Cinematica del punto materiale (II)

- *Accelerazione costante – moto 1D*
- *Accelerazione costante – moto 2D*
- *Moto dei proiettili*

Gettys

capitolo 4

Cinematica del punto materiale (II)

- *Accelerazione costante – moto 1D*
- *Accelerazione costante – moto 2D*
- *Moto dei proiettili*

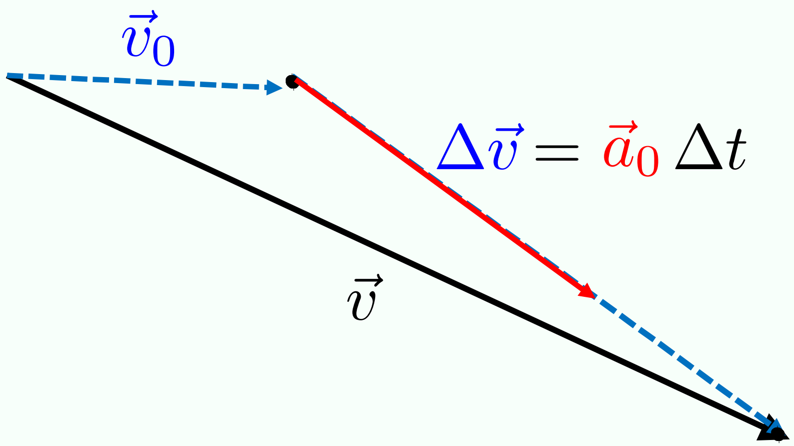
Gettys

capitolo 4

Se ho accelerazione costante come si muove il corpo?

Se l'accelerazione è costante, l'accelerazione media è sempre uguale e quindi la variazione della velocità avviene lungo una ***retta***.

$$\vec{a} = \vec{a}_0 = \text{cost.}$$



Si avranno due casi:

1) moto bidimensionale se $\vec{a}_0 \nparallel \vec{v}_0$

2) moto rettilineo (1D) se $\vec{a}_0 \parallel \vec{v}_0$

$$\vec{a}_0 = \langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \vec{a}_0 = \frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-t_0} = \frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\,t$$

se $\vec{a}_0 = -g\,\hat{j}$

in caso 1D; es.: caduta di un grave lungo la verticale

in caso 2D; es.: moto di un proiettile

Accelerazione costante – moto in 1D

$$v = v_0 + a_0\,t$$

integriamo la velocità per ottenere lo spostamento:

$$y = y_0 + \int_0^t v\,dt' = y_0 + \int_0^t (v_0 + a_0\,t)dt' = y_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}a_0\,t^2$$

dove y_0 e v_0 sono la posizione e la velocità a *t* = 0

Una relazione fra posizione e velocità (valida ***solo*** per moti con accelerazione costante) si trova scrivendo il tempo in funzione della velocità t(v) e sostituendo in y(t):

$$t = \frac{v - v_0}{a_0}$$

$$\underline{v^2 - v_0^2 = 2a_0(y - y_0)}$$

Accelerazione costante – moto in 1D

Il caso più celebre è quello di un ***grave in caduta libera***, vicino alla superficie terrestre (trascuriamo completamente la resistenza dell'aria).

L'accelerazione (in assenza di attrito) è diretta *lungo la verticale*, *verso il basso* e vale $g = 9.81\ m/s^2$

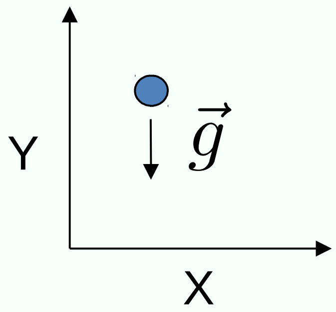
$$\vec{a} = -g\,\hat{j} \qquad a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$y = y_0 + v_0\,t - \tfrac{1}{2} g\,t^2$$

$$v = v_0 - g\,t$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0)$$



dove y_0 e v_0 sono la posizione e la velocità a t=0

Per un corpo in caduta da una altezza *h* dal suolo, abbiamo: $y_0 = h;\ v_0 = 0$

$$0 = h - \tfrac{1}{2} g\,t_c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$ (tempo di caduta)

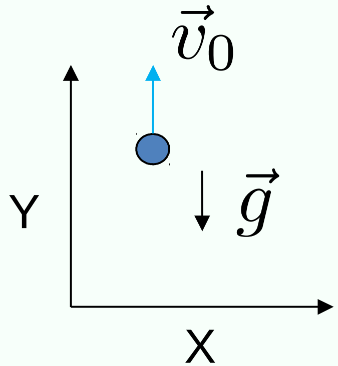
$$v_c^2 = -2g(0 - h) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_c = \sqrt{2\,g\,h}}$$ (velocità di caduta)

Accelerazione costante – moto in 1D

Se il corpo è lanciato verso l'alto con $v_0 \neq 0$, si può calcolare il tempo che impiega a raggiungere l'apice (dove $v_0=0$) e l'altezza massima raggiunta:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2;$$

$$v = v_0 - g t;$$



La velocità cambia nel tempo in modo **lineare**:

nel punto più alto si annulla e cambia verso

$$v(t_{\max}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = v_0 - g\, t_{\max} \quad \Rightarrow \quad t_{\max} = v_0/g$$

$$\Rightarrow \quad h_{\max} = h + v_0\, t_{\max} - \tfrac{1}{2} g\, t_{\max}^2$$

$$\Rightarrow \quad h_{\max} - h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Cinematica del punto materiale (II)

- *Accelerazione costante – moto 1D*
- *Accelerazione costante – moto 2D*
- *Moto dei proiettili*

Gettys

capitolo 4

Accelerazione costante – moto in 2D

In generale se l'unica forza in gioco è quella gravitazionale (forza peso), abbiamo la seguente situazione:

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\hat{j}$$

$$a_x = a_{0x} = 0$$

$$a_y = a_{0y} = -g$$

Si avranno due casi:

1) moto ***bidimensionale*** se $\vec{g} \nparallel \vec{v}_0$

2) moto ***rettilineo*** se $\vec{g} \parallel \vec{v}_0$

integriamo componente per componente

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_{0x}t = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_{0y} + a_{0y}t = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$

integriamo componente per componente

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t = x_0 + (v_0 \cos\theta)t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2 = y_0 + (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$

Accelerazione costante – moto in 2D

In generale, se l'accelerazione è costante e unidimensionale,
la legge del moto è un polinomio di ***grado 2***.

Moto rettilineo se $\vec{a}_0 \parallel \vec{v}_0$ oppure $\vec{a}_0 = 0$

Moto bidimensionale se $\vec{a}_0 \nparallel \vec{v}_0$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_0\, t^2 \quad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2 \end{cases}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{v}_0\cdot\vec{v}_0 = 2\vec{a}_0\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

Se l'accelerazione è costante, si può sempre descrivere il moto come moto bidimensionale, dove su un asse si ha accelerazione costante e sull'altro (perpendicolare al primo) accelerazione nulla.

Basta fare un cambio di sistema di riferimento:
il nuovo sistema deve avere uno degli assi parallelo ad $\vec{a}_0$

Cinematica del punto materiale (II)

- *Accelerazione costante – moto 1D*
- *Accelerazione costante – moto 2D*
- *Moto dei proiettili*

Gettys

capitolo 4

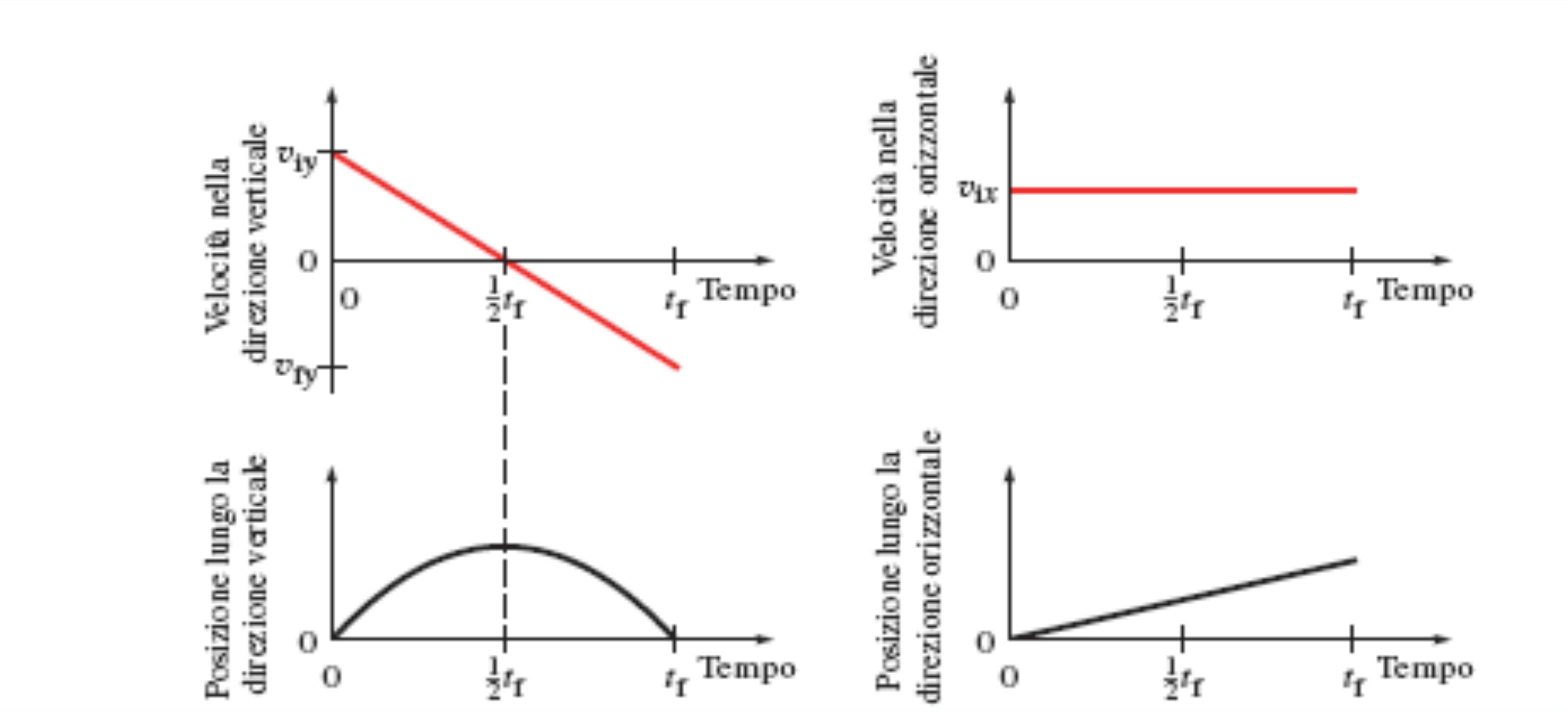
Moto del proiettile

Al Moto di un grave in 2 D si può ricondurre il caso generale di moto in presenza di forze costanti

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i \;\Rightarrow\; \vec{a}_0 = \text{cost.} \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\, t; \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_0\, t^2$$

$$\vec{a} = -g\,\hat{j}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_{0x}t = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_{0y} + a_{0y}t = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$



Il moto è una *composizione* di 1) moto rettilineo a velocità costante lungo x
2) moto con accelerazione costante lungo y.

Moto del proiettile

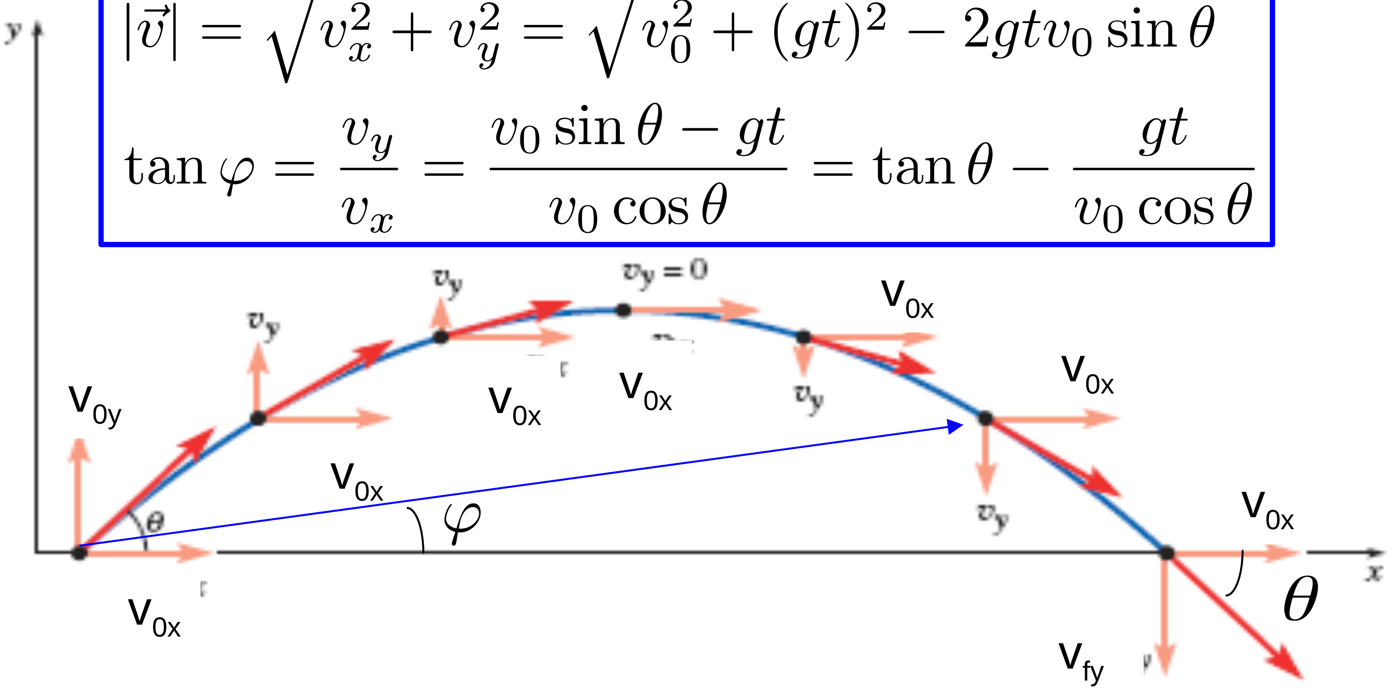
Al Moto di un grave in 2 D si può ricondurre il caso generale di moto in presenza di forze costanti

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i \;\Rightarrow\; \vec{a}_0 = \text{cost.} \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\, t; \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_0\, t^2$$

$$\vec{a} = -g\,\hat{j}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_{0x}t = v_0\cos\theta \\ v_y = v_{0y} + a_{0y}t = v_0\sin\theta - gt \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2 - 2gtv_0\sin\theta} \\ \tan\varphi &= \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0\sin\theta - gt}{v_0\cos\theta} = \tan\theta - \frac{gt}{v_0\cos\theta} \end{aligned}}$$

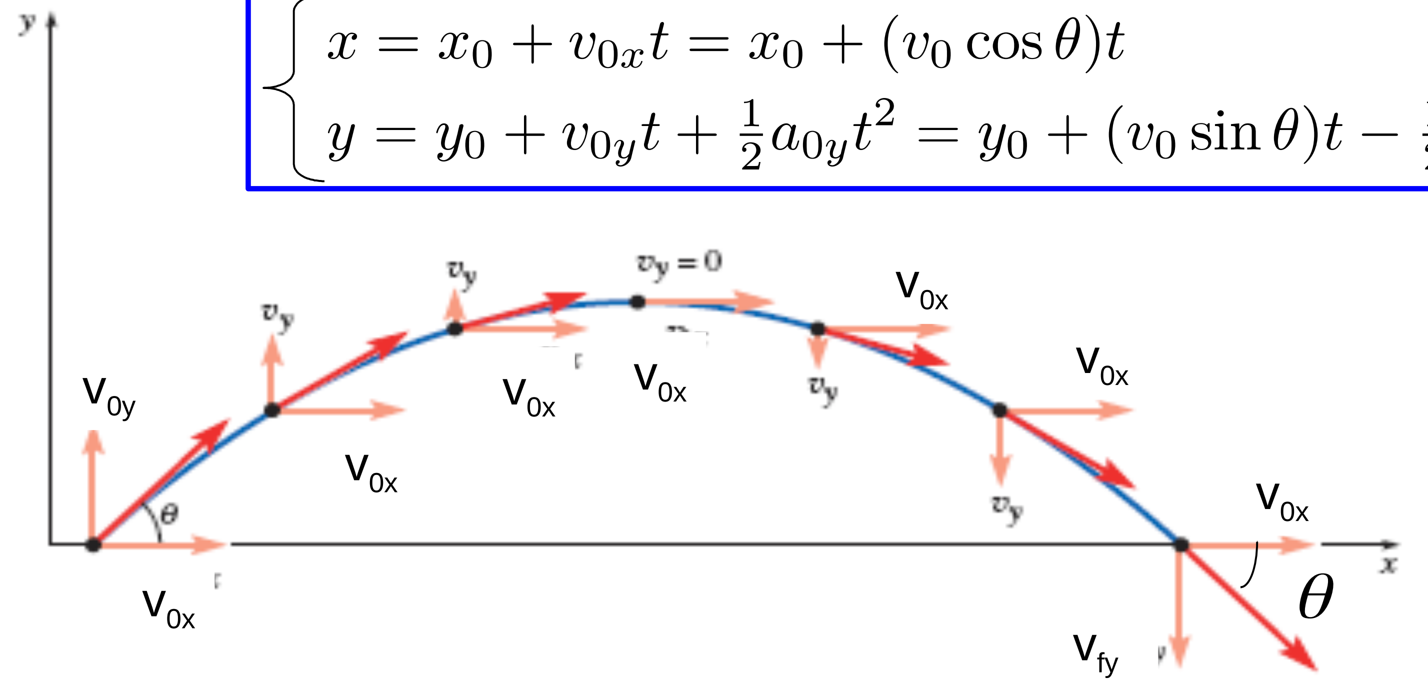


Il moto è una *composizione* di 1) moto rettilineo a velocità costante lungo x
2) moto con accelerazione costante lungo y.

Moto del proiettile

Integrando le singole componenti $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t = x_0 + (v_0 \cos\theta)t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2 = y_0 + (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$



Di solito x_0=0;

se eliminiamo t $\Rightarrow$ traiettoria y(x)

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + \tan(\theta)\,x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2$$

Traiettoria parabolica: $y(x)=ax^2+bx+c$

siccome a<0 la parabola ha la concavità verso il basso

Moto del proiettile

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t = x_0 + (v_0\cos\theta)t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2 = y_0 + (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$

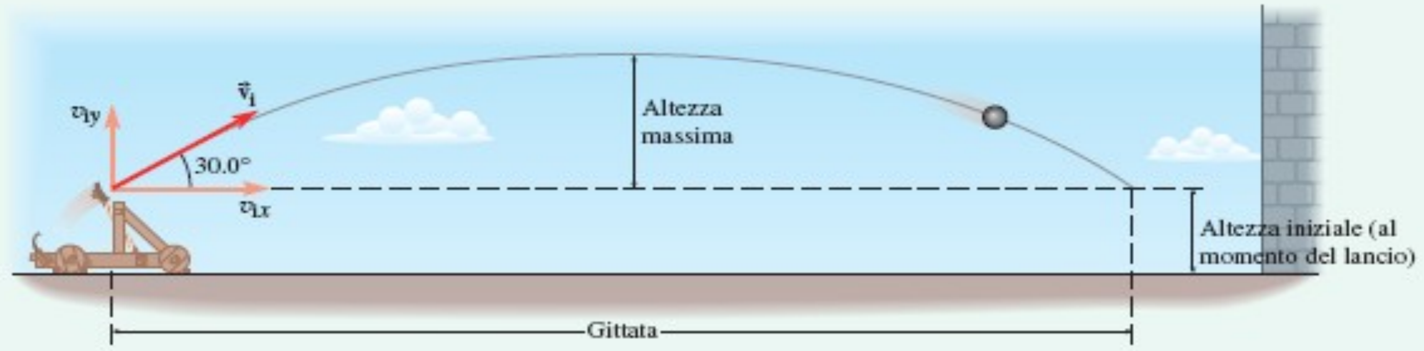


Figura 4.27
Una catapulta lancia una pietra in aria durante l'attacco alle mura del castello.

Punto più alto (y max):
È come nel caso del corpo lanciato in verticale: corrisponde al punto in cui $v_y = 0$

$$0 = v_y(t_h) = v_0\sin\theta - gt_h \quad \Rightarrow \quad t_h = \frac{v_0\sin\theta}{g}$$

$$y(t_h) = y_0 + h; \;\; h_{\max} = \frac{(v_0\sin\theta)^2}{2g}$$ è massimo per θ = 90°

Moto del proiettile

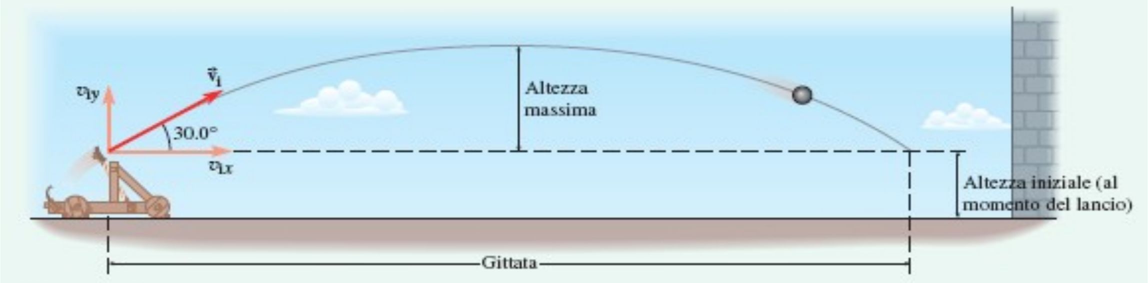
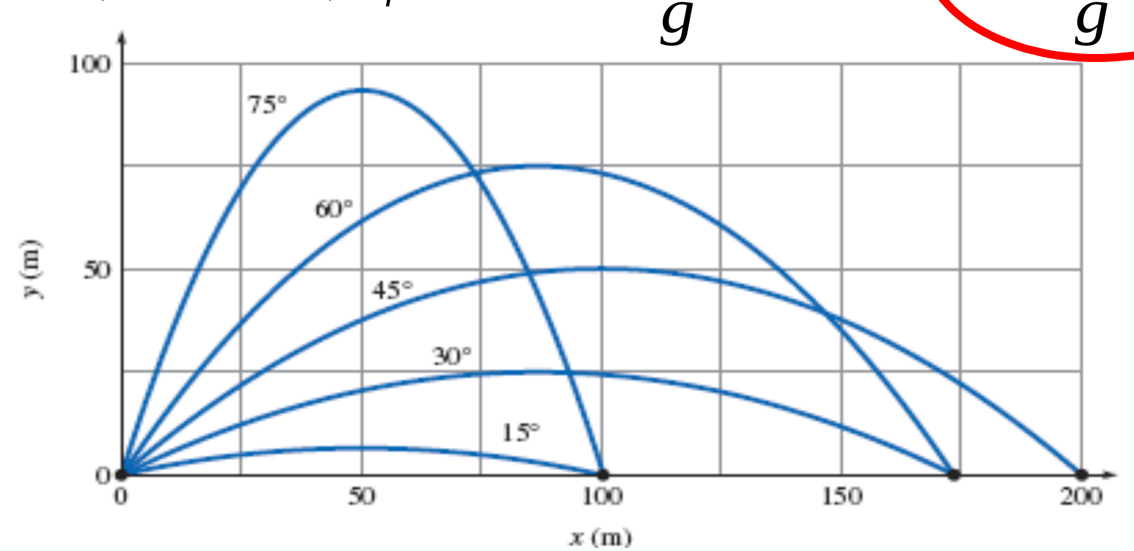


Figura 4.27
Una catapulta lancia una pietra in aria durante l'attacco alle mura del castello.

La *gittata*, è lo spazio percorso quando arriva alla stessa altezza (*intersezione della parabola con retta orizzontale x=0*)

$$y(t_f) = y_0 + (v_0 \sin\theta) t_f - \frac{1}{2} g t_f^{\,2} = y_0 \Rightarrow \begin{cases} t_f = 0 \\ t_f = \dfrac{2 v_0 \sin\theta}{g} \end{cases}$$

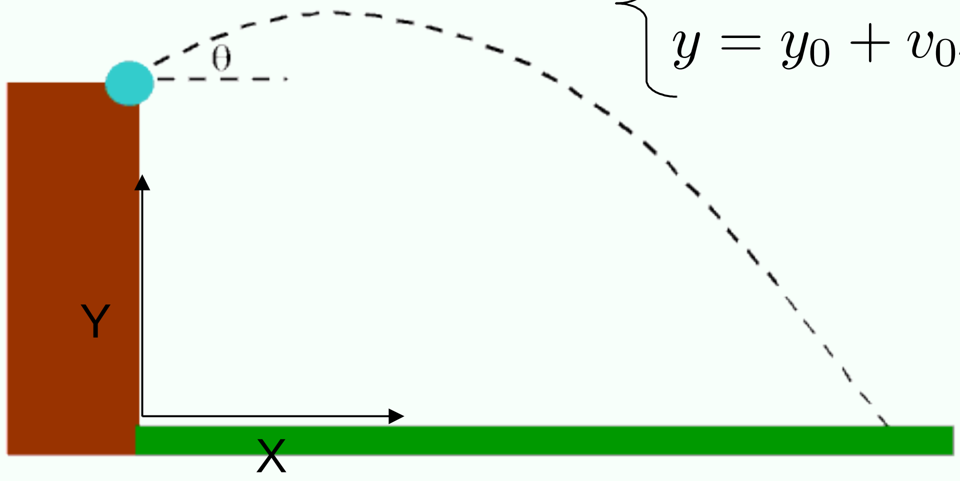
$$x = (v_0 \cos\theta)\, t_f = \frac{2 \sin\theta \cos\theta v_0^2}{g} = \frac{\sin(2\theta)\, v_0^2}{g}$$



La gittata è massima per θ = 45°

Ci sono sempre *due* scelte possibili di θ che danno la stessa gittata (a parte θ = 45°)

Moto del proiettile (dall'alto)



$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t = x_0 + (v_0\cos\theta)t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2 = y_0 + (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$

Se invece si vuole calcolare la distanza dell'impatto al suolo rispetto al piede della rampa, e la velocità di impatto al suolo, allora *l'intersezione va fatta con y=0*

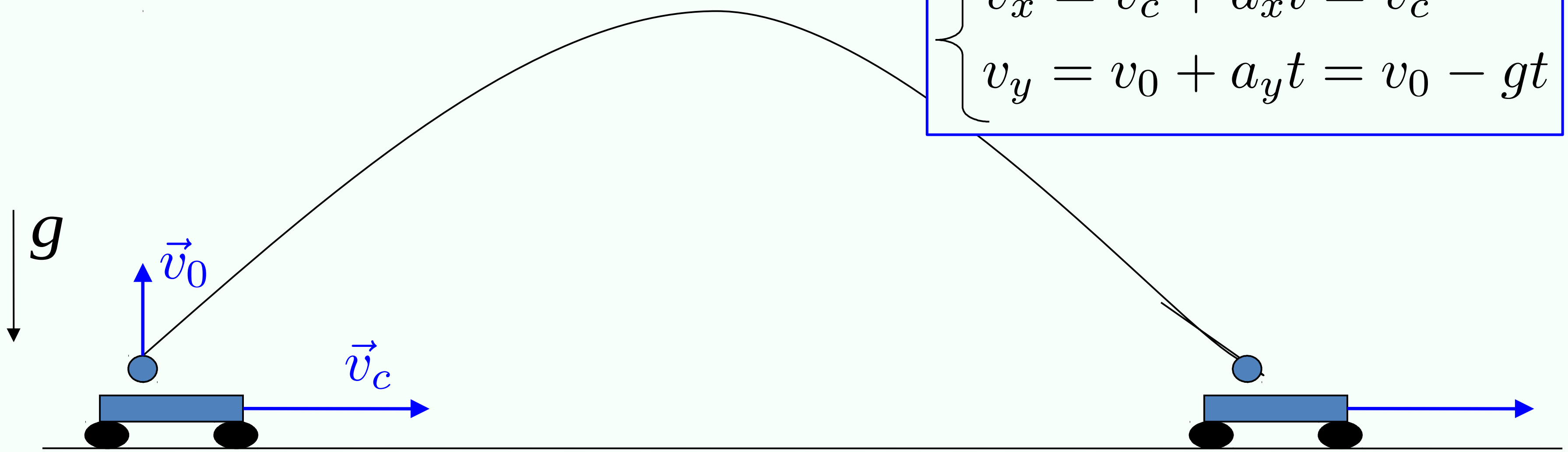
$$y(t_f) = y_0 + (v_0\sin\theta)t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$t_f = \frac{1}{g}\left(v_0\sin\theta \pm \sqrt{(v_0\sin\theta)^2 + 2gy_0}\right)$$

$$x = (v_0\cos\theta)t_f$$

Moto del proiettile (dal carrello in moto)

$$\begin{cases} v_x = v_c + a_x t = v_c \\ v_y = v_0 + a_y t = v_0 - gt \end{cases}$$

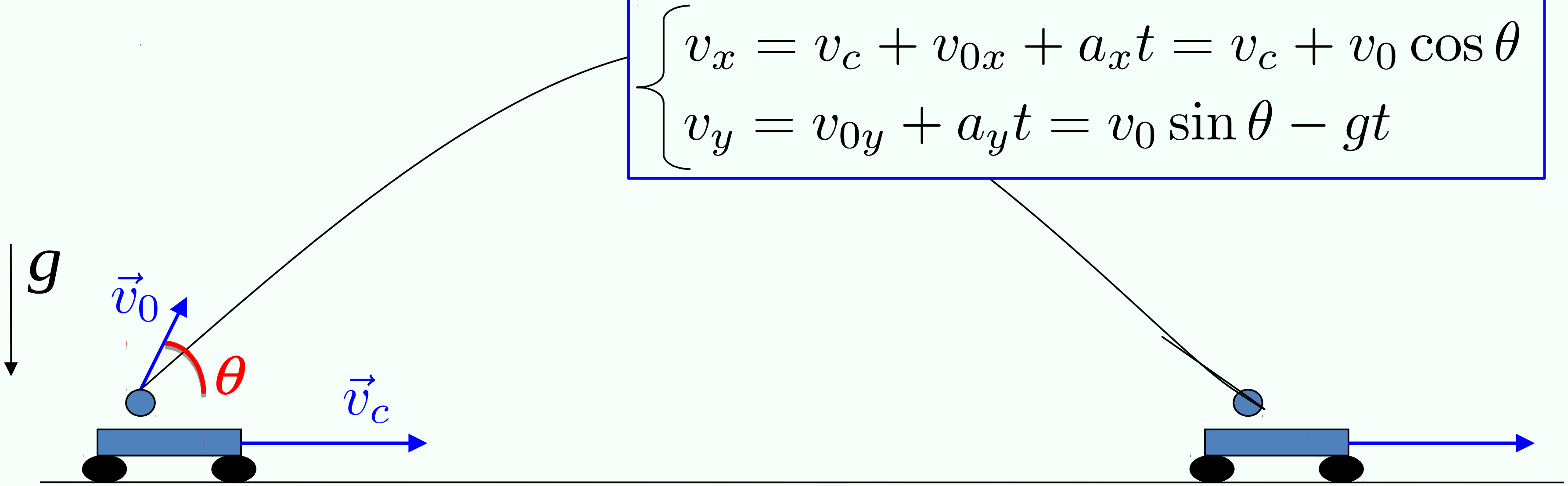


A) Il proiettile viene sparato in aria dal carrello, *perpendicolarmente ad esso*

Il moto è una *composizione* di 1) moto rettilineo uniforme lungo x
2) moto uniformemente accelerato lungo y.

Moto del proiettile (dal carrello in moto)

$$\begin{cases} v_x = v_c + v_{0x} + a_x t = v_c + v_0 \cos\theta \\ v_y = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$



B) Il proiettile viene sparato in aria dal carrello, con un'orientazione θ rispetto ad esso

Il moto è una *composizione* di 1) moto rettilineo uniforme lungo x
2) moto uniformemente accelerato lungo y.

Nota: la componente orizzontale della velocità iniziale con cui viene lanciato il proiettile va addizionata a quella del carrello

→ Il **tempo di volo** dipende *solo* dalla componente verticale v_{0y} della velocità del proiettile, e **non** dalla velocità del carrello.

→ La **gittata** dipende dalla componente orizzontale totale v_x della velocità

Tiro al bersaglio in caduta libera

Due corpi in caduta libera:
→ partenza in simultanea
→ il bersaglio parte da fermo

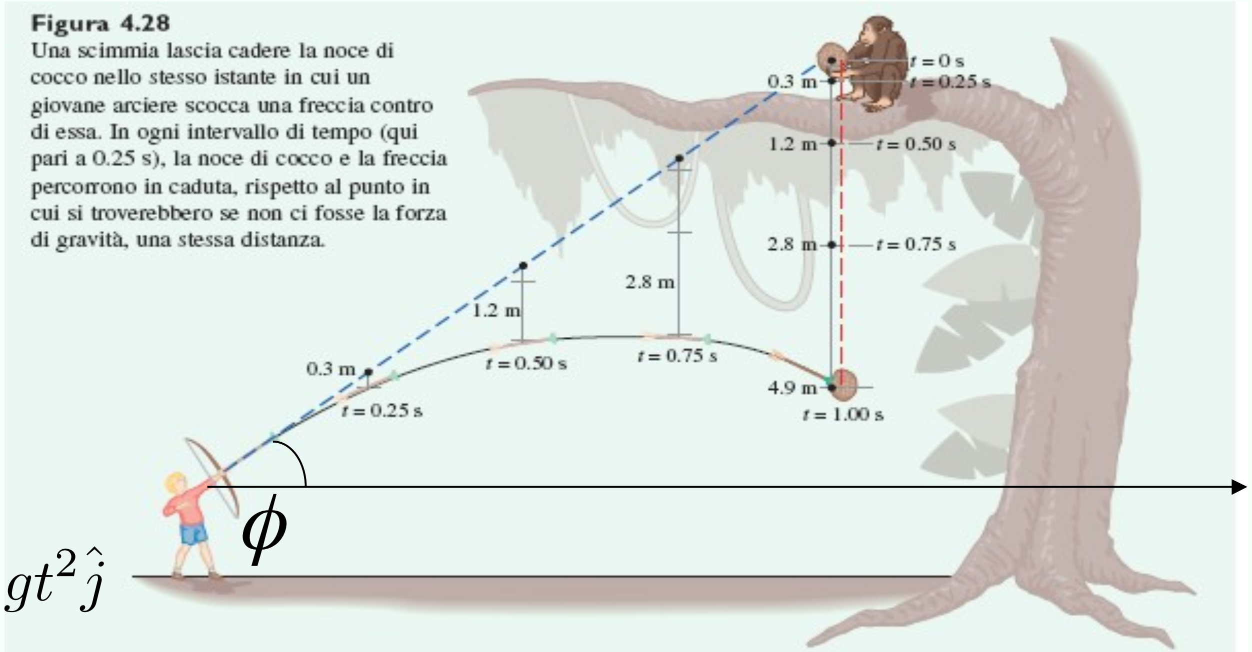


Figura 4.28
Una scimmia lascia cadere la noce di cocco nello stesso istante in cui un giovane arciere scocca una freccia contro di essa. In ogni intervallo di tempo (qui pari a 0.25 s), la noce di cocco e la freccia percorrono in caduta, rispetto al punto in cui si troverebbero se non ci fosse la forza di gravità, una stessa distanza.

freccia
$$\vec{r}_F = \vec{v}_{0F} t - \tfrac{1}{2} g t^2 \hat{j}$$

noce di cocco
$$\vec{r}_N = \vec{r}_{0N} + \cancel{\vec{v}_{0N}} t - \tfrac{1}{2} g t^2 \hat{j}$$

La condizione perché la freccia e la noce di cocco si incontrino è: $\boxed{\vec{r}_F(t_f) = \vec{r}_N(t_f)}$

Se l'arciere prende la mira a t=0, allora deve essere $\boxed{\vec{v}_{0F} \parallel \vec{r}_{0N}}$

$$\vec{r}_N - \vec{r}_F = \vec{r}_{0N} - \vec{v}_{0F} t$$

$$\Rightarrow \; t_f = \frac{|\vec{r}_{0N}|}{|\vec{v}_{0F}|}$$

Unica condizione:

t_f < tempo di caduta $t_c = \sqrt{2h/g}$