Análisis aplicado.
Convergencia BFGS.
28 de abril, 2015. Guillermo Santiago Novoa Pérez

Problemas 6.8-6.11

6.8

$$h(t) = 1 - t + \ln(t);$$
$$h'(t) = -1 + \frac{1}{t};$$
$$h''(t) = -\frac{1}{t^2};$$

Como t^2 es siempre positiva en el dominio de la función $(0, \infty)$, $-\frac{1}{t^2}$ es siempre negativa y la función $h'(t)$ es estrictamente decreciente.

$$\begin{aligned} \forall t \in (1,\infty), \quad & t > 1 \iff 1 > \tfrac{1}{t} \\ \therefore \quad & h'(t) < 0; \\ \forall t \in (0,1), \quad & t < 1 \iff 1 < \tfrac{1}{t} \\ \therefore \quad & h'(t) > 0; \end{aligned}$$

Por los dos hechos mencionados anteriormente, $h(t)$ tiene un único punto crítico en $t = 1$, donde $h'(t) = 0$. Además, como $h''(t)$ siempre es negativa, $t = 1$ es un maximizador global de la función $h(t)$, por lo que

$$0 = h(1) \geq h(t), \qquad \forall t \in (0, \infty)$$

6.9

$$\psi(\mathbf{B}) = tr(\mathbf{B}) - \ln(\det(\mathbf{B}))$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{PVP}' \\ tr(\mathbf{B}) &= tr(\mathbf{PVP}') \\ &= tr(\mathbf{VP}'\mathbf{P}), \\ \textit{como } \mathbf{P} \textit{ es una matriz unitaria} & \\ \textit{(}\mathbf{B} \textit{ es una matriz hermitiana)} & \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}' = \mathbf{P^{-1}} & \implies tr(\mathbf{B}) = tr(\mathbf{V}) \\ & \\ \textit{Además} & \\ \det(\mathbf{P}) = 1 = \det \mathbf{P^{-1}}, & \quad \therefore \det \mathbf{B} = \det \mathbf{V} \end{aligned}$$