sin\theta_a = 0 \end{cases} \Rightarrow\; T_a = \frac{F_\mathrm{p}}{\cos\theta_a\tan\theta_b + \sin\theta_a}$$

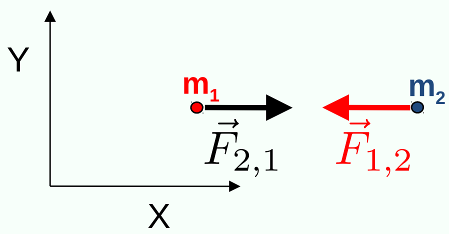
I principi della dinamica

- *Definizione di massa e di forza*
- *Scomposizione della forza in componenti*
- *Leggi di Newton*
  - prima legge di Newton (1º principio della dinamica)
  - seconda legge di Newton (2º principio della dinamica)
  - terza legge di Newton (3º principio della dinamica)

Gettys
capitolo 5

Terza legge di Newton

Azione e reazione: dati due corpi interagenti 1 e 2, ognuno di essi esercita sull'altro una forza. Le due forze hanno la stessa intensità, stessa direzione ma ***verso opposto***.



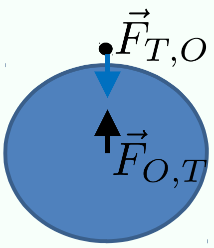
$$\vec{F}_{2,1} = -\,\vec{F}_{1,2}$$

$$\vec{F}_{2,1} = F_{21}\,\hat{i};\;\; \vec{F}_{1,2} = F_{12}\,\hat{i}$$

$$F_{21} = -F_{12}$$

Le forze sono sempre fra **coppie** di oggetti (3° Principio: azione e reazione)

→ Perché se le forze sono uguali a volte si considera l'effetto di una sola?
Esempio: perché la terra attira gli oggetti e non viceversa?



$$\vec{F}_{O,T} = -\vec{F}_{T,O}$$

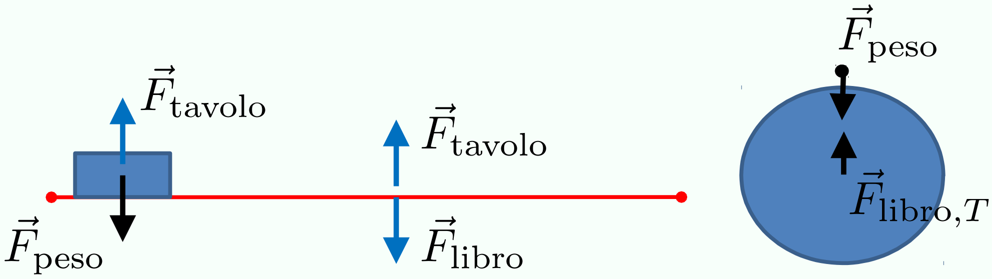
$$\Downarrow$$

$$m_T\,\vec{a}_T = -m_O\,\vec{a}_O$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|\vec{a}_T|}{|\vec{a}_O|} = \frac{m_O}{m_T} \ll 1$$

Terza legge di Newton



Attenzione: spesso si confonde il 3° principio con le forze vincolari.

In realtà sono *due cose diverse*:
Il terzo principio è tra due forze applicate su due corpi diversi!

In quel caso le coppie di forze sono:
→ forza peso su libro e forza con cui il libro attrae la terra;
→ forza di contatto che il tavolo esercita sul libro e quella che il libro esercita sul tavolo.

Interazione gravitazionale

- *Forza gravitazionale e forza peso*
- *Massa gravitazionale e massa inerziale*
- *Caduta di un grave*

Gettys
capitolo 7

Interazione gravitazionale

- *Forza gravitazionale e forza peso*
- *Massa gravitazionale e massa inerziale*
- *Caduta di un grave*

Gettys
capitolo 7

Forza gravitazionale e forza peso

Newton (1687) scoprì la gravitazione universale: un'unica interazione spiega la **caduta dei gravi** e il **moto dei pianeti**.

Due corpi di massa m_A e m_B si attraggono con forze che sono:

a) *dirette lungo la congiungente dei centri di massa*;

b) *attrattive*;

c) di intensità uguali e opposte, proporzionale al prodotto delle masse dei corpi $m_A m_B$ (massa gravitazionale), inversamente proporzionale al quadrato della distanza dai centri di massa.

Per punti materiali la distanza si definisce in modo ovvio, per corpi macroscopici si considera la forza che agisce sul **centro di massa** (cioè come se la massa fosse concentrata nel centro di massa).

$$|\vec{F}_{A,B}| = |\vec{F}_{B,A}| = G\frac{m_A\, m_B}{r^2}$$

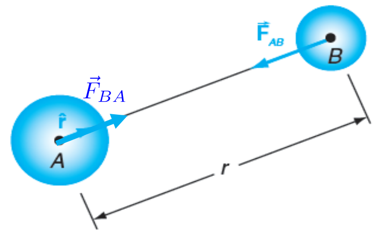


Figura 7.4
La forza gravitazionale $\vec{F}_{AB}$ esercitata dal corpo A, dotato di simmetria sferica, sul corpo B, dotato anch'esso di simmetria sferica. Ciascuno dei corpi interagisce dal punto di vista gravitazionale come se tutta la sua massa fosse concentrata in una particella posta nel proprio centro.

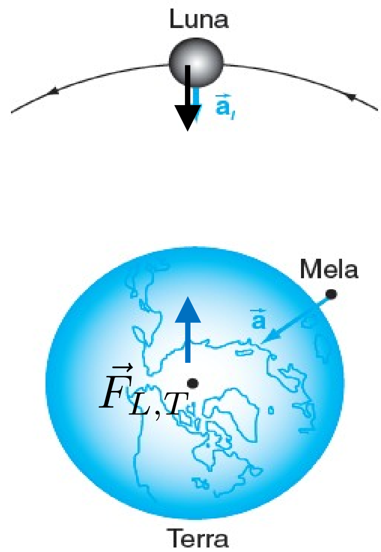


Figura 7.1
La Luna e la mela accelerano entrambe verso il centro della Terra a causa dell'attrazione gravitazionale di quest'ultima.

G è la *costante di gravitazione universale:*

$G = 6.674 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

La forza di gravità ha un effetto importante solo se almeno uno dei due corpi ha **massa grande**.

$G = 6.674 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$ è una costante molto piccola
$\Rightarrow$ solo per grandi masse il modulo di F è importante:

(i) la forza di attrazione fra oggetti macroscopici ma piccoli è trascurabile;
(ii) gli oggetti macroscopici devono avere ***massa grande*** (almeno $10^{10} – 10^{11}$ kg) ed essere ***relativamente vicini*** (per es. R_{min} Terra-Saturno = 1.33×10^{12} m, perciò Saturno non esercita forze rilevanti sulla terra).

Masse tipiche: uomo 10^2 kg, elefante 4×10^3 kg, transatlantico 7×10^7 kg,
luna 7×10^{22} kg, terra 6×10^{24} kg.

Distanze tipiche: R = centro Terra – centro Luna 384×10^6 m;
Raggio Terra $R_T = 6.37 \times 10^6$ m

$$|F_g| = G m_a m_b / r^2$$

Forza gravitazionale Terra su Luna ~ 1.88×10^{20} N;
Forza gravitazionale Terra su uomo, sulla superficie terrestre ~ 986 N;
Forza gravitazionale Luna su uomo, sulla superficie terrestre ~ 0.0032 N.

Interazione gravitazionale

- *Forza gravitazionale e forza peso*
- *Massa gravitazionale e massa inerziale*
- *Caduta di un grave*

Gettys
capitolo 7

Massa gravitazionale: grandezza scalare proporzionale alla forza di gravità.

Massa inerziale: costante di proporzionalità fra $\vec{F}$ ed $\vec{a}$ nel 2° principio.

→ In teoria le due definizioni di massa sono diverse.

Cavendish (1798) verifica la legge $1/r^2$ e misura G:

$$\vec{F}_{A,B} = -G\frac{m_A\, m_B}{r^2}\hat{r}$$

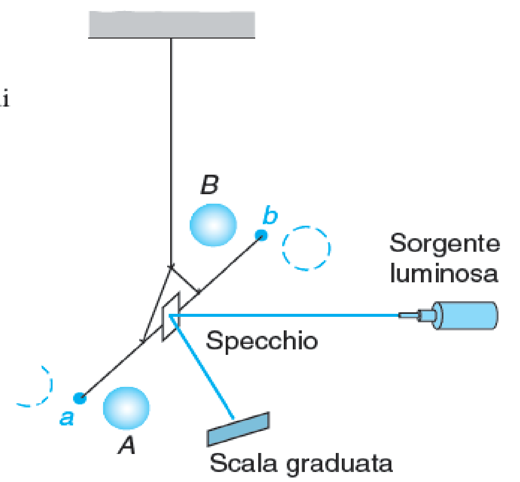
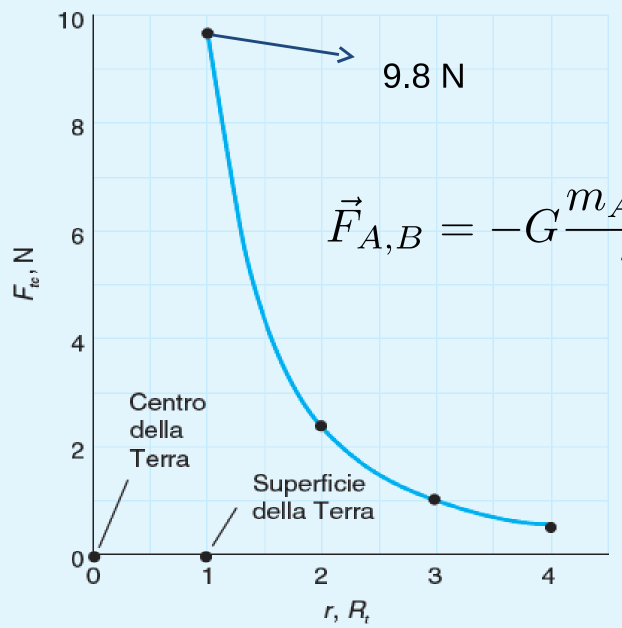


Figura 7.5
Rappresentazione schematica di una bilancia di torsione di Cavendish. La bilancia può essere usata per misurare G e per ottenere una verifica sperimentale della dipendenza dalla distanza e dalla massa prevista dalla legge di gravitazione universale di Newton.



$$\vec{F}_{A,B} = -G\frac{m_A\, m_B}{r^2}\hat{r}$$

Figura 7.6
Esempio 7.4: l'intensità F_{tc} della forza gravitazionale esercitata dalla Terra su un corpo c (m_c = 1.00 kg), in funzione della distanza r dal centro della Terra.

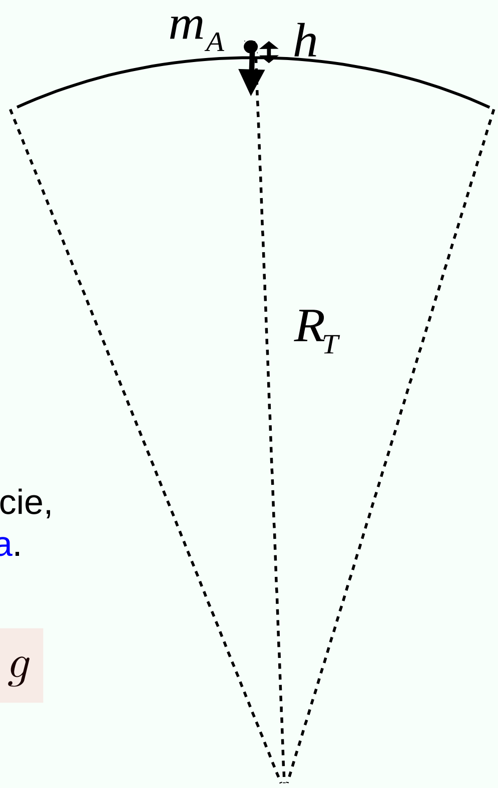
Quanto vale l'attrazione gravitazionale sulla superficie terrestre?

La direzione è radiale, cioè perpendicolare alla superficie,
cioè $\vec{F}_{\mathrm{peso}}$ è verticale e diretta verso il centro della terra.

$$\vec{F}_{A,B} = -G\frac{m_A\, m_B}{r^2}\hat{r}$$

$\vec{F}_{\text{peso}}$, almeno per h piccoli, è costante in modulo e in direzione $\Rightarrow \vec{F}_{\text{peso}}$ è uniforme

$h << R_T$



Quanto vale l'attrazione gravitazionale sulla superficie terrestre?
La direzione è radiale, cioè perpendicolare alla superficie, cioè $\vec{F}_{\text{peso}}$ è verticale e diretta verso il centro della terra.

$$|\vec{F}_{\text{peso}}| = G\frac{m_T\, m_A}{(R_T+h)^2} \approx m_A G\frac{m_T}{R_T^2} = m_A\, g$$

g = 9.81 N/kg

[[su Everest h = 8000 m; g = 9.784 N/kg]]

Interazione gravitazionale

- *Forza gravitazionale e forza peso*
- *Massa gravitazionale e massa inerziale*
- *Caduta di un grave*

Gettys
capitolo 7

$$|\vec{F}_{\text{peso}}| = m_A\, g$$

$$|\vec{F}_{\text{gravità}}| = \frac{G\, m_T\, m_A}{r^2} = m_A G \frac{m_T}{r^2}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

massa gravitazionale

massa inerziale

Da esperimenti è stato dimostrato che:
La massa gravitazionale ***è equivalente*** alla massa inerziale

Tutti i gravi hanno dunque la **stessa** accelerazione quando si trovano *sullo stesso pianeta e ad altitudini comparabili*, e nessun altra forza è attiva oltre a quella gravitazionale.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_g}{m_A} = \vec{g} = -g\,\hat{j}$$

Per esempio: sulla Terra g = 9.81 m/s^2;

su Luna $g_L = GM_{Luna}/(R_{luna})^2$ = 1.624 m/s^2
[M_{luna} = 7.37x10^{22} kg, R_{luna} = 1.738x10^6 m]

Se la forza peso è ***uniforme*** ed è ***l'unica*** forza in gioco, allora si ha accelerazione costante

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\hat{j}$$

Esperimento di Galileo: attrito dell'aria trascurabile.

Sulla Luna martello e piuma cadono allo stesso modo.

Sulla Terra **nel vuoto** corpi di ***massa diversa*** cadrebbero con ***stessa accelerazione!!***

In generale se l'unica forza in gioco è quella gravitazionale (forza peso), si ha:

→ ***moto*** **unidimensionale** (caduta di un grave) se $\vec{g} \parallel \vec{v}_0$

→ ***moto bidimensionale*** (moto parabolico) se $\vec{g} \nparallel \vec{v}_0$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_{0x} t = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_{0y} + a_{0y} t = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$

Prossima lezione

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t = x_0 + (v_0 \cos\theta) t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_{0y} t^2 = y_0 + (v_0 \sin\theta) t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$