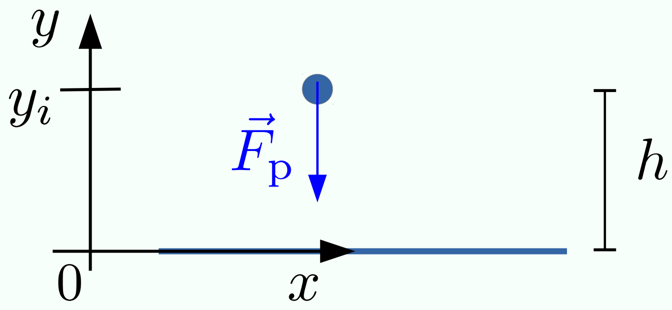
Problemi risolti con le leggi di conservazione dell’energia

Problema 1: Energia potenziale gravitazionale su superficie terrestre

Forza peso: $\vec{F}_{\mathrm{p}} = -mg\,\hat{j}$



Calcoliamo lavoro e energia potenziale:

$$L = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{\mathrm{p}} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \overbrace{(F_{\mathrm{p}})_x}^{0} dx + (F_{\mathrm{p}})_y\, dy = \int_{y_i}^{y_f} (F_{\mathrm{p}})_y dy = -mg(y_f - y_i)$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -L_g = mg(y_f - y_i)$$

Nella caduta di un grave che parte da fermo, trovare la velocità finale:

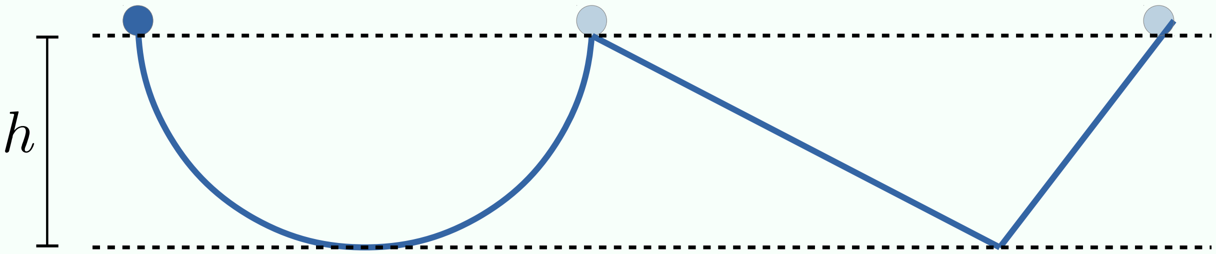
$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2} m v_f^2$$

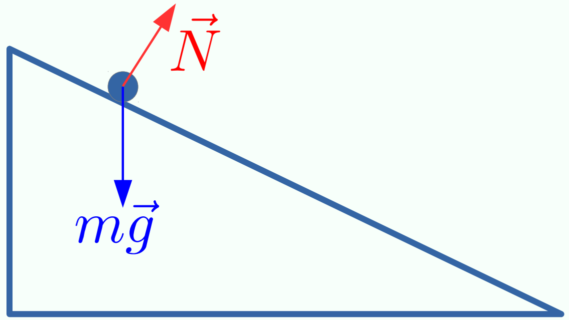
$$0 = \Delta U + \Delta K = mg(y_f - y_i) + \tfrac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_f =} \sqrt{2g(y_i - y_f)} \boxed{= \sqrt{2gh}}$$

Problema 2: Energia potenziale gravitazionale su superficie terrestre + vincoli

Forza peso: $\vec{F}_{\mathrm{p}} = -mg\,\hat{j}$





Calcoliamo il lavoro e l'energia potenziale

In presenza di vincoli lisci si ha lo stesso risultato che per la caduta libera: l'altra forza in gioco, quella *normale*, *non fa **mai** lavoro*. [es. piano inclinato, guida o piano liscio]

La differenza di energia dipende solo dalla differenza di quota e la velocità finale è sempre la stessa v_f di cui sopra.

$$L = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} (\vec{F}_{\mathrm{p}} + \vec{N}) \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{\mathrm{p}} \cdot d\vec{s} + \underbrace{\vec{N} \cdot d\vec{s}}_{0} = \int_{y_i}^{y_f} (F_{\mathrm{p}})_y \, dy = -mg(y_f - y_i)$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -L_g = mg(y_f - y_i)$$

Nella caduta di un grave che parte da fermo: $\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m v_f^2$

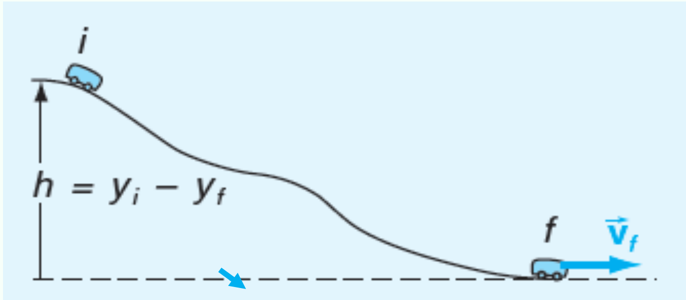
$$0 = \Delta U + \Delta K = mg(y_f - y_i) + \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{2g(y_i - y_f)} = \sqrt{2gh}$$

Negli esercizi di prima vale anche l'inverso: partendo da una quota più bassa con velocità iniziale non nulla, si può risalire la rampa fino ad una quota massima *h*, arrivando con velocità nulla.

Problema 3:

Uno sciatore di massa *m* = 80 kg scivola senza attrito lungo un declivio composto da varie discese, fino ad arrivare in pianura dopo aver compiuto un dislivello *h* = 60 m.

Se è partito con velocità iniziale in modulo v_0=0.5 m/s, con che velocità finale v_f arriva?



F_{peso} è conservativa, i vincoli non fanno lavoro

non c'è attrito → l'energia meccanica si conserva

$$\boxed{0 = \Delta(U + K)} \qquad K_f - K_i = U_i - U_f$$

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = mg(y_i - y_f) = mgh \;\Rightarrow\; v_f = \sqrt{v_i^2 + 2gh} = 34\,m/s$$

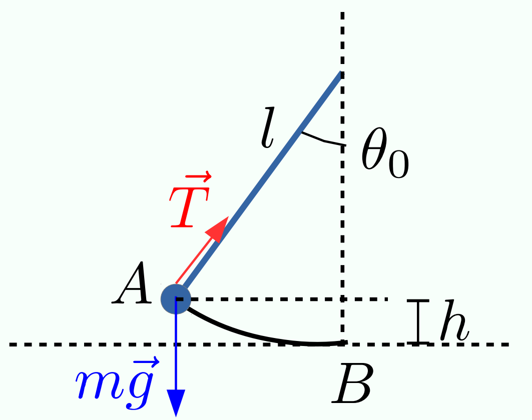
Se invece ci fosse attrito, e supponessimo che $v_f = 2\ m/s$, quanto sarebbe il lavoro della forza di attrito? $\boxed{L_{\text{attrito}} = L_{\text{N.C.}} = \Delta(U + K)}$

$$L_{\text{attrito}} = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) - mgh = -46.7\,kJ$$

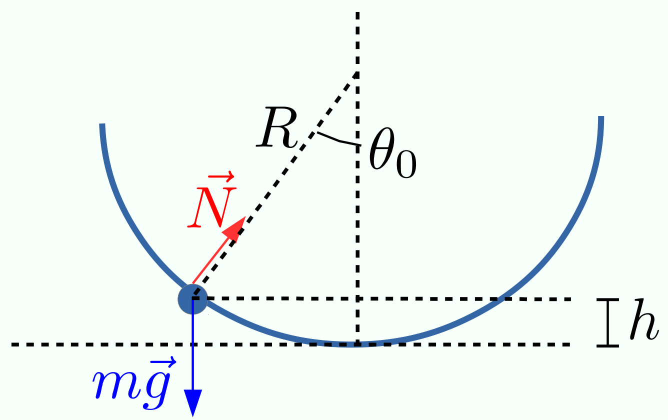
NB: la forza di attrito dinamico durante la discesa varia in direzione e modulo.
Perciò, anche sapendo la distanza percorsa, non sarebbe possibile calcolarne direttamente il lavoro.

Problema 4. Pendolo (o calotta semicircolare).

Un corpo di massa *m*, appeso ad un filo ideale, viene lasciato libero da una posizione in cui è spostato rispetto alla verticale di un angolo θ_0. A che velocità passa per la verticale? (il problema è analogo al moto dentro una calotta semicircolare liscia).



$$U_A + K_A = U_B + K_B$$



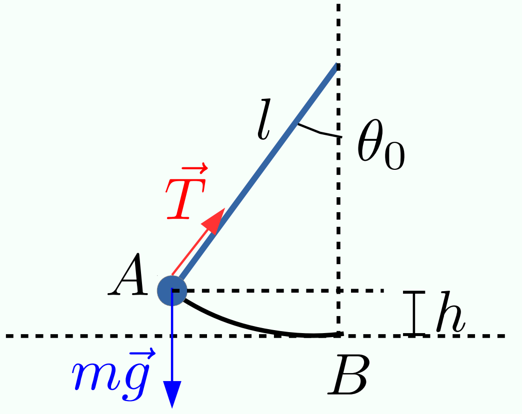
qui $\vec{N}$ sostituisce $\vec{T}$

$$h_A = l - l\cos\theta_0 = l(1-\cos\theta_0)$$

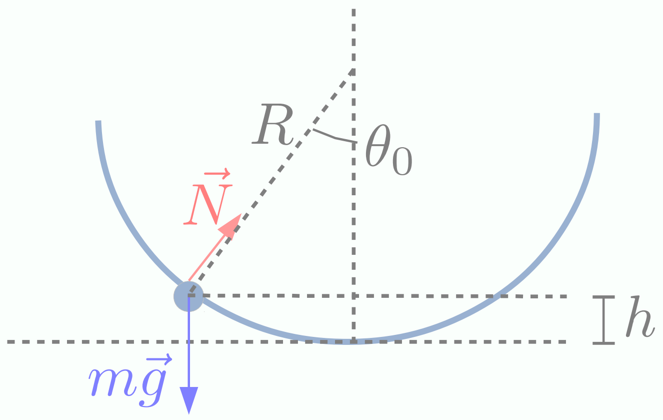
$$mgh_A = mgl(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_B^2 \;\Rightarrow\; \boxed{v_B = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}}$$

Problema 4. Pendolo (o calotta semicircolare).

Un corpo di massa *m*, appeso ad un filo ideale, viene lasciato libero da una posizione in cui è spostato rispetto alla verticale di un angolo θ_0. A che velocità passa per la verticale? (il problema è analogo al moto dentro una calotta semicircolare liscia).



$$U_A + K_A = U_B + K_B$$



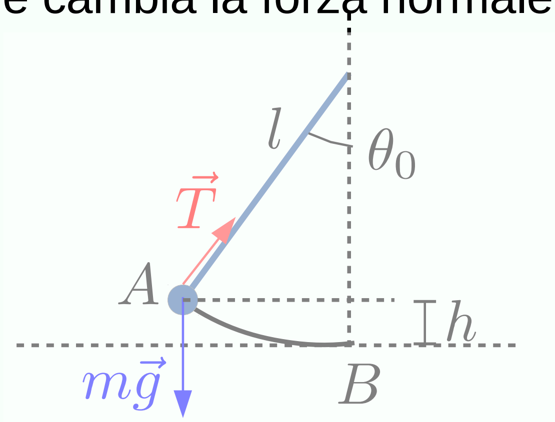
In generale, in un punto *P* qualunque (corrispondente ad un angolo θ) si ha:

$$mgl(1-\cos\theta_0) = mgl(1-\cos\theta) + \tfrac{1}{2}mv^2 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

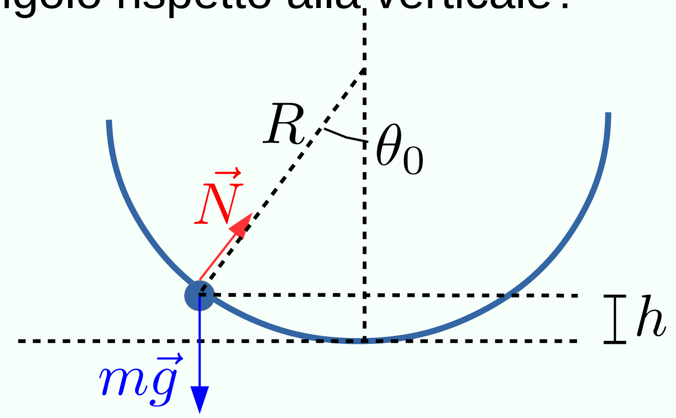
Se si volesse conoscere la tensione *T* (o la forza normale nel caso della calotta sferica) al variare dell'angolo, basta applicare la seconda legge della dinamica.

$$\begin{cases} ma_R = -mv^2/l = -T + mg\cos\theta \\ ma_T = mg\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &T = mg\cos\theta + 2mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)/l \\ &\theta = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{T = mg + 2mg(1-\cos\theta_0)} \end{aligned}$$

Discesa lungo calotta semicircolare: Un corpo di massa *m* scivola senza attrito lungo il profilo circolare della calotta sferica, lasciato libero in condizioni di quiete partendo da un punto *A* che si trova spostato rispetto alla verticale di un angolo θ_0.
Con che velocità il corpo passa per il punto più basso della calotta?
Come cambia la forza normale *N* al variare dell'angolo rispetto alla verticale?



$$U_A + K_A = U_B + K_B$$



qui $\vec{N}$ sostituisce $\vec{T}$

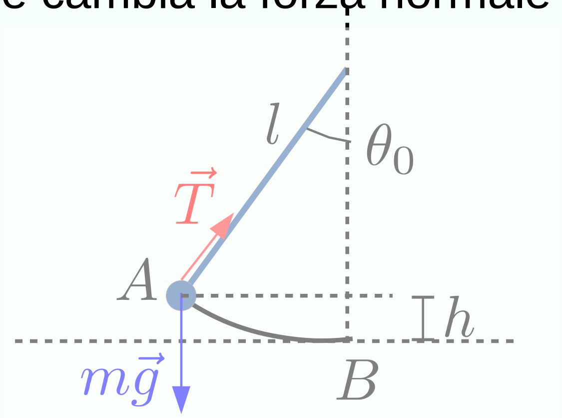
Le forze che fanno lavoro sono conservative (*N* è perpendicolare alla velocità e non fa lavoro)
→ l'energia meccanica in *A* è uguale a quella nel punto che si trova nel punto più basso

La relazione fra quota e angolo è data da: $h_A = R - R\cos\theta_0 = R(1-\cos\theta_0)$

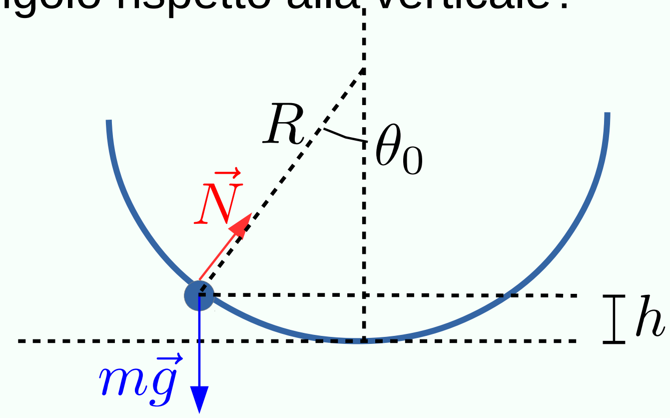
$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgh_A = mgR(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_b = \sqrt{2gR(1-\cos\theta_0)}$$

Discesa lungo calotta semicircolare: Un corpo di massa *m* scivola senza attrito lungo il profilo circolare della calotta sferica, lasciato libero in condizioni di quiete partendo da un punto *A* che si trova spostato rispetto alla verticale di un angolo θ_0.
Con che velocità il corpo passa per il punto più basso della calotta?
Come cambia la forza normale *N* al variare dell'angolo rispetto alla verticale?



$$U_A + K_A = U_B + K_B$$



qui $\vec{N}$ sostituisce $\vec{T}$

In generale, in un punto *P* qualunque (corrispondente ad un angolo θ) si ha:

$$mgR(1-\cos\theta_0) = mgR(1-\cos\theta) + \tfrac{1}{2}mv^2 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2gR(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Se si volesse conoscere la forza normale *N* al variare dell'angolo,
basta applicare la seconda legge della dinamica.

$$\begin{cases} ma_R = -mv^2/R = -N + mg\cos\theta \\ ma_T = mg\sin\theta \end{cases}$$

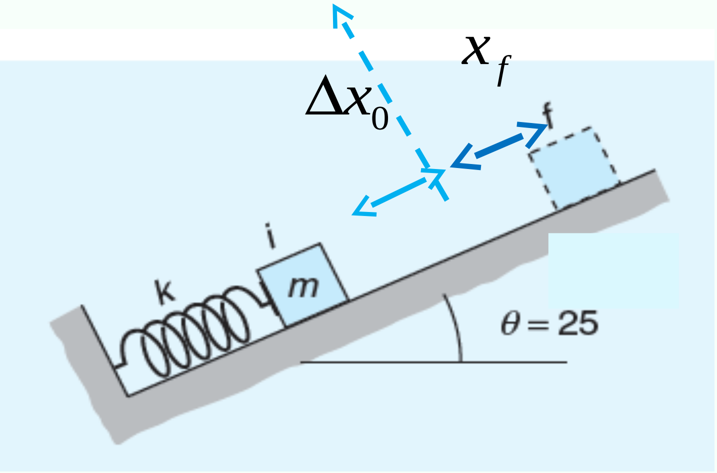
$$N = mg\cos\theta + 2mgR(\cos\theta - \cos\theta_0)/R$$

$$\theta = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{N = mg + 2mg(1-\cos\theta_0)}$$

Problema 5: Molla e piano inclinato

Una molla compressa di Δx_0, lasciata libera all'istante $t = 0$, lancia una massa *m* lungo un piano inclinato liscio (angolo θ). Calcolare:

1) La velocità non appena lasciata la molla
2) La massima distanza rispetto alla posizione iniziale



F_{peso} conservativa, $F_{elastica}$ conservativa (ci sono due energie potenziali)

I vincoli non fanno lavoro, non c'è attrito → l'energia meccanica si conserva.

Prendiamo come riferimento *U* = 0 il punto in cui la molla è a riposo.

$$\Delta(U + K) = 0 \;\Rightarrow\; U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$(U_{\text{peso}})_i = mg(-\Delta x_0 \sin\theta); \quad (U_{\text{molla}})_i = \tfrac{1}{2}k(\Delta x_0)^2; \quad K_i = 0$$

1) Quando passa per il punto di riposo della molla ($U_1 = 0$)

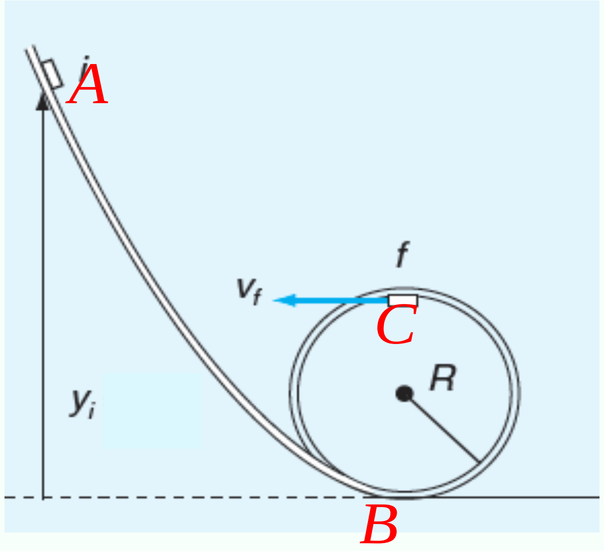
$$\tfrac{1}{2}k(\Delta x_0)^2 - mg\Delta x_0 \sin\theta = \tfrac{1}{2}mv_1^2 \;\Rightarrow\; v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}(\Delta x_0)^2 - 2g\Delta x_0 \sin\theta}$$

2) La massima distanza

$$\tfrac{1}{2}k(\Delta x_0)^2 - mg\Delta x_0 \sin\theta = mgx_f \sin\theta \;\Rightarrow\; \boxed{x_f = \frac{k(\Delta x_0)^2}{2mg \sin\theta} - \Delta x_0}$$

Problema 6: Ottovolante e «giro della morte»
Un corpo di massa *m* parte da fermo dall'estremità di una rampa alla fine della quale c'è un anello circolare di raggio *R*.

Da che altezza deve partire per poter percorrere tutto l'anello senza staccarsi?



Le forze o sono conservative o non fanno lavoro.
→ quindi *E* si conserva.

$$\Delta E = \Delta(U+K) = 0 \ \Rightarrow\ U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv_B^2 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + mg(2R)$$

Perché non si stacchi mai deve valere la relazione del moto circolare uniforme:

$$ma_R = -m\frac{v_C^2}{R} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_R = -N - mg \ \Rightarrow\ \frac{v_C^2}{R} = \frac{N}{m} + g$$

La v_C minima per non cadere è quando $N = 0$

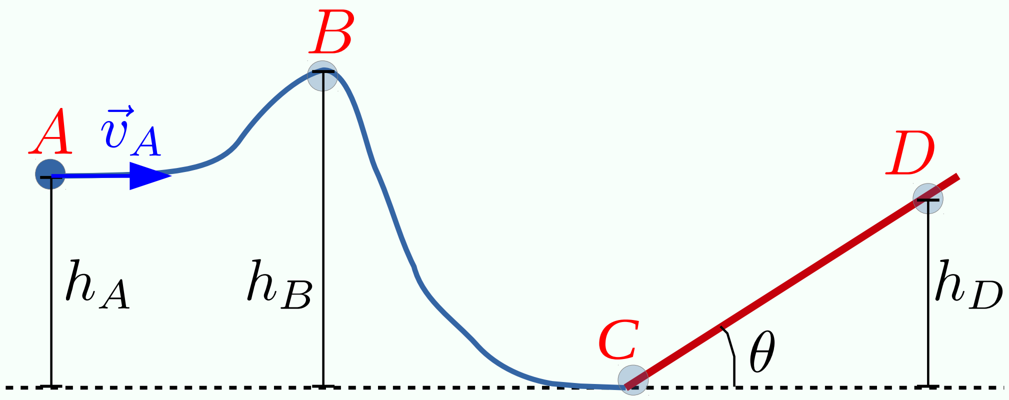
Sostituendo nella conservazione dell'energia: $v_C^2 = Rg$

$$mgh_{\min} = 2mgR + \tfrac{1}{2}mv_C^2 = 2mgR + \tfrac{1}{2}mgR = \tfrac{5}{2}mgR \ \Rightarrow\ \boxed{h_{\min} = \tfrac{5}{2}R}$$

Problema 7

Un corpo di massa *m* scivola lungo una guida liscia partendo con velocità v_A e percorre il tratto *ABC* in figura.

In seguito sale su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, con coefficiente di attrito dinamico μ_d.



Trovare la velocità in *B*; la velocità in *C*;
l'altezza finale h_D rispetto al punto più basso della traiettoria.

In tutto il tratto da *A* a *C* l' energia meccanica si conserva.
Da *C* a *D* lavorano anche forze non conservative (attrito).

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \;\Rightarrow\; v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g(h_A - h_B)}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C \;\Rightarrow\; v_C = \sqrt{v_A^2 + 2gh_A}$$

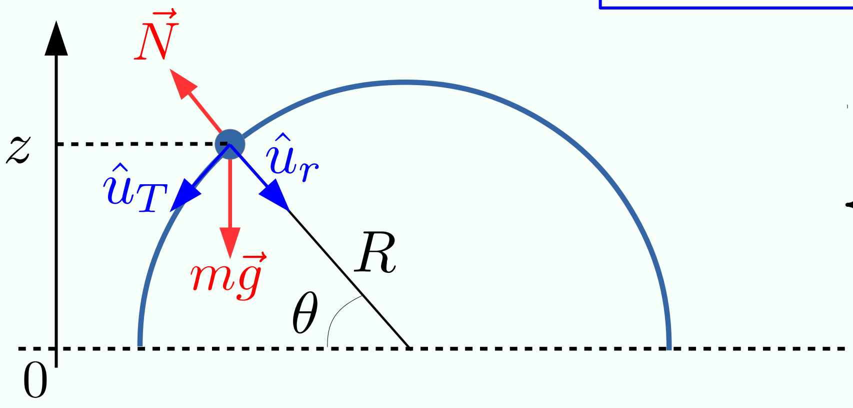
$$E_D - E_C = L_{\mathrm{FNC}} = -f_d d = -f_d\frac{h_D}{\sin\theta} = -\mu_d mg\,\cos\theta\frac{h_D}{\sin\theta} = -\mu_d mg\frac{h_D}{\tan\theta}$$

$$mgh_D - \frac{1}{2}mv_C^2 = -\mu_d mg\frac{h_D}{\tan\theta} \;\Rightarrow\; \boxed{h_D = \frac{v_C^2}{2g(1+\frac{\mu_d}{\tan\theta})}}$$

Problema 8

Un corpo scivola lungo una calotta semisferica senza attrito, partendo da fermo.
A che altezza si stacca?

Finché sta attaccato il moto è circolare (non uniforme)



$$\begin{cases} m\, a_r = -m\frac{v^2}{R} = -mg\sin\theta + N & \text{(*)} \\ m\, a_T = mg\cos\theta & \text{(**)} \end{cases}$$

L'*energia meccanica si conserva* (non c'è attrito). $(z = R\sin\theta)$

$$mgR = mgz + \tfrac{1}{2}mv^2 = mgR\sin\theta + \tfrac{1}{2}mv^2 \;\Rightarrow\; v^2 = 2gR(1-\sin\theta)$$

da (*) si ha: $\dfrac{v^2}{R} = g\sin\theta - \dfrac{N}{m} \;\Rightarrow\; \dfrac{2gR(1-\sin\theta)}{R} = g\sin\theta - \dfrac{N}{m}$

$$\boxed{\theta_c : \quad N = 0} \Rightarrow\; 2g(1-\sin\theta_c) = g\sin\theta_c \Rightarrow \sin\theta_c = \tfrac{2}{3} \;\Rightarrow\; \theta_c \approx 41.8^\circ$$

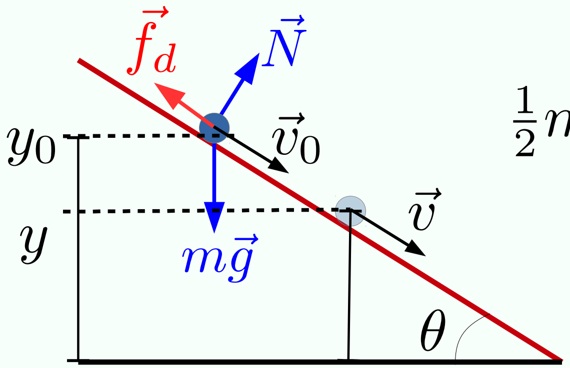
Problema 9

Un corpo su un piano inclinato scabro (con coefficiente di attrito dinamico μ_d) parte con velocità v_0 diretta verso il basso.

Come cambia la velocità durante il moto?
Quali sono le relazioni per avere velocità che cresce, diminuisce o è costante?

Vale il teorema dell'energia generalizzato:

$$\Delta(U+K) = L_{\text{N.C.}} = -f_d d = -f_d \frac{y_0 - y}{\sin\theta}$$



$$f_d = \mu_d mg\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy - \frac{1}{2}mv_0^2 - mgy_0 = -mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mu_d(y_0 - y)$$

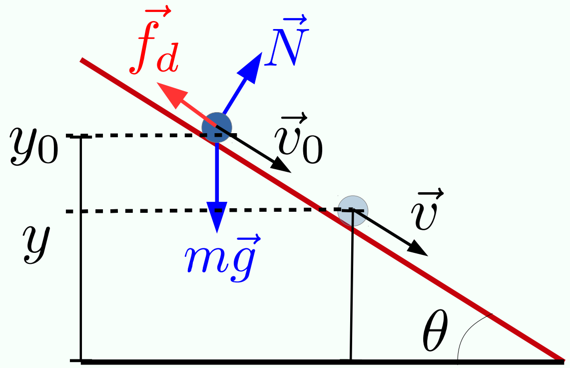
$$v^2 + 2gy - v_0^2 - 2gy_0 = -2g\mu_d\frac{y_0 - y}{\tan\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y)\left[1 - \frac{\mu_d}{\tan\theta}\right]}$$

Problema 9

Un corpo su un piano inclinato scabro (con coefficiente di attrito dinamico μ_d) parte con velocità v_0 diretta verso il basso.

Come cambia la velocità durante il moto?
Quali sono le relazioni per avere velocità che cresce, diminuisce o è costante?



$$v^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y)\left[1 - \frac{\mu_d}{\tan\theta}\right]$$

(A) Se l'attrito è grande, il termine di destra è negativo.
Perciò al diminuire della quota, v diminuisce finché ***il corpo si ferma***

(B) Se l'attrito non è così grande, o l'inclinazione è sufficientemente grande, il termine a destra è positivo. Dunque ***la velocità aumenta***

(C) Se $\mu_d = \tan\theta$, allora il termine di destra è zero.
La forza di attrito e la componente della forza peso si equilibrano $\Rightarrow$ ***v è costante***

K = cost.; *U* diminuisce e si trasforma in energia termica,
per effetto del lavoro fatto dalle forze dissipative