open green road

Guía Matemática

RAZONES Y PROPORCIONES

tutora: Jacky Moreno

puntaje nacional.co

1. Razones

Al resolver distintos problemas matemáticos nos acostumbramos a relacionar dos o más cantidades mediante las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación o división. La noción de razón surge a partir de la comparación entre dos números, en particular nos permiten averiguar qué número es mayor a través de la diferencia existente entre ambos, o bien, nos permite saber cuántas veces el mayor número contiene al menor a través del cuociente. En base a esto es que estudiaremos dos tipos de razones: la aritmética y la geométrica.

*Llamamos **razón** a la comparación de dos cantidades.*

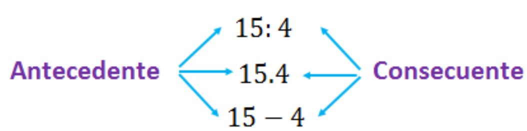
1.1. Razón Aritmética

Corresponde a la comparación de dos cantidades a través de la diferencia entre ellas, lo que nos permite conocer cuánto excede una cantidad a la otra. Este tipo de razón se puede escribir separando las cantidades con un punto $(\cdot)$ o con un signo menos $(-)$. Así, la razón aritmética entre 7 y 3 se escribe 7.3 o $7-3$ y se lee “7 es a 3”.

1.2. Razón Geométrica

Corresponde a la comparación de dos cantidades a través del cuociente entre ambas. Este tipo de razón nos permite conocer cuántas veces contiene una cantidad a la otra y se puede escribir agregando entre las dos cantidades un signo de división (:) o una línea horizontal que separe las cantidades en forma de fracción. Así, la razón geométrica entre 4 y 9 se escribe $4:9$ o $\dfrac{4}{9}$ y se lee “4 es a 9”.

En una razón se pueden identificar dos términos: Antecedente, que corresponde al primer término, y el consecuente que corresponde al otro término.



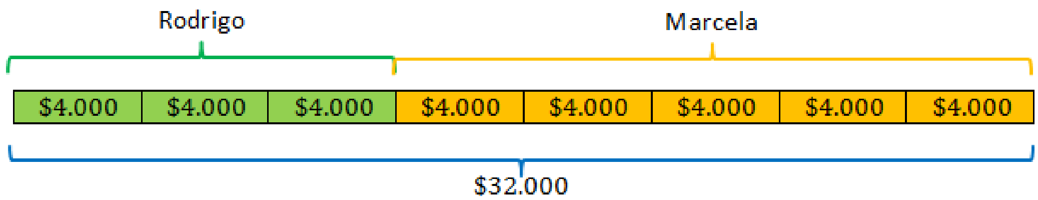
Cuando hablemos de razón nos estamos refiriendo a una razón geométrica.

✎ ***Ejemplo***

Rodrigo y Marcela fueron al casino y ganaron \$32.000*. Si deciden repartirlo en base a la razón* $3:5$ *¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?*

Solución: El dinero se reparte de acuerdo a la razón geométrica $3:5$, lo que significa que por cada 3 unidades que posea Rodrigo, Marcela posee 5.
De acuerdo a lo anterior lo primero que debemos hacer es dividir el monto total en 8 partes iguales de las cuales 3 son para Rodrigo y 5 son para Marcela.

$$32.000 : 8 = 4.000$$



Finalmente Rodrigo recibe \$12.000 y Marcela \$20.000.

✍ *Ejercicios* **1**

Resolver los siguientes ejercicios

1. Si una familia está compuesta por 30 personas de las cuales 12 son menores de edad. ¿Cuál es la razón entre las personas menores de edad y las mayores de edad respectivamente?
2. Si el consecuente de la razón $\frac{63}{144}$ se disminuye en 4 unidades y el antecedente se aumenta en 5 unidades, ¿Cuál es la nueva razón?
3. Un obrero necesita $180\,[m^3]$ de concreto para reparar una vereda. Si el concreto que se utiliza está formado por 5 partes de arena y 10 de cemento. ¿Cuántos m^3 de arena y cemento ocupó para reparar la vereda?
4. Al momento de casarse las edades de María Paz y Pedro estaban en la razón $\frac{7}{8}$. Veinticuatro años después, esa razón pasó a ser de $\frac{11}{12}$. ¿Qué edad tenía cada uno al casarse?
5. La razón entre dos números es $\frac{3}{5}$. Si al mayor se le restan 10 y al menor se le suman 8, se obtiene una razón inversa a la original. ¿Cuáles son los números?
6. Si la razón geométrica entre dos números es $\frac{1}{2}$ y su razón aritmética es de 28, ¿cuál es el valor del número mayor?

2. Proporciones

La noción de proporción nace a partir de identificar la igualdad entre dos razones. Por ejemplo, al decir “mi curso está formado por 20 mujeres y 24 hombres” se puede escribir la razón entre las mujeres y los hombres como $\dfrac{20}{24}$, pero también podríamos decir que la razón es de $\dfrac{5}{6}$. En este caso ambas razones están expresando lo mismo, ya que la última es la máxima simplificación de la primera razón y por lo tanto son equivalentes.

*Llamaremos **proporción** a la igualdad de dos razones.*

Una proporción se puede escribir como $\frac{10}{16} = \frac{45}{72}$ ó $10 : 16 = 45 : 72$ y se lee " 10 es a 16 como 45 es a 72". El cuociente que resulta al dividir 10 por 16 o 45 por 72 se le denomina constante o factor de proporcionalidad.

$$\frac{10}{16} = \frac{45}{72} = \text{constante de proporcionalidad}$$

De forma general:

$$\boxed{\frac{a}{b} = k\,, \quad k = \text{constante de proporcionalidad}}$$

Dentro de toda proporción se pueden identificar dos elementos: los extremos y los medios.

Medios

$$30 : 22 = 45 : 33$$

Extremos

2.1. Propiedades de las proporciones

A continuación mostramos una serie de propiedades que cumplen las proporciones que fueron presentadas en el quinto libro de los elementos de Euclides alrededor del año 300 a.C:

- En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $b, d \neq 0$. Por ejemplo:

$$\frac{2}{6} = \frac{5}{15} \Longrightarrow 2 \cdot 15 = 6 \cdot 5 \Longrightarrow 30 = 30$$

- Las proporciones no se alteran al permutar medio y/o extremos.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Longleftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$. Por ejemplo:

$$\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$$
$$\frac{3}{9} = \frac{6}{18}$$
$$\frac{9}{9} = \frac{18}{6}$$

Las tres expresiones anteriores corresponden a la misma proporción, puesto que $3 \cdot 18 = 9 \cdot 6 = 54$.

- Otras propiedades:

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a \cdot x}{b \cdot y} = \dfrac{c \cdot x}{d \cdot y}$
2. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ y $\dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} \Longleftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{e}{f}$
3. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$ y $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{c+d}{c}$
4. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$ y $\dfrac{a-b}{a} = \dfrac{c-d}{c}$
5. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$ con $a \neq b$ y $c \neq d$
6. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} \Longleftrightarrow \dfrac{a+c+e}{b+d+f} = \dfrac{a}{b}$

✎ ***Ejemplo***

Las edades de dos personas están en la razón $4:11$. *Si juntos suman* 60 *años. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Solución: Designamos con la letra x la edad de la primera persona y con la letra y la de la segunda, de acuerdo a los datos entregados por el ejercicio tenemos que:

$$x + y = 60 \tag{1}$$

Por lo tanto, ocupando la propiedad 3 de las proporciones tenemos:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{11} \Longrightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{4+11}{11} \tag{2}$$

Reemplazamos (1) en la igualdad (2):

$$\frac{60}{y} = \frac{15}{11} \Longrightarrow 60 \cdot 11 = 15 \cdot y \Longrightarrow y = \frac{660}{15}$$

$$\therefore\ y = 44$$

Para calcular la edad de la persona 1 basta sustituir en la ecuación (1) el valor encontrado para y de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x + 44 &= 60 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Finalmente las edades de las personas corresponden a 44 años y 16 años.

✍ Ejercicios **2**

Utilizando las propiedades de las proporciones desarrolle los siguientes ejercicios:

1. A un concierto asistieron 235 personas. Si habían 3 hombres por cada 2 mujeres, entonces ¿cuántos hombres asistieron?
2. La razón entre los kilos de comida y la cantidad de personas que se pueden alimentar en un día es de 12 : 28. Si hay que alimentar a 258 personas, ¿cuántos kilos de comida se necesitan?
3. La razón entre dos números es de $\frac{17}{6}$ y su diferencia es de 165. ¿Cuánto vale su suma?
4. La medida de los ángulos interiores de un triángulo están en la razón 2 : 3 : 4. ¿Cuál es la medida de los ángulos?
5. Las edades de 3 hermanas son entre sí como 3 : 5 : 9. Si sus edades juntas suman 85 años, ¿cuál es la edad de cada una de las hermanas?
6. Se tiene un mapa trazado a una escala 1 : 1000, ¿cuál es la distancia real de dos ciudades que sobre el mapa distan 30 $[cm]$?
7. La suma y la diferencia de dos números están en razón de 4 es a 7. Hallar el número mayor sabiendo que el menor es 9.

2.2. Proporción Directa

La proporcionalidad directa hace referencia aquellas situaciones en donde comparamos, a través de una razón, dos variables de tal forma que al aumentar o disminuir una de estas la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción. Por ejemplo, un taxi cobra una tarifa de \$100 por cada 200 $[m]$ que recorre (sin considerar la tarifa base). Ante tal situación podemos ver que las variables "costo" y "distancia" se relacionan de forma directa, ya que al aumentar los metros recorridos también aumenta el precio del viaje en taxi y viceversa. La particularidad que tienen estas dos variables al relacionarse de forma directa es que su razón es constante:

Los 50 metros recorridos nos cuesta \$25:

$$\frac{Metros\ Recorridos}{Precio} = \frac{50}{25} = 2$$

Los 100 metros recorridos nos cuesta \$50:

$$\frac{Metros\ Recorridos}{Precio} = \frac{100}{50} = 2$$

Los 200 metros recorridos nos cuesta \$100:

$$\frac{Metros\ Recorridos}{Precio} = \frac{200}{100} = 2$$

Los 400 metros recorridos nos cuesta \$200:

$$\frac{Metros\ Recorridos}{Precio} = \frac{400}{200} = 2$$

Los 600 metros recorridos nos cuesta \$300:

$$\frac{Metros\ Recorridos}{Precio} = \frac{600}{300} = 2$$

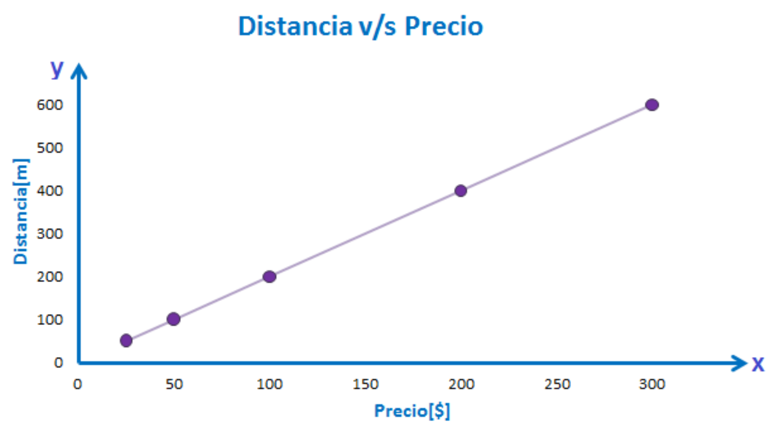
En este caso al dividir la variable “costo” por la variable “distancia”, la constante de proporcionalidad corresponde a 2 y es siempre la misma, independiente si disminuyen o aumentan las variables, pues lo hacen en la misma proporción.

En general, **si y es directamente proporcional a x entonces la razón entre ambos permanece constante**. Lo anterior se simboliza de la siguiente forma:

$$y \propto x \Longleftrightarrow \frac{y}{x} = k \text{ o } y = k \cdot x, \text{ con } k \text{ constante}$$

2.2.1. Representación gráfica

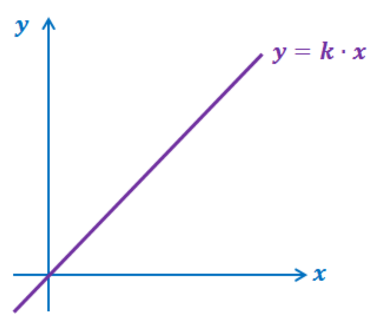
Si queremos representar en un gráfico las dos variables vistas en la situación anterior, obtenemos lo siguiente:



Como podemos observar en el gráfico los puntos se encuentran alineados en una recta. En este caso nuestras variables estan representadas a través de las expresiones:

$$Distancia = 2 \cdot Precio \qquad \text{o} \qquad \frac{Distancia}{Precio} = 2$$

En general, al representar gráficamente dos variables que son directamente proporcionales, x e y, da como resultado una línea recta que pasa por el origen.



✎ *Ejemplo*

Si para pintar $120\,[m^2]$ *se necesitan* 3 *galones de pintura. ¿Cuántos galones de pintura se necesitan para pintar* $50\,[m^2]$*?. Y si compro* 7 *galones de pintura, ¿cuántos metros cuadrados puedo pintar?*

Solución: Las variables que estamos analizando son "galones" y "metros cuadrados". Podemos notar que al aumentar la cantidad de pintura aumenta el área que puedo pintar, de la misma manera, al disminuir el área que deseo pintar disminuye la cantidad de pintura a utilizar.

Sabemos que las dos variables se relacionan de forma directamente proporcional, por lo tanto tenemos que:

$$\frac{metros\ \ cuadrados}{galones} = constante$$

Para obtener el valor de la constante de proporcionalidad directa, sustituimos los valores entregados por el enunciado:

$$\frac{120}{3} = 40$$

De esta forma la constante es 40.

Como queremos saber cuántos galones de pintura necesito para cubrir $50\,[m^2]$ debemos determinar por qué cantidad hay que dividir 50 para obtener la constante 40:

$$\begin{aligned}\frac{50}{x} &= 40 \\ x &= \frac{50}{40} = \frac{5}{4}\end{aligned} \tag{3}$$

Por lo tanto se necesitan $\frac{5}{4}$ o 1 galón más un cuarto de otro para poder pintar los $50\,[m^2]$.

Ahora, si decido comprar 7 *galones de pintura, ¿cuántos metros cuadrados puedo pintar?*

Solución: Esta vez resolveremos el problema utilizando la regla de tres directa, para esto separamos las variables en dos columnas formando una proporción. Ubicamos los "galones" a la derecha y los "metros cuadrados" a la izquierda y luego resolvemos utilizando la propiedad de que en toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos (multiplicación cruzada). De esta manera:

$$\begin{aligned}\frac{3}{7} &= \frac{120}{x} \\ 120 \cdot 7 &= 3 \cdot x \\ x &= \frac{840}{3} \\ x &= 280\end{aligned} \tag{4}$$

Finalmente con 7 galones de pintura puedo pintar $280\,[m^2]$.

Para resolver cualquier problema con proporción directa se puede proceder de ambas formas.

2.3. Proporción Inversa

La proporcionalidad inversa hace referencia aquellas situaciones en donde comparamos, a través de una razón, dos variables de tal forma que al aumentar una la otra disminuye en la misma proporción y viceversa. Por ejemplo, si decido tomar un bus para ir de Estación Central a Temuco debo recorrer 700 $[km]$ en ruta, si el chofer conduce a 100 $[km/h]$ me demoro 7 horas, pero si disminuye su velocidad a la mitad, es decir, a 50 $[km/h]$, me demoro el doble, osea, 14 horas de viaje. En esta situación podemos ver que la variable "velocidad" y la variable "tiempo" se relacionan de manera indirecta ya que al disminuir la velocidad del bus, aumenta el tiempo de recorrido y viceversa. La particularidad que tienen estas dos variables al relacionarse de forma indirecta, es que su producto es constante:

Si la velocidad es de 20 $[km/h]$ el tiempo de viaje es de 35 $[h]$:

$$velocidad \cdot tiempo = 20 \cdot 35 = 700$$

Si la velocidad es de 50 $[km/h]$ el tiempo de viaje es de 14 $[h]$:

$$elocidad \cdot tiempo = 50 \cdot 14 = 700$$

Si la velocidad es de 100 $[km/h]$ el tiempo de viaje es de 7 $[h]$:

$$velocidad \cdot tiempo = 100 \cdot 7 = 700$$

Si la velocidad es de 200 $[km/h]$ el tiempo de viaje es de $3,5$ $[h]$:

$$velocidad \cdot tiempo = 200 \cdot 3,5 = 700$$

Si la velocidad es de 300 $[km/h]$ el tiempo de viaje es de $7/3$ $[h]$:

$$velocidad \cdot tiempo = 300 \cdot \frac{7}{3} = 700$$

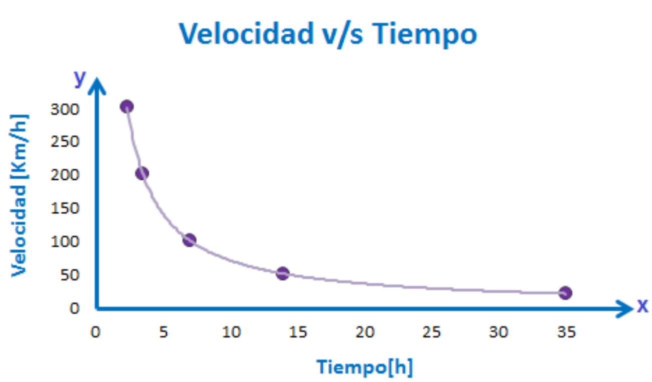
En este caso al multiplicar la variable "velocidad" con la variable "tiempo", la constante de proporcionalidad corresponde a 700 y es siempre la misma (corresponde a la distancia recorrida).

En general, **si y es inversamente proporcional a x, entonces el producto entre ambos permanece constante**. Lo anterior se simboliza de la siguiente forma:

$$y \infty x \Longleftrightarrow y \cdot x = k \text{ ó } y = \frac{k}{x}, \text{ con } k \text{ constante}$$

2.3.1. Representación gráfica

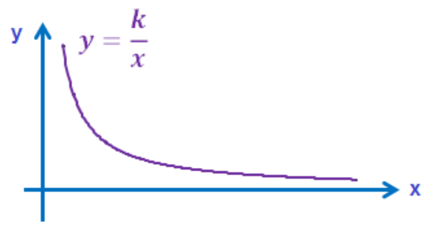
Si queremos representar en un gráfico las dos variables vistas en la situación anterior obtenemos lo siguiente:



Como podemos observar en el gráfico los puntos se encuentran sobre una curva. En este caso nuestras variables están representadas a través de las expresiones:

$$velocidad \cdot tiempo = 700 \qquad \text{o} \qquad velocidad = \frac{700}{tiempo}$$

En general, al representar gráficamente dos variables que son inversamente proporcionales, x e y, da como resultado una curva llamada hipérbola equilátera.



✎ ***Ejemplo***

Si una granja tiene cierta cantidad de comida que le alcanza para alimentar a sus 50 animales por 1 semana. Si la cantidad de animales aumenta a 70, ¿cuántos días le alcanzara la misma cantidad de comida?

Solución: Las variables que estamos analizando son "animales" y "días". Podemos notar que al aumentar la cantidad de animales en la granja la comida que tienen le alcanzará para menos días, por lo tanto las variables se relacionan de manera inversamente proporcional.

Las variables al relacionarse de esta manera, sabemos que su producto es constante, por lo que tenemos:

$$animales \cdot dias = constante$$

Para obtener el valor de la constante de proporcionalidad inversa, sustituimos los valores entregados en el enunciado:

$$50 \cdot 7 = 350$$

De esta forma la constante es 350.

Como queremos saber cuántos días nos durará la comida si los animales aumentaron a 70, debemos encontrar el número que multiplicado por 70 nos da la constante 350:

$$\begin{aligned} 70 \cdot x &= 350 \\ x &= \frac{350}{70} \\ x &= 5 \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo tanto, la comida que tiene la granja alcanzará para alimentar a los animales por 5 días.

Ahora, si quiero que la comida me dure 10 días, ¿cuántos animales tengo que alimentar?

Solución: Ahora resolveremos el problema utilizando la regla de tres inversa, para hacerlo separamos las variables en dos columnas formando una proporción. Ubicamos los "animales" a la derecha y los "días" a la izquierda, luego multiplicamos de forma horizontal los números tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{50}{x} &= \frac{7}{10}\\ 50\cdot 7 &= x\cdot 10\\ x &= \frac{350}{10}\\ x &= 35\end{aligned} \tag{6}$$

Luego, si quiero que el alimento disponible me dure por 10 días debo alimentar solamente a 35 animales.

Para resolver cualquier problema de proporción inversa se puede proceder de ambas formas.

✍ *Ejercicios* *3*

Completar las tablas de manera que haya proporcionalidad entre las dos variables. Representar cada ejercicio en un plano cartesiano y determinar la constante de proporcionalidad:

1.

x	3	5		30	
y		1/3	2/5	2	6

2.

x	1/16		2	5	
y	4	1/4		1/20	1/32

3.

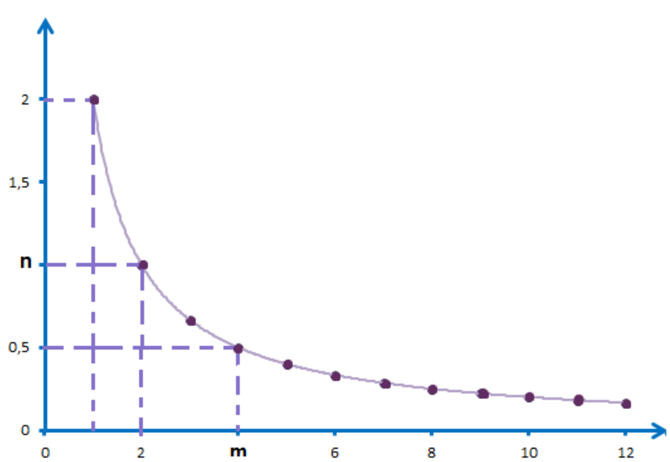
x		1	2	3	6
y	4	6		2	

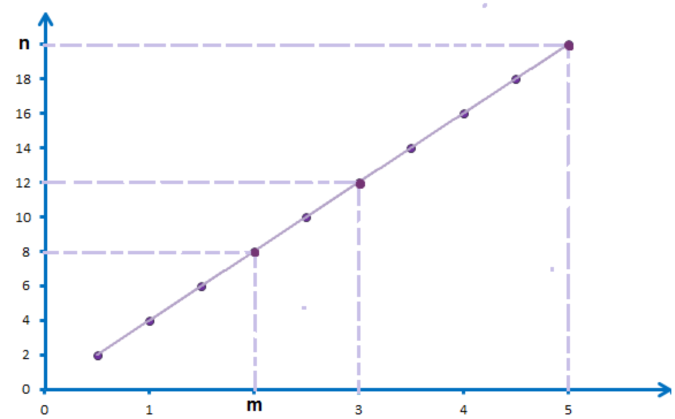
4.

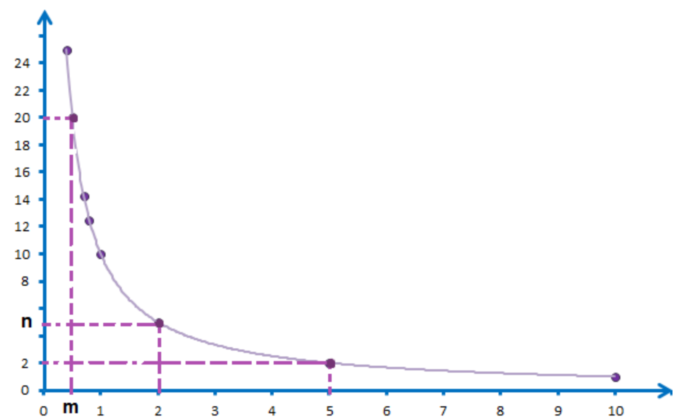
x	15/7	5		15	35
y	3		14		49

De acuerdo a la información entregada por cada gráfico obtener la constante de proporcionalidad y el valor de ambas incógnitas:

1.



2. 

3. 

2.4. Proporción Compuesta

Los dos tipos de proporciones vistos anteriormente dan cuenta de la relación entre dos variables, sin embargo en algunas ocasiones nos encontramos con situaciones donde intervienen más de dos variables. Un ejemplo típico que ilustra esta situación es cuando un ingeniero civil debe organizar un proyecto de una construcción, ya que tiene que manejar cuantas horas diarias trabajarán los obreros, cuántos obreros ocupará para la construcción y cuántos días disponibles tiene para la finalización de la obra. Así, al variar cualquiera de las 3 variables alterará directamente en las otras restantes.

✎ ***Ejemplo***

Si 12 obreros trabajan 10 horas diarias por 45 días, ¿cuánto tardarán en hacer el mismo trabajo 15 obreros trabajando 8 horas diarias?

Solución: Las variables que tenemos en este ejercicios son “obreros”, “días” y “horas”. Nuestra incógnita x representa la cantidad de días que se demorarán 15 obreros en realizar la construcción trabajando 8 horas diarias.
La información entregada por el enunciado podemos organizarla en el siguiente tabla:

Obreros	Días	Horas
12	45	10
15	x	8

Lo primero que hacemos es determinar cómo se relacionan las variables “obreros” y “días” y las variables “días” y “horas”. En este caso ambas situaciones se relacionan de forma inversamente proporcional, ya que al aumentar la cantidad de obreros disminuye la cantidad de días que me demoro en realizar la obra y al disminuir la cantidad de horas que trabajan los obreros aumenta la cantidad de días que ocupo en realizar la construcción.
Como las variables se relacionan de forma inversa se multiplican de forma horizontal, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} 12 \cdot 45 \cdot 10 &= 15 \cdot x \cdot 8 \\ x &= \frac{12 \cdot 45 \cdot 10}{15 \cdot 8} \\ x &= \frac{5400}{120} \\ x &= 45 \end{aligned} \tag{7}$$

Por lo tanto, si trabajan 15 obreros 8 horas diarias se demorarán 45 días es terminar la misma construcción.

✍ *Ejercicios* *4*

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Un chocolate de 100 [gr] posee 518 [cal], ¿Cuántas calorías posee una barra de 500 [gr] del mismo chocolate?
2. A una piscina se le agregan 10 litros de agua en 40 minutos, ¿cuánto se tardará en llenar la piscina si tiene un volumen total de 500 litros?
3. Un pintor se demora 1 hora en pintar los tres octavos de una muralla, ¿cuánto tiempo tardarían 3 personas en pintar lo que falta?
4. 3 personas demoran 4 horas en hacer 55 panes. ¿Cuánto demorarán 8 personas en hacer 150 panes de las mimas características?
5. Si una llave llena dos quintos de un estanque en 4 horas, ¿en cuanto tiempo se podrá llenar la mitad del estanque si utilizamos 4 llaves?

Bibliografía

[1] Apuntes para la preparación de la PSU Matemática, *Segunda Edición, 2009*, *Pamela Paredes Núñez, Manuel Ramírez.*

[2] Libro para el maestro, *Segunda Edición, 2001*, *Jesús Alarcón Bortolussi, Elisa Bonilla Rius, Rocío Nava Álvarez, Teresa Rojano Cevallos, Ricardo Quintero.*