

Potenziale elettrico

- **Introduzione**

 - *energia potenziale elettrica*

- *Potenziale elettrico*

 - *esempi*

- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*

- *Elettrostatica*

Gettys II
Capitolo 3

Ricordiamo la relazione generale fra energia potenziale, lavoro e forza conservativa:

$$\Rightarrow \vec{F}(x, y, z) \iff U(x, y, z)$$

$$\Rightarrow \Delta U = U_f - U_i = -L(\vec{r}_i, \vec{r}_f) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}; \quad \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad \left(F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Energia potenziale elettrica:

- il **campo elettrico** è **conservativo**;
- il campo elettrico è **funzione della posizione**;
- il lavoro fatto dalla forza elettrica da un punto all'altro dipende **solo** dalla *posizione iniziale e finale* e **non** dal percorso;
- l'**energia meccanica si conserva**;
- è quindi possibile scrivere l'**energia potenziale elettrica**.

Il lavoro infinitesimo dL svolto dal campo elettrico su una carica q_0 varia l'energia potenziale dU del sistema carica-campo:

$$dU = -dL = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

La variazione di energia potenziale del sistema carica-campo è:

$$\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

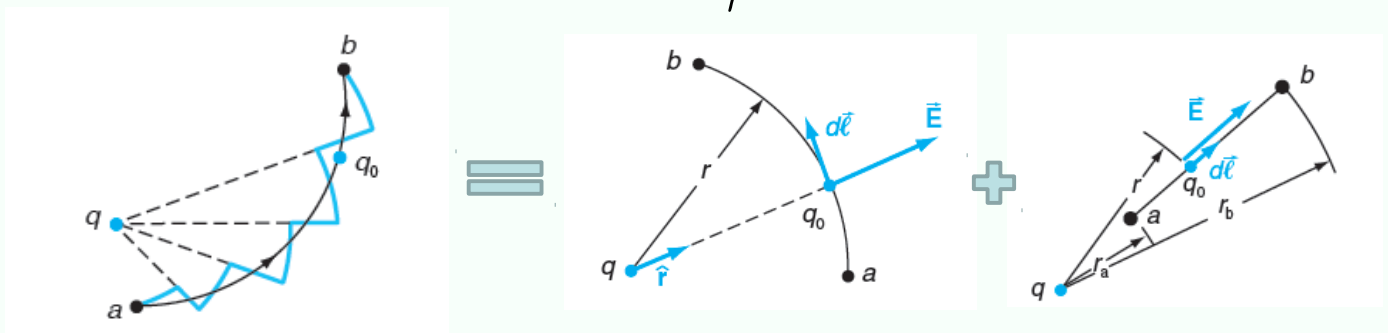
Calcoliamo il lavoro del campo elettrico quando una particella di prova di carica q_0 viene spostata nel campo di una carica puntiforme q fissata che genera il campo.

La variazione di energia potenziale è uguale al lavoro, cambiato di segno, fatto dalla forza conservativa:

$$\Delta U = -L = - \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Lo spostamento lungo una traiettoria di forma arbitraria lo si può sempre vedere come una somma di piccoli archi (lungo i quali il lavoro infinitesimo è nullo: $dL=0$) e di piccoli segmenti radiali

$$\vec{E} = E \hat{r}; \quad \vec{E} \cdot d\vec{l} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}; \quad \vec{r} \cdot d\vec{l} = dl \cos \theta = dr$$



$$L = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{r_A}^{r_B} k_e \frac{q}{r^2} dr = k_e q_0 q \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = k_e q_0 q \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

$$\Rightarrow U_B - U_A = k_e q q_0 \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

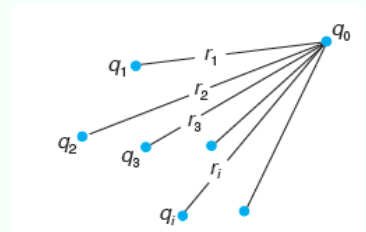
Questa quantità dipende **solo** dalla posizione iniziale e finale (in particolare dalle coordinate radiali) e **non dal cammino**.

Fissando la posizione di partenza all'infinito ($r_A \rightarrow \infty$) e ponendo lì il valore di riferimento (nullo) dell'energia potenziale si ha:

$$U_B = \frac{k_e q q_0}{r_B}; \quad U(r) = \frac{k_e q q_0}{r}$$

Se **più cariche puntiformi** generassero il campo, l'energia potenziale sarebbe la somma dei singoli contributi (i campi si sommano vettorialmente, ma il lavoro è uno scalare)

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad U = \sum_i U_i = q_0 k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



A volte si definisce l'energia potenziale elettrica come il lavoro compiuto (da un agente esterno) **contro** la forza elettrica, quando la particella carica di prova viene portata dall'infinito ad una distanza r dalla carica fissata.

Potenziale elettrico

- *Introduzione*
 - *energia potenziale elettrica*
- *Potenziale elettrico*
 - *esempi*
- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*
- *Elettrostatica*

Gettys II
Capitolo 3

Potenziale elettrico

Il potenziale elettrico V sta all'energia potenziale U come il campo \vec{E} sta alla forza \vec{F} :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \longleftrightarrow \quad V = \frac{U}{q_0}$$

Definizione: il potenziale elettrico generato da una carica in un punto è uguale all'energia potenziale per unità di carica di una carica di prova q_0 che si trova in quel punto.

→ È uno scalare.

→ Unità di misura: **Volt** $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$

[unità di misura del campo elettrico: V / m]

La **differenza di potenziale** è: $\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Il potenziale è definito a meno di una costante additiva.

Il riferimento dipende dal sistema. In caso in cui il **potenziale** è **nullo all'infinito**:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad V(\infty) = 0 \Rightarrow V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Il potenziale può essere visto anche come il lavoro per unità di carica necessario per portare una particella di prova dall'infinito ad un punto P arbitrario.

→ Per una carica puntiforme: $V = k_e \frac{q}{r}$

→ Per più cariche puntiformi occorre fare la **somma algebrica dei potenziali**

generati dalle singole particelle: $V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$

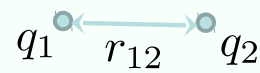
Potenziale elettrico

- *Introduzione*
 - *energia potenziale elettrica*
- *Potenziale elettrico*
 - esempi
- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*
- *Elettrostatica*

Gettys II
Capitolo 3

Coppia di cariche:

$$U = q_1 V_2 = q_2 V_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

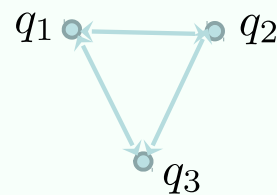


L'energia potenziale presenta solo un termine per coppia.

Se le cariche hanno **segni concordi**, l'energia potenziale è **positiva** (le due cariche si possono allontanare all'infinito). Se le cariche sono **discordi**, l'energia potenziale è **negativa** (le cariche si attraggono: moto confinato).

Tre cariche:

$$U_{\text{tot}} = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$



L'energia associata a tre o più cariche puntiformi si calcola sommando algebricamente le energie potenziali di ogni coppia (contata una sola volta).

→ Per una particella di prova nel campo di altre particelle, l'energia potenziale di q_0 (non del sistema) è: $U_{q_0} = k_e q_0 \sum_i q_i / r_i$

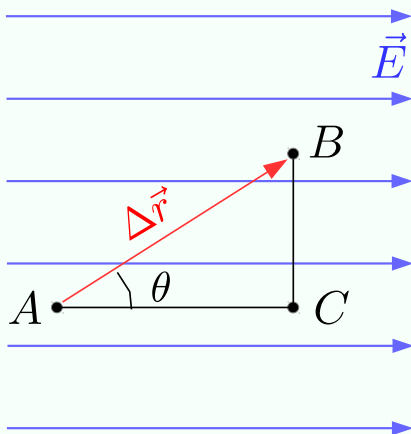
Campo elettrico uniforme:

È analogo al caso del campo gravitazionale (forza peso). La differenza di energia potenziale è pari al lavoro fatto dalla forza elettrica per unità di carica cambiato di segno:

$$\Delta U_{BA} = U_B - U_A = -L_{\text{campo}_A \rightarrow B} = -\int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta V_{BA} = \frac{\Delta U_{BA}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{r}$$

$$= -E \Delta r \cos \theta = -E d = \Delta V_{CA}$$



Muoversi da B a C (o comunque in ogni cammino perpendicolare al campo) non porta a variazioni di potenziale: *le superfici perpendicolari al campo elettrico sono equipotenziali.*

L'unico cammino che fa variare il potenziale è quello **lungo** il campo elettrico (analogo all'energia potenziale della forza peso): $\Delta V = -Ed$

Dipolo in un campo elettrico uniforme:

Un dipolo è costituito da due cariche uguali e opposte, che si trovano ad una distanza fissata $2a$.

$$V(x) = -Ex + V_0$$

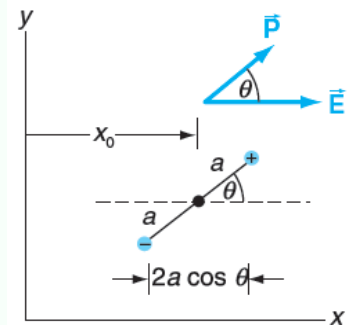


Figura 3.17

Esempio 3.11: L'energia potenziale di un dipolo in un campo uniforme, $\vec{E} = E_x \hat{i}$.

$$x_+ = x_0 + a \cos \theta \Rightarrow U_+ = q[-E(x_0 + a \cos \theta) + V_0]$$

$$x_- = x_0 - a \cos \theta \Rightarrow U_- = -q[-E(x_0 - a \cos \theta) + V_0]$$

$$U_{\text{tot}} = U_{\text{int}} + U_+ + U_- = -2aqE \cos \theta = -pE \cos \theta$$

Energia potenziale elettrica di un dipolo in campo uniforme: $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

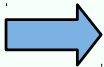
Potenziale elettrico

- *Introduzione*
 - *energia potenziale elettrica*
- *Potenziale elettrico*
 - *esempi*
- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*
- *Elettrostatica*

Gettys II
Capitolo 3

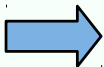
Relazioni generale fra campo elettrico e potenziale: $\vec{E}(x, y, z) \iff V(x, y, z)$

$V(x, y, z) \Rightarrow \vec{E}(x, y, z)$ ————— differenziale e locale

 $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$
derivata direzionale (gradiente) $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$\vec{E}(x, y, z) \Rightarrow V(x, y, z)$ ————— integrale e "globale"

Variazione di potenziale è pari all'integrale di linea del campo elettrico fra i punti A e B.

 $\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

perciò:

$\Delta V_{AA} = -\int_A^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ Circuitazione del campo elettrico è sempre nulla!

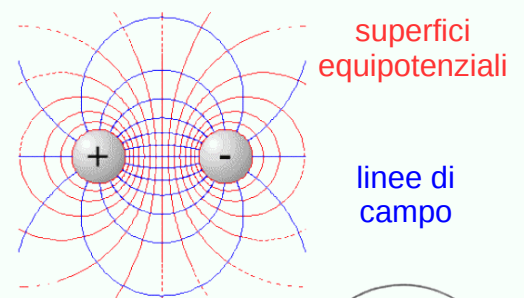
Potenziale elettrico

- *Introduzione*
 - *energia potenziale elettrica*
- *Potenziale elettrico*
 - *esempi*
- *Relazione tra campo e potenziale elettrico*
- *Elettrostatica*

Gettys II
Capitolo 3

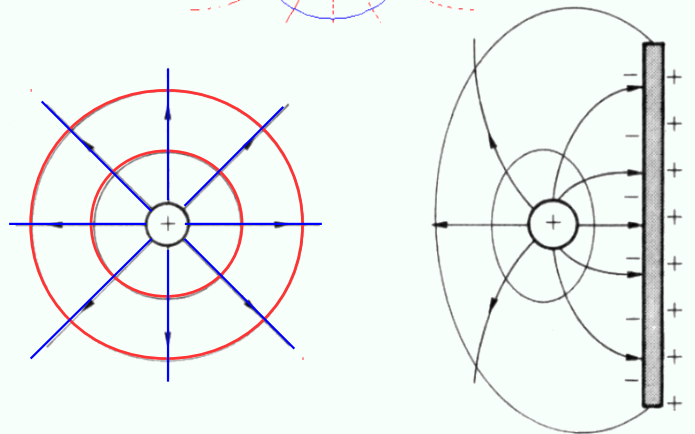
Elettrostatica: linee di campo e superfici equipotenziali

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$
$$E_t = -\frac{\partial V}{\partial t}$$
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$



Le **superfici equipotenziali** sono quelle **perpendicolari** alle **linee di campo**.

→ Lungo di esse la differenza di potenziale non cambia perché l'integrale di linea è nullo.



Esempio: un **conduttore**, all'equilibrio, si trova tutto allo stesso potenziale.

- ⇒ siccome le superfici esterne dei conduttori sono equipotenziali, i campi elettrici sono perpendicolari alle superfici esterne dei conduttori;
- ⇒ all'interno di un conduttore il campo elettrico è nullo.

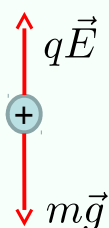
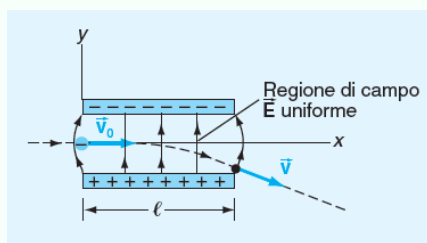
Esempi vari

Dinamica di cariche in campi elettrici e gravitazionali

Cariche puntiformi e campi

Moto di cariche in campo elettrico uniforme

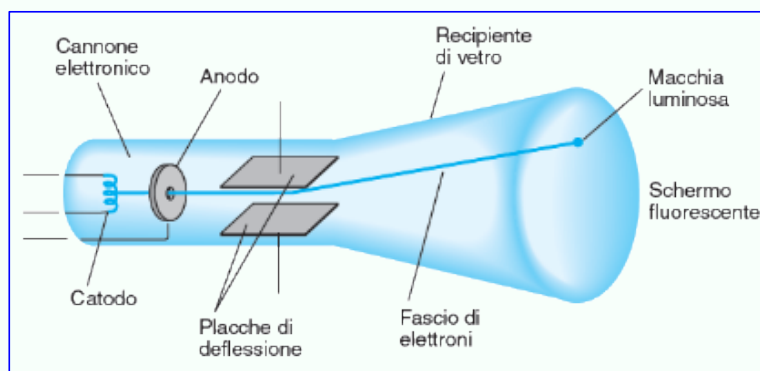
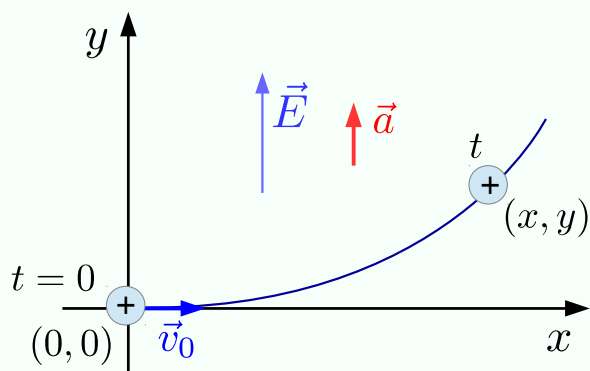
Consideriamo una carica $+q$ di massa m in una regione di campo elettrico uniforme, diretto verso l'alto (y). Con quale carica il corpo rimane in equilibrio?



$$\sum \vec{F}_z = 0 \Rightarrow qE - mg = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{mg}{E}$$

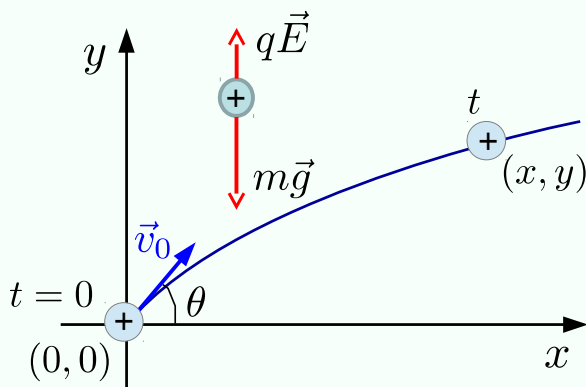
Se tale carica viene lanciata con velocità iniziale v_0 , essa percorre un moto **parabolico**.



Moto di cariche in campo elettrico uniforme

Consideriamo ora l'effetto combinato della forza elettrica e di quella gravitazionale.

Supponiamo che una carica $+q$ di massa m si trovi in una regione di campo elettrico uniforme, diretto verso l'alto (y). Essa viene lanciata con velocità iniziale v_0 inclinata di un angolo rispetto all'asse x . Studiarne il moto.



$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = q\vec{E} + m\vec{g}$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{qE}{m} - g \right) \hat{j} = a_0 \hat{j}$$

→ moto **uniformemente accelerato** (2D)

$$\begin{cases} v_y = v_0 \sin \theta + \left(\frac{qE}{m} - g \right) t \\ v_x = v_0 \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (v_0 \sin \theta) t + \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m} - g \right) t^2 \\ x = (v_0 \cos \theta) t \end{cases}$$

Moto di cariche in campo elettrico uniforme

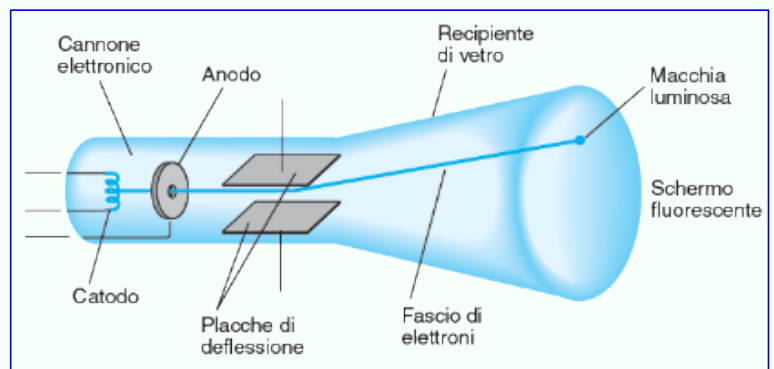
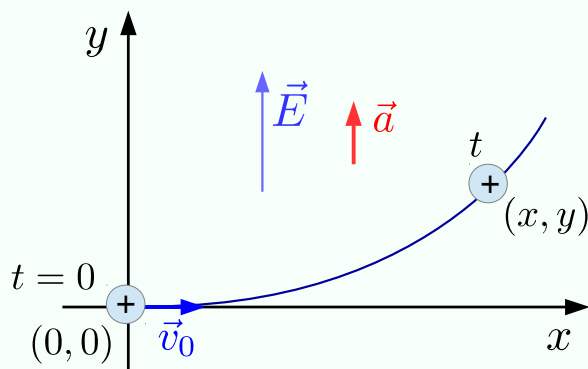
$$\begin{cases} y = (v_0 \sin \theta) t + \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m} - g \right) t^2 \\ x = (v_0 \cos \theta) t \end{cases}$$

Moto uniformemente accelerato
in 2D (moto del proiettile)

Se la carica q ha massa trascurabile (nel senso che $mg \ll qE$) e parte da orizzontale ($\theta = 0$), a che altezza rispetto a x colpisce uno schermo a distanza d ?

$$d = v_0 t^* \Rightarrow t^* = \frac{d}{v_0}$$

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m} - g \right) \left(\frac{d}{v_0} \right)^2 \simeq \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{d^2}{v_0^2} E$$

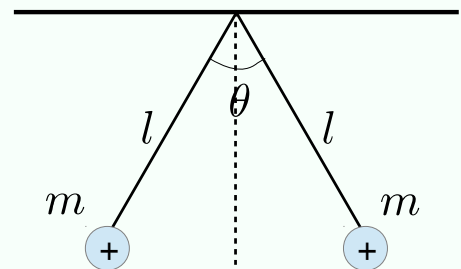


Cariche puntiformi e filo

In presenza del campo gravitazionale terrestre, due fili di massa trascurabile e lunghi ognuno l pendono dallo stesso chiodo. All'estremità di ogni filo è attaccata una pallina di massa m . Ad ognuna delle due palline viene data la stessa carica elettrica e i due fili all'equilibrio formano tra loro un angolo di θ .

Quanto vale la carica q di ognuna delle palline?

Facendo il conto delle forze su una delle due palline (data la **simmetria del problema**, l'altra pallina si comporterà in modo analogo):



$$\begin{cases} 0 = ma_y = \sum F_y = T \cos \frac{\theta}{2} - mg \Rightarrow T \cos \frac{\theta}{2} = mg \\ 0 = ma_x = \sum F_x = -T \sin \frac{\theta}{2} + \frac{k_e q^2}{\left(2l \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} \Rightarrow T \sin \frac{\theta}{2} = \frac{k_e q^2}{\left(2l \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} \end{cases}$$

da cui, dividendo membro a membro: $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{k_e q^2}{mg \left(2l \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} \Rightarrow q = 2l \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{mg}{k_e} \tan \frac{\theta}{2}}$

Cariche puntiformi e campo

Tre cariche positive ed una negativa, uguali in modulo e pari a q l'una, sono poste ai vertici di un quadrato di lato L .

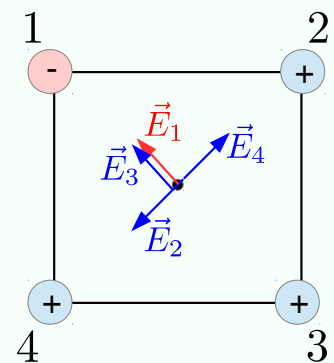
→ calcolare il modulo del campo elettrico e il potenziale al centro del quadrato.

Soluzione

Le cariche di segno uguale su vertici opposti (2 e 4) danno origine a due campi nel centro del quadrato uguali in modulo e direzione, ma opposti in verso [quindi i due contributi si annullano mutuamente]. La carica negativa $-q$ (1) e la positiva $+q$ a lei opposta in diagonale (3) originano due campi E_1 e E_2 nel centro del quadrato che hanno la stessa direzione. La somma di tali contributi determina direttamente il modulo. Per il potenziale si sommano algebricamente i quattro potenziali.

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_3| = \frac{k_e q}{(L/\sqrt{2})^2} + \frac{k_e q}{(L/\sqrt{2})^2} = \frac{4k_e q}{L^2}$$

$$V = \frac{k_e q}{L/\sqrt{2}} + \frac{k_e q}{L/\sqrt{2}} + \frac{k_e q}{L/\sqrt{2}} - \frac{k_e q}{L/\sqrt{2}} = 4 \frac{k_e q}{L\sqrt{2}}$$



Cariche puntiformi e campo

Tre cariche positive ed una negativa, uguali in modulo e pari a q l'una, sono poste ai vertici di un quadrato di lato L .

- calcolare il modulo della forza agente sulla carica negativa;
- calcolare campo e potenziale in quel punto in sua assenza.

Soluzione

La forza su 1 si trova calcolando il modulo del campo complessivo generato dalle altre tre cariche (ottenuto sommando vettorialmente i campi generati dalle singole cariche) come se la carica negativa non ci fosse. La carica 3 genera un campo orientato lungo la diagonale; le cariche 2 e 4 generano campi le cui componenti trasversali si elidono mutuamente mentre la componente diagonale è uguale e si somma in maniera costruttiva. Perciò la risultante del campo elettrico generato da 2-3-4 è anch'essa diretta lungo la diagonale:

$$|\vec{E}| = \left| \frac{k_e q}{(L\sqrt{2})^2} + 2 \frac{k_e q}{L^2} \cos \frac{\pi}{4} \right| = \frac{k_e q}{L^2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right)$$

Il potenziale elettrico vale: $V = \frac{k_e q}{L\sqrt{2}} + 2 \frac{k_e q}{L} = \frac{k_e q}{L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right)$

La forza su una carica negativa in tal punto è attrattiva, lungo

la diagonale e di modulo: $|\vec{F}| = |q\vec{E}| = \frac{k_e q^2}{L^2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right)$

