# Forze non costanti in modulo: *F(x)*, *F(v)*

- *Forze variabili nel tempo e/o nello spazio*
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*
  - → *velocità limite*

# **Forze non costanti in modulo: *F(x)*, *F(v)***

- $\boxed{\textit{Forze variabili nel tempo e/o nello spazio}}$
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*

    → *velocità limite*

Finora abbiamo sempre considerato forze costanti.

Ad esempio:

$$\vec{F}_{\mathrm{peso}} = m\vec{g} = -mg\,\hat{j} \qquad \vec{f}_d = -\mu_d N\,\hat{t}$$

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \mathrm{cost.} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i \;\Rightarrow\; \vec{a} = \mathrm{cost.} \equiv \vec{a}_0}$$

Questo tipo di moto è già stato risolto nel dettaglio (rettilineo o parabolico)

Se il moto è *bidimensionale* $(\vec{v}_0 \nparallel \vec{a}_0)$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_0 t^2; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\, t; \quad \vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{v}_0\cdot\vec{v}_0 = 2\vec{a}_0(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

Se il moto è *unidimensionale* $(\vec{v}_0 \parallel \vec{a}_0)$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_0 t^2; \quad v = v_0 + a_0 t$$

Se la forza è non costante, ma cambia nel tempo o nello spazio, cosa fare?

Per esempio $\boxed{F(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = a = \dfrac{f_0 + f_1 t + f_2 t^2}{m}$

$$v = v_0 + \int_0^t a(t')\, dt' = v_0 + \frac{f_0}{m} t + \frac{f_1}{2m} t^2 + \frac{f_2}{3m} t^3$$

$$x = x_0 + \int_0^t v(t')\, dt' = x_0 + v_0 t + \frac{f_0}{2m} t^2 + \frac{f_1}{6m} t^3 + \frac{f_2}{12m} t^4$$

In generale, se l'accelerazione non è costante, bisogna risolvere un'***equazione differenziale***:

$$\boxed{F(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}}$$

a volte è difficile trovare *x(t)*

Se la forza è non costante, ma cambia nel tempo o nello spazio, cosa fare?

Per una forza elastica (vedi dopo), abbiamo: $\boxed{F(x) = -k(x - x_0)}$

*equazione differenziale*

$$-\frac{k}{m}(x - x_0) = \frac{F}{m} = a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - x_0) = 0$$

*condizioni iniziali*

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \quad x(t)$$

*legge oraria*

## Forze non costanti in modulo: *F(x)*, *F(v)*

- *Forze variabili nel tempo e/o nello spazio*
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*

  → *velocità limite*

**Gettys**

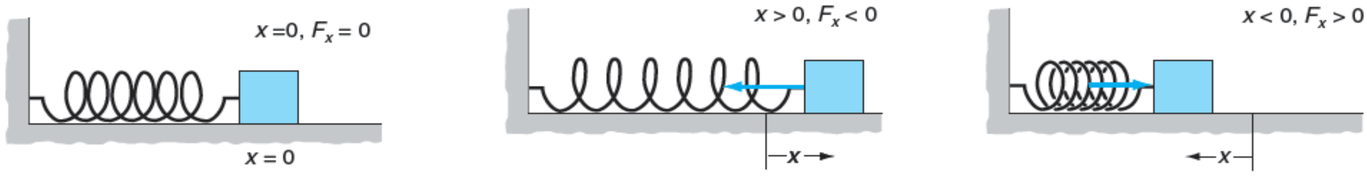
Capitolo 8.4

# Forza elastica

Introduciamo una forza che dipende dalla posizione: la molla obbedisce alla ***legge di Hooke*** (forza proporzionale alla elongazione o alla compressione).

lunghezza a riposo: $x_0$
costante elastica: k

La forza elastica tende a riportare la molla in posizione di riposo.




molla a riposo | molla estesa | molla compressa

$$\boxed{\vec{F} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0) = -k\,\Delta\vec{x}}$$

componente lungo *x*

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = \frac{F}{m}$$

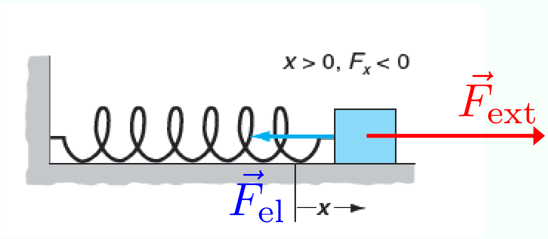
per semplicità supponiamo $x_0=0$

ne vedremo in seguito la risoluzione…

# Forza elastica

La legge di Hooke ci dice che: $F_{\mathrm{el}} = -k(x - x_0) = -k\,\Delta x$

Calcoliamo la condizione di equilibrio con forze esterne applicate:




$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\mathrm{el}} + \vec{F}_{\mathrm{ext}} = 0$$

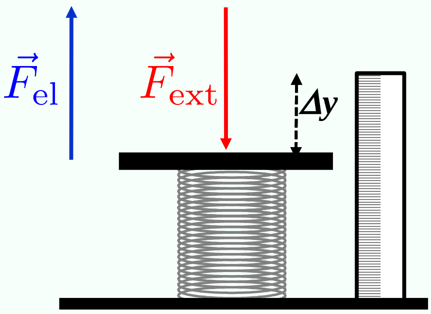
Componenti lungo *x*:

$$\sum_i F_i = -k\,\Delta x + F_{\mathrm{ext}} = 0 \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{F_{\mathrm{ext}}}{k}$$

---

***Dinamometro***: permette di misurare l'intensità di una forza (es. forza peso) dall'allungamento Δy che è proporzionale alla forza stessa (Δy ∝ F).

$$\sum_i F_i = -k\,\Delta y + F_{\mathrm{ext}} = 0 \;\Rightarrow\; \Delta y = \frac{F_{\mathrm{ext}}}{k}$$



# Forze non costanti in modulo: *F(x)*, *F(v)*

- *Forze variabili nel tempo e/o nello spazio*
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*
  - → *velocità limite*

**(facoltativo)**

**Gettys**
Capitolo 6.2

Introduciamo una **forza che dipende dalla *velocità***.

Resistenza dell'aria e, in generale, dei fluidi *viscosi*: è una forza che si oppone al moto di un corpo nel fluido.

Questo tipo di forze dipende dalla velocità del corpo:

→ è sempre diretta in verso opposta alla velocità;

→ il suo modulo ha due regimi, in base al tipo di mezzo viscoso e alla velocità:

A) Per ***v* basse** *e mezzi* ***viscosi*** $\boxed{\vec{F}_r(v) = -b_1 v\,\hat{v}}$

B) Per ***v* alte** *e mezzi* ***rarefatti*** (gravi in aria) $\boxed{\vec{F}_r(v) = -b_2 v^2\,\hat{v}}$

Il coefficiente $b_1$ (oppure $b_2$) dipende dalla forma, dalle dimensioni del corpo e dalla viscosità del mezzo.

A) Per ***v basse*** *e mezzi* ***viscosi*** $\boxed{\vec{F}_r(v) = -b_1 v\, \hat{v}}$

B) Per ***v alte*** *e mezzi* ***rarefatti*** (gravi in aria) $\boxed{\vec{F}_r(v) = -b_2 v^2\, \hat{v}}$

Il coefficiente $b_1$ (oppure $b_2$) dipende dalla forma, dalle dimensioni del corpo e dalla viscosità del mezzo.

1) Perché sulla terra corpi più pesanti lasciati liberi in condizioni di quiete arrivano al suolo con velocità più elevata dei corpi più leggeri, pur partendo dalla stessa quota?

2) Perché i moscerini non si schiantano al suolo e le persone si?

3) Perché il paracadute fa cadere a velocità più bassa?

# Forze non costanti in modulo: *F(x)*, *F(v)*

- *Forze variabili nel tempo e/o nello spazio*
- *Forza elastica*
- *Attrito in un mezzo viscoso*

  → *velocità limite*

**(facoltativo)**

**Gettys**

Capitolo 6.2

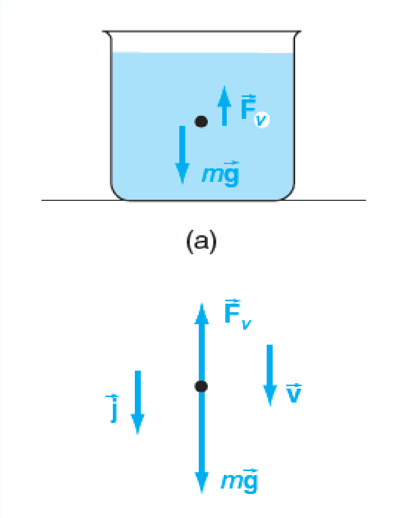
## Esempio nel regime di tipo A)

Un corpo parte da fermo sotto l'azione della forza peso e della resistenza del fluido.

$$\boxed{\vec{F}_r(v) = -b_1 v\,\hat{v}}$$

$$\sum_i F_{iy} = -mg + b_1 v = m a_y = m\frac{dv}{dt}$$

[vedremo in seguito la risoluzione…]




Analizziamo un caso limite.

Partendo da v=0, il moto dapprima è simile a quello di un grave, poi si equilibra ad una ***velocità limite*** per la quale le due forze si equilibrano:

$$-mg + b_1 v_{\lim} = 0 = m a_y \;\Rightarrow\; v_{\lim} = \frac{mg}{b_1}$$

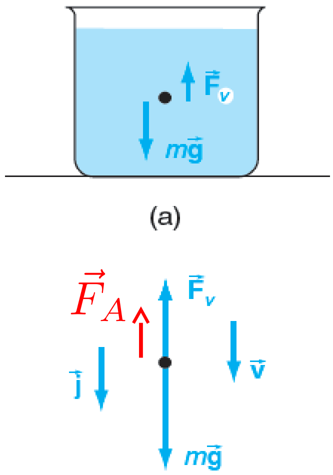
Corpi con massa più grande o che hanno un coefficiente di attrito viscoso più piccolo raggiungeranno velocità limite più elevate. Ecco perché martello e piuma sulla Terra cadono al suolo con velocità diverse (se è presente l'atmosfera). Invece seguono lo stesso moto se sono lasciati cadere in condizioni di vuoto.

→ Il paracadute garantisce un $b_1$ maggiore, riducendo la velocità limite.

## Esempio nel regime di tipo A)

Un corpo parte da fermo sotto l'azione della forza peso e della resistenza del fluido.

$$\sum_i F_{iy} = -mg + b_1 v = ma_y = m\frac{dv}{dt}$$




→ all'inizio v=0 e il moto è come quello di un grave

→ poi v aumenta finché c'è una ***velocità limite*** per la quale le due forze si equilibrano

$$-mg + b_1 v_{\rm lim} = 0 = ma_y \;\Rightarrow\; v_{\rm lim} = \frac{mg}{b_1}$$

$$\vec{F}_e = (-mg + F_A)\hat{j} = (-\rho_{\rm corpo} V g + \rho_{\rm fluido} V g)\hat{j}$$

In realtà non c'è solo la forza peso ma anche la **forza di Archimede**, diretta come la forza peso ma in verso opposto, e proporzionale ad essa.

Tuttavia ciò non cambia l'impostazione del problema: la somma di forza peso e la forza di Archimede si può esprimere come una ***forza efficace***.

$$\vec{F}_e = -\rho_{\rm corpo} V g \left(1 - \frac{\rho_{\rm fluido}}{\rho_{\rm corpo}}\right)\hat{j} = -mg\left(1 - \frac{\rho_{\rm fluido}}{\rho_{\rm corpo}}\right)\hat{j} = -m\, g_{\rm eff}\,\hat{j}$$