数学分析讲义

UN

2024 年 5 月 12 日

且夫乘物以游心, 托不得已以养中.

目录

Chapter 1

多变量函数连续性

1.1 n 维 Euclid 空间

1.1.1 练习题

1. 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{x} = (1, 1, \cdots, 1)$. 求证: $\boldsymbol{x}$ 与各单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 夹成相等的角.

证明

以 $\boldsymbol{e}_1$ 为例, $cos\theta_1 = \frac{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1>}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{e}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 这对其余的单位坐标向量是相同的.

2. 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是欧氏空间中的向量, θ 是这两个向量之间的夹角, 试证明“余弦定理”成立:

$$\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 = \| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2 - 2 \| \boldsymbol{x} \| \| \boldsymbol{y} \| cos\theta$$

证明

$$\begin{aligned}
\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 &= < \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} > = < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} > - < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} > \\
&= < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > - < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > - < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} > + < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > \\
&= \| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2 - 2 \| \boldsymbol{x} \| \| \boldsymbol{y} \| cos\theta
\end{aligned}$$

3. 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是欧氏空间中的两个互相正交的向量, 试证明“勾股定理”成立:

$$\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \|^2 = \| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2$$

证明

由余弦定理, 且依题知 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 进而题式成立.

4. 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 为欧氏空间中的任意两个向量, 证明“平行四边形定理”:

$$\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \|^2 + \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 = 2(\| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2)$$

证明

$$\begin{aligned}
&\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \|^2 + \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 \\
=& < \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} > + < \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} > \\
=& < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > +2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > + < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > + < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > -2 < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > \\
=& 2(\| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2)
\end{aligned}$$

5. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是欧氏空间中两个不同的点, 记 $2r = \| \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \| > 0$. 求证:

$$B_r(\boldsymbol{a}) \cap B_r(\boldsymbol{b}) = \oslash$$

证明

用反证法. 若 $B_r(\boldsymbol{a}) \cap B_r(\boldsymbol{b}) \neq \oslash$, 即 $\exists \boldsymbol{c} \in B_r(\boldsymbol{a}) \cap B_r(\boldsymbol{b})$, 则有 $\| \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a} \| < r, \| \boldsymbol{c}-\boldsymbol{b} \| < r$. 而 $\| \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a} \| + \| \boldsymbol{c}-\boldsymbol{b} \| \geq \| \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \| \Rightarrow \| \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \| < 2r$, 矛盾! 故命题得证.

6. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 证明: 存在常数 $K_1, K_2 > 0$ 使得对任意的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$K_1 \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \| \boldsymbol{x} \| \leq K_2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

证明

左式, 考虑基本不等式:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \| \boldsymbol{x} \|$$

右式, 取 $K_2 = 1$, 两边平方:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i||x_j|$$

显然成立.

7. 证明: 存在常数 $M_1, M_2 > 0$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 有

$$M_1 \max\{|x_i|\} \leq \| \boldsymbol{x} \| \leq M_2 \max\{|x_i|\}$$

证明

取 $M_1 = 1, M_2 = \sqrt{n}$, 有:

$$\max\{|x_i|\} = \sqrt{\max^2\{x_i\}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{n \max\{|x_i|^2\}} = \sqrt{n} \max\{|x_i|\}$$

1.2 $\mathbb{R}^n$ 中点列的极限

1.2.1 练习题

1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中定义点列

$$\boldsymbol{x}_n = (\frac{1}{n}, n^{\frac{1}{n}}), n = 1, 2, \cdots,$$

求证: $\lim\limits_{n \to \infty} \boldsymbol{x}_n = (0, 1)$.

证明

知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$, 从而 $n\to\infty,x_n^1\to0,x_n^2\to1$, 进而 $\boldsymbol{x}_n$ 按分量收敛于 (0,1).

2. 证明定理 13. 1: 设 $\lim\limits_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{a}$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty}\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{b}$, 那么

1° $\lim\limits_{i\to\infty}(\boldsymbol{x}_i\pm\boldsymbol{y}_i)=\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$;

2° 对于任何 $\lambda\in\mathbb{R}$ 有

$$\lim_{i\to\infty}(\lambda\boldsymbol{x}_i)=\lambda\boldsymbol{a}$$

证明

依题:

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall i\in\mathbb{N}(i>N\Rightarrow\|\ \boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}\ \|<\varepsilon)$$

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall i\in\mathbb{N}(i>N\Rightarrow\|\ \boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{b}\ \|<\varepsilon)$$

$$\Rightarrow\|\ \boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\ \|\le\|\ \boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}\ \|+\|\ \boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{b}\ \|<2\varepsilon\wedge$$

$$\wedge\ \|\ \boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\ \|\le\|\ \boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}\ \|+\|\ \boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{b}\ \|<2\varepsilon\wedge$$

$$\wedge\ \|\ \lambda\boldsymbol{x}_i-\lambda\boldsymbol{a}\ \|=\lambda\ \|\ \boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}\ \|<\lambda\varepsilon$$

再由 ε 的任意性, 即证命题.

3. 证明: 欧氏空间中的收敛点列必是有界的.

证明

记 $\boldsymbol{x}_i=(x_i^1,\cdots,x_i^n)\in\mathbb{R}^n$ 收敛到 $\boldsymbol{a}=(a^1,\cdots,a^n)$. 知此时 $\boldsymbol{x}_i$ 按分量收敛到 $\boldsymbol{a}$, 即 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i^k=a^k,k=1,2,\cdots,n$, 进而对任意的 $k=1,2,\cdots,n$, x_i^k 有界, 即 $\exists M_k>0\forall i\in\mathbb{N}(|x_i^k|<M_k)$, 取 $M=\max\{M_1,\cdots,M_k\}$, 知

$$\|\ \boldsymbol{x}_i\ \|\le\sqrt{n}\max\{|x_i|\}<\sqrt{n}M$$

命题即证.

4. 证明: 欧氏空间中的基本列必是有界的.

证明

由 **3.**, 欧氏空间中的收敛列必有界, 而基本列必收敛, 故基本列必有界.

5. 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 n 维欧氏空间中的点列, 并且级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|\ \boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\ \|$ 收敛, 求证: $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为一收敛点列.

证明

既然 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|\ \boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\ \|$ 收敛, 由 Cauthy 准则知:

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall p,q\in\mathbb{N}(p>q>N\Rightarrow|\ \|\ \boldsymbol{x}_{q+1}-\boldsymbol{x}_q\ \|+\cdots+\|\ \boldsymbol{x}_q-\boldsymbol{x}_{q-1}|<\varepsilon)$$

即

$$\|\ \boldsymbol{x}_{q+1}-\boldsymbol{x}_q\ \|+\cdots+\|\ \boldsymbol{x}_q-\boldsymbol{x}_{q-1}\ \|<\varepsilon$$

又因为

$$\|\ \boldsymbol{x}_{q+1}-\boldsymbol{x}_q\ \|+\cdots+\|\ \boldsymbol{x}_q-\boldsymbol{x}_{q-1}\ \|\ge\|\ \boldsymbol{x}_{q+1}-\boldsymbol{x}_q+\cdots+\boldsymbol{x}_p-\boldsymbol{x}_{p-1}\ \|=\|\ \boldsymbol{x}_p-\boldsymbol{x}_q\ \|$$

故此即 $\|\ \boldsymbol{x}_p-\boldsymbol{x}_q\ \|<\varepsilon$, 进而由 Cauthy 准则知 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为一收敛点列.

1.3 $\mathbb{R}^n$ 中的开集和闭集

1.3.1 练习题

1. 对于下列各题中指定的集合 A, 求出 $A^\circ, \bar{A}$ 和 ∂A.

(1) 在 $\mathbb{R}$ 中, 令 $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$;

(2) 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 令 $A = \{(x, y) : 0 < y < x + 1\}$;

(3) A 是 $\mathbb{R}^n$ 的有限点集.

解

(1) $A^\circ = \oslash, \bar{A} = \{0\} \cup A, \partial A = \bar{A}$.

(2) $A^\circ = A, \bar{A} = \{(x, y) : 0 \le y \le x + 1\}$,

$\partial A = \{(x, y) : y = 0 \vee y = x + 1\}$.

(3) $A^\circ = \oslash, \bar{A} = A = \partial A$.

2. 设 $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$, 求 $A^\circ, (A^c)^\circ, \partial A$.

解

$A^\circ = \oslash, (A^c)^\circ = \oslash, \partial A = \mathbb{R}$.

3. 证明: $\boldsymbol{p} \in \bar{A}$ 的一个必要充分条件是对一切 $r > 0$ 有 $B_r(\boldsymbol{p}) \cap A \ne \oslash$.

证明

知 $\boldsymbol{p} \in \bar{A} \Rightarrow \boldsymbol{p} \in A \vee \boldsymbol{p} \in A'$.

$\boldsymbol{p} \in \bar{A} \Rightarrow \forall r > 0(B_r(\boldsymbol{p}) \cap A \ne \oslash)$: 当 $\boldsymbol{p} \in A$, $\forall r > 0(\boldsymbol{p} \in B(\boldsymbol{p}; r) \cap A \ne \oslash)$. 当 $\boldsymbol{p} \in A'$, 由定义, $\forall r > 0 \exists \boldsymbol{p}_r \in A(\boldsymbol{p}_r \in B(\boldsymbol{p}; r)) \ne \oslash$.

$\forall r > 0(B_r(\boldsymbol{p}) \cap A \ne \oslash) \Rightarrow \boldsymbol{p} \in \bar{A}$: $\forall r > 0(B(\boldsymbol{p}; r) \cap A \ne \oslash) \Rightarrow \boldsymbol{p} \in A' \Rightarrow \boldsymbol{p} \in \bar{A}$.

4. 证明: $\partial A = \bar{A} \cap (A^\circ)^c$.

证明

$\forall \boldsymbol{p} \in \partial A(\boldsymbol{p} \notin A^\circ \wedge \boldsymbol{p} \notin \mathbb{R} \backslash \bar{A} \Rightarrow \boldsymbol{p} \in \bar{A} \wedge \boldsymbol{p} \in (A^\circ)^c) \Rightarrow \partial A \subset \bar{A} \cap (A^\circ)^c$.

$\forall \boldsymbol{p} \in \bar{A} \cap (A^\circ)^c(\boldsymbol{p} \in \bar{A} \wedge \boldsymbol{p} \in (A^\circ)^c \Rightarrow \boldsymbol{p} \notin \mathbb{R} \backslash \bar{A} \wedge \boldsymbol{p} \notin A^\circ \Rightarrow \boldsymbol{p} \in \partial A) \Rightarrow \bar{A} \cap (A^\circ)^c \subset \partial A$

故命题得证.

5. 证明: $A^\circ = (\overline{A^c})^c$.

证明

此即 $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$. 对任意的 $\boldsymbol{p} \in (A^\circ)^c$, $\boldsymbol{p}$ 要么是 A° 的边界点, 要么是它的外点. 当 $\boldsymbol{p}$ 是 A° 的边界点, 它既是该集合的极限点, 也是这集合的补的极限点. 而易证 $\overline{A^c} = \overline{(A^\circ)^c}$, 进而 $\boldsymbol{p} \in \overline{(A^\circ)^c} = \overline{A^c}$. 当它是这集合的外点, 结论是显然的. 从而 $(A^\circ)^c \subset \overline{A^c}$.

对任意的 $\boldsymbol{p} \in \overline{A^c}$, $\boldsymbol{p}$ 要么是 A^c 的一个元素, 要么是它的极限点. 当 $\boldsymbol{p} \in A^c$, 知 $A^c \subset (A^\circ)^c$, 进而 $\boldsymbol{p} \in (A^\circ)^c$. 当它是这集合的极限点, 由 $A^c \subset (A^\circ)^c$ 知同样可以在 $(A^\circ)^c$ 中找到趋于 $\boldsymbol{p}$ 的点列, 从而它也是 $(A^\circ)^c$ 的极限点, 进而
$\overline{A^c} \subset (A^\circ)^c$.

故命题得证.

6. 证明:

(1) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;

(2) $(\overline{A\cup B}) = \bar{A}\cup\bar{B}$.

证明

(1) $\forall \boldsymbol{p}\in(A\cap B)^\circ \exists\delta_p>0(B(\boldsymbol{p};\delta_p)\subset(A\cap B)^\circ\Rightarrow)$. 而 $(A\cap B)^\circ\subset A\wedge(A\cap B)^\circ\subset B$, 故 $B(\boldsymbol{p};\delta_p)\subset A\wedge B(\boldsymbol{p};\delta_p)\subset B\Rightarrow \boldsymbol{p}\in A^\circ\cap B^\circ$. 即 $(A\cap B)^\circ = A^\circ\cap B^\circ$.

$\forall \boldsymbol{p}\in A^\circ\cap B^\circ\exists\delta_p>0(B(\boldsymbol{p};\delta_p)\in A^\circ\subset A\wedge B(\boldsymbol{p};\delta_p)\in B^\circ\subset B\Rightarrow B(\boldsymbol{p};\delta_p)\subset A\cap B\Rightarrow \boldsymbol{p}\in (A\cap B)^\circ)$.

故命题得证.

注　按这个方法来写的话, 更严谨的情况应该附上引理: 集合的内部是含于该集合的最大开集.

(2) 证明类似于 (1), 同时可附上引理: 集合的闭包是包含集合的最小闭集.

7.

(1) 作出闭集列 $\{F_i\}$ 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i = B_1(\mathbf{0})$;

(2) 作出开集列 $\{G_i\}$ 使得 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i = \overline{B_1(\mathbf{0})}$.

解

(1) $F_i = B_{\frac{i}{i+1}}(\mathbf{0})$.

(2) $G_i = B_{1+\frac{1}{i}}(\mathbf{0})$.

8. 设 I 为一指标集, 证明:

(1) $(\overline{\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha})\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$;

(2) $(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)^\circ\supset\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^\circ$.

举例说明: 真包含关系是可以出现的.

证明

(1) $\forall\boldsymbol{x}\in(\overline{\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}) =: \mathcal{A}$, $\boldsymbol{x}$ 要么是 $\mathcal{A}$ 中的元素, 要么是它的极限点. 若 $\boldsymbol{x}$ 是它的元素, 此即 $\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$. 若 $\boldsymbol{x}$ 是它的极限点, 此即在 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 中可以找到趋向 $\boldsymbol{x}$ 的点列. 而 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$, 故这点列也在 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$ 中, 即 $\boldsymbol{x}$ 也是 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$ 的极限点. 综上, 命题得证.

(2) $\forall\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}$, 总存在一个 $\alpha_0\in I$ 使得 $\boldsymbol{x}\in A_{\alpha_0}^\circ$. 此即 $\boldsymbol{x}$ 是 A_{α_0} 的一个内点, 而 $A_{\alpha_0}\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 故 $\boldsymbol{x}$ 也是 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 的一个内点, 从而 $\boldsymbol{x}\in(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)^\circ$.

真包含关系例子如一组相切的圆.

9. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 求证: ∂E 是闭集.

证明

因为 A° 是开集, 所以 $(A^\circ)^c$ 是闭集. 又 $\overline{A}$ 是闭集, 所以 $\partial A = \overline{A}\cap(A^\circ)^c$ 是闭集.

10. 设 $G_1, G_2\subset\mathbb{R}^n$ 是两个不相交的开集, 证明: $G_1\cap\overline{G_2} = \overline{G_1}\cap G_2 = \varnothing$.

证明

用反证法, 若 $G_1\cap\overline{G_2}\neq\varnothing$, 届于 $G_1\cap G_2=\varnothing$, 只可能有 $G_1\cap G_2'\neq\varnothing$, 即 G_1 中至少有 G_2 的一个极限点 $\boldsymbol{x}$. 又 G_1, G_2 是开集, 故 $\boldsymbol{x}$ 的某个邻域也在 G_1 内, 考虑这邻域中趋向 G_1 的无数个点, 因为 $\boldsymbol{x}$ 是 G_2 的极限点, 故这无数个点都在 G_2 内, 即 $G_1\cap G_2\neq\varnothing$, 矛盾! 故命题成立.

11. 设 $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, 具体地说, 设 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 则 $P(x,y)=x$, P 叫做**投影算子**. 设 E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开集, 求证: $P(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 举出例子: A 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 但 $P(A)$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

证明

由 E 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集知:

$$\forall \boldsymbol{x}=(x,y)\in E\exists\delta>0(B(\boldsymbol{x};\delta)=\{(x',y')|\parallel (x,y)-(x',y')\parallel<\delta\}\subset E)$$

而 $\parallel x-x'\parallel\leq\parallel (x,y)-(x',y')\parallel<\delta$, 故可找到 $P(E)$ 中 $P(\boldsymbol{x})$ 的 δ 邻域, 进而命题得证.

反例如 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|xy=1\}$.

12. E 为闭集的必要充分条件是 $E\supset\partial E$.

证明

E 为闭集时, $E=\overline{E}$, 而 $\partial E=\overline{E}\cap(E^\circ)^c$, 故 $\|$ $E\subset\overline{E}=E$.

$\partial E\subset E$ 时, 所有不在 E 中的点都是它的外点, 进而 E^c 是开集, 从而命题得证.

1.4 列紧集和紧致集

1.4.1 练习题

1. 设 P 是投影算子, $A\subset\mathbb{R}^2$ 是紧致集, 证明: $P(A)$ 也是紧致集.

证明

设 A 能被 $\mathcal{I}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}I_i$ 覆盖. 由 A 是紧致集知其为有限闭集, 不妨记 A 中元素横坐标的最小值为 x_0, 最大值为 x_1, 知总可找到 $\mathcal{I}$ 的子覆盖 $\bar{\mathcal{I}}=\bigcup\limits_{i=k_1}^{k_s}I_i$ 使得 x_0 在 I_{k_1} 中, x_1 在 I_{k_s} 中, 且 $\bar{\mathcal{I}}$ 跑遍 A 的所有横坐标. 知 $P(\bar{\mathcal{I}})=\bigcup\limits_{i=k_1}^{k_s}P(I_i)$ 即为 $P(A)$ 的有限开覆盖, 进而命题得证.

2. 设 $A,B\subset\mathbb{R}$, 证明: $A\times B$ 为紧致集的充分必要条件是 A 和 B 都是紧致集.

证明

当 $A\times B\subset\mathbb{R}^2$ 是紧致集, 知 $A\times B$ 是有界闭集, 进而 $A\times B$ 的每个元素的两个坐标都有界且能取得最大最小值, 也即 A,B 都是有界闭集. 反之亦然.

3. 证明 $A\subset\mathbb{R}^n$ 为紧致集的充分必要条件是: 若 $\mathscr{F}=\{A_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族, 且 $A\cap(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha)=\oslash$, 则有 $A_1,A_2,\cdots,A_k\in\mathscr{F}$, 使 $A\cap(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i)=\oslash$.

证明

若 A 是紧致集, 由 $A\cap(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha)=\oslash$ 知 $A\cap(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha)^c=A\cap(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha^c)=A$. 由 $\mathscr{F}$ 是闭集族知 $\mathscr{F}'=\{A_\alpha^c\}$ 是开集族, 进而 $\mathscr{F}'$ 覆盖 A, 从中能选出有限子覆盖 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i^c$, 即 $A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i^c)=A$, 从而 $A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i^c)^c=A\cap(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i)=\oslash$.

若 A 不是紧致集, 则知存在闭集族 $\mathscr{F}$ 使得题设后的条件不成立. 进而命题得证.

4. 如果 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的每一个无穷子集在 A 中都有一个凝聚点, 则说 A 是 Frechet 紧的. 证明: 在 $\mathbb{R}^n$ 中
Frechet 紧与列紧是等价的.

证明

若 A 是 Frechet 紧的, 对 A 中的任意点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$, 知其都构成 A 的无穷子集. 根据定义, $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 在 A 中有凝聚点, 即有收敛子列, 进而 A 是列紧集.

若 A 是列紧集, 对 A 的每一个无穷子集 A_0, 必能在其中选取一个点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$. 根据定义, $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 在 A 中有凝聚点. 因为 $\{\boldsymbol{a}_n\} \subset A_0$, 知这同样是 A' 的凝聚点, 进而 A 是 Frechet 紧的.

5. 设 $F_1, F_2, \cdots, F_k, \cdots$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集, 满足 $F_k \supset F_{k+1}(k \geq 1)$, 问是否一定有 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$? 若改为非空紧致集又如何?

解　一定有的. 这可以通过考虑分量上的收敛, 并结合一维的情况来证明. 非空紧致集不一定, 如集族 $\{(0, \frac{1}{n}) | n = 1, 2, \cdots\}$.

1.5 集合的连通性

1.5.1 练习题

1. 证明: 区域必是道路连通的. 这就是说, 对开集而言连通与道路连通是等价的.

证明

$E \subset \mathbb{R}^n$ 连通 $\Leftrightarrow E$ 不能分解成两个不相交的非空开集之并. 下面运用这个性质进行反证:

若 E 不是道路连通的, 取 $\boldsymbol{a} \in E$, 考虑:

$$A = \{\boldsymbol{x} | \exists l \in C([0,1], \mathbb{R}^n)(l(0) = \boldsymbol{a} \wedge l(1) = \boldsymbol{x})\}$$
$$B = \{\boldsymbol{x} | \forall l \in C([0,1], \mathbb{R}^n)(l(0) \neq \boldsymbol{a} \vee l(1) \neq \boldsymbol{x})\}$$

知 $A \cap B = \varnothing, A \cup B = E$, 下证 A, B 都是开集.

对 A, 任取 A 中的点 $\boldsymbol{x}_0$, 对足够小的 $\delta > 0$, 取 $B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$. 而球显然是路连通的, 故 $B(\boldsymbol{x}_0; \delta) \subset A$. 进而 A 是开集.

对 B, 任取 B 中的点 $\boldsymbol{x}_1$, 对足够小的 $\delta > 0$, 取 $B(\boldsymbol{x}_1; \delta)$. 若球中某点 $\boldsymbol{x}_1'$ 与 $\boldsymbol{x}$ 连通, 因为球是连通集, 知 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_1'$ 间存在道路, 进而 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}$ 间存在道路, 矛盾! 故 $B(\boldsymbol{x}_1; \delta) \subset B$. 进而 B 是开集.

综上, E 可被分解成两不相交开集之并, 这与 E 是区域矛盾! 故命题成立.

2. 设 $A \subset \mathbb{R}$, 如果 A 既是开集又是闭集, 求证: $A = \varnothing$ 或者 $A = \mathbb{R}$.

证明

若 $A = \varnothing$, 结论自然成立.

若 $A \neq \varnothing$, 设 $x \in A$, 因为 A 是开集, 知 $\exists \delta_1 > 0((x - \delta_1, x + \delta_1) \subset A)$. 又因 A 是闭集, 知这邻域的边界点也应在 A 内, 即 $x - \delta_1, x + \delta_1 \in A$. 又因为 A 是开集, 所以这两个边界点的邻域依旧在 A 内. 如此一直构造下去, 知 $A = \mathbb{R}$.

注　写完后发现上述方法其实并不好, 因为不能保证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n$ 发散. 事实上用反证法应该会更好: A 有下界与有上界的情况都可被开集的性质否掉, 故 A 首先无界. 第三题也是类似的方法, 用反证

法否掉 A 有界, 用这个方法说明 $\mathbb{R}^n \subset A$ 即可.

1.6 多变量函数的极限

1.6.1 练习题

3. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(xy)}{x}$ (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^4}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ (6) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

解

(1) 由于 $(x,y)\to(0,0), |\frac{sin(xy)}{x}| \le |\frac{xy}{x}| = |y| \to 0$, 故欲求为 0.

(2) 考虑 $|x^2y^4ln(x^2+y^2)| \le |y^2\frac{\|\boldsymbol{p}\|^4}{4}ln \parallel \boldsymbol{p} \parallel^2 \mid \to 0, \parallel \boldsymbol{p} \parallel = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, 其中 $\parallel \boldsymbol{p} \parallel = x^2+y^2$. 进而原式为 1.

(3) 代入即得原式为 $log2$.

(4) 考虑 $x^2ln(\frac{xy}{x^2+y^2}) \le x^2ln\frac{1}{2} \to -\infty$, 知原式为 0.

(5) 知 $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^3+y^3} \to 0$. 故原式为 0.

(6) 知 $0 \le \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} \le \frac{x^2+y^2}{(1+x+\frac{x^2}{2})(1+y+\frac{y^2}{2})} \to 0$, 进而原式为 0.

5. 设二元函数 f 在 (x_0,y_0) 的某一空心邻域中有定义. 对任意固定的 y, 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 令

$$\varphi(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

它是一个定义在 y_0 近旁的函数, 如果 $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y)$ 存在, 那么就令

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \varphi(y)$$

称之为函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的一个**累次极限**. 类似地可以定义另一个累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

(1) 计算函数

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

在原点的两个累次极限;

解 0;0.

(2) 计算

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} \sin(\frac{\pi x}{2x+y}), \quad \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty} \sin(\frac{\pi x}{2x+y});$$

解 0;1.

(3) 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to0^+} \frac{x^y}{1+x^y}, \quad \lim_{y\to0+}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1+x^y}$$

解 $\frac{1}{2}, 1$.

6. 设

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

证明: f 在原点处两个累次极限均不存在, 但是极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$$

证明

因为 $\sin\frac{1}{x},\sin\frac{1}{y}$ 在原点处震荡, 故两个累次极限都不存在. 但有

$$0\le|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}|\le|x+y|\to0$$

进而题式成立.

7. 证明: 若二元函数 f 在某一点的两个累次极限和极限都存在, 则这三个值必相等.

注　此题可加强为下列定理. 下面直接证明这个加强的定理.

定理 1.6.1 (累次极限定理) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}=A$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 的内层极限 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 在 x_0 的某个 δ_1 邻域里存在 $(\delta_1>0)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$, 另一累次极限亦然.

证明

由定义:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0(\delta<\delta_1\wedge|x-x_0|<\delta\wedge|y-y_0|<\delta\Rightarrow A-\varepsilon<f(x,y)<A+\varepsilon)$$

依题, $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 存在, 记之为 $g(x)$, 则有 $A-\varepsilon\le g(x)\le A+\varepsilon,\forall x\in U_\delta(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$. □

1.7 多变量连续函数

1.7.1 练习题

1. 求出下列函数 f 的间断点集:

(1)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

(2)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

(3)

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}, & y\ne0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

解

(1) $\{(0,0)\}$.

(2) $\{(0,0)\}$.

(3) $\{(x,0)|x \neq 0\}$.

2. 设

$$f(x,y) = \frac{1}{1-xy}, \quad (x,y) \in [0,1]^2 \backslash \{(1,1)\}$$

求证: f 连续但不一致连续.

证明

因为 $g(x,y) = 1 - xy$ 是连续函数, $\varphi(u) = \frac{1}{u}$ 也是连续函数, 故它们的复合 $f(x,y) = \varphi \circ g(x,y)$ 在给定集合上仍是连续函数. 但考虑趋向 (1,1) 的点列 $\boldsymbol{x}_n = (1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$, 显然:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0 \forall p, q \in \mathbb{N}(p > q > N_\varepsilon \Rightarrow \| \boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q \| < \varepsilon)$$

进而对任意且足够小的 $\delta > 0$, 取 $p, N_0 = \max\{N_\delta, 2\} \in \mathbb{N}$, 使得 $2p > p > N \geq 2$ 时 $\| \boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q \| < \delta$, 同时有:

$$|f(\boldsymbol{x}_{2p}) - f(\boldsymbol{x}_p)| = |\frac{4p^3 - 3p^2}{(4p-1)(2p-1)}| \geq \frac{5}{6}$$

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} < \frac{5}{6}$ 即知 f 不一致连续.

3. 设 $A \subset \mathbb{R}^n, \boldsymbol{p} \subset \mathbb{R}^n$. 定义

$$\rho(\boldsymbol{p}, A) = \inf_{\boldsymbol{p} \in A} \{\| \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a} \|\}$$

并称之为点 $\boldsymbol{p}$ 到集合 A 的**距离**. 证明:

(1) 若 $A \neq \oslash$, 则 $\overline{A} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n | \rho(\boldsymbol{p}, A) = 0\}$;

(2) 对任何 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$|\rho(\boldsymbol{p}, A) - \rho(\boldsymbol{q}, A)| \leq \| \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} \|$$

这说明 $\rho(\boldsymbol{p}, A)$ 是 $\boldsymbol{p}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

证明

(1) $\forall \boldsymbol{p} \in \overline{A}(\boldsymbol{x} \in A \wedge \boldsymbol{x} \in A')$. $\boldsymbol{x} \in A$ 时显然有 $\rho(\boldsymbol{x}, A) = 0$. $\boldsymbol{x} \in A'$ 时, 知可从 A' 中选一列趋近 $\boldsymbol{x}$ 的点, 进而由极限定义即得 $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A'}) = 0$. 反之亦然, 故命题得证.

(2)

$$\forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n \forall \boldsymbol{x} \in A$$

$$(|\rho(\boldsymbol{p}, A) - \rho(\boldsymbol{q}, A)| \leq |\rho(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) - \rho(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})| \leq \rho(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \| \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} \|)$$

4. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 定义

$$\rho(A, B) = \inf\{\| \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} \| \, | \boldsymbol{p} \in A, \boldsymbol{q} \in B\}$$

并称之为**集合 A 和 B 之间的距离**.

证明:

(1) 若 A 为紧致集, 则存在一点 $\boldsymbol{a} \in A$, 使得 $\rho(\boldsymbol{a}, B) = \rho(A, B)$;

(2) 若 A 和 B 都是紧致集, 则存在点 $\boldsymbol{a} \in A$ 和 $\boldsymbol{b} \in B$ 使得 $\| \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \| = \rho(A, B)$;

(3) 设 A 为紧致集, B 是闭集, 则 $\rho(A, B) = 0$ 当且只当 $A \cap B \neq \oslash$.

证明

(1) $\mathbb{R}^n \supset A$ 是紧致集 $\Leftrightarrow A$ 是有界闭集. 考虑定义在 A 上的函数 $\rho(\boldsymbol{a}, B)$, 由上题知它是 A 上的连续函数, 由连续函数的性质知 $\rho(\boldsymbol{a}, B)$ 在 A 上必可取最小值, 再取对应的 $\boldsymbol{a}$ 即可.

(2) 由 (1), 存在一点 $\boldsymbol{a} \in A$ 使得 $\rho(\boldsymbol{a}, B) = \rho(A, B)$, 再考虑定义在 B 上的函数 $\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, 它是 B 上的连续函数, 进而由 B 为紧致集知其能取到最小值, 再取对应的 $\boldsymbol{b}$, 有 $\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \rho(\boldsymbol{a}, B) = \rho(A, B)$.

(3) 当 $\rho(A, B) = 0$, 由 (1) 知此即存在 $\boldsymbol{a} \in A$ 使得 $\rho(\boldsymbol{a}, B) = 0$, 进而 $\boldsymbol{a}$ 不可能是 B 的外点. 从而 $\boldsymbol{a}$ 只能是 B 的边界点或内点, 但因为 B 是闭集, 这两种情况都说明 $\boldsymbol{a} \in B$, 进而 $\boldsymbol{a} \in A \cap B \neq \oslash$.

当 $A \cap B \neq \oslash$, 即 $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n (\boldsymbol{x} \in A \wedge \boldsymbol{x} \in B)$. 从而 $0 \leq \rho(A, B) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, 进而 $\rho(A, B) = 0$.

5. 作出两个不相交的闭集 A, B, 使得 $\rho(A, B) = 0$.

解　考虑 $A = \{(x, y) | y = 0\}, B = \{(x, y) | y = e^x\}$ 即可.

6. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 有界, 证明: 对任何常数 $c > 0$,

$$\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n | \rho(\boldsymbol{p}, A) \leq c\}$$

是紧致集.

证明　记题设集合为 B, 知 B 有界, 否则由 A 有界容易知道, 当 $\| \boldsymbol{p} \|$ 足够大时, $\| \boldsymbol{p} \| \to \infty, \rho(\boldsymbol{p}, A) \to \infty$, 显然不符题意. 下证 B 是闭集:

考虑 B 在 $\mathbb{R}^n$ 中的补集 $C(B) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n | \rho(\boldsymbol{p}, A) > c\}$, 因为 $\rho(\boldsymbol{p}, A)$ 是连续函数, 知 $\exists \delta > 0 \forall \boldsymbol{p}' \in \mathbb{R}^n (\boldsymbol{p}' \in B(\boldsymbol{p}; \delta) \Rightarrow \rho(\boldsymbol{p}', A) > c)$, 即 $\boldsymbol{p}$ 是 $C(B)$ 的内点, 进而 $C(B)$ 是开集, 从而 B 是闭集, 也即有界闭集, 进而其为紧致集.

1.8 连续映射

1.8.1 练习题

1. 设 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 连续, $E \subset \mathbb{R}^n$. 求证: $\boldsymbol{f}(\overline{E}) \subset \overline{\boldsymbol{f}(E)}$. 问在什么条件下有 $\boldsymbol{f}(\overline{E}) = \overline{\boldsymbol{f}(E)}$.

证明

$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{f}(\overline{E}) \exists \boldsymbol{x} \in \overline{E} (\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$. 对这个 $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$, 可分为以下两种情况讨论.

(1) $\boldsymbol{x} \in E$, 此时 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \in f(E)$.

(2) $\boldsymbol{x} \in E'$, 此时存在 E 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 满足 $n \to \infty, \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, 此时由 $\boldsymbol{f}$ 的连续性知 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \overline{\boldsymbol{f}(E)}$. 进而 $\boldsymbol{y} \in \overline{\boldsymbol{f}(E)}$.

E 为有界闭集时, 上二者相等. 这是因为连续映射把紧集映到紧集.

•2. 设 $E \subset \mathbb{R}, \boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$.

(1) 若 E 是闭集, $\boldsymbol{f}$ 连续, 则 $\boldsymbol{f}$ 的图像

$$G(\boldsymbol{f}) = \{(x, \boldsymbol{f}(x)) | x \in E\}$$

是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的闭集;

(2) 若 E 是紧致集, $\boldsymbol{f}$ 连续, 求证: $G(\boldsymbol{f})$ 也是紧致集;

(3) 若 $G(\boldsymbol{f})$ 是紧致集, 求证: $\boldsymbol{f}$ 连续.

证明

(1)

引理若 $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$ 都是闭集, 则 $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ 是闭集.

证明　记 $A \times B = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B$, 进而 $A \times B$ 在 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的补集 $C(A \times B)$ 中的点 $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ 满足 $\mathbf{x}' \notin A \vee \mathbf{y}' \notin B$. 当前者成立时, 固定 $\mathbf{y}'$, 知 $\exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m (\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}') \in C(A \times B))$. 此时无论 $\mathbf{y}'$ 在不在 B 内, 上述式子都是成立的, 进而可以构造 $m+n$ 维球在 $C(A \times B)$ 内. 后者同理, 进而 $C(A \times B)$ 是开集, 从而 $A \times B$ 是闭集. 根据引理, $G(\mathbf{f}) = E \times \mathbf{f}(E)$. 因为 $\mathbf{f}$ 连续

(2)　因为紧集的笛卡尔积仍是紧集, 而连续映射将紧集映到紧集, 故结论成立.

(3)

1.9 裴礼文中的连续映射问题

1.9.1 几个连续条件的梳理

定理 1.9.1 *若 $f(x, y)$ 分别关于 x, y 连续, 且对其中一个变量是单调的, 那么 $f(x, y)$ 是二元连续函数.*

证明

不妨设 $f(x, y)$ 关于 y 是单调增的, 取定定义域中的点 $M_0 = (x_0, y_0)$, 给出下面帮助理解的图:

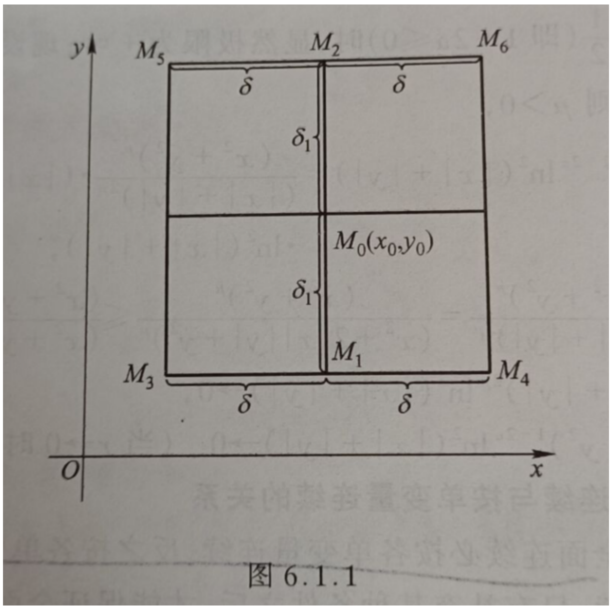


图 1.1: 关于 M_0 构造的邻域

记图中的点 $M_i = (x_i, y_i), i = 1, \cdots, 6$, 届于 $f(x, y)$ 关于 y 连续, 当 $\delta_1 > 0$ 足够小时有

$$|f(M_0) - f(M_2)| < \varepsilon$$
$$|f(M_0) - f(M_1)| < \varepsilon$$

又因为 $f(x, y)$ 关于 x 连续, 固定 $y = y_1$, 取线段 M_3M_4 上的点 (x, y_1), 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ 充分小时有:

$$|f(x, y_1) - f(M_1)| < \varepsilon$$

同样, 取线段 M_5M_6 上的点 (x,y_2), 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $\delta>0$ 充分小时有:

$$|f(x,y_2)-f(M_2)|<\varepsilon$$

从而取矩形 $M_3M_4M_6M_5$ 中的任一点 (x,y), 届于 $f(x,y)$ 关于 y 单调增, 有:

$$f(x,y)<f(x,y+\delta_1)=f(x,y_2)<f(x_0,y_2)+\varepsilon<f(x_0,y_0)+2\varepsilon$$
$$f(x,y)>f(x,y-\delta_1)=f(x,y_1)>f(x_0,y_1)-\varepsilon>f(x_0,y_0)-2\varepsilon$$

从而综上有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<2\varepsilon$$

命题即证.

下面的这组命题统一设 $f(x,y)$ 分别关于 x,y 连续, 并为了叙述方便统一设定义域为 D:

命题 1.9.1 *若 $f(x,y)$ 关于其中一个变量连续, 关于另一个变量一致连续, 那么 $f(x,y)$ 是二元连续函数.*

证明

不妨就设 $f(x,y)$ 关于 x 连续, 关于 y 一致连续. 根据定义, $f(x,y)$ 关于 x 连续即

$$\forall(x_0,y)\in D\forall\varepsilon>0\exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon,x_0)>0\forall(x,y)\in D(|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon)$$

$f(x,y)$ 关于 y 一致连续即

$$\forall(x,y_0)\in D\forall\varepsilon>0\exists\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0\forall(x,y)\in D(|y-y_0|<\delta_2\Rightarrow|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon)$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 此时任取 $(x,y)\in D$, 有:

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&=|f(x,y)-f(x,y_0)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&\leq|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<2\varepsilon\end{aligned}$$

进而命题得证.

命题 1.9.2 *若 $f(x,y)$ 关于其中一个变量满足 Lipschitz 条件, 则 $f(x,y)$ 是二元连续函数.*

证明

不妨设 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件, 根据定义有:

$$\exists L>0\forall(x,y_1),(x,y_2)\in D(|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|)$$

同时届于 $f(x,y)$ 关于 x 连续, 根据定义有:

$$\forall(x_0,y)\in D\forall\varepsilon>0\exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon,x_0)\forall(x,y)\in D(|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon)$$

从而取 $\delta=\min\{\delta_1,\frac{L}{\varepsilon}\}$, 任意给定 $(x_0,y_0)\in D$, 当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时有:

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&=|f(x,y)-f(x,y_0)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&\leq|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\leq L|y-y_0|+\varepsilon<2\varepsilon\end{aligned}$$

进而命题得证.

命题 1.9.3 *设我们所考虑的范围是某个有界闭区域 D, 而 f 在包含 D 的某个区域 G 上有意义, 且在 G 上对一个变量满足局部 Lipschitz 条件. 比如对 y 满足局部 Lipschitz 条件, 指的是:*

$$\forall (x_0,y_0)\in G\exists U(x_0,y_0)\subset G\exists L>0\forall (x,y_1),(x,y_2)\in U(|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|)$$

证明

不妨设 $f(x,y)$ 关于 y 满足局部 Lipschitz 条件, 知对 G 中的全体点 (x,y), $\bigcup\limits_{(x,y)\in G} U(x,y)$ 构成其一个开覆盖. 因为 D 是有界的, 自然可以将 G 视作有界开区域, 从而可从开覆盖中选出有限子覆盖 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U(x_k,y_k)\supset G$. 对这其中的每个邻域应用命题 3 即得命题.

1.9.2 习题

6.1.11 设 $f(x,y)$ 在 $G=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 上有定义, 如果 $f(x,0)$ 在点 $x=0$ 处连续, $\partial_y f(x,y)$ 在 G 上有界, 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

证明

届于 $f(x,0)$ 在点 $x=0$ 处连续, 由定义:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0\forall x\in U(0)(|x-0|<\delta_1\Rightarrow|f(x,0)-f(0,0)|<\varepsilon)$$

根据 $\partial_y f(x,y)$ 有界, 设 $\exists M>0(|\partial_y f(x,y)|\leq M)$. 届于 G 是凸域, $\partial_y f(x,y)$ 存在, 将 $f(x,y)$ 视作关于 y 的函数, 应用中值定理有:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|\partial_y f(x,\eta)|\cdot|y_1-y_2|\leq M|y_1-y_2|$$

将 $x=0,y_2=0$ 代入上式知式子依旧成立, 从而当 $\sqrt{x^2+y^2}<\min\{\delta_1,\frac{M}{\varepsilon}\}$ 时, 有:

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)|&=|f(x,y)-f(x,0)+f(x,0)-f(0,0)|\\&\leq|f(x,y)-f(x,0)|+|f(x,0),f(0,0)|\leq M|y|+\varepsilon<2\varepsilon\end{aligned}$$

进而命题得证.

6.1.12 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}\subset\mathbb{R}^2$ 上连续, 其值域为 R, 试证: $\forall\{u_n\}|_{n=1}^{\infty}\subset R$, $\exists$ 收敛的子列 $\{u_{n_k}\}$ 及点 $(x_0,y_0)\in\overline{D}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=f(x_0,y_0)$.

证明

既然 $\overline{D}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的有界闭区域, 这便说明 $\overline{D}$ 是紧集, 从而其中的任意序列有收敛子列. 取 $\{u_n\}$ 的某收敛子列 $\{u_{n_k}\}$ 并设其收敛到 A. 既然 $f:\overline{D}\to R$ 是连续函数, 由介值性知 $\forall c\in R\exists(x_c,y_c)\in\overline{D}(f(x_c,y_c)=c)$, 取 $c=A$ 即证命题.

Chapter 2

多变量函数的微分学

2.1 方向导数和偏导数

2.1.1 练习题

1. 求方向导数:

(1) 设函数 $f(x,y)=xy$, 计算函数 f 在点 $(1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{u}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 的方向导数.

解　用定义:

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t)(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t)-1}{t}=\sqrt{2}$$

(2) 设 $f(x,y)=(x-1)^2-y^2$, 方向 $\boldsymbol{u}=(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$. 求 f 在点 $(0,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数.

解　由定义:

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\frac{3}{5}t-1)^2-(1-\frac{4}{5}t)^2}{t}=\frac{14}{5}$$

2. 设函数 $f(x,y)=\sqrt{|x^2-y^2|}$. 问: 在坐标原点处沿哪些方向 f 的方向导数存在?

解

取 $\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi)$, 考虑定义:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{|t^2\cos^2\theta-t^2\sin^2\theta|}}{t}$$

知只能要求 $\sqrt{|\cos^2\theta-\sin^2\theta|}=0$, 即 $\cos2\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$, 即沿 $y=\pm x$ 方向 f 的方向导数存在.

3. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

问: 在坐标原点处沿哪些方向 f 的方向导数存在?

解

设方向 $\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi)$ 由定义:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2\cos\theta\sin\theta}{|t|}}{t}=\frac{t\cos\theta\sin\theta}{|t|}$$

知只能要求 $\cos\theta\sin\theta=0$, 即 $\theta=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}$. 此即沿 $y=0$ 或 $y=x$ 或 $x=0$ 或 $y=-x$ 时方向导数存在.

4. 设函数 $f(x,y,z)=|x+y+z|$. 问在平面 $x+y+z=0$ 上的每一点处, 沿怎样的方向 f 存在着方向导数?

解

由定义, 并设 (x_0,y_0,z_0) 在给定的平面上. 设 $\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\cos\varphi,\cos\phi),\theta,\varphi,\phi\in[0,2\pi)$, 知 $\cos^2\theta+\cos^2\varphi+\cos^2\phi=1$, 有:

$$\lim_{t\to 0}\frac{|x_0+t\cos\theta+y_0+t\cos\varphi+z_0+t\cos\phi|}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}|\cos\theta+\cos\varphi+\cos\phi|$$

极限存在时只能有 $|\cos\theta+\cos\varphi+\cos\phi|=0$

5. 计算偏导数:

(1) 设 $f(x,y)=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1),\frac{\partial f}{\partial y}(0,1),\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

解 知

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

进而欲求分别为 $1,2,1+\frac{1}{\sqrt{5}},1+\frac{2}{\sqrt{5}}$.

其余略.

2.2 多变量函数的微分

2.2.1 练习题

1. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

求证: 函数 f 在原点处各个方向导数存在, 但在原点处 f 不可微.

证明

由方向导数的定义, 设 $\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi)$ 是方向:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\boldsymbol{u})-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=\cot\theta$$

当 $\theta\neq 0\wedge\theta\neq\pi$, 上述极限自然存在. 当 $\theta=0\vee\theta=\pi$, 此时函数即 $f(x,y)=0$, 方向导数显然存在. 但考虑路径 $y=ax^2,a\neq 0$, 知沿这路径趋向原点时函数的极限不存在, 进而函数在原点不连续, 自然不可微.

2. 求证: 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微.

证明

按定义并记 $\boldsymbol{p}=(x,y)$:

$$\lim_{\|\boldsymbol{p}\|\to 0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\|\ \boldsymbol{p}\ \|}$$

知这个极限并不存在, 进而 $f(x,y)$ 在原点处不可微.

3. 用可微的定义证明: 函数 $f(x,y)=xy$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的每一点处可微.
证明
取点 (x_0,y_0), 并取增量 $\boldsymbol{h}=(h^1,h^2)$, 按定义:

$$f(x_0+h^1,y_0+h^2)-f(x_0,y_0)=(x_0+h^1)(y_0+h^2)-x_0y_0=y_0h^1+x_0h^2+o(\|\,\boldsymbol{h}\,\|)$$

进而命题成立.

4.5. 略.

2.3 映射的微分

2.3.1 练习题

1. 在指定点处计算下列映射的 Jacobian 和微分:
(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=(xy^2-3x^2,3x-5y^2)$, 在点 $(1,-1)$ 处;
解

$$J\boldsymbol{f}(1,-1)=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 10\end{pmatrix}, d\boldsymbol{f}(1,-1)=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 10\end{pmatrix}\boldsymbol{h}$$

(2),(3) 略

2. 略.

3. 设区域 $D\subset\mathbb{R}^n$, 映射 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:D\to\mathbb{R}^m$, 求证:
(1) $J(c\boldsymbol{f})=cJ\boldsymbol{f}$, 其中 c 为常数;
证明　利用矩阵数乘即可.
(2) $J(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})=J\boldsymbol{f}+J\boldsymbol{g}$;
证明　利用矩阵加法即可.
(3) 当 $m=1$ 时, 有 $J(fg)=gJf+fJg$; 证明

引理 2.3.1 (偏导数乘法法则) $f,g:\mathbb{R}^n\supset D\to\mathbb{R},\forall 1\le i\le n(\frac{\partial fg}{\partial x^i}=g\frac{\partial f}{\partial x^i}+f\frac{\partial g}{\partial x^i})$.

证明　不妨取 $i=1$, 由定义:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(f(x^1+h,x^2,\cdots,x^n)g(x^1+h,x^2,\cdots,x^n)-f(x^1,x^2,\cdots,x^n)g(x^1,x^2,\cdots,x^n))\\
=&\frac{1}{h}(f(x^1+h,x^2,\cdots,x^n)g(x^1+h,x^2,\cdots,x^n)-f(x^1,x^2,\cdots,x^n)g(x^1+h,x^2,\cdots,x^n)\\
&+f(x^1,x^2,\cdots,x^n)g(x^1+h,x^2,\cdots,x^n)-f(x^1,x^2,\cdots,x^n)g(x^1,x^2,\cdots,x^n))\\
\to&g(x^1,x^2,\cdots,x^n)\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1,x^2,\cdots,x^n)+f(x^1,x^2,\cdots,x^n)\frac{\partial g}{\partial x^1}(x^1,x^2,\cdots,x^n),h\to 0
\end{aligned}$$

这里极限存在一方面是偏导数的定义, 另一方面是偏导存在则函数在该方向必连续. 其余变量类似, 故引理得证.

回到原题, $J(fg)=(\frac{\partial(fg)}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial(fg)}{\partial x^n})$, 再套用引理和矩阵加法法则即得.

(4) 当 $m>1$ 时, 则有

$$J(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}(J\boldsymbol{f})+\boldsymbol{f}(J\boldsymbol{g})$$

这里, 上式左边圆括号表示欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中的内积, 而右边涉及 $1\times m$ 矩阵同 $m\times n$ 矩阵相乘.

证明

考虑 $\boldsymbol{f}=(f^1,\cdots,f^m),\boldsymbol{g}=(g^1,\cdots,g^m)$, 这里 $f^i,g^i,i=1,\cdots,m$ 都是满足 (3) 的函数. 从而:

$$J(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=J(\sum_{i=1}^m f^ig^i)$$

注意到点积的结果是一个数, 所以 $\sum\limits_{i=1}^n f^ig^i$ 是 D 到 $\mathbb{R}$ 的函数, 满足 (3) 的条件. 又结合 (2), 知:

$$J(\sum_{i=1}^m f^ig^i)=\sum_{i=1}^m J(f^ig^i)=\sum_{i=1}^m(g^iJ(f^i)+f^iJ(g^i))$$

把这其中的每一项写开, 得到第 i 项即:

$$g^i(\frac{\partial f^i}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f^i}{\partial x^n})+f^i(\frac{\partial g^i}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial g^i}{\partial x^n}) \tag{2.1}$$

这是一个 $1\times n$ 矩阵, 再看题设等式右端的式子, 把它写开:

$$\boldsymbol{g}(J\boldsymbol{f})+\boldsymbol{f}(J\boldsymbol{g})=\begin{pmatrix}g^1 & \cdots & g^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f^1 & \cdots & f^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^m}{\partial x^n}\end{pmatrix}$$

这也是一个 $1\times n$ 矩阵, 它的第一项是 $\sum\limits_{i=1}^m(g^i\frac{\partial f^i}{\partial x^1}+f^i\frac{\partial g^i}{\partial x^1})$, 这正好是上面那个式子令 i 从 1 到 m 求和的结果, 故命题得证.

4. 设 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, 并且对一切 $t\in[a,b]$, 有 $\parallel\boldsymbol{f}(t)\parallel=const$, 求证: $(J\boldsymbol{f},\boldsymbol{f})=0$, 并对此式作出几何解释.

证明

由 $\parallel\boldsymbol{f}(t)\parallel=const$, 记 $\boldsymbol{f}=(f^1,\cdots,f^n)$, 这个式子可以写开成下面的形式:

$$\sqrt{(f^1(t))^2+\cdots+(f^n(t))^2}=c\Rightarrow(f^1(t))^2+\cdots+(f^n(t))^2=c^2$$

上述式子两边对 t 求导, 有:

$$2f^1(t)\frac{df^1}{dt}(t)+\cdots+2f^n(t)\frac{df^n(t)}{dt}(t)=0$$

而

$$J\boldsymbol{f}=(\frac{df^1}{dt},\cdots,\frac{df^n}{dt})$$

比较即得题式成立. 这个结果从某种意义上说明了梯度向量和等值面是正交的.

5. 设 α,β,γ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 求出一个由 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的可微映射 $\boldsymbol{f}$, 使得

$$J\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\alpha(x) & 0 & 0\\ 0 & \beta(x) & 0\\ 0 & 0 & \gamma(x)\end{pmatrix}$$

解

因为 α,β,γ 连续, 故其必可积, 考虑函数

$$\boldsymbol{f}:(x^1,x^2,x^3)\mapsto(\int_0^{x^1}\alpha(t)dt,\int_0^{x^2}\beta(t)dt,\int_0^{x^3}\gamma(t)dt)$$

即可.

6. 映射 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 如果条件

$$\boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\mu\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

对一切 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ 和一切 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 成立, 则称 $\boldsymbol{f}$ 是一**线性映射**. 证明:

(1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$;

证明

取 $\lambda=\mu=1,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})\Rightarrow\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$.

(2) $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$;

证明

取 $\lambda=-1,\mu=0$, 有 $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

(3) 映射 $\boldsymbol{f}$ 由 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n)$ 完全确定, 其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位坐标向量.

证明

由定义易知 $\boldsymbol{f}(\sum\limits_{i=1}^n a_i\boldsymbol{e}_i)=\sum\limits_{i=1}^n a_i\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)$, 而式子左端的自变量即可表示 $\mathbb{R}^n$ 中的全体向量.

7. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为一线性映射, 试求 $J\boldsymbol{f}$.

证明

易知若 $\boldsymbol{f}=(f^1,\cdots,f^m)$ 是线性映射, 那么 $f^i(i-1,\cdots,m)$ 都是线性映射. 把 $J\boldsymbol{f}$ 写开:

$$J\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}\end{pmatrix}$$

对 $\frac{\partial f^1}{\partial x^1}$, 按定义:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^1(x^1+h,x^2,\cdots,x^n)-f(x^1,x^2,\cdots,x^n)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^1(h,0,\cdots,0)}{h}=f^1(\boldsymbol{e}_1)$$

同样可以计算其他的偏导数, 进而知

$$J\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}f^1(\boldsymbol{e}_1) & f^1(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f^1(\boldsymbol{e}_n)\\ f^2(\boldsymbol{e}_1) & f^2(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f^2(\boldsymbol{e}_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f^m(\boldsymbol{e}_1) & f^m(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f^m(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

8. 设 $\boldsymbol{E}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 适合: 对一切 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 有 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$, 称 $\boldsymbol{E}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**恒等映射**. 求证: $\boldsymbol{E}$ 是一个线性映射, 并且 $J\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}_n$, 这里 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位阵.

证明

线性映射略, 记 $\boldsymbol{E}=(E^1,\cdots,E^n)$, 代入 $\boldsymbol{e}_1$ 并比较分量知 $E^1(\boldsymbol{e}_1)=1,E^1(\boldsymbol{e}_2)=\cdots=E^1(\boldsymbol{e}_n)=0$, 其余类似.

2.4 复合求导

1. 设 $u=f(x^2+y^2)$, 证明 $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

证明

记 $\xi=x^2+y^2$, 有

$$y\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=2xy\frac{df}{d\xi}$$
$$x\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}=2xy\frac{df}{d\xi}$$

进而题式成立.

2. 至 **7.** 略

8. 设 $f(x,y,z)=F(u,v,w)$, 其中 $x^2=vw, y^2=wu, z^2=uv$. 求证:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}$$

证明

$$f(x,y,z)=F(u,v,w)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

其中 $y^2=wu\Rightarrow 2y\frac{\partial y}{\partial u}=w, z^2=uv\Rightarrow 2z\frac{\partial z}{\partial u}=v$, 代入并相加即可.

9. 略.

10. 设有函数 $f(x,y,z)$, $\boldsymbol{u}$ 是一个方向, 函数 f 沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数记作 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}$. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的三个互相垂直的方向, 求证:

$$(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_1})^2+(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_2})^2+(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_3})^2=(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2$$

证明

（感觉上的证明）x,y,z 实际上是 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$, 这里 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是标准正交基, 而 $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ 到 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 的过渡阵是一个正交阵（旋转变换）, 其行列式的绝对值为 1, 正负取决于手性）, 故在平方下每个元素都乘了一个 1, 进而相等.

2.5 隐函数定理

2.5.1 用归纳法证明

此方法由 [4] 给出. 先证明最简单的二维情况:

定理 2.5.1 (隐函数定理) *设开集 $D\subset\mathbb{R}^2$, 函数 $F:D\to\mathbb{R}$ 满足条件:*

(i) $F\in C^1(D)$;（连续可导）

(ii) 点 $(x_0,y_0)\in D$ 使得 $F(x_0,y_0)=0$;（点在函数上）

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,（关于 y 单调）

那么存在一个包含 (x_0, y_0) 的开矩形 $I \times J \subset D$, 使得:

1° 对于每一个 $x \in I$, 方程 $F(x, y) = 0$ 在 J 中有唯一解 $f(x)$;（可解性与唯一性）

2° $y_0 = f(x_0)$;（和点的联系）

3° $f \in C^1(I)$;（产生的显函数连续可导）

4° 当 $x \in I$ 时, 有:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)},$$

其中 $y = f(x)$.（导函数求法）

证明

因为 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, 不妨设其大于 0, 由条件 (i), $\frac{\partial F}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续, 故存在一个包含 (x_0, y_0) 的开矩形 $I' \times J$ 满足 $I' \times \overline{J} \subset D$ 并且在 $I' \times J$ 上 $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$, 于是对于任意给定的 $x \in I'$, $F(x, y)$ 在闭区间 $\overline{J}$ 上是严格递增的连续函数. 设 $J = (c, d)$, 由条件 (ii) 知关于 y 的函数 $F(x_0, y)$ 在 (c, d) 上有零点, 故

$$F(x_0, c) < 0, \quad F(x_0, d) > 0$$

再把 $F(x, y)$ 看成关于 x 的函数, 因为 F 在 D 上连续, 故存在含 x_0 的开矩形 $I \subset I'$ 使得当 $x \in I$ 时

$$F(x, c) < 0, \quad F(x, d) > 0$$

由连续函数的零点定理和严格单调性: 对每一 $x \in I$ 存在唯一的一个数, 记作 $f(x) \in (c, d) = J$, 使得 $F(x, f(x)) = 0$, 这就证明了 1°, 由唯一性可知 $f(x)$ 满足 2°.

下面证明 3° 和 4°, 首先需要说明 f 在开区间 I 上连续. 特别地需说明 f 在 x_0 处连续, 这是因为任取 y_0 的 ε 邻域 $V_\varepsilon(y_0)$（这里 ε 足够小）, 相应的都有 x_0 的邻域 $U_\delta(x_0)$ 满足 $U_\delta(x_0) \times \overline{V_\varepsilon(y_0)} \subset D$ 并且在

$U_\delta(x_0) \times V_\varepsilon(y_0)$ 上 $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$, 从而重复上述过程, 相应地知道对每一 $x \in U_\delta(x_0)$ 存在唯一的一个数 $f(x) \in V_\varepsilon(y_0)$, 从而 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 再任取 $x_1 \in I$, 设 $y_1 = f(x_1)$, 则 $(x_1, y_1) \in I \times J$, 因为 $F(x_1, y_1) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1) > 0$, 故 x_1 可以视作新的 x_0 从而重复上述证明.

下面开始证明 3° 和 4°, 首先是证明 f 可导:

设 $x \in I$, 取 h 很小使得 $x + h \in I$, 再设 $k = f(x+h) - f(x)$, 由 f 的连续性可知 $h \to 0 \Rightarrow k \to 0$, 由 F 的可微性并用定理 14. 2（导数定义）可得:

$$\begin{aligned} 0 =& F(x+h, f(x+h)) - F(x, y) \\ =& F(x+h, y+k) - F(x, y) \\ =& \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)k + o(h) + o(k) \end{aligned}$$

其中 $h \to 0 \Rightarrow k \to 0$, 注意到上式可以化成:

$$0 = (\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{o(h)}{h}) + (\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + \frac{o(k)}{k})\frac{k}{h}$$

进而有:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{o(h)}{h}}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + \frac{o(k)}{k}}$$

故

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

其中 $x \in I$ 且 $y = f(x)$, 又由连续函数作算式依旧连续知 $f'(x)$ 连续. □

记忆的方法: 对恒等式

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

两边对 x 求导, 有:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial f(x)}(x, f(x)) f'(x) \equiv 0$$

移项即得.

再对 $F: \mathbb{R}^{n+1} \supset D \to \mathbb{R}$ 考虑这个定理, 证明方法是类似的, 定理如下:

定理 2.5.2 *设开集 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $F: D \to \mathbb{R}$, 满足条件:*

(i) $F \in C^{(1)}(D)$;

(ii) $F(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$, 这里 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}$ 且 $(\boldsymbol{x}_0, y_0) \in D$;

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$,

则存在 $(\boldsymbol{x}_0, y_0)$ 的一个邻域 $G \times J$, 其中 G 是 $\boldsymbol{x}_0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个邻域, J 是 $\mathbb{R}$ 中含 y_0 的一个开区间, 使得:

1° 对于每一个 $\boldsymbol{x} \in G$, 方程

$$F(\boldsymbol{x}, y) = 0$$

在 J 中有唯一解, 记为 $f(\boldsymbol{x})$;

2° $y_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$;

3° $f \in C^1(G)$;

4° 当 $\boldsymbol{x} \in G$ 时,

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, y)} (i = 1, \cdots, n)$$

其中 $y = f(\boldsymbol{x})$.

证明

因为 $\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$, 不妨设 $\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0, y_0) > 0$, 届于 $F \in C^1(D)$, 知必能找到包含 $(\boldsymbol{x}_0, y_0)$ 的矩形 $\boldsymbol{I}' \times J$ 满足 $\boldsymbol{I}' \times \overline{J} \subset D$, 且在 $\boldsymbol{I}' \times J$ 上 $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$. 于是对于任意给定的 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}'$, $F(\boldsymbol{x}, y)$ 在闭区间 $\overline{J}$ 上是严格递增的连续函数. 设 $J = (c, d)$, 由条件 (ii) 知关于 y 的函数 $F(\boldsymbol{x}, y)$ 在 (c, d) 上有零点, 故

$$F(\boldsymbol{x}_0, c) < 0, \quad F(\boldsymbol{x}_0, d) > 0$$

再把 $F(\boldsymbol{x}, y)$ 看成关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数, 因为 F 在 D 上连续, 故存在包含 $\boldsymbol{x}_0$ 的开区域 $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{I}'$ 使得当 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$ 时

$$F(\boldsymbol{x}, c) < 0, \quad F(\boldsymbol{x}, d) > 0$$

由连续函数的零点定理和严格单调性, 对每一 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$ 存在唯一的数, 记作 $f(\boldsymbol{x}) \in (c, d) = J$, 使得 $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0$, 这就证明了 1°, 由唯一性可知 $f(\boldsymbol{x})$ 满足 2°.

下面证明 3° 和 4°, 首先需要说明 f 在开区域 $\boldsymbol{I}$ 上连续, 特别地需说明 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续. 这是因为任取 y_0 的 ε 邻域 $V_\varepsilon(y_0)$（这里 ε 足够小）, 相应的都有 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 满足 $U_\delta(\boldsymbol{x}_0) \times \overline{V_\varepsilon(y_0)} \subset D$ 并且在 $U_\delta(\boldsymbol{x}_0) \times V_\varepsilon(y_0)$ 上 $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$, 从而重复上述过程, 相应地知道对每一 $\boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 存在唯一的一个数 $f(\boldsymbol{x}) \in V_\varepsilon(y_0)$, 从而 $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$. 再任取 $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{I}$, 设 $y_1 = f(\boldsymbol{x}_1)$, 则 $(\boldsymbol{x}_1, y_1) \in \boldsymbol{I} \times J$, 因为 $F(\boldsymbol{x}_1, y_1) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_1, y_1) > 0$, 故 $\boldsymbol{x}_1$ 可以视作新的 $\boldsymbol{x}_0$ 从而重复上述证明.

下面开始证明 3° 和 4°, 首先是证明 f 可导:

设 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)\in\boldsymbol{I}$, 取 $\boldsymbol{h}=(h^1,\cdots,h^n)$, 再设 $k=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})$, 由 f 的连续性可知 $\|\boldsymbol{h}\|\to 0\Rightarrow k\to 0$, 由 F 的可微性并由导数定义可得:

$$\begin{aligned}0&=F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h},f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}))-F(\boldsymbol{x},y)\\&=F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h},y+k)-F(\boldsymbol{x},y)\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x^i}(\boldsymbol{x},y)h^i+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x},y)k+o(\boldsymbol{h})+o(k)\end{aligned}$$

其中 $\|\boldsymbol{h}\|\to 0\Rightarrow k\to 0$. 特别地, 若取 $\boldsymbol{h}_i=(0,\cdots,0,h^i,0,\cdots,0),k_i=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}_i,y)-f(\boldsymbol{x})$, 上式则变为:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(\boldsymbol{x},y)h^i+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x},y)k+o(h^i)+o(k)=0$$

整理可得:

$$(\frac{\partial F}{\partial x^i}(\boldsymbol{x},y)+\frac{o(h_i)}{h^i})+(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x},y)+\frac{o(k)}{k})\frac{k}{h^i}=0$$

从而考虑偏导数定义:

$$\lim_{h^i\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}_i)-f(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{h}_i\|}=\lim_{h^i\to 0}\frac{k}{h^i}=\lim_{h^i\to 0}-\frac{(\frac{\partial F}{\partial x^i}(\boldsymbol{x},y)+\frac{o(h^i)}{h^i})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x},y)+\frac{o(k)}{k}}$$

即得:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x^i}(\boldsymbol{x},y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x},y)}(i=1,\cdots,n)$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I},y=f(\boldsymbol{x})$. 又由连续函数作算式依旧连续知 $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}(i=1,\cdots,n)$ 连续, 进而 $f\in C^1(G)$.

□

最后, 对一般的映射证明隐函数定理:

定理 2.5.3 (隐函数定理) 如果映射 $F:U\to\mathbb{R}^n$ 定义在点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in\mathbb{R}^{m+n}$ 的邻域 U 上, 并且满足下述条件

- $\boldsymbol{F}\in C^{(p)}(U;\mathbb{R}^n),p\geq 1,$
- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0$
- $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 有逆阵,

则存在 $(m+n)$ 维区间 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}^m_x\times\boldsymbol{I}^n_y\subset U$, 其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}^m_x&=\{x\in\mathbb{R}^m|\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\alpha\},\\\boldsymbol{I}^n_y&=\{y\in\mathbb{R}^n|\ \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|<\beta\}\end{aligned}$$

并且存在映射 $\boldsymbol{f}\in C^{(p)}(\boldsymbol{I}^m_x;\boldsymbol{I}^n_y)$, 对任意的点 $(x,y)\in\boldsymbol{I}^m_x\times\boldsymbol{I}^n_y$, 有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

同时

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=-[\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]^{-1}[\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]$$

这里

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0\Leftrightarrow\begin{cases}F^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0\\F^2(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0\\\quad\vdots\\F^n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\Leftrightarrow\begin{cases}y^1=f^1(x^1,\cdots,x^m)\\y^2=f^2(x^2,\cdots,x^m)\\\quad\vdots\\y^n=f^n(x^1,\cdots,x^m)\end{cases}$$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\\vdots&&\vdots\\\frac{\partial f^n}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial f^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial F^1}{\partial x^m}\\\vdots&&\vdots\\\frac{\partial F^n}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial F^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$$\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y^1}&\cdots&\frac{\partial F^1}{\partial y^n}\\\vdots&&\vdots\\\frac{\partial F^n}{\partial y^1}&\cdots&\frac{\partial F^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

证明

用数学归纳法, $n=1$ 时即定理 14. 12, 假设定理对于 $(n-1)$ 维是正确的, 要证明它对 n 维也是正确的.

由 3° 知 $|\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)|\neq 0$, 从而这个行列式的最后一行中必有一个元素不为 0, 不妨设 $\frac{\partial F^n}{\partial y^n}\neq 0$. 此时对式子

$$F^n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0$$

将其看作关于 $(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1})$ 和 y^n 的式子, 应用定理 14. 12 可知存在 $(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)$ 的一个邻域 $\tilde{\boldsymbol{I}}^{m\times n}=(\tilde{\boldsymbol{I}}_x^m\times\tilde{\boldsymbol{I}}_y^{n-1})\times\tilde{I}_y^1\subset U$ 和函数 $\tilde{f}\in C^{(p)}(\tilde{\boldsymbol{I}}_x^m\times\tilde{\boldsymbol{I}}_y^{n-1};\tilde{I}_y^1)$, 使得

$$y^n=\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}),(x^1,\cdots,x^m)\in\tilde{\boldsymbol{I}}_x^m,(y^1,\cdots,y^{n-1})\in\tilde{\boldsymbol{I}}_y^{n-1}$$

将上式代入题目所给条件的方程中, 得到:

$$\begin{cases}F^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}))=0\\F^2(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}))=0\\\quad\vdots\\F^n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}))=0\end{cases}$$

记:

$$\begin{cases} G^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}) = F^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1})) \\ G^2(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}) = F^2(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1})) \\ \quad\vdots \\ G^{n-1}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}) = F^{n-1}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1})) \end{cases}$$

知 $G^i \in C^{(p)}(\tilde{\boldsymbol{I}}_x^m \times \tilde{\boldsymbol{I}}_y^{n-1};\mathbb{R})$ 且 $G^i(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}) = 0$, 这里 $i = 1,\cdots,n-1$. 由 $G^i(i = 1,\cdots,n-1)$ 的定义可知:

$$\frac{\partial G^i}{\partial y^j} = \frac{\partial F^i}{\partial y^j} + \frac{\partial F^i}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^j}(j = 1,\cdots,n-1)$$

同时设:

$$G^n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}) = F^n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}))$$

既然在 $\boldsymbol{I}_x^m \times \boldsymbol{I}_y^{n-1}$ 上 $G^n \equiv 0(i = 1,\cdots,n-1)$, 故它对 y^i 的偏导数也恒为 0, 即:

$$\frac{\partial G^n}{\partial y^i} = \frac{\partial F^n}{\partial y^i} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \equiv 0(i = 1,\cdots,n-1)$$

从而对矩阵

$$\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

用最后一列乘以 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i}$ 加到第 i 列上, 计算行列式有:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} + \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{vmatrix}$$

代入 $\frac{\partial G^i}{\partial y^j} = \frac{\partial F^i}{\partial y^j} + \frac{\partial F^i}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^j}$ 与 $\frac{\partial G^n}{\partial y^i} = \frac{\partial F^n}{\partial y^i} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \equiv 0$, 有:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} + \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G^1}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G^{n-1}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G^{n-1}}{\partial y^n-1} & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial y^n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{vmatrix}$$

因为已经明确了 $\frac{\partial F^n}{\partial y^n} \neq 0$, 同时假设有这个行列式本身不为 0, 故因为

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G^1}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G^{n-1}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G^{n-1}}{\partial y^n-1} & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial y^n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G^1}{\partial y^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G^{n-1}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \end{vmatrix}\frac{\partial F^n}{\partial y^n}$$

可知行列式 $\begin{vmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G^1}{\partial y^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G^{n-1}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial G^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$. 根据归纳假设, 存在区间 $\boldsymbol{I}^{m+n-1} = \boldsymbol{I}_x^m \times \boldsymbol{I}_y^{n-1} \subset \tilde{\boldsymbol{I}}_x^m \times \tilde{\boldsymbol{I}}_y^{n-1}$, 该区间是 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^{n-1})$ 的邻域, 且存在映射 $\boldsymbol{f} \in C^{(p)}(\boldsymbol{I}_x^m;\boldsymbol{I}_y^{n-1})$ 使得在区间 $\boldsymbol{I}^{m+n-1}$

上, 方程组

$$\begin{cases} G^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}) = F^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1})) \\ G^2(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}) = F^2(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1})) \\ \quad\vdots \\ G^{n-1}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1}) = F^{n-1}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1},\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1})) \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1,\cdots,x^m) \\ y^2 = f^2(x^1,\cdots,x^m) \\ \quad\vdots \\ y^{n-1} = f^{n-1}(x^1,\cdots,x^m) \end{cases} \qquad \boldsymbol{x} = (x^1,\cdots,x^m) \in \boldsymbol{I}_x^m$$

因为 $\boldsymbol{I}_y^{n-1} \subset \tilde{\boldsymbol{I}}_y^{n-1}, \boldsymbol{I}_x^m \subset \tilde{\boldsymbol{I}}_x^m$, 故将上述方程的 $n-1$ 个式子代回到 $y^n = \tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^{n-1})$ 中, 即可得到

$$y^n = f^n(x^1,\cdots,x^m).$$

现在已经证明了 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 再证明关于导数的式子:

届于 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \equiv 0$, 式子两边对 $\boldsymbol{x}$ 的诸分量求偏导, 所得结果应依旧为 0. 为了展示得更清楚, 将式子写成坐标形式:

$$\begin{cases} F^1(x^1,\cdots,x^m,f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^m)) \equiv 0 \\ F^2(x^1,\cdots,x^m,f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^m)) \equiv 0 \\ \quad\vdots \\ F^n(x^1,\cdots,x^m,f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^m)) \equiv 0 \end{cases}$$

两边对 $x^i (i=1,\cdots,m)$ 求偏导, 可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial F^1}{\partial x^i} + \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial F^1}{\partial f^j}\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \equiv 0 \\ \frac{\partial F^2}{\partial x^i} + \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial F^2}{\partial f^j}\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \equiv 0 \\ \quad\vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^i} + \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial F^n}{\partial f^j}\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \equiv 0 \end{cases} \qquad i = 1,\cdots,m$$

观察可知上述式子可以写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial f^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial f^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial f^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial f^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \equiv 0$$

按照题目所给出的形式, 即:

$$\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$$

届于 $\boldsymbol{F}$ 的 p 阶连续可微性, 由条件给出的 $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 可逆可推出 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的某邻域内 $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 可逆, 进而上等式即:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]^{-1}[\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]$$

□

2.5.2 直接证明

本方法源于 [4] 的习题. 下面给出该题并逐个解决（记号上沿用归纳法证明中的最后部分, 该题旨在不通过归纳法, 直接证明一般映射的情况）:

(a) 假设隐函数定理的条件已经满足, 且设 $\boldsymbol{F}_y^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\frac{\partial F^i}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial F^i}{\partial y^n})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是矩阵 $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的第 i 行. 证明: 对于点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的某个充分小的邻域 $U = \boldsymbol{I}_x^m \times \boldsymbol{I}_n^y$ 内的所有点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 由向量 $\boldsymbol{F}_y^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 组成的矩阵的行列式不为零.

证明

因为 $\boldsymbol{F} \in C^{(p)}(U;\mathbb{R}^n), p \geq 1$, 故 $\boldsymbol{F}$ 的所有偏导数都是连续的. 因为 $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 有逆阵, 故 $|\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)| \neq 0$. 因为取行列式的本质是元素之间的四则运算, 故 $|\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|$ 依旧是连续函数, 进而存在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的邻域 $U = \boldsymbol{I}_x^m \times \boldsymbol{I}_y^n$ 使得其内的所有点都满足 $|\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \neq 0$.

(b) 如果对于每个 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}_x^m$, 存在点 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{I}_y^n$, 使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1) = 0, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2) = 0$, 则对于每个 $i \in \{1,\cdots,n\}$, 可以在联结点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)$ 与点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)$ 的线段上找到一点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_i)$, 使得

$$\boldsymbol{F}_y^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_i)(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1) = 0 \quad (i=1,\cdots,n).$$

试证由此可以推出 $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2$, 也就是说, 如果隐函数 $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I}_x^m \to \boldsymbol{I}_y^n$ 存在, 则它是唯一的.

证明

首先有多元函数中的中值定理作为引理:

引理 2.5.1 设 $f: G \to \mathbb{R}$ 是定义在区域 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上的实值函数, 闭区间 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}] \subset G$. 如果函数 f 在闭区间 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}]$ 上连续, 在开区间 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ 上可微, 则存在点 $\boldsymbol{\xi} \in (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$, 使得下式成立

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{h} := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\xi)h^i$$

这里 $\boldsymbol{h} = (h^1,\cdot,h^m)$.

证明

考察定义在 $[0,1]$ 上的辅助函数

$$F(t) = f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}), \quad 0 \leq t \leq 1$$

函数 $F(t)$ 满足拉格朗日中值定理的所有条件, 因此存在点 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)\cdot 1$$

而 $F(1) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}), F(0) = f(\boldsymbol{x}), F'(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})h^i$, 进而命题得证.

知 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_k) = 0 \Rightarrow F^i(x,y_k) = 0, k=1,2, i=1,\cdots,n$. 从而固定 i, 知 $F^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足中值定理的条件, 取 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1$, 对其用中值定理有:

$$\begin{aligned} 0 =& F^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2) - F^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1) \\ =& \boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_i)(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1) \end{aligned}$$

令 i 取遍 1 到 n 即得欲证式. 若 $\boldsymbol{y}_2 \neq \boldsymbol{y}_1$, 固定 i, 将 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i)$ 代入 $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, 得到:

$$\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^1_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^i_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^n_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i) \end{pmatrix}$$

根据 (a), 上述矩阵的行列式非零, 从而其乘以任何一个向量都是保秩的, 但对秩为 n 的向量 $\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1 = (y^1_2 - y^1_1, \cdots, y^n_2 - y^n_1)$, 有:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^1_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^i_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^n_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i) \end{pmatrix} (\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^1_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^{i-1}_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i)(\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1) \\ 0 \\ \boldsymbol{F}^{i+1}_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i)(\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^n_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i)(\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1) \end{pmatrix}$$

后者的秩显然小于等于 $n-1$, 矛盾! 故只能有 $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_1$.

(c) 证明: 如果球 $B(\boldsymbol{y}_0; r) \subset \boldsymbol{I}^n_y$, 则当 $\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \|_{\mathbb{R}^n} = r > 0$ 时, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \neq 0$.

证明

如果存在 $\boldsymbol{y}' \in \partial B(\boldsymbol{y}_0; r) \subset \boldsymbol{I}^n_y$ 使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}') = 0$, 因为同时有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$, 故由 (b) 知 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}_0$, 矛盾! 故 $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{y}_0; r)(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \neq 0)$.

(d) 证明: 函数 $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \|^2_{\mathbb{R}^n}$ 连续且在球面 $\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \|_{\mathbb{R}^n} = r$ 上有正的极小值 μ.

证明

届于 $\boldsymbol{F} \in C^{(p)}(U; \mathbb{R}^n), p \geq 1$, 知 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y})$ 也连续, 从而根据复合函数的连续性定理知 $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \|^2_{\mathbb{R}^n}$ 连续. 由 (c), 因为在球面 $\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \|_{\mathbb{R}^n} = r > 0$ 上 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \neq 0$, 故在球面上有 $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \| > 0$. 又因为球面作为紧集, $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \|^2_{\mathbb{R}^n}$ 作为连续函数, 由连续函数必在紧集上取到极大极小值知, $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \|^2_{\mathbb{R}^n}$ 在球面上可取到正的极小值 μ.

(e) 证明: 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \|_{\mathbb{R}^m} < \delta, \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \|_{\mathbb{R}^n} = r$ 时有

$$\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \|^2_{\mathbb{R}^n} \geq \frac{1}{2}\mu$$

当 $\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \|_{\mathbb{R}^m} < \delta, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0$ 时有

$$\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \|^2_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2}\mu.$$

证明

由 (d), 既然 $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \|^2_{\mathbb{R}^n}$ 连续且在球面 $\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \|_{\mathbb{R}^n} = r$ 上有正的极小值 μ, 固定 $\boldsymbol{y}$, 将 $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \|_{\mathbb{R}^n}$ 视作关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数, 知其依旧连续, 从而根据连续函数的性质知存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta_1)$ 时有 $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \|^2_{\mathbb{R}^n} \geq \mu \geq \frac{1}{2}\mu$. 同样, 因为 $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \|^2_{\mathbb{R}^n} = 0 < \frac{1}{3}\mu$, 固定 $\boldsymbol{y}_0$, 知关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0) \|^2_{\mathbb{R}^n}$ 是连续函数, 从而存在 $\delta_2 > 0$, 当 $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta_2)$ 时有

$\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0) \|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \frac{1}{3}\mu < \frac{1}{2}\mu$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 即得命题.

(f) 任意固定满足 $\| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0 \| < \delta$ 的 $\boldsymbol{x}$, 函数 $\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \|_{\mathbb{R}^n}^2$ 在球 $\| \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0 \|_{\mathbb{R}^n} \leq r$ 的某个内点 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 达到极小值, 又因为矩阵 $\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 有逆阵, 所以 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = 0$. 这就断定了隐函数 $\boldsymbol{f}: B(\boldsymbol{x}_0;\delta) \to B(\boldsymbol{y}_0;r)$ 的存在性.

证明

为避免混淆, 记固定的 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{x}_1$. 记 $G(\boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}) \|_{\mathbb{R}^n}^2$. 届于 G 是连续函数, 球 $\| \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0 \|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq r$ 是紧集, 知 G 必在该球体上取得极小值, 下面验证极小值点不在球面上:

若极小值点在球面上, 设极小值点为 $\boldsymbol{y}_1$, 由 (e) 知

$$\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) \|_{\mathbb{R}^n}^2 \geq \frac{1}{2}\mu$$

但 $\boldsymbol{y}_0$ 也在球体内, 且由 (e) 有

$$\| \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_0) \|_{\mathbb{R}^n}^2 < \frac{1}{2}\mu$$

故至少 $\boldsymbol{y}_1$ 不是极小值点, 矛盾! 从而极小值点只能在球体内部, 记之为 $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$. 知 G 的 Jacobi 阵为:

$$(2\sum_{i=1}^{n} F^i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}) \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y^1}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}), \cdots, 2\sum_{i=1}^{n} F^i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}) \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y^n}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}))$$

由 $\boldsymbol{y}_1$ 是极小值点知, G 在 $\boldsymbol{y}_1$ 处的 Jacobi 阵只能是零秩, 这意味着

$$2\sum_{i=1}^{n} F^i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y^1}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) + \cdots + 2\sum_{i=1}^{n} F^i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y^n}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) = 0$$

按照系数重排有

$$2F^1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)\boldsymbol{F}_y^1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) + \cdots + 2F^n(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)\boldsymbol{F}_y^n(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) = 0$$

由 (a), $\boldsymbol{F}_y^1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1), \cdots, \boldsymbol{F}_y^n(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)$ 线性无关, 从而只能有 $F^i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) = 0, i = 1, \cdots, n$, 即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)) = 0$.

(g) 如果记 $\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 则

$$\Delta\boldsymbol{y} = -[\tilde{\boldsymbol{F}}_y']^{-1}[\tilde{\boldsymbol{F}}_x']\Delta\boldsymbol{x}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{F}}_y'$ 是由行向量 $\boldsymbol{F}_y^i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)(i = 1, \cdots, n)$ 组成的矩阵, 而点 $(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)$ 是以点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 与点 $(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y})$ 为端点的线段上的某个点. 对于 $\tilde{\boldsymbol{F}}_x'$ 也有类似的解释. 证明: 从上面关系式可推知函数 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的连续性.

证明

知

$$\begin{aligned} 0 =& \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \\ =& \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

把式子写开, 有:

$$\begin{cases} F^1(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y}) - F^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ F^2(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y}) - F^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ \quad\vdots \\ F^n(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y}) - F^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \end{cases}$$

对每一个式子两边应用中值定理, 并记 Δx^i 是 $\Delta \boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量, Δy^i 是 $\Delta \boldsymbol{y}$ 的第 i 个分量:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial F^1}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{y}_{11})\Delta x^i + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F^1}{\partial y^j}(\boldsymbol{x}_{12}, \boldsymbol{y}_{12})\Delta y^i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial F^2}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_{21}, \boldsymbol{y}_{21})\Delta x^i + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F^2}{\partial y^j}(\boldsymbol{x}_{22}, \boldsymbol{y}_{22})\Delta y^i = 0 \\ \quad\vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial F^n}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_{n1}, \boldsymbol{y}_{n1})\Delta x^i + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F^n}{\partial y^j}(\boldsymbol{x}_{n2}, \boldsymbol{y}_{n2})\Delta y^i = 0 \end{cases}$$

写成矩阵形式即:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^1_x(\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{y}_{11}) \\ \boldsymbol{F}^2_x(\boldsymbol{x}_{21}, \boldsymbol{y}_{21}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^n_x(\boldsymbol{x}_{n1}, \boldsymbol{y}_{n1}) \end{pmatrix} \Delta \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^1_y(\boldsymbol{x}_{12}, \boldsymbol{y}_{12}) \\ \boldsymbol{F}^2_y(\boldsymbol{x}_{22}, \boldsymbol{y}_{22}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}^n_y(\boldsymbol{x}_{n2}, \boldsymbol{y}_{n2}) \end{pmatrix} \Delta \boldsymbol{y} = 0$$

进一步根据题意即得:

$$[\tilde{\boldsymbol{F}}'_x]\Delta \boldsymbol{x} + [\tilde{\boldsymbol{F}}'_y]\Delta \boldsymbol{y} = 0$$

由 $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 可逆及 $|\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$ 的连续性可知, 总存在 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 的某邻域使得邻域内的所有点均满足

$\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 可逆. 进而在这样的邻域内 $\tilde{\boldsymbol{F}}'_y$ 可逆, 从而有

$$\Delta \boldsymbol{y} = -[\tilde{\boldsymbol{F}}'_y]^{-1}[\tilde{\boldsymbol{F}}'_x]\Delta \boldsymbol{x}.$$

把 $-[\tilde{\boldsymbol{F}}'_y]^{-1}[\tilde{\boldsymbol{F}}'_x]$ 按列向量形式写开:

$$-[\tilde{\boldsymbol{F}}'_y]^{-1}[\tilde{\boldsymbol{F}}'_x] = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \vdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$$

取 $M = \max\{\| \boldsymbol{\alpha}_1 \|^2, \| \boldsymbol{\alpha}_2 \|^2, \cdots, \| \boldsymbol{\alpha}_m \|^2\}$, 知 $\Delta \boldsymbol{y} \leq M\Delta \boldsymbol{x}$, 进而 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 必连续.

(h) 证明:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = -[\tilde{\boldsymbol{F}}'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]^{-1}[\tilde{\boldsymbol{F}}'_x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))].$$

证明

根据定义, 若可以把 $\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 写成 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}$ 的形式, 那么就有 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$. 从而即得

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = -[\tilde{\boldsymbol{F}}'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]^{-1}[\tilde{\boldsymbol{F}}'_x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))].$$

□

2.5.3 利用逆映射定理证明

本方法源于 [5], 其中出彩的部分在于用压缩映射原理证明逆映射定理. 首先给出一些相关的定义、定理及证明, 这里约定对多元函数 $\boldsymbol{f}$ 而言, 记号 $\boldsymbol{f}'$ 代表其 Jacobi 阵:

定义 2.5.1 (度量空间) *如果对集合 X 中的任意两点 p, q 存在一个函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足:*

- $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$,
- $d(p, q) = d(q, p)$,

- $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q), \forall r \in X$

那么就称 X 是度量空间, d 是 X 中的度量.

定义 2.5.2 (完备度量空间) 如果度量空间 X 中的每个基本列都收敛, 那么就称 X 是完备度量空间.

定义 2.5.3 (压缩映射) 对从度量空间 $(X;d)$ 到自身中的映射 $f: X \to X$, 如果存在数 $q, 0 < q < 1$, 使得对于 X 中的任意两点 x_1, x_2, 成立不等式

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq qd(x_1, x_2)$$

那么就称 f 为压缩映射.

定义 2.5.4 (矩阵的范数) 对 $n \times m$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 定义其范数为:

$$\| \boldsymbol{A} \| := \sup_{\|\boldsymbol{x}\| \leq 1} \| \boldsymbol{Ax} \|$$

这里 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. 显然, 对任意的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 若设 $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$, 有如下不等式成立:

$$\| \boldsymbol{Ax} \| = \| \boldsymbol{Ae} \cdot \| \boldsymbol{x} \| \| = \| \boldsymbol{Ae} \| \cdot \| \boldsymbol{x} \| \leq \| \boldsymbol{A} \| \| \boldsymbol{x} \| .$$

命题 2.5.1 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, 则:

$$\| \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \| \leq \| \boldsymbol{A} \| + \| \boldsymbol{B} \|$$

证明

根据矩阵范数的定义, 取模长为 1 的向量 $\boldsymbol{x}$, 有:

$$\| (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bx} \| \leq \| \boldsymbol{Ax} \| + \| \boldsymbol{Bx} \| \leq \| \boldsymbol{A} \| + \| \boldsymbol{B} \|$$

进而 $\| \boldsymbol{A} \| + \| \boldsymbol{B} \|$ 是 $\| (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} \|$ 的一个上界, 根据上确界的定义即得命题.

□

命题 2.5.2 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times k$ 矩阵, 则:

$$\| \boldsymbol{BA} \| \leq \| \boldsymbol{B} \| \cdot \| \boldsymbol{A} \| .$$

证明

根据矩阵范数的定义, 取模长为 1 的向量 $\boldsymbol{x}$, 有:

$$\| (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Ax}) \| \leq \| \boldsymbol{B} \| \cdot \| \boldsymbol{Ax} \| \leq \| \boldsymbol{B} \| \cdot \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{B} \| \cdot \| \boldsymbol{A} \|$$

进而 $\| \boldsymbol{B} \| \cdot \| \boldsymbol{A} \|$ 是 $\| (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{x} \|$ 的一个上界, 根据上确界的定义即得命题.

□

定理 2.5.4 (矩阵范数对可逆性的判定定理) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, 且

$$\| \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{A}^{-1} \| < 1$$

那么 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

证明

设 $\| \boldsymbol{A}^{-1} \| = \frac{1}{\alpha}, \| \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A} \| = \beta$, 显然有 $\beta<\alpha$, 进而对任意的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\alpha \| \boldsymbol{x} \| = \alpha \| \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \| &\leq \alpha \| \boldsymbol{A}^{-1} \| \cdot \| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \| \\ &= \| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \| = \| (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \| \\ &\leq \| (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \| \leq \beta \| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \|\end{aligned}$$

从而有

$$(\alpha-\beta) \| \boldsymbol{x} \| \leq \| \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \| \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

既然 $\alpha-\beta>0$, 上式说明 $\boldsymbol{x} \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \neq 0$, 进而根据方程组的求解理论可知 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

□

定理 2.5.5 (压缩映射原理) *若 X 是完备度量空间, $\varphi: X \to X$ 是压缩映射, 则有且只有 X 中的一个点 x 满足 $\varphi(x)=x$.*

证明任取 $x_0 \in X$, 定义数列 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$$

由压缩映射的定义知:

$$d(x_{n+1},x_n)=d(\varphi(x_n),\varphi(x_{n-1})) \leq q d(x_n,x_{n-1})$$

归纳可知

$$d(x_{n+1},x_n) \leq q^n d(x_1,x_0)$$

当 $n<m$ 时, 有:

$$\begin{aligned}d(x_n,x_m) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i,x_{i-1}) \\ &\leq (q^n+q^{n+1}+\cdots+q^{m-1})d(x_1,x_0) \\ &\leq (q^n+q^{n+1}+\cdots+q^{m-1}+\cdots)d(x_1,x_0) \\ &\leq [\frac{1}{1-q}d(x_1,x_0)]q^n\end{aligned}$$

进而 $\{x_n\}$ 是基本列. 届于 X 是完备度量空间, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. 既然 φ 是压缩映射, 知 φ 必连续, 从而:

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

□

定理 2.5.6 (拟微分平均值定理) *设凸域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$, 映射 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上可微, 则 $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in D$, 在连接 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线段上必有一点 $\boldsymbol{\xi}$ 使得:*

$$\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \| \leq \| \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}) \| \| \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} \| .$$

证明

先证明一维的情况作为引理:

引理 2.5.2 *设 $\boldsymbol{f}: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ 并且映射 $\boldsymbol{f}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 则存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得*

$$\| \boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a) \| \leq \| \boldsymbol{f}'(\xi) \| (b-a).$$

证明

设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{a}$, 利用 $\mathbb{R}^m$ 中的内积来定义函数:

$$\varphi(t)=<\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}(t)>,\quad t\in[a,b],$$

易知 φ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 上可微. 对 φ 用 Lagrange 中值定理知: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(\xi)=(b-a)<\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}'(\xi)>$$

另一方面, 直接计算有:

$$\begin{aligned}\varphi(b)-\varphi(a)&=<\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}(b)>-<\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}(a)>\\&=<\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)>=<\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}>=\|\boldsymbol{u}\|^2\end{aligned}$$

由 Cauthy-Schwarz 不等式知:

$$\|\boldsymbol{u}\|^2=(b-a)\|<\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}'(\xi)>\|\le(b-a)\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{f}'(\xi)\|$$

$\boldsymbol{u}\neq 0$ 时, 上式即:

$$\|\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)\|\le(b-a)\|\boldsymbol{f}'(\xi)\|$$

易知 $\boldsymbol{u}=0$ 即 $\boldsymbol{f}(b)=\boldsymbol{f}(a)$ 时上式显然也成立, 从而命题得证.

□

下面正式开始证明, 知连接 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线段可以表示成:

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad t\in[0,1]$$

令 $\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t)),t\in[0,1]$, 知 $\boldsymbol{g}$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微, 从而有:

$$\boldsymbol{g}'(t)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{r}(t))(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

对 $\boldsymbol{g}(t)$ 应用引理, 知存在 $\tau\in(0,1)$ 使得:

$$\|\boldsymbol{g}(1)-\boldsymbol{g}(0)\|\le\|\boldsymbol{g}'(\tau)\|.$$

由于:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{g}(1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(1))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\\\boldsymbol{g}(0)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(0))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\\\boldsymbol{g}'(\tau)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{r}(\tau))(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\end{gathered}$$

从而上述不等式即:

$$\|\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)\|\le\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{r}(\tau))(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\|\le\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{r}(\tau))\|\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|$$

取 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{r}(\tau)$ 即得命题.

□

定理 2.5.7 (逆映射定理) *若 $\boldsymbol{f}$ 是开集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的连续可微映射, 存在一点 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 使得 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆. 记 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, 则:*

(a) 存在开集 $U\subset\mathbb{R}^n,V\subset\mathbb{R}^n$ 满足 $\boldsymbol{x}_0\in U,\boldsymbol{y}_0\in V$, $\boldsymbol{f}:U\to V$ 是单射, 且 $f(U)=V$;

(b) 若 $\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的逆映射, 则 $\boldsymbol{g}$ 是 V 上的连续可微映射.

证明

(a) 设 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}$. 既然 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆, 从而必然有 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|>0$. 设 λ 满足:

$$2\lambda\|\boldsymbol{A}^{-1}\|=1$$

既然 $\boldsymbol{f}$ 连续可微, 知 $\boldsymbol{f}'$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续, 从而根据连续的定义知: 存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个充分小的凸邻域 U, 使得

$$\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\|<\lambda,\quad \forall \boldsymbol{x}\in U$$

对每个 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 构造函数

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})),\quad \boldsymbol{x}\in E$$

知 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$. 下面考虑对 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ 用压缩映射原理, 首先证明 $\boldsymbol{\varphi}$ 是压缩映射: 因为

$$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))$$

由 $2\lambda\|\boldsymbol{A}^{-1}\|=1$ 与 $\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\|<\lambda$, 可知当 $\boldsymbol{x}\in U$, 有:

$$\|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))\|\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\|<\frac{1}{2}$$

从而根据拟微分平均值定理, 对 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in U$ 有:

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_2)\|\le\|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{\xi})\|\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|<\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|$$

故 $\boldsymbol{\varphi}$ 是压缩映射, 由压缩映射原理知有且只有 U 中的一个点 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$. 从而 U 内有且只有一个点 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 这便证明了 $\boldsymbol{f}$ 是单射, 下面证明它的到达域是开集:

取 $V=\boldsymbol{f}(U)$, 并取 $\boldsymbol{y}_0\in V$. 根据 V 的定义知存在 $\boldsymbol{x}_0\in U$ 使得 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$. 取 $\boldsymbol{x}_0$ 的充分小邻域 $B(\boldsymbol{x}_0;r),r>0$ 满足 $\overline{B}(\boldsymbol{x}_0;r)\subset U$. 根据开集的定义, 只需证明 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|<\lambda r\Rightarrow\boldsymbol{y}\in V$:

固定满足 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|<\lambda r$ 的 $\boldsymbol{y}$, 由 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ 的定义可得:

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|=\|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)\|\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|<\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\lambda r=\frac{r}{2}.$$

若 $\boldsymbol{x}\in\overline{B}(\boldsymbol{x}_0;r)$, 由 $\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_2)\|\le\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in U$ 可知:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}_0\|&=\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|\\&\le\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)\|+\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|\\&<\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|+\frac{r}{2}\le r\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\in B(\boldsymbol{x}_0;r)$. 由 $\overline{B}(\boldsymbol{x}_0;r)\subset U$ 知式子

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_2)\|\le\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|$$

在 $\overline{B}(\boldsymbol{x}_0;r)$ 上依旧成立. 容易验证 $\overline{B}(\boldsymbol{x}_0;r)$ 也是完备度量空间, 从而 $\boldsymbol{\varphi}:\overline{B}(\boldsymbol{x}_0;r)\to\overline{B}(\boldsymbol{x}_0;r)$ 是压缩映射, 由压缩映射原理有且只有一点 $\boldsymbol{x}\in\overline{B}(\boldsymbol{x}_0;r)$ 满足 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$. 进而对这个 $\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 从而 $y\in\boldsymbol{f}(\overline{B}(\boldsymbol{x}_0;r))\subset\boldsymbol{f}(U)=V$, 这便证明了 V 是开集.

□

(b) 取 $\boldsymbol{y}\in V,\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y}\in V$, 知对应有 $\boldsymbol{x}\in U,\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}\in U$ 满足:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})$$

将 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$ 代入 φ, 有:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}))=\Delta\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{y}.$$

由 $\parallel\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_2)\parallel\leq\frac{1}{2}\parallel\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\parallel,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in U$ 知:

$$\parallel\Delta\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{y}\parallel\leq\frac{1}{2}\parallel\Delta\boldsymbol{x}\parallel$$

又因为

$$\parallel\Delta\boldsymbol{x}\parallel-\parallel\boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{y}\parallel\leq\parallel\Delta\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{y}\parallel$$

从而知 $\parallel\boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\parallel\geq\frac{1}{2}\parallel\Delta\boldsymbol{y}\parallel$, 进而有:

$$\parallel\Delta\boldsymbol{y}\parallel\leq2\parallel\boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\parallel\leq2\parallel\boldsymbol{A}^{-1}\parallel\parallel\Delta\boldsymbol{x}\parallel=\frac{1}{\lambda}\Delta\boldsymbol{x}$$

由最开始的假设: $2\lambda\parallel\boldsymbol{A}^{-1}\parallel=1$ 及 $\parallel\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\parallel<\lambda$ 可知:

$$\parallel\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\parallel\cdot\parallel\boldsymbol{A}^{-1}\parallel<\lambda\parallel\boldsymbol{A}^{-1}\parallel=\frac{1}{2}<1$$

进而根据矩阵范数对可逆性的判定可知, $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 可逆, 设其逆为 $\boldsymbol{T}$. 届于 $\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的逆映射, 有:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{T}\Delta\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{T}\Delta\boldsymbol{y}\\&=\Delta\boldsymbol{x}-\boldsymbol{T}\Delta\boldsymbol{y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\\&=-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

从而由 $\parallel\Delta\boldsymbol{y}\parallel\leq\frac{1}{\lambda}\parallel\boldsymbol{x}\parallel$, 利用微分定义来验证:

$$\frac{\parallel\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{T}\Delta\boldsymbol{y}\parallel}{\parallel\Delta\boldsymbol{y}\parallel}\leq\frac{\parallel\boldsymbol{T}\parallel\cdot\parallel\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}\parallel}{\lambda\parallel\Delta\boldsymbol{x}\parallel}$$

知 $\Delta\boldsymbol{x}\to0\Rightarrow\Delta\boldsymbol{y}\to0$, 从而上右式根据中值定理是趋 0 的, 进而上左式是趋 0 的, 故根据定义有 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{T}$. 但 $\boldsymbol{T}$ 同样被定义为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$ 的逆, 故有:

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})))^{-1}$$

最后只需说明矩阵求逆的映射连续, 即可根据复合函数的连续性定理说明 $\boldsymbol{g}'$ 连续, 下面证明这件事情:

引理 2.5.3 *设 Ω 是全体可逆矩阵的集合, 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的距离定义为 $\parallel\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\parallel$, 则映射 $\boldsymbol{f}:\Omega\to\Omega,\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{A}^{-1}$ 是连续映射.*

证明

任取矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\Omega$, 知:

$$\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}$$

从而两边取范数有:

$$\parallel\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\parallel=\parallel\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}\parallel\leq\parallel\boldsymbol{B}^{-1}\parallel\cdot\parallel\boldsymbol{A}^{-1}\parallel\cdot\parallel\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\parallel$$

这说明 $\boldsymbol{f}$ 满足 Lipschitz 条件, 从而其连续.

□

如上, 根据引理得到 $\boldsymbol{g}'$ 连续, 故 $\boldsymbol{g}$ 是 V 上的连续可微映射. □

准备工作做完后, 下面正式开始证明定理. 采用用归纳法证明部分的记号, 这里先重述一遍定理:

定理 2.5.8 (隐函数定理) 如果映射 $F: U \to \mathbb{R}^n$ 定义在点 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in \mathbb{R}^{m+n}$ 的邻域 U 上, 并且满足下述条件

- $\boldsymbol{F} \in C^{(p)}(U; \mathbb{R}^n), p \geq 1,$
- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$
- $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 有逆阵,

则存在 $(m+n)$ 维区间 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_x^m \times \boldsymbol{I}_y^n \subset U$, 其中

$$\boldsymbol{I}_x^m = \{x \in \mathbb{R}^m | \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \parallel < \alpha\},$$
$$\boldsymbol{I}_y^n = \{y \in \mathbb{R}^n | \parallel \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0 \parallel < \beta\}$$

并且存在映射 $\boldsymbol{f} \in C^{(p)}(\boldsymbol{I}_x^m; \boldsymbol{I}_y^n)$, 对任意的点 $(x, y) \in \boldsymbol{I}_x^m \times \boldsymbol{I}_y^n$, 有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

同时

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = -[\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]^{-1}[\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]$$

这里

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F^1(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n) = 0 \\ F^2(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n) = 0 \\ \quad \vdots \\ F^n(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n) = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \cdots, x^m) \\ y^2 = f^2(x^2, \cdots, x^m) \\ \quad \vdots \\ y^n = f^n(x^1, \cdots, x^m) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

证明

设

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U$$

知 $\boldsymbol{G}: \mathbb{R}^{m+n} \supset U \to \mathbb{R}^{m+n}$, 下证 $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 可逆:

由 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0$, 知:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0+\Delta\boldsymbol{y})&=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0+\Delta\boldsymbol{y})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\\&=\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y})+\boldsymbol{\alpha}((\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0);\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

这里 $\Delta\boldsymbol{x}\to 0,\Delta\boldsymbol{y}\to 0\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\to 0$. 进而有:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0+\Delta\boldsymbol{y})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\\=&(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0+\Delta\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),\boldsymbol{x}_0)\\=&(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0+\Delta\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}_0)+(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0+\Delta\boldsymbol{y}),\Delta\boldsymbol{x})-(0,\boldsymbol{x}_0)\\=&(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0+\Delta\boldsymbol{y}),\Delta\boldsymbol{x})\\=&(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y})+\boldsymbol{\alpha}((\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0);\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y}),\Delta\boldsymbol{x})\\=&(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y}),\Delta\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{\alpha}((\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0);\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y}),\Delta\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y})$ 作如下解释: 前面的 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 是 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的 Jacobi 阵在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处的值, 为一个矩阵:

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial F^1}{\partial x^m}&\frac{\partial F^1}{\partial y^1}&\cdots&\frac{\partial F^1}{\partial y^n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{\partial F^n}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial F^1}{\partial x^m}&\frac{\partial F^n}{\partial y^1}&\cdots&\frac{\partial F^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),$$

而后面的 $(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y})$ 是一个列向量, 写作坐标形式即

$$(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y})=(\Delta x^1,\cdots,\Delta x^m,\Delta y^1,\cdots,\Delta y^n)^T$$

这里 $\Delta x^i,\Delta y^j$ 是 $\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y}$ 的第 i,j 个分量. 从而 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y})$ 按正常的形式则写作:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)&\cdots&\frac{\partial F^1}{\partial x^m}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)&\frac{\partial F^1}{\partial y^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)&\cdots&\frac{\partial F^1}{\partial y^n}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{\partial F^n}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)&\cdots&\frac{\partial F^1}{\partial x^m}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)&\frac{\partial F^n}{\partial y^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)&\cdots&\frac{\partial F^n}{\partial y^n}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x^1\\\vdots\\\Delta x^m\\\Delta y^1\\\vdots\\\Delta y^n\end{pmatrix}.$$

知 $\parallel\Delta\boldsymbol{x}\parallel,\parallel\Delta\boldsymbol{y}\parallel\to 0,(\boldsymbol{\alpha}((\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0);\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y}),\Delta\boldsymbol{x})\to 0$, 从而上式可近似看作:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0+\Delta\boldsymbol{y})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y}),\Delta\boldsymbol{x})$$

既然 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 关于 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是线性的, 可知 $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 关于 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 也是线性的. 想要验证

$\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 可逆, 因为 $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 是 $n+m$ 阶阵, 只需验证其对应的线性映射 $\boldsymbol{\theta}$ 为单射. 根据代数的相关知识, 线性空间到自身的线性映射是单射当且仅当它的核空间仅含零向量. 下面求 $\boldsymbol{\theta}$ 的核空间: 令

$(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\boldsymbol{a})=0$, 知只能有 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ 且 $\boldsymbol{a}=0$, 进而 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(0,\boldsymbol{b})=0$, 写作

正常形式即:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \frac{\partial F^1}{\partial y^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \frac{\partial F^n}{\partial y^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

知上述式子等价于如下式子:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{b}$$

届于 $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 可逆, 可知 $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = 0$, 从而 $\ker\boldsymbol{\theta} = (0,0)$, 进而 $\boldsymbol{\theta}$ 是单射, 也即 $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 可逆.

既然 $\boldsymbol{G}$ 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处的 Jacobi 阵是可逆的, $\boldsymbol{G}$ 便满足了逆映射定理的条件. 对其用逆映射定理, 知存在开集 $U,V \in \mathbb{R}^{m+n}$, 其满足 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \in U, (0,\boldsymbol{x}_0) \in V$(这是因为 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) = (0,\boldsymbol{x}_0)$), 且 $\boldsymbol{G}$ 是 U 到 V 上的双射. 取 W 是全体满足 $(0,\boldsymbol{x}) \in V$ 的 $\boldsymbol{x}$ 的集合, 知 $\boldsymbol{x}_0 \in W$. 下面证明 W 是开集:

任取 W 中的点 $\boldsymbol{x}_0$, 对 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $B(\boldsymbol{x}_0;\delta)$ 中的点 $\boldsymbol{x}_1$, 由球的定义可知 $\parallel \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0 \parallel^m < \delta^m$. 因为 $\boldsymbol{x}_0 \in W$, 根据 W 的定义知 $(0,\boldsymbol{x}_0) \in V$, 再验证 $(0,\boldsymbol{x}_1) \in V$: 这是因为在 V 中有: $\parallel (0,\boldsymbol{x}_1) - (0,\boldsymbol{x}_0) \parallel^{n+m} < \delta^{\frac{n+m}{m}}$. 而因为 V 是开集, 知总存在 $\delta_{\boldsymbol{x}_0}$ 使得 $B((0,\boldsymbol{x}_0);\delta_{\boldsymbol{x}_0}) \subset V$, 从而只需在假设时令 $\delta^{\frac{n+m}{m}} < \delta_{\boldsymbol{x}_0}^{n+m}$ 即可, 进而 $(0,\boldsymbol{x}_1) \in V$, 故 $\boldsymbol{x}_1 \in W$, 也即 W 是开集.

若 $\boldsymbol{x}_2 \in W$, 则 $(0,\boldsymbol{x}_2) \in V$, 根据 G 为双射知总存在 U 中的点 $(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)$ 使得 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2) = (0,\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2),\boldsymbol{x}_2)$. 下面证明该点 $(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)$ 是唯一的:

既然已经固定了横坐标为 $\boldsymbol{x}_2$, 不妨设另一点为 $(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}')$, 其同样满足 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}') = (0,\boldsymbol{x}_2)$. 于是:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}'),\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2),\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)$$

因为 G 是双射, 上述式子说明 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}_2$, 进而点 $(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)$ 是唯一的. 这便说明对 W 中的任意点 $\boldsymbol{x}$, 总能找到唯一的一点 $\boldsymbol{y}$ 使得 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in U$, 并且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$. 取 $\boldsymbol{I}_x^m \subset W, \boldsymbol{I}_y^n$ 满足 $\boldsymbol{I}_x^m \times \boldsymbol{I}_y^n \subset U$, 则上述一一对应性自然定义了映射 $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I}_x^m \to \boldsymbol{I}_y^n$. 下面证明 $\boldsymbol{f}$ 是连续可微的:

对 W 中的点 $\boldsymbol{x}$ 取上述结论所定义出的 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 知 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \in U$, 且有
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = 0$. 进而:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})),\boldsymbol{x}) = (0,\boldsymbol{x}).$$

根据逆映射定理, 设 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}^{-1}: V \to U$ 是连续可微的双射, 有:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{H}(0,\boldsymbol{x})$$

容易验证向量值函数是连续可微映射当且仅当它的每个分量都是连续可微映射, 进而既然 $\boldsymbol{H}$ 是连续可微映射, 按照分量的对应关系, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 也应该是连续可微映射.

最后, 需要求出 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$: 设 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$, 两边取 Jacobi 阵有:

$$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}), \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^m.$$

由 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=0$ 知: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))=0$, 进而两边求 Jacobi 矩阵有:

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})=0.$$

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 知 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)),\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$, 进而代入上式有:

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}_0)=0.$$

注意到左式是一个矩阵, 将式子两端右乘任意向量 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^m$, 可得式子:

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{k}=0.$$

结合前面对 $\boldsymbol{\varphi}$ 取的 Jacobi 阵, 该式子可以写成:

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k})=0.$$

将 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 写成行向量形式 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)^T$, 可得

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{k}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{k}\end{pmatrix}$$

从而将 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{k},\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k})=0$ 写成坐标形式, 有:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} & \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} & \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\begin{pmatrix}k^1\\ \vdots\\ k^m\\ \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{k}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{k}\end{pmatrix}=0$$

计算矩阵乘法, 上式即:

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial F^1}{\partial x^i}k^i+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial F^1}{\partial y^i}\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{k}\\ \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial F^n}{\partial x^i}k^i+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial F^n}{\partial y^i}\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{k}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0$$

若将 $\alpha_i\boldsymbol{k}$ 进一步展开, 知上述式子可以另写成如下形式:

$$(\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{k}=0.$$

注意到 $\boldsymbol{k}$ 是任意向量, 进而只能有

$$(\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0.$$

但前面已经证明了在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的邻域内都有映射 $\boldsymbol{f}$ 存在, 从而可将这些点视作新的 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$, 进而得到式子:

$$\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}).$$

最后, 因为 $\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))$ 是可逆的, 故上述式子可化为:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=-[\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))]^{-1}[\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))].$$

□

2.6 隐函数定理的一些推论

2.6.1 用隐函数定理证明逆映射定理

上一节的最后一部分介绍了如何把逆映射定理作为引理推出隐函数定理, 这一节着重介绍如何把隐函数定理作为引理推出逆映射定理. 首先还是给出一个定义以便叙述:

定义 2.6.1 从 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 U 到开集 V 上的映射 $f: U \to V$ 称为 $C^{(p)}$ 类微分同胚或 p 级光滑微分同胚 $(p = 0, 1, 2, \cdots)$, 如果:

1. $f \in C^{(p)}(U; V)$;
2. f 是双射;
3. $f^{-1} \in C^{(p)}(V; U)$.

$C^{(0)}$ 类微分同胚简称为同胚.

定理 2.6.1 若映射 $\boldsymbol{f}: G \to \mathbb{R}^m$ 定义在区域 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上, 且具有下列条件:

- $\boldsymbol{f} \in C^{(p)}(G; \mathbb{R}^m), p \geq 1$;
- $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}_0 \in G$;
- $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 有逆阵

则存在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0) \subset G$ 和点 $\boldsymbol{y}_0$ 的邻域 $V(\boldsymbol{y}_0)$, 使得 $\boldsymbol{f}: U(\boldsymbol{x}_0) \to V(\boldsymbol{y}_0)$ 是 $C^{(p)}$ 类微分同胚, 且当 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \in V(\boldsymbol{y}_0)$ 时, 有

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})]^{-1}$$

证明

取定义在 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 的邻域 $G \times \mathbb{R}^m$ 上的函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}$$

这样, 如果能根据 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ 解出 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$, 根据隐函数定理 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ 自然含有所要求的性质. 逐一验证隐函数定理的几个条件:

- $\boldsymbol{F} \in C^{(p)}(G \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, 这点是因为 $\boldsymbol{f} \in C^{(p)}(G; \mathbb{R}^m)$, 而 $\boldsymbol{y} \in C^{(p)}(\boldsymbol{f}(G); \mathbb{R}^m)$.
- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$, 这在 $\boldsymbol{x}_0 \in G$ 时都是显然的.
- $\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 有逆阵, 这是因为 $\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 有逆阵.

从而 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 邻域内满足隐函数定理的条件. 根据隐函数定理, 存在 $\boldsymbol{I}_x^m, \boldsymbol{I}_y^m$ 及映射 $\boldsymbol{g} \in C^{(p)}(\boldsymbol{I}_y^m; \boldsymbol{I}_x^m)$, 使得 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$, 并有

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}) = -[\boldsymbol{F}'_x(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})]^{-1}[\boldsymbol{F}'_y(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})] = (-(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))^{-1})(-\boldsymbol{I}) = (\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))^{-1}$$

取 $V(\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{I}_y^m$ 是 $\boldsymbol{y}_0$ 的邻域, 设 $U = g(V(\boldsymbol{y}_0))$, 下面说明 U 是 $\boldsymbol{x}_0$ 的开邻域: 届于 $\boldsymbol{g}$ 是同胚, 其将开集映成开集, 从而 U 是开集. 显然由 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0) \in U$ 知 U 是 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域. □

2.6.2 秩定理

定理 2.6.2 设 $\boldsymbol{f}:U\to\mathbb{R}^n$ 是定义在点 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^m$ 的邻域 $U\subset\mathbb{R}^m$ 上的映射, 如果 $\boldsymbol{f}\in C^{(p)}(U;\mathbb{R}^n), p\geq 1$ 且在每点 $\boldsymbol{x}\in U$ 映射 $\boldsymbol{f}$ 有同一个秩 k, 则存在点 $\boldsymbol{x}_0$ 与点 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 的邻域 $O(\boldsymbol{x}_0)$ 和 $O(\boldsymbol{y}_0)$, 以及定义在它们上面的 $C^{(p)}$ 类微分同胚 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{y})$, 使得在点 $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)$ 的邻域 $O(\boldsymbol{u}_0)=\boldsymbol{\varphi}(O(\boldsymbol{x}_0))$ 内, 映射 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\psi}\circ\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ 的坐标表示式如下:

$$(u^1,\cdots,u^k,\cdots,u^m)=\boldsymbol{u}\mapsto\boldsymbol{v}=(v^1,\cdots,v^n)=(u^1,\cdots,u^k,0,\cdots,0)$$

在线性映射的版本中这个定理会显得更加直观: 如果线性映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 的表示阵为 $\boldsymbol{A}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=k$, 则总能选取合适的基使得 $\boldsymbol{\varphi}$ 在新基下的表示阵为 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}_k,\boldsymbol{O}\}$. 把选取新基这个操作换成上面取 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的操作, 并把矩阵视作上面的 Jacobi 阵即可.

证明

先把 $\boldsymbol{f}$ 写成坐标形式:

$$\begin{cases}y^1=f^1(x^1,\cdots,x^m)\\ y^2=f^2(x^1,\cdots,x^m)\\ \quad\vdots\\ y^k=f^k(x^1,\cdots,x^m)\\ y^{k+1}=f^{k+1}(x_1,\cdots,x_m)\\ \quad\vdots\\ y^n=f^n(x^1,\cdots,x^m)\end{cases}$$

不妨按上述记号设 $\boldsymbol{f}$ 的 Jacobi 阵中, 左上角的 k 阶主子式秩不为 0, 也即前 k 行无关. 下面开始换基, 按坐标定义在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U 上的映射 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{cases}u^1=\varphi^1(x^1,\cdots,x^m)=f^1(x^1,\cdots,x^m)\\ u^2=\varphi^2(x^1,\cdots,x^m)=f^2(x^1,\cdots,x^m)\\ \quad\vdots\\ u^k=\varphi^k(x^1,\cdots,x^m)=f^k(x^1,\cdots,x^m)\\ u^{k+1}=\varphi^{k+1}(x^1,\cdots,x^m)=x^{k+1}\\ \quad\vdots\\ u^m=\varphi^k(x^1,\cdots,x^m)=x^m\end{cases}$$

它的 Jacobi 阵为:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1}&\frac{\partial f^1}{\partial x^2}&\cdots&\frac{\partial f^1}{\partial x^k}&\frac{\partial f^1}{\partial x^{k+1}}&\cdots&\frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}&\frac{\partial f^2}{\partial x^2}&\cdots&\frac{\partial f^2}{\partial x^k}&\frac{\partial f^2}{\partial x^{k+1}}&\cdots&\frac{\partial f^2}{\partial x^m}\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1}&\frac{\partial f^k}{\partial x^2}&\cdots&\frac{\partial f^k}{\partial x^k}&\frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}&\cdots&\frac{\partial f^k}{\partial x^m}\\ 0&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

知该 Jacobi 阵满秩, 进而 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\in C^{(p)}(U;\mathbb{R}^n)$ 在 U 上可逆. 根据逆映射定理, 知存在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $O_1(\boldsymbol{x}_0)$ 和 $\boldsymbol{u}_0$ 的邻域 $O_1(\boldsymbol{u}_0)=\boldsymbol{\varphi}(O(\boldsymbol{x}_0))$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}:O_1(\boldsymbol{x}_0)\to O(\boldsymbol{u}_0)$ 是 $C^{(p)}$ 类微分同胚. 取

$\boldsymbol{\varphi}$ 的逆 $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$, 并取映射 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1}:O_1(\boldsymbol{u}_0)\to\mathbb{R}_y^n$, 有:

$$\begin{cases}y^1=f^1\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1}(u^1,\cdots,u^m)=f^1(x^1,\cdots,x^m)=u^1\\ y^2=f^2\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1}(u^1,\cdots,u^m)=f^2(x^1,\cdots,x^m)=u^2\\ \quad\vdots\\ y^k=f^k\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1}(u^1,\cdots,u^m)=f^k(x^1,\cdots,x^m)=u^k\\ y^{k+1}=f^{k+1}\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1}(u^1,\cdots,u^m)=g^{k+1}(u^1,\cdots,u^m)\\ \quad\vdots\\ y^n=f^n\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1}(u^1,\cdots,u^m)=g^n(u^1,\cdots,u^m)\end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{\varphi}^{-1}:O_1(\boldsymbol{u}_0)\to O_1(\boldsymbol{x}_0)$ 在 $O_1(\boldsymbol{u}_0)$ 中的任意点都满秩, 而 $\boldsymbol{f}:O_1(\boldsymbol{x}_0)\to\mathbb{R}_y^n$ 在 $O_1(\boldsymbol{x}_0)$ 的任意点秩为 k, 故因为乘以一个满秩阵不改变原矩阵的秩, 知 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{u}))\cdot(\boldsymbol{\varphi}^{-1})(\boldsymbol{u})$ 在 $O_1(\boldsymbol{u}_0)$ 中任意点的秩为 k. 直接计算 $\boldsymbol{g}$ 的 Jacobi 阵有:

$$\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&0&\cdots&0\\ \frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^1}&\cdots&\frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^k}&\frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^{k+1}}&\cdots&\frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^m}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{\partial g^n}{\partial u^1}&\cdots&\frac{\partial g^n}{\partial u^k}&\frac{\partial g^n}{\partial u^{k+1}}&\cdots&\frac{\partial g^n}{\partial u^m}\end{pmatrix}$$

因为上述矩阵左上角单位阵的部分秩已经是 k 了, 所以只能有上述矩阵右下角的部分全部为 0, 也即 $\frac{\partial g^j}{\partial u^i}(\boldsymbol{u})=0(i=k+1,\cdots,m;j=k+1,\cdots,n)$, 从而 $u^{k+1},\cdots,u^m$ 的变动不影响 $g^i(i=k+1,\cdots,n)$, 从而自变量中有没有它们不影响. 这样上述映射可以简化成

$$\begin{cases}y^1=u^1\\ \quad\vdots\\ y^k=u^k\\ y^{k+1}=g^{k+1}(u^1,\cdots,u^k)\\ \quad\vdots\\ y^n=g^n(u^1,\cdots,u^k)\end{cases}$$

再考虑在 $\mathbb{R}_n^y$ 中简化上述表达式, 定义 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{y})$:

$$\begin{cases}\psi^1(\boldsymbol{y})=v^1=y^1\\ \quad\vdots\\ \psi^k(\boldsymbol{y})=v^k=y^k\\ \psi^{k+1}(\boldsymbol{y})=v^{k+1}=y^{k+1}-g^{k+1}(y^1,\cdots,y^k)\\ \quad\vdots\\ \psi^n(\boldsymbol{y})=v^n=y^n-g^n(y^1,\cdots,y^k)\end{cases}$$

这样构造是根据前面得到的 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的坐标分量上的关系, 把 $u^1,\cdots,u^k$ 换成 $y^1,\cdots,y^k$ 的. 计算上

述映射的 Jacobi 阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\partial g^{k+1}}{\partial y^1} & \cdots & -\frac{\partial g^{k+1}}{\partial y^k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{\partial g^n}{\partial y^1} & \cdots & -\frac{\partial g^n}{\partial y^k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

易知上述矩阵满秩, 从而 $\boldsymbol{\psi}$ 是从 $\boldsymbol{y}_0$ 的邻域 $O_1(\boldsymbol{y}_0)$ 到 $\boldsymbol{v}_0$ 的邻域 $O_1(\boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{\psi}(O_1(\boldsymbol{y}_0))$ 的 $C^{(p)}$ 类微分同胚. 从而最后将诸变量代入, 可得最后的映射即

$$\begin{cases} v^1 = u^1 \\ \quad \vdots \\ v^k = u^k \\ v^{k+1} = 0 \\ \quad \vdots \\ v^n = 0 \end{cases}$$

相应取邻域命题即证. □

2.6.3 Morse 引理

这个定理相当于高等代数中的惯性定理, 首先还是给出一个定义方便叙述:

定义 2.6.2 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是定义在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上属于 $C^{(2)}(U;\mathbb{R})$ 的函数 f 的临界点. 如果 f 在这点的 *Hessian* 矩阵的行列式 (即由函数 f 的二阶偏导数组成的矩阵 $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\boldsymbol{x}_0))$ 的行列式) 不为零, 则称临界点 $\boldsymbol{x}_0$ 是函数 f 的非退化临界点.

定理 2.6.3 (Hadamard) 设 $f : U \to \mathbb{R}$ 是定义在点 $0 = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^m$ 的凸邻域 U 上的 $C^{(p)}(U;\mathbb{R})(p \geq 1)$ 类函数且 $f(0) = 0$, 则存在函数 $g_i \in C^{(p-1)}(U;\mathbb{R})(i = 1, \cdots, m)$, 使得在邻域 U 内下述等式成立

$$f(x^1, \cdots, x^m) = \sum_{i=1}^{m} x^i g_i(x^1, \cdots, x^m)$$

且 $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$.

证明

其实根据多元函数的泰勒展开, 上式已经得证. 同样也可根据下面的过程:

$$f(x^1, \cdots, x^m) = \int_0^1 \frac{df(x^1, \cdots, x^m)}{dt} dt = \sum_{i=1}^{m} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \cdots, t^m) dt$$

并相应令 $g_i(x^1, \cdots, x^m) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \cdots, tx^m)dt(i = 1, \cdots, m)$ 得到命题.

□

定理 2.6.4 (Morse) 如果 $f : G \to \mathbb{R}$ 是定义在开集 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上的 $C^{(3)}(G;\mathbb{R})$ 类函数, $\boldsymbol{x}_0 \in G$ 是 f 的非退化临界点, 则存在从坐标原点 $0 \in \mathbb{R}^m$ 的某个邻域 V 到点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ 的邻域 U 的微分同胚 $\boldsymbol{g} : V \to U$, 使得对所有的点 $\boldsymbol{y} \in V$ 有:

$$(f \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}_0) - [(y^1)^2 + \cdots + (y^k)^2] + [(y^{k+1})^2 + \cdots + (y^m)^2]$$

证明

首先证明 $\boldsymbol{x}_0=0, f(\boldsymbol{x}_0)=0$ 的情形:

因为 $\boldsymbol{x}_0=0$ 是 f 的临界点, 所以 $\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)=0, i=1,\cdots,m$. 根据 Hadamard 引理, 在 0 的邻域内存在函数 $g_i\in C^{(2)}(U;\mathbb{R})(i=1,\cdots,m)$ 使得 $f(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{m}x^ig^i(\boldsymbol{x})$, 同时 $g_i(0)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$, 进而 $g_i(0)=0, i=1,\cdots,m$. 再对 g_i 在 0 的邻域内用 Hadamard 引理, 知 $g_i(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{m}x^ih^{ij}(\boldsymbol{x})$, 其中 h_{ij} 是 0 的邻域内的 $C^{(1)}(U;\mathbb{R})$ 类函数. 从而有:

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n}x^ix^jh_{ij}(\boldsymbol{x})$$

如果把 $h_{ij}(\boldsymbol{x})$ 简单的看成常数, 上式就是一个典型的二次型. 而在研究二次型的时候其对应矩阵一般都取对称阵, 所以我们希望 $h_{ij}(\boldsymbol{x})$ 也能有对称性, 也即 $h_{ij}=h_{ji}$. 在这里因为 $x^ix^j=x^jx^i$, 它们共同的“系数”即为 $h_{ij}+h_{ji}$, 所以仿照高等代数里设 $2a_{ij}x_ix_j$ 的思路, 这里同样可以新取 x^ix^j 的“系数”为 $\tilde{h}_{ij}=\frac{1}{2}(h_{ij}+h_{ji})$. 同时, 上式可以看做 f 的二阶 Taylor 展开, 根据 Taylor 展开的唯一性知 $h_{ij}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(\boldsymbol{x})$, 从而因为 $f\in C^{(3)}(U;\mathbb{R})$, 知 $\tilde{h}_{ij}(0)=\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(0)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}(0))=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(0)$. 又因为 0 是 f 的非退化连续点, 按定义即知上述“二次型”的“系数矩阵”$(\tilde{h}_{ij})$ 在 0 处是可逆的. 下面便用归纳法证明上述“二次型”可被化成标准形式:

设在 $0\in\mathbb{R}^m$ 的邻域 U_1 中已经存在微分同胚 $\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{R}^m_u\to\mathbb{R}^m_x$ 使得:

$$f\circ\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})=\pm(u^1)^2\pm(u^2)^2\pm\cdots\pm(u^{r-1})^2+\sum_{i,j=r}^{m}u^iu^jH_{ij}(u^1,\cdots,u^m)$$

这里 $r\geq 1$ 且 $H_{ij}=H_{ji}$, 知 $r=1$ 时即上面讨论的情况. 根据讨论, $(\tilde{h}_{ij})$ 在 0 的邻域内可逆, 又因为 $\boldsymbol{\varphi}$ 是微分同胚, 故 $\boldsymbol{\varphi}'(0)$ 在 0 的邻域内也可逆, 从而上述在 0 的邻域内发生的变换细节如下:

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{x}^T(h_{ij}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{x}\\&=(x^1,\cdots,x^m)\begin{pmatrix}h_{11}(\boldsymbol{x})&\cdots&h_{1m}(\boldsymbol{x})\\\vdots&&\vdots\\h_{m1}(\boldsymbol{x})&\cdots&h_{mm}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\\vdots\\x^m\end{pmatrix}\end{aligned}$$

用微分同胚 $\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{R}^m_u\to\mathbb{R}^m_x$

$$\begin{cases}x^1=\varphi^1(u^1,\cdots,u^m)\\\quad\vdots\\x^m=\varphi^m(u^1,\cdots,u^m)\end{cases}$$

换元, 这里为了方便不妨就设 $\boldsymbol{\varphi}(0)=0$, 并记 $H_{ij}(\boldsymbol{u})=h_{ij}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))$, 有:

$$f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))=(\varphi^1(\boldsymbol{u}),\cdots,\varphi^m(\boldsymbol{u}))\begin{pmatrix}H_{11}(\boldsymbol{u})&\cdots&H_{1m}(\boldsymbol{u})\\\vdots&&\vdots\\H_{m1}(\boldsymbol{u})&\cdots&H_{mm}(\boldsymbol{u})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^1(\boldsymbol{u})\\\vdots\\\varphi^m(\boldsymbol{u})\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{\varphi}$ 是微分同胚, 所以在 $0\in\mathbb{R}^m_u$ 的邻域内对 $\boldsymbol{\varphi}$ 用 Taylor 展开, 可以得到如下近似:

$$\begin{cases}x^1=\sum\limits_{i=1}^{m}u^i\frac{\partial\varphi^1}{\partial u^i}(0)+o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)\\\quad\vdots\\x^m=\sum\limits_{i=1}^{m}u^i\frac{\partial\varphi^m}{\partial u^i}(0)+o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)\end{cases}$$

从而可以注意到:

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{m}u^i\frac{\partial\varphi^1}{\partial u^i}(0)+o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)\\ \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{m}u^i\frac{\partial\varphi^m}{\partial u^i}(0)+o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{\varphi}'(0)\begin{pmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^m\end{pmatrix}+o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)\boldsymbol{e}\right)$$

这里取 $\boldsymbol{e}=(1,\cdots,1)^T$. 进而 $f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))$ 可以进一步化简:

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))&=(\boldsymbol{\varphi}'(0)\boldsymbol{u}+o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)\boldsymbol{e})^T(H_{ij}(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{\varphi}'(0)\boldsymbol{u}+o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)\boldsymbol{e})\\&=(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}'(0))^T+o\ \|\ \boldsymbol{u}\ \|\ \boldsymbol{e}^T)(H_{ij}(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{\varphi}'(0)\boldsymbol{u}+o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)\boldsymbol{e})\end{aligned}$$

上述式子展开后, 每一个含有 $o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)$ 作为乘积因子的项, 因为其余的项模长都是有界的, 所以这些项在 $\|\ \boldsymbol{u}\ \|\to 0$ 时都趋 0, 故上式中的 $o(\|\ \boldsymbol{u}\ \|)\boldsymbol{e}$ 在 $0\in\mathbb{R}_u^m$ 的邻域内可以直接省略, 进而:

$$f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))=\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{\varphi}'(0))^T(H_{ij}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{\varphi}'(0)\boldsymbol{u}$$

从而根据合同变换保秩的性质, 知 $(h_{ij}(\boldsymbol{x}))$ 与 $(\boldsymbol{\varphi}'(0))^T(H_{ij}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{\varphi}'(0)$ 等秩. 根据前面的讨论 $(h_{ij}(\boldsymbol{x}))$ 在 $0\in\mathbb{R}_x^m$ 的邻域内是满秩的, 所以 $H_{ij}(\boldsymbol{u})$ 在 $0\in\mathbb{R}_u^m$ 的邻域内也是满秩的. 原来命题中出现的 (H_{ij}) 其实是这里的 $(\boldsymbol{\varphi}'(0))^T(H_{ij}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{\varphi}'(0)$, 它们之间显然也是等秩的. 下面还是用原来命题中的 (H_{ij}) 讨论:

回到正题, 根据归纳假设及上面的讨论, 知矩阵

$$\begin{pmatrix}\pm1&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&\pm1&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&H_{rr}(\boldsymbol{u})&\cdots&H_{rm}(\boldsymbol{u})\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&H_{rm}(\boldsymbol{u})&\cdots&H_{mm}(\boldsymbol{u})\end{pmatrix}$$

在 $0\in\mathbb{R}_u^m$ 内满秩, 不妨设 $H_{rr}(\boldsymbol{u})\neq 0$, 下面要做的即把上述矩阵的右下角化成形如

$$\begin{pmatrix}H_{rr}(\boldsymbol{u})&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&*\end{pmatrix}$$

的形式. 这在高等代数中就是经典的用合同变换得对角阵的方法, 这里同样是用合同变换, 但是需要把这个变换的具体坐标形式写出来. 为了做到这一点, 只需要用初等合同矩阵记录合同变换中的每一步干了什么: 比如用第 r 行的 $H_{rr}(\boldsymbol{u})$ 消第 $r+1$ 行的 $H_{r,r+1}(\boldsymbol{u})$, 即用该行乘以 $-\frac{H_{r,r+1}(\boldsymbol{u})}{H_{rr}(\boldsymbol{u})}$ 加到第 $r+1$ 行上去. 这在初等合同矩阵下即:

$$\begin{pmatrix}1&&&&&\\ &\ddots&&&&\\ &&1&&&\\ &&-\frac{H_{r,r+1}(\boldsymbol{u})}{H_{rr}(\boldsymbol{u})}&1&&\\ &&&&\ddots&\\ &&&&&1\end{pmatrix}$$

将上述操作对每一行都对应做一遍, 即可得到如下记录变换的矩阵:

$$
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\frac{H_{r,r+1}(\boldsymbol{u})}{H_{rr}(\boldsymbol{u})} & 1 & & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & -\frac{H_{r,m}(\boldsymbol{u})}{H_{rr}(\boldsymbol{u})} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

对应高等代数中的换基, 我们再换一次元, 利用上面的矩阵定义一个新的微分同胚 $\boldsymbol{\psi}: \mathbb{R}_v^m \to \mathbb{R}_u^m$, 并记 $\tilde{H}_{ij} = H_{ij} \circ \psi$, 同样, 在这个换元中为了方便还是取 $\psi(0) = 0$:

$$
\begin{cases} u^1 = \psi^1(v^1, \cdots, v^m) = v^1 \\ \quad \vdots \\ u^r = \psi^r(v^1, \cdots, v^m) = v^r \\ u^{r+1} = \psi^{r+1}(v^1, \cdots, v^m) = (-\frac{\tilde{H}_{r,r+1}(\boldsymbol{v})}{\tilde{H}_{rr}(\boldsymbol{v})})v^r + v^{r+1} \\ \quad \vdots \\ v^m = \psi^m(v^1, \cdots, v^m) = (-\frac{\tilde{H}_{r,m}(\boldsymbol{v})}{\tilde{H}_{rr}(\boldsymbol{v})})v^r + v^m \end{cases}
$$

总的按向量形式来写即为:

$$
\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\frac{\tilde{H}_{r,r+1}(\boldsymbol{v})}{\tilde{H}_{rr}(\boldsymbol{v})} & 1 & & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & -\frac{\tilde{H}_{r,m}(\boldsymbol{v})}{\tilde{H}_{rr}(\boldsymbol{v})} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

从而对原来的函数 $f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))$, 把 $\boldsymbol{u}$ 用 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{v})$ 代替, 有:

$$
\begin{aligned} f \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{v}) &= (\tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{v})^T(\tilde{H}_{ij})(\tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{v}) \\ &= \boldsymbol{v}^T\tilde{\boldsymbol{P}}^T(\tilde{H}_{ij})\tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{v}^T \begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{H}_{rr}(\boldsymbol{v}) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \end{aligned}
$$

从而最后只需要把 $\tilde{H}_{rr}(\boldsymbol{v})$ 这一项单位化即可, 取最后一个微分同胚, 这个微分同胚的作用即单位化

$\tilde{H}_{rr}(\boldsymbol{v})$ 这一个元素, 从矩阵的角度上讲即作用如下初等合同矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{|\tilde{H}_{rr}(\boldsymbol{v})|}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

按照与上面合同变换相同的思路, 定义如下微分同胚: $\boldsymbol{\alpha}: \mathbb{R}_t^m \to \mathbb{R}_v^m$, 记 $H_{ij}^{\circ}(\boldsymbol{t}) = \tilde{H}_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}))$:

$$\begin{cases} v^i = t^i, i \neq r \\ v^r = \frac{1}{\sqrt{|H_{rr}^{\circ}(\boldsymbol{t})|}} t^r \end{cases}$$

用向量形式表示即 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{t}$ 从而最后考虑一整个函数:

$$\begin{aligned} f \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}) &= (\boldsymbol{M}\boldsymbol{t})^T (H_{ij}^{\circ})(\boldsymbol{M}\boldsymbol{t}) \\ &= \boldsymbol{t}^T \boldsymbol{M}^T (H_{ij}^{\circ}) \boldsymbol{M}\boldsymbol{t} \\ &= \boldsymbol{t}^T \begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \boldsymbol{t} \end{aligned}$$

把剩下未知的那部分统一用 $A_{ij}(\boldsymbol{t})$ 表示, 则把这个函数按坐标形式写开来即:

$$f \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}) = \pm (t^1)^2 \pm \cdots \pm (t^r)^2 + \sum_{i,j=r+1}^{m} t^i t^j A_{ij}(\boldsymbol{t})$$

根据前面所有换元的具体性质以及条件, 可知总的换元函数 $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\alpha}$ 是微分同胚, 从而 r 情况得证, 命题进而得证. □

Chapter 3

多重积分

3.1 矩形区域上的积分

1. 设一元函数 f, g 在区间 [0,1] 上可积, 求证: 二元函数 $f(x)g(y)$ 在 $I = [0,1]^2$ 上可积, 并且

$$\iint\limits_I f(x)g(y)dxdy = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(y)dy.$$

证明

由一元函数 f, g 在 [0,1] 可积, 注意到 f, g 必有界, 并有:

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \overline{\int_0^1} f(x)dx$$

$$\underline{\int_0^1} g(y)dy = \int_0^1 f(y)dy = \overline{\int_0^1} f(y)dy$$

$$\Rightarrow \underline{\iint\limits_I} f(x)g(y)dxdy = \inf_I \sum_{i=1}^k f(\xi_i^1)g(\xi_i^2)\sigma(I_i) \geq \inf_{[0,1]} \sum_{i=1}^k f(\xi_i^1)\Delta(\pi^1(I_i)) \inf_{[0,1]} \sum_{j=1}^k g(\xi_j^2)\Delta(\pi^2(I_i))$$

$$= \underline{\int_0^1} f(x)dx \underline{\int_0^1} g(y)dy$$

同理

$$\overline{\iint\limits_I} f(x)g(y)dxdy \leq \overline{\int_0^1} f(x)dx \overline{\int_0^1} g(y)dy$$

$$\Rightarrow \underline{\int_0^1} f(x)dx \underline{\int_0^1} g(y)dy \leq \underline{\iint\limits_I} f(x)g(y)dxdy \leq \overline{\iint\limits_I} f(x)g(y)dxdy \overline{\int_0^1} f(x)dx \overline{\int_0^1} g(y)dy$$

而

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx \underline{\int_0^1} g(y)dy = \overline{\int_0^1} f(x)dx \overline{\int_0^1} g(y)dy$$

$$\Rightarrow \underline{\iint\limits_I} f(x)g(y)dxdy = \overline{\iint\limits_I} f(x)g(y)dxdy$$

命题即证.

2. 计算积分

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y}dxdy.$$

解

由 **1.**, $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y}dxdy = \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} e^xe^ydxdy = \int_0^1 e^xdx\int_0^1 e^ydy = 2e-2.$

3. 设 $a>0, I=[-a,a]\times[-a,a]$, 求证:

$$\iint\limits_I sin(x+y)dxdy = 0,$$

并试从几何上说明这一结果.

证明

易知 **1.** 的结果可推至任何形如 $I=[a,b]\times[c,d]$ 的区域. 从而

$$\iint\limits_I sin(x+y)dxdy = \iint\limits_I (sinxcosy+cosxsiny)dxdy = \iint\limits_I sinxcosydxdy + \iint\limits_I sinycosxdxdy = 0$$

几何上, 这件事说明三维空间中, 曲面 $z=sin(x+y)$ 在 I 上的重心在原点.

4. 采用定理 16.7 中的记号, 求证: f 在 I 上可积的必要充分条件是, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得凡是 $\parallel\pi\parallel<\delta$, 便有

$$\sum_{i=1}^k (M_i-m_i)\sigma(I_i)<\varepsilon.$$

证明

若 f 可积, 有:

$$\overline{\int_I} fd\sigma = \underline{\int_I} fd\sigma =: A$$

$$\Rightarrow \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^k \sup_{I_i} f(\xi_i)\sigma(I_i) = A$$

$$\wedge \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{j=1}^k \inf_{I_j} f(\xi_j)\sigma(I_j) = A$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\parallel\pi\parallel>0(\parallel\pi\parallel<\delta\Rightarrow|\sum_{i=1}^k \sup_{I_i} f(\xi_i)\sigma(I_i)-A|<\varepsilon)$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\parallel\pi\parallel>0(\parallel\pi\parallel<\delta\Rightarrow|\sum_{j=1}^k \inf_{I_j} f(\xi_j)\sigma(I_j)-A|<\varepsilon)$$

$$\Rightarrow|\sum_{i=1}^k \inf_{I_i} f(\xi_i)\sigma(I_i)-\sum_{j=1}^k \inf_{I_i} f(\xi_j)\sigma(I_j)|<2\varepsilon$$

此即命题.

5. 设 f 在 I 上可积. 求证: $|f|$ 在 I 上也可积, 并且

$$|\int\limits_I fd\sigma| \le \int_I |f|d\sigma.$$

证明

考虑振幅, 知 $\omega(|f|,I)\le\omega(f,I)<\varepsilon$. 由定义

$$|\sum_i f(\xi_i)\sigma_i|\le\sum_i |f|(\xi_i)\sigma_i$$

两边取极限即得.

3.2 可积函数类

3.2.1 Lebesgue 定理的梳理

引理 3.2.1 集合 $B\subset\mathbb{R}^2$, 函数 f 在点 $\boldsymbol{x}\in B$ 处连续的充要条件是 $\omega(f,\boldsymbol{x})=0$.

证明

当 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续, 按定义知

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta\Rightarrow|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon)$$

而按定义

$$\omega(f,\boldsymbol{x}_0)=\lim_{r\to0^+}\omega(f,U_r(\boldsymbol{x}_0))=\lim_{r\to0^+}\sup_{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in U_r(\boldsymbol{x}_0)}\{|f(\boldsymbol{y}_1)-f(\boldsymbol{y}_2)|\}$$

由极限保序性知 $\sup\limits_{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in U_r(\boldsymbol{x}_0)}\{|f(\boldsymbol{y}_1)-f(\boldsymbol{y}_2)|\}\le\varepsilon<2\varepsilon$ 进而 $\omega(f,\boldsymbol{x}_0)=0$.

当 $\omega(f,\boldsymbol{x}_0)=0$, 此即 $\lim\limits_{r\to0^+}\sup\limits_{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in U_r(\boldsymbol{x}_0)}\{|f(\boldsymbol{y}_1)-f(\boldsymbol{y}_2)|\}=0$, 按定义:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall r\in\mathbb{R}^+(r<\delta\Rightarrow|\sup_{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in U_r(\boldsymbol{x}_0)}\{|f(\boldsymbol{y}_1)-f(\boldsymbol{y}_2)|\}|<\varepsilon)$$

而

$$\forall\boldsymbol{x}'\in U_r(\boldsymbol{x}_0)(|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}_0)|\le|\sup_{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in U_r(\boldsymbol{x}_0)}\{|f(\boldsymbol{y}_1)-f(\boldsymbol{y}_2)|\}|<\varepsilon)$$

进而由定义即得函数在该点连续.

引理 3.2.2 $D(f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$.

证明 按定义, f 在 I 上的不连续点 $\boldsymbol{x}_0$ 满足:

$$\exists\varepsilon_0>0\forall\delta>0\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta\Rightarrow|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|>\varepsilon_0)$$

而 $\frac{1}{n}\to0$, 这就说明存在 N 使得 $\boldsymbol{x}_0\in\bigcup\limits_{i=N}^{+\infty}D_{\frac{1}{i}}$, 进而考虑全体 $\boldsymbol{x}_0$, 知 $D(f)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}D_{\frac{1}{i}}$, 但后者显然是前者的子集, 进而命题成立.

引理 3.2.3 设 f 是定义在有限闭矩形 I 上的函数, 如果存在一列开矩形 $I_j,j=1,2,\cdots$, 使得 $D(f)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_j$. 记 $K=I\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_j$, 那么对任意 $\varepsilon>0$, 一定存在 $\delta>0$, 当 $\boldsymbol{x}\in K,\boldsymbol{y}\in I$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时, 有 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$.

首先看看一元情况对应的定理:

引理 3.2.4 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 如果存在一列区间 $(\alpha_j,\beta_j), j=1,2,\cdots$, 使得 $D(f)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j)$, 记 $K=[a,b]\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j)$, 那么对任意 $\varepsilon>0$, 一定存在 $\delta>0$, 当 $x\in K, y\in[a,b]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

证明

用反证法. 如果结论不成立, 则必存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $s_n\in K, t_n\in[a,b]$, 虽然 $|s_n-t_n|<\frac{1}{n}$, 但仍有

$$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$$

因为 $\{s_n\}\subset K\subset[a,b]$, 故必有 $\{s_n\}$ 的子列 $\{s_{k_n}\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}s_{k_n}=s^*$$

届于 K 在 $[a,b]$ 中的补集是开的, 故 K 在 $[a,b]$ 中闭. 进而 $s^*\in K$. 由于

$$|t_{k_n}-s^*|\leq|t_{k_n}-s_{k_n}|+|s_{k_n}-s^*|<\frac{1}{k_n}+|s_{k_n}-s^*|<\frac{1}{n}+|s_{k_n}-s^*|$$

由此即知 $n\to\infty, t_{k_n}\to s^*$. 而

$$|f(s_{k_n})-f(t_{k_n})|\geq\varepsilon_0$$

由于 $s^*\in K$, 故 f 在 s^* 处连续（这是因为 K 是 f 在 $[a,b]$ 上所有连续点的集合）, 这正与上式相悖, 故矛盾. □

接着来类似地证明引理 4.2.3:

证明

用反证法. 如果结论不成立, 即 $\exists\varepsilon>0\forall\delta>0((\boldsymbol{x}\in K\wedge\boldsymbol{y}\in I\wedge\parallel\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\parallel<\delta)\wedge|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\geq\varepsilon_0)$. 取满足上述条件的两列点 $\boldsymbol{s}_n\in K,\boldsymbol{t}_n\in I$, 并因 δ 的任意性取 $\delta=\frac{1}{n}$. 因为 $\boldsymbol{s}_n\in K\subset I$, 故 $\boldsymbol{s}_n$ 必有收敛子列 $\boldsymbol{s}_{k_n}$, 记

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{s}_{k_n}=\boldsymbol{s}^*$$

与一元情况同理, K 是闭集, 进而 $\boldsymbol{s}^*\in K$, 考虑

$$|\boldsymbol{t}_{k_n}-\boldsymbol{s}^*|\leq|\boldsymbol{t}_{k_n}-\boldsymbol{s}_{k_n}|+|\boldsymbol{s}_{k_n}-\boldsymbol{s}^*|\leq\frac{1}{k_n}+|\boldsymbol{s}_{k_n}-\boldsymbol{s}^*|\leq\frac{1}{n}+|\boldsymbol{s}_{k_n}-\boldsymbol{s}^*|$$

进而 $n\to\infty,\boldsymbol{t}_{k_n}\to\boldsymbol{s}^*$. 而因为 f 在 $\boldsymbol{s}^*$ 连续, 这与条件相悖, 故矛盾. □

下面开始证明 Lebesgue 定理:

定理 3.2.1 (Lebesgue) 设函数 f 在闭矩形 I 上有界, 那么 f 在 I 上 *Riemann* 可积的充要条件是 f 在 I 上的全体不连续点所成的集 $D(f)$ 是一零测集.

证明

先证必要性（即可积推零测）. 由引理 4.2.2, $D(f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$, 故只需证 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$ 零测, 进而只需证 $D_{\frac{1}{n}}$ 零测. 因为 f 在 I 上可积, 由定理 16.6 和 16.7（上下达布和）, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 I 的一个分割 $\pi=\{I_1,\cdots,I_m\}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(I_i)<\varepsilon \tag{3.1}$$

令 $E_n=D_{\frac{1}{n}}\backslash l(\pi)$, 这里 $l(\pi)$ 是 π 的分割线构成的集合. 由例 3 知 $l(\pi)$ 是零面积集, 进而只需证明 E_n 是零测集.

由于 $I\backslash l(\pi)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$, 这里 $I_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是开矩形, 所以

$$E_n=I\cap(D_{\frac{1}{n}}\backslash l(\pi))=(I\backslash l(\pi))\cap D_{\frac{1}{n}}=D_{\frac{1}{n}}\cap(\bigcup_{i=1}^{m}I_i)\subset\bigcup\{I_i|D_{\frac{1}{n}}\cap I_i\neq\oslash\}$$

这说明 E_n 被一列开矩形的并所覆盖, 这一列矩形中的每一个都含有 $D_{\frac{1}{n}}$ 中的点. 任取 $\boldsymbol{a}\in D_{\frac{1}{n}}\cap I_i$, 因为 I_i 是开集, 故必能取到一个充分小的 r 使得 $B(\boldsymbol{a};r)\in I_i$. 用 ω_i 和 $\omega_(f,B(\boldsymbol{a};r))$ 分别记 f 在 I_i 和在 $B(\boldsymbol{a};r)$ 上的振幅, 那么

$$\omega_i\geq\omega(f,B(\boldsymbol{a};r))\geq\omega(f,\boldsymbol{a})\geq\frac{1}{n}\tag{3.2}$$

(上式前三项是看集合间的包含关系, 最后到 $\frac{1}{n}$ 是 $D_{\frac{1}{n}}$ 的定义). 如果用 $\sum'$ 表示对那些使得 $D_{\frac{1}{n}}\cap I_i\neq\oslash$ 的 i 求和, 那么由 (4.1) 和 (4.2) 可得

$$\varepsilon\overset{(3.1)}{>}\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(I_i)\geq\sum{}'\omega_i\sigma(I_i)\overset{(3.2)}{\geq}\frac{1}{n}\sum{}'\sigma(I_i)$$

即

$$\sum{}'\sigma(I_i)<n\varepsilon$$

这正好说明覆盖 E_n 的那列开矩形的面积之和小于 $n\varepsilon$, 进而 E_n 是零面积集, 所以 $D(f)$ 是零测集.

再证充分性(零测推可积). 设 $D(f)$ 是一个零测集, 因而对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一列开矩形 $J_i,i=1,2,\cdots$, 使得

$$D(f)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}J_i,\quad\sum_{i=1}^{\infty}\sigma(J_i)<\varepsilon\tag{3.3}$$

记 ω 是 f 在 I 上的振幅. 令

$$K=I\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}J_i$$

根据引理 4.2.3, 对上述的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\boldsymbol{x}\in K,\boldsymbol{y}\in I$, 且
$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时有

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon\tag{3.4}$$

现取分割 $\pi=\{I_1,\cdots,I_m\}$, 使得 $\|\pi\|<\delta$, 记

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(I_i)=\sum{}_1\omega_i\sigma(I_i)+\sum{}_2\omega_i\sigma(I_i)\tag{3.5}$$

这里 $\sum_1$ 表示对 K 和 I_i 相交的那些 i 求和, $\sum_2$ 表示对 K 和 I_i 不相交的那些 i 求和. 对 $\sum_1$ 中的项, 因为 $K\cap I_i\neq\oslash$, 任取 $y_i\in K\cap I_i$, 由 (3. 4) 可得

$$\omega_i=\sup_{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2\in I_i}|f(\boldsymbol{z}_1)-f(\boldsymbol{z}_2)|\leq\sup_{\substack{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2\in I_i\\ y_i\in K\cap I_i}}(|f(\boldsymbol{z}_1)-f(\boldsymbol{y}_i)|+|f(\boldsymbol{y}_i)-f(\boldsymbol{z}_2)|)\leq 2\varepsilon$$

故

$$\sum{}_1\omega_i\sigma(I_i)\leq\sum{}_1 2\varepsilon\sigma(I_i)=2\varepsilon\sigma(I)\tag{3.6}$$

对 $\sum_2$ 中的项, $K\cap I_i=\oslash$, 故当 $\boldsymbol{x}\in I_i$ 时, $\boldsymbol{x}\notin K$, 因而 $\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}J_i$, 即 $I_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}J_j$, 故由 (3. 3) 知

$$\sum{}_2\sigma(I_i)\leq\sum_{j=1}^{\infty}\sigma(J_j)<\varepsilon$$

故

$$\sum\nolimits_2 \omega_i\sigma(I_i) \le \varepsilon \sum\nolimits_2 \omega_i < \omega\varepsilon \tag{3.7}$$

从而综上, 即有

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i\sigma(I_i) < 3\omega\varepsilon$$

从而 f 在 I 上可积.

思路整理

整体证明考虑的都是达布（或更准确说是柯西）可积判别法. 可积推零测的时候, 因为不连续点的集合根据引理是一列集的并, 就考虑能不能证明这一列集都是零测集. 因为积分总是伴随分割出现的, 而分割线本身是零测, 所以这一列集再把分割线刨掉, 按理说也应是零测集. 之后便通过计算证明了这列集中的每个集不但零测, 甚至是零面积的.

零测推可积的时候, 首先按定义把不连续点集合的可数开覆盖及它们满足的体积限定摆出来, 再就看连续点集和不连续点集之间的关系. 在利用积分定义的分划时, 讨论分划线与不连续点集是否相交（这里就是看 I_i 内有无不连续点, 如果有的话 ω_i 就不能单纯用引理来放缩了）. 分开讨论之后便可得到结论. n 维的情况仿照二维, 自然就可推出了. 下面展示证明过程:

仿照二维情况, 还是先给出三个引理:

引理 3.2.5 对集合 $B \subset \boldsymbol{I}^n$, 函数 f 在点 $\boldsymbol{x} \in B$ 处连续的充要条件是 $\omega(f, \boldsymbol{x}) = 0$.

证明

当 f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in B$ 连续, 按照连续的定义有:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall\boldsymbol{x} \in B(\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon)$$

从而任选 $B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ 中的两点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$, 可知:

$$|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| \le |f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x})| + |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_2)| < 2\varepsilon$$

根据 ε 的任意性即知 $\omega(f, \boldsymbol{x}) = 0$.

当 $\omega(f, \boldsymbol{x}_0) = 0$, 按照定义有:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in B(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta) \Rightarrow \sup|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon)$$

自然, 固定 $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_0$ 即可按定义得到 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

引理 3.2.6 $D(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$.

证明

按定义, f 在 $\boldsymbol{I}$ 上的不连续点 $\boldsymbol{x}_0$ 满足:

$$\exists\varepsilon_0 > 0 \forall\delta > 0 \forall\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| > \varepsilon_0)$$

而 $\frac{1}{n} \to 0$, 这就说明存在 N 使得 $\boldsymbol{x}_0 \in \bigcap\limits_{i=N}^{+\infty} D_{\frac{1}{i}}$, 进而考虑全体 $\boldsymbol{x}_0$, 知 $D(f) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} D_{\frac{1}{i}}$, 但后者显然是前者的子集, 进而命题成立.

引理 3.2.7 设 f 是定义在有限闭方体 $\boldsymbol{I}$ 上的函数, 如果存在一列开方体 $\boldsymbol{I}_j, j = 1, 2, \cdots$, 使得 $D(f) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j$, 记 $K = \boldsymbol{I} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j$, 那么对任意 $\varphi > 0$, 一定存在 $\delta > 0$, 当 $\boldsymbol{x} \in K, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{I}$ 且 $\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| < \delta$ 时, $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$

证明

用反证法, 如果结论不成立, 即 $\exists\varepsilon>0\forall\delta>0((\boldsymbol{x}\in K\wedge\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{I}\wedge\parallel\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\parallel<\delta)\wedge|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\geq\varepsilon_0)$. 取满足上述条件的两列点 $\boldsymbol{s}_n\in K,\boldsymbol{t}_n\in\boldsymbol{I}$, 并因 δ 的任意性取 $\delta=\frac{1}{n}$. 因为 $\boldsymbol{s}_n\in K\subset\boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{s}_n$ 必有收敛子列 $\boldsymbol{s}_{k_n}$, 记

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{s}_{k_n}=\boldsymbol{s}^*$$

届于 K 在 $\boldsymbol{I}$ 中的补集是开集之并, 为开集, 故 K 在 $\boldsymbol{I}$ 中闭, 进而 $\boldsymbol{s}^*\in K$, 考虑

$$|\boldsymbol{t}_{k_n}-\boldsymbol{s}^*|\leq|\boldsymbol{t}_{k_n}-\boldsymbol{s}_{k_n}|+|\boldsymbol{s}_{k_n}-\boldsymbol{s}^*|\leq\frac{1}{k_n}+|\boldsymbol{s}_{k_n}-\boldsymbol{s}^*|\leq\frac{1}{n}+|\boldsymbol{s}_{k_n}-\boldsymbol{s}^*|$$

进而 $n\to\infty,\boldsymbol{t}_{k_n}\to\boldsymbol{s}^*$. 而因为 f 在 $\boldsymbol{s}^*$ 连续, 这与条件相悖, 故矛盾.

下面正式开始证明定理:

定理 3.2.2 (Lebesgue) *设函数 $f:\mathbb{R}^k\supset\boldsymbol{I}^k\to\mathbb{R}$ 在闭方体 $\boldsymbol{I}^k$ 有界, 那么 f 在 $\boldsymbol{I}^k$ 上 Riemann 可积的充要条件是 f 在 $\boldsymbol{I}^k$ 上的全体不连续点所成的集 $D(f)$ 是一零测集.*

证明

先证可积推零测. 由引理 2 知 $D(f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$, 考虑证明 $D_{\frac{1}{n}}$ 是零测集. 因为 f 在 $\boldsymbol{I}^k$ 上 Riemann 可积, 故根据 Cauthy 准则知对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $\boldsymbol{I}^k$ 的一个分割 $\pi=\{\boldsymbol{I}_1^k,\cdots,\boldsymbol{I}_m^k\}$ 使得:

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)<\varepsilon$$

这里 ω_i 是函数 f 在方体 $\boldsymbol{I}_i^k$ 中的振幅, $\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)$ 是方体 $\boldsymbol{I}_i^k$ 的体积. 令 $E_n=D_{\frac{1}{n}}\backslash l(\pi)$, 这里 $l(\pi)$ 是 π 的分割面构成的集合. 因为 $l(\pi)$ 中的每个分割面在 $\mathbb{R}^k$ 中都是零面积集, 故 $l(\pi)$ 作为至多可数个零面积集的并, 本身在 $\mathbb{R}^k$ 也是零面积集, 从而只需要说明 E_n 是零测集即可.

由于 $\boldsymbol{I}^k\backslash l(\pi)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{I}_i^k$, 这里 $\boldsymbol{I}_i^k(i=1,2,\cdots,m)$ 都是开方体, 所以:

$$E_n=\boldsymbol{I}^k\cap(D_{\frac{1}{n}}\backslash l(\pi))=(\boldsymbol{I}^k\backslash l(\pi))\cap D_{\frac{1}{n}}=D_{\frac{1}{n}}\cap(\bigcup_{i=1}^{m}\boldsymbol{I}_i^k)\subset\bigcup\{I_i|D_{\frac{1}{n}}\cap\boldsymbol{I}_i^k\neq\oslash\}$$

这说明 E_n 被一列开方体的并所覆盖, 这一列方体中的每个都含有 $D_{\frac{1}{n}}$ 中的点. 任取 $\boldsymbol{a}\in D_{\frac{1}{n}}\cap\boldsymbol{I}_i^k$, 因为 $\boldsymbol{I}_i^k$ 是开集, 故必能取到一个充分小的 r 使得 $B(\boldsymbol{a};r)\in\boldsymbol{I}_i^k$. 用 ω_i 和 $\omega(f,B(\boldsymbol{a};r))$ 分别记 f 在 $\boldsymbol{I}_i^k$ 和在 $B(\boldsymbol{a};r)$ 上的振幅, 有:

$$\omega_i\geq\omega(f,B(\boldsymbol{a};r))\geq\omega(f,\boldsymbol{a})\geq\frac{1}{n}$$

如果用 Σ' 表示对那些满足 $D_{\frac{1}{n}}\cap\boldsymbol{I}_i^k\neq\oslash$ 的 i 求和, 则有:

$$\varepsilon>\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)\geq\sum{}'\omega_i\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)\geq\frac{1}{n}\sum{}'\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)$$

即

$$\sum{}'\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)<n\varepsilon$$

这说明覆盖 E_n 的那一列开方体的体积之和小于 $n\varepsilon$, 从而 E_n 是零面积集, 进而 $D(f)$ 是零测集.

再证零测推可积, 设 $D(f)$ 是零测集, 根据定义知对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一列开方体 $\boldsymbol{J}_i^k,i=1,2,\cdots$, 使得

$$D(f)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{J}_i^k,\quad\sum_{i=1}^{\infty}\sigma(\boldsymbol{J}_i^k)<\varepsilon$$

记 ω 是 f 在 $\boldsymbol{I}^k$ 的振幅, 令

$$K=\boldsymbol{I}^k\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{J}_i^k$$

根据引理 3 知对上述的 ε 存在 $\delta>0$ 使得当 $\boldsymbol{x}\in K,\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{I}$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时有:

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$$

现取分割 $\pi=\{\boldsymbol{I}_i^k,\cdots,\boldsymbol{I}_m^k\}$, 使得 $\|\pi\|<\delta$, 记

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)=\sum\nolimits_1\omega_i\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)+\sum\nolimits_2\omega_i\boldsymbol{I}_i^k$$

这里 $\sum_1$ 表示对满足 K 和 $\boldsymbol{I}_i^k$ 相交的那些 i 求和, $\sum_2$ 表示对 K 和 $\boldsymbol{I}_i^k$ 不相交的那些 i 求和. 对 $\sum_1$ 中的项, 因为 $K\cap\boldsymbol{I}_i^k\neq\oslash$, 任取 $\boldsymbol{y}_i\in K\cap\boldsymbol{I}_i^k$, 有:

$$\omega_i=\sup_{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2\in\boldsymbol{I}_i^k}|f(\boldsymbol{z}_1)-f(\boldsymbol{z}_2)|\leq\sup_{\substack{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_1\in\boldsymbol{I}_i^k\\ \boldsymbol{y}_i\in K\cap\boldsymbol{I}_i^k}}(|f(\boldsymbol{z}_1)-f(\boldsymbol{y}_i)|+|f(\boldsymbol{y}_i)-f(\boldsymbol{z}_2)|)<2\varepsilon$$

对 $\sum_2$ 中的项, $K\cap\boldsymbol{I}_i^k=\oslash$, 故当 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I}_i^k$ 时, 必有 $\boldsymbol{x}\notin K$, 进而 $\boldsymbol{x}$ 在 K 的补集中, 即 $\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{J}_j^k$, 从而 $\boldsymbol{I}_i^k\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{J}_j$, 故有:

$$\sum\nolimits_2\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)\leq\sum_{j=1}^{\infty}\sigma(\boldsymbol{J}_j^k)<\varepsilon$$

进而

$$\sum\nolimits_2\omega_i\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)\leq\varepsilon\Sigma_2\sup\omega_i\leq\omega\varepsilon$$

综上, 即有:

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(\boldsymbol{I}_i^k)<3\omega\varepsilon$$

进而 f 在 $\boldsymbol{I}^k$ 上可积. □

下面的推论就是运用 Lebedgue 定理的一个很好的例子:

定理 3.2.3 *设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 有界, 集合 $B=\{\boldsymbol{x}\in I|f(\boldsymbol{x})\neq 0\}$ 是零面积集, 则 f 可积.*

证明

显然, 开集 $I^\circ\backslash\overline{B}=(\mathbb{R}^2\backslash\overline{B})\cap I^\circ$ 都是 f 的连续点, 可见 $D(f)\subset\partial I\cup\overline{B}$. 由于 ∂I 是一零面积集（这里个人感觉是默认了 I 是有界矩形）, $\overline{B}$ 也是零面积集, 故 $\partial I\cup\overline{B}$ 是零面积集, 进而 $D(f)$ 零面积, f 在 I 上可积.

3.2.2 练习题

1. 设点列 $\{\boldsymbol{p}_n\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有极限, 求证: 点集 $B=\{\boldsymbol{p}_n\}$ 是零面积集.

证明

记 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{p}^*$, 由定义知:

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall n\in\mathbb{N}(n>N\Rightarrow\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{p}^*\|<\varepsilon)$$

根据这个定义, 知这点列的前 N 个点中, 每个都能被一个面积为 ε 的矩形覆盖, 而这点列中 $\boldsymbol{p}_N$ 之后的点都满足 $\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{p}^*\|$, 进而它们都能被一个面积为 ε 的矩形覆盖, 进而这个开覆盖的面积和为

$(N+1)\varepsilon$, 由 ε 的任意性即证命题.

•2. 设有界集 $B\subset\mathbb{R}^2$ 且 B' 是零面积集, 求证: $\overline{B}$ 也是零面积集.

证明

3. 证明: $[0,1]^2$ 中的全体有理点所成的集不是零面积集, 但是零测集.

证明

$0,1^2\cap\mathbb{Q}$ 是零面积集当且仅当 $\overline{([0,1]^2\cap\mathbb{Q})}=[0,1]^2$ 是零面积集, 但后者显然不是零面积集. 而单个有理点是零测集, $[0,1]^2\cap\mathbb{Q}$ 的势可数, 故 $[0,1]^2\cap\mathbb{Q}$ 是可数个零测集之并, 自然是零测集.

4. 设闭矩形 $J\subset I$, 且 f 在 I 上可积, 求证: f 在 J 上也可积.

证明

f 在 I 上可积当且仅当 f 在 I 上有界且有至多可数个不连续点, 而由于 $J\subset I$, 知 $\omega(f,J)\le\omega(f,I)$, f 在 J 上的不连续点个数不会超过在 I 上的不连续点的个数. 故由 Lebesgue 定理知 f 在 J 上可积.

5. 设可积函数 $f>0$ 在 I 上成立, 求证: $\int\limits_I fd\sigma>0$.

证明

考虑 I°, 由 $f>0$ 知 $\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in I^\circ}f(\boldsymbol{x})\ge0$. 对 I° 做参数为 $\lambda(P)$ 的分划 $\pi=\{I_1,I_2,\cdots.I_n\}$, 知至少有一个 I_k 满足 $\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in I_k}f(\boldsymbol{x})>0$, 因为 $\exists\boldsymbol{x}_0\in I\exists r>0\forall\boldsymbol{x}\in I(\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0;r)\Rightarrow f(\boldsymbol{x})>0)$, 取那些含于 $B(\boldsymbol{x}_0;r)$ 的 I_{k_i} 即可. 知 $B(\boldsymbol{x}_0;r)$ 显然不是零面积集, 此时 $\exists c>0(f>c)$. 进而

$$\int\limits_I fd\sigma=\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^n f(\boldsymbol{\xi}_i)|I_i|\ge\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{j=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_{k_j})|I_{k_j}|\ge\lim_{\lambda(P)\to0}c\sum_{j=1}^m|I_{k_j}|\ge c\mu(B(\boldsymbol{x}_0;r))>0$$

6. 研究定义在区间 $[0,1]^2$ 上的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\frac{1}{xy}, & x\ne0\wedge y\ne0\\ 0, & x=0\vee y=0\end{cases}$$

的可积性.

解

函数可积, 因为 $f(x,y)$ 的不连续点仅在 (0,0), 这是零面积集, 且函数显然有界, 故由 Lebesgue 定理知函数可积.

7. 设 I 是一个有界的矩形, $B=\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n,\cdots\}\subset I$, 定义函数

$$f(\boldsymbol{p})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{p}\notin B\\ \frac{1}{n} & \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_n,n\in\mathbb{N}^+\end{cases}$$

研究函数 f 在 I 上的可积性.

证明

$D(f)=B$, 但 B 根据第一题及极限点引理, 它是至多可数个有极限的子列构成的集合的并, 而这些集合都是零面积集, 故 B 是零测集, 进而由 Lebesgue 定理知 f 可积.

8. 设函数 f 和 g 在 I 上可积, 求证: fg 也在 I 上可积；当 g 在 I 上不取零值时, $\frac{f}{g}$ 也在 I 上可积.

证明

设 f 的连续点集为 I_1, g 的连续点集为 I_2, 知:

$$\mathbb{R}\backslash(I_1\cap I_2)=(\mathbb{R}\backslash I_1)\cap(\mathbb{R}\backslash I_2)$$

但上式右端为两零测集之交, 显然也是零测集, 故 fg 的不连续点构成零测集, 同时显然 fg 在 I 上有界, 进而 fg 在 I 上可积.

考虑 I 为闭集, g 在 I 上不取零值意味着 g 与 $\frac{1}{g}$ 有相同的不连续点, 再根据上题结论即得.

9. 设 f 在 I 上可积, 证明: $|f|$ 在 I 上也可积, 并且

$$|\int_I fd\sigma|\leq\int_I|f|d\sigma$$

证明

设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个连续点, 知 $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\boldsymbol{x}\in I(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta\Rightarrow|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon)$. 此时 $||f(\boldsymbol{x})|-|f(\boldsymbol{x}_0)||<|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$, 从而 $\boldsymbol{x}_0$ 也是 $|f|$ 的连续点. 进而若记 $|f|$ 的不连续点集为 D_1, f 的不连续点集为 D_2, 则 $D_1\subset D_2$, 从而 $|f|$ 在 I 上也可积. 有:

$$|\sum_{i=1}^n f(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta_i|\leq\sum_{i=1}^n|f(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta_i|=\sum_{i=1}^n|f(\boldsymbol{\xi}_i)|\Delta_i$$

根据极限的保号性, 两边同时对分划参数取极限有:

$$\lim_{\lambda(P)\to0}|\sum_{i=1}^n f(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta_i|=|\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^n f(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta_i|\leq\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^n|f(\boldsymbol{\xi}_i)|\Delta_i$$

由积分定义即得

$$|\int_I fd\sigma|\leq\int_I|f|d\sigma$$

3.2.3 问题

1. 设 $\int_I fd\sigma>0$, 求证: 存在闭矩形 $J\subset I$, 使得 $f>0$ 在 J 上成立.

证明

因为 $\int_I fd\sigma$ 存在, 故 f 在 I 上可积, 进而 f 在 I 上有界. 若那些使得 $f>0$ 的点全部是不连续点, 根据 Lebesgue 准则, 这些不连续点构成的集合为零测集. 设 I 中去除这些不连续点形成的新集合为 I', 并记这些不连续点为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots$, 则有:

$$\begin{aligned}\int_I fd\sigma-\int_{I'}fd\sigma&=\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta_i\\&\leq\lim_{\lambda(P)\to0}\sup_I f\sum_{i=1}^m\Delta_i<\sup_I\varepsilon\end{aligned}$$

这里 ε 是任意的. 从而有 $\int_I fd\sigma \leq \int_{I'} fd\sigma$. 但 $\forall \boldsymbol{x} \in I'(f(\boldsymbol{x}) \leq 0)$, 从而有 $\int_{I'} fd\sigma \leq 0$, 进而 $\int_I fd\sigma \leq 0$, 矛盾! 故必存在满足 $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$ 的连续点 $\boldsymbol{x}_0$. 根据连续点的性质, 存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某邻域 $B(\boldsymbol{x}_0; r)$ 使得 $f > 0$, 任取该邻域中的闭矩形即得结论.

2. 对 $(x, y) \in [0,1]^2$, 定义

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{q}, & x = \frac{n}{m}, y = \frac{p}{q} \\ 0, & else \end{cases}$$

证明: f 在 $[0,1]^2$ 上可积, 这里 $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$.

证明

先取 $[0,1]^2$ 上的有理点: 对有理点 $\boldsymbol{x}_0$, 因为总可以构造一列无理点 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{x}_0$, 从而届于 $f(\boldsymbol{x}_0) > 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{a}_n)$, 知 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处不连续, 进而 $[0,1]^2$ 上的有理点都是 f 的不连续点.

再取 $[0,1]^2$ 上的无理点: 对无理点 $\boldsymbol{x}_0$, 取其邻域 $B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ 并给定某正整数 N, 因为对 $B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ 中的有理点 $(\frac{n}{m}, \frac{p}{q})$, 满足 $m \leq N, q \leq N$ 的点只有有限个, 故可以取这些点中使得 $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{a}|$ 最小的那个点 $\boldsymbol{a}_1$, 并记 $\delta = |\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{a}_1|$. 此时 $\forall \boldsymbol{a} = (\frac{n}{m}, \frac{p}{q}) \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)(m > N \wedge q > N)$. 再取 $N+1$ 作为新的正整数, 重复上述操作, 如此知: $N \to \infty \Rightarrow \forall \boldsymbol{a} = (\frac{n}{m}, \frac{p}{q}) \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)(0 < \frac{1}{m} + \frac{1}{q} < \frac{2}{N} \to 0)$, 从而可知无论是有理数列还是无理数列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{a}_n) = 0 = f(\boldsymbol{x}_0)$, 从而 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的连续点.

综上可知, f 在 $[0,1]^2$ 只有可数个不连续点, 且显然有 f 在 $[0,1]^2$ 上有界. 由 Lebesgue 准则知, f 在
$[0,1]^2$ 上可积.

3.3 矩形区域上二重积分的计算

3.3.1 富比尼定理的梳理

首先还是讨论二维情况:

定理 3.3.1 如果 f 在 $I = [a,b] \times [c,d]$ 上可积, 那么单变量函数 φ 与 ϕ 在区间 $[a,b]$ 上便可积, 并且

$$\int\limits_I fd\sigma = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx.$$

这里

$$\varphi(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)dy$$

$$\phi(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)dy$$

证明

对于 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 的分割

$$\pi_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$\pi_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

令

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n$$
$$J_j = [y_{j-1}, y_j], j = 1, 2, \cdots, m$$

因此子矩形

$$I_i \times J_j, i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m$$

形成了矩形 I 的分割 $\pi = \pi_x \times \pi_y$. 置 $A = \int\limits_I f d\sigma$, 依重积分的定义, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 I 的分割 π 满足 $\lambda(\pi) < \delta$ 时, 必有

$$A - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j < A + \varepsilon \tag{3.8}$$

其中 $\xi_i \in I_i$ 和 $\eta_j \in J_j (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$. 现在, 取分割 π_x 与 π_y 满足 $\lambda(\pi_x), \lambda(\pi_y) < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, 那么 $\lambda(\pi) < \delta$ 足以使 (8) 式成立. 由 (8) 得:

$$\begin{aligned} A - \varepsilon &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{inf} f(\xi_i, J_j)\Delta x_i \Delta y_j \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{sup} f(\xi_i, J_j)\Delta x_i \Delta y_j \leq A + \varepsilon \end{aligned} \tag{3.9}$$

注意到 $\sum\limits_{j=1}^{m} \mathrm{inf} f(\xi_i, J_j)\Delta y_j$ 是函数 $f(\xi_i, \cdot)$ 在 $[c, d]$ 上的下和, 因此

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{inf} f(\xi_i, J_j)\Delta y_j \leq \underline{\int_c^d} f(\xi_i, y)dy = \varphi(\xi_i)$$

同理

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{sup} f(\xi_i, J_j)\Delta y_j \geq \phi(\xi)$$

所以由 (9) 得出

$$A - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \phi(\xi)\Delta x_i \leq A + \varepsilon$$

这就是说

$$\lim_{\lambda(\pi_x \to 0)} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi)\Delta x_i = \lim_{\lambda(\pi_x)} \sum_{i=1}^{n} \phi(\xi_i)\Delta x_i = A$$

即定理中的等式成立. □

下面着手解决 n 维的富比尼定理:

定理 3.3.2 (Fubini) *设 $X \times Y$ 是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的区间, 它是区间 $X \subset \mathbb{R}^m$ 和区间 $Y \subset \mathbb{R}^n$ 的直积. 如果函数 $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ 在 $X \times Y$ 上可积, 那么积分*

$$\int_{X\times Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y}, \int_X d\boldsymbol{x} \int_Y f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \int_Y d\boldsymbol{y} \int_X f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x}$$

同时存在且彼此相等. (这里记 $F(\boldsymbol{x}) = \int_Y f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$, 如果存在 $\boldsymbol{x}$ 使得这个积分不存在, 那就令 $F(\boldsymbol{x})$ 是从这个区域的下积分到上积分之间任取的一个数)

证明

因为 f 在 $X\times Y$ 上可积, 故在 $X\times Y$ 上取分划的方式不影响最后的积分值. 不妨就在 X 上取分划 $P_X:\{X_i|i=1,2,\cdots,p\}$, 在 Y 上取分划 $P_Y:\{Y_j|j=1,2,\cdots,q\}$, 并取 $P=P_X\times P_Y$ 为 $X\times Y$ 上的分划. 这时 $X\times Y$ 被分出的每一小块为 $X_i\times Y_j$, 由区间体积的性质有 $\sigma(X_i\times Y_j)=\sigma(X_i)\sigma(Y_j)$. 下面证明式子的前两项: $\int_{X\times Y}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=\int_X d\boldsymbol{x}\int_Y f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$:

$$\begin{aligned}
s(f,P)&=\sum_{i,j}\inf_{\substack{\boldsymbol{x}\in X_i\\ \boldsymbol{y}\in Y_j}}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(X_i\times Y_i)\le\sum_i\inf_{\boldsymbol{x}\in X_i}(\sum_j\inf_{\boldsymbol{y}\in Y_j}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(Y_j))\sigma(X_i)\\
&\le\sum_i\inf_{\boldsymbol{x}\in X_i}(\underline{\int_Y}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y})\sigma(X_i)\\
&\le\sum_i\inf_{\boldsymbol{x}\in X_i}F(\boldsymbol{x})\sigma(X_i)\le\sum_i\sup_{\boldsymbol{x}\in X_i}F(\boldsymbol{x})\sigma(X_i)\\
&\le\sum_i\sup_{\boldsymbol{x}\in X_i}(\overline{\int_Y}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y})\sigma(X_i)\le\sum_i\sup_{\boldsymbol{x}\in X_i}(\sum_j\sup_{\boldsymbol{y}\in Y_j}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(Y_j))\sigma(X_i)\\
&\le\sum_i\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in X_i\\ \boldsymbol{y}\in Y_j}}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(X_i\times Y_j)=S(f,P)
\end{aligned}$$

从而根据 Darboux 准则, 由 $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}s(f,P)=\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}S(f,P)$ 可知 $F(\boldsymbol{x})$ 在 X_i 上可积, 且有

$$\int_{X\times Y}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=\int_X F(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

进而题式即证, 剩下的式子同理可证.

3.3.2 练习题

1. 计算下列积分: (1) $\iint\limits_I\frac{x^2}{1+y^2}dxdy, I=[0,1]^2$;

解

$$\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{x^2}{1+y^2}dydx=\int_0^1\frac{\pi}{4}x^2dx=\frac{\pi}{12}$$

(2) $\iint_I x\cos(xy)dxdy, I=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$;

解

$$\iint_I x\cos(xy)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 x\cos(xy)dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin ydy=1$$

(3) $\iint_I\sin(x+y)dxdy, I=[0,\pi]^2$.

解

$$\iint_I\sin(x+y)dxdy=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x+y)dxdy=\int_0^{\pi}-2\cos(y)dy=0$$

2. 设函数 f 在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续的二阶偏导数, 计算积分

$$\iint_I\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dxdy$$

解

$$\iint_I \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dydx = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial x}(x,c) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,d))dx$$
$$= f(b,c) - f(a,c) - f(b,d) + f(a,d)$$

3. 计算积分 $\int\limits_I f d\sigma$, 其中 $I = [0,1]^2$:

(1)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \le x^2 \\ 0, & y > x^2 \end{cases}$$

解

$$\int\limits_I f d\sigma = \int_0^1 (\int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_{x^2}^1 f(x,y)dy)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

(2)

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x^2 \le y \le 2x^2 \\ 0, & y < x^2 \vee y > 2x^2 \end{cases}$$

解

$$\int\limits_I f d\sigma = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x^2} f(x,y)dydx = \int_0^1 x^3 - \frac{3}{2}x^4 dx = -\frac{1}{20}$$

4. 利用定理 10.3.4 中的 Minkowski 不等式, 证明: 对 $a_k \ge 0, b_k \ge 0 (k = 1, 2, \cdots, n), p \ge 0$, 有不等式

$$(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^n a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^n b_k^p)^{\frac{1}{p}}$$

证明

设

$$f(x,y) \begin{cases} a_k, & k \le x \le k+1, 0 \le y \le 1 \\ b_k, & k \le x \le k+1, 1 < y \le 2 \end{cases}$$

并令 $a = 0, b = n, c = 0, d = 2$, 则有:

$$\begin{aligned} &(\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)^p dx)^{\frac{1}{p}} \\ =&(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{p}} \\ \le& \int_c^d (\int_a^b f^p(x,y)dx)^{\frac{1}{p}} dy \\ =&(\sum_{k=1}^n a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^n b_k^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

5. 设 f,g 都在 $[a,b]$ 上可积, 利用二重积分不等式

$$\iint\limits_{[a,b]^2}(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2dxdy\geq 0$$

证明 Cauthy-Schwarz 不等式:

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_c^d g^2(x)dx$$

证明

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{[a,b]^2}(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2dxdy\geq 0\\
\Rightarrow&\iint\limits_{[a,b]^2}(f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)-2f(x)f(y)g(x)g(y))dxdy\geq 0\\
\Rightarrow&2\iint\limits_{[a,b]^2}f^2(x)g^2(y)dxdy\geq 2\iint\limits_{[a,b]^2}f(x)f(y)g(x)g(y)dxdy\\
\Rightarrow&(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx
\end{aligned}$$

3.3.3 问题

1. 设 f 是问题 10.2 的第 2 题中定义的函数, 证明:

(1) $f(x,\frac{p}{q})$ 对 x 在 $[0,1]$ 上不可积;

(2) $f(\frac{n}{m},y)$ 对 y 在 $[0,1]$ 上不可积.

证明

(1)

$$f(x,\frac{p}{q})=\begin{cases}\frac{1}{m}+\frac{1}{q}, & x=\frac{n}{m}\\ 0, & else\end{cases}$$

其中 $n,m\in\mathbb{N}^*$. 若 x_0 为无理数, 届于有理数在 $[0,1]$ 上稠密, 知 x_0 中的任意邻域内都存在有理数 a, 且 $f(a)>\frac{1}{q}>0$, 从而总存在有理数列 $\{a_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\geq\frac{1}{q}>0=f(x_0)$, 进而 x_0 是 f 的不连续点. 从而 f 在 $[0,1]$ 上有不可数个不连续点, 进而其不可积.

(2) 与 (1) 同理.

2. 对 $(x,y)\in[0,1]^2$, 定义

$$g(x,y)=\begin{cases}1, & x=\frac{n}{m},y=\frac{p}{m},\\ 0, & else\end{cases}$$

证明: $\int_0^1 dx\int_0^1 g(x,y)dy$ 和 $\int_0^1 dy\int_0^1 g(x,y)dx$ 都存在且相等, 但 g 在 $[0,1]^2$ 上不可积.

证明

当 x 为无理数时, 知 $g(x,y)\equiv 0$. 当 $x=\frac{n}{m}$, 知只有 m 个点使得 $g(x,y)=1$. 故对每一个固定的 x, $g(x,y)$ 只有有限个不连续点, 进而 $\int_0^1 g(x,y)dy$ 存在. 当 x 为无理数, 显然 $\int_0^1 g(x,y)dy=0$. 而当 x 为有理数, 知在区间上去除有限个点不改变积分值, 故将作为不连续点的 m 个点去除, 知积分值依旧为 0, 从而 $\int_0^1 g(x,y)dy\equiv 0$, 进而 $\int_0^1 dx\int_0^1 g(x,y)dy=0$. 同理, $\int_0^1 dy\int_0^1 g(x,y)dx=0$. 而对 g 在 $[0,1]^2$ 上, 任取无理点 $\mathbf{x}_0=(a,b)$, 设 $m=10^k, n=[10^k a], p=[10^k b]$, 知

$$
\begin{aligned}
0\le a-\frac{[10^k a]}{10^k}<a-\frac{10^k a-1}{10^k}=\frac{1}{10^k}\to 0\\
0\le b-\frac{[10^k b]}{10^k}<b-\frac{10^k b-1}{10^k}=\frac{1}{10^k}\to 0
\end{aligned}
$$

从而有理点 $\mathbf{x}_k=(\frac{[10^k a]}{10^k},\frac{[10^k b]}{10^k})\to\mathbf{x}_0$, 但 $\lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k)=1\ne f(\mathbf{x}_0)$. 从而 $[0,1]^2$ 上的无理点皆是 g 的不连续点, 进而 g 在 $[0,1]^2$ 上至少有不可数个不连续点, 自然不可积.

3.4 有界集合上的二重积分

3.4.1 练习题

1. 证明定理 16.20: 设有界集 $B\subset\mathbb{R}^2$, 则 B 有面积当且只当 B 的边界 ∂B 是一零面积集.

证明

知 B 有面积即常值函数 1 在 B 上可积. 取闭矩形 I 满足 $I^\circ\supset\overline{B}$, 并取 1 相应的特征函数 1_B, 知此即 $\int\limits_I 1_B d\sigma$ 存在. 考虑到 1_B 的间断点集恰是 ∂B(这里仍可以用两个包含关系来证明: 1_B 的间断点不可能是 B 的内点或外点, 且 ∂B 上的点不可能是 1_B 的连续点 (因为 B 的内部有趋向它的点列且 B 的外部有趋向它的点列.)), 再由 Lebesgue 定理即知命题成立.

2. 证明

$$
1.96<\iint\limits_{|x|+|y|\le 10}\frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}<2
$$

证明

由积分中值定理, 记 $I=\{(x,y)||x|+|y|\le 10\}$: $\exists\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\xi^2)\in I(\iint\limits_I\frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}=\frac{200}{100+\cos^2\xi^1+\cos^2\xi^2}\ge\frac{200}{102}>1.96)$. 同时, 考虑 $I'=\{(x,y)||x|+|y|\le 10\wedge x^2+y^2\ne 0\}$, 知 I' 上的所有点都满足 $\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}<100$, 进而 $\iint\limits_I\frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}<2$.

3. 设 $B\subset\mathbb{R}^2$ 是一有界集, 那么 B 有面积的充要条件是, 对 $I^\circ\supset B$ 的矩形 I 的任何矩形网分割 π, 均有

$$
\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{I_j\cap B\ne\oslash}\sigma(I_j)=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{I_j\subset B}\sigma(I_j)
$$

证明

既然 B 有面积, 知 1_B 在 I 上可积, 也即 ∂B 是零测集, 知满足 $I_j\cap B\ne\oslash$ 的 I_j 与满足 $I_j\subset B$ 的 I_j 之间差的正是满足 $I_j\cap\partial B\ne\oslash$ 的这些 I_j. 由 ∂B 零测知 $\int_{\partial B}1d\sigma=0\Leftrightarrow\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{I_j\cap\partial B\ne\oslash}\sigma(I_j)=0$. 按照定义: $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\parallel\pi\parallel\in\mathbb{R}^+(\parallel\pi\parallel<\delta\Rightarrow|\sum\limits_{I_j\cap\partial B\ne\oslash}\sigma(I_j)|=|\sum\limits_{I_j\cap B\ne\oslash}\sigma(I_j)-\sum\limits_{I_j\subset B}\sigma(I_j)|<\varepsilon)$. 后者已经说明了题式成立.

3.5 有界集合上积分的计算

3.5.1 练习题

1. 计算下列积分: (1) $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, 其中 D 由 $x=0, y=x, y=\pi$ 围成;
解

$$\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy = \int_0^\pi \int_0^y \cos(x+y)dxdy = \int_0^\pi (\sin y - \sin 2y)dy = 2$$

(2) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, D 由 $y^2=4x$ 和 $x=1$ 围成;
解

$$\iint\limits_D xy^2dxdy = \int_0^1 \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} xy^2dydx = \frac{32}{21}$$

(3) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$, $D=\{(x+y)||x|+|y|\le 1\}$;
解

$$\iint\limits_D e^{x+y}dxdy = \int_{-1}^0 \int_{-1-x}^{x+1} e^{x+y}dydx + \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}dydx$$
$$= \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - \frac{1}{e})dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1})dx = e - \frac{1}{e}$$

(4) $\iint\limits_D |xy|dxdy$, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$;
解
考虑到对称性并记 $D'=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2 \wedge x\ge 0 \wedge y\ge 0\}$:

$$\iint\limits_D |xy|dxdy = 4\iint_{D'} |xy|dxdy = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xydydx = \frac{a^4}{8}$$

(5) $\iint\limits_D x\cos(xy)dxdy$, D 同第 4 题;
解

$$\iint\limits_D x\cos(xy)dxdy = \int_{-a}^0 \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\cos(xy)dydx + \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\cos(xy)dydx$$
$$= \int_{-a}^0 2\sin(x\sqrt{a^2-x^2})dx + \int_0^a 2\sin(x\sqrt{a^2-x^2})dx = 0$$

(6) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy$, $D=[0,1]^2$;
解
记 $D'=D\cap\{(x,y)|x+y\le\frac{\pi}{2}\}, D''=D\cap\{(x,y)|x+y>\frac{\pi}{2}\}$:

$$\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy = \iint\limits_{D'} |\cos(x+y)|dxdy + \iint\limits_{D''} |\cos(x+y)|dxdy$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} cos(x+y)dxdy + \int_{\frac{\pi}{2}-1}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} cos(x+y)dydx - \int_{\frac{\pi}{2}-1}^1 \int_{\frac{\pi}{2}-x}^1 cos(x+y)dydx$$
$$= 2\cos(\frac{\pi}{2}-1) + \cos 2 - 1$$

(7) $\iint\limits_D y^2dxdy$, D 由旋轮线

$$\begin{cases} x = a(t-\mathrm{sin}t), \\ y = a(1-\mathrm{cos}t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

与 $y=0$ 围成.

解

记旋轮线的直角坐标方程为 $y=y(x)$.

$$\iint\limits_D y^2dxdy = \int_0^{2\pi a}\int_0^{y(x)} y^2dydx = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi a} y^3(x)dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1-\mathrm{cos}t)^3 d(a(t-\mathrm{sin}t)) = \frac{35}{12}\pi a^4$$

(8) $\iint\limits_D [x+y]dxdy$, $D=[0,2]^2$.

解

记 $D_1 = D\cap\{(x,y)|x+y<1\}, D_2 = D\cap\{(x,y)|1\le x+y<2\}, D_3 = D\cap\{(x,y)|2\le x+y<3\}, D_4 = D\cap\{(x,y)|3\le x+y<4\}, D_5=\{(2,2)\}$. 因为 D_5 是零面积集, 故 $\iint\limits_{D_5}[x+y]dxdy=0$. 下面考察原式:

$$\iint\limits_D [x+y]dxdy = \sum_{i=1}^5 \iint\limits_{D_i}[x+y]dxdy = 6$$

2. 改变下列累次积分的次序:

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$;

解 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$.

(2) $\int_1^e dx\int_0^{\mathrm{log}x} f(x,y)dy$;

解 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$.

(3) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x f(x,y)dy$;

解 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^y f(x,y)dx$.

(4) $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy$;

解 $\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

(5) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$;

解 $\int_{-1}^0 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$.

(6) $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$;

解 $\int_{-1}^0 dy\int_0^{-1-y} f(x,y)dx + \int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$.

(7) $\int_0^\pi dx\int_0^{\mathrm{cos}x} f(x,y)dy$;

解 $\int_{-1}^0 dy\int_{\mathrm{arccos}y}^{\pi} f(x,y)dx + \int_0^1 dy\int_0^{\mathrm{arccos}y} f(x,y)dx$.

3. 设 f 为一元连续函数, 求证

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x)f(y)dy = \frac{1}{2}(\int_0^a f(t)dt)^2$$

证明

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x)f(y)dy=\int_0^a f(x)\int_0^x f(y)dydx=\int_0^a\int_0^x f(y)dyd\int_0^x f(y)dy=\frac{1}{2}(\int_0^a f(t)dt)^2$$

4. 设 f 为连续函数, 证明:

$$\int_0^a dx\int_0^x f(y)dy=\int_0^a(a-t)f(t)dt$$

证明

$$\begin{aligned}\int_0^a dx\int_0^x f(y)dy=\int_0^a\int_0^x f(y)dydx=(x\int_0^x f(y)dy)|_0^a-\int_0^a xd(\int_0^x f(y)dy)\\=a\int_0^a f(y)dy-\int_0^a xf(x)dx=\int_0^a(a-x)f(x)dx\end{aligned}$$

5. 设函数 f 连续, 证明:

$$\int_a^b dx\int_a^x dy\int_a^y f(x,y,z)dz=\int_a^b dz\int_z^b dy\int_y^b f(x,y,z)dx$$

证明

显然有:

$$\int_a^b dx\int_a^x fdy=\int_a^b dy\int_y^b fdy$$

进而:

$$\begin{aligned}&\int_a^b dx\int_a^x dy\int_a^y f(x,y,z)dz\\=&\int_a^b dx\int_a^x(\int_a^y f(x,y,z)dz)dy\\=&\int_a^b dy\int_y^b dx\int_a^y f(x,y,z)dz\\=&\int_a^b dy\int_a^y dz\int_y^b f(x,y,z)dx\\=&\int_a^b dz\int_z^b dy\int_y^b f(x,y,z)dx\end{aligned}$$

6. 设函数 f 连续, 证明:

$$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(x)f(y)f(z)dz=\frac{1}{3!}(\int_0^a f(t)dt)^3$$

证明

$$\begin{aligned}
&\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(x)f(y)f(z)dz \\
=&\int_0^a f(x)dx \int_0^x f(y)(\int_0^y f(z)dz)dy \\
=&\int_0^a f(x)dx \int_0^x (\int_0^y f(z)dz)d(\int_0^y f(z)dz) \\
=&\int_0^a f(x)\cdot\frac{1}{2}(\int_0^x f(z)dz)^2dx \\
=&\frac{1}{2}\int_0^a (\int_0^x f(z)dz)^2 d(\int_0^x f(z)dz) \\
=&\frac{1}{6}(\int_0^a f(t)dt)^3
\end{aligned}$$

7. 设函数 f 连续, 证明:

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^a (a-t)^2 f(t)dt$$

证明

$$\begin{aligned}
&\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)dz \\
=&\int_0^a dx \int_0^x (\int_0^y f(z)dz)dy \\
=&\int_0^a (x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt)dx \\
=&\int_0^a (x\int_0^x f(t)dt)dx - \int_0^a (\int_0^x tf(t)dt)dx \\
=&\frac{1}{2}\int_0^a (\int_0^x f(t)dt)dx^2 - a\int_0^a tf(t)dt + \int_0^a t^2 f(t)dt \\
=&\frac{a^2}{2}\int_0^a f(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^a t^2 f(t)dt - a\int_0^a tf(t)dt + \int_0^a t^2 f(t)dt \\
=&\frac{1}{2}\int_0^a (a-t)^2 f(t)dt
\end{aligned}$$

8. 设 f 为一连续函数, 求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy$$

解

记 $D_r = \{(x,y)|x^2+y^2\le r^2\}$, 知其为紧集, 进而由中值定理知

$$\exists \xi = (\xi^1,\xi^2)\in D_r(\iint\limits_{D_r} f(x,y)dxdy = f(\xi^1,\xi^2)\pi r^2)$$

从而原式即

$$\lim_{r\to 0} f(\xi^1,\xi^2)$$

又由 f 的连续性知上述极限即 $f(0,0)$.

3.6 二重积分换元

3.6.1 练习题

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x-y)^2\sin(x+y)dxdy$, 其中 D 是由四点 $(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi),(0,\pi)$ 顺次连成的正方形;

解

考虑 $u=x-y, v=x+y$, 解得 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{v-u}{2}$, 进而该微分同胚的雅各比行列式为 $\frac{1}{2}$, 它将 D 变为以 $(\pi,\pi),(\pi,3\pi),(-\pi,3\pi),(-\pi,\pi)$ 为顶点的矩形 D', 进而有:

$$\iint\limits_{D'} u^2\sin v dudv = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\pi}^{3\pi} u^2\sin v dvdu = -\frac{4\pi^3}{3}$$

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, 其中 D 由曲线 $x^2-y^2=1, x^2-y^2=2, xy=1, xy=2$ 围成.

解

考虑 $u=x^2-y^2, v=xy$, 它将 D 变为 $D'=[1,2]^2$. 知该微分同胚的雅各比行列式为

$$\frac{u^2}{\sqrt{4v^2+u^2}}\frac{1}{\sqrt{4v^2+2u^2+2\sqrt{4v^2+u^2}}+\sqrt{4v^2+2u^2-2\sqrt{4v^2+u^2}}},$$

进而有:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = 2\iint\limits_{[1,2]^2}\frac{u^2}{\sqrt{4v^2+2u^2+2\sqrt{4v^2+u^2}}+\sqrt{4v^2+2u^2-2\sqrt{4v^2+u^2}}}dudv$$

$$=\iint\limits_{[1,2]^2}\frac{u^2}{\sqrt{4v^2+u^2}}dudv = \int_1^2\int_1^2\frac{u^2}{\sqrt{4v^2+u^2}}dvdu = \frac{1}{2}\int_1^2 u^2\ln|\frac{\sqrt{4+u^2}+2}{\sqrt{16+u^2}+4}|du =$$

(3) $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy$, 其中 D 由曲线 $y=2, y^2-y-x=0, y^2+2y-x=0$ 围成.

解

记 $u=y^2-x, v=y$, 则 $|\det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})|=1$, 则该微分同胚将 D 变成 $D'=\{(u,v)|v\geq u\wedge v\geq -\frac{1}{2}u\wedge v\leq 2\}$. 进而有:

$$\iint\limits_D (x-y^2)dxdy = \iint\limits_{D'}(-u)dudv = \int_0^2\int_{-2v}^{v}(-u)dudv = \int_0^2\frac{3}{2}v^2dv = 4$$

2. 计算由下列曲线围成的图形的面积:

(1) $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$, 式中 $a_1b_2\neq a_2b_1$;

解

记 $u=a_1x+b_1y+c_1, v=a_2x+b_2y+c_2$, 知

$$|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = |\begin{vmatrix}\frac{b_2}{a_1b_2-a_2b_1} & -\frac{b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\\ -\frac{a_2}{a_1b_2-a_2b_1} & \frac{a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\end{vmatrix}| = |\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}|$$

进而记题设曲线围成曲面为 D, 则作上述变换后新曲面即为单位圆, 有:

$$\iint\limits_D 1dxdy = \iint\limits_{D'}|\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}|dudv = |\frac{\pi}{a_1b_2-a_2b_1}|$$

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, x=0$ 和 $y=0$.

解

记 $u=\sqrt{x}, v=\sqrt{y}$, 知:

$$|\det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})| = |\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix}| = |4uv|$$

进而记题设曲线围成曲面为 D, 则作上述变换后新曲面为 $D'=\{(u,v)|u\geq 0\wedge v\geq 0\wedge v\leq \sqrt{a}-u\}$, 有:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} 1dxdy = \iint\limits_{D'} 4uvdudv &= \int_0^{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}-u} 4uvdvdu \\ &= \int_0^{\sqrt{a}} (2u^3-4\sqrt{a}u^2+2au)du = \frac{a^2}{6}\end{aligned}$$

3. 求证:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} f(t)dt$$

证明

取 $u=x+y, v=x-y$, 知 $|\det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})|=\frac{1}{2}$, 题设曲面变为 $D'=[-1,1]^2$, 进而

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}f(u)dvdu = \int_{-1}^{1} f(u)du$$

4. 设 D 是由曲线 $xy=1, xy=2, y=x$ 和 $y=4x$ 围成的图形在第一象限中的那一部分, 求证:

$$\iint\limits_{D} f(xy)dxdy = \ln 2\int_1^2 f(t)dt$$

证明

取 $u=xy, v=\frac{y}{x}$, 知 $|\det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})|=\frac{1}{2v}$, D 此时变成 $D'=[1,2]\times[1,4]$, 有:

$$\iint\limits_{D} f(xy)dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{1}{2v}f(u)dvdu = \int_1^2 f(u)\cdot(\frac{1}{2}\ln v)|_1^4 du = \int_1^2 f(u)du\ln 2$$

5. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_{\pi^2\leq x^2+y^2\leq 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$;

解

取 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 知 $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}|=r$, 题设曲面变为 $D'=[\pi,2\pi]\times[0,2\pi]$, 有

$$\iint\limits_{\pi^2\leq x^2+y^2\leq 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{D'} r\sin r d\theta dr = -2\pi^2$$

(2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leq Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$;

解

取 $x = r\text{sin}\theta, y = r\text{cos}\theta$, 知 $|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = r$, 题设曲面变为 $D' = [0, R\text{cos}\theta] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 有:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq Rx} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy = \iint\limits_{D'} e\sqrt{R^2 - r^2}drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\text{cos}\theta} e\sqrt{R^2 - r^2}drd\theta$$
$$= \frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \sin^3\theta)d\theta = \frac{2}{3}R^3(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$$

(3) $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x\leq 0, y\leq 0}} \text{arctan}\frac{y}{x}dxdy;$

解

取 $x = r\text{cos}\theta, y = r\text{sin}\theta$, 知 $|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| = r$, 题设曲面变为 $D' = [0, 1] \times [0, \pi]$, 有:

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x\leq 0, y\leq 0}} \text{arctan}\frac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{D'} \theta d\theta dr = \frac{\pi^2}{2}$$

(4) $\iint\limits_{x^2+y^2\leq x+y} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy.$

解

取 $x = r\text{cos}\theta, y = r\text{sin}\theta$, 知 $|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| = r$, 题设曲面变为 $D' = [0, \text{cos}\theta + \text{sin}\theta] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, 有:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq x+y} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \iint\limits_{D'} r^2 drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\text{cos}\theta+\text{sin}\theta} r^2 drd\theta$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3(\theta + \frac{\pi}{4})d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{9}$$

6. 计算半径为 R 的球的体积.

解

此即求

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq R} dxdydz$$

用球坐标换元: $x = r\text{sin}\theta\text{cos}\phi, y = r\text{sin}\theta\text{sin}\phi, z = r\text{cos}\theta$, 知 $|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}| = r^2\text{sin}\theta$, 题设曲面变为 $D' = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, 有:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq R} dxdydz = \iiint_{D'} r^2 sin\theta drd\theta d\phi = \frac{4\pi}{3}R^2$$

7. 设常数 $a, b > 0$,

$$D = \{(x, y)|\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \wedge x \geq y \geq 0\}$$

计算二重积分

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

解

令 $x = ar\sin\theta, y = br\cos\theta$, 知 $|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| = abr$, 题设曲面变为 $D' = [0,1] \times [0,2\pi]$, 有:

$$\iint\limits_{D} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dxdy = \iint\limits_{D'} rdrd\theta = \pi$$

8. 计算二重反常积分

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{2xy-2x^2-y^2} dxdy$$

解

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{2xy-2x^2-y^2} dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-(x-y)^2} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} dydx = -\frac{\pi}{4}$$

3.6.2 问题

1. 证明:

$$\iint\limits_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dxdy = \int_0^1 t^t dt$$

证明

考虑换元: $t = xy, y = y$, 知对应的 Jacobi 行列式为 $\frac{1}{y}$, 有:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]^2} (xy)^{xy} dxdy &= \int_0^1 dy \int_0^y \frac{1}{y} t^t dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{y} (\int_0^y t^t dt) dy = \int_0^1 (\int_0^y t^t dt) d\ln y = -\int_0^1 y^y \ln y dy\end{aligned}$$

从而要说明 $-\int_0^1 y^y \ln y dy = \int_0^1 t^t dt$, 只需说明 $\int_0^1 (1+\ln t) t^t dt = 0$. 事实上:

$$\int_0^1 (1+\ln t) t^t dt = t^t|_0^1 = 0$$

从而命题得证.

2. 设常数 a, b 不全为 0, 求证:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by+c)dxdy = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dt$$

证明

换元, 令 $u=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}, v=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 得面元表示式 $dxdy=dudv$, 区域 S 变为 $S': u^2+v^2\le 1$, 有:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S f(ax+by+c)dxdy\\
=&\iint\limits_{S'} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dudv\\
=&\int_{-1}^1 du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dv\\
=&2\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du
\end{aligned}$$

3. 设 f 是单变量函数, 且连续可导, 令

$$F(t)=\iint\limits_{[0,t]^2} f(xy)dxdy$$

求证:

(1) $F'(t)=\frac{2}{t}(F(t)+\iint\limits_{[0,t]^2} xyf'(xy)dxdy)$;

(2) $F'(t)=\frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)ds$.

证明

(1) 该题首先用到 [4]pg. 124. **5.** 作为引理, 下给出并解决:

习题 定义在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 $f(x,y)$ 在 I 有连续的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(a) 设 $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$. 从等式

$$F(y)=\int_c^b(\int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt+f(x,c))dx$$

出发, 验证莱布尼茨法则:

$$F'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

证明

因为

$$\int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt=f(x,y)-f(x,c)$$

所以

$$f(x,y)=\int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt+f(x,c)$$

进而对等式:

$$\begin{aligned}
F(y)&=\int_a^b(\int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt+f(x,c))dx\\
&=\int_a^b\int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt+\int_a^b f(x,c)dx
\end{aligned}$$

因为 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续, 故

$$\int_a^b(\int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt)dx=\int_c^y(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx)dt$$

从而

$$\begin{aligned}F'(y) &= (\int_c^y (\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx)dt)' \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\end{aligned}$$

(b) 设 $G(x,y)=\int_a^x f(t,y)dt$, 求 $\frac{\partial G}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial G}{\partial y}$.

解

$\frac{\partial G}{\partial x}=f(x,y)$, $\frac{\partial G}{\partial y}=\int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)dt$.

(c) 设 $H(y)=\int_a^{h(y)} f(x,y)dx$, 其中 $h\in C^{(1)}[a,b]$. 求 $H'(y)$.

解

记 $F(h(y),y)=H(y)$, 从而:

$$H'(y)=F_1(h(y),y)h'(y)+F_2(h(y),y)=f(x,h(y))h'(y)+\int_a^{h(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

□

回到原题, 记 $x=tu, y=tv$, 有 $F(t)=\iint\limits_{[0,1]^2} t^2 f(t^2uv)dudv$, 进而:

$$\begin{aligned}F'(t) &= \partial_t \iint\limits_{[0,1]^2} t^2 f(t^2uv)dudv \\ &= \iint\limits_{[0,1]^2} \partial_t(t^2 f(t^2uv))dudv \\ &= \iint\limits_{[0,1]^2} (2t^3uvf'(t^2uv)+2tf(t^2uv))dudv \\ &= \iint\limits_{[0,t]^2} \frac{1}{t^2}(2t^3\cdot\frac{xy}{t^2}f'(xy)+2tf(xy))dxdy \\ &= \frac{2}{t}\iint\limits_{[0,t]^2}(xyf'(xy)+f(xy))dxdy \\ &= \frac{2}{t}(F(t)+\iint\limits_{[0,t]^2} xyf'(xy)dxdy)\end{aligned}$$

(2) 令 $u=xy, v=\frac{y}{x}$, 知对应的 Jacobi 行列式为 $\frac{1}{2v}$, 有:

$$\begin{aligned}F(t) &= \int_0^{t^2}\int_{\frac{u}{t^2}}^{\frac{t^2}{u}} \frac{1}{2v}f(u)dvdu \\ &= 2\ln t\int_0^{t^2} f(u)du - \int_0^{t^2} f(u)\ln u du\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}F'(t) &= 2\ln t\cdot 2t\cdot f(t^2)+\frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(u)du - 2f(t^2)\ln t\cdot 2t \\ &= \frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(u)du\end{aligned}$$

4. 计算二重积分

$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)}$$

其中 D 是由在第一象限里的圆周 $x^2+y^2=1$ 与直线 $x+y=1$ 所围成的图形.

解 (在答案的提示下)

换元: $x=e^{r\cos\theta}, y=e^{r\sin\theta}$, 知对应的 Jacobi 行列式为 $re^{r\cos\theta+r\sin\theta}$, 记积分区域变为 D', 从而:

$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)} = \iint\limits_{D'} \frac{drd\theta}{r}$$

其中 D' 为由曲线 $e^{2r\cos\theta}+e^{2r\sin\theta}=1$ 和曲线 $e^{r\cos\theta}+e^{r\sin\theta}=1$ 围成的区域. 因为 $r\geq 0$, 所以 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都必须小于等于 0, 否则总会出现大于等于 1 的项, 由指数的正性即得矛盾, 进而只能有 $\theta\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$. 设

$e^{r\cos\theta}+e^{r\sin\theta}=1$ 确定函数 $r=r(\theta)$, 则 $e^{2r\cos\theta}+e^{2r\sin\theta}=1$ 确定函数 $r=\frac{1}{2}r(\theta)$. 介于 $r\geq 0$, 只能有 $r(\theta)\geq\frac{1}{2}r(\theta)$, 从而:

$$\iint\limits_{D'} \frac{drd\theta}{r} = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{2}r(\theta)}^{r(\theta)} \frac{dr}{r} = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

3.7 三重积分

3.7.1 练习题

1. 计算下列积分:

(1) $\int\limits_{V} xyzd\mu$, V 为球体 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ 在第一卦限中的部分;

解用球坐标换元: $x=r\mathrm{sin}\theta\mathrm{cos}\varphi, y=r\mathrm{sin}\theta\mathrm{sin}\varphi, z=r\mathrm{cos}\theta$, 则 V 变为 $V'=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$, 有:

$$\begin{aligned}\int_V xyzd\mu &= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5\mathrm{sin}^3\theta\mathrm{cos}\theta\mathrm{cos}\varphi\mathrm{sin}\varphi d\varphi d\theta dr\\ &= \int_0^1 r^5dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sin}\varphi\mathrm{cos}\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sin}^3\theta\mathrm{cos}\theta d\theta\\ &=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{48}\end{aligned}$$

(2) $\int_V (x+y+z)d\mu$, V 为平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标平面所围成的立体.

解

$$\begin{aligned}\int_V (x+y+z)d\mu &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz\\ &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)(1-x-y)+\frac{1}{2}(1-x-y)^2dy\\ &= \int_0^1(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3})=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

(3) $\int_V xy^2z^3dxdydz$, V 由 $z=xy$ 和 $z=0$ 以及两张平面 $x=1$ 和 $x=y$ 围成.

解

记 V 在 xoy 面上的投影为 V':

$$\begin{aligned}\int_V xy^2z^3dxdydz &= \iint_{V'} xy^2dxdy\int_0^{xy} z^3dz\\ &= \frac{1}{4}\iint_{V'} x^5y^6dxdy\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy\\ &= \frac{1}{28}\int_0^1 x^12dx = \frac{1}{364}\end{aligned}$$

2. 计算下列曲面围成的立体的体积:

(1) $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}, 2z = x^2 + \frac{y^2}{4}$;

解

统一记给出曲面围成的立体为 V, 记本题中 V 在 xoy 面上的投影为 V', 知:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V dxdydz &= \iint\limits_{V'} dxdy\int_{\frac{1}{2}(x^2+\frac{y^2}{4})}^{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}} dz\\ &= \iint\limits_{V'} (\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}} - \frac{1}{2}(x^2+\frac{y^2}{4}))dxdy\\ &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} (2r^2 - r^3)drd\theta\\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

(2) $x^2 + z^2 = a^2, |x| + |y| = a.$

解

记 V 在 xoy 面上的投影为 V':

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V dxdydz &= \iint\limits_{V'} 2\sqrt{a^2-x^2}dxdy\\ &= 2\int_{-a}^0 (2x+2a)\sqrt{a^2-x^2}dx + 2\int_0^a (2a-2x)\sqrt{a^2-x^2}dx\\ &= 8\int_0^a (a-x)\sqrt{a^2-x^2}dx\\ &= 2\pi a^3 - 8\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx = (2\pi - \frac{8}{3})a^3\end{aligned}$$

3. 设 f 为连续函数, 求极限:

$$\lim_{r\to 0}\frac{3}{4\pi r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,y,z)dxdydz$$

解

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0}\frac{3}{4\pi r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,y,z)dxdydz\\
=&\lim_{r\to 0}\frac{3}{4\pi r^3}\int_0^r dR\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}R^2\sin\theta f(R\sin\theta\cos\varphi,R\sin\theta\sin\varphi,R\cos\theta)d\theta\\
=&\lim_{r\to 0}\frac{3}{r^3}\int_0^r R^2 f(R\sin\xi\cos\eta,R\sin\xi\sin\eta,R\cos\xi)dR\\
=&\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}r^2 f(r\sin\xi\cos\eta,r\sin\xi\sin\eta,r\cos\xi)\\
=&\lim_{r\to 0}f(r\sin\xi\cos\eta,r\sin\xi\sin\eta,r\cos\xi)=f(0,0,0)
\end{aligned}
$$

4. 计算下列积分:

(1) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$;

解

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\int_0^{\sqrt{2}}r^3dr\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=4\pi$$

(2) $\iiint\limits_D(x^2+y^2)dxdydz$, 其中 $D=\{(x,y,z)|z\ge 0,a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2\}$;

解

$$\iiint\limits_D(x^2+y^2)dxdydz=\int_a^b dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}r^4\sin^3\theta d\varphi=\frac{4\pi}{15}(b^5-a^5)$$

(3) $\iiint\limits_D(1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^{\frac{1}{2}})dxdydz$, 其中 D 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 包围的立体.

解

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_D(1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^{\frac{1}{2}})dxdydz\\
=&\int_0^1 dr\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}abcr^2\sin\theta\sqrt{1-r^2}d\varphi=\frac{\pi^2}{4}abc
\end{aligned}
$$

5. 计算由下列曲面围成的立体的体积:

(1) $a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i(i=1,2,3)$, 设行列式

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\ne 0$$

解

记 $u_i=a_ix+b_iy+c_iz(i=1,2,3)$, 知该换元对应的 Jacobi 行列式为 $\frac{1}{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}$, 进而欲求体

积即为换元后三边长分别为 $2h_1, 2h_2, 2h_3$ 的方体, 进而结果为 $\frac{8h_1h_2h_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$.

(2) $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2(0 \leq a < b, z > 0)$.

解

届于球体体积为 $\frac{4\pi}{3}r^3$, 欲求即为 $\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$.

(3) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$, 常数 $a>0$.

解

用球坐标换元, 统一记围成立体为 V, 换元后的立体为 V', 有:

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 \sin\theta dr = \frac{\pi}{3}a^3$$

(4) $(x^2+y^2+z^2)^n = z^{2n-1}(n \in \mathbb{N}^*)$;

解

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos^{2n-1}\theta} r^2 \sin\theta dr = \frac{\pi}{3(3n-1)}$$

(5) $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

解

$$\iiint\limits_V dxdydz = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\sin\theta}^{\sin\theta} r^2 \sin\theta dr = \frac{\pi}{4}abc$$

3.7.2 问题

1. 令

$$F(t) = \iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)dxdydz$$

其中单变量函数 f 连续可导, 求证:

$$F'(t) = \frac{3}{t}(F(t) + \iiint\limits_{[0,t]^3} xyzf'(xyz)dxdydz)$$

证明

令 $x=tu, y=tv, z=tw$, 知 $F(t)=\iiint\limits_{[0,1]^3} t^3 f(t^3uvw)dudvdw$, 有:

$$\begin{aligned}
F'(t) =&(\iiint\limits_{[0,1]^3} t^3 f(t^3uvw)dudvdw)' \\
=&\iiint\limits_{[0,1]^3} \partial_t(t^3 f(t^3uvw))dudvdw \\
=&\iiint\limits_{[0,1]^3} 3t^5uvwf'(t^3uvw)dudvdw + \iiint\limits_{[0,1]^3} 3t^2 f(t^3uvw)dudvdw \\
=&\frac{3}{t}\iiint\limits_{[0,t]^3} xyzf'(xyz)dxdydz + \frac{3}{t}\iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)dxdydz \\
=&\frac{3}{t}(F(t) + \iiint\limits_{[0,t]^3} xyzf'(xyz)dxdydz)
\end{aligned}$$

2. 设 f 为连续函数, 令

$$F(t)=\iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)dxdydz$$

求证:

$$F'(t)=\frac{3}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}du$$

其中 $g(u)=\int_0^u f(s)ds$.

证明

换元: $u=xyz, v=\frac{y}{xz}, w=\frac{z}{xy}$, 知 $[0,t]^3$ 变为区域 $D: 0\le uv\le t^2, 0\le uw\le t^2, 0\le \frac{1}{vw}\le t^2$, 并知换元对应的 Jacobi 行列式为 $\frac{1}{4vw}$, 进而有:

$$\iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)dxdydz = \iiint\limits_{D}\frac{1}{4vw}f(u)dudvdw$$

设 D 在 vow 面上的投影是 $\Omega: 0\le v\le \frac{t^2}{u}, 0\le w\le \frac{t^2}{u}, vw\ge \frac{1}{t^2}$, 首先计算 $\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{4vw}f(u)dvdw$:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{4vw}f(u)dvdw &= \int_0^{\frac{t^2}{u}}dv\int_{\frac{1}{vt^2}}^{\frac{t^2}{u}} \\
&= \int_0^{\frac{t^2}{u}} f(u)\cdot\frac{1}{4v}(4\ln t+\ln v-\ln u)dv \\
&= \frac{f(u)}{4}\int_0^{\frac{t^2}{u}}(4\ln t+\ln v-\ln u)d\ln v \\
&= \frac{f(u)}{8}(6\ln t-2\ln u)
\end{aligned}$$

再沿 u 轴计算上述积分:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t^3} \frac{f(u)}{8}(6\ln t - 2\ln u)du \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{t^3} f(u)(9\ln^2 t - 6\ln t\ln u + \ln^2 u)du \\
=&\frac{1}{2}(9\ln^2 t\int_0^{t^3} f(u)du - 6\ln t\int_0^{t^3} f(u)\ln udu + \int_0^{t^3} f(u)\ln^2 udu) = F(t)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{9\ln t}{t}\int_0^{t^3} f(u)du - \frac{3}{t}\int_0^{t^3} f(u)\ln udu \\
&= \frac{9\ln t}{t}\int_0^{t^3} f(u)du - \frac{3}{t}\int_0^{t^3} \ln ud\int_0^u f(p)dp \\
&= \frac{9\ln t}{t}\int_0^{t^3} f(u)du - \frac{3}{t}(\ln t^3\int_0^{t^3} f(p)dp - \int_0^{t^3} \frac{\int_0^u f(p)dp}{u}du) \\
&= \frac{3}{t}\int_0^{t^3} \frac{\int_0^u f(p)dp}{u}du = \frac{3}{t}\int_0^{t^3} \frac{g(u)}{u}du
\end{aligned}
$$

3.8 n 重积分

3.8.1 练习题

1. 计算下列 n 重积分:

(1) $\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1^2+\cdots+x_n^2)dx_1\cdots dx_n$;

解

$$
\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1^2+\cdots+x_n^2)dx_1\cdots dx_n = \sum_{i=1}^n\int_0^1 x_i^2dx = \frac{n}{3}
$$

(2) $\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1+\cdots+x_n)^2dx_1\cdots dx_n$.

解

$$
\begin{aligned}
&\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1+\cdots+x_n)^2dx_1\cdots dx_n \\
=&\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i\neq j} x_ix_j)dx_1\cdots dx_n \\
=&\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1^2+\cdots+x_n^2)dx_1\cdots dx_n + 2\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}\sum_{i\neq j} x_ix_jdx_1\cdots dx_n \\
=&\frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{4}
\end{aligned}
$$

2. 计算累次积分:

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 \cdots x_{n-1} x_n dx_n$$

解

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 \cdots x_{n-1} x_n dx_n \\
=&\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{1}{2} x_1 \cdots x_{n-1}^3 dx_{n-1} \\
=&\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x_1 \cdots x_{n-2}^5 dx_{n-2} \\
=&\cdots = \frac{1}{2^n n!}
\end{aligned}$$

3. 计算下列 $\mathbb{R}^n$ 中区域的体积 $(a_1, a_2, \cdots, a_n > 0)$:

(1) $V_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0\}$;

解

统一记换元后的区域为 V_n'. 换元: $u_i = \frac{x_i}{a_i}$, 知对应的 Jacobi 行列式为 $a_1 a_2 \cdots a_n$, 有:

$$\int\limits_{V_n} dx_1 \cdots dx_n = a_1 \cdots a_n \int\limits_{V_n'} du_1 \cdots du_n = \frac{1}{n!} a_1 \cdots a_n$$

(2) $V_n(a) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq a\}$.

解

沿用上题结论, 知本题中的曲面关于原点对称, 进而有:

$$\int\limits_{V_n(a)} dx_1 \cdots dx_n = 2^n a^n V_n(1) = \frac{2^n a^n}{n!}$$

4. 设 K 为二元连续函数, 对 $n \in \mathbb{N}^*$, 令

$$K_n(x, y) = \underset{[a,b]^n}{\int \cdots \int} K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, y) dt_1 \cdots dt_n$$

求证: 对任何 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 有

$$K_{m+n+1}(x, y) = \int_a^b K_m(x, t) K_n(t, y) dt$$

证明

知

$$K_m(x, t) = \underset{[a,b]^m}{\int \cdots \int} K(x, t_1) \cdots K(t_{m-1}, t_m) K(t_m, t) dt_1 \cdots dt_m$$

$$K_n(t, y) = \underset{[a,b]^n}{\int \cdots \int} K(t, t_{m+1}) \cdots K(t_{m+n}, t_{m+n+1}) K(t_{m+n+1}, y) dt_{m+1} \cdots dt_{m+n+1}$$

进而

$$
\begin{aligned}
&K_{m+n+1}(x,y)\\
=&\int\cdots\int_{[a,b]^{m+n+1}} K(x,t_1)\cdots K(t_m,t_{m+1})K(t_{m+1},t_{m+2})\cdots K(t_{m+n+1},y)dt_1\cdots dt_{m+n+1}\\
=&\int_a^b dt_m \int_{[a,b]^m} K(x,t_1)\cdots K(t_m,t_{m+1})dt_1\cdots dt_m \int_{[a,b]^n} K(t_{m+1},t_{m+2})\cdots K(t_{m+n+1},y)dt_{m+2}\cdots dt_{m+n+1}\\
=&\int_a^b K_m(x,t_m)K_n(t_m,y)dt_m
\end{aligned}
$$

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$,

$$V_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\frac{|x_i|}{a_i}+\frac{|x_n|}{a_n}\le 1(i=1,2,\cdots,n-1)\}$$

求 V_n 的体积.

解

换元: $x_i=a_iu_i, i=1,\cdots,n$, 知其对应的 Jacobi 行列式为 $a_1\cdots a_n$. 知换元后的区域形如两个棱锥拼接后的形状, 且区域关于原点对称. 沿 x_n 轴方向积分, 有:

$$\int_{V_n} dx_1\cdots dx_n=2^{n-1}a_1\cdots a_n\int_0^1(1-t)^{n-1}dt=\frac{2^n}{n}a_1\cdots a_n$$

3.8.2 问题

1. 设 f 是单变量连续函数, 证明:

$$\int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}dt$$

证明

已知:

$$\int_0^a dx\int_0^x f(y)dy=\int_0^a (a-t)f(t)dt$$

用数学归纳法, 上式表明 $n=2$ 成立, 下设 $n-1$ 时成立, 对 n:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n\\
=&\int_0^a\frac{1}{(n-2)!}\int_0^{x_1}f(t)(a-t)^{n-2}dtdx_1\\
=&\frac{1}{(n-2)!}\int_0^a dx_1\int_0^{x_1}f(t)(x_1-t)^{n-2}dt\\
=&\frac{1}{(n-2)!}\int_0^a dx_1\int_0^{x_1}f(t)\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-2}^i x_1^i(-t)^{n-2-i}dt\\
=&\frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-2}^i\int_0^a x_1^i\int_0^{x_1}f(t)(-t)^{n-2-i}dtdx_1\\
=&\frac{1}{(n-2)!}(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{C_{n-2}^i}{i+1}\int_0^a\int_0^{x_1}f(t)(-t)^{n-2-i}dtdx_1^{i+1}+\int_0^a\int_0^{x_1}f(t)(-t)^{n-2}dtdx_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{(n-2)!}(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{C_{n-2}^{i}}{i+1}((x_1^{i+1}\int_0^{x_1}f(t)(-t)^{n-2-i})|_0^a-\int_0^a t^{i+1}f(t)(-t)^{n-2-i}dt)+\int_0^a\int_0^{x_1}f(t)(-t)^{n-2}dtdx_1)\\
=&\frac{1}{(n-2)!}(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{C_{n-2}^{i}}{i+1}\int_0^a(a^{i+1}-t^{i+1})f(t)(-t)^{n-2-i}dt+\int_0^a\int_0^{x_1}f(t)(-t)^{n-2}dtdx_1)\\
=&\frac{1}{(n-2)!}(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{C_{n-2}^{i}}{i+1}\int_0^a(a^{i+1}-t^{i+1})f(t)(-t)^{n-2-i}dt+(x_1\int_0^{x_1}f(t)(-t)^{n-2})|_0^a-\int_0^a x_1f(x_1)(-x_1)^{n-2}dt)\\
=&\frac{1}{(n-2)!}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{C_{n-2}^{i}}{i+1}\int_0^a(a^{i+1}-t^{i+1})f(t)(-t)^{n-2-i}dt\\
=&\frac{1}{(n-2)!}(\sum_{i=0}^{n-2}\frac{C_{n-2}^{i}}{i+1}\int_0^a a^{i+1}f(t)(-t)^{n-2-i}dt-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{C_{n-2}^{i}}{i+1}\int_0^a f(t)(-1)^{n-2-i}t^{n-1}dt)\\
=&\frac{1}{(n-2)!}(\sum_{i=0}^{n-2}\frac{C_{n-1}^{i+1}}{n-1}\int_0^a a^{i+1}f(t)(-t)^{n-2-i}dt-\frac{1}{n-1}\int_0^a f(t)(-1)^{n-2}t^{n-1}dt)\\
=&\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a(\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^{i}a^{i}(-t)^{n-1-i})f(t)dt\\
=&\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}dt
\end{aligned}
$$

2. 设 f 是单变量连续函数, 证明:

$$
\int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_1\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)dx_n=\frac{1}{n!}(\int_0^a f(t)dt)^n
$$

证明

$$
\begin{aligned}
&\int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_1\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)dx_n\\
=&\int_0^a f(x_1)dx_1\cdots\int_0^{x_{n-2}}f(x_{n-1})dx_{n-1}\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n\\
=&\int_0^a f(x_1)dx_1\cdots\int_0^{x_{n-2}}(\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n)d(\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n)\\
=&\frac{1}{2}\int_0^a f(x_1)dx_1\cdots\int_0^{x_{n-3}}f(x_{n-2})(\int_0^{x_{n-2}}f(t)dt)^2dx_{n-2}\\
=&\cdots=\frac{1}{n!}(\int_0^a f(t)dt)^n
\end{aligned}
$$

3. 设 f 为 n 元连续函数, 证明:

$$
\int_a^b dx_1\int_a^{x_1}dx_1\cdots\int_a^{x_{n-1}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_n=\int_a^b dx_n\int_{x_n}^b dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^b f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1
$$

证明

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n \\
=&\int_a^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_1 \int_a^{x_2} dx_3 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n \\
=&\int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \int_{x_2}^b dx_1 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n \\
=&\int_a^b dx_3 \int_{x_3}^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_1 \int_a^{x_3} dx_4 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n \\
=&\int_a^b dx_3 \int_a^{x_3} dx_4 \int_{x_3}^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_1 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n \\
=&\cdots = \int_a^b dx_n \int_{x_n}^b dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^b f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1
\end{aligned}
$$

3.9 补充: 陈纪修上的重积分的性质和计算部分习题

4. 计算下列重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)dxdy, D=[0,1]\times[0,1]$

解

$$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^3+3x^2y+y^3)dy = \int_0^1 (x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4})dx = 1$$

(2) $\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}dxdy, D=[a,b]\times[c,d]$

解

$$\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}dxdy = \int_a^b xe^{x^2}dx \int_c^d ye^{y^2}dy = \frac{1}{4}(e^{b^2}+e^{d^2}-e^{a^2}-e^{c^2})$$

(3) $\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}, \Omega=[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$

解

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3} &= \int_1^2 dx \int_1^2 dy \int_1^2 \frac{dz}{(x+y+z)^3} \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^2 dx \int_1^2 (\frac{1}{(x+y+2)^2} - \frac{1}{(x+y+1)^2}) \\
&= \cdots = -\frac{1}{2}\ln\frac{125}{128}
\end{aligned}
$$

5. 在下列积分中改变累次积分的次序:

•(暂未找出错因)(5) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$(改成按 y 方向, x 方向, z 方向的次序积分);

解

知积分区域为 $z=x+y$ 与 $x=0,y=0,x+y=1$ 围成的柱面所围的锥形区域, 进而知换序结果如下:

$$\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy$$

(6) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$(改成按 x 方向, y 方向, z 方向的次序积分).

解

知积分区域为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围的部分, 进而欲求为:

$$\int_0^1 dz\int_{-z}^z dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx$$

6. 计算下列重积分:

(1) $\iint_D xy^2dxdy$, 其中 D 为抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{p}{2}(p>0)$ 所围的区域;

解

$$\iint_D xy^2dxdy=\int_{-p}^p dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} xy^2dx=\frac{1}{2}\int_{-p}^p y^2(\frac{p^2}{4}-\frac{y^4}{4p^2})dy=\frac{p^5}{21}$$

(2) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}(a>0)$, 其中 D 为圆心在 (a,a), 半径为 a 并且和坐标轴相切的圆周上较短的一段弧和坐标轴所围的区域;

解

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a dx\int_0^{a-\sqrt{x(2a-x)}}\frac{dy}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a \frac{a-\sqrt{x(2a-x)}}{\sqrt{2a-x}}dx=(2\sqrt{2}-\frac{8}{3})a^{\frac{3}{2}}$$

(3) $\iint_D e^{x+y}dxdy$, 其中 D 为区域 $\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$;

解

换元: $u=x+y,v=x-y$, 对应需乘以 $\frac{1}{2}$, 区域变为 $[-1,1]\times[-1,1]$

$$\iint_D e^{x+y}dxdy=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 du\int_{-1}^1 e^u dv=e-\frac{1}{e}$$

(4) $\iint_D(x^2+y^2)dxdy$, 其中 D 为直线 $y=x,y=x+a,y=a$ 和 $y=3a(a>0)$ 所围的区域;

解

换元: $u=y-x,v=y$, 对应需乘以-1, 区域变为 $[0,a]\times[a,3a]$

$$\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^a du\int_a^{3a}(v-u)^2+v^2dv=\int_0^a 2au^2-8a^2u+\frac{52}{3}a^3du=14a^4$$

(5) $\iint_D ydxdy$, 其中 D 为摆线的一拱 $x=a(t-\mathrm{sin}t),y=a(1-\mathrm{cos}t)(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围的区域;

解

$$\iint_D ydxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}ydy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a}y^2(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a(1-\mathrm{cos}t))^3dt=\frac{5\pi}{2}a^3$$

(6) $\iint_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy$, 其中 D 为直线 $y=x, y=-1$ 和 $x=1$ 所围的区域;
解

$$\iint_D y[1+xe^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2)]dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{x}ydy+\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{x}xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy=-\frac{2}{3}$$

(7) $\iint_D x^2ydxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\geq 2x, 0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq x\}$
解

$$\iint\limits_D x^2ydxdy=\int_1^2 x^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}ydy=\int_1^2(x^4-x^3)dx=\frac{49}{20}$$

(8) $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3dxdydz$, 其中 Ω 为曲面 $z=xy$, 平面 $y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围的区域;
解

$$\iiint\limits_\Omega xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy}z^3dz=\frac{1}{364}$$

(9) $\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体;
解

$$\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=-\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\ln 2$$

(10) $\iiint\limits_\Omega zdxdydz$, 其中 Ω 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h(h>0)$ 所围的区域;
解

用柱面坐标换元: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$, 知对应需乘 r, 区域变为 $[0,\sqrt{z}]\times[0,2\pi]\times[0,h]$, 有:

$$\iiint\limits_\Omega zdxdydz=\int_0^{\sqrt{z}}rdr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h zdz=\frac{\pi}{3}h^3$$

(11) $\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$, 其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leq 2Rz(R>0)$ 的公共部分;
解

用球坐标换元（不可行, 但不知错哪）: $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$, 对应需乘 $r^2\sin\theta$, 有:

$$\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^R r^4dr+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^4dr)$$

按照书上的答案, 这里应采用柱坐标换元: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$, 对应需乘 r, 有:

$$\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-(R-z)^2}}rdr+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}rdr=\frac{59\pi}{480}R^5$$

(12) $\iiint\limits_\Omega x^2dxdydz$, 其中 Ω 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$.
解

用广义极坐标换元: $x = ar\sin\theta\cos\varphi, y = br\sin\theta\sin\varphi, z = cr\cos\theta$, 对应需乘 $abcr^2\sin\theta$, 区域变为 $[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$, 有:

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz = a^3bc\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 r^4\sin^3\theta\cos^2\theta dr = \frac{4}{15}a^3bc\pi$$

12. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, a, b 为常数, 证明:
(1) $\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy = \int_a^b f(y)(b-y)dy$;
证明

$$\begin{aligned}\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy =& \int_a^b (\int_a^x f(y)dy)dx\\ =&(x\int_a^x f(y)dy)|_a^b - \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b f(x)(b-x)dx\end{aligned}$$

(2) $\int_0^a dy\int_0^y e^{(a-x)}f(x)dx = \int_0^a (a-x)e^{a-x}f(x)dx(a>0)$
证明 同上, 代入即可.

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} e^y f(x)dx = \int_0^1 (e^x - e^{x^2})f(x)dx$$

证明
考虑积分换序:

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} e^y f(x)dx = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} e^y f(x)dy = \int_0^1 (e^x - e^{x^2})f(x)dx$$

14. 设 $D = [0,1]\times[0,1]$, 证明

$$1 \le \iint\limits_D [\sin(x^2)+\cos(x^2)]dxdy \le \sqrt{2}$$

证明

$$1 \le \iint\limits_D (x^2 - \frac{x^6}{6} + 1 - \frac{y^4}{2})dxdy \le \iint\limits_D [\sin(x^2)+\cos(y^2)]dxdy$$
$$\iint\limits_D [\sin(x^2)+\cos(y^2)]dxdy \le \iint\limits_D (x^2+1)dxdy = \frac{4}{3} < \sqrt{2}$$

17. 利用重积分的性质和计算方法证明: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$[\int_a^b f(x)dx]^2 \le (b-a)\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

证明

$$[\int_a^b f(x)dx]^2 = \iint\limits_{[a,b]^2} f(x)f(y)dxdy \le \iint\limits_{[a,b]^2} (\frac{f(x)+f(y)}{2})^2 dxdy = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx + \frac{1}{2}(\int_a^b f(x)dx)^2$$

移项结论即证.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明

$$\iint\limits_{[a,b]^2} e^{f(x)-f(y)}dxdy \ge (b-a)^2$$

证明

$$\iint\limits_{[a,b]^2} e^{f(x)-f(y)}dxdy \ge \iint\limits_{[a,b]^2} (1+f(x)-f(y))dxdy = (b-a)^2$$

3.10 补充: 陈纪修上的重积分变量代换部分习题

1. 利用极坐标计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 所围区域;

解

为方便, 如非特殊说明, 下面统一用极坐标换元: $x=r\sin\theta, y=r\cos\theta$, 就不特别说明了, 注意换元后统一需乘以 r

$$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} re^{-r^2}d\theta = \pi(1-e^{-R^2})$$

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=x$ 所围区域;

解

$$\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r\sqrt{r\cos\theta}dr = \frac{8}{15}$$

(3) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=x+y$ 所围区域;

解

用广义极坐标换元: $x=\frac{1}{2}+r\cos\theta, y=\frac{1}{2}+r\sin\theta$, 对应需乘 r, 有:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dr \int_0^{2\pi} r(1+r(\cos\theta+\sin\theta))d\theta = \frac{\pi}{2}$$

(4) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限上的区域.

解

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}dr = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$$

4. 选取适当的坐标变换计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy$, 其中 D 是由坐标轴及抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 所围的区域;

解

令 $x=u^2, y=v^2$, 对应需乘 $4uv$, 区域变为 $u=0, v=0$ 和 $u+v=1$ 所围的区域, 有:

$$\iint\limits_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy = \iint\limits_{D'} 4uv(u+v)dudv = \frac{2}{15}$$

(2) $\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$, 其中 D 是由

(i) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围区域;

解

用广义极坐标换元, 知需乘 abr, 区域变为 $[0,1]\times[0,2\pi]$, 有:

$$\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abr^3 dr = \frac{\pi}{2}ab$$

(ii) 圆 $x^2+y^2=R^2$ 所围区域;

解

用极坐标换元, 有:

$$\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} (\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2})d\theta = \frac{1}{8}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$$

(3) $\iint\limits_D ydxdy$, 其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$, 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围的区域;

解

$$\iint\limits_D ydxdy = \int_0^2 ydy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} dx = 4$$

(4) $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$, 其中 D 是由直线 $x+y=2, x=0$ 及 $y=0$ 所围的区域;

解

令 $u=x+y, v=x-y$, 知区域变为由 $u+v=0, u-v=0, u=2$ 围成的区域, 需乘 $\frac{1}{2}$, 有:

$$\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2 du \int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}dv = e-\frac{1}{e}$$

(5) $\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}dxdy$, 其中闭区域 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$;

解

令 $u=x+y, v=x-y$, 知区域变为 $[-1,1]\times[-1,1]$, 需乘 $\frac{1}{2}$, 有:

$$\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{[-1,1]^2} \frac{u^2}{1+v^2}dudv = \frac{\pi}{6}$$

•(6) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$, 其中闭区域 D 是由曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}-a(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 所围成.

解

用极坐标换元, 知区域变为 $[-\frac{\pi}{4},0]\times[0,\frac{a\cos\theta-a}{\sin\theta}]$, 有:

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{\frac{a\cos\theta-a}{\sin\theta}}\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr=$$

5. 选取适当的坐标变换计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, 其中 Ω 为球 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$;

解

用球坐标换元, Ω 变为 $\Omega'=[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, 有:

$$\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^1 r^4dr\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi}{5}$$

(2) $\iiint\limits_\Omega\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, 其中 Ω 为椭球 $\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$;

解

用广义球坐标换元, 知需乘 $abcr^2\sin\theta$, 有:

$$\iiint\limits_\Omega\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz=abc\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi^2abc}{8}$$

(3) $\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, 其中 Ω 为柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及平面 $z=0,z=a(a>0)$ 和 $y=0$ 所围的区域;

解

用柱面坐标换元, 知 Ω 变为 $[0,2\cos\theta]\times[0,\pi]\times[0,a]$, 有:

$$\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^a zdz\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{16}{9}a^2$$

(4) $\iiint\limits_\Omega\frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz$, 其中 Ω 为半球 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1,z\ge 0\}$;

解

用球坐标换元, 有:

$$\iiint\limits_\Omega\frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz=\int_0^1\frac{r^3\ln(1+r^2)}{1+r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=(\ln2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln^2 2)\pi$$

(5) $\iiint\limits_\Omega(x+y+z)^2dxdydz$, 其中 Ω 为抛物面 $x^2+y^2=2az$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2(a>0)$ 所围的区域;

解

用球坐标换元, 有:

$$\iiint\limits_\Omega(x+y+z)^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}r^4\sin\theta(1+2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi+2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi+2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)drd\theta d\varphi=$$

3.11 补充: 裴礼文上的重积分内容

例 7.2.1 设 $f(x,y)$ 于闭区域 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上 (正常) 可积, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{n}[1+\frac{1}{n^2}f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n})]=e^{\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy}$$

证明

在欲证等式两边取对数, 即证:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{n^2}f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n}))=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$

等式右端可以转化成累次极限:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(\frac{i}{n},\frac{j}{m})\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}$$

因为 $f(x,y)$ 于闭区域 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上 (正常) 可积, 故二重积分存在, 进而根据富比尼定理, 它可以被拆成累次积分, 即:

$$\iint\limits_{[0,1]^2} f(x,y)d\sigma=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$

将等式两端写成极限形式即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\cdot\frac{1}{n^2}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(\frac{i}{n},\frac{j}{m})\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}$$

从而题设即证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{n^2}f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n}))=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\cdot\frac{1}{n^2}$$

介于可积性和 $\ln(1+x)\le x$ 对上式左端的控制, 上式两端的极限都存在, 进而只需证下列式子:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(\ln(1+\frac{1}{n^2}f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n}))-f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n})\cdot\frac{1}{n^2})=0$$

因为 f 可积, 故 f 必定有界, 从而 $\frac{1}{n^2}f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n})\to 0, n\to\infty$. 因为 $\ln(1+x)\to x, x\to 0$ 且时刻有 $\ln(1+x)\le x$, 知存在某函数 $\alpha(x)\to 0$, 满足 $\ln(1+x)\ge x-\alpha(x)$. 进而有

$$\begin{aligned}
&|\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(\ln(1+\frac{1}{n^2}f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n}))-f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n})\cdot\frac{1}{n^2})|\\
=&\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n})\cdot\frac{1}{n^2}-\ln(1+\frac{1}{n^2}f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n})))\\
\le&\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha(\frac{1}{n^2}f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n}))}{n^2}\le\sup\alpha(\frac{1}{n^2}f(x,y))
\end{aligned}$$

进而当 $n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\alpha(\frac{1}{n^2}f(x,y))=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(\ln(1+\frac{1}{n^2}f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n}))-f(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n})\cdot\frac{1}{n^2})=0$$

成立, 进而命题得证.

例 7.2.2 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$ 上有定义, 并且 $f(x,y)$ 对于确定的 $x\in[a,b]$ 是对 y 在 $[c,d]$ 上的单调增加函数, 对于确定的 $y\in[c,d]$ 是对 x 在 $[a,b]$ 上的单调增加函数, 证明 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

证明

各用 n 个分点将 $[a,b],[c,d]$ 等分, 记为 $a=x_0\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b=x_{n+1}, y_0=c\le y_1<y_2<\cdots<y_n\le d=y_{n+1}$, 则 $[a,b]\times[c,d]$ 的分划中每个小矩形的面积为 $S=\frac{(b-a)(d-c)}{(n+1)^2}$, 记 $[x_i,x_{i+1}]\times y_j,y_{j+1}$ 为 Δ_{ij}, 根据 Darboux 定理, 只需证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j}\omega_{\Delta_{ij}}S=0$$

其中 $\omega_{\Delta_{ij}}$ 是 f 在 Δ_{ij} 上的振幅. 因为 f 关于 x,y 都是单调增的, 故 $\omega_{\Delta_{ij}}=f(x_{i+1},y_{j+1})-f(x_i,y_j)$. 如此有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j}\omega_{\Delta_{ij}}S\\
=&S\sum_{i,j}(f(x_{i+1},y_{j+1})-f(x_i,y_j))\\
=&S(\sum_{i=0}^{n}(f(x_{i+1},d)-f(x_i,c))+\sum_{i=0}^{n+1}f(a,y_i))\\
=&S\cdot\frac{n}{b-a}\sum_{i=0}^{n}f(x_{i+1},d)\cdot\frac{b-a}{n}-S\cdot\frac{n}{b-a}\sum_{i=0}^{n}f(x_i,c)\cdot\frac{b-a}{n}+S\cdot\frac{n}{d-c}\sum_{i=0}^{n+1}f(a,y_i)\cdot\frac{d-c}{n}
\end{aligned}$$

对上式中的每一项取极限, 有:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}S\cdot\frac{n}{b-a}=0\\
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}f(x_{i+1},d)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x,d)dx\\
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}f(x_i,c)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x,c)dx\\
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n+1}f(a,y_i)\cdot\frac{d-c}{n}=\int_c^d f(a,y)dy
\end{aligned}$$

从而上式极限为 0, 也即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j}\omega_{\Delta_{ij}}S=0$$

进而命题得证.

练习 1 证明 $\int_a^b dx\int_a^x(x-y)^{n-2}f(y)dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b(b-y)^{n-1}f(y)dy$, 其中 n 为大于 1 的正整数.

证明

考虑积分换序:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b dx\int_a^x(x-y)^{n-2}f(y)dy\\
=&\int_a^b dy\int_y^b(x-y)^{n-2}f(y)dx\\
=&\frac{1}{n-1}\int_a^b(b-y)^{n-1}f(y)dy
\end{aligned}$$

练习 2 求积分 $\int_0^1 dy\int_1^y (e^{-x^2}+e^x\text{sin}x)dx$.

解

考虑积分换序:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 dy\int_1^y (e^{-x^2}+e^x\sin x)dx\\=&\int_0^1 dx\int_0^x (e^{-x^2}+e^x\sin x)dy\\=&\int_0^1 (xe^{-x^2}+xe^x\sin x)dx\\=&\int_0^1 xe^{-x^2}dx+\int_0^1 xe^x\sin x dx\end{aligned}$$

算得 $\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$, $\int_0^1 xe^x\sin xdx=\frac{1}{2}(e\sin 1-1)$, 故结果为 $\frac{1}{2}(e\sin 1-\frac{1}{e})$.

- **例 7.2.11** 设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有二阶连续导数.

(1) 通过计算, 验证: $\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=\iint\limits_D f''_{yx}(x,y)dxdy$;

(2) 利用 (1), 证明: $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y),(x,y)\in D$.

例 7.2.12 设 $f(x,y)\geq 0$ 在 $D: x^2+y^2\leq a^2$ 上有连续的一阶偏导数, 边界上取值为零, 证明:

$$|\iint\limits_D f(x,y)dxdy|\leq \frac{1}{3}\cdot\pi a^3\max_{(x,y)\in D}\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}$$

3.11.1 二重积分

7.2.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明

$$\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b (b-x)f(x)dx$$

证明

根据积分限可知积分区域为 $x=a,x=b,y=x$ 和 x 轴围成的梯形, 对左式有:

$$\begin{aligned}&\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy\\=&\int_a^b (\int_a^x f(y)dy)dx\\=&x(\int_a^x f(y)dy)|_a^b-\int_a^b xd(\int_a^x f(y)dy)\\=&b\int_a^b f(y)dy-\int_a^b xf(x)dx\\=&\int_a^b (b-x)f(x)dx\end{aligned}$$

7.2.2 改变二次积分的次序

$$\int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy + \frac{2}{2\sqrt{2}}dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy$$

的顺序.

解

根据积分限画出积分区域即可得欲求为

$$\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx$$

7.2.3 设 $a>0$ 是常数, 计算积分

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le ax} xy^2 dxdy$$

解

用极坐标换元, 得到

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{x^2+y^2\le ax} xy^2 dxdy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r^4 \sin^2\theta\cos\theta dr \\ &= \frac{a^5}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\sin^2\theta d\theta \\ &= \frac{a^5}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6\theta - \cos^8\theta)d\theta \\ &= \frac{3\pi}{128}a^5 \end{aligned}$$

7.2.4 计算由椭圆

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2 + (a_2x+b_2y+c_2)^2 = 1$$

所界的面积.

解

换元: $u = a_1x+b_1y+c_1, v = a_2x+b_2y+c_2$, 得到面元表示式为 $dxdy = (\frac{1}{a_1b_2} - \frac{1}{a_2b_1})dudv$, 进而欲求即为 $\pi(\frac{1}{a_1b_2} - \frac{1}{a_2b_1})$.

7.2.5 设 f 为连续函数, 求证:

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy = \int_{-A}^{A} f(\xi)(A-|\xi|)d\xi$$

其中 $D: |x| \le \frac{A}{2}, |y| \le \frac{A}{2}$, A 为常数.

证明

记 $u=x-y, v=x+y$, 得面元表示式为 $dxdy=\frac{1}{2}dudv$, 积分区域变为 $|u+v|\le A, |v-u|\le A$ 围成的区域, 进而

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D f(x-y)dxdy\\ =&\frac{1}{2}(\int_{-A}^{0}du\int_{-A-u}^{A+u}f(u)dv+\int_0^A du\int_{u-A}^{A-u}f(u)dv)\\ =&\frac{1}{2}(\int_{-A}^{0}(2A+2u)f(u)du+\int_0^A(2A-2u)f(u)du)\\ =&\int_{-A}^{A}f(u)(A-|u|)du\end{aligned}$$

7.2.6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\iint\limits_{\triangle OAB} f(1-y)f(x)dxdy=\frac{1}{2}[\int_0^1 f(x)dx]^2$$

其中 $\triangle OAB$ 为 $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$ 为顶点的三角形区域.

证明

令 $u=1-x, v=1-y$, 知面元的表示式为 $dxdy=dudv$, 积分区域变为 $u\le 1, v\le 1, u+v\ge 1$ 所围区域, 记 $D(1,1)$, 进而有

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\triangle OAB} f(1-y)f(x)dxdy\\ =&\iint\limits_{\triangle ABD} f(v)f(1-u)dudv\\ =&\frac{1}{2}\iint\limits_{\square OABD} f(x)f(1-y)dxdy\\ =&\frac{1}{2}[\int_0^1 f(x)dx]^2\end{aligned}$$

7.2.7 证明:

$$\iint\limits_S f(ax+by+c)dxdy=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du$$

其中 $S: x^2+y^2\le 1, a^2+b^2\ne 0$.

证明

换元, 令 $u=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}, v=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 得面元表示式 $dxdy=dudv$, 区域 S 变为 $S': u^2+v^2\le 1$,

有:

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{S} f(ax+by+c)dxdy \\
=&\iint\limits_{S'} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dudv \\
=&\int_{-1}^{1}du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dv \\
=&2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du
\end{aligned}
$$

7.2.8 计算曲面 $y=1-\sqrt{x^2+z^2}$ 与平面 $x=0, y=x$ 所围成的立体的体积.

解

记题设区域为 D, 并设 D 在 xOy 平面上的投影是 D', 同时记 $u=x, v=1-y$, 有:

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{D} d\sigma \\
=&\int_{-\sqrt{(1-y)^2-x^2}}^{\sqrt{(1-y)^2-x^2}} dz\iint\limits_{D'} dxdy \\
=&2\iint\limits_{D'}\sqrt{(1-y)^2-x^2}dxdy \\
=&2\iint\limits_{D''}\sqrt{v^2-u^2}dudv \\
=&2\int_{0}^{\frac{1}{2}}du\int_{u}^{1-u}\sqrt{v^2-u^2}dv \\
=&\int_{0}^{\frac{1}{2}}((1-u)\sqrt{1-2u}-u^2\ln|\frac{1}{u}-1+\sqrt{\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}}|)du
\end{aligned}
$$

7.2.9 (1) 计算积分 $A=\int_0^1\int_0^1|xy-\frac{1}{4}|dxdy$.

(2) 设 $z=f(x,y)$ 在闭正方形 $D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上连续, 且满足下列条件: $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=0, \iint\limits_{D} f(x,y)xydxdy=1$, 证明存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得 $|f(\xi,\eta)\ge\frac{1}{A}|$, 此 A 为 (1) 中积分值.

解

(1)

$$
\begin{aligned}
A=&\int_0^1\int_0^1|xy-\frac{1}{4}|dxdy \\
=&\int_0^1 dy\int_0^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{4}-xy)dx+\int_{\frac{1}{4}}^1 dx\int_0^{\frac{1}{4x}}(\frac{1}{4}-xy)dy+\int_{\frac{1}{4}}^1 dx\int_{\frac{1}{4x}}^1(xy-\frac{1}{4})dy \\
=&\frac{3}{64}+\frac{1}{16}\ln 2+\frac{3}{64}+\frac{1}{16}\ln 2 \\
=&\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\ln 2
\end{aligned}
$$

(2)

用反证法, 若 $\forall(x,y)\in D(|f(x,y)<\frac{1}{A}|)$, 既然 f 在 D 上连续, 其必可取到最大值 M, 知 $M<\frac{1}{A}$. 进而

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D f(x,y)xydxdy-\frac{1}{4}\iint\limits_D f(x,y)dxdy\\=&\iint\limits_D f(x,y)(xy-\frac{1}{4})dxdy\\\leq&\iint\limits_D |f(x,y)|\cdot|xy-\frac{1}{4}|dxdy\\\leq& M\iint\limits_D |xy-\frac{1}{4}|dxdy<\frac{1}{A}\cdot A=1\end{aligned}$$

但 $\iint\limits_D f(x,y)xydxdy-\frac{1}{4}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=1$, 矛盾! 故命题得证.

7.2.10 把正确的结论的编号填在题末的括号内.

若 $f(x,y)$ 在矩形 $G:0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1$ 上有定义, 且积分 $I_1=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 与 $I_2=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$ 都存在, 则

•(1) $I_1=I_2$,

(2) $I_1\neq I_2$,

(3) 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 存在,

(4) 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 可能不存在.

解

(2) 反例取任意在 G 上可积的函数即可.

(3) 反例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & (x,y)\in\mathbb{Q}^2\\0, & else\end{cases}$$

3.11.2 三重积分

7.2.11 改变三重积分 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz$ 的积分次序.

(1) 先 y 后 z 再 x.

(2) 先 x 后 z 再 y.

解

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dz\int_{\frac{z}{x}}^x dy$

(2) $\int_0^1 dy(\int_0^{y^2} dz\int_y^1 dx+\int_{y^2}^y dz\int_{\frac{z}{y}}^1 dx)$

7.2.12 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\iiint\limits_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz$. 其中 $\Omega_t=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq t^2\}$.

解

用球坐标换元: $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$, 并记换元后的区域为 Ω_t', 有:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^6}\iiint\limits_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz\\
=&\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^6}\iiint\limits_{\Omega_t'}r^2\sin^{\frac{3}{2}}(r^2)\sin\theta d\sigma\\
=&\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^6}\int_0^t r^2\sin^{\frac{3}{2}}(r^2)dr\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\\
=&\lim_{t\to0^+}\frac{4\pi}{t^6}\cdot\int_0^t r^5dr=\frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

7.2.13 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iint\limits_{r\le n}[r]dxdydz=\pi,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $[r]$ 是 r 的整数部分 (即不大于 r 的最大整数), n 为正整数.

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iint\limits_{r\le n}[r]dxdydz=\pi\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^n\frac{4\pi}{3}i\cdot(i^3-(i-1)^3)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{3n^4}\sum_{i=1}^n(3i^3-3i^2+i)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{3n^4}(\frac{3}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1))=\pi
\end{aligned}$$

7.2.14 设函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(0)=0$, 求

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$$

解

用球坐标换元, 有:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz\\
=&\lim_{t\to0}\frac{1}{\pi t^4}\int_0^t dr\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}r^2f(r)d\varphi\\
=&4\lim_{t\to0}\frac{1}{\pi t^4}\int_0^t r^2f(r)dr\\
=&4\lim_{t\to0}\frac{t^2f(t)}{4t^3}\\
=&\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0}f'(t)=f'(0)
\end{aligned}$$

7.2.15 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(px^{2m}+qy^{2n}+rz^{2l})dxdydz$, 其中 Ω 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le R^2$, m,n,l,p,q,r,a,b,c,R 均为已知正数.

解

用广义球坐标: $x=aw\sin\theta\cos\varphi, y=bw\sin\theta\sin\varphi, z=cw\cos\theta$, 有:

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega}(px^{2m}+qy^{2n}+rz^{2l})dxdydz\\
=&\int_0^R dw\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} abcw^2\sin\theta(p(aw\sin\theta\cos\varphi)^{2m}+q(bw\sin\theta\sin\varphi)^{2n}+r(cw\cos\theta)^{2l})d\varphi\\
=&\int_0^R dw\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} a^{2m+1}bcpw^{2m+2}\sin^{2m+1}\theta\cos^{2m}\varphi d\varphi\\
+&\int_0^R dw\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} ab^{2n+1}cqw^{2n+2}\sin^{2n+1}\theta\sin^{2n}\varphi d\varphi\\
+&\int_0^R dw\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} abc^{2l+1}rw^{2l+2}\sin\theta\cos^{2l}\theta d\varphi\\
=&\int_0^R dw\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} a^{2m+1}bcpw^{2m+2}\sin^{2m+1}\theta(\frac{\cos2\varphi+1}{2})^{2m}d\varphi\\
+&\int_0^R dw\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} ab^{2n+1}cqw^{2n+2}\sin^{2n+1}\theta(\frac{1-\cos2\varphi}{2})^{2n}d\varphi\\
+&2\pi\int_0^R dw\int_0^\pi abc^{2l+1}rw^{2l+2}\sin\theta\cos^{2l}\theta d\theta\\
=&2\pi\cdot(\frac{1}{2})^{2m}a^{2m+1}bcp\int_0^R w^{2m+2}dw\int_0^\pi\sin^{2m+1}\theta d\theta\\
+&2\pi\cdot(\frac{1}{2})^{2n}ab^{2n+1}cq\int_0^R w^{2n+2}dw\int_0^\pi\sin^{2n+1}\theta d\theta\\
-&2\pi abc^{2l+1}r\int_0^R w^{2l+2}dw\int_0^\pi\cos^{2l}\theta d\cos\theta\\
=&\frac{\pi a^{2m+1}bcpR^{2m+3}}{2^{2m-2}(2m+3)}\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}+\frac{\pi ab^{2n+1}cqR^{2n+3}}{2^{2n-2}(2n+3)}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}+\frac{2\pi abc^{2l+1}R^{2l+3}}{(2l+1)(2l+3)}
\end{aligned}
$$

7.2.16 计算三重积分

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le1\\x^2+y^2-z^2\ge\frac{1}{2}}} zdxdydz.$$

解

届于被积函数和积分区域都具有上下对称性, 故可知欲求为 0.

•7.2.17 设 $a>0,b>0,c>0$, 试证:

$$\iiint\limits_{V} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}dxdydz=\frac{1}{a+b+c}\cdot\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}$$

其中 V 为四面体, $x\ge0,y\ge0,z\ge0,x+y+z\le1$.

证明

7.2.18 计算由平面

$$3x-y-z=\pm 1$$
$$-x+3y-z=\pm 1$$
$$-x-y+3z=\pm 1$$

所围成的体积, 将此结果推广到 n 维空间的情况, 它的体积应是多少?

解

记平面围成的区域为 D, 换元并记新区域为 $D'=[-1,1]^3$:

$$u=3x-y-z$$
$$v=-x+3y-z$$
$$w=-x-y+3z$$

知对应的体积元为:

$$d\sigma=\frac{1}{\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}}dxdydz=\frac{1}{16}dxdydz$$

进而有:

$$\iiint\limits_{D}dxdydz=\iiint\limits_{D'}\frac{1}{16}d\sigma=\frac{1}{2}$$

推广即计算平面

$$3x_1-x_2-\cdots-x_n=\pm 1$$
$$-x_1+3x_2-\cdots-x_n=\pm 1$$
$$\vdots$$
$$-x_1-x_2-\cdots+3x_n=\pm 1$$

所围成的体积, 即其所围成的区域为 D, 考虑换元并记新区域为 $D'=[-1,1]^n$:

$$u_1=3x_1-x_2-\cdots-x_n$$
$$u_2=-x_1+3x_2-\cdots-x_n$$
$$\vdots$$
$$u_n=-x_1-x_2-\cdots+3x_n$$

先计算 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix}3&-1&\cdots&-1\\-1&3&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-1&-1&\cdots&3\end{vmatrix}=(4-n)4^{n-1}$$

从而对应体积元为 $d\mu=\frac{1}{(4-n)4^{n-1}}dx_1\cdots dx_n$, 进而有:

$$\int\limits_{D}dx_1\cdots dx_n=\int\limits_{D'}\frac{1}{(4-n)4^{n-1}}d\mu=\frac{1}{(4-n)2^{n-2}}$$

7.2.19 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz$ 所围的体积.

解

记该区域为 D, 用球坐标换元并记新区域为 D':

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{D} dxdydz &= \iiint\limits_{D'} r^2\sin\theta d\mu \\ &= (\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} d\varphi))\int_0^{\sqrt[3]{a^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}} r^2\sin\theta dr \\ &= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{a^3}{6}\iint_{D''}\sin^3\theta\cos\theta\sin 2\varphi d\sigma=\frac{a^3}{6}\end{aligned}$$

7.2.20 求曲面 $x^2+y^2+z^2=\frac{z}{h}e^{-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}$ 所围的体积.

解

记该区域为 D, 用球坐标换元并记新区域为 D':

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{D} dxdydz &= \iiint\limits_{D'} r^2\sin\theta d\mu \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\cos\theta}{h}e^{-\cos^2\theta}} r^2\sin\theta dr \\ &= \frac{1}{3h^3}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta e^{-3\cos^2\theta}d\theta \\ &= -\frac{2\pi}{3h^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta e^{-3\cos^2\theta}d\cos\theta \\ &= -\frac{\pi}{3h^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta e^{-3\cos^2\theta}d\cos^2\theta \\ &= \frac{\pi}{3h^3}\int_0^1 xe^{-3x}dx=\frac{\pi}{27h^3}(1-\frac{4}{e^3})\end{aligned}$$

7.2.21 求 xz 平面上的圆周 $(x-a)^2+z^2=b^2(0<b<a)$ 绕 z 轴旋转一周所成闭曲面所包围的体积.

解

用环面坐标换元: $x=(a+r\cos\varphi)\cos\theta, y=(a+r\cos\varphi)\sin\theta, z=r\sin\varphi$, 并记新旧区域分别为 D', D, 有:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{D} dxdydz &= \iiint\limits_{D'}(a+r\cos\varphi)rd\mu \\ &= \int_0^b dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{2\pi}(a+r\cos\varphi)rd\varphi \\ &= 2\pi^2ab^2\end{aligned}$$

7.2.23 设 $f(x)>0$ 连续,

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_V f(x^2+y^2+z^2)dxdydz}{\iint\limits_D f(x^2+y^2)dxdy},$$

其中 $V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le t^2\}, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le t^2\}$, 试证 $t>0$ 时 $F(t)$ 单增.

证明

用球坐标与极坐标换元, 有:

$$F(t)=\frac{\int_0^t dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}r^2\sin\theta f(r^2)d\varphi}{\int_0^t dr\int_0^{2\pi}rf(r^2)d\theta}=\frac{2\int_0^t r^2f(r^2)dr}{\int_0^t rf(r^2)dr}=\frac{4\int_0^t r^2f(r^2)dr}{\int_0^{t^2}f(x)dx}$$

显然 $F(t)$ 可导, 有:

$$\begin{aligned}F'(t)&=(4t^2f(t^2)\int_0^{t^2}f(x)dx-8tf(t^2)\int_0^t r^2f(r^2)dr)\cdot\frac{1}{(\int_0^{t^2}f(x)dx)^2}\\&=(4t^2f(t^2)\int_0^{t^2}f(x)dx-4tf(t^2)\int_0^{t^2}\sqrt{x}f(x)dx)\cdot\frac{1}{(\int_0^{t^2}f(x)dx)^2}\\&\ge(4t^2f(t^2)\int_0^{t^2}f(x)dx-4tf(t^2)\int_0^{t^2}tf(x)dx)\cdot\frac{1}{(\int_0^{t^2}f(x)dx)^2}=0\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $r\equiv t$, 但这显然不可能, 故 $F'(t)>0$, 进而 $F(t)$ 单增.

7.2.24 设 $f(x,y,z)$ 在 $V=\{(x,y,z)|0\le x,y,z\le 1\}$ 上有六阶连续偏导数, f 在边界上恒为零, 且

$$|\frac{\partial^6 f(x,y,z)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}|\le M$$

(M 为常数). 试证

$$I\equiv\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz\le\frac{1}{8}\cdot\frac{M}{6^3}.$$

证明

考虑多元函数泰勒公式, 用平面 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=\frac{1}{2}$ 将 V 分为 8 块小立方体, 记 $V_1=\{(x,y,z)|0\le x,y,z\le\frac{1}{2}\}$, 同理记剩下的小立方体分别为 $V_2,\cdots,V_8$. 当点取在某小立方时, 对应将 f 按该立方体与原来的大立方体公共的那个顶点展开 (如当点取在 V_1 时, 就按 (0,0,0) 展开), 记 x,y,z 对应的增量为 h^1,h^2,h^3, 由题知 $f(x_i,y_i.z_i)=0$, 这里 $x_i,y_i,z_i\in\{0,1\}$, 从而展开有:

$$f(h^1,h^2,h^3)=\sum_{k=1}^5\frac{1}{k!}(h^1\partial_1+h^2\partial_2+h^3\partial_3)^kf(x_i,y_i,z_i)+\frac{\partial^6 f(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}h^1h^2h^3$$

从而

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\sum_{j=1}^8\int\limits_{V_j}(\sum_{k=1}^5\frac{1}{k!}(h^1\partial_1+h^2\partial_2+h^3\partial_3)^kf(x_i,y_i,z_i)+\frac{1}{6!}\frac{\partial^6 f(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}h^1h^2h^3)d\mu$$

其中 $(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j)\in V_j,h^1,h^2,h^3\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. 因为 f 在边界上恒为零, 故对任意在边界上的点 (x,y,z), 总有 $\partial_i f(x,y,z)=0,i=1,2,3$. 对 $\frac{\partial^n f(x,y,z)}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r},p\ge 0,q\ge 0,r\ge 0,p+q+r=n>0$, 届于 f

有六阶连续偏导数, 知对 f 求五阶偏导的顺序可以任意变动, 进而总可以调整偏导顺序, 将该式子视做先对某一变量求偏导, 根据先前得到的边界点偏导为 0 的结论可知若 (x,y,z) 为边界点, 则 $\frac{\partial^n f(x,y,z)}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=0,p\geq 0,q\geq 0,r\geq 0,p+q+r=n>0$. 进而:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{8}\int_{V_j}(\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k!}(h^1\partial_1+h^2\partial_2+h^3\partial_3)^k f(x_i,y_i,z_i)+\frac{1}{6!}\frac{\partial^6 f(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}h^1h^2h^3)d\mu\\
=&\frac{1}{6!}\sum_{j=1}^{8}\int_{V_j}\frac{\partial^6 f(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}h^1h^2h^3d\mu\\
\leq&\frac{1}{6!}\sum_{j=1}^{8}\int_{V_j}|\frac{\partial^6 f(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}h^1h^2h^3|d\mu\\
\leq&\frac{1}{6!}\cdot 8\cdot(\frac{1}{2})^3\cdot M\cdot(\frac{1}{2})^3\leq\frac{1}{8}\frac{M}{6^3}.
\end{aligned}$$

3.11.3 反常二重积分及 n 重积分

7.2.25 计算积分

$$\iint\limits_{0\leq x\leq y\leq\pi}\ln|\sin(x-y)|dxdy$$

解

知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{lnsin}x dx=-\frac{\pi}{2}\mathrm{ln}2$$

因为

$$\begin{aligned}
I=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{lnsin}x dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{lnsin}(\frac{\pi}{2}-t)d(\frac{\pi}{2}-t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{lncos}x dx\\
\Rightarrow I=&\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{lnsin}x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{lncos}x dx)\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\mathrm{sin}2x)dx=-\frac{\pi}{4}\mathrm{ln}2+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\mathrm{lnsin}x dx
\end{aligned}$$

而在 I 中令 $x=\pi-t$ 即得 $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{lnsin}x dx$, 故知

$$I=-\frac{\pi}{4}\mathrm{ln}2+\frac{1}{2}I\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\mathrm{ln}2$$

又有

$$\begin{aligned}
I:=&\int_0^{\pi}x\mathrm{lnsin}x dx\\
=&\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\mathrm{lnsin}t d(\pi-t)\\
=&\pi\int_0^{\pi}\mathrm{lnsin}t dt-I\\
\Rightarrow&\int_0^{\pi}x\mathrm{lnsin}x dx=-\frac{\pi^2}{2}\mathrm{ln}2
\end{aligned}$$

回到原题, 取 $u=x-y, v=x+y$, 知 D 变为 $D'=\{(u,v)|u+v\ge 0\wedge v\ge u\wedge u+v\le 2\pi\wedge v-u\le 2\pi\}$, 且 $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|=\frac{1}{2}$, 故有:

$$\iint\limits_D \ln|\sin(x-y)|dxdy=\int_0^\pi\int_u^{2\pi-u}\ln\sin u dvdu=\int_0^\pi(2\pi-2u)\ln\sin udu$$
$$=-2\pi^2\ln2+\pi^2\ln2=-2\pi^2\ln2$$

7.2.26 计算

$$\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2}}, D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

解

用广义极坐标换元, 并记新区域为 D', 有:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2}}\\=&\iint\limits_{D'}\frac{abr}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta\\=&ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi ab\end{aligned}$$

7.2.27 求积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\frac{(|x|+|y|)^2\ln(|x|+|y|)}{x^2+y^2}dxdy.$$

解

考虑对称性, 只需计算第一象限的部分, 换元: $u=x+y, v=x-y$, 并记新区域为 D, 有:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\frac{(|x|+|y|)^2\ln(|x|+|y|)}{x^2+y^2}dxdy\\=&4\iint\limits_{x+y\le 1,x,y\ge 0}\frac{(x+y)^2\ln(x+y)}{x^2+y^2}dxdy\\=&4\iint\limits_D\frac{u^2\ln u}{u^2+v^2}\\=&4\int_0^1du\int_{-u}^u\frac{u^2\ln u}{u^2+v^2}dv\\=&2\pi\int_0^1u\ln udu=\pi\int_0^1\ln udu^2=\pi(u^2\ln u)|_0^1-\pi\int_0^1udu=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

7.2.28 证明:

$$(\int_0^x e^{-u^2}du)^2=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{t^2+1}dt$$

并由此求 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

证明

$$
\begin{aligned}
&(\int_0^x e^{-u^2}du)^2\\
=&\int_0^x e^{-u^2}du\cdot\int_0^x e^{-u^2}du\\
=&\int_0^x e^{-u^2}du\int_0^x e^{-v^2}dv\\
=&\iint\limits_{[0,x]^2} e^{-(u^2+v^2)}dudv
\end{aligned}
$$

用极坐标换元, 有:

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{[0,x]^2} e^{-(u^2+v^2)}dudv\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{x}{\cos\theta}} re^{-r^2}dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{x}{\sin\theta}} re^{-r^2}dr\\
=&-\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{x}{\cos\theta}} e^{-r^2}d(-r^2)+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{x}{\sin\theta}} e^{-r^2}d(-r^2))\\
=&-\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}-1})d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(e^{-\frac{x^2}{\sin^2\theta}}-1)d\theta)\\
=&-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^{-x^2\sec^2\theta}-1)d\theta
\end{aligned}
$$

令 $t=\tan\theta$, 有:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^{-x^2\sec^2\theta}-1)d\theta\\
=&-\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}d\arctan t\\
=&\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt
\end{aligned}
$$

进而题式得证. 对 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$, 令题式中的 $x\to+\infty$, 可得 $(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx)^2=\frac{\pi}{4}$, 从而欲求即为 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7.2.29 用二重积分计算 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

解

先估计 $(\int_0^u e^{-x^2}dx)^2$:

$$
\begin{aligned}
(\int_0^u e^{-x^2}dx)^2&=\int_0^u e^{-x^2}dx\int_0^u e^{-x^2}dx\\
&=\int_0^u e^{-x^2}dx\int_0^u e^{-y^2}dy\\
&=\iint\limits_{[0,u]^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=:I
\end{aligned}
$$

用极坐标换元, 知:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}e^{-u^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^u re^{-r^2}dr\le I\le\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}u}re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}e^{-2u^2}$$

而 $u\to+\infty$, $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}e^{-u^2}$, $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}e^{-2u^2}\to\frac{\pi}{4}$, 故 $I=\frac{\pi}{4}$, 即欲求为 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7.2.32 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数, $f_{k,n}\equiv f(a+\frac{k}{n}(b-a)),\delta_n=\frac{b-a}{n}$. 将 $\prod_{k=1}^{n}(1+f_{k,n}\delta_n)$ 展开成 δ_n 的 n 次多项式, 证明当 p 取定值, 令 n 趋向无穷, 含有 δ_n^p 的项收敛于

$$\int\cdots\int_{a\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_p\le b} f(x_1)\cdots f(x_p)dx_1\cdots dx_p=\frac{1}{p!}(\int_a^b f(x)dx)^p.$$

证明

知含 δ_n^p 的项为

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le n} f_{i_1,n}f_{i_2,n}\cdots f_{i_p,n}\delta_n^p$$

对 $\int\cdots\int_{a\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_p\le b} f(x_1)\cdots f(x_p)dx_1\cdots dx_p$, 按定义展开, 有:

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_{a\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_p\le b} f(x_1)\cdots f(x_p)dx_1\cdots dx_p\\ =&\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i_1,\cdots,i_p} f(\xi_{i_1})f(\xi_{i_2})\cdots f(\xi_{i_p})\Delta_{i_1\cdots i_p}\end{aligned}$$

届于函数连续, 其必可积, 从而积分结果不因标志点选取的变动而变动, 故自然可以取 $\xi_{i_k}=a+\frac{i_k}{n}(b-a),\Delta_{i_1\cdots i_p}=\delta_n^p$. 因为要求 $\xi_{i_1}\le\xi_{i_2}\le\cdots\le\xi_{i_p}$, 故只能有 $i_1\le i_2\le\cdots\le i_p$. 又因为 p 是固定的, 且在和式中增减有限项不改变积分值, 故:

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i_1,\cdots,i_p} f(\xi_{i_1})f(\xi_{i_2})\cdots f(\xi_{i_p})\Delta_{i_1\cdots i_p}\sim\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le n} f_{i_1,n}f_{i_2,n}\cdots f_{i_p,n}\delta_n^p$$

再由已经证明过的式子:

$$\int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_1\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)dx_n=\frac{1}{n!}(\int_0^a f(t)dt)^n$$

可知

$$\int\cdots\int_{a\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_p\le b} f(x_1)\cdots f(x_p)dx_1\cdots dx_p=\frac{1}{p!}(\int_a^b f(x)dx)^p.$$

Chapter 4

曲线积分

4.1 第一型曲线积分

4.1.1 练习题

计算下列曲线积分:

(1) $\int_\Gamma (x^2+y^2)^n ds, \Gamma: x = a\text{cost}, y = a\text{sint}(0 \le t \le 2\pi)$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$;

解

代入知

$$\int_\Gamma (x^2+y^2)^n ds = \int_0^{2\pi} a^{2n} \cdot |a| dt = 2\pi |a|^{2n+1}$$

(2) $\int_\Gamma (x+y)ds$,Γ : 顶点为 (0,0),(1,0),(0,1) 的三角形的边界;

解

记 $\Gamma_1 : x = t, y = 0, t \in [0,1], \Gamma_2 : x = t, y = 1-t, t \in [0,1], \Gamma_3 : x = 0, y = t, t \in [0,1]$, 有:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (x+y)ds &= \int_{\Gamma_1} (x+y)ds + \int_{\Gamma_2} (x+y)ds + \int_{\Gamma_3} (x+y)ds \\ &= \int_0^1 tdt + \int_0^1 \sqrt{2}dt + \int_0^1 tdt = \sqrt{2}+1\end{aligned}$$

(3) $\int_\Gamma zds$,Γ : 圆锥螺线 $x = t\text{cost}, y = t\text{sint}, z = t(0 \le t \le 2\pi)$;

解

$$\int_\Gamma zds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{(\text{cost} - t\text{sint})^2 + (t\text{cost} + \text{sint})^2 + 1}dt = \frac{4}{3}((4\pi^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$$

(4) $\int_\Gamma x^2 ds$,Γ : 圆周 $x^2+y^2+z^2 = a^2, x+y+z = 0$;

解

由对称性:

$$\int_\Gamma x^2 ds = \int_\Gamma y^2 ds = \int_\Gamma z^2 ds = \frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds = \frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot 2\pi a = \frac{2\pi}{3}a^3$$

(5) $\int_\Gamma y^2 ds$,Γ : 旋轮线的一拱, $x = a(t - \text{sint}), y = a(1-\text{cost})(0 \le t \le 2\pi)$.

解

$$\int_\Gamma y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2(1-\text{cos}t)^2\sqrt{a^2(2-2\text{cos}t)}dt = \quad |a|^3\int_0^{2\pi}(1-\text{cos}t)^2\sqrt{4\text{sin}^2\frac{t}{2}}dt$$
$$=4|a|^3\int_0^{\pi}(1-\text{cos}t)^2\text{sin}\frac{t}{2}dt = \frac{256|a|^3}{15}$$

4.2 第二型曲线积分

4.2.1 练习题

1. 计算下列第二型曲线积分:

(1) $\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, Γ 表示逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=a^2$;

解

用极坐标换元: $x=a\text{cos}t, y=a\text{sin}t, 0\le t\le 2\pi$:

$$\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

(2) $\int_\Gamma (x+y)dx+(x-y)dy$,$\Gamma$ 表示逆时针方向的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

解

用极坐标换元: $x=a\text{cos}t, y=b\text{sin}t, 0\le t\le 2\pi$:

$$\int_\Gamma (x+y)dx+(x-y)dy = \int_0^{2\pi}(a\text{cos}t+b\text{sin}t)(-a\text{sin}t)+(a\text{cos}t-b\text{sin}t)(b\text{cos}t)dt$$
$$=\int_0^{2\pi} ab(\text{cos}^2t-\text{sin}^2t)-(a^2+b^2)\text{sin}t\text{cos}tdt = 0$$

(3) $\int_\Gamma (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy, \Gamma: x=y^2(-1\le y\le 1)$, 沿 y 增加的方向;

解

$$\int_\Gamma (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy = \int_{-1}^{1}(y^4-2y^3)\cdot 2y+(y^2-2y^3)dy = -\frac{14}{15}$$

(4) $\int_\Gamma xdy$,Γ : 直线 $2x+y=1$ 与两坐标轴组成的三角形, 沿逆时针方向;

解

记 $\Gamma_1: x=t, y=0, t\in[0,\frac{1}{2}], \Gamma_2: x=t, y=1-2t, t\in[0,\frac{1}{2}], \Gamma_3: x=0, y=t, t\in[0,1]$, 知:

$$\int_\Gamma xdy = \int_{\frac{1}{2}}^{0}(-2t)dt = \frac{1}{4}$$

(5) $\int_\Gamma (x^2+y^2)dy$,Γ 是直线 $x=1, x=3$ 和 $y=1, y=4$ 构成的矩形, 沿逆时针方向.

解

$$\int_\Gamma (x^2+y^2)dy = \int_1^4 (9+y^2)dy + \int_4^1 (1+y^2)dy = 24$$

2. 设常数 a,b,c 满足 $ac-b^2>0$, 计算积分

$$\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{ax^2+2bxy+cy^2}$$

其中 Γ 为逆时针方向的单位圆周.

解

用极坐标换元: $x=\mathrm{cos}t, y=\mathrm{sin}t, 0\le t\le 2\pi$:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{ax^2+2bxy+cy^2} &= \int_0^{2\pi}\frac{dt}{a\mathrm{cos}^2t+2b\mathrm{sin}t\mathrm{cos}t+c\mathrm{sin}^2t}\\ &=\int_0^{2\pi}\frac{1+\tan^2t}{a+2b\mathrm{tan}t+c\tan^2t}dt\\ &=2(\int_0^{+\infty}+\int_{-\infty}^0)\frac{1+x^2}{a+2bx+cx^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\\ &=2(\int_0^{+\infty}+\int_{-\infty}^0)\frac{dx}{c(x^2+2\frac{b}{c}x+\frac{b^2}{c^2})+a-\frac{b^2}{c}}\\ &=\frac{2}{c}(\int_0^{+\infty}+\int_{-\infty}^0)\frac{dx}{(x+\frac{b}{c})^2+\frac{ac-b^2}{c^2}}\\ &=\frac{2}{c}\cdot\frac{c^2}{ac-b^2}(\int_0^{+\infty}+\int_{-\infty}^0)\frac{dx}{(\sqrt{\frac{c^2}{ac-b^2}}x+\frac{b}{c}\cdot\sqrt{\frac{c^2}{ac-b^2}})+1}\\ &=\frac{2c}{ac-b^2}\cdot\sqrt{\frac{ac-b^2}{c^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}\\ &=\frac{2\pi c}{|c|\sqrt{ac-b^2}}\end{aligned}$$

3. 计算下列第二型曲线积分, 曲线的正向是参数增加的方向:

(1) $\int_\Gamma xz^2dx+yx^2dy+zy^2dz, \Gamma: x=t, y=t^2, z=t^3(0\le t\le 1)$;

解

$$\int_\Gamma xz^2dx+yx^2dy+zy^2dz=\int_0^1(t^7+2t^5+3t^9)dt=\frac{91}{120}$$

(2) $\int_\Gamma (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz, \Gamma: x=a\mathrm{sin}^2t, y=2a\mathrm{sin}t\mathrm{cos}t, z=a\mathrm{cos}^2t(0\le t\le\pi)$.

解

$$\int_\Gamma(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=\int_0^\pi(\frac{1}{2}a^2\mathrm{sin}4t+2a^2\mathrm{cos}2t)dt=0$$

4. 计算 $\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, Γ 为球面片 $x^2+y^2+z^2=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的边界, 方向是 $(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,1)\to(1,0,0)$.

解

整个曲线可以按它所在的平面分为三部分, 记 Γ_1 为它在 xoy 面内的部分, Γ_2 为 yoz 面内的部分, Γ_3 为 zox 面内的部分, 在每个面内都用极坐标换元, 有:

$$\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=\int_{\Gamma_1}y^2dx-x^2dy+\int_{\Gamma_2}z^2dy-y^2dz+\int_{\Gamma_3}x^2dz-z^2dx=0$$

最后等于 0 是由对称性即得的.

5. 证明: $|\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{p}|\le\int_\Gamma\|\mathbf{F}\|ds$.

证明

考虑 $\mathbf{F}=(F^1(x^1,x^2,\cdots,x^n),F^2(x^1,x^2,\cdots,x^n),\cdots,F^n(x^1,x^2,\cdots,x^n)),\mathbf{p}=(x^1(t),x^2(t),\cdots,x^n(t))$, 进而:

$$\begin{aligned}|\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{p}| =& |\int_a^b \sum_{i=1}^n F^i(x^1(t),\cdots,x^n(t))(x^i(t))'dt| \\ \leq& |\int_a^b \sqrt{(\sum_{i=1}^n (F^i(x^1(t),\cdots,x^n(t)))^2)(\sum_{i=1}^n((x^i(t))')^2)}| \\ =& |\int_\Gamma \parallel \mathbf{F}\parallel ds| = \int_\Gamma \parallel \mathbf{F}\parallel ds\end{aligned}$$

4.3 Green 公式

4.3.1 关于路径无关的四个命题等价的梳理

定理 4.3.1 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单连通区域, 函数 $P,Q,\frac{\partial Q}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 都在 D 上连续, 那么以下四个条件等价:

1. 对 D 中任意的分段光滑的闭曲线 Γ, 有
$$\int_\Gamma Pdx+Qdy=0$$
2. 对 D 中任意的两条连接 A 和 B 的分段光滑曲线 Γ_1 和 Γ_2, 有
$$\int_{\Gamma_1} Pdx+Qdy=\int_{\Gamma_2} Pdx+Qdy$$
即曲线积分与路径无关;
3. 存在 D 上连续可微的函数 $u(x,y)$, 使得
$$du=Pdx+Qdy$$
4. 在 D 上, 有
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

证明

按 (1) $\to$ (2) $\to$ (3) $\to$ (4) $\to$ (1) 的方向给出证明:

(1) $\to$ (2): 考虑 $\Gamma=\Gamma_1-\Gamma_2$, 因为 Γ_1,Γ_2 为连接 A,B 的分段光滑曲线, 故 Γ 是分段光滑闭曲线, 进而有:

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy=\int_{\Gamma_1} Pdx+Qdy-\int_{\Gamma_2} Pdx+Qdy=0$$

进而结论得证.

(2) $\to$ (3): 考虑函数:

$$u(x,y)=\int_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$$

因为连接 (a,b) 与 (x,y) 的路径不影响积分结果, 故 $u(x,y)$ 良定义, 下面根据定义求 du:

$$u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)=(\int_{(a,b)}^{(x+h_1,y+h_2)}-\int_{(a,b)}^{(x,y)})Pdx+Qdy=\int_{(x,y)}^{(x+h_1,y+h_2)} Pdx+Qdy$$

考虑折线路径 $(x,y)\to(x+h_1,y)\to(x+h_1,y+h_2)$, 有:

$$\int_{(x,y)}^{(x+h_1,y+h_2)}Pdx+Qdy=\int_x^{x+h_1}P(x,y)dx+\int_y^{y+h_2}Q(x,y)dy=P(\xi_1,y)dx+Q(x,\xi_2)dy$$

这里最后一个等号用了积分中值定理, 令 $\parallel \mathbf{h}\parallel=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\to 0$, 知此时 $\xi_1\to x,\xi_2\to y$, 有:

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

等号成立是因为 P,Q 连续, 进而命题得证.

(3) $\to$ (4): 因为根据全微分和偏微分的关系有:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

比对知

$$P=\frac{\partial u}{\partial x},Q=\frac{\partial u}{\partial y}$$

从而

$$\frac{\partial P}{\partial y}=u_{yx},\frac{\partial Q}{\partial x}=u_{xy}$$

因为这两个偏导数都连续, 进而它们相等, 故命题得证.

(4) $\to$ (1): 由格林公式即证.

4.3.2 练习题

1. 利用 Green 公式, 计算下列积分:

(1) $\int_\Gamma xy^2dy-x^2ydx$, Γ 为圆周 $x^2=y^2=a^2$, 按逆时针方向;

解

$$\int_\Gamma xy^2dy-x^2ydx=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\pi a^4$$

(2) $\int_\Gamma(x+y)dx-(x-y)dy$, Γ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 按逆时针方向;

解

$$\int_\Gamma(x+y)dx-(x-y)dy=\iint\limits_D(-2)dxdy=-2\pi ab$$

(3) $\int_\Gamma e^x\text{sin}ydx+e^x\text{cos}ydy$, Γ 为上半圆周 $x^2+y^2=ax$, 沿 x 增加的方向.

解

补充线段 $(a,0)\to(0,0)$, 得到闭合曲线 Γ', 因为在该线段上 $y=0$, 故易知积分值为 0, 补线前后积分值相等, 有:

$$\int_{\Gamma'}e^x\text{sin}ydx+e^x\text{cos}ydy=\iint\limits_{D'}0dxdy=0$$

2. 利用 Green 公式, 计算下列曲线围成的面积:

(1) 星形线 $x=a\text{cos}^3t,y=a\text{sin}^3t(0\le t\le 2\pi)$;

解

$$\iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{3\pi a^2}{4}$$

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$;

解

遵从提示, 令 $y = x\tan\theta, -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, 考虑双纽线的上半叶, 代入方程知 $x = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}, y = a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}$, 再补线 $y = 0$, 有:

$$\iint\limits_D dxdy = \int_\Gamma xdy - ydx = \int_{-\frac{pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = a^2$$

(3) Descartes 叶形线 $x^3+y^3 = 3axy(a>0)$.

解

遵从提示, 令 $y = xt$, 代入方程知 $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. 当 (x,y) 位于第一象限时, 知 $t > 0$; 当 (x,y) 位于第二、四象限时, 知 $t < 0$, 且根据参数方程可知 $\frac{dy}{dx} = \frac{2t-t^4}{1-2t^3} < 0$, 从而 $y < 0 \vee x < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$, 故这部分曲线不会围成闭合图形. 综上, 只需计算 $t \ge 0$ 的部分即可, 有:

$$\iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt = \frac{3a^2}{2}.$$

3. 设封闭曲线 Γ 有参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)(\alpha \le t \le \beta)$$

参数增加时指示 Γ 的正向, 证明: Γ 围成的面积

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix} dt$$

证明

知:

$$\iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t))dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix} dt$$

4. 单变量函数 f 连续可微, Γ 是任意一条分段光滑的封闭曲线, 证明:

(1) $\int_\Gamma f(xy)(ydx+xdy) = 0$;

证明

因为 f 连续可微, 知 $f(xy)$ 关于单变量连续可微, 有:

$$\int_\Gamma f(xy)(ydx+xdy) = \iint\limits_D (\frac{\partial(xf(xy))}{\partial x} - \frac{\partial(yf(xy))}{\partial y}) = 0$$

(2) $\int_\Gamma f(x^2+y^2)(xdx+ydy) = 0$;

证明

知 $f(x^2+y^2)$ 对 x^2+y^2 连续可微, 有:

$$\int_\Gamma f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=\iint\limits_D(\frac{\partial(yf(x^2+y^2))}{\partial x}-\frac{\partial(xf(x^2+y^2))}{\partial y})=0$$

(3) $\int_\Gamma f(x^n+y^n)(x^{n-1}dx+y^{n-1}dy)=0(n\in\mathbb{N}^*)$.

证明

$$\int_\Gamma f(x^n+y^n)(x^{n-1}dx+y^{n-1}dy)=\iint\limits_D(\frac{\partial(y^{n-1}f(x^n+y^n))}{\partial x}-\frac{\partial(x^{n-1}f(x^n+y^n))}{\partial y})=0$$

5. 设 Γ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的光滑封闭曲线, 用 $\mathbf{n}$ 表示 Γ 上各点处的单位外法向量. 设 $\mathbf{a}$ 是一个固定的单位向量, 求证:

$$\int_\Gamma \cos(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=0$$

证明

设 Γ 有参数方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t),\alpha\le t\le\beta$, 则对曲线上任意一点, 它的单位外法向量为 $(\frac{\psi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}},\frac{-\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}})$, 取 $\mathbf{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 有:

$$\int_\Gamma\cos(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=\int_\alpha^\beta(\frac{\psi'(t)\cos\theta-\varphi'(t)\sin\theta}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}}\cdot\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2})dt=\int_\Gamma\cos\theta dx-\sin\theta dy=\iint\limits_D 0dxdy=0$$

6. 设 Γ 为一条光滑的封闭曲线, $\mathbf{n}$ 表示单位外法向量, 用 $(\mathbf{n},\mathbf{i})$ 表示 $\mathbf{n}$ 与 x 轴正向的夹角, $(\mathbf{n},\mathbf{j})$ 表示 $\mathbf{n}$ 与 y 轴正向的夹角. 计算曲线积分

$$\int_\Gamma(x\cos(\mathbf{n},\mathbf{i})+y\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}))ds$$

解

同 **5.** 记号, 知 $\mathbf{i}=(1,0),\mathbf{j}=(0,1)$, 有:

$$\int_\Gamma(x\cos(\mathbf{n},\mathbf{i})+y\cos(\mathbf{n},\mathbf{j}))ds=\int_\alpha^\beta(\varphi(t)\psi'(t)-\psi(t)\varphi'(t))dt=\int_\Gamma xdy-ydx=2\iint\limits_D dxdy$$

其中 D 是 Γ 围成的区域.

7. 计算下列曲线积分:

(1) $\int_L(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$, 其中 L 是连接 $A=(0,0),B=(2,1)$ 的任意光滑线段;

解

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 故积分与路径无关, 不妨就取路径 $y=\frac{1}{2}x$, 得欲求为 $\frac{13}{3}$.

(2) $\int_L\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 是位于上半平面从点 $(-1,0)$ 到 $(1,0)$ 的任意光滑线段.

解

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 故积分与路径无关, 不妨就取路径 $(-1,0)\to(-1,1)\to(1,1)\to(1,0)$, 有:

$$\int_L\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=\int_0^1\frac{y+1}{1+y^2}dy+\int_{-1}^1\frac{x+1}{x^1+1}dx+\int_1^0\frac{y-1}{1+y^2}dy=\pi$$

8. 计算曲线积分

$$\int_{\Gamma}\frac{e^x}{x^2+y^2}((x\text{siny}-y\text{cosy})dx+(x\text{cosy}+y\text{siny})dy)$$

解

考虑挖去包含原点的小圆区域 $C_\varepsilon: x^2+y^2<\varepsilon$, 记 Γ 围成的区域为 D, 并记 $D'=D\backslash C_\varepsilon$, 知 $\Gamma=\partial D+\partial C_\varepsilon$, 有:

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma}\frac{e^x}{x^2+y^2}((x\text{siny}-y\text{cosy})dx+(x\text{cosy}+y\text{siny})dy)\\=&\int_{\partial D}\frac{e^x}{x^2+y^2}((x\text{siny}-y\text{cosy})dx+(x\text{cosy}+y\text{siny})dy)\\+&\int_{\partial C_\varepsilon}\frac{e^x}{x^2+y^2}((x\text{siny}-y\text{cosy})dx+(x\text{cosy}+y\text{siny})dy)\\=&\iint_D 0dxdy+\int_{\partial C_\varepsilon}\frac{e^x}{x^2+y^2}((x\text{siny}-y\text{cosy})dx+(x\text{cosy}+y\text{siny})dy)\\=&\int_0^{2\pi}e^{\varepsilon\text{cost}}\cos(\varepsilon\text{sin}t)dt\le 2\pi e^{\varepsilon}\end{aligned}$$

届于 $\varepsilon>0$ 任意小, 上述结果小于等于 2π, 下证这个积分同时大于等于 2π, 即证:

$$\int_0^{2\pi}e^{\varepsilon\text{cost}}\cos(\varepsilon\text{sin}t)dt\ge 2\pi$$

有:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}e^{\varepsilon\text{cost}}\cos(\varepsilon\text{sint})dt\\=&\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\varepsilon\text{cos}x}\cos(\varepsilon\text{sin}t)dt\\\ge&\frac{2\pi\text{cos}\varepsilon}{e^{\varepsilon}}\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon\to 0$, $\frac{\text{cos}\varepsilon}{e^\varepsilon}\to 1$, 故上式大于等于 2π, 结论得证, 进而欲求即 2π.

4.3.3 问题

1. 设 P,Q 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续偏导数, 用 Γ 表示以任意点 (x_0,y_0) 为中心, 以任意正数 r 为半径的上半圆周. 如果

$$\int_{\Gamma}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

证明: 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 有 $P=0,\frac{\partial Q}{\partial x}=0$.

证明

因为 Γ 是任意的上半圆周, 取 Γ_1 为以 (x_1,y_1) 为中心, 半径为 r 的上半圆周, 并取 Γ_2 为以 (x_1+2r,y_1+2r) 为中心, 半径为 r 的上半圆周, Γ_3 为以 (x_1+r,y_1+r) 为中心, 半径为 $2r$ 的上半圆周. 记 $\Gamma_i(i=1,2,3)$ 围成的图形为 D, 因为:

$$\int_{\Gamma_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

$$\int_{\Gamma_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

$$\int_{-\Gamma_3}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

且 P,Q 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续偏导数, 根据 Green 公式即得:

$$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0$$

显然 D 是单连通区域, 从而在 D 中有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 同时因为 (x_1, y_1) 和 r 的选取都是任意的, 故知在 $\mathbb{R}^2$ 上有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 且对任意曲线 Θ 都有

$$\int_\Theta Pdx + Qdy = 0$$

选取线段 $L : \{(x,y)|a \le x \le b, y = c\}$, 知

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b P(x,c)dx = 0$$

因为 a,b,c 都是任意的, 若 $\exists x_2(P(x_2,c) \neq 0)$, 不妨设 $P(x_2,c) > 0$, 根据 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 的存在性知 P 必关于 x 连续, 进而 $\exists \delta' > 0 \forall x \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta)(P(x,c) > 0)$, 从而至少有 $\int_{x_2-\frac{1}{2}\delta}^{x_2+\frac{1}{2}\delta} P(x,c)dx > 0$, 取 $a = x_2 - \frac{1}{2}\delta, b = x_2 + \frac{1}{2}\delta$ 即可推出矛盾, 从而 $\forall x \forall c(P(x,c) = 0)$, 即得 $P \equiv 0$, 进而自然有 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$, 又因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 从而 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$.

2. 证明平面上的 Green 第二公式:

$$\iint\limits_G \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdy = \int_\Gamma \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix} ds$$

这里 Γ 是光滑的封闭曲线, G 是由 Γ 所围成的区域, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$ 是 u,v 沿 Γ 的外法线方向的方向导数, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

证明

知 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix} ds \\
=& \int_\Gamma (v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}})ds \\
=& \int_\Gamma (u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y})dx + (v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x})dy \\
=& \iint\limits_G (v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy \\
=& \iint\limits_G \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdy
\end{aligned}$$

3. 设 Γ 和 G 如第 2 题所示. 如果 u 是 G 上的调和函数, 即 $\Delta u = 0$ 在 G 上成立, 证明: 对任意的 $(x_0, y_0) \in G$, 有等式

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma (u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds$$

其中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ 是 (x_0, y_0) 与 Γ 上动点 (x,y) 的距离.

证明

取 $v=\ln r$, 知 $\Delta v=0$. 挖空: 取 $\boldsymbol{x}(x_0,y_0)$ 的一个邻域 $B(\boldsymbol{x};\varepsilon)$, 并记 $\partial B(\boldsymbol{x};\varepsilon)=\Gamma'$, 记 G 挖去 $B(\boldsymbol{x};\varepsilon)$ 后的区域为 G', 进而知:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds\\=&\frac{1}{2\pi}(\int_{\partial G'}+\int_{\Gamma'})(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds\end{aligned}$$

知 v 在 G' 中可微, 从而有

$$\int_{\partial G'}(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds=\iint\limits_{G'}\begin{vmatrix}\Delta u&\Delta v\\u&v\end{vmatrix}dxdy=0$$

从而知:

$$\frac{1}{2\pi}(\int_{\partial G'}+\int_{\Gamma'})(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'}(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds$$

对 Γ' 而言, $n=r$, 进而 $\frac{\partial\ln r}{\partial n}|_{r=\varepsilon}=\frac{\partial\ln r}{\partial r}|_{r=\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}$. 进而:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'}(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds\\=&\frac{1}{2\pi}(\int_{\Gamma'}u\frac{\partial\ln r}{\partial n}ds-\int_{\Gamma'}\ln r\frac{\partial u}{\partial n}ds)\\=&\frac{1}{2\pi}(\int_{\Gamma'}\frac{u}{\varepsilon}ds-\ln\varepsilon\cdot\int_{\Gamma'}\frac{\partial u}{\partial n}ds)\\=&\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\Gamma'}uds\end{aligned}$$

根据中值定理, 当 $\varepsilon\to0,\int_{\Gamma'}uds\to2\pi\varepsilon u(x_0,y_0)$, 进而有

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\Gamma'}uds\to u(x_0,y_0)$$

从而题式得证.

4. 设 G 是 $\mathbb{R}^2$ 中的区域, u 是 G 中的调和函数, Γ 是以 (x_0,y_0) 为中心、以 R 为半径位于 G 中的任意一个圆周, 证明:

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\Gamma}u(x,y)ds$$

证明

此时 Γ 的单位外法向量即为径向, 从而沿用 **3.** 的记号, 知 $\frac{\partial\ln r}{\partial n}|_{r=R}=\frac{\partial\ln r}{\partial r}|_{r=R}=\frac{1}{R}$. 套用 **3.** 的式子有:

$$\begin{aligned}u(x_0,y_0)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n})ds\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}(\frac{u}{R})ds=\frac{1}{2\pi R}\int_{\Gamma}uds\end{aligned}$$

4.4 补充: 裴礼文上的曲线积分与 Green 公式内容

7.3.1 计算积分 $\int_{ABC}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, 其中 ABC 为三点 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0)$ 连成的折线.

解

$$\begin{aligned}&\int_{ABC}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}\\=&\int_{AB}\frac{dx+dy}{x+y}+\int_{BC}\frac{dx+dy}{y-x}\\=&\int_1^0 0dt+\int_0^{-1}2dt=-2\end{aligned}$$

7.3.2 设 C 为对称于坐标轴的光滑曲线, 证明:

$$\oint_C (x^3y+e^y)dx+(xy^3+xe^y-\cos x)dy=0$$

证明

记 C 所围成的区域为 C', 由 Green 公式:

$$\oint_C (x^3y+e^y)dx+(xy^3+xe^y-\cos x)dy=\iint_{C'}(y^3-x^3+\sin x)dxdy$$

因为 C' 关于坐标轴对称, 由被积函数的对称性可知欲求为 0.

7.3.3 计算曲线积分 $\int_{L^+} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, 其中 L^+:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2=Rx\end{cases}\qquad (R>0,z\geq 0)$$

L^+ 的指向为顺时针方向.

解

用球坐标换元: $x=R\sin\theta\cos\varphi,y=R\sin\theta\sin\varphi,z=R\cos\theta$, 知 $R^2\sin^2\theta=R^2\sin\theta\cos\varphi$, 进而可得 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$, 从而 $x=R\sin^2\theta,y=R\sin\theta\cos\theta,z=R\cos\theta$, 有:

$$\begin{aligned}&\int_{L^+} y^2dx+z^2dy+x^2dz\\=&R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^3\theta\cos^3\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta-\sin^5\theta)d\theta=\frac{3\pi}{16}-\frac{9}{20}\end{aligned}$$

7.3.4 计算曲线积分

$$\int_C (\frac{xy}{ab}+\frac{\sqrt{2}yz}{b\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{2}zx}{a\sqrt{a^2+b^2}})ds$$

其中 C 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2z^2}{a^2+b^2}=1(x>0,y>0,z>0)$ 与 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 的交线 $(a,b>0)$.

解

利用截面椭圆: 联立 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2z^2}{a^2+b^2}=1$ 与 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, 消 y 得 $(\frac{2x}{a}-1)^2+(\frac{2z}{\sqrt{a^2+b^2}})^2=1$. 设 $\frac{2x}{a}-1=r\cos\theta,\frac{2z}{\sqrt{a^2+b^2}}=r\sin\theta$, 代入知 $r=1,x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta),y=\frac{b}{2}(1-\cos\theta),z=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\sin\theta$.

进而:

$$
\begin{aligned}
&\int_C \left(\frac{xy}{ab}+\frac{\sqrt{2}yz}{b\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{2}zx}{a\sqrt{a^2+b^2}}\right)ds \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}(1-\cos^2\theta)+\frac{\sqrt{2}}{4}(\sin\theta-\sin\theta\cos\theta)+\frac{\sqrt{2}}{4}(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)\right)\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}d\theta \\
=&\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)d\theta=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{32}(\pi+2\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

7.3.5 计算圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 被曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所截部分的面积.

解

注意到对称性, 只需计算第一卦限的部分. 记题述两曲面在第一卦限所截出的曲线为 L, 知 L 在 xoy 面上的投影即曲线 $L':x^2+y^2=Rx$, 在 L' 上取 ds, 知 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 并用极坐标换元: $x=\frac{R}{2}\cos\theta+\frac{R}{2},y=\frac{R}{2}\sin\theta,\theta\in[0,\pi]$, 有:

$$
\begin{aligned}
\int_{L'}zds&=\int_{L'}\sqrt{R^2-x^2-y^2}ds \\
&=\int_0^{\pi}\sqrt{R^2-(\frac{R}{2}\cos\theta+\frac{R}{2})^2-(\frac{R}{2}\sin\theta)^2}\cdot\sqrt{(-\frac{R}{2}\sin\theta)^2+(\frac{R}{2}\cos\theta)^2}d\theta \\
&=\frac{\sqrt{2}}{4}R^2\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}R^2\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=R^2
\end{aligned}
$$

从而欲求即为上结果的四倍, 也即 $4R^2$.

7.3.6 设在力场 $\boldsymbol{F}=(x+2y+4,4x-2y,3x+z)$ 中今有单位质量 M 沿椭圆 $C:(3x+2y-5)^2+(x-y+1)^2=a^2,z=4(a>0)$ 移动一周 [从 z 轴 $+\infty$ 点看去, 为逆时针方向], 试求力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功.

解

首先简化椭圆, 换元: $u=3x+2y-5,v=x-y+1$, 知 $\boldsymbol{F}=(\frac{4}{5}u-\frac{4}{5}v+\frac{39}{5},\frac{2}{5}u+\frac{14}{5}v-\frac{4}{5},\frac{3}{5}u+\frac{6}{5}v+\frac{29}{5}),C:u^2+v^2=a^2,z=4$. 再用极坐标换元: $u=a\cos\theta,v=a\sin\theta$, 知:

$$
\begin{aligned}
\int_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}&=\int_0^{2\pi}(\frac{4}{5}a\cos\theta-\frac{4}{5}a\sin\theta+\frac{39}{5})\cdot(-a\sin\theta)+(\frac{2}{5}a\cos\theta+\frac{14}{5}a\sin\theta-\frac{4}{5})\cdot a\cos\theta d\theta \\
&=a^2\int_0^{2\pi}(\sin2\theta-\frac{1}{5}\cos2\theta+\frac{1}{5}-\frac{39}{5}\sin\theta-\frac{4}{5}\cos\theta)d\theta=\frac{2}{5}\pi a^2
\end{aligned}
$$

从而欲求即为 $\frac{2}{5}\pi a^2$.

7.3.7 计算双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围的面积 $(a>0)$.

解

届于对称性, 只需考虑第一象限即可, 用极坐标换元可知曲线为 $r=a\sqrt{|\cos2\theta|}$, 记换元前后第一象限部分的区域分别为 C,C', 有:

$$
\begin{aligned}
\iint_C dxdy=\iint_{C'}rdrd\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt{|\cos2\theta|}}rdr \\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2|\cos2\theta|d\theta=\frac{a^2}{2}
\end{aligned}
$$

从而欲求即为上结果的 4 倍, 也即 $2a^2$.

•**7.3.8** 一个半径为 r 的圆, 沿着半径为 R 的定圆之圆周外滚动 (而不滑动) 时, 由动圆上一点所描绘出来的曲线称为外摆线. 假定比值 $\frac{R}{r}=n$ 是整数 $(n\geq 1)$, 求外摆线所界的面积.

7.3.9 上题当小圆在大圆内壁滚动 (不滑动), 小圆上一点的轨迹称为内摆线. 设 $\frac{R}{r}=n$ 为整数 $(n\geq 2)$, 求内摆线所围的面积.

7.3.10 求线积分 $\int\limits_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ 在下列两种曲线 C 的情况下的值.

(1) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$;

解

记线积分为 $F=\int_C Pdx+Qdy$, 并记 C 围成的区域为 D. 容易发现 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 且 P,Q 在 D 内均可微, 故由 Green 公式可知原式为 0.

(2) $|x|+|y|=1$. 方向均为逆时针.

解

在 D 内挖去 $\overline{B}(0;\varepsilon)$, 在 $D\backslash\overline{B}(0;\varepsilon)$ 内对积分用 Green 公式知其值为 0, 从而有:

$$\begin{aligned}\int\limits_C Pdx+Qdy&=\int\limits_{\overline{B}(0;\varepsilon)}\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\\&=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon\sin\theta}{\varepsilon^2}\cdot(-\varepsilon\sin\theta)+\frac{\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon\cos\theta d\theta\\&=2\pi\end{aligned}$$

从而欲求即为 2π.

7.3.11 求常数 α, 使给定的积分恒为零:

(1) $\oint\limits_C\frac{xdx-\alpha ydy}{x^2+y^2}=0$, 其中 C 是平面上任一简单闭曲线.

解

记积分为 $F=\oint\limits_C Pdx+Qdy$, 当 C 围成的区域不包含原点时, 令 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 解得 $\alpha=-1$, 验知 C 围成的区域包含原点时该积分依旧为 0, 从而 $\alpha=-1$.

•(2) $\oint\limits_C\frac{x}{y}r^\alpha dx-\frac{x^2}{y^2}r^\alpha dy=0(r=\sqrt{x^2+y^2})$. 其中 C 是上半平面任一光滑闭曲线.

解

由题意 C 围成的区域必不与 $y=0$ 相交, 从而令 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 有:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\alpha xy(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}-\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}\\\frac{\partial Q}{\partial x}&=\end{aligned}$$

7.3.12 计算开口弧段上的曲线积分:

(1) $I=\int\limits_{\widehat{AB}}(y^3+x)dx-(x^3+y)dy$, 其中 $A=(0,0),B=(a,0),\widehat{AB}:x^2+y^2=ax(y\geq 0)$.

解

当 $a>0$ 时, 补线 $AB: y=0, 0\le x\le a$, 知 $\int\limits_{AB}(y^3+x)dx-(x^3+y)dy=\frac{1}{2}a^2$, 进而考虑 $\widehat{AB}$ 和 AB 围成的半圆面 D, 在 D 上考虑 Green 公式并换元: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, 有:

$$I-\frac{1}{2}a^2=-\iint\limits_D(-3x^2-3y^2)dxdy=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}(-3r^3)dr$$
$$=\frac{3}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{4}a^4\cdot\frac{3}{16}=\frac{9}{64}a^4$$

从而欲求即 $\frac{1}{2}a^2+\frac{9}{64}a^4$. 当 $a<0$ 时, 操作同上, 可得答案为 $\frac{1}{2}a^2-\frac{9}{64}a^4$.

(2) $K=\int_{C^+}(-2xe^{-x^2}\sin y)dx+(e^{-x^2}\cos y+x^4)dy$. 其中 C^+ 为从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的半圆 $y=\sqrt{1-x^2}(-1\le x\le 1)$.

解

补连接 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 的线段 L, 知 $\int\limits_L Pdx+Qdy=0$. 记 C^+ 和 L 所围成的区域为 D, 由 Green 公式有:

$$K=\iint\limits_D 3x^2dxdy=\int_0^1 dr\int_0^{\pi}3r^3\cos^2\theta d\theta=\frac{3\pi}{8}$$

(3) $L=\int_{\widehat{OA}}(y^2-\cos y)dx+x\sin ydy$. 其中 $\widehat{OA}$ 是从原点 $O(0,0)$ 到 $A(\pi,0)$ 的弧: $y=\sin x$.

解

补线 AO, 知 $\int\limits_{AO}Pdx+Qdy=\pi$, 记 $\widehat{OA}$ 与 AO 围成的区域为 D, 由 Green 公式有:

$$L=\iint\limits_D(-2y)dxdy=-2\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}ydy=-\frac{1}{2}$$

Chapter 5

曲面积分

5.1 曲面的面积

5.1.1 练习题

计算下列曲面的面积:

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 截下的部分.

解

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=r$, 有:

$$
\begin{aligned}
&\Delta=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,2\cos\theta]\\
&E=(\frac{\partial x}{\partial r})^2+(\frac{\partial y}{\partial r})^2+(\frac{\partial z}{\partial r})^2=2\\
&G=(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2+(\frac{\partial y}{\partial \theta})^2+(\frac{\partial z}{\partial \theta})^2=r^2\\
&F=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta}=0\\
&\int\limits_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}drd\theta=\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

(2) 圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下的部分.

解

考虑柱面系: $x=a\cos\theta, z=a\sin\theta, y=y$, 有:

$$
\begin{aligned}
&\Delta=[0,2\pi]\times[-a|\sin\theta|,a|\sin\theta|]\\
&E=a^2\\
&G=1\\
&F=0\\
&\int\limits_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}drd\theta=8a^2
\end{aligned}
$$

(3) 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于平面 $x+z=0$ 和 $x-z=0$ 之间的部分.

解

考虑柱面系:$x=a\cos\theta,y=a\sin\theta,z=z$, 有:

$$\Delta=[0,2\pi]\times[-a|\cos\theta|,a|\cos\theta|]$$
$$E=a^2$$
$$G=1$$
$$F=0$$
$$\int\limits_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}drd\theta=8a^2$$

•(不知错哪)(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b\le a)$$

所截下的部分.

解

考虑球面系:$x=a\sin\theta\cos\varphi,y=a\sin\theta\sin\varphi,z=a\cos\theta$, 由对称性考虑上半面, 有:

$$\Delta=[0,2\pi]\times[0,\arcsin(\sqrt{\frac{b^2}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}})]$$
$$E=a^2$$
$$G=a^2\sin^2\theta$$
$$F=0$$
$$2\int\limits_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}d\theta d\varphi=2a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{(a^2-b^2)\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$
$$=4a^2\sqrt{a^2-b^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}=8a^2\arcsin\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

•(算麻了, 日后再来)(5) 马鞍面 $az=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下的部分.

解

由对称性, 考虑上半面: $x=\sqrt{az}(\sec\theta-\tan\theta),y=\sqrt{az}(\sec\theta+\tan\theta),z=z$, 有:

$$\Delta=[0,2\pi]\times[0,\frac{a}{2\sec^2\theta+2\tan^2\theta}]$$
$$E=\frac{a}{2z}(\sec^2\theta+\tan^2\theta)+1$$
$$G=2az(\sec^2\theta\tan^2\theta+\sec^4\theta)$$
$$F=2a\sec^2\theta\tan\theta$$
$$2\int\limits_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}dzd\theta=$$

(6) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 被柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 截下的部分.

解　由对称性, 考虑上半面: $x=\sqrt{2az}\mathrm{cos}\theta, y=\sqrt{2az}\mathrm{sin}\theta, z=z$, 有:

$$\begin{aligned}&\Delta=[0,2\pi]\times[0,a\mathrm{sin}2\theta]\\&E=\frac{a}{2z}+1\\&G=0\\&F=0\end{aligned}$$

5.2 第一型曲面积分

5.2.1 练习题

计算下列曲面积分:

(1) $\int_{\Sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, Σ 是四面体 $x+y+z\le 1(x,y,z\ge 0)$ 的边界;

解

将四面体分为四个面分别计算:

$$\int_{\Sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}=(\int_{\Sigma_1}+\int_{\Sigma_2}+\int_{\Sigma_3}+\int_{\Sigma_4})\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}=(\sqrt{3}-1)\mathrm{ln}2+\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$$

(2) $\int_{\Sigma}|xyz|d\sigma, \Sigma: z=x^2+y^2, z\le 1$;

解

利用对称性并用柱面坐标换元: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=r^2$

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma}|xyz|d\sigma\\=&4\int_{\Sigma'}xyzd\sigma\\=&4\int_0^1dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^4\sin\theta\cos\theta\sqrt{r^2(1+4r^2)}d\theta\\=&4\int_0^1r^4\sqrt{r^2(1+4r^2)}dr\\=&2\int_0^1x^2\sqrt{1+4x}dx\\=&\frac{1}{16}\int_1^{\sqrt{5}}t^2(t^2-1)^2dt=\frac{125\sqrt{5}-1}{210}\end{aligned}$$

(3) $\int_{\Sigma}(xy+yz+xz)d\sigma, \Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 截下的部分.

解

用柱面系并根据对称性: $x=z\mathrm{cos}\theta, y=z\mathrm{sin}\theta, z=z$, 有:

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma}(xy+yz+zx)d\sigma\\=&\int_{\Sigma}zxd\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}z^3\cos\theta dz\\=&4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}\end{aligned}$$

5.2.2 问题

1. 设 Σ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 证明 Poisson 公式:

$$\int_\Sigma f(ax_by+c)d\sigma = 2\pi\int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)dt$$

证明

取平面 $ax+by+cz=0$ 与 z 轴正向夹角为锐角的单位法向量为新的 z 轴单位向量, 记之为 t 轴, 用 Gram-Schemit 正交化后生成新的空间直角坐标系 uvt, 知 $\Sigma: u^2+v^2+t^2=1$,

$$\int_\Sigma f(ax+by+cz)d\sigma = \int_\Sigma f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)d\sigma$$

用球坐标换元: $u=\sin\theta\cos\varphi, v=\sin\theta\sin\varphi, t=\cos\theta$, 有:

$$\int_\Sigma f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)d\sigma = \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)\sin\theta d\varphi = 2\pi\int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)dt$$

2. 设 $\Sigma(t)$ 是平面 $x+y+z=t$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分, 且

$$F(x,y,z)=1-(x^2+y^2+z^2)$$

求证: 当 $|t|\le\sqrt{3}$ 时, 有

$$\int_{\Sigma(t)} F(x,y,z)d\sigma = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$$

证明

沿 $x+y+z=t$ 指向 z 轴正方向的单位法向量作新坐标系的 z 轴单位向量, 记之为 w 轴, 用 Gram-Schemit 单位正交化可知变换矩阵为 $P=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ 进而换元:

$$\begin{cases} u=\frac{2}{\sqrt{6}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y-\frac{1}{\sqrt{6}}z \\ v=\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}z \\ w=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z \end{cases}$$

因为 P 是正交阵, 所以 $x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2$, 易知 $\Sigma(t)$ 在新坐标系下即为区域 $\Sigma'(t)$: $\begin{cases} u^2+v^2\le 1-\frac{t^2}{3} \\ w=\frac{t}{\sqrt{3}} \end{cases}$ 进而有:

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma(t)} F(x,y,z)d\sigma \\ =&\int_{\Sigma'(t)} 1-(u^2+v^2+w^2)d\sigma \\ =&\int_{\Sigma'(t)} (1-\frac{t^2}{3}-(u^2+v^2))d\sigma \\ =&\pi(1-\frac{t^2}{3})^2-\int_{u^2+v^2\le 1-\frac{t^2}{3}}(u^2+v^2)d\sigma \\ =&\frac{\pi}{2}(1-\frac{t^2}{3})^2 \end{aligned}$$

3. 设 $f(t)$ 在 $|t|<\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续, 证明:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} f(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})dxdydz=\frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)dt$$

证明

将平面 $ax+by+cz=0$ 朝向 z 轴正方向的单位法向量作新坐标系的 z 轴单位向量, 记之为 w 轴, 即 $w=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, 用 Gram-Schemit 方法扩张成新坐标系, 基向量分别为 u,v,w. 因为变换矩阵是正交阵, 故 $x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2$, 进而有:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} f(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})dxdydz=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leq 1} f(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}})dudvdw$$

在新坐标系下用球坐标换元: $u=r\sin\theta\cos\varphi, v=r\sin\theta\sin\varphi, w=r\cos\theta$, 有:

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leq 1} f(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}})dudvdw\\ =&\int_0^1 dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta f(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}r\cos\theta}{r})d\varphi\\ =&\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta)\sin\theta d\theta\\ =&\frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)dt\end{aligned}$$

5.3 对曲线积分, 曲面积分及三个公式的整理

5.3.1 第一型曲线积分

第一型曲线积分的核心问题在于求质量不均匀的钢丝的重量. 给出密度函数 $\rho(x,y,z)$ 及一条曲线 $L: x=x(t), y=y(t), z=z(t), t\in[\alpha,\beta]$, 如果将这条曲线分的够细, 在其上的每一小段密度就可以近似看做是均匀的. 不妨记 $[\alpha,\beta]$ 被分成了 $n+1$ 段: $[\alpha,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_n,\beta]$, 在每一段中都取出一个代表元 ξ_i, 这便对应将曲线 L 分成了 $n+1$ 段, 每段上取代表元 $(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))$, 这一段上的密度就可以近似看做 $\rho(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))$, 从而它的质量就是 $\rho(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cdot\Delta s$, 这里 Δs 代表这一段曲线的长, 即

$$\Delta s=\sqrt{(x(t_{i+1})-x(t_i))^2+(y(t_{i+1})-y(t_i))^2+(z(t_{i+1})-z(t_i))^2}$$

根据中值定理 (这里不妨就假设 L 可微), 有:

$$\begin{aligned}x(t_{i+1})-x(t_i)&=x'(\eta_{1i})(t_{i+1}-t_i)\\ y(t_{i+1})-y(t_i)&=y'(\eta_{2i})(t_{i+1}-t_i)\\ z(t_{i+1})-z(t_i)&=z'(\eta_{3i})(t_{i+1}-t_i)\end{aligned}$$

, 从而

$$\Delta s_i=(t_{i+1}-t_i)\sqrt{(x'(\eta_{1i}))^2+(y'(\eta_{2i}))^2+(z'(\eta_{3i}))^2}$$

进而这一段的质量可以表示为

$$\rho(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\sqrt{(x'(\eta_{1i}))^2+(y'(\eta_{2i}))^2+(z'(\eta_{3i}))^2}(t_{i+1}-t_i)$$

对 i 取极限, 即加细分划该区域, 记对应的参数是 λ, 这样所得到的极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_i \rho(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\sqrt{(x'(\eta_{1i}))^2+(y'(\eta_{2i}))^2+(z'(\eta_{3i}))^2}(t_{i+1}-t_i)$$

如果存在且不随先前选取的标志点的变化而变化, 就是 ρ 在 L 上的积分, 记作 $\int_L \rho(x,y,z)ds$. 计算上, 通常直接代入曲线的参数方程.

5.3.2 第二型曲线积分

第二型曲线积分的核心问题在于求变力沿曲线做的功. 给出力函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 及一条曲线 $L: x=x(t),y=y(t),z=z(t),t\in[\alpha,\beta]$, 同样将这段曲线分的足够细, 可以认为力函数在这一段上的力是恒力, 同时这一段曲线也可以视为直线. 量化来看, 不妨记 $[\alpha,\beta]$ 被分成了 $n+1$ 段: $[\alpha,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_n,\beta]$, 在每一段中都取出一个代表元 ξ_i, 这便对应将曲线 L 分成了 $n+1$ 段, 每段上取代表元 $(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))$, 这一段上的力就可以近似看做 $\boldsymbol{F}(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))$, 这一段上的曲线也可以近似看做连接 $(x(t_i),y(t_i),z(t_i))$
和 $(x(t_{i+1}),y(t_{i+1}),z(t_{i+1}))$ 的直线, 记这一线段的长是

$$\Delta l_i=\sqrt{(x(t_{i+1})-x(t_i))^2+(y(t_{i+1})-y(t_i))^2+(z(t_{i+1})-z(t_i))^2},$$

可得它的方向向量为

$$\cos\alpha=\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\Delta l_i},\cos\beta=\frac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{\Delta l_i},\cos\gamma=\frac{z(t_{i+1})-z(t_i)}{\Delta l_i}$$

进而力沿该线段做的功即

$$\boldsymbol{F}(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i)))\cdot(\Delta l_i\cdot\cos\alpha,\Delta l_i\cdot\cos\beta,\Delta l_i\cdot\cos\gamma)$$

记

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

则上式可另写成:

$$(P(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cos\alpha+Q(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cos\beta+R(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cos\gamma)\Delta l_i$$

从而总体的功即为它们求和:

$$\sum_i(P(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cos\alpha+Q(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cos\beta+R(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cos\gamma)\Delta l_i$$

同样加细分划, 记对应的参数为 λ, 上式的极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_i(P(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cos\alpha+Q(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cos\beta+R(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cos\gamma)\Delta l_i$$

如果存在且不随先前选取的标志点的变化而变化, 就是 $\boldsymbol{F}$ 沿 L 的积分, 按上式的写法记作

$$\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dl$$

因为功是定向的, 在此处需要指定 L 的方向, 是从 α 到 β 还是反之. 上式其实是第一类曲线积分和第二类曲线积分之间的转换公式, 注意到曲线微分的径向量就是

$$d\boldsymbol{l} = (\cos\alpha dl, \cos\beta dl, \cos\gamma dl)$$

上式可进一步写做真正的第二型曲线积分:

$$\int\limits_L \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

同时, 注意到 $\cos\alpha dl = dx, \cos\beta dl = dy, \cos\gamma dl = dz$, 第二型曲面积分还可以写为:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$$

同样, 考虑 $\cos\alpha = \frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\Delta l_i}, \cos\beta = \frac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{\Delta l_i}, \cos\gamma = \frac{z(t_{i+1})-z(t_i)}{\Delta l_i}$, 通分有

$$\cos\alpha\Delta l_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$$
$$\cos\beta\Delta l_i = y(t_{i+1}) - y(t_i)$$
$$\cos\gamma\Delta l_i = z(t_{i+1}) - z(t_i)$$

两边同时用中值定理:

$$\cos\alpha\Delta l_i = x'(\eta_{1i})(t_{i+1} - t_i)$$
$$\cos\beta\Delta l_i = y'(\eta_{2i})(t_{i+1} - t_i)$$
$$\cos\gamma\Delta l_i = z'(\eta_{3i})(t_{i+1} - t_i)$$

可得上述极限的另一种表示:

$$\lim_{\lambda\to 0}(Px'(\eta_{1i}) + Qy'(\eta_{2i}) + Rz'(\eta_{3i}))(t_{i+1} - t_i)$$

这个极限写做积分就是如下在计算上应用更广的形式:

$$\int_\alpha^\beta (P(x, y, z) \cdot x'(t) + Q(x, y, z) \cdot y'(t) + R(x, y, z) \cdot z'(t))dt$$

5.3.3 第一型曲面积分

第一型曲面积分解决的核心问题是求解密度不均匀的曲面的质量. 设密度函数 $\rho(x, y, z)$ 及曲面 $S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$. 与第一型曲线积分的思路类似, 考虑将 S 分成足够小的曲面片, 每个曲面片上的密度就可以近似的看作是均匀的定值. 为了讨论方便, 也出于曲面定义本身的允许, 不妨就设 $(u, v) \in [0, 1]^2$, 用 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 和 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 将 $[0, 1]$ 分成 $n + 1$ 段, 进而 $[0, 1]^2$ 被分成若干小片, 每一小片可被表示为 $[u_i, u_{i+1}] \times [v_i, v_{i+1}]$, 下面的问题就是如何求出这一小片映到曲面上的面积. 根据示意图, 在对 $[0, 1]^2$ 作分划的时候, 在曲面上相应产生了一系列的 u 曲线和 v 曲线, 它们交织着将曲面分划成一个个曲面片. 而其中每一个曲面片的面积, 可以近似看做沿 u 曲线和 v 曲线的切向量所围成的平行四边形面积, 这恰是它们叉乘的模, 进而这个问题有了头绪——

沿 u 曲线坐标的变动是:

$$(x(u_i, v), y(u_i, v), z(u_i, v)) \to (x(u_{i+1}, v), y(u_{i+1}, v), z(u_{i+1}, v))$$

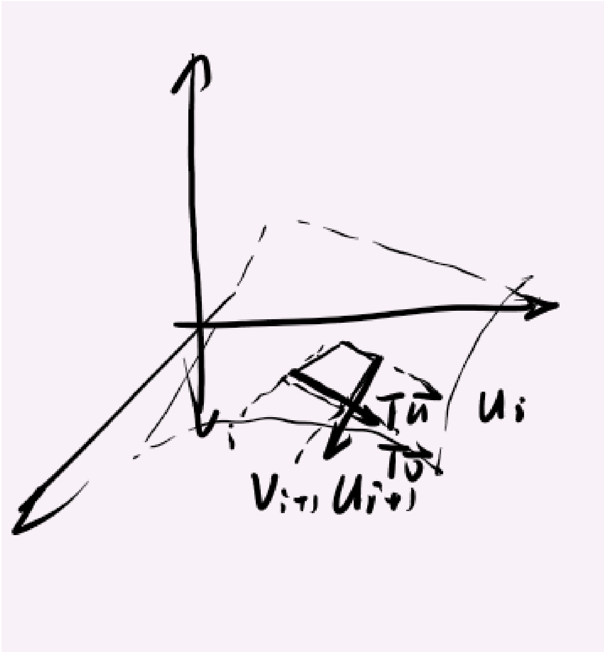


图 5.1: u 曲线和 v 曲线的切向量构成平行四边形

进而连接 u 曲线上这两点的小向量为:

$$(x(u_{i+1},v)-x(u_i,v),y(u_{i+1},v)-y(u_i,v),z(u_{i+1},v)-z(u_i,v))$$

根据中值定理, 有如下的三个式子:

$$\begin{aligned}
x(u_{i+1},v)-x(u_i,v)&=\frac{\partial x}{\partial u}(\alpha_{1i},v)(u_{i+1}-u_i)\\
y(u_{i+1},v)-y(u_i,v)&=\frac{\partial y}{\partial u}(\alpha_{2i},v)(u_{i+1}-u_i)\\
z(u_{i+1},v)-z(u_i,v)&=\frac{\partial z}{\partial u}(\alpha_{3i},v)(u_{i+1}-u_i)
\end{aligned}$$

记 $\Delta u_i=u_{i+1}-u_i$, 则上述小向量可以近似写成切向量的数乘形式:

$$\begin{aligned}
&(x(u_{i+1},v)-x(u_i,v),y(u_{i+1},v)-y(u_i,v),z(u_{i+1},v)-z(u_i,v))\\
=&\Delta u_i(\frac{\partial x}{\partial u}(\alpha_{1i},v),\frac{\partial y}{\partial u}(\alpha_{2i},v),\frac{\partial z}{\partial u}(\alpha_{3i},v))=:\boldsymbol{r}_u
\end{aligned}$$

同理, 沿 v 曲线也可以写出另一个近似:

$$\begin{aligned}
&(x(u,v_{i+1})-x(u,v_i),y(u,v_{i+1})-y(u,v_i),z(u,v_{i+1})-z(u,v_i))\\
=&\Delta v_i(\frac{\partial x}{\partial v}(u,\beta_{1i}),\frac{\partial y}{\partial v}(u,\beta_{2i}),\frac{\partial z}{\partial v}(u,\beta_{3i}))=:\boldsymbol{r}_v
\end{aligned}$$

从而该曲面片的面积就可以近似用 $\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|$ 来表示. 因为取了模, 所以叉乘的顺序无关紧要, 有:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\\
=&\Delta u_i\Delta v_i\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\\
=&\Delta u_i\Delta v_i(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},-\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})
\end{aligned}$$

从而

$$\| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \| = \Delta u_i \Delta v_i \sqrt{(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2}$$

注意这里最后根号下的乘积依旧是关于 (u,v) 的函数, 为了简便就省掉了 (u,v). 按照书上的记号, 这可以简写为

$$\Delta u_i \Delta v_i \sqrt{EG - F^2}$$

但今日我再添一笔[1], 不妨记成

$$\Delta u_i \Delta v_i \sqrt{EG - F^2}(u_i, v_i)$$

以提示这后面的根号乘积依旧是关于 (u,v) 的函数. 进而单块曲面片的面积即为上式, 取小区间 $[u_i, u_{i+1}] \times [v_i, v_{i+1}]$ 的一个代表元 $\boldsymbol{t}_i$, 则这片曲面的质量就是 $\rho(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i))\sqrt{EG - F^2}\Delta u_i \Delta v_i$, 从而整体的质量就是对这若干个曲面片求和, 即

$$\sum_i \rho(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i))\sqrt{EG - F^2}(u_i, v_i)\Delta u_i \Delta v_i$$

同样加细分划, 记对应的参数为 λ, 若极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_i \rho(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i))\sqrt{EG - F^2}(u_i, v_i)\Delta u_i \Delta v_i$$

存在, 且它的值不随前面所选的诸标志点的变化而变化, 就是 ρ 在 S 上的第一型曲面积分. 因为这恰是二重积分的形式, 不妨就将记法沿用下来:

$$\iint\limits_{[0,1]^2} \rho(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}(u,v)dudv$$

一般而言, 也是用这个式子计算第一型曲面积分.

5.3.4 第二型曲面积分

第二型曲面积分的核心问题是求解流体流经曲面的流量. 记流体函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 及曲面 $S: x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, 由示意图, 流量亦分正负两种情况: 流进曲面或流出曲面, 而正负的判定主要通过流体函数与曲面法向量的夹角大小实现. 根据流量的定义, 自然而然便可引出点乘在这里的应用.

同第一型曲面积分的思路, 如果将曲面分成足够小的曲面片, 流体在每个小曲面片上就可看做是定常流, 也即方向和大小都不变的流体. 设 $[u,v] \in [0,1]^2$, 并记 $u_1, \cdots, u_n$ 和 $v_1, \cdots, v_n$ 都将 $[0,1]$ 分成 $n+1$ 段, 这样形成的若干个小矩形 $[u_i, u_{i+1}] \times [v_i, v_{i+1}]$ 映到曲面上, 自然便将曲面分割成了若干曲面片. 在小矩形中取代表元 $\boldsymbol{t}_i = (t_i^1, t_i^2)$, 这便相应在曲面片中取到了代表元 $(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i))$, 进而这个小曲面片中的流体函数可以被定常流 $\boldsymbol{F}(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i))$ 代替. 根据第一型曲面积分中的讨论, 这一小矩形对应的曲面片的面积可近似看做 $\Delta u_i \Delta v_i \sqrt{EG - F^2}(u_i, v_i)$, 下面开始计算流量:

根据先前的讨论并沿用先前的符号, 知道 $\boldsymbol{r}_u$ 是连接 $(x(u_i, v), y(u_i, v), z(u_i, v))$ 和 $(x(u_{i+1}, v), y(u_{i+1}, v), z(u_{i+1}, v))$ 的有向线段, 它可以近似看做曲面在这一段上某点的切向量的数乘形式, 即

$$\boldsymbol{r}_u = \Delta u_i (\frac{\partial x}{\partial u}(\alpha_{1i}, v), \frac{\partial y}{\partial u}(\alpha_{2i}, v), \frac{\partial z}{\partial u}(\alpha_{3i}, v))$$

同样有

$$\boldsymbol{r}_v = \Delta v_i (\frac{\partial x}{\partial v}(u, \beta_{1i}), \frac{\partial y}{\partial v}(u, \beta_{2i}), \frac{\partial z}{\partial v}(u, \beta_{3i}))$$

[1] 原文见 [7]

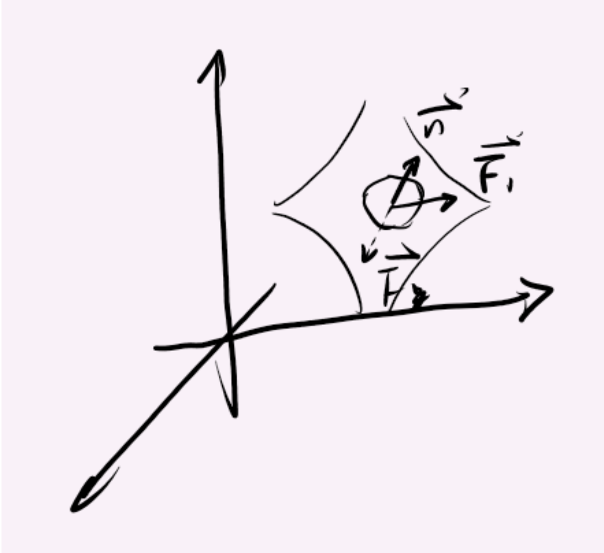


图 5.2: $\boldsymbol{F}_1$ 流出曲面, $\boldsymbol{F}_2$ 流进曲面

因为流量是单位时间内流入或流出曲面的液体体积, 而这可以进一步视作流体函数与单位法向量的点乘, 所以只需求出单位法向量即可. 因为 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 都是曲面上的切向量, 不妨就取 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 作为曲面的法向量. 在实际应用中, 因为给出曲面参数方程的方式有所不同, $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 所指向的方向需要具体进行讨论, 故为了简便, 这里统一就在前面加上 $\pm$ 以示符号的不同. 而这一小曲面片上的单位法向量, 就是 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 的单位化:

$$\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \|}$$

先前已经求过, $\| \boldsymbol{r}_u \times {}_v \| = \sqrt{EG - F^2}(u, v)$, 而又注意到小曲面片的面积是

$$\Delta u_i \Delta v_i \sqrt{EG - F^2}(u_i, v_i) = \Delta u_i \Delta v_i \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \|$$

从而综合这些, 这一曲面片上的流量就是

$$\begin{aligned} &\pm \boldsymbol{F}(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i)) \cdot \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \|} \cdot \Delta u_i \Delta v_i \| \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \| \\ = &\pm \boldsymbol{F}(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i)) \cdot \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \cdot \Delta u_i \Delta v_i \end{aligned}$$

对这个式子求和, 便是整个曲面上的流量, 即:

$$\pm \sum_i \boldsymbol{F}(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i)) \cdot \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \cdot \Delta u_i \Delta v_i$$

这里需要注意为什么 $\pm$ 可以提出来, 这是因为已经默认了曲面是所谓的“双侧曲面”, 即如果指定了法向量的一个方向, 随着在曲面上选取的点的不同, 所取到的法向量方向不会发生突变. 所以如果确定了一个方向, $\pm$ 是因为法向量方向（也就是 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 的方向）不确定才诞生的, 现在就也确定了符号, 因此在乘的时候就没有必要再代一个 $\pm$ 了. 再加细分划并记参数为 λ, 考虑极限

$$\pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_i \boldsymbol{F}(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i)) \cdot \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \cdot \Delta u_i \Delta v_i$$

若这个极限存在且不随先前选取的诸标志点的变化而变化, 就是 $\boldsymbol{F}$ 在 S 上的第二型曲面积分, 同样, 因为 $\Delta u_i \Delta v_i$ 的存在, 这个和式可以写做二重积分的形式, 即:

$$\pm \iint\limits_{[0,1]^2} \boldsymbol{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v du dv$$

下面讨论它的简化形式:

如果记 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, 且注意到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 表示向量的混合积, 采用混合积的行列式记法, 即若设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3), x=a,b,c$, 有:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

现在已经有了三个向量的坐标式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(x,y,z)&=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\\ \boldsymbol{r}_u&=(\frac{\partial x}{\partial u}(\alpha_{1i},v),\frac{\partial y}{\partial u}(\alpha_{2i},v),\frac{\partial z}{\partial u}(\alpha_{3i},v))\\ \boldsymbol{r}_v&=(\frac{\partial x}{\partial v}(u,\beta_{1i}),\frac{\partial y}{\partial v}(u,\beta_{2i}),\frac{\partial z}{\partial v}(u,\beta_{3i}))\end{aligned}$$

进而它们的混合积即为:

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\begin{vmatrix}P & Q & R\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$

从而积分可以写成:

$$\pm\iint\limits_{[0,1]^2}\begin{vmatrix}P & Q & R\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}(u,v)dudv$$

更进一步, 假设统一规定法向量朝向曲面外侧, 记单位法向量为 $\boldsymbol{r}_\perp:=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 几何上, 考虑 $\Delta u_i\Delta v_i$ 所表示的那个区域（记作 S_i）在三个坐标平面上的投影, 为了讨论方便和更为直观, 不妨就将 S_i 进一步切成一片片所有边均与坐标轴平行的矩形, 进而讨论这些矩形的投影（可以联想那个著名的无字证明: 如何用给定的三种菱形填充表面?）. 对 S_i 在 xoz 面上的投影, 如示意图.

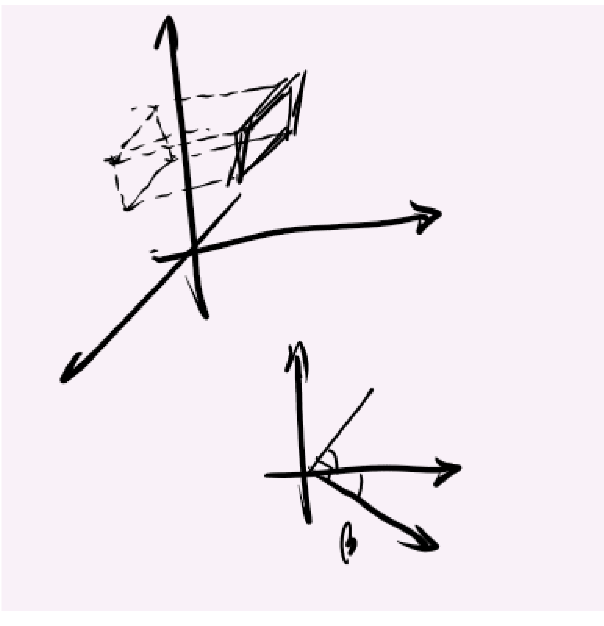


图 5.3: S_i 在 xoz 面上的投影

左上角是这个面投影的示意图, 右下角是从 x 轴正向看去, 这个矩形及它的法向量和 y 轴的角度关系. 先前已经设出法向量与 y 轴的夹角是 β, 故该矩形与 y 轴所成的角即为 $\frac{\pi}{2}-\beta$, 投影下的面积即需乘以因子 $\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos\beta$. 而投影到 xoz 面上的这一小矩形, 它的长和宽表现的是 Δu_i 和 Δv_i 所造成的 x 和 z 值的变化, 也即它的面积为 $\Delta x_i \Delta z_i$, 进而有:

$$\Delta x_i \Delta z_i = \cos\beta \Delta u_i \Delta v_i$$

另外两边也可以类似推导, 于是有如下的一组关系式:

$$\begin{aligned}\Delta x_i \Delta y_i &= \cos\gamma \Delta u_i \Delta v_i\\ \Delta x_i \Delta z_i &= \cos\beta \Delta u_i \Delta v_i\\ \Delta y_i \Delta z_i &= \cos\alpha \Delta u_i \Delta v_i\end{aligned}$$

如果采用微分形式, 每个面积的大小即可写成相应坐标轴上增量向量的叉乘的模. 考虑叉乘的方向, 希望叉乘得到的向量与第三个坐标轴正向同向, 故有:

$$\begin{aligned}\| \Delta \boldsymbol{x}_i \times \Delta \boldsymbol{y}_i \| &= \cos\gamma \Delta u_i \Delta v_i\\ \| \Delta \boldsymbol{z}_i \times \Delta \boldsymbol{x}_i \| &= \cos\beta \Delta u_i \Delta v_i\\ \| \Delta \boldsymbol{y}_i \times \Delta \boldsymbol{z}_i \| &= \cos\alpha \Delta u_i \Delta v_i\end{aligned}$$

两边取微分, 得到:

$$\begin{aligned}dxdy &= \cos\gamma dudv\\ dzdx &= \cos\beta dudv\\ dydz &= \cos\alpha dudv\end{aligned}$$

再回到原来的极限:

$$\pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_i \boldsymbol{F}(x(\boldsymbol{t}_i), y(\boldsymbol{t}_i), z(\boldsymbol{t}_i)) \cdot \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \cdot \Delta u_i \Delta v_i$$

根据设出的单位法向量, 上式首先等价于

$$\pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_i (P, Q, R) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\Delta u_i \Delta v_i$$

将点乘写开得到:

$$\pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_i (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\Delta u_i \Delta v_i$$

乘进 $\Delta u_i \Delta v_i$:

$$\pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_i P\cos\alpha \Delta u_i \Delta v_i + Q\cos\beta \Delta u_i \Delta v_i + R\cos\gamma \Delta u_i \Delta v_i$$

作上面讨论过的代换:

$$\pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_i P\Delta y_i \Delta z_i + Q\Delta z_i \Delta x_i + R\Delta x_i \Delta y_i$$

最后, 还是用 S 来表示 (x, y, z) 的积分区域, 即可改写成对应的积分形式:

$$\pm \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

这便得到了最常见的那一类表示方法.

5.3.5 对 Green 公式的理解性证明

定理 5.3.1 (Green) 设 D 为平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围的单连通闭区域. 如果函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数, 那么

$$\int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

其中 ∂D 取正向, 即诱导定向.

设有简单区域 D, 它既可以视作 D_x 型区域, 也可以视作 D_y 型区域, 对 D_x 型区域, 如示意图

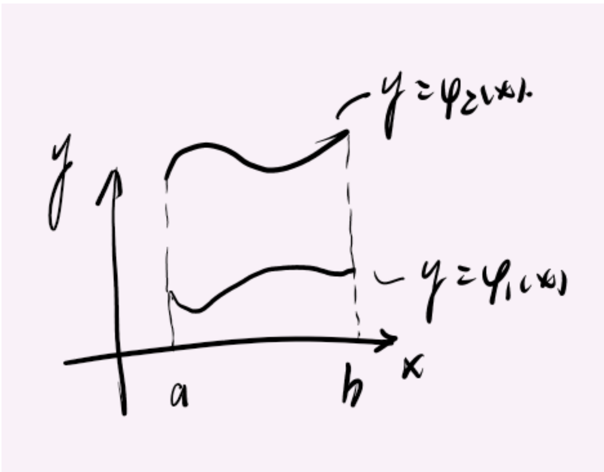


图 5.4: D_x 型区域

于是

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D_x} P(x,y)dx \\
=&\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx + 0 + \int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx + 0 \\
=&-\int_a^b (P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x)))dx \\
=&-\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dydx \\
=&-\iint\limits_{D_x} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy
\end{aligned}$$

对 D_y 型区域, 示意图如下

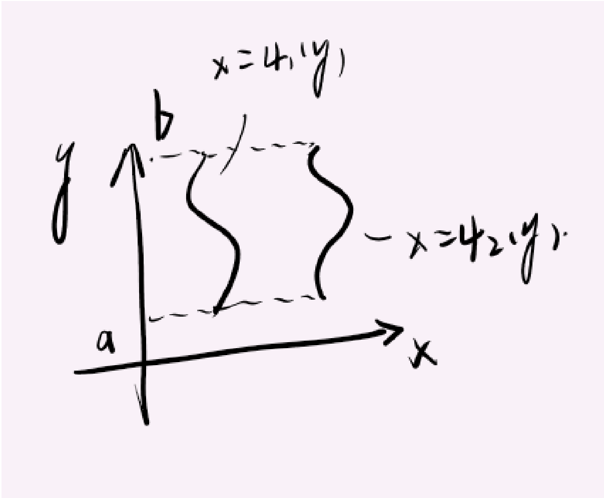


图 5.5: D_y 型区域

于是

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial D_y} Q(x,y)dy \\
=&\int_b^a Q(\psi_1(y),y)dy+0+\int_a^b Q(\psi_2(y),y)dy+0 \\
=&\int_a^b (Q(\psi_2(y),y)-Q(\psi_1(y),y))dy \\
=&\int_a^b \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy \\
=&\iint\limits_{D_y} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy
\end{aligned}
$$

从而两式相加, 即有

$$\int_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint\limits_{D}(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial x})dxdy\square$$

5.3.6 对 Gauss 公式的理解性证明

定理 5.3.2 (Gauss) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 上由光滑（或分片光滑）的封闭曲面所围成的二维单连通闭区域, 函数 $P(x,y,z)$,
$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续偏导数, 则成立

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\iint\limits_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

同样分成 D_x, D_y, D_z 三个类型的区域来分别证明, 先考虑 D_z 型区域:

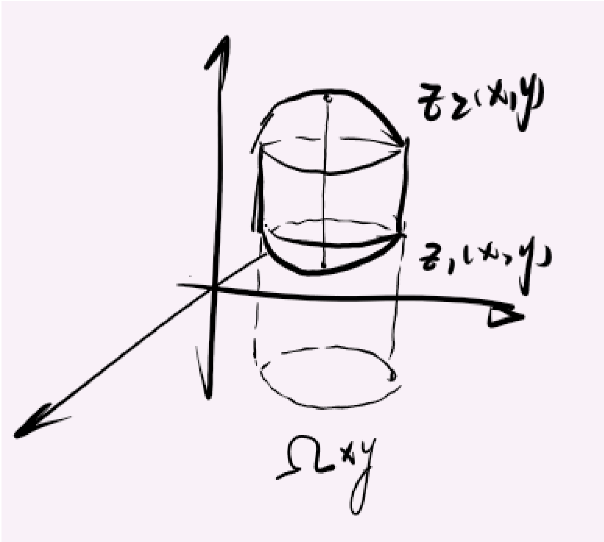


图 5.6: D_z 型区域

按照三重积分的运算性质, 有

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dxdydz \\
=&\iint\limits_{\Omega_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dz \\
=&\iint\limits_{\Omega_{xy}}(R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y)))dxdy \\
=&\iint\limits_{\partial\Omega} Rdxdy
\end{aligned}
$$

其中最后一步是因为第一, 周围环绕着的区域投影下去面积是零, 从而对积分没有贡献, 这一部分可以补在积分区域中；第二, 倒数第二行式子本身就是一个自带法向量的第二型曲面积分, 它在上部的法向量向上, 下部的法向量向下, 所以 $-R(x,y,z_1(x,y))$ 中的负号是因为这个定向, 整体来看就是对曲面的第二型积分. 另外两个方向的证明完全类似, 于是可以得到:

$$
\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{\partial\Omega}Pdydz
$$
$$
\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{\partial\Omega}Qdzdx
$$

三者相加即得结论. □

5.3.7 对 Stokes 公式的理解性证明

定理 5.3.3 (Stokes) 设 Σ 为光滑曲面, 其边界 $\partial\Sigma$ 为分段光滑闭曲线. 若函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 Σ 及其边界 $\partial\Sigma$ 上具有连续偏导数, 则成立

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz\\ =&\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy\\ =&\iint_{\Sigma}[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\cos)\beta+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma]dS\end{aligned}$$

采用投影的方式来理解 Stokes 定理:

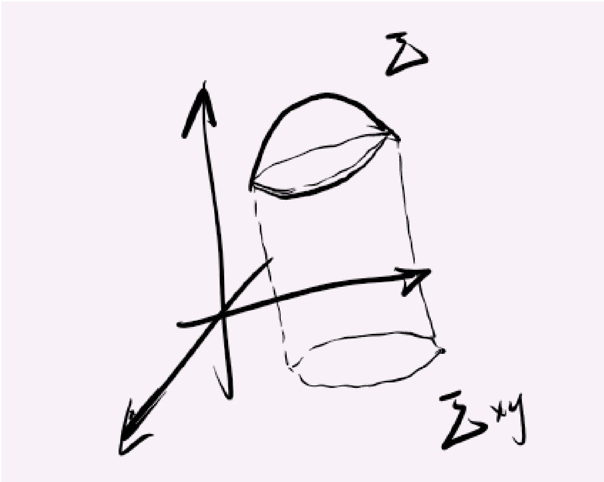


图 5.7: 将 Σ 投影到 xoy 面上

设 Σ 的定向为上侧, 这个示意图的情况下 Σ 有方程 $z=z(x,y),(x,y)\in\Sigma_{xy}$, 进而积分

$$\int_{\partial\Sigma} P(x,y,z)dx$$

可以转化为

$$\int_{\partial\Sigma_{xy}} P(x,y,z(x,y))dx$$

这里 $\partial\Sigma_{xy}$ 是 Σ_{xy} 的正向边界, 按照格林公式, 有:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Sigma_{xy}} P(x,y,z(x,y))dx\\ =&-\iint_{\Sigma_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}(P(x,y,z(x,y)))dxdy\\ =&-\iint_{\Sigma_{xy}}(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y))+\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z(x,y))\cdot\frac{\partial z}{\partial y})dxdy\end{aligned}$$

知该曲面一个向上的法向量是 $(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1)$, 从而设单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 比对有 $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=$

$\frac{\partial z}{\partial y}$. 同时, 因为这个积分中并没有出现 dz, 所以可以将 Σ_{xy} 还原为 Σ, 有:

$$\begin{aligned}
&-\iint\limits_{\Sigma_{xy}}(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y))+\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z(x,y))\cdot\frac{\partial z}{\partial y})dxdy\\
=&-\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y})dxdy\\
=&-\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}dxdy)\\
=&-\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma dS+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{-\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma dS)\\
=&-\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma dS-\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta dS)\\
=&\iint\limits_{\Sigma}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\frac{\partial P}{\partial z}dzdx
\end{aligned}$$

其余方向的投影同理, 进而三者相加即可得到 Stokes 公式. 利用行列式记号, Stokes 公式即:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz\\
=&\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\\
=&\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS
\end{aligned}$$

□

5.4 补充: 陈纪修上第一类曲线积分与第一类曲面积分的部分习题

1. 求下列第一类曲线积分:

(1) $\int\limits_L(x+y)ds$, 其中 L 是以 $O(0,0),A(1,0),B(0,1)$ 为顶点的三角形.

解　将 L 分为三段可得欲求为 $\sqrt{2}+1$.

(2) $\int\limits_L|y|ds$, 其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$.

解　用极坐标换元并根据对称性可知欲求为 4.

(3) $\int\limits_L|x|^{\frac{1}{3}}ds$, 其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

解　考虑 $x=a\cos^3\theta,y=a\sin^3\theta$ 并考虑对称性, 知欲求为 $4a^{\frac{4}{3}}$.

•(4) $\int\limits_L|x|ds$, 其中 L 是双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$;

解

取 $x=\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, y=\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$, 因为 $x^2\geq y^2$, 故 $-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$, 有:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_L |x|ds\\
&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta|\sqrt{(-\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}-\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}})^2+(\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta-\frac{\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}})^2}d\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\cos\theta|\sqrt{(\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta)^2+(\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta)^2}d\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\cos\theta|d\theta=
\end{aligned}$$

2. 求下列第一类曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$, 其中 Σ 是左半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, y\leq 0$;

解

采用球面系换元知:

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\int_0^{\pi}d\theta\int_{\pi}^{2\pi}(a\sin\theta\cos\varphi+a\sin\theta\sin\varphi+a\cos\theta)\cdot a^2\sin\theta d\varphi=-a^3$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$, 其中 Σ 是区域 $\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1\}$ 的边界;

解

将边界分为锥面和圆面两部分, 分别记为 Σ_1,Σ_2, 知在 Σ_2 上的积分是一个重积分. 有:

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}(x^2+y^2)dS=2\pi\int_0^1\sqrt{2}z^3dz+2\pi\int_0^1 r^3dr=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\pi$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分;

解

用柱面系换元知:

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}(z^2\sin\theta\cos\theta+z^2\sin\theta+z^2\cos\theta)\cdot\sqrt{2}zdz=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=H$ 之间的部分;

解

用柱面系换元知:

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^H\frac{1}{a^2+z^2}dz=2\pi\arctan\frac{H}{a}$$

(5) $\iint\limits_{\Sigma}(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$;

解

用球面系换元: $x=a\sin\theta\cos\varphi, y=a\sin\theta\sin\varphi, z=a\cos\theta$, 知:

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma}(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})dS\\
=&a^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\varphi+\frac{1}{3}\sin^2\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\cos^2\theta)(a^2\sin\theta)d\theta\\
=&a^4\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos^2\varphi+\frac{1}{3}\sin^3\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\sin\theta\cos^2\theta)d\theta\\
=&a^4\int_0^{2\pi}(\frac{2}{3}\cos^2\varphi+\frac{4}{9}\sin^2\varphi+\frac{1}{6})d\varphi\\
=&\frac{13}{9}\pi a^4
\end{aligned}
$$

妙解

考虑对称性:

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{4\pi}{3}a^4$$

从而

$$\iint\limits_{\Sigma}(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})dS=\frac{4\pi}{3}a^4(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{13\pi}{9}a^4$$

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^2+z)dS$, 其中 Σ 是抛物面 $2z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=8$ 之间的部分;

解

根据对称性知 $\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$, 并换元: $x=\sqrt{2z}\cos\theta, y=\sqrt{2z}\sin\theta, z=z$, 进而有

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^2+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^8(2z\sqrt{1+2z})dz=\frac{2\pi}{15}(782\sqrt{17}+2)$$

(7) $\iint\limits_{\Sigma}zdS$, 其中 Σ 是螺旋面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v, 0\le u\le a, 0\le v\le 2\pi$ 的一部分.

解

$$\iint\limits_{\Sigma}zdS=\int_0^a du\int_0^{2\pi}v\sqrt{u^2+1}dv=2\pi^2\int_0^a\sqrt{u^2+1}du=\pi^2(a\sqrt{1+a^2}+\ln(\sqrt{1+a^2}+a))$$

8. 设 $u(x,y,z)$ 为连续函数, 它在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续的二阶偏导数, 记 Σ 为以 M 点为中心, 半径为 R 的球面, 以及

$$T(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}u(x,y,z)dS$$

(1) 证明: $\lim\limits_{R\to 0}T(R)=u(x_0,y_0,z_0)$;

证明

设 $x=R\sin\theta\cos\varphi, y=R\sin\theta\sin\varphi, z=R\cos\theta$, 有:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}u(x,y,z)dS\\
=&\lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi R^2}R^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}u(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)\\
=&\lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi}4\pi u(x_0,y_0,z_0)=u(x_0,y_0,z_0)
\end{aligned}
$$

•(2) 若 $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0$, 求当 $R\to 0$ 时无穷小量 $T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$ 的主要部分.

解

考虑 u 在 (x_0,y_0,z_0) 邻域的中值定理:

$$u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(\xi)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(\xi)(y-y_0)+\frac{\partial u}{\partial z}(\xi)(z-z_0)$$

这里 $(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0),\xi\to(x_0,y_0,z_0)$, 进而

$$\begin{aligned}
T(R)-u(x_0,y_0,z_0)=&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_\Sigma u(x,y,z)dS-u(x_0,y_0,z_0)\\
=&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_\Sigma (u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0))dS\\
=&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_\Sigma (u_x(\xi)(x-x_0)+u_y(\xi)(y-y_0)+u_z(\xi)(z-z_0))dS\\
=&\frac{1}{4\pi R^2}2\pi R^2\int_0^\pi \sin\theta\cdot(u_x(\xi')(\sin\theta\cos\varphi-\sin\theta_0\cos\varphi_0)+u_y(\xi')(\sin\theta\sin\varphi-\sin\theta_0\sin\varphi_0)+u_z(\xi')(\\
=:&\frac{1}{2}U(\xi',\theta,\varphi)
\end{aligned}$$

9. 设 Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1(z\geq 0)$, π 为 Σ 在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 为原点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离, 求 $\iint\limits_\Sigma \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

解

取点 (x_0,y_0,z_0), 知 π 的方程为 $\frac{xx_0}{2}+\frac{yy_0}{2}+zz_0=1$, 进而 $\rho(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{4}+z_0^2}}$, 采用广义球坐标 $x=\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi,y=\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi,z=\cos\theta$:

$$\begin{aligned}
&\iint_\Sigma \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS\\
=&\iint_\Sigma z\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}dS\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sqrt{2\sin^2\theta\cos^2\varphi+2\sin^2\theta\sin^2\varphi+4\cos^2\theta}\sqrt{2\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)}d\theta\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta(2\sin^2\theta+4\cos^2\theta)d\theta\\
=&\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta(2\sin^2+4\cos^2\theta)d\theta=\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

•10. 设 Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 证明

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du$$

证明

5.5 第二型曲面积分

5.5.1 练习题

1. 计算下列第二型曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^4dydz+y^4dzdx+z^4dxdy, \Sigma : x^2+y^2+z^2=a^2$, 内侧;

解

知单位法向量为 $(-\frac{x}{a}, -\frac{y}{a}, -\frac{z}{a})$, 有:

$$\iint\limits_{\Sigma} x^4dydz+y^4dzdx+z^4dxdy = -\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}(x^5+y^5+z^5)d\sigma = 0$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+yzdzdx+x^2dxdy, \Sigma : x^2+y^2+z^2=a^2$, 外侧;

解

知单位法向量为 $(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a})$, 有:

$$\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+yzdzdx+x^2dxdy = \frac{1}{a}\int\limits_{\Delta} x^2z+y^2z+x^2zd\sigma = 0$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy, \Sigma : [0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界, 外侧;

解

考虑到对面的单位法向量恰相反, 将积分分为 6 个区域易知结果为 $(f(a)-f(0))bc+(g(b)-g(0))ac+(h(c)-h(0))ab$.

(4) $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy, \Sigma : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 外侧;

解

用 $z=0$ 将 Σ 截成上半部分 Σ_1 和下半部分 Σ_2, 并分别记在 Σ_1, Σ_2 上的方程为 $z_1 = f_1(x,y), z_2 = f_2(x,y)$, 记 D 是 Σ 在 xoy 面上的投影, 有:

$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = \int\limits_{\Sigma_1} z_1dxdy + \int\limits_{\Sigma_2} z_2dxdy = 2\int\limits_{D} z_1dxdy$$

整体来看这就是椭球的体积, 进而欲求为 $\frac{4}{3}\pi abc$.

(5) $\int\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy, \Sigma : z=\sqrt{x^2+y^2}, z\le h$, 外侧.

解

将 Σ 分为作为锥面的 Σ_1 和作为圆面的 Σ_2 的两部分分别计算, 对 Σ_1, 由公式 (10):

$$\int\limits_{\Sigma_1}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy = -\iint\limits_{D}(x-y)dxdy = 0$$

对 Σ_2, 知此时 $z=h$, 原积分直接化为 $\iint\limits_{D}(x-y)dxdy = 0$. 综上, 结果为 0.

2. 给定流速场 $F=(y,z,x)$, 封闭曲面 $x^2+y^2=R^2, z=0, z=h$. 计算 F 流向曲面之外的流量.

解

此即计算

$$\iint\limits_{\Sigma} ydydz+zdzdx+xdxdy$$

先对上下两个面算, 知此时 $dydz = dzdx = 0$, 因为法向量方向相反, 故两者之和为 0. 下面计算柱面 Σ', 采用柱面系:

$$\iint_{\Sigma} ydydz + zdzdx + xdxdy = \int_{D} \begin{vmatrix} R\sin\theta & z & R\cos\theta \\ R\cos\theta & 0 & -R\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \pi R^4$$

3. 设 $\Sigma : z = f(x, y)((x, y) \in D)$, 法向量向上. 求证:
(1) $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz = -\iint\limits_{D} P(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}dxdy$;
证明
考虑微分形式, 知 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, 又 $dy^2 = 0, dydx = -dxdy$, 知:

$$\iint_{\Sigma} Pdydz = \iint_{D} P(x, y, f(x, y))dy(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y})dy = -\iint_{D} P(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}dxdy$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma} Qdzdx = -\iint\limits_{D} Q(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y}dxdy$.
证明　过程同上.

5.6 Gauss 公式和 Stokes 公式

5.6.1 练习题

1. 利用 Gauss 公式, 计算下列积分:
(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy, \Sigma$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 方向朝外;
解
记 D 是 Σ 围成的球体, 并考虑到对称性, 有:

$$\iint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = 2\iiint_{D}(x + y + z)d\sigma = 0$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy, \Sigma$ 是由四张平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 和 $x + y + z = 1$ 围成的封闭曲面, 方向朝外;
解
记 D 是曲面围成的单形, 有:

$$\iint_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy = \iiint_{D}(y + z + x)d\sigma = \int_0^1 t \cdot \frac{1}{2}t^2dt = \frac{1}{8}$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x - y)dydz + (y - z)dzdx + (z - x)dxdy, \Sigma$ 是曲面 $z = x^2 + y^2(z \le 1)$, 方向朝下;
解
补面 $z = 1$, 取向上为单位法向量方向, 并记 D 是拼接曲面围成的体, 由对称性知这个面的贡献是 $\iint_{\Sigma_0}(1 - x)dxdy = \pi$, 有:

$$\iint_{\Sigma}(x - y)dydz + (y - z)dzdx + (z - x)dxdy = 3\iiint_{D} d\sigma - \pi = \frac{\pi}{2}$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy, \Sigma$ 是曲面 $z^2=x^2+y^2(0\leq z\leq 1)$, 方向朝下.

解

补面 $z=1$, 取向上为单位法向量方向, 并记 D 是拼接曲面围成的体, 知这新增的曲面的贡献是 $\iint\limits_{\Sigma_0} z^2dxdy=\pi$, 有:

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint\limits_{D}(x+y+z)dxdydz-\pi=-\frac{3}{4}\pi$$

2. 设 Ω 是一闭域, 向量 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\boldsymbol{e}$ 是一个固定的向量, 求证:

$$\int_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})d\sigma=0$$

证明

设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 并设 $\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,e_3)$, 有:

$$\int_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})d\sigma=\int_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n}}{\parallel\boldsymbol{e}\parallel}d\sigma=\int_{\partial\Omega}\frac{e_1}{\parallel\boldsymbol{e}\parallel}dydz+\frac{e_2}{\parallel\boldsymbol{e}\parallel}dzdx+\frac{e_3}{\parallel\boldsymbol{e}\parallel}dxdy=0$$

3. 设 Ω 为一闭区域, 向量 $\boldsymbol{n}$ 是 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 点 $(a,b,c)\notin\partial\Omega$. 令 $\boldsymbol{p}=(x-a,y-b,z-c)$ 且 $p=\parallel\boldsymbol{p}\parallel$, 求证:

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{p}=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})d\sigma$$

证明

设 $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 有:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})d\sigma\\
&=\int_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}}{\parallel\boldsymbol{p}\parallel}d\sigma\\
&=\int_{\partial\Omega}\frac{x-a}{p}dydz+\frac{y-b}{p}dzdx+\frac{z-c}{p}dxdy\\
&=\iiint_{\Omega}\frac{(y-b)^2+(z-c)^2}{p}+\frac{(x-a)^2+(z-c)^2}{p}+\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{p}dxdydz=2\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{p}
\end{aligned}$$

4. 利用 Stokes 公式, 计算下列积分:

(1) $\int_{\Gamma}ydx+zdy+xdz, \Gamma$ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$, 从第一卦限看去, Γ 是逆时针方向绕行的;

解

$$\int_\Gamma ydx+zdy+xdz=\iint_D \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}$$
$$=-\int_{\Gamma'} dydz+dzdx+dxdy$$
$$=-\int_{\Gamma'}(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)d\sigma=-\sqrt{3}\pi a^2$$

(2) $\int_\Gamma (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz,\Gamma$ 为椭圆 $x^2+y^2=2y,y=z$, 从点 $0,1,0$ 向 Γ 看去, Γ 是逆时针方向绕行的;

解

$$\int_\Gamma (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=\iint_D \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=0$$

(3) $\int_\Gamma y^2dx+z^2dy+x^2dz,\Gamma$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2,x+y+z=a$, 从原点看去, Γ 是逆时针方向绕行的.

解

$$\int_\Gamma y^2dx+z^2dy+x^2dz=\iint_D \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}=-2\iint_D zdydz+xdzdx+ydxdy=-2\iint_D \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$$

这里 $\boldsymbol{F}=(x,y,z),\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 从而有:

$$-2\iint_D \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_D (x+y+z)d\sigma=-\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$$

5.7 微分形式和外微分运算

5.7.1 练习题

1. 计算:

(1) $(xdx+ydy)\wedge(zdz-zdx)$

解 $xzdx\wedge dz+yzdy\wedge dz+zydx\wedge dy.$

(2) $(dx+dy+dz)\wedge(xdx\wedge dy-zdy\wedge dz)$

解 $-(x+z)dx\wedge dy\wedge dz.$

2. 计算 $d\omega$, 设:

(1) $\omega=xy+yz+zx;$

解 $d\omega=(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz.$

(2) $\omega=xydx;$

解 $d\omega=xdy\wedge dx.$

(3) $\omega=(xy+yz)dx;$

解 $d\omega=(x+z)dy\wedge dx+ydz\wedge dx.$

(4) $\omega=xydx+x^2dy;$

解　$d\omega = xdx \wedge dy$.

(5) $\omega = x^2ydx - yze^xdy$;

解　$d\omega = (x^2 + yze^x)dy \wedge dx - ye^xdz \wedge dy$.

(6) $\omega = xy^2dy \wedge dz - xz^2dx \wedge dy$;

解　$d\omega = (y^2 - 2xz)dx \wedge dy \wedge dz$.

(7) $\omega = xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + zxdx \wedge dy$.

解　$d\omega = (y + z + x)dx \wedge dy \wedge dz$.

•**3.** 设微分形式 $\omega \in C^2$. 证明:

$$d(d\omega) = 0$$

5.8　补充: 陈纪修上第二类曲线积分和第二类曲面积分的部分习题

1. 求下列第二类曲线积分:

(1) $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, 其中 L 是以 $A(1,0), B(2,0), C(2,1), D(1,1)$ 为顶点的正方形, 方向为逆时针方向;

解

$$\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \int_1^2 x^2dx + \int_0^1 (4 - y^2)dy + \int_2^1 (x^2 + 1)dx + \int_1^0 (1 - y^2)dy = 2$$

(2) $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 L 是抛物线的一段: $y = x^2, -1 \leq x \leq 1$, 方向由 $(-1,1)$ 到 $(1,1)$;

解

$$\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int_{-1}^1 (2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2)dx = -\frac{14}{15}$$

(3) $\int\limits_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 方向为逆时针方向;

解

用极坐标换元, 有:

$$\int\limits_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2} = -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi$$

•(4) $\int\limits_L ydx - xdy + (x^2 + y^2)dz$, 其中 L 是曲线 $x = e^t, y = e^{-t}, z = a^t, 0 \leq t \leq 1$, 方向由 (e, e^{-1}, a) 到 $(1,1,1)$;

解

分类讨论: 当 $a \neq e^2, a \neq \frac{1}{e^2}$, 有:

$$\int_L ydx - xdy + (x^2 + y^2)dz = \int_1^0 (1 + 1 + (e^{2t} + e^{-2t})a^t \frac{1}{\ln a})dt = -2 - \frac{1}{2\ln a}(\frac{\sqrt{e\sqrt{a}} - 1}{\ln(e\sqrt{a})} + \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{e}} - 1}{\ln(\frac{\sqrt{a}}{e})})$$

当 $a = e^2$, 有:

(5) $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, 其中 L 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的直线段;

解

取 $x=1+t, y=1+2t, z=1+3t$, 知

$$\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz=\int_0^1(1+t+2(1+2t)+3(1+3t))dt=13$$

(6) $\int\limits_L ydx+zdy+xdz$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2az\\x+z=a(a>0)\end{cases}$, 若从 z 轴的正向看去, L 的方向是逆时针方向;

解

将 $z=a-x$ 代入知 L 变为 $L':2x^2+y^2=a^2$, 有:

$$\int\limits_L ydx+zdy+xdz=\int\limits_{L'}(y-x)dx+(a-x)dy=-\sqrt{2}a^2\pi$$

(7) $\int\limits_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, L 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\y=x\tan\alpha(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2})\end{cases}$, 若从 x 轴的正向看去, 这个圆周的方向为逆时针方向.

解

将 $y=x\tan\alpha$ 代入知 L 变为 $L':\sec^2\alpha x^2+z^2=1$, 有:

$$\begin{aligned}&\int\limits_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz\\=&(\tan\alpha-1)\int\limits_{L'}zdx-xdz\\=&(\tan\alpha-1)\int_0^{2\pi}-\frac{1}{\sec\alpha}d\theta=2\pi(\cos\alpha-\sin\alpha)\end{aligned}$$

2. 证明不等式

$$|\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy|\le MC$$

其中 C 是曲线 L 的弧长, $M=\max\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}|(x,y)\in L\}$. 记圆周 $x^2+y^2=R^2$ 为 L_R, 利用以上不等式估计

$$I_R=\int\limits_{L_R}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

并证明

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0$$

证明

设 L 有参数方程 $x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$:

$$\begin{aligned}|\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy|=&|\int_\alpha^\beta(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t))dt|\\\le&|\int_\alpha^\beta\sqrt{(P^2(x(t),y(t))+Q^2(x(t),y(t)))((x'(t))^2+(y'(t))^2)}|\\\le&MC\end{aligned}$$

根据既证不等式, 知:

$$\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+xy)^2}=\frac{R}{(xy+R^2)^2}\le\frac{2}{R}$$

从而欲证极限由夹逼定理显然.

4. 计算下列第二类曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$, 其中 Σ 是中心在原点, 边长为 $2h$ 的立方体 $[-h,h]^3$ 的表面, 方向取外侧;

解

考虑 Gauss 定理, 下面统一记 D 是题目所给的曲面所围的体或补全的体:

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy=3\iiint\limits_{D}dxdydz=24h^3$$

•(不理解为什么不能按自己写的来)(2) $\iint\limits_{\Sigma}yzdzdx$, 其中 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分, 方向取上侧;

初解

记 Σ 在 xoz 面上的投影为 $\Sigma_{xz}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,z\ge 0$, 有:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}yzdzdx\\=&\iint\limits_{\Sigma_{xz}}yzdzdx=0\end{aligned}$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}zdydz+xdzdx+ydxdy$, 其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 和 $z=4$ 所截部分, 方向取外侧;

解

补面 $z=0,z=4$, 知这两个面对积分的贡献都是 0, 由 Gauss 定理:

$$\iint\limits_{\Sigma}zdydz+xdzdx+ydxdy=\iiint\limits_{D}0d\sigma=0$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma}zxdydz+3dxdy$, 其中 Σ 是抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 在 $z\ge 0$ 部分, 方向取下侧;

解

补面 $z=0$, 知这个面对积分的贡献是 12π, 由 Gauss 定理:

$$\iint\limits_{\Sigma}zxdydz+3dxdy=-\iiint\limits_{D}zd\sigma-12\pi=-\frac{68}{3}\pi$$

(5) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$, 其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分, 方向取上侧;

解

取 $x=u,y=v,z=1-u+v$, 知参数域为 $u=0,v=0,u-v=1$ 三条直线围成的区域 D, 有:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy\\&=\iint\limits_{D}\begin{vmatrix}f(x,y,z)+x & 2f(x,y,z)+y & f(x,y,z)+z\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}dudv\\&=\iint\limits_{D}(f(x,y,z)+x-(2f(x,y,z)+y-f(x,y,z)-z))dudv\\&=\iint\limits_{D}(x-y+z)dudv=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(6) $\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+5)dxdy$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\le z\le h)$, 方向取下侧;

解

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+5)dxdy=-\iint\limits_{\Sigma'}(x^2+y^2+5)dxdy=-\frac{1}{2}\pi(h^4+10h^2)$$

•(7) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx$, 其中 Σ 是抛物面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1,y=2$ 所围立体的表面, 方向取外侧;

解

经过旋转, 可以将图形变为 $z=x^2+y^2,z=1,z=2$ 所围立体表面 Σ', 方向向下, 函数变为 $\frac{e^{\sqrt{z}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 换元: $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=r^2$, 有:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma'}\frac{e^{\sqrt{z}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\\&=-\iint\limits_{D}\frac{e^r}{r}\sqrt{r^2(1+4r^2)}drd\theta\\&=-2\pi\int_1^2\end{aligned}$$

(8) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 方向取外侧;

解

用广义球坐标换元, 有:

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy=\iint\limits_{\Sigma'}(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b})\sin\theta d\varphi d\theta=4\pi(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b})$$

(9) $\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中 Σ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, 方向取外侧.

解

用 Gauss 公式:

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint\limits_{D}(x+y+z)d\sigma=\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$$

5.9 补充: 陈纪修上 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式部分习题

1. 利用 Green 公式计算下列积分:

(1) $\int\limits_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$, 其中 L 是以 $A(1,1),B(3,2),C(2,5)$ 为顶点的三角形的边界, 逆时针方向;

解

统一记给出曲线所围的区域为 D, 由 Green 公式:

$$\int\limits_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy=\iint\limits_D(-4x-2y)dxdy=\frac{140}{3}$$

(2) $\int\limits_L xy^2dx-x^2ydy$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$, 逆时针方向;

解

$$\int\limits_L xy^2dx-x^2ydy=\iint\limits_D(-2xy-2xy)dxdy=0$$

(3) $\int\limits_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy$, 其中 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$, 逆时针方向;

解

$$\begin{aligned}&\int\limits_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy\\=&\iint\limits_D(x^2\cos x+2x\sin x-2ye^x)-(x^2\cos x+2x\sin x-2ye^x)dxdy=0\end{aligned}$$

(4) $\int\limits_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, 其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段;

解

补线 $y=0$, 知这条线对积分的贡献为 0, 故可忽略, 有:

$$\int\limits_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]=-\iint\limits_D(-(y-\sin y)e^x-e^x\sin y)dxdy=\iint\limits_D ye^xdxdy=\frac{1}{5}(e^\pi-1)$$

(5) $\int\limits_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2y)dy$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分, 方向从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$;

解

补线 $y=0$, 知这条线对积分的贡献为 $\frac{8}{3}$, 进而有:

$$\int\limits_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2y)dy=\iint\limits_D 0dxdy+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$$

(6) $\int\limits_L [e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$, 其中 a,b 是正常数, L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的一段;

解

补线 $y=0$, 知这条线对积分的贡献为 $-2ba^2$, 进而有:

$$\int\limits_L [e^x\mathrm{sin}y-b(x+y)]dx+(e^x\mathrm{cos}y-ax)dy=\iint\limits_D (b-a)dxdy+2ba^2=\frac{\pi a^2}{2}(b-a)+2ba^2$$

(7) $\int\limits_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心, R 为半径的圆周 $(R>1)$, 逆时针方向;

解

挖空 $C_\varepsilon: x^2+y^2<\varepsilon$, 记挖空后的区域为 D, 有:

$$\begin{aligned}&\int\limits_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}\\ =&\int\limits_{\partial D}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}+\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}\\ =&\iint\limits_D 0dxdy+\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}\end{aligned}$$

而用极坐标换元, 有:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}\\ =&\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2(1+3\mathrm{cos}^2\theta)}d\theta\\ =&\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+3\mathrm{cos}^2\theta}d\theta=\pi\end{aligned}$$

故欲求为 π.

(8) $\int_L \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$, 其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$, 逆时针方向;

解

易知 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, 从而将积分路径改为 $x^2+4y^2=1$ 并用广义极坐标换元, 有:

$$\int_L \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\pi$$

(9) $\int\limits_L \frac{e^x[(x\mathrm{sin}y-y\mathrm{cos}y)dx+(x\mathrm{cos}y+y\mathrm{sin}y)dy]}{x^2+y^2}$, 其中 L 是包围原点的简单光滑闭曲线, 逆时针方向.

解

知

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{(x^3e^x+xy^2e^x+y^2e^x-x^2e^x)\mathrm{cos}y+(x^2ye^x+y^3e^x-2xye^x)\mathrm{sin}y}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{(x^3e^x-x^2e^x+xy^2e^x+y^2e^x)\mathrm{cos}y+(x^2ye^x+y^3e^x-2xye^x)\mathrm{sin}y}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

从而 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 改 L 为 $x^2+y^2=r^2$ 并用极坐标换元, 有:

$$\begin{aligned}&\int\limits_L \frac{e^x[(x\mathrm{sin}y-y\mathrm{cos}y)dx+(x\mathrm{cos}y+y\mathrm{sin}y)dy]}{x^2+y^2}\\ =&\int_0^{2\pi}e^{r\mathrm{cos}\theta}\mathrm{cos}(r\mathrm{sin}\theta)d\theta\end{aligned}$$

令 $r\to 0$, 知上述积分趋 2π, 故结果为 2π.

2. 利用曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$;

解

统一记给出曲线为 L, 它所围的区域为 D, 有:

$$\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{3a^2}{8}\pi$$

•(2) 抛物线 $(x+y)^2=ax(a>0)$ 与 x 轴;

解

知 x 轴对积分的贡献为 0, 从而只需考虑抛物线部分, 考虑换元 $x=\frac{1}{2}(u+v), y=\frac{1}{2}(u-v)$, 知 $dx=\frac{1}{2}du+\frac{1}{2}dv, dy=\frac{1}{2}du-\frac{1}{2}dv$, 曲线变为 $v=\frac{2}{a}u^2-u$, 有:

$$\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_L xdy-ydx=\frac{1}{4}\int\limits_L udv+vdu=-a^2$$

(3) 旋轮线的一段: $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, $t\in[0,\pi]$ 与 x 轴.

解

知 x 轴对积分的贡献为 0, 从而只需考虑旋轮线部分, 有:

$$\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_L xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^0(t\sin t+2\cos t-2)dt=3\pi a^2$$

3. 先证明曲线积分与路径无关, 再计算积分值:

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$;

解

$P=y-x, Q=x-y$, 进而 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 从而积分与路径无关, 取路径 $(0,0)\to(0,1)\to(1,1)$, 有:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)=\int_0^1 xdx+\int_0^1(y-1)dy=0$$

(2) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)dx+\psi(y)dy$, 其中 $\varphi(x),\psi(y)$ 为连续函数;

解

$P=\varphi(x), Q=\psi(y), \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$, 从而积分与路径无关, 取路径 $(2,1)\to(2,2)\to(1,2)$, 有:

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)dx+\psi(y)dy=\int_1^2\psi(y)dy+\int_2^1\varphi(x)dx$$

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 沿不通过原点的路径.

解

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, 从而积分与路径无关, 取路径 $(1,0)\to(6,0)\to(6,8)$, 有:

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=5+\int_0^8\frac{ydy}{\sqrt{36+y^2}}=9$$

4. 证明: $(2x\text{cos}y+y^2\text{cos}x)dx+(2y\text{sin}x-x^2\text{sin}y)dy$ 在整个 xy 平面上是某个函数的全微分, 并找出它的一个原函数.

证明

因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\text{sin}y+2y\text{cos}x$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\text{cos}x-2x\text{sin}y$$

进而存在函数 u 使得 $du=Pdx+Qdy$, 比如取 L 为连接 $(0,0)$ 和 (u,v) 的直线段, 考虑 $\int_L Pdx+Qdx$, 这便是它的一个原函数.

5. 证明: $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在除去 y 的负半轴及原点的裂缝 xy 平面上是某个函数的全微分, 并找出它的一个原函数.

证明　同 **4.**

6. 设 $Q(x,y)$ 在 xy 平面上有连续偏导数, 曲线积分 $\int\limits_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关, 并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$$

求 $Q(x,y)$.

解

因为 $\int\limits_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关, 故 $2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 进而 $Q(x)=x^2+g(y)$, 对题目给出的积分等式, 左式沿 $(0,0)\to(t,0)\to(t,1)$ 积分, 结果为 $\int_0^1 Q(t,y)dy=t^2+\int_0^1 g(y)dy$. 右式沿 $(0,0)\to(1,0)\to(1,t)$ 积分, 结果为 $\int_0^t Q(1,y)dy=t+\int_0^t g(y)dy$, 从而 $t^2+\int_0^1 g(y)dy=t+\int_0^t g(y)dy\Rightarrow\int_1^t g(y)dy=t^2-t$, 两边求导即得 $g(y)=2y-1$, 从而 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

9. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, Σ 为立方体 $0\le x,y,z\le a$ 的表面, 方向取外侧;

解

统一记题目给出的曲面所围的区域或补面所围的区域为 D, 有:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy\\=&2\iiint\limits_D(x+y+z)d\sigma\\=&2\cdot 3\cdot(\frac{1}{2}a^4)=3a^4\end{aligned}$$

•(2) $\iint\limits_\Sigma(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$, 其中 Σ 为闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$, 方向取外侧;

解

知方体边长为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$, 有:

$$\iint\limits_\Sigma(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy=3\iiint\limits_D d\sigma=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$, 其中 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h(h>0)$ 之间的部分, 方向取下侧;

解

补面 $z=h$, 知这个面对积分的贡献是 πh^4, 进而

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=2\iiint\limits_{D}(x+y+z)d\sigma-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$, 其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 方向取上侧;

解

补面 $z=0$, 知这个面对积分的贡献是 0, 进而有:

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint\limits_{D}d\sigma=2\pi R^3$$

(5) $\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4zxdxdy$, 其中 Σ 是由 xy 平面上的曲线 $x=e^y(0\leq y\leq a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转面, 曲面的法向量与 x 轴正向的夹角为钝角;

解

补面 $x=e^a$, 知这个面对积分的贡献是 $2(1-e^a)\pi a^2$, 有:

$$\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4zxdxdy=\iiint\limits_{D}(-4x+8x-4x)d\sigma-2(1-e^a)\pi a^2=-2(1-e^a)\pi a^2$$

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2(0\leq z\leq 1)$, 曲面的法向量与 z 轴的正向的夹角为锐角;

解

补面 $z=1$, 知这个面对积分的贡献是 $-\pi$, 有:

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy=-3\iiint\limits_{D}d\sigma+\pi=-\frac{\pi}{2}$$

(7) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}(a>0)$, 其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 方向取上侧;

解

补面 $z=0$, 知这个面对积分的贡献是 $-\pi a^3$, 进而有:

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\iint\limits_{\Sigma}xdydz+\frac{1}{a}(z+a)^2dxdy=-\iiint\limits_{D}(3+\frac{2}{a}z)d\sigma+\pi a^3=-\frac{1}{2}\pi a^3$$

(8) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是

(i) 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$, 方向取外侧;

解

挖空 $C_\varepsilon : x^2+y^2+z^2<\varepsilon^2$, 在 $D\backslash\partial C_\varepsilon$ 上可以使用 Gauss 定理, 有:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\iiint\limits_{D\backslash\partial C_\varepsilon} 0dxdydz+\iint\limits_{\partial C_\varepsilon} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=0+\iint\limits_{\partial C_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^3}(xdydz+ydzdx+zdxdy)\\
&=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{C_\varepsilon} d\sigma=4\pi
\end{aligned}$$

(ii) 抛物面 $1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}(z\geq 0)$, 方向取上侧.

解

补面 $z=0$, 知这个面对积分的贡献是 0. 但补全的图形中是含有原点的, 再挖去一个上半球的空, 结合上题进而有:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{1}{2}\cdot 4\pi=2\pi
\end{aligned}$$

12. 利用 Stokes 公式计算下列曲线积分:

(1) $\int_L ydx+zdy+xdz$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线（它是圆周）, 从 x 轴的正向看去, 此圆周的方向是逆时针方向;

解

统一记题目给出的曲线围成的区域或补线后围成的区域为 S, 知单位法向量为 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, 进而有:

$$\begin{aligned}
&\int_L ydx+zdy+xdz\\
&=\iint\limits_{S} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x \end{vmatrix}\\
&=-\iint\limits_{S} dydz+dzdx+dxdy\\
&=-\iint\limits_{S} \sqrt{3}d\sigma=-\sqrt{3}\pi a^2
\end{aligned}$$

(2) $\int\limits_L 3zdx+5xdy-2ydz$, 其中 L 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=y+3$ 的交线（它是椭圆）, 从 z 轴的正向看去, 是逆时针方向;

解

知单位法向量为 $(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, 有:

$$\begin{aligned}
&\int_L 3zdx+5xdy-2ydz\\
=&\iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3z & 5x & -2y\end{vmatrix}\\
=&\iint\limits_S -2dydz-3dzdx+5dxdy\\
=&\iint\limits_S \sqrt{2}d\sigma=2\pi
\end{aligned}$$

(3) $\int\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, 其中 L 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1(a>0,h>0)$ 的交线（它是椭圆）, 从 x 轴的正向看去, 是逆时针方向;

解

知单位法向量为 $(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}},0,\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}})$, 有:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz\\
=&\iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}} & 0 & \frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix} d\sigma\\
=&\iint\limits_S \frac{-\frac{2}{h}-\frac{2}{a}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}dS\\
=&\pi\cdot a\cdot\sqrt{a^2+h^2}\cdot\frac{-\frac{2}{h}-\frac{2}{a}}{\sqrt{frac1a^2+\frac{1}{h^2}}}\\
=&-2\pi a(a+h)
\end{aligned}$$

(4) $\int\limits_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, 其中 L 是用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 截立方体 $0\le x,y,z\le 1$ 的表面所得的截痕, 从 x 轴的正向看去, 是逆时针方向;

解

知单位法向量为 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, 进而有:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz\\
=&\iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix} dS\\
=&-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_S (x+y+z)dS=-\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

•(不知如何运用 Stokes 公式, 先采用朴素的方法求解了)(5) $\int\limits_L (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$, 其中 L 是沿着螺线 $x=a\cos\varphi,y=a\sin\varphi,z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ 从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 的路径;

解

$$\int_L (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$
$$=\int_0^{2\pi}((a^2\cos^2\varphi-\frac{ah}{2\pi}\varphi\sin\varphi)(-a\sin\varphi)+(a^2\sin^2\varphi-\frac{ah}{2\pi}\varphi\cos\varphi)(a\cos\varphi)+(\frac{h^2}{4\pi^2}\varphi^2-a^2\cos\varphi\sin\varphi)\frac{h}{2\pi})d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{h^3}{8\pi^3}\varphi^2 d\varphi=\frac{h^3}{3}$$

(6) $\int\limits_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$, 其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线, 从 z 轴的正向看去, 是逆时针方向.

解

知单位法向量为 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, 有:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz\\
=&\iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix} dS\\
=&-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_S (8x+4y+6z)dS\\
=&-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{S_{xy}}\sqrt{3}(12+2x-2y)dS\\
=&-24+2\iint\limits_{S_{xy}}(x-y)dS
\end{aligned}$$

由对称性, 知 $\iint\limits_{S_{xy}}(x-y)dS=0$, 进而结果为-24.

15. 设 $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上恒为正值的连续函数, L 是逆时针方向的圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$, 证明:

$$\int\limits_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$$

证明

由 Green 公式, 记 L 所围成的区域为 S:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\\
=&\iint\limits_S (f(y)+\frac{1}{f(x)})dxdy\\
=&\iint\limits_S (f(x)+\frac{1}{f(x)})dxdy\\
\geq&\iint\limits_S (2)dxdy=2\pi
\end{aligned}$$

14. 设 D 为两条直线 $y=x, y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1, xy=4$ 所围成的区域, $F(u)$ 是具有连续导数的一元函数, 记 $f(u)=F'(u)$. 证明:

$$\int\limits_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du$$

其中 ∂D 的方向为逆时针方向.

证明

知这区域由两关于原点对称的部分构成, 只考虑一部分和同时考虑结果是一样的, 因为只需在结论两边同时乘以 2, 故下面只证明在第一象限的那部分:
采取换元 $u=xy, v=\frac{y}{x}$, 知 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2v}$, 有:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy\\=&\iint\limits_{D}f(xy)dxdy\\=&\int_1^4\frac{1}{2v}dv\int_1^4 f(u)du\\=&\ln 2\int_1^4 f(u)du\end{aligned}$$

15. 证明: 若 Σ 为封闭曲面, $\boldsymbol{l}$ 为一固定向量, 则

$$\iint\limits_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})dS=0$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 的单位外法向量.

解

设 $\boldsymbol{l}=(l_1,l_2.l_3)$, 并设 Σ 的方程为 $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$, 知曲面上一点的单位外法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\parallel\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\parallel}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_u&=(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u})\\\boldsymbol{r}_v&=(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v})\end{aligned}$$

进而有:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})dS\\=&\iint\limits_{\Sigma}\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}}{\parallel\boldsymbol{n}\parallel\parallel\boldsymbol{l}\parallel}dS\\=&\frac{1}{\parallel\boldsymbol{n}\parallel\parallel\boldsymbol{l}\parallel}\iint\limits_{\Sigma'}\begin{vmatrix}l_1&l_2&l_3\\\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}dudv\\=&\frac{1}{\parallel\boldsymbol{n}\parallel\parallel\boldsymbol{l}\parallel}\iint\limits_{\Sigma'}0dudv=0\end{aligned}$$

•16. 设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成, 证明:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{r} = \frac{1}{2}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 的单位外法向量, $\boldsymbol{r}=(x,y,z), r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解

5.10 补充: 裴礼文上的曲面积分

7.4.1 计算 $I=\iint\limits_{S}(x^2+y^2)dS$, 其中 S 是 xy 平面上方的抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$.

解

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{4r^2+1}dr=\frac{149}{30}\pi\end{aligned}$$

7.4.2 已知椭圆抛物面

$$\Sigma_1: z=1+x^2+2y^2, \Sigma_2: z=2(x^2+3y^2)$$

计算 Σ_1 被 Σ_2 截下部分的曲面面积.

解

令 $1+x^2+2y^2=2x^2+6y^2$, 解得 $x^2+4y^2=1$, 进而

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma_1}dS &= \iint\limits_{x^2+4y^2\le 1}\sqrt{1+4x^2+16y^2}dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{2}r\sqrt{1+4r^2}dr=\frac{\pi}{12}(5\sqrt{5}-1)\end{aligned}$$

7.4.3 计算 $I=\iint\limits_{S}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS$, 其中 $\boldsymbol{a}=\{xy,-x^2,x+z\}$, S 为平面 $2x+2y+z=6$ 包含在第一卦限的部分, $\boldsymbol{n}$ 是 S 的单位法向量.

解

Chapter 6

场的数学

6.1 数量场的梯度

6.1.1 练习题

1. 设 f, g 是数量场. 证明:

$$\nabla \frac{f}{g} = \frac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g)$$

证明

$$\begin{aligned}
&\nabla \frac{f}{g} \\
=&(\frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial x}, \frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial y}, \frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial z}) \\
=&(\frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}, \frac{g\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}, \frac{g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}) \\
=&\frac{1}{g^2}(g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}, g\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial g}{\partial y}, g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z}) \\
=&\frac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g)
\end{aligned}$$

2. 设 u 为一数量场, $\mathbf{f}$ 为一向量场, 计算 $\nabla(u \circ \mathbf{f})$.

解

设 $\boldsymbol{f} = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$, 有:

$$\begin{aligned}
&\nabla(u \circ \boldsymbol{f}) \\
=&(\frac{\partial(u \circ \boldsymbol{f})}{\partial x}, \frac{\partial(u \circ \boldsymbol{f})}{\partial y}, \frac{\partial(u \circ \boldsymbol{f})}{\partial z}) \\
=&(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial x}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial y}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial z})
\end{aligned}$$

3. 设 $\boldsymbol{p} = (x, y, z), p = \parallel \boldsymbol{p} \parallel$, f 为单变量函数, 计算:

(1) $\nabla \ln p$;

解

$$\nabla \ln p = \frac{1}{p}\nabla p = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

(2) $\nabla f(p)$;

解

$$\nabla f(p) = f'(p)\nabla p = (\frac{xf'(p)}{p}, \frac{yf'(p)}{p}, \frac{zf'(p)}{p})$$

(3) $\nabla f(p^2)$;

解

$$\nabla f(p^2) = f'(p^2)\nabla p^2 = 2f'(p^2)p\nabla p = (2xf'(p^2), 2yf'(p^2), 2zf'(p^2))$$

(4) $\nabla(f(p)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})$($\boldsymbol{a}$ 为常向量).

解

设 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, 知 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} = a_1x + a_2y + a_3z$, 这也可以视作一个向量场 q, 进而:

$$\begin{aligned}&\nabla(f(p)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})\\ =&\nabla(f(p)q) = q\nabla f(p) + f(p)\nabla q = qf'(p)\nabla p + f(p)(a_1, a_2, a_3)\\ =&(\frac{f'(p)(a_1x+a_2y+a_3z)x + a_1f(p)}{p}, \frac{f'(p)(a_1x+a_2y+a_3z)y + a_2f(p)}{p}, \frac{f'(p)(a_1x+a_2y+a_3z)z + a_3f(p)}{p})\end{aligned}$$

4. 求数量场 f 沿数量场 g 的梯度方向的变化率, 问何时这个变化率等于零？

解

知 $\nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x^1}, \frac{\partial g}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x^n})$, 进而 f 沿这向量的方向导数即:

$$\frac{1}{\parallel \nabla g \parallel}(\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial g}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial g}{\partial x^n})$$

当这变化率等于零, 即有:

$$(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n})\cdot(\frac{\partial g}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x^n}) = 0$$

此即两函数的梯度在此正交, 也即两函数的等值面在此正交.

5. 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域, $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场, 数量场 $u \in C^1(\Omega)$, 点 $\boldsymbol{p} \in \Omega^\circ$, 求证:

$$\nabla u(\boldsymbol{p}) = \lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint\limits_{\partial\Omega} u\boldsymbol{n}d\sigma$$

证明

设 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 记

$$\iint\limits_{\partial\Omega} u\boldsymbol{n}d\sigma = (\iint\limits_{\partial\Omega} u\cos\alpha d\sigma)\boldsymbol{i} + (\iint\limits_{\partial\Omega} u\cos\beta d\sigma)\boldsymbol{j} + (\iint\limits_{\partial\Omega} u\cos\gamma d\sigma)\boldsymbol{k}$$

只考虑 $\boldsymbol{i}$ 坐标, 记 $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0, z_0)$, 两边比对, 左式即:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

右式即

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Omega\to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \cdot \iint\limits_{\partial\Omega} u\cos\alpha d\sigma \\
=&\lim_{\Omega\to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \cdot \iint\limits_{\partial\Omega} u dy dz \\
=&\lim_{\Omega\to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \cdot \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} d\sigma \\
=&\lim_{\Omega\to \boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \cdot \mu(\Omega)\frac{\partial u}{\partial x}(\xi^1,\xi^2,\xi^3) \\
=&\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)
\end{aligned}
$$

另外两个坐标同理, 即证.

6.2 向量场的散度

1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 令 $\boldsymbol{p}=(x,y)$ 且 $p=\|\boldsymbol{p}\|$, 求证: 当 $p>0$ 时, $\ln p$ 是调和函数.

证明

知

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln p}{\partial x^2} &= \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 \ln p}{\partial y^2} &= \frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 \ln p}{\partial z^2} &= \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}
\end{aligned}
$$

进而

$$
\frac{\partial^2 \ln p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \ln p}{\partial z^2}=0
$$

命题得证.

2. 求证:

$$
\Delta(fg)=f\Delta g+g\Delta f+2\nabla f\nabla g
$$

证明

$$
\begin{aligned}
&\Delta(fg) \\
=&\frac{\partial^2(fg)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(fg)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(fg)}{\partial z^2} \\
=&\frac{\partial}{\partial x}(f\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(f\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(f\frac{\partial g}{\partial z}+g\frac{\partial f}{\partial z}) \\
=&f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+g\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+f\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}+g\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z} \\
=&f\Delta g+g\Delta f+2\nabla f\nabla g
\end{aligned}
$$

3. 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域, $u,v\in C^2(\Omega)$, $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场, 求证:

(1) $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}d\sigma=\int_\Omega \Delta u d\mu$;

证明

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}d\sigma \\
=&\int_{\partial\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)d\sigma \\
=&\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}dydz+\frac{\partial u}{\partial y}dzdx+\frac{\partial u}{\partial z}dxdy \\
=&\int_{\Omega}\Delta u d\mu
\end{aligned}$$

(2) $\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}d\sigma=\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v d\mu+\int_{\Omega}v\Delta u d\mu$;

证明

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}d\sigma \\
=&\int_{\partial\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+v\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)d\sigma \\
=&\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial x}dydz+v\frac{\partial u}{\partial y}dzdx+v\frac{\partial u}{\partial z}dxdy \\
=&\int_{\Omega}(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z})d\mu \\
=&\int_{\Omega}v\Delta u d\mu+\int_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u d\mu
\end{aligned}$$

(3) （第二 Green 公式）

$$\int_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \\ u & v\end{vmatrix}d\sigma=\int_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v \\ u & v\end{vmatrix}d\mu$$

证明

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \\ u & v\end{vmatrix}d\sigma \\
&=\int_{\partial\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}})d\sigma \\
&=\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v+v\Delta u-\nabla u\nabla v-u\Delta v d\mu \\
&=\int_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v \\ u & v\end{vmatrix}d\mu
\end{aligned}$$

4. 设 u 是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭区域 Ω 上的调和函数, $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 求证:

(1) $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}d\sigma=0$;

证明　因为 u 是调和函数, 故 $\Delta u=0$, 自然题设式子为 $\int_{\Omega}\Delta u d\mu=0$.

(2) $\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}d\sigma=\int_{\Omega}\parallel\nabla u\parallel^2 d\mu$.

证明

代入 $\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}d\sigma=\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v d\mu+\int_{\Omega}v\Delta u d\mu$ 即得结论.

6.2.1 问题

1. 设 u 是 $\mathbb{R}^3$ 中闭区域 Ω 上的调和函数, 求证:

$$u(\boldsymbol{p}_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma$$

其中 $\boldsymbol{p}_0$ 是 Ω 内的任意一点, $\boldsymbol{p}$ 为从 $\boldsymbol{p}_0$ 到 $\partial\Omega$ 上的点的向量, $p=\|\boldsymbol{p}\|$. 这一事实表明, 调和函数由其边界上的值完全确定.

证明

挖空, 因为 $\boldsymbol{p}_0$ 处 $\frac{1}{p}$ 不可微, 故在此处挖一小球 $B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)$, 记 Ω 挖去 $B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)$ 所生成的区域为 Ω', 知按定向有 $\partial\Omega=\partial\Omega'+\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)$, 进而:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma\\=&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega'}(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma\end{aligned}$$

通过计算注意到 $\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}=-\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial\boldsymbol{n}}$, 从而上前半式即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega'}(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma\\=&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega'}(\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}-u\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma\\=&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega'}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}&\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial\boldsymbol{n}}\\u&\frac{1}{p}\end{vmatrix}d\sigma\\=&\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega'}\begin{vmatrix}\Delta u&\Delta\frac{1}{p}\\u&\frac{1}{p}\end{vmatrix}d\mu\end{aligned}$$

根据题目条件及例 2, u 和 $\frac{1}{p}$ 都是调和函数, 从而 $\Delta u=\Delta\frac{1}{p}=0$, 进而上式等于 0, 故有:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma$$

即

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}(\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}-u\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}(\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}-u\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma$$

因为在 $\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)$ 上, 单位外法向量即为径向, 故 $\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial\boldsymbol{n}}|_{p=\varepsilon}=\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial p}|_{p=\varepsilon}=-\frac{1}{\varepsilon^2}$, 进而:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}(\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}-u\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial\boldsymbol{n}})d\sigma\\=&\frac{1}{4\pi}(\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}d\sigma-\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}u\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial\boldsymbol{n}}d\sigma)\\=&\frac{1}{4\pi}(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}d\sigma+\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}\frac{u}{\varepsilon^2})\\=&\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}ud\sigma\end{aligned}$$

由中值定理, $\varepsilon\to 0,\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}ud\sigma\to 4\pi\varepsilon^2u(\boldsymbol{p}_0)$, 进而

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0,\varepsilon)}ud\sigma\to u(\boldsymbol{p}_0)$$

进而命题得证.

2.(调和函数的平均值定理) 若 u 在 Ω 内是调和函数, $\boldsymbol{p}_0$ 是 Ω 内的任意一点, Σ 是 Ω 内以 $\boldsymbol{p}_0$ 为球心、以 R 为半径的球面. 求证:

$$u(\boldsymbol{p}_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_\Sigma u d\sigma$$

证明

在 **1.** 中令 $p\equiv R$ 即可.

3. 若 u 在闭区域 Ω 内是调和函数, 在 Ω 上连续且不是常数. 求证: u 只在 $\partial\Omega$ 上取到它在 Ω 上的最大值和最小值.

证明

若 u 在 $\boldsymbol{p}_0\in\Omega^\circ$ 取得最大值, 沿用 **2**. 的记号有:

$$u(\boldsymbol{p}_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_\Sigma u(\boldsymbol{x})d\sigma\le\frac{1}{4\pi R^2}\int_\Sigma u(\boldsymbol{p}_0)d\sigma=u(\boldsymbol{p}_0)$$

要保证式子的正确性, 就需排除等号不成立的情况, 此处即 Σ 内满足 $u(\boldsymbol{x})<u(\boldsymbol{p}_0)$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 所组成的集合是零测集. 但任取其中一点 $\boldsymbol{x}_0$, 届于 u 在 Ω 上连续, 知:

$$u(\boldsymbol{x}_0)<u(\boldsymbol{p}_0)\Rightarrow\exists\delta>0\forall\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0)(u(\boldsymbol{x})<u(\boldsymbol{p}_0))$$

而 $B(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 显然不是零测集, 矛盾! 故命题成立.

6.3 向量场的旋度

6.3.1 练习题

•1. 证明:

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}$$

证明

设 $\boldsymbol{F}=(F^1,F^2,F^3)$:

$$\begin{aligned}
&\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})\\
=&\nabla\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\F^1&F^2&F^3\end{vmatrix}\\
=&\nabla\times(\frac{\partial F^3}{\partial y}-\frac{\partial F^2}{\partial z},\frac{\partial F^1}{\partial z}-\frac{\partial F^3}{\partial x},\frac{\partial F^2}{\partial x}-\frac{\partial F^1}{\partial y})\\
=&\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\frac{\partial F^3}{\partial y}-\frac{\partial F^2}{\partial z}&\frac{\partial F^1}{\partial z}-\frac{\partial F^3}{\partial x}&\frac{\partial F^2}{\partial x}-\frac{\partial F^1}{\partial y}\end{vmatrix}\\
=&(\frac{\partial^2F^2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2F^1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F^1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2F^3}{\partial z\partial x},-\frac{\partial^2F^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F^1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F^3}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2F^2}{\partial z^2},\frac{\partial^2F^3}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F^2}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2F^1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2F^3}{\partial x^2})
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})\\
=&\nabla(\frac{\partial F^1}{\partial x}+\frac{\partial F^2}{\partial y}+\frac{\partial F^3}{\partial z})\\
=&(\frac{\partial^2F^1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F^3}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2F^1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F^3}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2F^1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2F^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F^3}{\partial z^2})\\
&\nabla^2\boldsymbol{F}
\end{aligned}$$

2. 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域, $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 向量场 $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega)$. 求证:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}d\sigma$$

证明

记 $\boldsymbol{F}=(F^1,F^2,F^3)$, 有:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}d\sigma\\
=&\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ F^1&F^2&F^3\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

只考虑 $\boldsymbol{i}$ 坐标, 有:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}(F^3\cos\beta-F^2\cos\gamma)d\sigma\\
=&\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}F^3dzdx-F^2dxdy\\
=&\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\Omega}(\frac{\partial F^3}{\partial y}-\frac{\partial F^2}{\partial z})d\mu\\
=&\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}(\frac{\partial F^3}{\partial y}-\frac{\partial F^2}{\partial z})(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\\
=&(\frac{\partial F^3}{\partial y}-\frac{\partial F^2}{\partial z})(\boldsymbol{p})
\end{aligned}$$

从而等式右端即为点 $(\frac{\partial F^3}{\partial y}-\frac{\partial F^2}{\partial z}(\boldsymbol{p}),(\frac{\partial F^1}{\partial z}-\frac{\partial F^3}{\partial x})(\boldsymbol{p}),(\frac{\partial F^1}{\partial y}-\frac{\partial F^2}{\partial x})(\boldsymbol{p}))$, 这正是等式左端, 进而命题得证.

3. 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域, 数量场 $f\in C^2(\Omega)$, 在 Ω 中处处不为零, 且满足条件

$$\mathrm{div}(f\mathrm{grad}f)=af,\quad \|\nabla f\|^2=bf$$

其中 a 和 b 为常数, 试计算 $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}d\sigma$.

解

$$f\mathrm{grad}f=(f\frac{\partial f}{\partial x},f\frac{\partial f}{\partial y},f\frac{\partial f}{\partial z})$$

$$\mathrm{div}(f\mathrm{grad}f)=f\Delta f+\|\nabla f\|=af=(\Delta f+b)f$$

$$\Rightarrow a=\Delta f+b$$

$$\Rightarrow \Delta f=a-b$$

从而

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}d\sigma=\int_{\Omega}\Delta f d\mu=(a-b)\mu(\Omega)$$

6.4 有势场和势函数

6.4.1 练习题

1. 求下面 $\boldsymbol{F}$ 的势函数:

(1) $\boldsymbol{F}=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2})$;

解

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}=\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{x}{z^2}=\frac{\partial R}{\partial y}$. 故 $\boldsymbol{F}$ 是有势场, 进而其一个势函数为

$$\int_{(0,1,1)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}$$

从而欲求为 $x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z^2}+C$.

(2) $\boldsymbol{F}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+2xy}(x+y,x+y,z)$.

解

知 $\boldsymbol{F}$ 是有势场, 进而其一个势函数为:

$$\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz=\frac{1}{2}\ln((x+y)^2+z^2)-\frac{1}{2}\ln 3$$

从而欲求为 $\frac{1}{2}\ln((x+y)^2+z^2)+C$.

2. 计算下列恰当微分的曲线积分:

(1) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}xdx+y^2dy-z^2dz$;

解

按 $x=t+1,y=2t+1,z=-5t+1$ 的路径积分:

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}xdx+y^2dy-z^2dz=\frac{191}{6}$$

(2) $\int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)}yzdx+xzdy+xydz$;

解　按 $x=1-t,y=2-t,z=3-2t$ 换元, 可得欲求为-6.

(3) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 (x_1,y_1,z_1) 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的点, (x_2,y_2,z_2) 是球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 上的点, 并设 $a>0,b>0$.

解

按 $x=x_1+(x_2-x_1)t,y=y_1+(y_2-y_1)t,z=z_1+(z_2-z_1)t$ 换元, 有:

$$\begin{aligned}&\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\=&\int_0^1\frac{(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-a^2+((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2)t)dt}{\sqrt{(x_1+(x_2-x_1)t)^2+(y_1+(y_2-y_1)t)^2+(z_1+(z_2-z_1)t)^2}}\\=&b-a\end{aligned}$$

4. 设 f 为单变量的连续函数. 计算:

(1) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$;

解

按 $x=x_1+(x_2-x_1)t, y=y_1+(y_2-y_1)t, z=z_1+(z_2-z_1)t$ 换元, 有:

$$\begin{aligned}&\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)\\=&\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(t)dt\end{aligned}$$

•(2) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz)$.

6. 求解下列恰当微分方程:

(1) $xdx+ydy=0$;

解

取

$$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} xdx+ydy=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$$

进而方程通解为 $x^2+y^2=C$.

(2) $xdy+ydx=0$;

解

取

$$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} xdy+ydx=2xy$$

进而方程通解为 $xy=C$.

(3) $(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$;

解取

$$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} (x+2y)dx+(2x+y)dy=\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2$$

进而方程通解为 $x^2+4xy+y^2=C$.

(4) $(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=0$;

解

取

$$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\frac{1}{3}x^3-xy-\frac{y}{2}+\frac{1}{4}\sin 2y$$

进而方程通解为 $\frac{1}{3}x^3-xy-\frac{y}{2}+\frac{1}{4}\sin 2y=C$.

(5) $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$;

解

取

$$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} e^y dx+(xe^y-2y)dy=2xe^y-x-y^2$$

进而方程通解为 $2xe^y-x-y^2=C$.

(6) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{ydx-xdy}{x^2}$;

解

此即 $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{x^2})dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x})dy=0$, 有:

$$\int_{(1,1)}^{(x,y)}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{x^2})dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x})dy=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}-1-\sqrt{2}$$

进而方程通解为 $\frac{y}{x}+\sqrt{x^2+y^2}=C$.

(7) $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=xdx+ydy$.

解

此即 $(x+\frac{y}{x^2+y^2})dx+(y-\frac{x}{x^2+y^2})dy=0$, 有:

$$\int_{(1,1)}^{(x,y)}(x+\frac{y}{x^2+y^2})dx+(y-\frac{x}{x^2+y^2})dy=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-1-\mathrm{arctan}\frac{y}{x}+\frac{\pi}{4}$$

进而方程通解为 $x^2+y^2-2\mathrm{arctan}\frac{y}{x}=C$.

6.5 旋度场和向量势

6.5.1 练习题

1. 证明下列向量场都是 $\mathbb{R}^3$ 中的旋度场, 并求其向量势:

(1) $\boldsymbol{F}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$;

解

知 $P=z,Q=x,R=y$, 设 $\boldsymbol{F}$ 的一个向量势为 $\mathbf{G}=G_1\boldsymbol{i}+G_2\boldsymbol{j}+G_3\boldsymbol{k}$, 有:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}&=z\\ \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}&=x\\ \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}&=y\end{aligned}$$

令 $G_3=0$, 则 $G_2=-\frac{1}{2}z^2+f(x,y),G_1=xz+g(x,y),\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}=y$. 取 $f=0$, 得 $g=-\frac{1}{2}y^2$, 进而向量势为

$$\mathbf{G}=xz-\frac{1}{2}g^2\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}z^2\boldsymbol{j}+\nabla\varphi$$

其中 φ 是 $\mathbb{R}^3$ 上任一连续可微的函数.

(2) $\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$;

解

$P=xy,Q=-y^2,R=yz$, 设 $\boldsymbol{F}$ 的一个向量势为 $\mathbf{G}=G_1\boldsymbol{i}+G_2\boldsymbol{j}+G_3\boldsymbol{k}$, 有:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}&=xy\\ \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}&=-y^2\\ \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}&=yz\end{aligned}$$

令 $G_3=0$, 则 $G_2=-xyz+f(x,y),G_1=-y^2z+g(x,y)$, 进而 $yz+\frac{\partial f}{\partial x}+2y-\frac{\partial g}{\partial y}=yz$. 不妨就取 $f=0,g=y^2$, 进而向量势为

$$\mathbf{G}=y^2(1-z)\boldsymbol{i}-xyz\boldsymbol{j}+\nabla\varphi$$

其中 φ 是 $\mathbb{R}^3$ 上任意连续可微函数.

(3) $\boldsymbol{F}=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(y-x)\boldsymbol{k}$.

解

$P=z-y, Q=x-z, R=y-x$, 设 $\boldsymbol{F}$ 的一个旋度场为 $\mathbf{G}=G_1\boldsymbol{i}+G_2\boldsymbol{j}+G_3\boldsymbol{k}$, 有:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}&=z-y\\ \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}&=x-z\\ \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}&=y-x\end{aligned}$$

令 $G_3=0$, 则 $G_2=yz-\frac{1}{2}z^2+f(x,y), G_1=xz-\frac{1}{2}z^2+g(x,y)$, 进而 $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}=y-x$, 不妨就设 $f=g=xy$, 进而向量势为

$$\mathbf{G}=(xz+xy-\frac{1}{2}z^2)\boldsymbol{i}+(yz+xy-\frac{1}{2}z^2)\boldsymbol{j}+\nabla\varphi$$

其中 φ 是 $\mathbb{R}^3$ 上任意连续可微函数.

•**2.** 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中关于 $\boldsymbol{A}=(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0}$ 的星形域. 如果 $\boldsymbol{F}$ 是 Ω 中的无源场, 即 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$, 证明: $\boldsymbol{F}$ 必为 Ω 中的旋度场.

证明

Chapter 7

数项级数

7.1 无穷级数的基本性质

1. 至 **6.** 略.

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 也收敛. 试举例说明其逆命题不成立. 但若 $a_n > 0$, 则逆命题也成立, 试证之.

证明

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall p, q \in \mathbb{N}(q > p > N \Rightarrow |a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q| < \varepsilon)$. 此时

$$\begin{aligned}
&|(a_p + a_{p+1}) + (a_{p+1} + a_{p+2}) + \cdots + (a_q + a_{q+1})| \\
=&|(a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q) + (a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{q+1})| \\
\leq&|a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q| + |a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{q+1}| \\
<&2\varepsilon
\end{aligned}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 也收敛. 反例如 $a_n = (-1)^n$. 若 $a_n > 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall p, q \in \mathbb{N}(q > p > N \Rightarrow |(a_p + a_{p+1}) + (a_{p+1} + a_{p+2}) + \cdots + (a_q + a_{q+1})| < \varepsilon)$, 进而有:

$$\begin{aligned}
&|a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q| \\
=&a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q \\
<&a_p + a_{p+1} + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q + a_{q+1} \\
=&|a_p + a_{p+1} + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q + a_{q+1}| \\
<&\varepsilon
\end{aligned}$$

进而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

8. 设数列 $\{na_n\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 都收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证明

知:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall p, q \in \mathbb{N}(q > p > N \Rightarrow (|pa_p - qa_q| < \varepsilon \wedge |p(a_p - a_{p+1}) + \cdots + q(a_q - a_{q+1})| < \varepsilon))$$

进而有:

$$\begin{aligned}&\varepsilon > |p(a_p - a_{p+1}) + (p+1)(a_{p+1} - a_{p+2}) + \cdots + q(a_q - a_{q+1})|\\ =&|pa_p + a_{p+1} + \cdots + a_q - qa_{q+1}|\\ \geq&||a_{p+1} + \cdots + a_q| - |pa_p - qa_{q+1}||\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}&-\varepsilon < |a_{p+1} + \cdots + a_q| - |pa_p - qa_{q+1}| < \varepsilon\\ \Leftrightarrow &|pa_p - qa_{q+1}| - \varepsilon < |a_{p+1} + \cdots + a_q| < |pa_p - qa_{q+1}| + \varepsilon\end{aligned}$$

又因为

$$-\varepsilon < |pa_p - qa_q| - |q(a_q - a_{q+1})| < |pa_p - qa_{q+1}| = |pa_p - qa_q + q(a_q - a_{q+1})| < |pa_p - qa_q| + |q(a_q - a_{q+1})| < 2\varepsilon$$

进而

$$-2\varepsilon < |a_{p+1} + \cdots + a_q| < 3\varepsilon$$

从而命题得证.

7.1.1 问题

1. 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)} = \frac{1}{pr}(\frac{1}{q+p} + \frac{1}{q+2p} + \cdots + \frac{1}{q+rp})$$

这里 r 是正整数, $pn+q \neq 0 (n = 1, 2, \cdots)$.

证明

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)}\\ =&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{pr}(\frac{1}{pn+q} - \frac{1}{pn+q+pr})\\ =&\frac{1}{pr} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{pn+q} - \frac{1}{pn+q+pr})\\ =&\frac{1}{pr} \lim_{N\to\infty}(\frac{1}{q+p} + \cdots + \frac{1}{q+pr} - \frac{1}{p(N-r)+q+pr} - \cdots - \frac{1}{pN+q+pr})\\ =&\frac{1}{pr}(\frac{1}{q+p} + \cdots + \frac{1}{q+pr})\end{aligned}$$

2. 求证:

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty} \frac{1}{m^2 - n^2} = -\frac{3}{4m^2}$$

证明

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}\\
=&\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}(\frac{1}{(m+n)(m-n)})\\
=&-\frac{1}{2m}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}(\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m})\\
=&-\frac{1}{2m}(\frac{1}{m}+\frac{1}{2m})\\
=&-\frac{3}{4m^2}
\end{aligned}
$$

3. 求证:

$$12<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10^6}<15$$

证明

左式:

$$\sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{n}>\int_1^{10^6+1}\frac{1}{x}dx=\ln(10^6+1)>6\ln 10>12$$

右式:

$$\sum_{n=1}^{10^6}\frac{1}{n}<1+\int_1^{10^6}\frac{1}{x}dx=1+6\ln 10$$

进而只需证明 $\ln 10<\frac{7}{3}$, 知:

$$\ln 10<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{5}<\frac{7}{3}$$

4. 设 $a_n>0$, $\{a_n-a_{n+1}\}$ 为一个严格递减的数列. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n})=+\infty$$

证明 *(按照答案提示)*

首先证明 $\{a_n\}$ 递减: 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 进而有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n+1})=0$, 根据定义即 $\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall n\in\mathbb{N}(n>N\Rightarrow|a_n-a_{n+1}|<\varepsilon)$. 若 $\exists N'>0(a_{N'}-a_{N'+1}<0)$, 由 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 严格减知 $\forall n>N'(a_n-a_{n+1}<0)$, 不妨设 $a_{N'}-a_{N'+1}=M<0$, 即有 $\forall n>N'(a_n-a_{n+1}<M<0)$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n+1})\le M<0$, 矛盾! 故只能有 $\forall n\in\mathbb{N}(a_n-a_{n+1}>0)$. 从而 $\{a_n\}$ 严格减.

再证明 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}>\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}$: $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}>\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}$.

其次证明 $a_n^2<(a_n-a_{n+1})\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_n^2}{a_n-a_{n+1}}=\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k^2-a_{k+1}^2}{a_n-a_{n+1}}<\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k^2-a_{k+1}^2}{a_k-a_{k+1}}=\sum_{k=n}^{\infty}a_k+a_{k+1}\\
\Rightarrow&a_n^2<(a_n-a_{n+1})\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})
\end{aligned}
$$

最后:

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}>\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}>\frac{1}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})}\to+\infty$$

•**5.** 证明: 存在正常数 K, 使得不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\le K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

7.2 正项级数的比较判别法

7.2.1 练习题

1. 设 $a_n\le b_n(n=1,2,\cdots)$. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 能否断言 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛? 试举例说明之.

解 否, 比如 $a_n=-n,b_n=0$.

2. 用比较判别法讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+5}$;

解

因为在足够大的 N 后有 $0\le\frac{1}{3n^2+5}\le\frac{1}{n^2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛, 故级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$;

解

因为在足够大的 N 后有 $0\le\frac{n}{2^n}\le\frac{1}{n^2}$, 而后者的级数收敛, 故级数收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2}{3n^2+1})^n$;

解

现证明一个引理: 如果对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 有 $n\to\infty,a_n\sim b_n$, 那么它们同时收敛或发散.

证明

由 $n\to\infty,a_n\sim b_n$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, 进而在 n 足够大时有 $\frac{a_n}{b_n}=1+o(1)$, 其中 $|o(1)|<\frac{1}{2}$. 进而 $\frac{1}{2}b_n\le(1-|o(1)|)b_n\le a_n\le(1+|o(1)|)b_n\le\frac{3}{2}b_n$, 由比较审敛法知引理得证.

根据引理, 因为 $(\frac{n^2}{3n^2+1})^n\sim\frac{1}{3^n}$, 而后者的级数收敛, 故级数收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$;

解

因为 $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$, 而后者的级数收敛, 故级数收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$;

解

因为 $\frac{n+1}{n(n+2)}\sim\frac{1}{n}$, 而后者的级数发散, 故级数发散.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;

解

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{n}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=1$$

故 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\sim\frac{1}{n}$, 而后者的级数发散, 故级数发散.

(7) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$;

解

用 Cauthy 积分判别法: 显然 $\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ 递减, 知 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ 与 $\int_3^{\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{\ln\ln x}}$ 同敛散. 对反常积分, 知:

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{\ln\ln x}}=\int_{\ln 3}^{\infty}\frac{e^t dt}{t^{\ln t}}=\int_{\ln 3}^{\infty}e^{t-\ln^2 t}dt$$

该积分收敛的必要条件为 $t\to\infty, e^{t-\ln^2 t}\to 0$. 但:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\ln^2 t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{2\ln t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{2}=+\infty$$

故该积分必发散, 进而级数发散.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1)$;

解

因为 $n\ln(\frac{2n+1}{2n-1})-1=n\ln(1+\frac{2}{2n-1})-1\sim n(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{(2n-1)^2})-1=\frac{1}{(2n-1)^2}$, 而后者的级数收敛, 故级数收敛.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$;

解

首先有:

$$0\le\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1)$$

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1)$, 考虑不等式: $\ln n\le\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}$, 知:

$$e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\frac{\ln n}{n^2+1}\le\frac{1}{n^2+1}(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}})\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

而后者的级数收敛, 故原级数收敛.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}})$.

解

因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}}\sim\frac{1}{2n^2\sqrt{\frac{1}{n}}}$, 而后者的级数收敛, 故级数收敛.

3. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 但反之不然, 举例说明之.

证明

既然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 进而存在 N 使得 $\forall n>N(0<a_n^2<a_n)$, 进而由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛. 反例如 $\frac{1}{n^2}$.

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛, 试证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|, \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$$

也收敛.

证明

因为 $0 \le |a_n b_n| \le \frac{a_n^2+b_n^2}{2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2+b_n^2}{2}$ 也收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 也收敛. 因为 $0 \le (a_n+b_n)^2 \le (|a_n|+|b_n|)^2 = a_n^2+b_n^2+2|a_n b_n|$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 都收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$ 也收敛.

5. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛. 举例说明其逆命题不成立. 但若 $\{a_n\}$ 是递减数列, 则逆命题成立.

证明

既然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 自然也收敛. 因为 $0 < \sqrt{a_n a_{n+1}} \le \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$, 而后者的级数收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛. 反例如:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^5}, n = 2k \\ n, n = 2k+1 \end{cases}$$

若 $\{a_n\}$ 是递减数列（这里默认 $\{a_n\}$ 为正项）, 则知 $\sqrt{a_n a_{n+1}} \ge \sqrt{a_{n+1}^2} = a_{n+1} > 0$, 由前者的级数收敛自然可知后者的级数收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性是一样的, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

6. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$ 发散.

证明

因为 $\frac{1}{\ln n!} \ge \frac{1}{\ln n^n} = \frac{1}{n \ln n}$, 而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 与 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ 同敛散, 由后者的发散可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 进而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$ 发散.

7. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ 发散.

证明

知 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ 与 $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$ 共敛散, 而 $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \int_3^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln x \ln \ln x} = \int_3^{\infty} \frac{d \ln \ln x}{\ln \ln x} = (\ln \ln \ln x)|_3^{\infty}$ 发散, 故原级数发散.

•8. 问 p, q 取何值时, 级数

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$$

收敛?

解

显然 $p > 0$. 知 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln \ln n)^q}$ 与 $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln \ln x)^q}$ 共敛散, 而

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln \ln x)^q} = \int_3^{\infty} \frac{d \ln x}{(\ln x)^p(\ln \ln x)^q}$$

当 $p \le 1$, 知

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln \ln x)^q} \ge \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = (\ln \ln x)|_3^{\infty}$$

显然发散, 故只能有 $p>1$. 当 $q\geq 0$ 时:

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln 3}^\infty \frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$$

而存在 M 使得当 $t>M$ 有 $\frac{1}{t^p(\ln t)^q}\leq \frac{1}{t^p}$, 后者的反常积分是收敛的, 故原级数收敛.

•9. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛的正项级数. 证明: 对任何 $\delta>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+\delta}{2}}\sqrt{a_n}<+\infty$. 当 $\delta=0$ 时情况如何?

证明

用积分审敛法可知 $\forall\delta>0(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}<+\infty)$. 进而有:

$$0\leq\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+\delta}{2}}\sqrt{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{n^{1+\delta}}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{n^{1+\delta}}+a_n)$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 都收敛, 故原级数收敛.

$\delta=0$ 时, 考虑 $a_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$, 知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 与 $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 共敛散, 而后者为 $(-\frac{1}{\ln x})|_2^\infty=\frac{1}{\ln 2}$, 收敛, 从而原级数收敛, 但考虑级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

由积分审敛法可知后者发散, 从而原级数发散, 故 $\delta=0$ 时命题不一定成立.

10. 设 $\sigma>0, a_n>0(n=1,2,\cdots)$. 试证:

(1) 如果当 $n>N$ 时, 有 $(\ln\frac{1}{a_n})(\ln n)^{-1}\geq 1+\sigma$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

证明

知此时有

$$\ln\frac{1}{a_n}\geq(1+\sigma)\ln n\Rightarrow\frac{1}{a_n}\geq n^{1+\sigma}\Rightarrow 0\leq a_n\leq\frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

进而由后者级数的收敛性可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 如果当 $n>N$ 时, 有 $(\ln\frac{1}{a_n})(\ln n)^{-1}\leq 1$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

证明

知此时有

$$\ln\frac{1}{a_n}\leq\ln n\Rightarrow a_n\geq\frac{1}{n}$$

进而由后者的发散性可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(3) (利用上面的结果)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$$

收敛.

证明

对 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, 因为:

$$(\ln((\ln n)^{\ln n}))(\ln n)^{-1}=\ln\ln n\to+\infty$$

故由 (1) 知级数收敛.

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$, 因为:

$$(\ln(3^{\ln n}))(\ln n)^{-1}=\ln 3>1$$

故 (1) 中的 σ 存在, 进而该级数收敛.

11. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个发散的正项级数. 试证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

证明

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$, 当 $\{a_n\}$ 存在趋于正值或正无穷的子列 $\{a_{n_k}\}$, 知

$$\lim_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}=1$$

进而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}$ 发散, 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}\geq\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}$, 故级数发散. 若 $a_n\to 0$, 因为 $\frac{a_n}{1+a_n}\geq\frac{a_n}{2}$, 而后者的级数发散, 故原级数发散.

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$, 对 $\{a_n\}$ 的那些趋于正值或正无穷的子列 $\{a_{n_k}\}$, 知 $n\to\infty$, $\frac{a_{n_k}}{1+n^2a_{n_k}}\sim\frac{a_{n_k}}{n^2a_{n_k}}=\frac{1}{n^2}$, 而后者的级数收敛, 故原级数收敛. 对 $\{a_n\}$ 的那些趋于 0 的子列 $\{a_{n_p}\}$, 总可以将它再分为这样的子列 $\{a_{n_{p_q}}\}$, 使得 $n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}$ 要么趋于 0, 要么趋于某正值或正无穷. 当 $n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}\to 0$, 知此时 $a_{n_{p_q}}=o(\frac{1}{n^2})$, 有 $\frac{a_{n_{p_q}}}{1+n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}}\leq a_{n_{p_q}}$, 而后者的级数根据等价关系必收敛. 当 $n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}\to\delta>0$, 有引理:

引理若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 满足 $n\to\infty,b_n=O(a_n),\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛.

证明

因为 $n\to\infty,b_n=O(a_n)$, 故 $0\leq\frac{b_n}{a_n}$ 最终有界, 进而 $\exists M>0(\frac{b_n}{a_n}<M)$, 即 $0\leq b_n\leq Ma_n$, 由比较审敛法即可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. *Box*

由引理, 此时 $a_{n_{p_q}}=O(\frac{1}{n_{p_q}^2})$, 又因为 $\sum\limits_{q=1}^{\infty}\frac{1}{n_{p_q}^2}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{p=1}^{\infty}a_{n_{p_q}}$ 收敛. 又因为 $\exists m\geq 0(n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}\geq m)$, 故:

$$0\leq\frac{a_{n_{p_q}}}{1+n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}}\leq\frac{a_{n_{p_q}}}{1+m}\leq a_{n_{p_q}}$$

进而由比较审敛法可知 $\sum\limits_{q=1}^{\infty}\frac{a_{n_{p_q}}}{1+n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}}$ 收敛. 当 $n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}\to\infty$, 知 $\frac{a_{n_{p_q}}}{1+n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}}\sim\frac{a_{n_{p_q}}}{n_{p_q}^2a_{n_{p_q}}}=\frac{1}{n^2}$, 进而由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性可知原级数收敛. 综上, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

•12. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty,\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha+\beta>1$. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}<+\infty$$

证明

当 $\alpha\geq 1$, 知 $\frac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}\leq a_n^{\alpha}$. 既然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 必有 $n\to\infty,a_n\to 0$, 进而 $\exists N>0\forall n>N(a_n^{\alpha}\leq a_n)$, 进而由后者级数的收敛可知原级数收敛.

当 $\alpha<1$,

7.2.2 问题

•1. 试证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 当 $0<x<e^{-1}$ 时收敛, 当 $x\geq e^{-1}$ 时发散.

证明

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\ln x}$. 当 $0 < x < e^{-1}$, 知 $e^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\ln x} < e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}$

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个发散的正项级数. 问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ 的敛散情况如何?

解

3. 设 $a_n > 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha \le 1$ 且 $S_n \to +\infty$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

4. 设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同收敛. 利用这一结果, 证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 当 $\alpha > 0$ 时收敛, 当 $\alpha \le 0$ 时发散;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散.

5. 证明: 从调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 中划去所有分母中含有 9 的那些项 (例如 $\frac{1}{9}, \frac{1}{19}, \frac{1}{391}$ 等) 之后, 所得的新级数是收敛的, 且其和不超过 80.

7.3 正项级数的其他判别法

7.3.1 练习题

1. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

解 知 $n \to \infty, n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}} \sim \frac{\pi n}{2^{n+1}}$. 而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\pi(n+1)}{2^{n+2}}\frac{2^{n+1}}{\pi n} = \frac{1}{2} < 1$, 故后者的级数收敛, 进而原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;

解 知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$, 故级数收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}(\sqrt{3} + (-1)^n)^n$;

解 知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}(\sqrt{3} + (-1)^{n+1})^{n+1} \cdot \frac{3^n}{n^5}(\sqrt{3} + (-1)^n)^{-n} = \frac{\sqrt{3}+1}{3} < 1$, 故级数收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^n}$;

解 届于 $(1+\frac{1}{n})^n < e$, 知 $\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^n} > \frac{n^2}{e}$, 而后者的级数发散, 故原级数发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$;

解 知

$$\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = e^{(n+\frac{1}{n})\ln n - n\ln(n+\frac{1}{n})} = e^{\frac{n^2\ln\frac{n}{e}+\ln n}{n(n^2+1)}} \sim e^{\frac{\ln\frac{n}{e}}{n}+\frac{\ln n}{n^3}} \to e^{\frac{1}{e}}, n \to \infty$$

故原级数发散.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}(x \ge 0)$;

解　知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}=0<1$, 故原级数收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n-4}{3n+1})^n$;

解　知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{n-4}{3n+1}=\frac{1}{3}<1$, 故原级数收敛.

(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;

解　知在足够大的 N 后有 $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}=e^{\ln^2 n-n\ln n}=e^{(\ln n-n)\ln n}<e^{-2\ln n}=\frac{1}{n^2}$, 而后者的级数收敛, 故原级数收敛.

2. 利用 Raabe 判别法, 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}(a>0)$;

解

统一记级数通项为 a_n, 有:

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{a+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1)=\frac{an}{\sqrt{n+1}}\to\infty,n\to\infty$$

故原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}(p>0,q>0)$.

解

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n((\frac{n}{n+1})^{-p}\frac{q+n+1}{n+1}-1)\sim n(\frac{q+n+1}{n+1}-1)=\frac{qn}{n+1}\to q,n\to\infty$$

从而当 $q>1$, 原级数收敛；当 $q<1$, 原级数发散, 当 $q=1$, 用 Raabe 判别法无法判断.

3. 设 $\{a_n\}$ 是任意的正数列, 证明:

$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$$

证明

设 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$, 若 $p=0$, 则结论自然成立. 下设 $p>0$, 从而 $\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall n\in\mathbb{N}(\frac{a_{N+1}}{a_N}>p-\varepsilon)$, 特别有:

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}>p-\varepsilon,\quad\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}>p-\varepsilon,\quad\cdots,\quad\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}>p-\varepsilon$$

把这些不等式的两边分别乘起来, 得到: $\frac{a_{N+k}}{a_N}>(p-\varepsilon)^k$, 即:

$$a_n>a_N(p-\varepsilon)^{-N}(p-\varepsilon)^n$$

于是

$$\sqrt[n]{a_n}>\sqrt[n]{a_N(p-\varepsilon)^N}(p-\varepsilon)$$

进而

$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\ge p-\varepsilon$$

再令 $\varepsilon\to0$ 即得欲证不等式.

4. 设正数列满足

$$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=l,$$

或

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{l}{n}+o(\frac{l}{n}),n\to\infty$$

证明: 当 $l>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛; 当 $l<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散; 当 $l=1$ 时, 无法判断.

证明

当 $l>1$, 知 $\exists p\in\mathbb{R}(l>p>1)$, 进而在 n 足够大的情况下有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{p}{n}\sim(1+\frac{1}{n})^p$$
$$\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}<(\frac{n}{n+1})^p=\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}$$

从而根据引理 14.3.1 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的收敛性即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

当 $l<1$, 知 $\exists p\in\mathbb{R}(l<p<1)$, 进而在 n 足够大的情况下有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<1+\frac{p}{n}\sim(1+\frac{1}{n})^p$$
$$\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>(\frac{n}{n+1})^p=\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}$$

从而根据引理 14.3.1 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的发散性即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

当 $l=1$, 分别取 $a_n=\frac{1}{n}$ 和 $a_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$ 即可说明 Raabe 判别法失效.

6. 利用 Gauss 判别法, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^p},p>0$ 的敛散性.

解

记级数通项为 a_n, 有:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=(\frac{n+1}{n+p})(\frac{n+1}{n})^p\sim\frac{n+1}{n+p}\cdot\frac{n+p}{n}=1+\frac{1}{n}$$

此即 Gauss 判别法中 $\beta=0$ 的情况, 从而级数收敛.

7.4 任意项级数

1. 利用 Cauthy 收敛原理, 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$;

解

$$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{4}\forall N>0\exists q=2p>2N(|\frac{1}{2p-1}+\cdots+\frac{1}{2q-1}|>\frac{q-p}{2q-1}=\frac{n}{4n-1}>\frac{1}{4}=\varepsilon_0)$$

从而原级数发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$;

解

任取 $p>q,p,q\in\mathbb{N}$, 有:

$$|\sum_{n=q}^{p}\frac{\sin n}{2^n}|\le\sum_{n=q}^{p}|\frac{\sin n}{2^n}|\le\sum_{n=q}^{p}\frac{1}{2^n}$$

而根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的收敛性, $\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall p>q>N(|\sum\limits_{n=q}^{p}\frac{1}{2^n}|<\varepsilon)$, 进而有:

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall p>q>N(|\sum_{n=q}^{p}\frac{\sin n}{2^n}|\leq\sum_{n=q}^{p}\frac{1}{2^n}<\varepsilon)$$

从而原级数收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n!}{n(n+1)}$;

解

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的收敛性可知:

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall p,q\in\mathbb{N}(p>q>N\Rightarrow|\sum_{n=q}^{p}\frac{1}{n(n+1)}|<\varepsilon)$$

而

$$|\sum_{n=q}^{p}\frac{\cos n!}{n(n+1)}|\leq\sum_{n=q}^{p}|\frac{\cos n!}{n(n+1)}|\leq\sum_{n=q}^{p}\frac{1}{n(n+1)}=|\sum_{n=q}^{p}\frac{1}{n(n+1)}|<\varepsilon$$

故原级数收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}$.

解

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\sin n!)}$ 的收敛性可知:

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall p,q\in\mathbb{N}(p>q>N\Rightarrow|\sum_{n=q}^{p}\frac{1}{n(n+\sin n!)}|<\varepsilon)$$

而

$$|\sum_{n=q}^{p}\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}|\leq\sum_{n=q}^{p}|\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}|\leq\sum_{n=q}^{p}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n(n+\sin n!)}<\sqrt{a^2+b^2}\varepsilon$$

由 ε 的任意性即得原级数收敛.

2. 试利用 Cauthy 收敛原理, 证明交错级数的 Leibniz 判别法: 如果正数列 $\{a_n\}$ 递减趋于 0, 那么交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

证明

对任意的 $p>q$, 不妨设 q 为奇数, p 为偶数, 有:

$$\begin{aligned}|\sum_{n=q}^{p}(-1)^{n-1}a_n|&=|a_q-a_{q+1}+\cdots+a_{p-1}-a_p|\\&=a_q-aq+1+\cdots+a_{p-1}-a_p\\&=a_q-(a_{q+1}-a_{q+2})-\cdots-(a_{p-2}-a_{p-1})-a_p<a_q\end{aligned}$$

事实上无论 p,q 怎么选取, 上述不等式都是成立的. 届于 $\{a_n\}$ 递减趋于 0, 根据定义有:

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall n>N(|a_n|=a_n<\varepsilon)$$

进而若 $q>N$, 有:

$$|\sum_{n=q}^{p}(-1)^{n-1}a_n|<a_q<a_N<\varepsilon$$

从而原级数收敛.

3. 设 $a_n \le c_n \le b_n(n=1,2,\cdots)$. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是收敛级数, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 结论如何?

证明

取 $\{c_n\}$ 的三个按原来的先后顺序排成的子列 $\{c_{1n}\},\{c_{2n}\},\{c_{3n}\}$, 对应取 $\{a_n\},\{b_n\}$ 中的子列 $\{a_{in}\},\{b_{in}\}, i=1,2,3$, 其中 $\{c_{1n}\}$ 是 $\{c_n\}$ 中大于 0 的项, $\{c_{2n}\}$ 是 $\{c_n\}$ 中小于 0 的项, $\{c_{3n}\}$ 是 $\{c_n\}$ 中为 0 的项. 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{3n}=0$, 下面只需证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{1n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{2n}$ 都收敛即可. 对 $\{c_{1n}\}$, 因为 $0<c_{1n}\le a_{1n}$, 而后者的级数收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{1n}$ 收敛. 对 $\{c_{2n}\}$, 因为 $0<-c_{2n}<-b_{2n}$, 而后者的级数收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -c_{2n}$ 收敛, 自然有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{2n}$ 收敛. 从而既然 $\{c_n\}$ 的三个子列都收敛, 其必收敛.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 无法判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的敛散性, 如 $a_n=1, b_n=-1$, 取 $c_n=0$ 和 $c_n=\frac{1}{n^2}$ 即可.

4. 在交错级数的 Leibniz 判别法中, 如果去掉 $\{a_n\}$ 递减这个条件, 结论可能不成立. 试以下例说明之:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{[\frac{n+1}{2}]}+(-1)^n}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$$

证明

设 k 为奇数, 有:

$$\frac{1}{\sqrt{[\frac{k+1}{2}]}-1}-\frac{1}{\sqrt{[\frac{k+2}{2}]}+1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{2}}-1}-\frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{2}}+1}=\frac{4}{k-1}$$

进而若取 p 是奇数, $q=2p$, 有:

$$|\sum_{n=p}^{q}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{[\frac{n+1}{2}]}+(-1)^n}|=|\frac{4}{p-1}+\frac{4}{p+1}+\cdots+\frac{4}{2p-2}|>|\frac{4}{2p-2}\cdots\frac{p-1}{2}|=1$$

从而根据 Cauthy 准则知该级数发散.

5. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

解统一记题目给出的级数通项的绝对值为 a_n, 易知 $\{a_n\}$ 递减趋 0, 故原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

解

知 $\{a_n\}$ 在有限项后递减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$, 从而设 p,q 是奇数且 $p>q$, 有:

$$\begin{aligned}&|\frac{1}{\sqrt[q]{q}}-\frac{1}{\sqrt[q+1]{q+1}}+\cdots-\frac{1}{\sqrt[p-1]{p-1}}+\frac{1}{\sqrt[p]{p}}|\\=&\frac{1}{\sqrt[q]{q}}-\frac{1}{\sqrt[q+1]{q+1}}+\cdots-\frac{1}{\sqrt[p-1]{p-1}}+\frac{1}{\sqrt[p]{p}}>\frac{1}{\sqrt[p]{p}}\to 1\end{aligned}$$

从而根据 Cauthy 准则知该级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$;

解易知 $\{a_n\}$ 递减趋 0, 故原级数收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

解

知

$$|\sum_{n=1}^{N} \sin nx| \leq |\frac{1}{\cos\frac{1}{2}x}|$$

从而只要 $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 由 Abel-Dirichlet 判别法都可知原级数收敛. 当 $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 原级数敛散性则与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 敛散性相同, 而后者显然发散, 故原级数发散.

6. 设 $\{a_n\}$ 递减趋于 0, 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

的敛散性.

解

知

$$|\sum_{n=1}^{N} \cos nx| \leq |\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}|, \quad |\sum_{n=1}^{N} \sin nx| \leq |\frac{1}{\cos\frac{1}{2}x}|$$

从而只要 $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 由 Abel-Dirichlet 判别法都可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 收敛, 否则无法判断. 同理, 只要 $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 都收敛, 否则无法判断.

7. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛级数, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, 能否断言 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也是收敛级数？请研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}).$$

解

记上述两级数的前者的通项为 a_n, 后者通项为 b_n, 知这两个级数符合题意, 但根据 *Cauthy* 准则易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

8. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0.$$

证明

记 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = S_n$, 由 Abel 分部求和公式知:

$$\sum_{i=1}^{n} ia_i = nS_n - \sum_{i=1}^{n} S_i$$

进而

$$\frac{1}{n}(nS_n - \sum_{i=1}^{n} S_i) = S_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{n}$$

届于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = p$, 下面计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} S_i$: 由 Stolz 定理可知:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} S_i}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n = p$$

从而根据极限运算法则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(nS_n - \sum_{i=1}^{n} S_i) = p - p = 0$$

9. 证明: 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛, 那么对任意的 $\beta > \alpha$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta}$ 也收敛.

证明

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛, $\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ 有界, 故根据 Abel-Dirichlet 判别法知原级数收敛.

10. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项递减趋于 0, p 是任意固定的正整数. 证明: 级数

$$a_1 + \cdots + a_p - a_{p+1} - \cdots - a_{2p} + a_{2p+1} + \cdots + a_{3p} - \cdots$$

是收敛的.

证明

由题意可知必有 $a_n \geq 0$, 从而有:

$$\sum_{n=1}^{p} a_n \geq \sum_{n=p}^{2p} a_n \geq \cdots$$

也即若记 $b_n = \sum\limits_{i=np}^{(n+1)p} a_n$, 则 b_n 是递减趋于 0 的. 根据 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ 收敛, 也即欲证命题.

11. 讨论下列级数的敛散性:

•(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \frac{\sin nx}{n}$;

解

知 $|\sum\limits_{i=1}^{n} \sin ix| \leq |\frac{1}{\cos\frac{1}{2}x}|$, 从而当 $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 容易验证 $\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}$ 在有限项后是递减趋 0 的, 从而由 Abel-Dirichlet 判别法知原级数收敛. 当 $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 知原级数与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) \frac{1}{n}$ 共敛散, 但后者作为正项级数, 通项大于 $\frac{1}{n}$, 从而后者发散, 自然原级数也发散.

•12. 设 $a_n > 0$, 证明: 如果

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lambda > 0,$$

那么交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

解

知:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}) > 1, \quad n \to \infty$$

从而在有限项 N 后 $\{a_n\}$ 递减, 下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 知:

7.5 绝对收敛和条件收敛

7.5.1 练习题

1. 在下列级数中, 哪些是绝对收敛的？哪些是条件收敛的？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}(\alpha > 1)$;

解

届于 $|\frac{\sin nx}{n^\alpha}| \le \frac{1}{n^\alpha}$, 而后者的级数收敛, 故原级数绝对收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx$;

解

届于 $|\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx| \le \frac{1}{2^n}$, 而后者的级数收敛, 故原级数绝对收敛.

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln n}$;

解

根据 Cauthy 积分审敛法知 $\sum\limits_{n=2} \frac{1}{n\ln n}$ 发散, 但根据 Leibniz 审敛法可知原级数收敛, 故原级数条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{10}}{a^n}(a > 1)$;

解

届于 $|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{10}}{a^n}| = \frac{n^{10}}{a^n}$, 而后者的级数根据 D'Alembert 判别法知其收敛, 故原级数绝对收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

解

知 $\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, n \to \infty$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 发散. 但因为 $\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 在有限项之后递减趋 0, 故由 Leibniz 判别法知原级数收敛. 故原级数条件收敛.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$.

解

知 $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, n > 1$, 从而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散. 而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$ 的敛散性与 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 的敛散性相同, 由 Leibniz 判别法知后者收敛, 从而原级数收敛. 故原级数条件收敛.

2. 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$;

解

$p > 1$ 时, 知 $\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^p}$, 而后者的级数收敛, 故原级数绝对收敛.

$p = 1$ 时, 知 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}, n \to \infty$, 从而由后者级数的发散性可知原级数首先不绝对收敛. 其次验证 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 递减, 这只需验证 $n^{1+\frac{1}{n}} = e^{(1+\frac{1}{n})\ln n}$ 递增, 也即 $(1+\frac{1}{n})\ln n$ 递增. 对函数 $f(x) = (1+\frac{1}{x})\ln x$ 求导即得递增结论, 故由 Leibniz 判别法知原级数条件收敛.

$p<1$ 时, 知 $\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}>\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\sim\frac{1}{n}$, 从而由后者级数的发散性可知原级数首先不绝对收敛. 其次验证 $\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 递减, 这与 $p=0$ 时的过程一样, 只是结论变为数列在有限项后递减, 从而原数列条件收敛.

综上, $p>1$ 时原级数绝对收敛, $p\le 1$ 时原级数条件收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}$;

解

$p>1$ 时, 知 $|\frac{\cos 2n}{n^p}|\le\frac{1}{n^p}$, 而后者的级数收敛, 故原级数绝对收敛.

$0<p\le 1$ 时, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2n|}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2n|}{2n}$ 的敛散性相同, 下面讨论后者的敛散性. 首先估计 $|\cos 2n|$: 记数列 $b_n=2n$, 知 b_n 在区间 $I_n=[([\frac{2n}{\pi}]+1)\frac{\pi}{2},([\frac{2n}{\pi}]+3)\frac{\pi}{2}]$ 内至少有一个点, 至多有两个点, 这是因为该区间的长度为 π, 而 b_n 作为等差数列公差为 2, 根据 $\pi>2$ 可知但凡存在正整数 k 使得

$[([\frac{2k}{\pi}]+1)\frac{\pi}{2},([\frac{2k}{\pi}]+3)\frac{\pi}{2}]$ 中不包含 b_n 中的点, 则 b_n 中必有两点的距离是大于 π 的, 这与公差为 2 矛盾；而一个区间要想包含 b_n 中的 3 个点, 其长度至少是 4, 根据 $\pi<4$ 可知上述区间不可能同时包含 b_n 中 3 个 (及以上) 的点. 显然 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}I_n$ 覆盖 $[\frac{\pi}{2},+\infty]$, 而 $b_n\ge 2$, 从而其包含 b_n 中的所有点. 下面这样选取 b_n 的子列 b_{n_p}: 若区间 I_k 含有 $\{b_n\}$ 中的两个点 b_m,b_{m+1}, 取 $|\cos 2i|(i=m,m+1)$ 较大的那个点按原来的顺序加入子列；若 I_k 只含有 $\{b_n\}$ 中的一个点, 则取这个点按原来的顺序加入子列. 易知 $\{b_{n_p}\}$ 在每个 I_n 中都至少取到一点, 下面证明命题: $\exists\varepsilon_0>0\forall n_p\in\mathbb{N}(|\cos b_{n_p}|\ge\varepsilon_0)$.

首先肯定 I_k 中仅有 1 个点的情况: 要想满足 I_k 中只有一个点 b_m, 就需要使 b_m 与 $([\frac{2k}{\pi}]+1)\frac{\pi}{2}$, $([\frac{2k}{\pi}]+3)\frac{\pi}{2}$ 的距离都小于 2, 即 $([\frac{2k}{\pi}]+3)\frac{\pi}{2}-2<b_m<([\frac{2k}{\pi}]+1)\frac{\pi}{2}+2$, 从而 $|\cos b_m|\ge\cos 2$. 再用反证法说明 I_k 中有两个点 b_m,b_{m+1} 的情况: 因为包含两个点的区间中, 必有一个点属于 $\{b_{n_p}\}$, 故如若上述命题不成立, 则必存在相邻的两个点 b_m,b_{m+1} 和包含它们的区间 I_k 使得:

$$\forall\varepsilon>0\max\{|\cos b_m|,|\cos b_{m+1}|\}<\varepsilon$$

考虑 $|\cos b_m|<\varepsilon$, 此时知 $|\cos b_{m+1}|=|\cos(b_m+2)|=|\cos b_m\cos 2-\sin b_m\sin 2|\ge|\sin b_m\sin 2|-|\cos b_m\cos 2|$. 既然 $|\cos b_m|<\varepsilon$, 知必存在 $A>0$ 使得 $|\sin b_m|>A$(比如当 ε 足够小, 取 $A=\frac{1}{2}$), 否则对同一个点 x 出现 $|\sin x|\to 0,|\cos x|\to 0$, 矛盾! 进而 $|\cos b_{m+1}|\ge A|\sin 2|-\varepsilon|\cos 2|$, 取 $\varepsilon<\frac{1}{2}A|\tan 2|$ 并满足前述的足够小即知 $|\cos b_{m+1}|\ge\frac{1}{2}A|\sin 2|\ge\frac{1}{4}|\sin 2|$, 这便与一开始的假设矛盾了. $|\cos b_{m+1}|<\varepsilon$ 的情况是同理的.

最后, 说明 $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\frac{|\cos b_{n_p}|}{b_{n_p}}$ 发散: 知 $\frac{|\cos b_{n_p}|}{b_{n_p}}>\frac{\varepsilon_0}{2n_p}$. 又因为 b_{n_p} 是在 b_p 和 b_{p+1} 中至少选取一点得到的, 也即若将 b_n 写开:

$$2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,\cdots$$

那么 b_{n_p} 必在 $2,4$ 中至少选一个, $6,8$ 中至少选一个, $10,12$ 中至少选一个, $\cdots$, 这样一来有: $\frac{\varepsilon_0}{b_{n_p}}\ge\frac{\varepsilon_0}{4p}$. 但后者的级数届于 $\varepsilon_0>0$ 是已经给定的数, 故其发散, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos b_{n_p}|}{b_{n_p}}$ 发散, 进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos b_n|}{b_n}$ 发散, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos|2n|}{n}$ 发散, 故该级数首先不绝对收敛.

更优的方法: 首先给出命题: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散. 下面给出证明:

只需讨论 $b_n\to 0$ 的情况, 根据 Cauthy 准则:

$$\forall\varepsilon>0\exists N_\varepsilon>0\forall p,q\in\mathbb{N}(p>q>N\Rightarrow(|\sum_{n=q}^{p}a_n|<\varepsilon))$$

$$\exists\varepsilon_0>0\forall N>0\exists p_0,q_0\in\mathbb{N}(p_0>q_0>N\wedge|\sum_{n=q}^{p}b_n|>\varepsilon_0)$$

从而当 $N > N_\varepsilon$, 有:

$$|\sum_{n=q}^{p}(a_n+b_n)| = |\sum_{n=q}^{p}a_n + \sum_{n=q}^{p}b_n| \geq ||\sum_{n=q}^{p}a_n| - |\sum_{n=q}^{p}b_n|| \geq \varepsilon_0 - \varepsilon$$

从而取 $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0$, 可以固定 N_ε, 进而在有限项之后 $\sum(a_n+b_n)$ 也可以利用 Cauthy 准则判断其发散, 从而命题得证.

注意到下列不等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2n|}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos 2n)^2}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2n}{2n^p})$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n^p}$ 收敛, 从而根据命题可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos 2n)^2}{n^p}$ 发散, 进而原级数发散, 故该情况下的题设级数首先不绝对收敛.

下面说明其条件收敛: 显然 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\cos 2i = \sum\limits_{i=1}^{n}\cos(2i+i\pi) = \sum\limits_{i=1}^{n}\cos i(2+\pi)$ 有界, 又因为 $\frac{1}{n^p}$ 递减趋 0, 故根据 Abel-Dirichlet 判别法可知原级数收敛.

$p \leq 0$ 时, 知级数通项不趋于 0, 进而级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e-(1+\frac{1}{n})^n)$;

解

届于 $(1+\frac{1}{n})^n$ 递增趋 e, 要探究题设级数的绝对收敛性即探究正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e-(1+\frac{1}{n})^n)$ 的收敛性. 注意到

$$e-(1+\frac{1}{n})^n = e-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \sim e-e^{n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2})} = e-e^{1-\frac{1}{2n}} \sim \frac{1}{2n}$$

从而根据后者级数的发散性可知该级数发散, 故原级数首先不绝对收敛.

根据 Leibniz 判别法知 $e-(1+\frac{1}{n})^n$ 递减趋 0, 从而原级数收敛. 故原级数条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$;

解

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$ 与 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$ 的条件收敛性和绝对收敛性都相同, 从而只需讨论后者. 知 $n \geq 3, n^{\frac{1}{n}}$ 递减趋 1, 从而 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)$ 是正项级数, 又因为:

$$n^{\frac{1}{n}}-1 = e^{\frac{\ln n}{n}}-1 \sim \frac{\ln n}{n}$$

由后者级数的发散性即可知该级数发散, 故原级数首先不绝对收敛. 届于 $n^{\frac{1}{n}}-1$ 递减趋 0, 由 Leibniz 判别法即知原级数收敛, 故原级数条件收敛.

•(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2})(a>0,b>0,c>0)$.

3. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充分条件是, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛.

证明

因为 $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 命题即证.

4. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

(1) 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^- = +\infty$, 其逆命题是否成立?

证明

因为 $a_n^+ = \frac{|a_n|+a_n}{2}, a_n^- = \frac{|a_n|-a_n}{2}$, 故:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)$$

从而根据先前证明的命题, 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 发散, 同理 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 发散. 因为它们都是正项级数, 故命题得证.

逆命题不成立, 例如

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2}{k}, & n = 2k \\ \frac{1}{k}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

显然该级数发散.

(2) 证明: 记 $S_N^+ = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^+, S_N^- = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^-$, 那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S_N^+}{S_N^-} = 1$$

证明

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 设级数收敛到 A, 按定义知:

$$\forall\varepsilon>0\exists N_\varepsilon>0\forall n\in\mathbb{N}(n>N_\varepsilon\Rightarrow|\sum_{k=1}^{n}a_k-A|<\varepsilon\Rightarrow|A|-\varepsilon<|\sum_{k=1}^{n}a_k|<|A|+\varepsilon)$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = \lim\limits_{N\to\infty} S_N^- = +\infty$, 按定义知:

$$\forall M>0\exists N_M>0\forall n\in\mathbb{N}(n>N_M\Rightarrow S_N^->M)$$

从而取 $N=\max\{N_\varepsilon, N_M\}$, 有:

$$|\frac{S_N^+}{S_N^-}-1| = |\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}a_n}{S_N^-}| < \frac{|A|+\varepsilon}{|S_N^-|} < \frac{1}{M}(|A|+\varepsilon)$$

由 M 的任意性, 根据定义即得欲证式.

•5. 把级数

$$1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots(0<\alpha<1)$$

的项重新安排如下: 先依次取 p 个正项, 接着依次取 q 个负项, 再接着依次取 p 个正项, 如此继续下去, 证明: 所得的新级数收敛的充分必要条件为 $p=q$; 当 $p>q$ 时, 新级数发散到 $+\infty$, 当 $p<q$ 时, 新级数发散到 $-\infty$.

证明

Chapter 8

函数列与函数项级数

8.1 问题的提出

8.1.1 练习题

求下列函数项级数的收敛点集:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}(\frac{x}{3x+1})^n$;

解

统一记题目给出的通项为 $f_n(x)$, 用比值审敛法:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} \cdot \frac{x}{3x+1} \to \frac{x}{3x+1}, n \to \infty$$

要求 $|\frac{x}{3x+1}| < 1$, 解得 $x \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$, 代入 $x = -\frac{1}{4}$ 检验知级数收敛, 故欲求为 $[-\frac{1}{4}, +\infty)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$;

解

用根值审敛法:

$$\sqrt[n]{\sup f_n(x)} = \frac{\sqrt[n]{n}}{e^x} \to \frac{1}{e^x}, n \to \infty$$

要求 $|\frac{1}{e^x}| < 1$, 知 $x \in (0, +\infty)$. 代入 $x = 0$ 知级数发散, 故欲求为 $(0, +\infty)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{x(x+n)}{n})^n$;

解

显然 $x = 0$ 时级数收敛, 当 $x \neq 0$ 时, 知 $f_n(x) = x^n(1 + \frac{x}{n})^n \to x^n e^x, n \to \infty$, 要求 $x^n e^x \to 0, n \to \infty$, 知只能有 $|x| < 1$, 代入验证可知 $x \in (-1, 1)$ 时级数收敛, 故欲求为 $(-1, 1)$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

解

显然 $x = 0$ 时级数收敛, 当 $x \neq 0$ 时, 知只能有 $|x| < 1$, 否则 $|\frac{x^n}{1+x^{2n}}| > |\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}| \to 1$. 当 $|x| < 1$ 时, 知 $|f_n(x)| = |\frac{1}{\frac{1}{x^n} + x^n}| \sim |x|^n, n \to \infty$ 收敛. 进而欲求为 $(-1, 1)$.

•(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$;

解

知有限项后必有 $f_n(x)>0$, 从而在足够多项后有:

$$f_n(x)=e^{n\ln(n+x)-(n+x)\ln n}=e^{n\ln(1+\frac{x}{n})-x\ln n}$$

当 $x<0,n\to\infty$, 有:

$$e^{n\ln(1+\frac{x}{n})-x\ln n}\sim e^{x-x\ln n}\to+\infty$$

从而原级数必发散.

8.2 一致收敛

8.2.1 命题整理

定理 8.2.1 (Cauthy) 设 $\{f_t|t\in T\}$ 是依赖于参数 $t\in T$ 的由函数 $f_t:X\to\mathbb{R}$ 构成的函数族, 而 $\mathfrak{B}$ 是 T 中的基. 函数族 $\{f_t|t\in T\}$ 在集 $E\subset X$ 上关于基 $\mathfrak{B}$ 是一致收敛的充分必要条件是: 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在基 $\mathfrak{B}$ 中的元素 B, 使对任何参数值 $t_1,t_2\in B$ 及任一点 $x\in E$, 都满足不等式

$$|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon$$

用形式化的写法, 这就是: f_t 在 E 上关于基 $\mathfrak{B}$ 一致收敛

$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists B\in\mathfrak{B}\forall t_1,t_2\in B\forall x\in E(|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon)$$

定理 8.2.2 (Cauthy) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在集 E 上一致收敛, 当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$, 能找到 $N\in\mathbb{N}$, 使对任何满足 $m\geq n>N$ 的自然数 m,n, 在一切点 $x\in E$, 满足不等式

$$|a_n(x)+\cdots+a_m(x)|<\varepsilon$$

推论 8.2.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在集 E 上一致收敛, 则当 $n\to\infty$ 时, 在 E 上有 $a_n(x)\rightrightarrows 0$.

命题 8.2.1 (Weierstrass) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 对任一 $x\in E$ 和所有足够大的 $n\in\mathbb{N}$ 有 $|a_n(x)|\leq b_n(x)$, 那么从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在 E 上的一致收敛能推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 E 上绝对且一致收敛.

推论 8.2.2 (Weierstrass) 如果对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$, 能找到一个收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$, 使得对一切足够大的 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\sup_{x\in E}|a_n(x)|\leq M_n$$

那么, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在集 E 上绝对且一致收敛.

命题 8.2.2 (Abel-Dirichlet) 设 $a_n:X\to\mathbb{C}$ 是复函数, $b_n:X\to\mathbb{R}$ 是实函数. 为使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在集 $E\subset X$ 上一致收敛, 只要满足下面任何一对条件就可以了:

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的部分和 $S_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{k}a_n(x)$ 在 E 上一致有界;
2. 函数列 $b_n(x)$ 在 E 上单调且一致趋于零.

或者

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 E 上一致收敛;

2. 函数列 $b_n(x)$ 在 E 上单调且一致有界.

命题 8.2.3 (Abel) 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 在某点 $\zeta \in \mathbb{C}$ 收敛, 那么它在以 z_0, ζ 为端点的闭区间上一致收敛.

8.2.2 练习题

1. 研究下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

(1) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$:

(a) $0 < x < +\infty$;

解

显然 f_n 在该区间上逐点收敛到 0, 但考虑 $|f_n(x) - 0| = f_n(x) < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{x}(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$, 知一致收敛定义中的 N 与 x 相关, 进而其不一致收敛.

(b) $0 < \lambda < x < +\infty$.

解

显然 f_n 在该区间上逐点收敛到 0, 而考虑 $|f_n(x) - 0| = f_n(x) < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$, 知一致收敛定义中的 N 与 x 无关, 从而其一致收敛到 0.

(2) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$:

(a) $0 \le x \le 1 - \lambda (\lambda > 0)$;

解

显然 $f_n(x)$ 在该区间上逐点收敛到 0, 知对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 而言 $f_n(x)$ 关于 x 递增, 从而考虑 $|f_n(x) - 0| \le \frac{(1-\lambda)^n}{1+(1-\lambda)^n} \le (1-\lambda)^n < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\lambda)}$, 从而其一致收敛到 0.

(b) $1 - \lambda \le x \le 1 + \lambda (\lambda > 0)$;

解

逐点地考察函数列, 可知函数在该区间上逐点收敛到下列函数:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [1-\lambda, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x \in (1, 1+\lambda] \end{cases}$$

取 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, 知

$$\sup_{[1-\lambda,1)} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{[1-\lambda,1)} |f_n(x)| \ge \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1+(1-\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e+1}$$

进而 $n \to \infty, \Delta_n \nrightarrow 0$, 故其在区间上不一致收敛.

(c) $1 + \lambda \le x < +\infty (\lambda > 0)$.

解

逐点地考察函数列, 可知函数在该区间上逐点收敛到 1, 进而考虑 $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{1+x^n} \le \frac{1}{1+(1+\lambda)^n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\ln(1+\lambda)} \cdot \ln(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$, 从而其在区间上一致收敛到 1.

2. 研究下列级数在指定区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, (0,+\infty)$;

解

考虑和函数

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)(x+k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{x+k}-\frac{1}{x+k+1})=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}$$

令 $n\to\infty$, 知 $S_n(x)\to\frac{1}{1+x}=:S(x)$, 进而考虑 $|S(x)-S_n(x)|=\frac{1}{x+n+1}\leq\frac{1}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$, 从而 $S_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛到 $\frac{1}{1+x}$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}, (-\infty,+\infty)$;

解

只需考虑 $[0,+\infty)$ 的部分, 对级数的通项求导有:

$$(\frac{nx}{1+n^5x^2})'=\frac{n-n^6x^2}{(1+n^5x^2)^2}$$

知 $x=\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ 是上述函数的极大值点, 代入知:

$$\frac{nx}{1+n^5x^2}\leq\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

而后者构成的级数由积分审敛法知收敛, 从而原级数根据 Weierstrass 判别法一致且绝对收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n}}(x^n+x^{-n}), [-3,-\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},3]$;

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明

由 Abel-Dirichlet 判别法, 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, e^{-nx} 关于 n 单调递减, 故欲求级数一致收敛.

4. 设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 绝对收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

证明

不失一般性, 设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上单增, 知 $|u_n(x)|(n=1,2,\cdots)$ 的最大值与最小值必都在 $|u_n(a)|,|u_n(b)|$ 两者中取. 既然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 绝对收敛, 按 Cauthy 准则有:

$$\forall\varepsilon>0\exists N_1=N_1(\varepsilon)>0\forall p,q\in\mathbb{N}(p>q>N_1\Rightarrow|\sum_{k=p}^{q}|u_k(a)||<\varepsilon)$$

$$\forall\varepsilon>0\exists N_2=N_2(\varepsilon)>0\forall p,q\in\mathbb{N}(p>q>N_2\Rightarrow|\sum_{k=p}^{q}|u_k(b)||<\varepsilon)$$

既然 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单增函数, 当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时有:

$$|\sum_{k=p}^{q}u_k(x)|\leq|\sum_{k=p}^{q}|u_k(x)||\leq\max\{\sum_{k=p}^{q}|u_k(a)|,\sum_{k=p}^{q}|u_k(b)|\}<\varepsilon$$

进而由 Cauthy 准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

5. 证明: 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$$

在 $[0,1]$ 上绝对且一致收敛, 但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上并不一致收敛.

证明

先证明绝对收敛, 显然 $x=0,1$ 时级数绝对收敛. 对任意给定的 $x_0\in(0,1)$, 有:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|(-1)^n x_0^n(1-x_0)| = \sum_{n=0}^{\infty} x_0^n(1-x_0) = \frac{1}{1-x_0}(1-x_0) = 1$$

故其绝对收敛至 1. 由 Abel-Dirichlet 判别法, 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 有界, $x_0^n(1-x_0)$ 递减趋 0, 进而其一致收敛.

对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$, 记 $S_n(x)=(1-x)\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, 知 $S(1)=0$, 当 $x\in[0,1)$, 知 $S(x)=(1-x)\cdot\frac{1-x^n}{1-x}=1-x^n$, 进而不妨就取 $x=0$, 从而

$$\sup_{[0,1]}\Delta_n \geq |S(1)-S(0)| = 1 =: \varepsilon_0$$

根据定义即知其不一致收敛.

6. 在区间 $[0,1]$ 上, 定义

$$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n}\\ 0, & x\neq\frac{1}{n}\end{cases}$$

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 但它不存在收敛的优级数.

证明

$$\forall x\in[0,1]\forall\varepsilon>0\exists N=\frac{1}{\varepsilon}\forall n\in\mathbb{N}(n>N\Rightarrow|u_n(x)-0|\leq\frac{1}{n}<\varepsilon)$$

故其在 [0,1] 上一致收敛, 但 $\sup\limits_{[0,1]} u_n(x)=\frac{1}{n}$, 这意味着其优级数必满足 $M_n\geq\frac{1}{n}$, 但根据比较审敛法知其必发散, 故其不存在收敛的优级数.

7. 设 $\{u_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列. 证明: 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 内的每一点收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 发散, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛.

证明

既然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 发散, 由 Cauthy 准则知

$$\exists\varepsilon_0>0\forall N>0\exists p_N,q_N\in\mathbb{N}(p_N>q_N>N\wedge|\sum_{n=q_N}^{p_N}u_n(b)|>\varepsilon_0)$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致收敛, 根据 Cauthy 准则有

$$\forall x\in[a,b)\forall\varepsilon>0\exists N_1=N_1(\varepsilon)>0\forall p,q\in\mathbb{N}(p>q>N_1\Rightarrow|\sum_{n=q}^{p}u_n(x)|<\varepsilon)$$

既然上式是对任意 x 成立的, 其关于 x 的趋近过程就是独立的. 令 $x \to b$, 届于 $\{u_n(x)\}$ 是连续函数列, 知必有 $u_n(x) \to u_n(b)$, 但这意味着

$$|\sum_{n=q}^{p} u_n(x)| \to |\sum_{n=q}^{p} u_n(b)| > \varepsilon_0$$

矛盾! 故其不一致收敛.

8. 设 $a_n \geq 0$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

证明

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛, 按 Cauthy 准则有

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall p, q \in \mathbb{N}(p > q > N \Rightarrow |\sum_{n=q}^{p} a_n \cos nx| < \varepsilon)$$

取 $x = 0$ 代入上述式子, 知上即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ 在 Cauthy 准则中的等价形式, 进而该方向得证.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 由 Cauthy 准则知

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall p, q \in \mathbb{N}(p > q > N \Rightarrow |\sum_{n=q}^{p} a_n| < \varepsilon)$$

但因为 $a_n \geq 0$, 有:

$$|\sum_{n=q}^{p} a_n \cos nx| \leq |\sum_{n=q}^{p} a_n |\cos nx|| \leq |\sum_{n=q}^{p} a_n| < \varepsilon$$

上式的 x 是在 $\mathbb{R}$ 上任意选取的, 进而知 N 的选取并不依赖于 x, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 命题得证.

9. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ 在 $(0, \pi]$ 上不一致收敛.

证明

在上题的条件中, 届于 $\cos nx$ 是偶函数, 其条件可以弱化为在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛, 又因为 $\cos nx$ 的周期性, 知条件可以进一步弱化为在 $(0, \pi]$ 上一致收敛. 但本题中 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 由积分审敛法知其发散, 故命题得证.

10. 设 $[a, b]$ 是一个有限闭区间. 如果对任一点 $x \in [a, b]$, 存在一个包含 x 的开区间 I_x, 使得 $\{f_n\}$ 在 I_x 上一致收敛于 f. 求证: $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f.

证明

知 $\bigcup\limits_{x \in [a,b]} I_x$ 构成 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 既然 $[a, b]$ 是紧的, 从其中可选出有限子覆盖 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_{x_i}$. 依题, 在每个 I_{x_i} 上, 有:

$$\forall x \in I_{x_i} \forall \varepsilon > 0 \exists N_i = N_i(\varepsilon) \forall p, q \in \mathbb{N}(p > q > N_i \Rightarrow |\sum_{j=q}^{p} f_j| < \varepsilon)$$

既然 $N_i|_{i=1}^{k}$ 只有有限个, 可取 $N = \max\{N_1, \cdots, N_k\}$, 知这样的 N 涵盖了全体 I_{x_i} 的情况, 其也依旧不依赖于 x, 从而欲证成立.

注: 本题所给出的条件在 [6] 中专门以"Locally uniform convergent" 称呼.

11. 证明: 函数列

$$f_n(x) = xn^{-x}(\ln n)^\alpha \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\alpha < 1$.

证明

知

$$f_n(x) = \frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x} = \frac{\ln n^x}{n^x} \cdot (\ln n)^{\alpha-1}$$

当 $\alpha < 1$, 知

$$|f_n(x)| \le \max_{\mathbb{R}} |\frac{\ln n^x}{n^x}| \cdot (\ln n)^\alpha \le \frac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}$$

因为 $\alpha - 1 < 0$ 是给定的, 故必有 $n \to \infty, \frac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1} \to 0$, 进而由 Weierstrass 判别法可知题设函数一致收敛.

当 $\alpha = 1$, 知

$$f_n(x) = \frac{\ln n^x}{n^x}$$

在 $n \to \infty$ 时, 考虑 $n^x \equiv p \Rightarrow x = \frac{\ln p}{\ln n}$, 进而可以通过改变 x 的值来改变 $f_n(x)$ 在 $n \to \infty$ 时的极限, 从而函数不一致收敛.

当 $\alpha > 1$, 知 $\alpha - 1 > 0$. 不妨就取 $x = \frac{\ln 2}{\ln n} \Rightarrow n^x \equiv 2$, 这便有

$$f_n(\frac{\ln 2}{\ln n}) = \frac{\ln 2}{2} \cdot (\ln n)^{\alpha-1} \to \infty$$

故函数列自然不一致收敛.

综上, 命题即证.

12. 设 f_1 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 定义

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

证明: 函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 0.

证明

既然 f_1 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 知其在 $[a, b]$ 上必有界, 设 $M > 0$ 满足 $f_1 \le M$, 知:

$$\begin{aligned}\int_a^x f_n(x)dt = \int_a^x \int_a^x f_{n-1}(x)dt_1dt_2 = \cdots = \int \cdots \int_{[x,a]^n} f_1(x)dt_1 \cdots dt_n \\ = f_1(x) \int \cdots \int_{[x,a]^n} dt_1 \cdots dt_n \le M\frac{(x-a)^n}{n!} \le M\frac{(b-a)^n}{n!}\end{aligned}$$

而易知 $\lim\limits_{n\to\infty} M\frac{(b-a)^n}{n!} = 0$, 从而其一致收敛到 0.

13. 证明: 当 $\alpha > 2$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

证明

出于还没有找到更好的方法, 这一段采用的是自己硬讨论想出来的办法, 其中核心思想在于将一致收敛定义改写成了:

$$\forall x = x(n) \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}(n_1, n_2 > N \Rightarrow |f_{n_1}(x(n)) - f_{n_2}(x(n))| < \varepsilon)$$

这与原本的一致收敛定义的不同点在于把 x 看成关于 n 的函数, 下面的方法便是说明对全体值域在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $x(n)$, $f_n(x(n))$ 都一致收敛.

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{e^{nx^2}} x^{\alpha-2}$$

针对 nx^2 和 x, 将问题分成如下几种情况来讨论, 注意到 $x \in [0,+\infty)$ 将会被用来支持很多步过程, 在这里统一说明并在后不再提及:

(1) $nx^2 = o(1)$, 也即 $n \to \infty, nx^2 \to 0$. 此时即 $x^2 = o(\frac{1}{n}) \Rightarrow x = o(\frac{1}{\sqrt{n}}), n \to \infty$. 注意到此时 $\frac{nx^2}{e^{nx^2}}$ 是一个有界的非负量, 而:

$$\frac{x^{\alpha-2}}{n} = \frac{1}{n}(o(\frac{1}{\sqrt{n}}))^{\alpha-2} = \frac{1}{n} \cdot o(\frac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}}}) = o(\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha-2}{2}}})$$

从而起码在足够多项之后, 有:

$$\frac{nx^2}{e^{nx^2}} \frac{x^{\alpha-2}}{n} \le M \cdot \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha-2}{2}}}$$

这其中 M 是 $\frac{nx^2}{e^{nx^2}}$ 的一个给定的上界. 又因为 $\alpha > 2$, 知 $\frac{\alpha-2}{2} > 0$, 进而容易知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha-2}{2}}}$ 收敛, 从而根据 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛.

(2) $nx^2 = O(1)$, 也即 nx^2 在 $n \to \infty$ 时最终有界且非零, 此时有 $x = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$. 注意到此时的 $\frac{nx^2}{e^{nx^2}}$ 是一个有界的非负量, 而:

$$\frac{x^{\alpha-2}}{n} = \frac{1}{n}(O(\frac{1}{\sqrt{n}}))^{\alpha-2} = \frac{1}{n} \cdot O(\frac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}}}) = O(\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha-2}{2}}})$$

从而起码在足够多项之后, 有:

$$\frac{nx^2}{e^{nx^2}} \frac{x^{\alpha-2}}{n} \le M \cdot K \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha-2}{2}}}$$

这其中 M 是 $\frac{nx^2}{e^{nx^2}}$ 的一个给定的上界, 而 K 是届于 $\frac{x^{\alpha-2}}{n} = O(\frac{1}{n^{1+\frac{\alpha-2}{2}}})$ 的定义而来的, 一个使得 $\frac{x^{\alpha-2}}{n} \le K \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha-2}{2}}}$ 的常数. 又因为 $\alpha > 2$, 知 $\frac{\alpha-2}{2} > 0$, 进而容易知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha-2}{2}}}$ 收敛, 从而根据 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛.

下面讨论 $nx^2 \to \infty$ 的情况, 首先阐明基本的放缩思路: 注意到对任意给定的 N, 在 n 足够大时都有下述不等式成立:

$$e^{nx^2} \ge 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}(nx^2)^k$$

从而任意给定形如 $\frac{1}{k!}(nx^2)^k, k \in \mathbb{N}$ 的式子, 总能找到足够大的 n 使得

$$e^{nx^2} \ge \frac{1}{k!}(nx^2)^k$$

(3) $nx^2 \to \infty, n \to \infty$, 但 $x^2 \to 0, n \to \infty$(这等价于 $x = o(1), n \to \infty$ 的情况). 这说明至少有 $\frac{1}{\sqrt{n}} \le x \le 1$. 取 $\frac{1}{2!}(nx^2)^2$, 即有:

$$\frac{nx^2}{e^{nx^2}} \cdot \frac{x^{\alpha-2}}{n} \le \frac{nx^2}{\frac{1}{2}n^2x^4} \cdot \frac{x^{\alpha-2}}{n} = \frac{2}{n^2} \cdot x^{\alpha} \le \frac{2}{n^2}, n \to \infty$$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛.

(4) $nx^2 \to \infty, n \to \infty$, 但 $x^2 = O(1), n \to \infty$(这等价于 $x = O(1), n \to \infty$ 的情况). 设 $x^2 \le M$, 取 $\frac{1}{2!}(nx^2)^2$, 即有:

$$\frac{nx^2}{e^{nx^2}} \cdot \frac{x^{\alpha-2}}{n} \le \frac{nx^2}{\frac{1}{2}n^2x^4} \cdot \frac{x^{\alpha-2}}{n} = \frac{2}{n^2} \cdot x^{\alpha} \le \frac{2M}{n^2}, n \to \infty$$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2M}{n^2}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛.

(5) $nx^2 \to \infty, n \to \infty$, 且 $x^2 \to \infty, n \to \infty$(这等价于 $x \to \infty, n \to \infty$ 的情况), 知这种情况下起码有 $x \ge 1$. 注意到既然 α 是给定的, 取 $\frac{1}{([\alpha]+1)!}(nx^2)^{[\alpha]+1}$, 即有:

$$\frac{nx^2}{e^{nx^2}} \cdot \frac{x^{\alpha-2}}{n} \le \frac{nx^2}{\frac{1}{([\alpha]+1)!}(nx^2)^{[\alpha]+1}} \cdot \frac{x^{\alpha-2}}{n} \le \frac{([\alpha]+1)!}{n^{[\alpha]+2}} \cdot \frac{1}{x^{[\alpha]+3}} \le \frac{([\alpha]+1)!}{n^{[\alpha]+2}}$$

又因为 α 给定, 且 $[\alpha]+2 > 2$, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{([\alpha]+1)!}{n^{[\alpha]+2}}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛.

最后, 考虑到那些 $x(n)$ 分段使得其不能简单满足于上述几类的情况 (比方说 $x(n)$ 有一子列恒为 0, 而另一子列趋于 ∞). 在这些情况中统一将那些不趋于 ∞ 的子列放大至趋于 ∞, 从而 $x(n)$ 归于最后一类: $x \to \infty, n \to \infty$.

综上, 便证明了对任意值域含于 $[0, +\infty)$ 的关于 n 的函数 $x(n)$, 原级数都一致收敛. 进而原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

8.2.3 问题

1. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

在区间 $[0, \delta]$ 和 $[\delta, +\infty)$ 上的一致收敛性, 其中 $\delta > 0$.

解

当 $x \in [0, \delta]$, 不妨就取 $x = \frac{1}{n}$, 此时级数的通项为

$$a_n := \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+1)}$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$, 从而原级数不一致收敛.

当 $x \in [\delta, +\infty)$, 知:

$$\frac{nx}{(1+x)\cdots(1+nx)} \le \frac{nx}{x \cdot 2x \cdot \cdots \cdot nx} = \frac{1}{(n-1)!x^{n-1}} \le \frac{1}{(n-1)!\delta^{n-1}}$$

注意到 $\delta > 0$ 是给定的, 进而无论 δ 与 1 之间大小关系如何, 总能够选择足够大的 n 使得 $\delta^{n+1} > \frac{1}{2}$, 进而

$$\frac{1}{(n-1)!\delta^{n-1}} \le \frac{2}{(n-1)!} \le \frac{2}{n^2}$$

最后一个不等号在 n 足够大时成立. 又注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛.

2. 设函数列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛. 如果对每个 $n = 1, 2, \cdots$, f_n 和 g_n 都是 I 上的有界函数 (不要求一致有界), 证明: $\{f_n g_n\}$ 在 I 上必一致收敛.

3. 如果去掉第 2 题中 f_n 和 g_n 有界的条件, 结论是否还成立? 试举例说明之.

解

[18] 中有反例: $f_n(x) = x, g_n(x) = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$.

4. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上收敛. 如果存在常数 M, 使得对任意的 $x \in [a, b]$ 及一切正整数 n, 都有 $|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(x)| \le M$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

5. 设函数 f 在 $x = 0$ 的邻域内有二阶连续导函数, 且 $f(0) = 0, 0 < f'(0) < 1$, 如果记 f_n 是 f 的 n 次复合, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内一致收敛.

6. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^2 + \cdots + x^{2n-1}} \cos nx$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

7. 设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

证明

8.3 极限函数与和函数的性质

8.3.1 命题整理

从个人角度来看, 这一节的命题对于后面讨论函数项级数, 乃至反常积分都是十分重要的, 希望可以引起重视. 其中, 尤其重要的便是下面的极限交换次序定理.

定理 8.3.1 *(极限交换次序定理)* 设 $\{F_t | t \in T\}$ 是由依赖于参数 t 的函数 $F_t : X \to \mathbb{C}$ 构成的函数族, $\mathfrak{B}_X$ 是 X 中的基, $\mathfrak{B}_T$ 是 T 中的基. 如果关于基 $\mathfrak{B}_T$, 这个函数族在 X 上一致收敛到函数 $F : X \to \mathbb{C}$, 而对每个 $t \in T, \lim\limits_{\mathfrak{B}_X} f_t(x) = A_t$ 存在, 那么两个累次极限 $\lim\limits_{\mathfrak{B}_X}(\lim\limits_{\mathfrak{B}_T} F_t(x))$ 与 $\lim\limits_{\mathfrak{B}_T}(\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F_t(x))$ 都存在且成立等式:

$$\lim_{\mathfrak{B}_X}(\lim_{\mathfrak{B}_T} F_t(x)) = \lim_{\mathfrak{B}_T}(\lim_{\mathfrak{B}_X} F_t(x))$$

[4] 中给出了该定理的形象化的图:

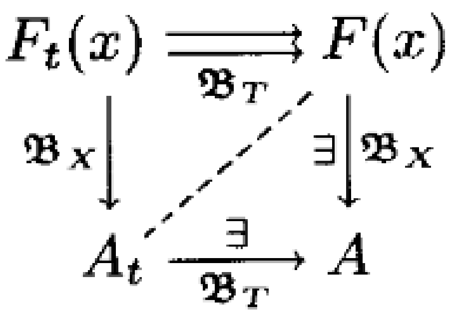


图 8.1: 极限交换次序定理的图

图中, 对角线的左上方是定理的条件: $F_t(x)$ 关于 t 一致收敛到 $F(x)$ 和对固定的 t, $F_t(x)$ 对 x 的极限存在, 而对角线的右下方即是定理的结论.

证明

因为在 X 上关于基 $\mathfrak{B}_T$ 有 $F_t \rightrightarrows F$, 根据 Cauthy 准则有:

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists B_T(\varepsilon) \in \mathfrak{B}_T \forall t_1, t_2 \in B_T(\varepsilon)(|F_{t_1}(x) - F_{t_2}(x)| < \varepsilon) \tag{8.1}$$

在这个不等式中, 因为 B_T 的选取不依赖于 x, 当然可以对 x 取极限而保证不等式依然有意义 (也即取得到这样的 t_1, t_2), 进而关于基 $\mathfrak{B}_X$ 取极限, 有:

$$|A_{t_1} - A_{t_2}| \leq \varepsilon \tag{8.2}$$

这对于任何的 $t_1, t_2 \in B_T$ 都成立, 从而根据函数极限存在的 Cauthy 准则知, 关于 t 的函数 A_t, 在基 $\mathfrak{B}_T$ 下存在极限 A, 也即 $\lim\limits_{\mathfrak{B}_T} A_t = A$. 下面再来证明 $A = \lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F(x)$.

固定 $t_2 \in B_T$, 因为 $\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F_{t_2}(x) = A_{t_2}$, 根据极限的定义可知:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B_X \in \mathfrak{B}_X \forall x \in B_X(|F_{t_2}(x) - A_{t_2}| < \varepsilon) \tag{8.3}$$

不改变 t_2, 在 (9. 1) 和 (9. 2) 中关于 t_1 按 $\mathfrak{B}_T$ 取极限, 可得:

$$\begin{aligned} &|F(x) - F_{t_2}(x)| \leq \varepsilon \\ &|A - A_{t_2}| \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{8.4}$$

注意到 (9. 4) 的上式对任意的 $x \in X$ 都是成立的, 从而结合 (9. 3) 和 (9. 4), 有:

$$|F(x)-A| = |F(x)-F_{t_2}(x)+F_{t_2}(x)-A_{t_2}+A_{t_2}-A| \leq |F(x)-F_{t_2}(x)|+|F_{t_2}(x)-A_{t_2}|+|A_{t_2}-A| < 3\varepsilon$$

这便证明了 $A = \lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F(x)$.

□

按照 [4] 的概括, 这个定理说明了在逐次完成的两个极限过程中, 只要有一个是一致的, 则两个极限过程的次序就可以调换.

定理 8.3.2 *(连续函数收敛)* 设有由依赖于参数 t 的函数 $f_t : X \to \mathbb{C}$ 构成的函数族 $\{f_t | t \in T\}$, 而 $\mathfrak{B}$ 是 T 中的基. 如果在 X 上关于基 $\mathfrak{B}$ 有 $f_t \rightrightarrows f$, 且每个函数 f_t 都在 $x_0 \in X$ 连续, 那么函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 在 x_0 也连续.

这个定理可以根据下图给出:

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, Rightarrow, "\mathfrak{B}"'] \arrow[d, "x \to x_0"'] & f(x) \arrow[d, "x \to x_0"] \arrow[dl, dash, dashed] \\
f_t(x_0) \arrow[r, "\mathfrak{B}"'] & f(x_0)
\end{tikzcd}$$

证明

这和极限交换次序定理有着同工之妙, 其实可以直接套用: 因为 $f_t \rightrightarrows f$ 这个过程是一致的, 所以极限可交换.

□

推论 8.3.1 定义在集合上的连续函数序列, 如果在该集合上一致收敛, 那么极限函数在这个集合上也连续.

推论 8.3.2 由在集合上的连续函数所组成的级数, 如果在该集合上一致收敛, 那么级数的和在这个集合上也连续.

定理 8.3.3 *(Dini)* 如果紧集上的连续函数列单调收敛到连续函数, 那么这个收敛性是一致的.

证明

不妨就设紧集 K 上的连续函数列 f_n 单调不减地趋于连续函数 f, 根据定义:

$$\forall x \in K \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(x,\varepsilon) > 0 \forall n \in \mathbb{N}(n > N(x,\varepsilon) \Rightarrow 0 \le f(x) - f_n(x) < \varepsilon)$$

但既然 f_n 和 f 都是连续函数, 知 $f - f_n$ 当然也是连续函数, 从而根据连续函数的性质知: 存在 x 的某个开邻域 $U(x)$, 使得不等式

$$0 \le f(x) - f_n(x) < \varepsilon$$

在 $U(x)$ 上仍然成立. 取 $\bigcup\limits_{x\in K} U(x)$, 显然有 $K \subset \bigcup\limits_{x\in K} U(x)$. 届于 K 是紧集而后者是其开覆盖, 知可以从中选取有限子覆盖 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)$, 这有限多个覆盖分别对应有限多个 N: $N(x_1,\varepsilon),\cdots,N(x_k,\varepsilon)$, 从而在这有限个 N 中能取得最大值, 不妨就设 $N = \max\{N(x_1,\varepsilon),\cdots,N(x_k,\varepsilon)\}$. 于是可知 $N = N(\varepsilon)$ 满足:

$$\forall x \in X, n > N(\varepsilon) \Rightarrow 0 \le f(x) - f_n(x) < \varepsilon$$

这说明 $f_n \rightrightarrows f$, 命题得证.

□

推论 8.3.3 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的项是紧集 K 上的非负连续函数 $a_n : K \to \mathbb{R}$, 并且级数在 K 上收敛到连续函数, 那么它在 K 上一致收敛.

证明

届于 $a_n(x)$ 非负, 知 $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)$ 是单调递增趋向 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, 进而其满足 Dini 定理的条件, 命题得证.

定理 8.3.4 *(常义积分号与极限换序)* 给定由定义在区间 $a \le x \le b$ 上且依赖于参数 $t \in T$ 的函数 $f_t : [a,b] \to \mathbb{C}$ 构成的函数族 $\{f_t | t \in T\}$, 设 $\mathfrak{B}$ 是 T 中的基. 如果族中函数在区间 $[a,b]$ 上可积, 且在 $[a,b]$ 上关于基 $\mathfrak{B}$ 有 $f_t \rightrightarrows f$, 那么极限函数 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x)dx$$

这个定理可以由下图给出:

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{i=1}^{n} f_t(\xi_i)\Delta x_i =: F_t(p) \arrow[r, rightrightarrows] \arrow[d, "\lambda(P)\to 0"'] & F(p) := \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \arrow[d, "\exists\ \lambda(P)\to 0"] \arrow[dl, dashed, dash] \\
\int_a^b f_t(x)dx =: A_t \arrow[r] & A := \int_a^b f(x)dx\ ,
\end{tikzcd}$$

证明

为了利用极限次序交换定理, 自然可以想到 Riemann 积分是用极限来定义的. 既然条件已经给出 f_t 可积, 每个标志点不妨就选取分划端点, 进而题式等价于:

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\lim_{\mathfrak{B}} f_t(x_i))\Delta x_i = \lim_{\mathfrak{B}}\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_t(x_i)\Delta x_i$$

但如若固定 n, 出于 $f_t \rightrightarrows f$, 有:

$$\sum_{i=1}^{n} f_t(x_i)\Delta x_i \rightrightarrows \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

这说明极限过程

$$\lim_{\mathfrak{B}}\sum_{i=1}^{n} f_t(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\lim_{\mathfrak{B}} f_t(x)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

是一致的, 进而根据极限次序交换定理可知题式成立.

□

这里需要特别注意一件事: 我们并没有在证明过程中说明 f 可积, 这个疏漏是否能推翻上述证明呢? 其实不然, 回顾极限交换次序定理, 可以知道定理的条件仅限于图的左上角部分, 而至于 f 的可积性, 其实是作为定理中"两个累次极限都存在"这样一个结论给出来的. 这也便是为什么上图中右边的箭头写的是 $\exists\lambda(P)\to 0$, 因为这件事本身就是定理的结论之一.

推论 8.3.4 *如果由区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的可积函数组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在这个区间上一致收敛, 那么它的和在区间 $[a,b]$ 上也可积, 且*

$$\int_a^b(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

定理 8.3.5 *(微分与极限交换次序) 给定由定义在凸有界集 X(属于 $\mathbb{R},\mathbb{C}$ 或任一线性赋范空间) 上且依赖于参数 t 的函数 $f_t : X\to\mathbb{C}$ 构成的函数族 $\{f_t|t\in T\}$, 设 $\mathfrak{B}$ 是 T 中的基, 如果族中的函数在 X 上可微, 导函数族 $\{f'_t|t\in T\}$ 在 X 上一致收敛到某个函数 $\varphi : X\to\mathbb{C}$, 而原函数族 $\{f_t|t\in T\}$ 至少在一点 $x_0\in X$ 收敛, 那么, 它在整个集合 X 上一致收敛到可微函数 $f : X\to\mathbb{C}$, 且 $f'=\varphi$.*

证明

首先需要证明在 X 上关于 $\mathfrak{B}$ 有 $f_t\rightrightarrows f$, 对 $f_{t_1}-f_{t_2}$ 用拟微分平均值定理有:

$$\begin{aligned}|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)| &= |(f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x))-(f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0))+(f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0))|\\ &\le |(f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x))-(f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0))|+|f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0)|\\ &\le \sup_{\xi\in[x_0,x]}|f'_{t_1}(\xi)-f'_{t_2}(\xi)||x-x_0|+|f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0)| := \Delta(x,t_1,t_2)\end{aligned}$$

根据条件, 函数族 $\{f'_t|t\in T\}$ 在 X 上关于基 $\mathfrak{B}$ 一致收敛, 由 Cauthy 准则知:

$$\forall x\in X\forall\varepsilon>0\exists B=B(\varepsilon)\in\mathfrak{B}\forall t_1,t_2\in B(\varepsilon)(|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon)$$

这说明当 $t_1,t_2\in B(\varepsilon)$:

$$\sup_{\xi\in[x_0,x]}|f'_{t_1}(\xi)-f'_{t_2}(\xi)|<\varepsilon$$

又因为 $\{f_t|t\in T\}$ 在 x_0 收敛, 根据 Cauthy 准则同样可以取 $B'(\varepsilon)\in\mathfrak{B}$ 使得

$$|f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0)|<\varepsilon$$

最后, 因为 X 是有界集, 知 $|x-x_0|$ 有界, 不妨设 $|x-x_0|<M$, 进而当 $t_1,t_2\in B(\varepsilon)\cap B'(\varepsilon)\in\mathfrak{B}$ 时有:

$$\Delta(x,t_1,t_2)<\varepsilon M+\varepsilon=(M+1)\varepsilon$$

这个估计对任何的 $x\in X$ 都是成立的, 从而根据 Cauthy 准则, $\{f_t|t\in T\}$ 在 X 上关于基 $\mathfrak{B}$ 一致收敛, 设其收敛到某个 (尚未确定) 的函数 $f:X\to\mathbb{C}$.

再证明 $\varphi(x)$ 正是 $f'(x)$. 要说明这一件事, 可以从导函数的定义上入手, 即考虑函数

$$F(h)=\frac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{|h|}$$

只要能证明 $h\to 0, F(h)\to 0$ 即得命题. 而现在已经知道 f 由 f_t 收敛得来, φ 由 f'_t 收敛得来, 所以可以先考虑如下函数:

$$F_t(h)=\frac{f_t(x+h)-f_t(x)-f'_t(x)h}{|h|}$$

只要这个函数可以一致收敛, 根据极限交换次序定理即可推知剩下的结论, 下面就对 $f_{t_1}-f_{t_2}$ 用拟微分平均值定理证明这件事. 在此之前, 根据 $\{f'_t|t\in T\}$ 的一致收敛性, 由 Cauthy 准则知:

$$\forall x\in X\forall\varepsilon>0\exists B=B(\varepsilon)\in\mathfrak{B}\forall t_1,t_2\in B(\varepsilon)(|f'_{t_1}(x)-f'_{t_2}(x)|<\varepsilon)$$

进而当 $t_1,t_2\in B(\varepsilon)$ 时有:

$$\begin{aligned}
&|(f'_{t_1}(x+h)-f_{t_1}(x)-f'_{t_1}(x)h)-(f_{t_2}(x+h)-f_{t_2}(x)-f'_{t_2}(x)h)|\\
=&|(f_{t_1}-f_{t_2})(x+h)-(f_{t_1}-f_{t_2})(x)-(f_{t_1}-f_{t_2})'(x)h|\\
\le&|(f_{t_1}-f_{t_2})(x+h)-(f_{t_1}-f_{t_2})(x)|+|(f_{t_1}-f_{t_2})'(x)h|\\
\le&\sup_{0<\theta<1}|(f_{t_1}-f_{t_2})'(x+\theta h)||h|+|(f_{t_1}-f_{t_2})'(x)h|\\
=&(\sup_{0<\theta<1}|f'_{t_1}(x+\theta h)-f'_{t_2}(x+\theta h)|+|f'_{t_1}(x)-f'_{t_2}(x)|)|h|\\
<&2\varepsilon|h|
\end{aligned}$$

此即当 $t_1,t_2\in B(\varepsilon)$ 时有:

$$|F_{t_1}(h)-F_{t_2}(h)|<2\varepsilon$$

同时注意到根据 f_t 可微的定义, 存在极限:

$$\lim_{h\to 0}F_t(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f_t(x+h)-f_t(x)-f'_t(x)h}{|h|}=0$$

综上, 根据 Cauthy 准则知 $F_t(h)$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 对 h 一致收敛, 故由极限交换次序定理, 首先可以断言下面两个累次极限都存在:

$$\lim_{h\to 0}(\lim_{\mathfrak{B}}F_t(h)),\lim_{\mathfrak{B}}(\lim_{h\to 0}F_t(h))$$

其次可以断言它们相等, 注意到对上前式:

$$\lim_{h\to 0}(\lim_{\mathfrak{B}}F_t(h))=\lim_{h\to 0}F(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{h}$$

对上后式:

$$\lim_{\mathfrak{B}}(\lim_{h\to 0}F_t(h))=\lim_{\mathfrak{B}}(\lim_{h\to 0}F(h))=\lim_{\mathfrak{B}}0=0$$

故可得:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{h}=0$$

这便是 f 在 x 处导数为 φ 的定义. 当然, 上面的讨论对任意的 $x\in X$ 都是成立的, 从而命题得证.

这个定理可以总结成下面的图:

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{f_t(x+h)-f_t(x)-f_t'(x)h}{|h|} =: F_t(h) \arrow[r, Rightarrow, "\mathfrak{B}"'] \arrow[d, "h\to 0"'] & F(h) := \dfrac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{|h|} \arrow[d, "h\to 0"] \arrow[dl, dashed, no head] \\
0 \arrow[r, "\mathfrak{B}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

推论 8.3.5 设由在有界凸集 X(它属于 $\mathbb{R},\mathbb{C}$ 或任一线性赋范空间) 上可微的函数 $f_n: X\to\mathbb{C}$ 组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 至少在一点 $x_0\in X$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 X 上一致收敛, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 X 上也一致收敛, 它的和在 X 上可微, 且

$$(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

8.3.2 练习题

1. 确定下列函数的存在域, 并研究它们的连续性:

(1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$;

(2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$.

2. 证明: 函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导函数, 并计算 $f''(x)$.

3. 证明: Riemann ζ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在 $(1,+\infty)$ 上是连续的, 并在此区间内有各阶连续导函数.

4. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}(x>0)$, 计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$.

5. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$. 证明:

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\ln 2$$

6. 设 E 是 $(-\infty,+\infty)$ 中的一个点集, x_0 是 E 的一个极限点 (x_0 可以是 $\pm\infty$). 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛, 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)=a_n(x\in E, n=1,2,\cdots)$. 证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x\in E)$.

7. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{1+2x})^n\cos\frac{n\pi}{x}$. 计算: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

8. 证明:

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

8.4 由幂级数确定的函数

8.4.1 命题整理

命题 8.4.1 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 在点 $\zeta\neq z_0$ 收敛, 那么它在任何一个圆 $K_q=\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|<q|\zeta-z_0|\}(0<q<1)$ 内绝对且一致收敛.

定理 8.4.1 (幂级数收敛性质) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 在圆 $K=\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|<R\}$ 中收敛, 半径由 *Cauthy-Hadamard* 公式 $R=(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|})^{-1}$ 确定. 在这个圆外级数发散. 在任何严格位于级数收敛圆 K 内的闭圆上, 幂级数绝对且一致收敛.

8.4.2 练习题

1. 求下列幂级数的收敛半径, 并研究它们在收敛区间端点处的性质:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$;

解

由 Cauthy-Hadamard 公式:

$$R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2\cdot\frac{1}{n}}}=\frac{1}{e}$$

从而幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{e}$. 先令 $x=\frac{1}{e}$, 知级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}$$

考虑 Raabe 判别法: 知

$$\begin{aligned}
n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)&=n(\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}}{(1+\frac{1}{n+1})^{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{e^{n+1}}}-1)=n(e\cdot\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{(1+\frac{1}{n+1})^{(n+1)^2}}-1)\\
&=n(e\cdot\exp(n^2\ln(1+\frac{1}{n})-(n+1)^2\ln(1+\frac{1}{n+1}))-1)\\
&\sim n(e\cdot\exp(n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{n^4}+o(\frac{1}{n^4}))\\
&-(n+1)^2(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(n+1)^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)^4})+o(\frac{1}{(n+1)^4}))-1)\\
&=n(e\cdot\exp(n-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})-(n+1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)^2}+o(\frac{1}{(n+1)^4}))-1)\\
&\sim n\cdot(e\cdot\exp(-1+\frac{1}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{4}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})+o(\frac{1}{n^4}))-1)\\
&\sim n(\exp(\frac{1}{3}\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{4}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2})-1)\\
&\sim n(1+\frac{1}{3}\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{4}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}-1)\to 0,\quad n\to\infty
\end{aligned}$$

进而知原级数发散. 再考虑 $x=-\frac{1}{e}$, 知级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}$$

注意到 $n\to\infty$ 时其通项并不趋于零! 故级数发散. (这里发现其实正项的时候也是如此, 证复杂了. . .)

综上, 原级数收敛区间即为 $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$;

解

由 Cauthy-Hadamard 公式:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}}=\infty$$

从而级数在 $\mathbb{R}$ 上收敛.

•(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})x^n(a>0,b>0)$;

解

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{e})^n x^n$

解

由 Cauthy-Hadamard 公式:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\frac{n}{e})^{n\cdot\frac{1}{n}}}=0$$

从而级数仅在 $x=0$ 收敛.

2. 求下列广义幂函数的收敛点集:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^n$;

解

首先研究幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^n$, 由 Cauthy-Hadamard 公式:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\frac{1}{2n+1})^{\frac{1}{n}}}=1$$

注意到 $x=1$ 时原级数显然发散, 而 $x=-1$ 时由 Leibniz 准则可知原级数收敛, 进而原级数的收敛区间为 $[-1,1)$, 这便说明 $\frac{1-x}{1+x}\in[-1,1)$, 解得 $x>0$, 进而收敛点集为 $(0,+\infty)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}e^{-nx}$;

解

首先研究幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}x^n$, 由 Cauthy-Hadamard 公式:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(1+\frac{1}{n})^{-n^2\cdot\frac{1}{n}}}=e$$

注意到 $x=\pm e$ 时原级数的通项均不趋于零, 进而原级数的收敛区间为 $(-e,e)$, 从而解 $-e<e^{-x}<e$ 得 $x\in(-1,+\infty)$, 进而收敛点集为 $(-1,+\infty)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{x})^n\sin\frac{\pi}{2^n}$.

解

首先研究幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\sin\frac{\pi}{2^n}$, 由 Cauthy-Hadamard 公式:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\sin\frac{\pi}{2^n})^{\frac{1}{n}}}=2$$

注意到 $x=\pm 2$ 时原级数的通项均不趋于零, 进而原级数的收敛区间为 $(-2,2)$, 从而解 $-2<\frac{1}{x}<2$ 得 $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$ 或 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$. 从而收敛点集为 $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

7. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$. 如果 $a_n\geq 0$, 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

证明

根据幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 由 Cauthy-Hadamard 公式:

$$1=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}$$

考虑到 $a_n\geq 0$, 上式即说明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$. 知题即证:

$$|\sum_{k=0}^{n}a_k-A|\to 0,\quad n\to\infty, x\to 1^-$$

考虑

$$|\sum_{k=0}^{n}a_k-A|\leq|\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\sum_{k=0}^{n}a_kx^k-A|\leq|\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k|+|\sum_{k=0}^{n}a_kx^k-A|$$

不妨取 $x=1-\frac{1}{e^n}$, 对其中的第一个式子, 有:

$$\begin{aligned}|\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k|&=|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)|=|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})|\\&\leq|\sum_{k=0}^{n}ka_k(1-x)|=\frac{1}{e^n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)\end{aligned}$$

注意到必有 $a_n<2^n$, 从而有:

$$\frac{1}{e^n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)\leq\frac{1}{e^n}(n\cdot n\cdot 2^n)=n^2(\frac{2}{e})^n$$

因为 $\frac{2}{e}<1$, 故 $n^2(\frac{2}{e})^n\to 0, n\to\infty$.

而对其中第二个式子, 由 $n\to\infty, x=1-\frac{1}{e^n}\to 1^-$ 与题目已经给出的 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$ 可知其在 $n\to\infty$ 时趋 0.

综上, 可以知道 $|\sum\limits_{k=0}^{n}a_k-A|\to 0, n\to\infty$, 命题即证.

8.5 补充: 谢惠民上的函数项级数相关题目

在解决题目之前先给出 [4] 中的一个习题当做引理并证明:

引理 8.5.1 如果区间 $I=\{x\in\mathbb{R}|a\le x\le b\}$ 上的连续函数族 $f_t\in C(I,\mathbb{R})$ 在区间 (a,b) 上一致收敛, 那么它在整个区间 $[a,b]$ 上收敛而且是一致的.

证明

既然 f_t 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 知 $f_t(a),f_t(b)$ 有意义. 只需验证 f_t 在 $[a,a+\delta),\delta>0$ 上一致收敛即可. 按照定义, 此即验证:

$$\forall x\in[a,a+\delta)\forall\varepsilon_2>0\exists B_t\in\mathfrak{B}_t\forall t_1,t_2\in B_t(|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon_2)$$

根据 $f_t(x)$ 在 $x=a$ 连续的定义, 对任意的 t 有:

$$\forall\varepsilon_1>0\exists\delta_1(\varepsilon_1)>0\forall x\in\mathbb{R}(|x-a|<\delta_1(\varepsilon_1)\Rightarrow|f_t(x)-f_t(a)|<\varepsilon_1)$$

现在验证下述式子:

$$\forall\varepsilon_3>0\exists B_t'\in\mathfrak{B}_t\forall t_1,t_2\in B_t'(|f_{t_1}(a)-f_{t_2}(a)|<\varepsilon_3)$$

根据一致收敛的 Cauthy 准则, 有:

$$\exists\delta_2(\frac{1}{2}\varepsilon_3)>0\forall x\in(a,a+\delta_2(\frac{1}{2}\varepsilon_3))\exists B_t''\in\mathfrak{B}_t\forall t_1,t_2\in B_t''(|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon_3)$$

如若欲证式不成立, 也即有下述表达式:

$$\exists\varepsilon_3>0\forall B_t'\in\mathfrak{B}_t\exists t_1,t_2\in B_t'(|f_{t_1}(a)-f_{t_2}(a)|\ge\varepsilon_3)$$

根据 f_{t_1},f_{t_2} 的连续性, 至少可以找到一个 $\delta_3(\varepsilon_3)$, 使得对任意的 $x\in[a,a+\delta_3(\varepsilon_3))$, 有

$$|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|\ge\frac{1}{2}\varepsilon_3$$

现在在 $(a,\min\{\delta_2(\frac{1}{2}\varepsilon_3),\delta_3(\varepsilon_3)\})$ 内即有矛盾. 从而欲证式成立. 进而便有如下式子成立:

$$\begin{aligned}|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|&=|f_{t_1}(x)-f_{t_1}(a)+f_{t_1}(a)-f_{t_2}(a)+f_{t_2}(a)-f_{t_2}(x)|\\&\le|f_{t_1}(x)-f_{t_1}(a)|+|f_{t_1}(a)-f_{t_2}(a)|+|f_{t_2}(a)-f_{t_2}(x)|\\&<\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_1=2\varepsilon_1+\varepsilon_3\end{aligned}$$

届于 $\varepsilon_1,\varepsilon_3$ 都是任意的, 当然可以令 $\varepsilon_2=2\varepsilon_1+\varepsilon_3$ 是任意的, 进而定义式即证, 命题即证.

□

1. 讨论函数列或函数项技术在给定区间上的一致收敛性:

(1) $S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},n=1,2,\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$;

解

注意到 $S_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{nx}{1+(nx)^2}$. 当 $x=0$ 时显然有 $S_n=0$, 而当 $x\ne0$ 时, 注意到 $\frac{nx}{1+(nx)^2}$ 总是一个有界量, 故在 $n\to\infty$ 时总能有 $S_n(x)\to0$, 也即根据 Weierstrass 判别法可知该函数列一致收敛到 0.

(2) $S_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},n=1,2,\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$;

解

令 $x=\frac{p}{n}$, 注意到 $S_n(\frac{1}{p})=\frac{p}{1+p^2}$, 这说明总能取得不同的 x, 使得 $n\to\infty$ 时 $S_n(x)$ 趋向于不同的值, 也即函数列不一致收敛.

(3) $S_n(x)=\frac{n+x^2}{nx},n=1,2,\cdots,x\in(0,+\infty)$;

解

令 $x=\frac{1}{n}$, 知 $S_n(\frac{1}{n})$ 在 $n\to\infty$ 时发散! 故其不一致收敛.

(4) $S_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}, n=1,2,\cdots$

(i) $x\in(0,1)$;

解

注意到 x 作为一个有界量, 必有 $\frac{x}{n}=o(1), n\to\infty$, 从而根据 $x\ln x\to 0, x\to 0$, 由 Weierstrass 判别法可知函数列一致收敛到 0.

(ii) $x\in(0,+\infty)$;

解

令 $x=qn$, 知 $S_n(qn)=q\ln q$, 从而总可以选取不同的 x 使得 S_n 在 $n\to\infty$ 时取不同的值, 进而函数列不一致收敛.

(5) $S_n(x)=n\sin\frac{x}{n}, n=1,2,\cdots$

(i) $x\in[0,a]$;

解

在 n 充分大 (比方说, 大于 $\frac{2a}{\pi}$) 时, 知 $\frac{x}{n}\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 进而 $S_n(x)\le n\sin\frac{a}{n}$, 而后者在 $n\to\infty$ 时趋向于 a, 进而由 Weierstrass 判别法可知函数列一致收敛.

(ii) $x\in(0,+\infty)$;

解

取 $x=n$ 知 $S_n(n)$ 在 $n\to\infty$ 时发散! 故函数列不一致收敛.

(6) $S_n(x)=\frac{1}{n}\ln(1+e^{-nx}), n=1,2,\cdots$

(i) $x\ge 0$

解

知 $x\ge 0$ 时必有 $e^{-nx}\le 1$, 进而 $S_n(x)\le\frac{1}{n}\cdot\ln 2$, 而后者在 $n\to\infty$ 时显然收敛, 由 Weierstrass 判别法可知函数列一致收敛.

(ii) $x<0$

解

取 $x=-n^2$, 知 $S_n(-n^2)=\frac{1}{n}\ln(1+e^{n^3})>n^2$, 而后者在 $n\to\infty$ 时发散! 从而 $S_n(x)$ 不一致收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}), \frac{1}{t}\le|x|\le t, t>1$;

解

注意到

$$|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{\sqrt{n!}}(|x|^n+|x|^{-n})$$

注意到 $|x|>1$ 和 $|x|<1$ 的情况完全类似, 从而不妨就设 $1<|x|<t$, 有:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{\sqrt{n!}}(|x|^n+|x|^{-n})\le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{\sqrt{n!}}|x|^n$$

考虑 Raabe 判别法, 记上式右端级数通项为 a_n, 有:

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=[(\frac{n}{n+1})^8\sqrt{n+1}\cdot\frac{1}{t}-1]n\to\infty,\quad n\to\infty$$

从而上式右端级数收敛, 进而由 Weierstrass 判别法可知原级数一致收敛.

•(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}, x>0$;

解

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[e^x-(1+\frac{x}{n})^n]$

(i) 有限闭区间 $[0,b]$

解

记 $f(x)=e^x-(1+\frac{x}{n})^n$, 可知

$$f'(x)=e^x-(1+\frac{x}{n})^{n-1}=e^x-\frac{1}{1+\frac{x}{n}}(1+\frac{x}{n})^n$$

注意到既然 $(1+\frac{x}{n})^n$ 关于 n 是单调上升逼近 e^x 的, 知对每个固定的 x 总有 $f'(x)>0$, 进而 $f(x)$ 单调递增. 又因为 $x\in[0,b]$, 可以得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[e^x-(1+\frac{x}{n})^n]\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[e^b-(1+\frac{b}{n})^n]$$

注意到上右式是正项级数, 从而考虑下面的等价关系:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(e^b-(1+\frac{b}{n})^n)&=\frac{1}{n}(e^b-e^{n\ln(1+\frac{b}{n})})\sim\frac{1}{n}(e^b-e^{n(\frac{b}{n}-\frac{1}{2}\frac{b^2}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))})\\&=\frac{1}{n}(e^b-e^{b-\frac{1}{2}\frac{b^2}{n}+o(\frac{1}{n})})=\frac{1}{n}(e^b(1-e^{-\frac{b^2}{n}+o(\frac{1}{n})}))\\&\sim\frac{1}{n}(e^b(1-(1+(-\frac{b^2}{n}+o(\frac{1}{n})))))\sim\frac{1}{n}\cdot e^b\cdot\frac{b^2}{n}=\frac{b^2e^b}{n^2}\end{aligned}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b^2e^b}{n^2}$ 对每个给定的 b 都是收敛的, 进而由 Weierstrass 判别法可知原级数一致收敛.

(ii) $[0,+\infty)$

解

取 $x=n$, 显然有 $e^n-2^n>n, n\to\infty$, 从而原级数不一致收敛.

2. 确定函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 的收敛域与一致收敛域.

解

首先讨论级数的收敛域:

当 $x=0$, 知原级数显然收敛.

当 $x\in[-1,0)$, 知 $n\to\infty$ 时级数通项并不趋于 0, 从而原级数发散.

当 $x\in(-\infty,-1)$, 由 Leibniz 判别法即知原级数收敛.

当 $x\in(0,1]$, 知 $n\to\infty$ 时级数通项并不趋于 0, 从而原级数发散.

当 $x\in(1,+\infty)$, 注意到此时级数为正项级数, 而 $n\to\infty, \frac{x^n}{1+x^{2n}}\sim\frac{x^n}{x^{2n}}=\frac{1}{x^n}$, 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ 在 $x>1$ 时显然收敛, 故由 Weierstrass 判别法知原级数收敛.

其次讨论级数的一致收敛域, 根据上面的讨论知道一致收敛域只能是 $(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,+\infty)$ 的子集.

当 $x\in(1,+\infty)$, 注意到对任意的 $[a,b]\in(1,+\infty)$, 原级数都一致收敛, 这根据 Weierstrass 判别法易证. 现在考虑区间 $(1,\alpha), \alpha<+\infty$, 不妨令 $x=\frac{1}{n}$, 知此时通项 $\frac{\frac{1}{n^n}}{1+\frac{1}{n^{2n}}}\to1\neq0, n\to\infty$, 从而原

级数不一致收敛. 再考虑区间 $(\alpha,+\infty),\alpha>1$, 令 $x=n$, 知通项 $\frac{n^n}{1+n^{2n}}\to 1\neq 0,n\to\infty$, 从而原级数不一致收敛. 综上, 只能有原级数在 $[a,b],a>1$ 上一致收敛.

当 $x\in(-\infty,-1)$, 证明与上述相同, 可得级数在 $[a,b],b<-1$ 上一致收敛.

综上, 级数的一致收敛域为 $[a,b],[c,d],a<b<-1<1<c<d$.

3. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛且一致收敛, 但不绝对一致收敛.

证明

这和 [4] 的一道习题相同, 下面抄录当时解决的过程.

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 而言, 利用阿贝尔狄利克雷判别法:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{nx^2}{(1+x^2)^n}$$

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 0, 从而只需说明 $b_n=\frac{nx^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调且一致有界. 容易验证 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n(1+x^2)}$. 当 $x>0$ 时该比值总会在足够多项后恒小于 1, 进而 b_n 在足够多项后递减. 又因为 $\frac{nx^2}{(1+x^2)^n}\leq\frac{nx^2}{1+nx^2}\leq 1$, 从而 b_n 一致有界, 故原级数一致收敛.

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, 当 $x=0$ 时知其显然收敛, 而若给定点 x_0 研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^2}{(1+x_0^2)^n}$, 知其即为一个收敛的几何级数, 故该级数在 $\mathbb{R}$ 上收敛, 计算可得 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x^2}{(1+x^2)^k}=1-\frac{1}{(1+x^2)^n}$, 进而有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$$

但

$$\begin{aligned}\Delta_n&=\sup_{\mathbb{R}}|S(x)-S_n(x)|=\sup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}|S(x)-S_n(x)|\\&=\sup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}|\frac{1}{(1+x^2)^n}|=1\nrightarrow 0\end{aligned}$$

从而级数不一致收敛.

8.6 补充: Tauber 定理

关于 Tauber 定理, [4] 中的一道习题的表述首先能让人一窥其貌相:

习题“Tauber 型定理”——这是一类定理的总的名称, 它们能在某些附加的正则性条件下, 根据所考察的量的某些均值性质对这个量本身的性质作出判断. 有关级数的 Cesaro 求和法的下述断言是这类定理的一个范例. 可尝试按照 Hardy 的方法去证明它.

(a) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A(c,1)$ 且 $a_n=O(\frac{1}{n})$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在普通意义下收敛到同一个和.

(b) Tauber 定理本身属于级数的 Abel 求和法, 该定理如下:

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 当 $0<x<1$ 时收敛, 且 $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=A$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$, 那么, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在通常意义下也收敛于 A.

同样, 在史济怀, 徐森林等等诸多数学分析上, 都有在幂级数这一部分介绍 Tauber 定理. 但 Tauber 定理本身并不局限在级数方面, 条件也可以一步步减弱. 本节便主要分级数型 Tauber 定理

和积分型 Tauber 定理两块, 介绍小 o 型 Tauber 定理与大 O 型 Tauber 定理的内容和证明. 这些证明的推导同样凝练了分析中的许多方法, 一步步走下来或许也会让自己的技巧得到锻炼.

8.6.1 级数中的 Tauber 定理

这一部分是国内大多数教材上都有所涉及的, 但目前看来, 国内的数学分析教科书大多都是对小 o 型 Tauber 定理作出介绍与证明, 鲜有涉及到大 O 型 Tauber 定理的, 本小节的最终目的即引入大 O 型 Tauber 定理. 在此之前, 先遵循 [1] 的思路, 给出预备的 Abel 第二定理并证明小 o 型 Tauber 定理:

定理 8.6.1 *(Abel) 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 在点 ξ 收敛, 那么它在从点 z_0 到点 ξ 的区间 $[z_0,\xi]$ 上一致收敛, 且级数的和在此区间上连续.*

证明

知区间 $[z_0,\xi]$ 上的点可以表示成 $z=z_0+t(\xi-z_0), 0\le t\le 1$, 代入表达式知:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi-z_0)^n t^n$$

因为幂级数在点 ξ 收敛, 这意味着 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\xi-z_0)^n$ 收敛, 此时其作为与 t 无关的数项级数, 自然也对 t 一致收敛. 而 t^n 在 $0\le t\le 1$ 当然是单调且一致有界的, 从而根据 Abel-Dirichlet 判别法, 可知该级数一致收敛. 又因为每个 $c_n(z-z_0)^n$ 都是连续函数, 和函数根据定理 9. 3. 2(连续函数收敛的定理) 自然也连续, 从而命题得证.

一般为了书写简便, 将上述定理中的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 就写成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$. 可知, 这个幂级数对应的数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛意味着幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$ 在 1 处收敛, 进而其在实轴上的区间 [0,1] 上一致收敛, 且它的和 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ 在 [0,1] 上连续, 又因为 $S(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, 可得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n=S(1)=\lim_{x\to 1^-} S(x)=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

但上述式子在 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 发散的时候不一定成立, 比如取 $c_n=(-1)^n$, 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$ 对应的和函数应该是 $\frac{1}{1+x}$, 从而当 $x=1$ 时, 上式左端发散, 右端为值 $\frac{1}{2}$. 由此可以衍生出级数求和的 Abel 方法, 即当上式右端有确定值的时候, 就"规定"它是左端的值. 从而可以说: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 在 Abel 方法下的和为 $\frac{1}{2}$. 这当然不能说成是级数在正常意义下的和, 不过如果给幂级数中的数项级数加上一些条件, 就可以证明级数 Abel 和的值就等于级数在正常意义下和的值, 也即 [1] 中所提到的小 o 型 Tauber 定理:

定理 8.6.2 (Tauber) *设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 且*

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=A$$

存在. 如果

$$a_n=o(\frac{1}{n})$$

那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n=A$.

证明

由 $a_n=o(\frac{1}{n})$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$, 若令

$$\delta_n=\sup_{k\geq n}\{|ka_k|\}$$

则当 $n\to\infty$ 时, δ_n 递减趋于 0. 令

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n(0\leq x<1)$$

对任何正整数 N, 都有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}a_n-A&=\sum_{n=0}^{N}a_n-S(x)+S(x)-A\\&=\sum_{n=1}^{N}a_n(1-x^n)-\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n+(S(x)-A)\\&=I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)\end{aligned}$$

对 $x\in[0,1)$, 有

$$\begin{aligned}|I_1(x)|&\leq(1-x)\sum_{n=1}^{N}|a_n|(1+x+\cdots+x^{n-1})\\&\leq(1-x)\sum_{n=1}^{N}n|a_n|\leq(1-x)N\delta_1\\|I_2(x)|&\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}|na_n|\frac{x^n}{n}\leq\frac{\delta_N}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n\\&=\frac{\delta_N}{N}\frac{x^{N+1}}{1-x}\leq\frac{\delta_N}{N(1-x)}\end{aligned}$$

令 $x_N=1-\frac{\sqrt{\delta_N}}{N}$, 即 $N(1-x_N)=\sqrt{\delta_N}$, 易见当 $N\to\infty$ 时, $x_N\to 1$, 进而

$$\begin{aligned}|I_1(x_N)|&\leq(1-x_N)N\delta_1=\delta_1\sqrt{\delta_N}\\|I_2(x_N)|&\leq\frac{\delta_N}{\sqrt{\delta_N}}=\sqrt{\delta_N}\\I_3(x_N)&=S(x_N)-A\end{aligned}$$

综上

$$|\sum_{n=0}^{N}a_n-A|\leq(\delta_1+1)\sqrt{\delta_N}+|S(x_N)-A|$$

令 $N\to\infty$ 即得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

□

除开 Abel 和之外, 还有一种和称作 Cesaro 和:

定义 8.6.1 设 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,\sigma_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}s_k$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=A$, 则称级数在 *Cesaro* 意义下可和, 准确的说, 称级数 $(c,1)$ 可和于 A, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_k=A(c,1)$.

下面的习题结合了 [4] 和徐森林数学分析, 其阐述了 Cesaro 和与 Abel 和的关系:

习题 (级数求和的 Cesaro 方法) 设 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,\sigma_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}s_k$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=A$, 则称级数在 Cesaro 意义下可和, 准确的说, 称级数 $(c,1)$ 可和于 A, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_k=A(c,1)$.

(a) 验证: $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}(c,1)$.

证明

知 $s_n=1+(-1)^{n-1}$, 进而 $\sigma_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}s_k$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{2}$, 从而 $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}(c,1)$.

(b) 证明: $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{k-1}{n})a_k$.

证明

只需验证 $\sum\limits_{k=1}^{n}s_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k$, 这可以通过将下面的三角阵按行相加与按列相加得到:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ a_1 & a_2 & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

(c) 验证: 如果在通常意义下有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A$, 那么 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A(c,1)$.

证明

首先证明当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}a_k=0$. 注意到对任意给定的 $p>0$, 都在足够多项后有 $a_n<\frac{1}{pn}$. 用 Abel 分部求和方法, 在足够多项后有:

$$0\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}a_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)a_k=\frac{1}{n}(\frac{n(n-1)}{2}a_n-\sum_{p=1}^{n-1}a_p)\leq\frac{(n-1)a_n}{2}\leq\frac{n-1}{2pn}<\frac{1}{2p}$$

令 $p\to+\infty$, 从而可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}a_k=0$. 进而由定义可知:

$$\forall\varepsilon>0\exists N_1>0\forall n\in\mathbb{N}(n>N_1\Rightarrow|\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}a_k|<\varepsilon)$$

又根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$ 的定义:

$$\forall\varepsilon>0\exists N_2>0\forall n\in\mathbb{N}(n>N_2\Rightarrow|\sum_{k=1}^{n}a_k-A|<\varepsilon\Rightarrow A-\varepsilon<\sum_{k=1}^{n}a_k<A+\varepsilon)$$

从而当 $n>\max\{N_1,N_2\}$:

$$|\sigma_n-A|=|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}a_k-A|<|\sum_{k=1}^{n}a_k-A|+|\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}a_n|<2\varepsilon$$

进而由 ε 的任意性即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=A$, 从而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A(c,1)$.

(d) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n)$ 存在, 则称此极限是级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 在 $(c,2)$ 意义下的和. 仿此可定义任何阶 r 的 (c,r) 和, 试证: 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A(c,r)$, 那么, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A(c,r+1)$.

证明

定义 $\sigma_n^r = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^{r-1}, \sigma_n^0 = s_n$, 由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A(c,r)$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^r = A$. 根据 Stolz 定理, 知

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{r+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^r = \lim_{n\to\infty}\sigma_n^r = A$$

从而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A(c,r+1)$.

(e) 证明: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = A$, 则 $a_n = o(n), n\to\infty$;

证明

知

$$S_n = (n+1)\sigma_{n+1} - n\sigma_n \Rightarrow \frac{S_n}{n} = (1+\frac{1}{n})\sigma_{n+1} - \sigma_n \to 0, \quad n\to\infty$$

进而

$$\frac{a_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n} \to 0, \quad n\to\infty$$

这便是 $a_n = o(n), n\to\infty$.

(f) 证明: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = A$, 则 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 内绝对收敛, 且

$$f(x) = (1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n$$

证明

题即证

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n$$

考虑运用级数乘法, 这便要求 $f(x)$ 首先是绝对收敛的. 既然 $a_n = o(n), n\to\infty$, 知 n 足够大时有 $|a_n| < n$, 进而 $|a_n x^n| \le |a_n|\cdot|x^n| < n|x|^n$. 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|x|^n$ 的收敛半径为 1, 故由 Weierstrass 判别法知级数 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 内绝对收敛. 从而由级数乘法:

$$\frac{f(x)}{1-x} = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$
$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n$$

这便是

$$f(x) = (1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n$$

(g) 试证: 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A(c,1)$, 那么, 这个级数在 Abel 方法下的和也是 A.

证明

题即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = A$. 要证级数在 Abel 方法下的和也是 A, 不妨就证明 $\lim\limits_{x\to 1^-}(f(x) - A) = 0$, 其中 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 根据上题, 已经知道了:

$$f(x) = (1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n$$

因为:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

故有如下处理:

$$1=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$
$$A=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)Ax^n$$

进而

$$f(x)-A=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-A)x^n$$

根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=A$ 的定义有:

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall n\in\mathbb{N}(n>N\Rightarrow|\sigma_n-A|<\varepsilon)$$

从而, 当 $x\in(0,1)$ 时, 对 $f(x)-A$ 作余项估计, 有:

$$\begin{aligned}|(1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-A)x^n| &\le (1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}(n+1)|\sigma_{n+1}-A|x^n\\ &\le (1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}(n+1)\varepsilon x^n\\ &\le \varepsilon(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\varepsilon\end{aligned}$$

而对 $0\le n\le N$, 注意到 $\sum\limits_{n=0}^{N}(n+1)(\sigma_{n+1}-A)x^n$ 有界, 而 $x\to1^-,(1-x)^2\to0$, 故有

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)^2\sum_{n=0}^{N}(n+1)(\sigma_{n+1}-A)x^n=0$$

按照定义即

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in(-1,1)(1-x<\delta\Rightarrow|(1-x)^2\sum_{n=0}^{N}(n+1)(\sigma_{n+1}-A)x^n|<\varepsilon)$$

从而当 $0<1-x<\delta$ 时, 有:

$$\begin{aligned}|f(x)-A| &= |(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-A)x^n|\\ &\le |(1-x)^2\sum_{n=0}^{N}(n+1)(\sigma_{n+1}-A)x^n|+|(1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-A)x^n|\\ &< \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

即得

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=A$$

命题即证.

□

[4] 中的习题本身对 Tauber 定理也有所涉及, 题目如下:

习题“Tauber 型定理”——这是一类定理的总的名称, 它们能在某些附加的正则性条件下, 根据所考察的量的某些均值性质对这个量本身的性质作出判断. 有关级数的 Cesaro 求和法的下述断言是这类定理的一个范例. 可尝试按照 Hardy 的方法去证明它.

(a) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A(c,1)$ 且 $a_n = O(\frac{1}{n})$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在普通意义下收敛到同一个和.

(b) Tauber 定理本身属于级数的 Abel 求和法, 该定理如下:

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $0<x<1$ 时收敛, 且 $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = A$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$, 那么, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在通常意义下也收敛于 A.

不难发现此题中的 (a) 条件显然是强于上文中的小 o 型 Tauber 定理的, 其所给出的被称作大 O 型

Tauber 定理. 习题本身所提及的“Hardy 的方法”出现在 [12] 中, 但 Hardy 在这本书中, 包括其他研究者所做的研究 ([8],[10],[11]), 论证大 O 型 Tauber 定理时采用的全部是积分上的方法. 这提醒我们有必要跳出级数这一离散形式的桎梏, 转而通过研究性质更优的积分型 Tauber 定理来解决这个问题.

8.6.2 积分中的 Tauber 定理

本小节内容主要参考 [8], 这一小节中的证明充分展示了估阶技术的强大.

定理 8.6.3 (小 o 型 Tauber 定理) 设 $f(x)$ 在任一区间 $[0,x]$ 可积, 记

$$J(y)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}dx \quad y>0$$

若 $f(x)=o(\frac{1}{x}), x\to+\infty$, 且

$$\lim_{y\to 0^+}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-yx}dx = s$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = s$$

证明

令

$$\tilde{J}(x)=\int_0^{x} f(t)dt$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\frac{1}{y})-J(y) &= \int_0^{\frac{1}{y}} f(x)dx-\int_0^{+\infty} f(x)e^{-yx}dx\\ &= \int_0^{\frac{1}{y}}(1-e^{-yx})f(x)dx-\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-yx}f(x)dx\\ &:= I_1+I_2\end{aligned}$$

对 $I_1=\int_0^{\frac{1}{y}}(1-e^{-yx})f(x)dx$, 因为条件中给出了 $f(x)=o(\frac{1}{x})$, 这个等式是需要 x 充分大才能成立的, 不妨假设 $f(x)=o(\frac{1}{x})$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上成立. 因为最后的要求是 $y\to 0^+$, 知 $\frac{1}{y}\to+\infty$, 从而 x_0

可以把积分限分成两部分 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,\frac{1}{y})$. 出于这个考量, 有:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\frac{1}{y}}(1-e^{-yx})f(x)dx \\ &= \int_0^{x_0}(1-e^{-yx})f(x)dx + \int_{x_0}^{\frac{1}{y}}(1-e^{-yx})f(x)dx\end{aligned}$$

对式子的前半部分, 因为 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上可积, 知其必有界, 设 $\exists M>0(|f(x)|\leq M)$, 从而有:

$$|\int_0^{x_0}(1-e^{-yx})f(x)dx| \leq \int_0^{x_0}|1-e^{-yx}|\cdot|f(x)|dx \leq M\int_0^{x_0}(1-e^{-yx})dx$$

随着 $y\to 0^+$, 知

$$M\int_0^{x_0}(1-e^{-yx})dx \sim M\int_0^{x_0} yxdx = o(1)$$

而对式子的后半部分, 代入 $f(x)=o(\frac{1}{x})$, 注意到若把 x 视作参数, $1-e^{-yx}$ 在 $y\to 0$ 时与 yx 是同阶 (甚至等价) 的, 进而有:

$$\int_{x_0}^{\frac{1}{y}}(1-e^{-yx})f(x)dx = \int_{x_0}^{\frac{1}{y}} O(yx)o(\frac{1}{x})dx = o(1)$$

进而可得 $I_1 = o(1)+o(1) = o(1)$. 对 $I_2 = -\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yx}f(x)dx$, 有:

$$\begin{aligned}I_2 &= -\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-yx}f(x)dx = -\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-yx}o(\frac{1}{x})dx \\ &= -\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-yx}\cdot o(1)\frac{1}{x}dx = o(1)\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-yx}\frac{dx}{x}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-yx}\frac{dx}{x} &\leq \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-yx}\frac{dx}{\frac{1}{y}} \\ &= y\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-yx}dx = -(e^{-yx})|_{\frac{1}{y}}^{+\infty} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

知其有界, 从而

$$I_2 = o(1)\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-yx}\frac{dx}{x} = o(1)$$

综上,

$$\tilde{J}(\frac{1}{y}) - J(y) = o(1), \quad y\to 0^+$$

此即

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{y\to 0^+}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-yx}dx = s$$

□

通过这个积分形式的定理, 可以推出级数版本, 即:

推论 8.6.1 (小 o 型 Tauber 定理) 若 $a_n = o(\frac{1}{n})$, 且

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = s$$

则

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$$

证明

取

$$f(x) = a_n, \quad x \in [n, n+1), \quad n \geq 0$$

首先验证 $f(x)$ 满足定理 9.5.3 的条件. 知当 $x \to +\infty$, 有 $n \to \infty$, 从而 $f(x) = a_n = o(\frac{1}{n}) = o(\frac{1}{x})$. 再验证第二个条件, 知:

$$\begin{aligned} J(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_n^{n+1} e^{-yx} dx = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{-ny} - e^{-(n+1)y}) \\ &= \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ny} (1 - e^{-y}) = \frac{1 - e^{-y}}{y} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ny} \end{aligned}$$

令 $t = e^{-y}$, 则当 $y \to 0^+$, 知 $t \to 1^-$, 进而

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &= \lim_{y \to 0^+} \frac{1 - e^{-y}}{y} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ny} \\ &= \lim_{y \to 0^+} J(y) = s \end{aligned}$$

由定理 9.5.3 得

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = s$$

即

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

□

下面的定理给出了积分形式的小 o 型 Tauber 定理的一个等价形式:

定理 8.6.4 设

$$f(0) = 0, \quad \lim_{y \to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-yx} f(x) dx = s$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = s$$

的充要条件是

$$\int_0^x t f(t) dt = o(x), \quad x \to +\infty$$

证明

若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = s$, 令

$$g(x) = \int_0^x t f(t) dt$$
$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

则

$$g(x) = \int_0^x t dF(t) = xF(x) - \int_0^x F(t) dt$$

故

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x} &= F(x) - \frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt \\ &= F(x) - s - \frac{1}{x}\int_0^x (F(t)-s)dt = o(1)\end{aligned}$$

进而 $g(x)=o(x)$, 必要性得证.

若 $\int_0^x tf(t)dt = o(x), x\to+\infty$, 令

$$\psi(x) = \int_0^x (t+1)dF(t)$$

知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-yx}dx &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yx}}{1+x}\cdot(1+x)f(x)dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-yx}}{1+x}d\psi(x) \\ &= \frac{\psi(x)e^{-yx}}{1+x}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\psi(x)\cdot\frac{-y(1+x)e^{-yx}-e^{-yx}}{(1+x)^2}dx\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{y\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-yx}f(x)dx = s$$

存在, 故反常积分首先需存在, 也即

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-yx}f(x) = 0$$

这意味着 $f(x)=o(e^{yx})$, 从而当 $x\to+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{\psi(x)e^{-yx}}{1+x} &= \frac{e^{-yx}}{1+x}(\int_0^x (t+1)f(t)dt) = \frac{e^{-yx}}{1+x}(\int_0^x tf(t)dt + \int_0^x f(t)dt) \\ &= \frac{e^{-yx}}{1+x}(o(x) + \int_0^x o(e^{-yx})dt) = o(1)\end{aligned}$$

故

$$\frac{\psi(x)e^{-yx}}{1+x}|_0^{+\infty} = 0$$

进而

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-yx}dx = y\int_0^{+\infty}\frac{\psi(x)}{1+x}e^{-yx}dx + \int_0^{+\infty}\frac{\psi(x)}{(1+x)^2}e^{-yx}dx$$

再证明 $\psi(x)=o(x)$, 事实上:

$$\begin{aligned}F(x)-F(1) &= \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}\cdot tf(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dg(t) \\ &= \frac{g(t)}{t}|_1^x - \int_1^x g(t)d(\frac{1}{t^2}) = \frac{g(x)}{x} - g(1) + \int_1^x \frac{g(t)}{t^2}dt \\ &= o(1) + O(1) + \int_1^x o(1)\frac{1}{t}dt = O(1) + o(1)\ln x = O(1) + o(\ln x)\end{aligned}$$

进而

$$\psi(x) = \int_0^x (t+1)dF(t) = F(x) + g(x) = o(x)$$

从而

$$\frac{\psi(x)}{1+x} = o(1)$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\psi(x)}{1+x}e^{-yx}dx = \int_0^{+\infty} o(1)e^{-yx}dx = o(1)(-\frac{1}{y})(e^{-yx})|_0^{+\infty} = o(\frac{1}{y}), y\to0^+$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-yx} &= y\int_0^{+\infty} \frac{\psi(x)}{1+x}e^{-yx}dx + \int_0^{+\infty} \frac{\psi(x)}{(1+x)^2}e^{-yx}dx \\ &= yo(\frac{1}{y}) + \int_0^{+\infty} \frac{\psi(x)}{(1+x)^2}e^{-yx}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\psi(x)}{(1+x)^2}e^{-yx}dx, \quad y\to 0^+\end{aligned}$$

由 $\psi(x)=o(x)$ 知

$$\frac{\psi(x)}{(1+x)^2} = o(\frac{1}{x})$$

进而由定理 9.5.3 即知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi(x)}{(1+x)^2}dx = s$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\psi(x)}{(1+x)^2}dx &= -\int_0^{+\infty} \psi(x)d\frac{1}{1+x} = \int_0^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{1+x} \\ &= \int_0^{+\infty} dF(x) = \int_0^{+\infty} f(t)dt\end{aligned}$$

即得

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = s$$

命题得证.

□

对这个定理作离散化, 可以得到下面的推论

推论 8.6.2 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nx}, \quad x>0$$

且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = s$$

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$ 的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = o(n), \quad n\to\infty$$

证明

不失一般性, 不妨就设 $a_0=0$, 取

$$g(x) = a_n, \quad x\in[n,n+1), \quad n\geq 0$$

则知 $g(0)=0$, 再验证 $g(x)$ 满足定理 9.5.4 的第二个条件:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-yx}g(x)dx &= \lim_{y\to 0^+}\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} a_n e^{-yx}dx = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(e^{-ny}-e^{-(n+1)y}) \\ &= \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ny}(1-e^{-y}) = \frac{1-e^{-y}}{y}\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ny}\end{aligned}$$

令 $y \to 0^+$, 知 $\frac{1-e^{-y}}{y} \to 1$, 根据题目条件有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ny} \to s$, 从而

$$\lim_{y\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-yx} g(x)dx = s$$

这便说明了 $g(x)$ 是满足定理 9.5.4 的条件的. 应用定理 9.6.4, 知

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

的充要条件是

$$\int_0^x tg(t)dt = o(x), \quad x \to +\infty$$

要得到推论的条件, 令上式的 x 为 n, 有:

$$\int_0^n tg(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} tg(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} ta_k dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{2k+1}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} ka_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

从而当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$, 根据已经得到的关系有

$$\int_0^x tg(t)dt = o(x), \quad x \to +\infty$$

既然这个式子对任意形式的 $x \to +\infty$ 都成立, 将 x 换成 n 并令 $n \to \infty$, 式子自然也成立, 进而

$$\int_0^n tg(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} ka_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = o(n)$$

但因为已经有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$ 了, 知 $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k = O(1)$, 从而自然有

$$\sum_{k=0}^{n-1} ka_k = o(n)$$

这与推论所需要的结果形式上是一样的. 而当 $\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k = o(n)$, 同样可以将其写成 $\sum\limits_{k=0}^{n-1} ka_k = o(n)$, 考虑

$$\int_0^n tg(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} ka_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

下面说明 $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k = o(n)$. 事实上, 知 $\sum\limits_{k=0}^{n-2} ka_k$ 依旧是 $o(n)$, 从而:

$$\sum_{k=0}^{n-1} ka_k - \sum_{k=0}^{n-2} ka_k = (n-1)a_{n-1} = o(n) - o(n) = o(n)$$

进而知 $a_n = o(1)$, 从而 $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_n = no(1) = o(n)$. 这便说明 $\int_0^n tg(t)dt = o(n) + o(n) = o(n)$, 进而对任意的 x, 可以令 $n = [x]$, 有:

$$\int_0^x tg(t)dt = \int_0^{[x]} tg(t)dt + \int_{[x]}^x tg(t)dt = o([x]) + \xi g(\xi)(x-[x]) = o(x) + O(x)\cdot o(1)\cdot O(1) = o(x)$$

这里 $\xi \in [[x], x]$, 再根据 $\int_0^x tg(t)dt = o(x)$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$ 的等价性即可推得该方向成立.

综上, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k = o(n), n \to \infty$ 是等价的.

□

这个推论其实便是 [4] 中待解习题 (b), 同时它也被称作 Tauber 第二定理 (先前所证明的小 o 型 Tau-
ber 定理即 Tauber 第一定理).

最后, 再来介绍本节最终的目标——大 O 型 Tauber 定理.

定理 8.6.5 设 $x \to 0^+$ 时有:

$$f(x) = O(\frac{1}{x})$$
$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)dt \to s$$

则

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = s$$

为了证明这个定理, 首先还是需要几个引理.

引理 8.6.1 *(Weierstrass 逼近定理)* 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得:

$$|g(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a,b]$$

引理 8.6.2 设 $g(x)$ 是 $[c,1], c > 0$ 上的连续函数, 且 $x \in [0,c)$ 时 $g(x) = 0$. 则对任意的 $\varepsilon > 0, \alpha > 0$, 必存在两个多项式 $p(x), P(x)$, 满足:

$$p(x) < g(x) < P(x), \quad 0 \le x \le 1$$
$$\int_0^1 (\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(P(x) - p(x))dx < \varepsilon$$

证明

不妨设 $\lim\limits_{t\to c^+} g(t) > 0$, 构造如下在 $[0,1]$ 上的连续函数:

$$h_\delta(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0,1]\backslash(c-\delta, c) \\ \frac{x-c+\delta}{\delta} \lim\limits_{t\to c^+} g(t), & x \in (c-\delta, c) \end{cases}$$

其中 δ 是一个足够小的正数. 可以先验证 $h_\delta(x)$ 的连续性, 这里便只需验证 $x = c - \delta$ 处和 $x = c$ 处的连续性:

对 $x = c - \delta$, 知 $h(c-\delta) = g(c-\delta) = 0$, 而

$$\lim_{x\to(c-\delta)^+} h_\delta(x) = \lim_{x\to(c-\delta)^+} \frac{x-c+\delta}{\delta} \lim_{t\to c^+} g(t) = 0$$
$$\lim_{x\to(c-\delta)^-} h_\delta(x) = \lim_{x\to(c-\delta)^-} g(x) = 0$$

从而 $h_\delta(x)$ 首先在 $x = c - \delta$ 处连续, 其次对 $x = c$, 知 $h_\delta(c) = g(c) = \lim\limits_{t\to c^+} g(t)$, 而

$$\lim_{x\to c^-} h_\delta(x) = \lim_{x\to c^-} \frac{x-c+\delta}{\delta} \lim_{t\to c^+} g(t) = \lim_{t\to c^+} g(t)$$
$$\lim_{x\to c^+} h_\delta(x) = \lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{t\to c^+} g(t)$$

从而 $h_\delta(x)$ 其次在 $x=c$ 处连续, 从而 $h_\delta(x)$ 确实是 $[0,1]$ 上的连续函数, 同时注意到 $x\in[0,1]$ 时有 $g(x)\le h_\delta(x)$. 这是因为 $x\in(0,c-\delta]\cup[c,1]$ 时, $h_\delta(x)=g(x)\ge g(x)$. 而 $x\in(c-\delta,c)$ 时, $h_\delta(x)>0=g(x)$. 这同时说明:

$$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(h_\delta(x)-g(x))dx=\int_{c-\delta}^c(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(h_\delta(x)-g(x))dx$$

当 $x\in(c-\delta,c)$, 容易验证 $h_\delta(x)\le\lim\limits_{t\to c^+}g(t)$, 进而:

$$\int_{c-\delta}^c(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(h_\delta(x)-g(x))dx\le\lim_{t\to c^+}g(t)\cdot\int_{c-\delta}^c(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}dx=o(1),\quad\delta\to0^+$$

换句话说, 上式意味着:

$$\forall\eta>0\exists\delta>0\forall x\in[0,1](h_\delta(x)\ge g(x)\wedge\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(h_\delta(x)-g(x))dx<\eta)$$

由引理 9.5.1 知, 必存在多项式 $Q(x)$ 使得

$$|h_\delta(x)-Q(x)|<\eta,\quad x\in[0,1]$$

令 $P(x)=Q(x)+\eta$, 则知: $g(x)\le h(x)<P(x),x\in[0,1]$, 且

$$\begin{aligned}\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(P(x)-g(x))dx&=\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(P(x)-Q(x)+Q(x)-h(x)+h(x)-g(x))dx\\&\le\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(P(x)-Q(x))dx+\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}|Q(x)-h(x)|dx\\&+\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(h(x)-g(x))dx\\&<\eta\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}dx+\eta\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}dx+\eta\end{aligned}$$

其中如果令 $u=\ln\frac{1}{x}$, 知 $x=e^{-u}$, 进而:

$$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}dx=\int_{+\infty}^0u^{\alpha-1}\cdot(-e^{-u})du=\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}du$$

该积分收敛, 从而其为有界量, 进而 $2\eta\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}dx+\eta$ 与 η 同阶.

同理, 可以证明存在多项式 $p(x)=Q(x)-\eta$ 满足

$$p(x)<g(x),\quad x\in[0,1]$$

及

$$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(g(x)-p(x))dx<2\eta\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}dx+\eta$$

最后, 知:

$$\begin{aligned}\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(P(x)-p(x))dx&=\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(P(x)-g(x))dx+\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(g(x)-p(x))dx\\&<(4\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}dx+2)\eta\end{aligned}$$

届于 η 是任意的, 而 $4\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}dx+2$ 有界, 命题即证.

□

引理 8.6.3 设 $f(t)\geq 0, t\in[0,+\infty]$,

$$F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)dt,\quad x>0$$

若

$$F(x)\sim\frac{s}{x^\alpha},\quad \alpha>0, x\to 0^+$$

则对任何一个满足引理 *9.5.2* 中条件的函数 $g(x)$, 必有:

$$\int_0^{+\infty}e^{-tx}g(e^{-tx})f(t)dt\sim\frac{s}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}g(e^{-t})dt,\quad x\to 0^+ \tag{8.5}$$

证明

设 ε 是任意给定的正数, 由引理 9. 5. 2 知必存在两个多项式 $p(x),P(x)$ 满足

$$p(x)<g(x)<P(x),\quad 0\leq x\leq 1$$

且

$$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}(P(x)-p(x))dx<\varepsilon \tag{8.6}$$

由引理的假设, 将 x 换成 $x(n+1)$, 其中 n 是任意自然数, 有:

$$F(x(n+1))=\int_0^{+\infty}e^{-xt(n+1)}f(t)dt\sim\frac{s}{(n+1)^\alpha x^\alpha},\quad x\to 0^+ \tag{8.7}$$

但若令 $u=t(n+1)$, 有:

$$\int_0^{+\infty}e^{-t(n+1)}t^{\alpha-1}dt=\int_0^{+\infty}e^{-u}\frac{u^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}}\frac{1}{n+1}du=\frac{\Gamma(\alpha)}{(n+1)^\alpha}$$

故

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}e^{-t(n+1)}t^{\alpha-1}dt$$

从而如果引理给出的 $g(x)$ 是多项式, 不妨设 $g(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 有:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-tx}(\sum_{k=0}^n a_ke^{-txk})f(t)dt&=\sum_{k=0}^n a_k\int_0^{+\infty}e^{-tx(k+1)}f(t)dt\\&\sim\sum_{k=0}^n a_k\frac{s}{(k+1)^\alpha x^\alpha}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{s}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}g(e^{-t})dt&=\frac{s}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}(\sum_{k=0}^n a_ke^{-kt})dt\\&=\frac{s}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^\alpha}\sum_{k=0}^n a_k\int_0^{+\infty}e^{-t(k+1)}t^{\alpha-1}dt\\&=\frac{s}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^\alpha}\sum_{k=0}^n\int_0^{+\infty}a_k\frac{1}{(k+1)^\alpha}e^{-u}u^{\alpha-1}du\\&=\frac{s}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^\alpha}\sum_{k=0}^n\frac{a_k}{(k+1)^\alpha}\Gamma(\alpha)=\sum_{k=0}^n a_k\frac{s}{(k+1)^\alpha x^\alpha}\end{aligned}$$

从而引理在 $g(x)$ 作为多项式时已经成立了, 代入 $p(x), P(x)$ 得:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-tx}P(e^{-tx})f(t)dt \sim \frac{s}{\Gamma(\alpha)x^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}P(e^{-t})dt \\ \int_0^{+\infty} e^{-tx}p(e^{-tx})f(t)dt \sim \frac{s}{\Gamma(\alpha)x^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}p(e^{-t})dt\end{aligned} \tag{8.8}$$

在 (9.6) 中令

$$t = \ln\frac{1}{x}$$

则该式变为

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}(P(e^{-t}) - p(e^{-t}))dt < \varepsilon \tag{8.9}$$

对该式稍作变换有:

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}(P(e^{-t}) - p(e^{-t}))dt \\ =&\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}(P(e^{-t}) - g(e^{-t}) + g(e^{-t}) - p(e^{-t}))dt \\ =&\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}(P(e^{-t}) - g(e^{-t}))dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}(g(e^{-t}) - p(e^{-t}))dt < \varepsilon\end{aligned}$$

因为上面两个积分中被积函数都是正的, 这说明:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}(P(e^{-t}) - g(e^{-t}))dt < \varepsilon \\ \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}(g(e^{-t}) - p(e^{-t}))dt < \varepsilon\end{aligned} \tag{8.10}$$

届于 $f(t) \geq 0$, 有:

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}p(e^{-xt})f(t)dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}P(e^{-xt})f(t)dt \tag{8.11}$$

从而综合(8.8)-(8.11), 有:

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to0^+}}\, x^\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)dt &\leq \lim_{x\to0^+} x^\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} e^{-xt}P(e^{-xt})f(t)dt \\ &\sim \lim_{x\to0^+} x^\alpha\Gamma(\alpha)\cdot\frac{s}{\Gamma(\alpha)x^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}P(e^{-t})dt \\ &= s\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}P(e^{-t})dt \\ &< s\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}g(e^{-t})dt + s\varepsilon, \quad x\to0^+ \\ \underline{\lim_{x\to0^+}}\, x^\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)dt &\geq \lim_{x\to0^+} x^\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} e^{-xt}p(e^{-xt})f(t)dt \\ &\sim \lim_{x\to0^+} x^\alpha\Gamma(\alpha)\cdot\frac{s}{\Gamma(\alpha)x^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}p(e^{-t})dt \\ &= s\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}p(e^{-t})dt \\ &> s\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}g(e^{-t})dt - s\varepsilon, \quad x\to0^+\end{aligned}$$

最后, 注意到 ε 是一开始便给定的任意的正数, 此时当然可以令其任意小, 从而有:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)dt = s\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}g(e^{-t})dt$$

这便是

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)dt \sim \frac{s}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}g(e^{-t})dt$$

命题即证.

□

定理 8.6.6 设 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的非负函数, 并设

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt, \quad x>0$$

若

$$F(x) \sim \frac{s}{x^\alpha}, \quad \alpha>0, x\to 0^+$$

则

$$\int_0^x f(t)dt \sim \frac{sx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad x\to+\infty$$

证明

在引理 9.5.3 中取

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0\le x\le \frac{1}{e} \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{e}<x\le 1 \end{cases}$$

对引理 9.5.3 结论中的两个式子有:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}g(e^{-tx})f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{x}} f(t)dt, \quad x\to 0^+$$

$$\frac{s}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}g(e^{-t})dt = \frac{s}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^\alpha}\int_0^1 t^{\alpha-1}dt = \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{x^\alpha}, \quad x\to 0^+$$

其中第一个式子的最右端是其中一种计算反常积分的方法, 因反常积分存在的定义而存在并等于反常积分值. 进而根据引理 9.5.3 的结论, 有:

$$\int_0^{\frac{1}{x}} f(t)dt \sim \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{x^\alpha}, \quad x\to 0^+$$

令 $u=\frac{1}{x}$, 上式自然等价于

$$\int_0^u f(t)dt \sim \frac{su^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

命题即证.

□

推论 8.6.3 设 $f(t)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上, 且存在正数 B 使得

$$B+f(t)\ge 0, \quad t\in(0,+\infty)$$

同时设

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt, \quad x>0$$

若

$$F(x) \sim \frac{s}{x}, \quad x \to 0^+$$

则

$$\int_0^x f(t)dt \sim sx, \quad x \to +\infty$$

证明

记:

$$f_1(t) = B + f(t), \quad F_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f_1(t)dt$$

可知

$$F_t(x) = \int_0^{+\infty} Be^{-xt}dt + \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt \sim \frac{B}{x} + \frac{s}{x} = \frac{B+s}{x}, \quad x \to 0^+$$

进而根据定理 9.5.6, 有:

$$\int_0^x (B + f(t))dt = \int_0^x f_1(t)dt \sim (B+s)x, \quad x \to +\infty$$

即得

$$\int_0^x f(t)dt \sim sx, \quad x \to +\infty$$

□

这个推论的离散形式如下:

推论 8.6.4 设 $\{a_n\}$ 满足存在正数 B 使得 $B + a_n \geq 0$, 且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{s}{1-x}, \quad x \to 1^-$$

则

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim sn, \quad n \to \infty$$

证明

取

$$f(x) = a_n, \quad x \in [n, n+1), \quad n \geq 0$$

则在推论 9. 5. 3 中对应可知

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} a_n e^{-xt}dt \\ &= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{-x(n+1)} - e^{-xn}) = \frac{1-e^{-x}}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nx} \end{aligned}$$

根据推论的条件:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nx} \sim \frac{s}{1-e^{-x}}, \quad x \to 0^+$$

从而

$$F(x) \sim \frac{1-e^{-x}}{x} \cdot \frac{s}{1-e^{-x}} = \frac{s}{x}, \quad x \to 0^+$$

进而由定理 9. 5. 6 可知

$$\int_0^n f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \sim sn, \quad n \to \infty$$

□

引理 8.6.4 若 $f''(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, $f(0)=A$, 且存在常数 M 使得

$$f''(x) > -\frac{M}{x^2}, \quad - < x < +\infty$$

则

$$f'(x) = o(\frac{1}{x}), \quad x \to 0^+$$

证明

取 $\delta \in (0,1)$, 由 Taylor 定理, 将 $f(x+\delta x - f(x))$ 在 $x=0$ 处展开, 知:

$$f(x+\delta x) - f(x) = \delta x f'(x) + \frac{1}{2}\delta^2 x^2 f''(x+\theta\delta x), \quad 0<\theta<1$$

从而对 $xf'(x)$ 估计:

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta} - \frac{1}{2}\delta x^2 f''(x+\theta\delta x) \\ &\le \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta} + \frac{1}{2}\delta x^2 \frac{M}{x^2(1+\theta\delta)^2} \end{aligned}$$

进而对上式取极限, 有:

$$\lim_{x\to 0^+} xf'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta} + \frac{1}{2}\frac{M\delta}{(1+\theta\delta)^2} \le \frac{1}{2}M\delta$$

但注意到 $\delta > 0$ 是独立于 x, 一开始便取定的, 当然就可以令 δ 任意小, 进而:

$$\lim_{x\to 0^+} xf'(x) \le 0$$

同理, 对 $f(x-\delta x) - f(x)$ 做研究可以得到

$$\lim_{x\to 0^+} xf'(x) \ge 0$$

综上:

$$f'(x) = o(\frac{1}{x}), \quad x \to 0^+$$

□

最后, 终于可以着手解决大 O 型 Tauber 定理的积分形式了.

定理 8.6.7 *(大 O 型 Tauber 定理)* 设 $f(t)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上, 且存在正数 B 使得

$$f(t) > -\frac{B}{t}, \quad 0 < t < +\infty$$

设

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt \to s, \quad x \to 0^+$$

则

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = s$$

证明

由 $f(x) > -\frac{B}{x}$, 知:

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^2 f(t)dt > -B\int_0^{+\infty} e^{-xt} t dt = -\frac{B}{x^2}$$

从而根据引理 9.5.4(问题: 怎么证明 $F''(x)$ 在 0 处连续?), 可知

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} t f(t) dt = o(\frac{1}{x}), \quad x \to 0^+$$

进而

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}(B + tf(t))dt = \frac{B}{x} - F'(x) \sim \frac{B}{x}, \quad x \to 0^+$$

根据条件:

$$B + tf(t) > 0$$

从而由定理 9.5.6, 知

$$\int_0^x (B + tf(t))dt \sim Bx, \quad x \to +\infty$$

另一方面

$$\int_0^x (B + tf(t))dt = Bx + \int_0^x tf(t)dt$$

从而可知

$$\int_0^x tf(t)dt = o(x), \quad x \to +\infty$$

最后, 根据定理 9.5.4 所推出的充要条件, 得到:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = s$$

□

这个积分形式的大 O 型 Tauber 定理是以 Abel 和的形式写下的, 对应有如下推论:

推论 8.6.5 *(大 O 型 Tauber 定理) 对 $\{a_n\}$, 若存在正数 B 使得*

$$na_n > -B, \quad n \in \mathbb{N}$$

设

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

证明

在定理 9.5.7 中取 $f(x) = a_n, n \le x < n+1$, 并在定理 9.5.7 的条件里把 e^{-x} 换成 y, 知其等价于:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} y^t f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n, \quad y \to 1^-$$

根据现在推论的条件, 知定理 9.5.7 的条件是成立的, 进而由定理 9.5.7 知:

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = s \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

□

最后, 回到 [4] 中待解习题的 (a). 既然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A(c,1)$, 而 Cesaro 和可以推出 Abel 和, 这说明 a_n 的

Abel 和也是 A. 根据 $a_n = O(\frac{1}{n})$, 知道其最终至少是下有界的, 从而存在正数 B 使得 $a_n > -\frac{B}{n}$. 最后, 根据推论 9. 5. 5, 可得级数在通常意义下的和也便是 A, 昭告着这整道贯穿了 Tauber,Hardy 与 Little-
wood 工作的不凡习题, 终于在此告一段落了.

Chapter 9

含参变量积分

9.1 含参变量的常义积分

9.1.1 命题整理

命题 9.1.1 设 $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b \wedge c \le y \le d\}$, 即平面 $\mathbb{R}^2$ 中的矩形. 如果函数 $f : P \to \mathbb{R}$ 连续, 即 $f \in C(P, \mathbb{R})$, 那么函数

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

在任何一点 $y \in [c,d]$ 都连续.

证明

既然 P 是紧集, 故由 f 在 P 上连续可知 f 在 P 上一致连续, 进而在 $[a,b]$ 上, 当 $y, y_0 \in [c,d]$ 且 $y \to y_0$ 时, 有:

$$\varphi_y(x) := f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0) =: \varphi_{y_0}(x)$$

这说明对每个 $y \in [c,d]$, $\varphi_y(x) = f(x,y)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续, 进而其在 $[a,b]$ 上可积. 由关于积分号下取极限的定理即知:

$$F(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)dx = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{y \to y_0} F(y)$$

□

命题 9.1.2 如果函数 $f : P \to \mathbb{R}$ 在矩形 $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b \wedge c \le y \le d\}$ 上连续且对 y 有连续偏导数, 那么积分 $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ 属于 $C^{(1)}([c,d], \mathbb{R})$, 且

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

上述公式常被称为 *Leibniz* 公式.

证明

可以直接用微分的定义验证:

$$
\begin{aligned}
&|F(y_0+h)-F(y_0)-(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx)h| \\
=&|\int_a^b (f(x,y_0+h)-f(x,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)h)dx| \\
\leq&\int_a^b |f(x,y_0+h)-f(x,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)h|dx \\
\leq&\int_a^b \sup_{0<\theta<1}|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta h)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)|dx\cdot|h|=\varphi(y_0,h)|h|
\end{aligned}
$$

因为 $\frac{\partial f}{\partial y}\in C(p,\mathbb{R})$, 知在区间 $a\leq x_0\leq b$ 上, 当 $y\to y_0$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\rightrightarrows\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$, 从而当 $h\to 0$ 时有 $\varphi(y_0,h)\to 0$.

□

推论 9.1.1 设函数 $f:P\to\mathbb{R}$ 在矩形 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\leq x\leq b\wedge c\leq y\leq d\}$ 上连续且有连续偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$. 其次, 设 $\alpha(y),\beta(y)$ 是区间 $[c,d]$ 上的连续可微函数, 且对任何 $y\in[c,d]$, 它们的值属于区间 $[a,b]$, 那么积分

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

对任何 $y\in[c,d]$ 有定义, 属于 $C^{(1)}([c,d],\mathbb{R})$, 并且公式

$$F'(y)=f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y)+\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

成立.

命题 9.1.3 如果函数 $f:P\to\mathbb{R}$ 在矩形 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\leq x\leq b\wedge c\leq y\leq d\}$ 上连续, 那么积分 $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 在区间 $[c,d]$ 上可积且有等式

$$\int_c^d(\int_a^b f(x,y)dx)dy=\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

证明 (在不使用 Fubini 定理的情况下)

考虑函数

$$\varphi(u)=\int_c^u(\int_a^b f(x,y)dx)dy,\quad \psi(u)=\int_a^b(\int_c^u f(x,y)dy)dx$$

因为 $f\in C(P,\mathbb{R})$, 可证 $\varphi,\psi\in C([a,b],\mathbb{R})$, 同时知 $\varphi'(u)=\int_a^b f(x,u)dx=\psi'(u)$, 因此在区间 $[c,d]$ 上 φ 和 ψ 最多相差一个常数. 但是, 因为 $\varphi(0)=\psi(0)=0$, 故在区间 $[c,d]$ 上有等式 $\varphi(u)=\psi(u)$, 令 $u=d$ 即证命题.

□

9.1.2 练习题

1. 求极限:

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}dx$;

解

既然 $\sqrt{x^2+a^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上都连续, 知

$$\lim_{a\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}dx=\int_{-1}^1\lim_{a\to 0}\sqrt{a^2+x^2}dx=\int_{-1}^1|x|dx=1$$

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx dx$.

解

既然 $x^2\cos tx$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上都连续, 知

$$\lim_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx dx=\int_0^2\lim_{t\to 0}x^2\cos tx dx=\int_0^2 x^2 dx=\frac{8}{3}$$

2. 设 f 是可微函数. 令

$$F(u)=\int_0^u (x+u)f(x)dx$$

计算 $F''(u)$.

解

知:

$$F(u)=\int_0^u xf(x)dx+\int_0^u uf(x)dx$$
$$F'(u)=xf(x)+uf(x)+\int_0^u f(x)dx$$
$$F''(u)=2f(x)$$

3. 计算下列函数的导数:

(1) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{(1+t)^2}dt$;

解

$$f'(x)=e^{(1+\cos x)^2}(-\sin x)-e^{(1+\sin x)^2}\cos x=-e^{(1+\cos x)^2}\sin x-e^{(1+\sin x)^2}\cos x$$

(2) $f(x)=\int_x^{x^2} e^{-x^2u^2}du$;

解

$$f'(x)=e^{-x^6}-e^{-x^4}-2\int_x^{x^2}u^2xe^{-x^2u^2}du$$

(3) $f(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xt}{t}dt$;

解

$$f'(x)=x\frac{\sin(x(x+b))}{x+b}-\frac{\sin(x(x+a))}{x+a}+\int_{a+x}^{b+x}\cos xt dt$$

(4) $f(u)=\int_0^u g(x+u,x-u)dx$.

解

$$f'(u)=g(2u,0)+\int_0^u (g_1'(x+u,x-u)-g_2'(x+u,x-u))dx$$

4. 设 φ 和 ψ 可以分别微分两次和一次. 证明:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

证明

知:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}(-a\varphi'(x-at) + a\varphi'(x+at)) + \frac{1}{2a}(a\psi(x+at) + a\psi(x-at)) \\
&= \frac{a}{2}\varphi'(x+at) - \frac{a}{2}\varphi'(x-at) + \frac{1}{2}\psi(x+at) + \frac{1}{2}\psi(x-at) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{a^2}{2}\varphi''(x+at) + \frac{a^2}{2}\varphi''(x-at) + \frac{a}{2}\psi'(x+at) - \frac{a}{2}\psi'(x-at) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}\varphi'(x-at) + \frac{1}{2}\varphi'(x+at) + \frac{1}{2a}\psi(x+at) - \frac{1}{2a}\psi(x-at) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}\varphi''(x-at) + \frac{1}{2}\varphi''(x+at) + \frac{1}{2a}\psi'(x+at) - \frac{1}{2a}\psi(x-at)
\end{aligned}$$

比对即得题式.

5. 设 f 在闭区间 $[0,a]$ 上连续, 且当 $t \in [0,a]$ 时, $(x-t)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, 证明:

$$u(x,y,z) = \int_0^a \frac{f(t)dt}{\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + z^2}}$$

满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

证明

知

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\int_0^a \frac{f(t)(x-t)dt}{((x-t)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\int_0^a \frac{f(t)\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + z^2}(y^2 + z^2 - 2(x-t)^2)}{((x-t)^2 + y^2 + z^2)^3} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\int_0^a \frac{f(t)\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + z^2}((x-t)^2 + z^2 - 2y^2)}{((x-t)^2 + y^2 + z^2)^3} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\int_0^a \frac{f(t)\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + z^2}((x-t)^2 + y^2 - 2z^2)}{((x-t)^2 + y^2 + z^2)^3}
\end{aligned}$$

6. 设 $a < b$, f 为可微函数. 令

$$\varphi(u) = \int_a^b f(x)|x-u|dx$$

计算 $\varphi''(u)$.

解

可将 $\varphi(u)$ 写成如下形式:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_a^b f(x)(x-u)dx, & u \in (-\infty, a) \\ \int_a^u f(x)(x-u)dx + \int_u^b f(x)(u-x)dx, & u \in [a,b] \\ \int_a^b f(x)(u-x)dx, & u \in (b, +\infty) \end{cases}$$

进而

$$\varphi'(u) = \begin{cases} -\int_a^b f(x)dx, & u \in (-\infty, a) \\ -\int_a^u f(x)dx + \int_u^b f(x)dx, & u \in [a, b] \\ \int_a^b f(x)dx, & u \in (b, +\infty) \end{cases}$$

从而

$$\varphi''(u) = \begin{cases} 0, & u \in (-\infty, a) \\ -2f(u), & u \in [a, b] \\ 0, & u \in (b, +\infty) \end{cases}$$

7. 在区间 $[1, 3]$ 上用线性函数 $a + bx$ 近似代替函数 $f(x) = x^2$. 试选取 a, b, 使得

$$\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx$$

取最小值.

解

记

$$\varphi(a, b) = \int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx$$

知:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 2\int_1^3 (a + bx - x^2)dx = 0 \Leftrightarrow 2a + 4b = \frac{26}{3}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 2\int_1^3 x(a + bx - x^2)dx = 0 \Leftrightarrow 2a + \frac{13}{3}b = 10$$

解得 $a = -\frac{11}{3}, b = 4$, 即为欲求.

9.1.3 问题

1. 证明: n 阶 Bessel 函数

$$J_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$$

证明

知

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi \sin(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$$
$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\varphi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$$

进而:

$$\begin{aligned}
&x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)\\
=&-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin^2\varphi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
+&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x^2-n^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
=&-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin^2\varphi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(n\varphi-x\sin\varphi)d\cos\varphi\\
+&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x^2-n^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
=&-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin^2\varphi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi-\frac{1}{\pi}(x\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi)|_0^\pi\\
+&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos\varphi d\sin(n\varphi-x\sin\varphi)+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x^2-n^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
=&-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin^2\varphi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos\varphi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)(n-x\cos\varphi)d\varphi\\
+&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x^2-n^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
=&-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi nx\cos\varphi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
+&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x^2-n^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi nx\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\sin\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi n^2\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi n(x\cos\varphi-n)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi\\
=&-\frac{n}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d(n\varphi-x\sin\varphi)=-\frac{n}{\pi}(\sin(n\varphi-x\sin\varphi))|_0^\pi=0
\end{aligned}$$

命题即证.

2. 利用对参数的微分法, 计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$;

解

记

$$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$$

当 $b\neq0,a^2\neq b^2$ 时, 容易验证 $F(a)$ 可微, 有:

$$\begin{aligned}
F'(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{(a^2-b^2)\sin^2x+b^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x+\frac{2ab^2}{a^2-b^2}-\frac{2ab^2}{a^2-b^2}}{(a^2-b^2)\sin^2x+b^2}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{a^2-b^2}dx-\frac{2ab^2}{a^2-b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\\
&=\frac{\pi a}{a^2-b^2}-\frac{2ab^2}{a^2-b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{a^2\tan^2x+b^2}=\frac{\pi a}{a^2-b^2}-\frac{2a}{a^2-b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{(\frac{a}{b}\tan x)^2+1}\\
&=\frac{\pi a}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2-b^2}(\arctan(\frac{a}{b}\tan x)|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{\pi}{a+b}
\end{aligned}$$

从而 $F(a)=\int\frac{\pi}{a+b}da=\pi\ln(a+b)+C$. 注意到 $a=b$ 时 $F(a)=\pi\ln a$, 从而可解得 $C=\pi\ln\frac{1}{2}$, 也

即 $F(a)=\pi\ln\frac{a+b}{2}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}(|a|<1)$;

解

记

$$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}$$

有:

$$\begin{aligned}F'(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{1-a^2\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{1+(1-a^2)\tan^2 x}\\&=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sqrt{1-a^2}\tan x)}{1+(1-a^2)\tan^2 x}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan(\sqrt{1-a^2}\tan x)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\end{aligned}$$

进而

$$F(a)=\int\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}dx=\pi\arcsin a+C$$

又因为 $F(0)=0$, 故 $C=0$, 得到 $F(a)=\pi\arcsin a$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$.

解

记

$$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$$

有:

$$\begin{aligned}F'(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+a^2\sin^2 x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{a^2}{1-a^2}+\cos^2 x-\frac{a^2}{1-a^2}}{a^2+(1-a^2)\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{a^2}{1-a^2}-\frac{a^2}{1-a^2}\frac{1}{\cos^2 x+a^2\sin^2 x})dx\\&=\frac{\pi a^2}{2(1-a^2)}-\frac{a^2}{1-a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{1+a^2\tan^2 x}=\frac{\pi a^2}{2(1-a^2)}-\frac{a}{1-a^2}\arctan(a\tan x)|_0^{\frac{\pi}{2}}=0\end{aligned}$$

从而 $F(a)$ 恒为一常数. 又因为 $F(0)=0$, 知 $F(a)=0$. 从而欲求为 0.

3. 证明: 对任意的实数 u, 有:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{u\cos x}\cos(u\sin x)dx=1$$

证明

9.2 陈纪修上含参常义积分部分内容

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$;

解

知 $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 进而 $\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$ 关于 α 是连续函数, 从而

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$.

解

注意到函数列 $f_n(x)=\frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$ 在紧集 [0,1] 上随着 $n\to\infty$ 是单调趋于极限函数 $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ 的, 进而由 Dini 定理可知这个收敛性是一致的, 进而由极限和积分换序定理即得:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}=\int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=1-\ln(1+e)+\ln 2$$

2. 设 $f(x,y)$ 当 y 固定时, 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续, 且当 $y\to y_0^-$ 时, 它关于 y 单调增加地趋于连续函数 $\varphi(x)$, 证明

$$\lim_{y\to y_0^-}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\varphi(x)dx$$

证明

根据 Dini 定理, 既然 $f(x,y)$ 作为连续函数族是单调趋向于连续函数 $\varphi(x)$ 的, 这个趋向性必一致, 从而根据常义积分号和极限换序定理即得命题.

3. 利用交换积分顺序的方法计算下列积分:

(1) $\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \quad (b>a>0)$;

解

知

$$\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_a^b \sin(\ln\frac{1}{x})x^y dy$$

下面验证积分号换序的可能性, 这只需要说明 $\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})x^y dx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛即可. 注意到 $\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})dx\le\pi$ 必一致有界, 而既然有 $|x^y|\le x^a$, 而后者在 $x\to 0$ 时单调趋于 0, 故前者由 Weierstrass 判别法知是一致趋于 0 的. 综上, 根据 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛, 从而积分号换序可行, 有:

$$\int_0^1 dx\int_a^b \sin(\ln\frac{1}{x})x^y dy=\int_a^b dy\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})x^y dx=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}\sin u du$$

其中最后一步是令 $u=\ln\frac{1}{x}$, 下面先计算上右式里层积分, 记之为 I, 有:

$$\begin{aligned}I&=-\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}d\cos u=-(\cos u e^{-u(y+1)}|_0^{+\infty}+(y+1)\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}\cos u du)\\&=1-(y+1)\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}d\sin u=1-(y+1)(e^{-u(y+1)}\sin u|_0^{+\infty}+(y+1)\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}\sin u du)\\&=1-(y+1)^2 I\Rightarrow I=\frac{1}{1+(y+1)^2}\end{aligned}$$

从而

$$\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-u(y+1)}\sin u du=\int_a^b\frac{1}{1+(y+1)^2}dy=\arctan(b+1)-\arctan(a+1)$$

•(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x} \quad (1>a>0)$.

解

知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{-a}^{a} \frac{dy}{1+y\sin x}$$

因为 $a\in(0,1)$, 故 $\frac{1}{1+y\sin x}$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[-a,a]$ 上连续, 进而积分号可换序, 有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{-a}^{a} \frac{dy}{1+y\sin x} = \int_{-a}^{a} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+y\sin x}$$

将右式内层积分记为 I, 知:

$$I =$$

4. 求下列函数的导数:

(1) $I(y)=\int_y^{y^2} e^{-x^2y}dx$;

解

$$I'(y) = 2ye^{-y^5} - e^{-y} - \int_y^{y^2} x^2e^{-x^2y}dx$$

(2) $I(y)=\int_y^{y^2} \frac{\cos xy}{x}dx$;

解

$$I'(y) = 2y\cdot\frac{\cos y^3}{y^2} - \frac{\cos y^2}{y} - \int_y^{y^2} \sin xydx = \frac{2\cos y^3}{y} - \frac{\cos y^2}{y} - \int_y^{y^2} \sin xydx$$

(3) $F(t)=\int_0^{t^2} dx\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$.

解

记 $G(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$, 知:

$$F(t)=\int_0^{t^2} G(x,t)dx \Rightarrow F'(t)=2tG(t^2,t)+\int_0^{t^2}\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)dx$$

其中

$$G(t^2,t)=\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4+y^2-t^2)dy$$
$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)=\sin(x^2+(x+t)^2-t^2)+\sin(x^2+(x-t)^2-t^2)-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy$$

综上

$$F'(t)=2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4+y^2-t^2)dy+\int_0^{t^2}(\sin(2x^2+2xt)+\sin(2x^2-2xt)-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy)dx$$

8. 利用积分号下求导法计算下列积分:

•(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x)dx \quad (\alpha > 1)$;

解

统一记题设积分为 $F(\alpha)$, 首先证明 $F(\alpha)$ 可导. 因为 α 本来是给定的, 不妨就设 $F(\alpha)$ 的定义域是 $(\alpha_0, +\infty)$, 其中 $1 < \alpha_0 \le \alpha$. 需要验证三个命题:

(a1) $\ln(a^2 - \sin^2 x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}] \times [\alpha_0, +\infty)$ 上连续, 这一点是显然的.

(a2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 x}dx$ 一致收敛, 这是因为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha d\tan x}{(\alpha^2-1)\tan^2 x + \alpha^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha du}{(\alpha^2-1)u^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}, \alpha \in [\alpha_0, +\infty) \end{aligned}$$

这显然一致收敛.

(a3) $F(\alpha)$ 至少在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上的一点收敛. 这任取 $\alpha > \alpha_0$ 即可.

综上, $F(\alpha)$ 可导, 且

$$F'(\alpha) = I = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

进而上式两边积分得

$$F(\alpha) = \pi \ln(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}) + C$$

(2) $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx \quad (|\alpha| < 1)$.

解

首先证明 $F(\alpha)$ 可导. 既然 α 是给定的模长小于 1 的数, 自然存在 α_0 满足 $\alpha \le \alpha_0 < 1$, 进而 $F(\alpha)$ 在
$[-\alpha_0, \alpha_0]$ 上是作为常义积分存在的. 考虑到 $\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)$ 和 $\frac{2\alpha - 2\cos x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}$ 都在 $[0, \pi] \times [-\alpha_0, \alpha_0]$ 上连续, 有:

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^{\pi} \frac{2\alpha - 2\cos x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}dx = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2 - 1}{2(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)})dx \\ &= \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha+1)^2\sin^2\frac{x}{2} + (\alpha-1)^2\cos^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\pi}{\alpha} + 2\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\int_0^{\pi} \frac{d\tan\frac{x}{2}}{(\alpha+1)^2\tan^2\frac{x}{2} + (\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{\alpha} + 2\frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha-1)}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}u)^2 + 1} = 0 \end{aligned}$$

从而 $F(\alpha) = C$, 又因为 $F(0) = 0$, 故 $F(\alpha) = 0$.

9. 证明: 第二类椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}dt \quad (0 < k < 1)$$

满足微分方程

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{1}{1-k^2}E(k) = 0$$

证明

因为 k 可以视作已经给定的数, 当然存在 k_0 使得 $k \le k_0 < 1$, 从而知 $\sqrt{1-k^2\sin^2 t}$ 和 $\frac{-k\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$ 都在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times(0,k_0)$ 上连续, 进而 $E(k)$ 可微, 同里可以验证 $E'(k)$ 可微, 有:

$$E'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-k\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt$$
$$E''(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

10. 设函数 $f(u,v)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数, 证明: 函数

$$w(x,y,z) = \int_0^{2\pi} f(x+z\cos\varphi, y+z\sin\varphi)d\varphi$$

满足偏微分方程

$$z(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) = \frac{\partial w}{\partial z}$$

11. 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续, 且 $f(x)>0$, 研究函数

$$I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

的连续性.

解

当 $y \neq 0$, 显然 $\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ 连续, 从而 $I(y)$ 连续. 但注意到

$$\lim_{y\to 0^-} I(y) = -\frac{\pi}{2}f(0) \neq \frac{\pi}{2}f(0) = \lim_{y\to 0^+} I(y)$$

从而 $I(y)$ 在 $y=0$ 处不连续.

9.3 含参变量反常积分的一致收敛

9.3.1 命题整理

约定 $U_{[a,\omega)}(\omega) = [a,\omega)\cap U(\omega)$.

命题 9.3.1 *(Cauthy)* 依赖于参变量 $y\in Y$ 的反常积分

$$F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$$

在集合 $E\subset Y$ 上一致收敛的充分必要条件是: 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 ω 的邻域 $U_{[a,\omega)}(\omega)$, 使得对任意的 $b_1,b_2\in U_{[a,\omega)}(\omega)$ 和任意的 $y\in E$ 都成立不等式:

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

推论 9.3.1 如果积分

$$F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$$

中的函数 f 在集合 $[a,\omega)\times[c,d]$ 上连续, 而这个积分本身关于任意的 $y\in(c,d)$ 收敛, 但在 $y=c$ 或 $y=d$ 发散, 那么它在区间 (c,d) 上, 以及其闭包含有发散点的任何一个集合 $E\subset(c,d)$ 上, 都不一致收敛.

证明

不失一般性, 设 $y = c$ 时题设积分发散, 根据 Cauthy 准则知

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall U_{[a,\omega)}(\omega) \exists b_1, b_2 \in U_{[a,\omega)}(\omega)(|\int_{b_1}^{b_2} f(x,c)dx| > \varepsilon_0)$$

但常义积分

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx$$

本身是在 $[c,d]$ 上关于 y 的连续函数, 故存在 c 的某邻域 $U(c)$ 使得

$$\forall y \in U(c)(|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx| > \varepsilon_0)$$

进而根据 Cauthy 准则即知其不能在闭包含 c 的任何一个子集 $E \subset (c,d)$ 上一致收敛.

□

命题 9.3.2 *(Weierstrass)* 设函数 $f(x,y), g(x,y)$ 对每个 $y \in Y$ 关于 x 在任何一个区间 $[a,b] \subset [a,\omega)$ 上可积.

如果对每个 $y \in Y$ 和任意的 $x \in [a,\omega)$, 有不等式

$$|f(x,y)| < g(x,y)$$

且积分 $\int_a^\omega g(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛, 那么积分 $\int_a^\omega f(x,y)dx$ 对每个 $y \in Y$ 都绝对收敛, 而且它在 Y 上一致收敛.

证明

依题有

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx| \le \int_{b_1}^{b_2} |f(x,y)|dx \le \int_{b_1}^{b_2} g(x,y)dx$$

其中 $b_1, b_2 \in Y$, 从而套用 Cauthy 准则命题即证.

□

在 g 不依赖于 y 的时候, 上述命题称为积分一致收敛性的 Weierstrass 强函数判别法.

命题 9.3.3 *(Abel-Dirichlet)* 设函数 $f(x,y), g(x,y)$ 对每个 $y \in Y$ 在任何区间 $[a,b] \subset [a,\omega)$ 上关于 x 可积, 则积分

$$\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx$$

在 Y 上一致收敛的充分条件可在下面两者中选其一:

1. $\exists M \in \mathbb{R} \forall b \in [a,\omega) \forall y \in Y(|\int_a^b f(x,y)dx| < M)$, 即积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 一致有界;
2. 对每个 $y \in Y$, 函数 $g(x,y)$ 关于 x 在 $[a,\omega)$ 上单调, 且 $[a,\omega) \ni x \to \omega \Rightarrow g(x,y) \rightrightarrows 0$ 在 Y 上成立.

1. 积分

$$\int_a^\omega f(x,y)dx$$

在 Y 上一致收敛;

2. 对每个 $y \in Y$, 函数 $g(x,y)$ 关于 x 在 $[a,\omega)$ 上单调, 且 $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in [a,\omega) \forall y \in Y(|g(x,y)| < M)$, 即 $g(x,y)$ 一致有界.

证明

由积分第二中值定理知:

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx = g(b_1,y)\int_{b_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(b_2,y)\int_{\xi}^{b_2} f(x,y)dx$$

其中 $\xi \in [b_1, b_2]$. 按照 Cauthy 准则, 此时 b_1, b_2 都在 ω 的足够小的邻域 $U_{[a,\omega)}(\omega)$ 中. 当第一组条件成立时, 有:

$$|g(b_1,y)\int_{b_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(b_2,y)\int_{\xi}^{b_2} f(x,y)dx| \le M(|g(b_1,y)| + |g(b_2,y)|) < M \cdot 2\varepsilon$$

而当第二组条件成立时, 有:

$$|g(b_1,y)\int -{b_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(b_2,y)\int_{\xi}^{b_2} f(x,y)dx| \le M(|\int_{b_1}^{\xi} f(x,y)dx| + |\int_{\xi}^{b_2} f(x,y)dx|) < M \cdot 2\varepsilon$$

综上, 利用 Cauthy 准则命题即证.

□

9.3.2 练习题

1. 研究下列反常积分在指定区间上的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-ux}\sin x dx, 0 < u_0 \le u < +\infty$;

解

注意到 $|e^{-ux}\sin x| \le |e^{-u_0 x}\sin x| \le e^{-u_0 x}$, 而不等式最右端的反常积分显然收敛, 从而根据 Weierstrass 判别法知原积分一致收敛.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos ux}{1+x^4}dx, -\infty < u < +\infty$;

解

注意到 $|\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}| \le |\frac{x^2}{1+x^4}|$, 而根据倒代换可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$, 后者显然收敛, 从而原积分根据 Weierstrass 判别法知一致收敛.

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(x+u)^2}, 0 \le u < +\infty$;

解

注意到 $\frac{1}{1+(x+u)^2} \le \frac{1}{1+x^2}$, 而后者显然收敛, 故由 Weierstrass 判别法知原积分一致收敛.

(4) $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx, 0 \le \alpha < +\infty$;

解

注意到在 $[1, +\infty]$ 上有 $|\int_1^{+\infty}\cos x|$ 有界, 而 $\frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{x}}$ 一致递减趋 0, 故由 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛.

(5) $\int_0^{+\infty} \sqrt{u}e^{-ux^2}dx, 0 \le u < +\infty$.

解

注意到 $\int_0^{+\infty} \sqrt{u}e^{-ux^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 进而其显然一致收敛.

2. 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{x}dx$ 在任何不包含 $u = 0$ 的闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 在包含 $u = 0$ 的闭区间上不一致收敛.

证明

当 $u \in [a,b] \not\ni 0$, 不失一般性设 $0 < a \leq b$, 知 $|\int_0^{+\infty} \sin uxdx| \leq |\int_0^{\frac{\pi}{u}} \sin uxdx| = |\frac{2}{u}| \leq \frac{2}{a}$, 从而其一致有界. 又 $\frac{1}{x} \searrow 0$, 故由 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛.

当 $[a,b] \ni 0$, 取 $u = \frac{1}{x}$, 知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 1}{x} dx$ 显然不收敛, 从而其不一致收敛.

3. 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x+u} e^{-ux} dx$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明

知 $|\int_0^{+\infty} \sin 3xdx| \leq |\frac{2}{3}|$, 进而知其一致有界, 而显然 $\forall u \in [0,+\infty)$, $\frac{1}{(x+u)e^{ux}} \searrow 0$, 进而根据 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛.

4. 设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty) \times [\alpha,\beta]$ 上连续. 如果对每个 $u \in [\alpha,\beta)$, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 都收敛, 但积分 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)dx$ 发散, 证明: $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上不一致收敛.

证明

由 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)dx$ 发散知

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall M > 0 \exists M_1, M_2 > 0 (M_2 > M_1 > M \wedge |\int_{M_1}^{M_2} f(x,\beta)dx| > \varepsilon_0)$$

但既然 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty) \times [\alpha,\beta]$ 连续, 知其也应在 $[M_1,M_2] \times [\alpha,\beta]$ 上连续, 进而必存在 β 的某邻域 $O(\beta)$ 使得 $\forall y \in O(\beta)$:

$$|\int_{M_1}^{M_2} f(x,y)dx| > \varepsilon_0$$

这便不符合一致收敛的 Cauthy 准则了. 综上, 原积分不一致收敛.

注. 这便是整理中 Cauthy 准则的一个特殊情况.

5. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \cos ux}{a^2+x^2} dx (a > 0)$$

在 $[\delta,+\infty)(\delta > 0)$ 上一致收敛, 但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明

容易知道无论 u 如何取在哪个区间, $\int_0^a \frac{x \cos ux}{a^2+x^2} dx (a > 0)$ 都是一致收敛的, 因为:

$$|\int_0^a \frac{x \cos ux}{a^2+x^2} dx| \leq |\int_0^a \frac{xdx}{a^2+x^2}| = \frac{1}{2} \ln 2$$

根据 Weierstrass 判别法即可推知结论, 从而只需对 $\int_a^{+\infty} \frac{x \cos ux}{a^2+x^2} dx$ 证明相应的结论即可.

当 $u \in [\delta,+\infty)(\delta > 0)$, 知:

$$|\int_a^{+\infty} \cos uxdx| \leq |\int_{-\frac{\pi}{2u}}^{\frac{\pi}{2u}} \cos uxdx| = \frac{2}{u} \leq \frac{2}{\delta}$$

这说明上述积分一致有界, 同时知 $x \to +\infty$, $\frac{x}{a^2+x^2} \searrow 0$, 故由 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛.

当 $u \in (0,+\infty)$, 取 $u = \frac{1}{x}$, 知 $\int_a^{+\infty} \frac{x \cos 1}{a^2+x^2} dx (a > 0)$ 显然发散, 故其不一致收敛.

6. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ux}{a^2+x^2} dx (a > 0)$$

在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明

取 $u=\frac{1}{x}$, 知 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{a^2+x^2}dx(a>0)$ 显然发散, 故其不一致收敛.

9.3.3 问题

1. 证明: 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$ 关于 α 在 $[\eta,+\infty)$ 上一致收敛, 关于 α 在 $(0,\delta)$ 上不一致收敛, 这里 η,δ 是任意的正数.

证明

当 $\alpha\in[\eta,+\infty)$, 知 $\int_0^1\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$ 首先一致收敛, 因为:

$$|\int_0^1\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx|\le|\frac{1}{\alpha}\int_0^1\frac{xdx}{1+x^2}|=|\frac{\ln 2}{2\alpha}|\le|\frac{\ln 2}{2\eta}|$$

进而由 Weierstrass 判别法可知上述积分一致收敛. 再说明 $\int_1^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$ 一致收敛, 这是因为首先:

$$|\int_1^{+\infty}\sin\alpha xdx|\le|\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\alpha xdx|=\frac{2}{\alpha}\le\frac{2}{\eta}$$

从而 $\int_1^{+\infty}\sin\alpha xdx$ 一致有界, 又因为在 $[1,+\infty)$ 上对任意的 $\alpha\in[\eta,+\infty)$ 都有 $\frac{x}{\alpha(1+x^2)}\searrow 0$, 故根据 Abel-Dirichlet 判别法知原级数收敛.

当 $\alpha\in(0,\delta)$, 将原积分分为两个部分:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx=(\int_0^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty})\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$$

2. 证明: 积分 $\int_1^{+\infty}e^{-\frac{1}{\alpha^2}(x-\frac{1}{\alpha})^2}dx$ 关于 α 在 $(0,1]$ 上一致收敛, 但不能用 Weierstrass 判别法来判断.

3. 证明: 积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是, 对任一递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}(A_1=a)$, 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

[4] 中有相同的习题, 此处抄录并解决:

习题设 $a=a_0<a_1<\cdots<a_n<\cdots<\omega$, 用级数和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)$ 的形式表示积分 $\int_a^{\omega}f(x,y)dx$, 其中 $\varphi_n(y)=\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x,y)dx$. 证明: 当且仅当上述形式的任意序列 $\{a_n\}$ 相应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)$ 在集合 $E\subset Y$ 上都一致收敛时, 积分 $\int_a^{\omega}f(x,y)dx$ 在集合 E 上一致收敛.

证明

当 $\int_a^{\omega}f(x,y)dx$ 在 E 上一致收敛, 设 $\int_a^{\omega}f(x,y)dx\rightrightarrows g(y)$, 按定义有:

$$\forall y\in E\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\forall w\in(-\infty,\omega)(\omega-w<\delta\Rightarrow|\int_a^w f(x,y)dx-g(y)|<\varepsilon)$$

上述式子可以按照 $\{a_n\}|_{n=0}^{\infty}$ 的分划另写成:

$$|\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x,y)dx-g(y)|<\varepsilon$$

而此即

$$|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)-g(y)|<\varepsilon$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)\rightrightarrows g(y)$, 而届于 $w\to\omega$ 的过程可包含每一种 $\{a_n\}$ 的可能, 上述过程自然对任意的 $\{a_n\}$ 成立, 进而 $\forall\{a_n\}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)\rightrightarrows g(y),y\in E)$.

当 $\forall\{a_n\}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)\rightrightarrows g(y),y\in E)$, 按定义有:

$$\forall y\in E\forall\varepsilon>0\exists N=N(\varepsilon)>0\forall n\in\mathbb{N}(n>N\Rightarrow|\sum_{k=1}^{n}\varphi_n(y)-g(y)|<\varepsilon)$$

上述式子代入 $\varphi_n(y)=\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x,y)dx$ 有:

$$|\int_a^{a_n}f(x,y)dx-g(y)|<\varepsilon$$

因为 a_n 是任意的, $n\to\infty$ 时 a_n 可以囊括所有 $w\to\omega$ 的情况, 从而上述式子可以写作

$$|\int_a^{w}f(x,y)dx-g(y)|<\varepsilon,\omega-w<\delta(\varepsilon)$$

这便是 $\int_a^{\omega}f(x,y)dx\rightrightarrows g(y)$ 的定义.

9.4 含参变量反常积分的性质

9.4.1 命题整理

命题 9.4.1 *(反常积分号与极限换序) 设 $f(x,y)$ 是依赖于参变量 $y\in Y$ 的族函数, 并且至少在反常的意义下在区间 $a\le x<\omega$ 上可积, 且 $\mathfrak{B}_Y$ 是 Y 中的基. 如果*

1. *对任何 $b\in(a,\omega)$, 在 $[a,b]$ 上关于基 $\mathfrak{B}_Y$ 有*

$$f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$$

2. *积分 $\int_a^{\omega}f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛.*

那么, 极限函数 φ 在 $[a,\omega)$ 上在反常意义下可积, 且成立等式

$$\lim_{\mathfrak{B}_Y}\int_a^{\omega}f(x,y)dx=\int_a^{\omega}\varphi(x)dx$$

证明

命题可以表示成图:

$$\begin{tikzcd}
F_b(y):=\int_a^b f(x,y)dx \arrow[r, Rightarrow, "b\to\omega"', "b\in[a,\omega["'] \arrow[d, "\mathfrak{B}_Y"'] & \int_a^{\omega} f(x,y)dx=:F(y) \arrow[d, "\mathfrak{B}_Y"] \arrow[dl, dash, dashed] \\
\int_a^b\varphi(x)dx \arrow[r, "b\to\omega"', "b\in[a,\omega["'] & \int_a^{\omega}\varphi(x)dx
\end{tikzcd}$$

但上图已经是定理 9. 3. 1 的特殊形式了.

□

推论 9.4.1 设对每个实参变量的值 $y \in Y \subset \mathbb{R}$, 实值函数 $f(x,y)$ 是非负的, 且在区间 $a \leq x < \omega$ 上连续. 如果

1. $f(x,y)$ 随 y 的增加而单调增加, 在 $[a,\omega)$ 上趋于函数 $\varphi(x)$;
2. $\varphi \in C([a,\omega),\mathbb{R})$;
3. 积分 $\int_a^\omega \varphi(x)dx$ 收敛

那么成立等式

$$\lim_{\mathfrak{B}_Y} \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \varphi(x)dx$$

证明

由 Dini 定理知, 既然 $f(x,y)$ 作为连续函数列单调趋于连续函数, 这个收敛性必一致. 且因为非负函数 $f(x,y) \nearrow \varphi(x)$, 知 $0 \leq f(x,y) \leq \varphi(x)$, 进而由 Weierstrass 判别法可知 $\int_a^\omega f(x,y)dx$ 一致收敛, 从而由命题 10. 4. 1 即证该推论.

□

命题 9.4.2 *(反常积分与连续)* 如果

1. 函数 $f(x,y)$ 在集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x < \omega \wedge c \leq y \leq d\}$ 上连续;
2. 积分 $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛

那么函数 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续.

证明

由 $f(x,y)$ 在 $[a,\omega) \times [c,d]$ 上的连续性可知其在任何的 $[a,b] \times [c,d] \subset [a,\omega) \times [c,d]$ 上连续, 从而根据命题 10. 1. 1 可知 $F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上连续. 而 $\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛意味着 $[a,\omega) \ni b \to \omega, F_b(y) \rightrightarrows F(y)$, 从而再根据极限和积分号换序定理即知 $F(y)$ 连续.

□

推论 9.4.2 如果

1. $f(x,y)$ 是依赖于实参数 $y \in (c,d)$ 的连续函数 *(其中 c,d 为常数或 ∞)*, 且其至少在反常的意义下在区间 $a \leq x < \omega$ 上可积.
2. 积分 $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ 在任意的 $[c',d'] \subset (c,d)$ 上一致收敛.

那么 $F(y)$ 在 (c,d) 上连续.

证明

对 (c,d) 上的每个固定的点 y_0, 考虑 y_0 的某个足够小的闭邻域 $U(y_0) \subset (c,d)$. 根据条件知 $F(y)$ 在 $U(y_0)$ 上一致收敛, 进而根据命题 10. 4. 1, 对 $U(y_0)$ 中趋向于 y_0 的基 $\mathfrak{B}_Y$ 有:

$$\lim_{\mathfrak{B}_Y} F(y) = \lim_{\mathfrak{B}_Y} \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \lim_{\mathfrak{B}_Y} f(x,y)dx = \int_a^\omega f(x,y_0)dx = F(y_0)$$

从而 $F(y)$ 在 y_0 处连续, 而上述讨论对 (c,d) 内的任意点都成立, 故 $F(y)$ 在 (c,d) 上连续.

□

命题 9.4.3 *(反常积分号与微分换序)* 如果

1. 函数 $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | a\le x<\omega \wedge c\le y\le d\}$ 上连续;
2. 积分 $\Phi(y)=\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ 在集合 $Y=[c,d]$ 上一致收敛;
3. 积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 至少在一点 $y_0\in Y$ 收敛

那么积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在整个集合 Y 上一致收敛, 同时, 函数 $F(y)$ 在 Y 上可微且有

$$F'(y)=\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

证明

既然 $f(x,y)$ 在 $a\le x<\omega$ 上关于 x 连续, 对任意的 $b\in[a,\omega)$ 知函数

$$F_b(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在区间 $c\le y\le d$ 上有定义且可微, 进而由 Leibniz 法则有

$$\frac{\partial}{\partial y}F_b(y)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$$

进而由第 2 个条件可知 $b\to\omega$ 时 $\frac{\partial}{\partial y}F_b(y)\rightrightarrows\Phi(y)$, 从而将该性质与条件 3 结合起来, 便满足了定理 9. 3. 5(微分与极限交换次序定理) 的条件, 故套用该定理的条件即得命题结论.

□

命题 9.4.4 *(反常积分号与常义积分号换序)* 如果

1. 函数 $f(x,y)$ 在集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | a\le x<\omega \wedge c\le y\le d\}$ 上连续
2. 积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛

那么函数 F 在 $[c,d]$ 上可积且有等式

$$\int_c^d dy\int_a^\omega f(x,y)dx=\int_a^\omega dx\int_c^d f(x,y)dy$$

证明

注意到命题的结论可以写成下面的形式:

$$\lim_{[a,\omega)\ni b\to\omega}\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\lim_{[a,\omega)\ni b\to\omega}\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

对等式左端而言, 将 $\int_a^b f(x,y)dx$ 看作关于 b 的函数, 知命题条件已经满足定理 9. 3. 4(常义积分号与极限换序定理) 的条件, 进而根据该定理有:

$$\lim_{[a,\omega)\ni b\to\omega}\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_c^d dy\lim_{[a,\omega)\ni b\to\omega}\int_a^b f(x,y)dx=:\int_c^d dy\int_a^\omega f(x,y)dx$$

而对等式右端而言, 按反常积分的定义知这便是

$$\int_a^\omega dx\int_c^d f(x,y)dy$$

从而即得

$$\int_c^d dy\int_a^\omega f(x,y)dx=\int_a^\omega dx\int_c^d f(x,y)dy$$

□

推论 9.4.3 如果

1. 函数 $f(x,y)$ 在集合 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\le x<\omega\wedge c\le y\le d\}$ 上连续

2. $f(x,y)$ 在 P 上非负

3. 积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 作为 y 的函数在区间 $[c,d]$ 上连续

那么函数 F 在 $[c,d]$ 上可积且有等式

$$\int_c^d dy\int_a^\omega f(x,y)dx=\int_a^\omega dx\int_c^d f(x,y)dy$$

证明

条件 1 已经满足了上述命题的条件 1, 于是只需要由条件 2 和条件 3 推出 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛即可. 注意到既然 $f(x,y)\ge 0$, 知:

$$b_2\ge b_1\Rightarrow F_{b_2}(y)=\int_a^{b_2} f(x,y)dx\ge\int_a^{b_1} f(x,y)dx=F_{b_1}(y)$$

这说明 $F_b(y)$ 关于 b 是单调的, 且有:

$$\lim_{[a,\omega)\ni b\to\omega}F_b(y)=F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dy$$

又因为对每个 b 而言, 由条件 1 知 $F_b(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续, 而由条件 3 知 $F(y)$ 也连续, 故由 Dini 定理可知上述的趋向性一致, 即 $F_b(y)\rightrightarrows F(y)$, 这便是上述定理的条件 2, 进而由上述定理即得该推论.

□

命题 9.4.5 *(反常积分号换序)* 如果

1. 函数 $f(x,y)$ 在集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\le x<\omega\wedge c\le y<\tilde{\omega}\}$ 上连续

2. 两个积分

   $$F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx,\quad \Phi(x)=\int_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)dy$$

   中的第一个关于 y 在任何区间 $[c,d]\subset[c,\tilde{\omega})$ 上一致收敛, 而第二个关于 x 在任何区间 $[a,b]\subset[a,\omega)$ 上一致收敛

3. 两个累次积分

   $$\int_c^{\tilde{\omega}} dy\int_a^\omega |f|(x,y)dx,\quad \int_a^\omega dx\int_c^{\tilde{\omega}} |f|(x,y)dy$$

   中至少有一个存在

那么, 等式

$$\int_c^{\tilde{\omega}} dy\int_a^\omega f(x,y)dx=\int_a^\omega dx\int_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)dy$$

成立.

证明

不妨就设条件 3 中的第二个积分存在. 根据条件 1 和条件 2 中的第一个, 套用命题 10. 4. 4(反常积分号与常义积分号换序定理) 可知, 对任意给定的 $d \in [c, \tilde{\omega})$, 有

$$\int_c^d dy \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)dy$$

下面证明:

$$\lim_{[c,\tilde{\omega})\ni d\to\tilde{\omega}} \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^\omega dx \int_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)dy$$

令

$$\Phi_d(x) := \int_c^d f(x,y)dy$$

知对任意给定的 $d \in [c, \tilde{\omega})$ 而言, $\Phi_d(x)$ 有定义, 且根据条件 1 中 f 的连续性可知 $\Phi_d(x)$ 在 $[a, \omega)$ 上连续.

由条件 2 的第二条可知, 在任意区间 $[a, b] \subset [a, \omega)$ 上, 当 $[c, \tilde{\omega}) \ni d \to \tilde{\omega}$ 时, 有 $\Phi_d(x) \rightrightarrows \Phi(x)$.

因为

$$|\Phi_d(x)| = |\int_c^d f(x,y)dy| \le \int_c^d |f|(x,y)dy \le \int_c^{\tilde{\omega}} |f|(x,y)dy =: G(x)$$

而根据前面所作的假定:

$$\int_a^\omega dx \int_c^{\tilde{\omega}} |f|(x,y)dy = \int_a^\omega G(x)dx$$

存在, 从而根据 Weierstrass 判别法知 $\int_a^\omega \Phi_d(x)dx$ 关于 d 一致收敛, 进而根据命题 10. 4. 1(反常积分号与极限换序定理) 有:

$$\lim_{[c,\tilde{\omega})\ni d\to\tilde{\omega}} \int_a^\omega \Phi_d(x)dx = \int_a^\omega (\lim_{[c,\tilde{\omega})\ni d\to\tilde{\omega}} \Phi_d(x))dx = \int_a^\omega \Phi(x)dx = \int_a^\omega dx \int_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)dy$$

进而有:

$$\int_c^{\tilde{\omega}} dy \int_a^\omega f(x,y)dx := \lim_{[c,\tilde{\omega})\ni d\to\tilde{\omega}} \int_c^d dy \int_a^\omega f(x,y)dx = \lim_{[c,\tilde{\omega})\ni d\to\tilde{\omega}} \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^\omega dx \int_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)dy$$

命题即证.

□

9.4.2 练习题

1. 研究下列函数在指定区间上的连续性:

(1) $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2+t^x} dt, x \in (2, +\infty)$;

解

注意到当 $x \in (2, +\infty)$, 将题式积分写成:

$$\int_0^1 \frac{t}{2+t^x} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t}{2+t^x} dt := I_1 + I_2$$

对 I_1, 知 $|I_1| \le |\int_0^1 t dt| = \frac{1}{2}$, 从而其显然一致收敛.

对 I_2, 知 $|I_2| \le |\int_1^{+\infty} \frac{t}{2+t^2} dt|$, 而后者显然是收敛的, 从而根据 Weierstrass 判别法知 I_2 一致收敛.

综上, $f(x)$ 对 $x \in (2, +\infty)$ 一致收敛, 进而由 $\frac{t}{2+t^x}$ 的连续性即得 f 的连续性.

(2) $\varphi(\alpha)=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}dx, \alpha\in(0,2)$;

解

根据推论 10.4.2, 考虑 $[c,d]\subset(0,2)$, 其中 $0<c\le d<2$. 从而在 $[c,d]$ 上可以将原积分写成:

$$(\int_0^\varepsilon+\int_\varepsilon^{\pi-\delta}+\int_{\pi-\delta}^\pi)\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}dx:=I_1+I_2+I_3$$

其中 ε,δ 是足够小的正数. 对 I_1, 知

$$\begin{aligned}|I_1|&=\int_0^\varepsilon\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\sim\int_0^\varepsilon\frac{x}{x^\alpha\pi^\alpha}=\frac{1}{\pi\alpha}\int_0^\varepsilon x^{1-\alpha}dx\\&\le\frac{1}{\pi^\alpha}\int_0^\varepsilon x^{1-c}dx=\frac{1}{\pi^\alpha}\varepsilon^{2-c}\end{aligned}$$

上式最后被与 α 无关的量所控制, 从而由 Weierstrass 判别法知 I_1 一致收敛.

对 I_2, 知其为常义积分, 自然一致收敛.

对 I_3, 令 $t=\pi-x$, 代换可知此情况形同 I_1, 进而其一致收敛.

综上, 原积分一致收敛, 进而由 $\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}$ 的连续性即得 φ 的连续性.

(3) $f(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \alpha\in(0,+\infty)$.

证明

根据推论 10.4.2, 考虑 $[\varepsilon,M]\subset(0,+\infty)$, 其中 ε 足够小, M 足够大. 因为 $|\int_1^{+\infty}\sin xdx|$ 一致有界, 而 $\frac{1}{x^\alpha}\le\frac{1}{x^\varepsilon}$ 单调递减且一致趋 0, 故由 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛, 进而根据 $\frac{\sin x}{x^\alpha}$ 的连续性即得 f 的连续性.

2. 利用公式 $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}(\alpha>0)$, 计算积分

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^m dx$$

其中 m 为正整数.

解

知

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^m dx&=\frac{1}{\alpha}\int_0^1(\ln x)^m dx^\alpha=\frac{1}{\alpha}x^\alpha(\ln x)^m|_0^1-\frac{1}{\alpha}\int_0^1 x^\alpha d(\ln x)^m\\&=-\frac{m}{\alpha}\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^{m-1}dx=\frac{m(m-1)}{\alpha^2}\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^{m-2}dx\\&=\cdots=(-1)^{m-1}\frac{m!}{\alpha^{m-1}}\int_0^1 x^{\alpha-1}\ln xdx=(-1)^{m-1}\frac{m!}{\alpha^m}\int_0^1\ln xdx^\alpha\\&=(-1)^{m-1}\frac{m!}{\alpha^m}x^\alpha\ln x|_0^1+(-1)^m\frac{m!}{\alpha^m}\int_0^1 x^\alpha d\ln x=(-1)^m\frac{m!}{\alpha^m}\int_0^1 x^{\alpha-1}dx\\&=(-1)^m\frac{m!}{\alpha^{m+1}}\end{aligned}$$

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin cxdx(a>0,b>0,c>0)$.

解

知

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin cx dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy}\sin cx dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin cx dx$$
$$= \int_a^b \frac{c}{y^2+c^2}dy = \arctan(\frac{b}{c}) - \arctan(\frac{a}{c})$$

这其中第一行积分交换次序的可行性由如下两点事实给出:

1. $e^{-xy}\sin cx$ 在 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续.
2. $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin cx dx$ 在 $[a,b]$ 上基于 Weierstrass 判别法一致收敛.

4. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx(\beta\neq 0)$.

解

记 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$, 由 Abel-Dirichlet 判别法容易验证 $\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}dx$ 关于 α 一致收敛, 且至少 $I(0)$ 收敛, 从而有:

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha dx}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}$$

当 $\alpha\neq\beta$ 时, 有:

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha dx}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)} = \frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{\alpha^2+x^2}-\frac{1}{\beta^2+x^2})dx$$
$$= \frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta \frac{2y}{(y^2+x^2)^2}dy = \frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}\frac{2y}{(y^2+x^2)^2}dx$$

其中可以验证:

$$\int_0^{+\infty}\frac{2ydx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{y}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+y^2}dx = \frac{\pi}{2y^2}$$

进而

$$\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}\frac{2y}{(y^2+x^2)^2}dx = \frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_\alpha^\beta \frac{\pi}{2y^2}dy = \frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\frac{\pi}{2}(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}) = \frac{\pi}{\beta(\beta+\alpha)}$$

从而

$$I'(\alpha) = \frac{\pi}{\beta(\beta+\alpha)}, \quad \alpha\neq\beta$$

而 $\alpha=\beta$ 时有:

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{2\beta dx}{(\beta^2+x^2)^2} = \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2\beta^2}$$

这和 $\alpha\neq\beta$ 时的表达式形式上是统一的, 从而可得:

$$I'(\alpha) = \frac{\pi}{\beta(\beta+\alpha)}$$

进而积分有:

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{\beta}\ln|\beta+\alpha| + C$$

5. 利用已知的积分值, 计算下列积分:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2x^2+x+2)}dx$;

解

知

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2x^2+x+2)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2((x+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16})}dx = e^{-\frac{15}{8}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4})^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}e^{\frac{15}{8}}}$$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}dx$;

解

知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot xdx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{4}$$

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$;

分析

本题讨论繁杂, 但其实是作为 [4] 中一道习题的结论而来的. 故这里暂时先不解决这道题, 而是在本节末尾抄录该习题并解决. 但这不妨碍我们先给出这题答案 (因为下一题要用):

答案为

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \beta < \alpha \\ \frac{\pi}{4}, & \beta = \alpha \\ 0, & \beta > \alpha \end{cases}$$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}dx$.

解

知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x(\frac{1-\cos 2x}{2})}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos 2x}{x}dx = \frac{\pi}{4}$$

6. 如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 证明: 函数

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos uxdx$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

证明

根据一致连续的定义:

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta(\varepsilon) > 0\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}(|u_1 - u_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| < \varepsilon)$$

由 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛的定义知:

$$\forall\varepsilon > 0\exists A > 0(|\int_{|x|>A} |f(x)|dx| < \varepsilon)$$

同时设其收敛到 M, 从而考虑 $|u_1-u_2|<\delta(\varepsilon)$, 有:

$$\begin{aligned}
|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)| &= |\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos u_1 x dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos u_2 x dx| \\
&= |\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos u_1 x - \cos u_2 x)dx| \\
&= |\int_{|x|\le A} f(x)(\cos u_1 x - \cos u_2 x)dx + \int_{|x|>A} f(x)(\cos u_1 x - \cos u_2 x)dx| \\
&\le 2\int_{-A}^{A} |f(x)\sin\frac{u_1-u_2}{2}x\sin\frac{u_1+u_2}{2}x|dx + \int_{|x|>A}|f(x)||\cos u_1 x - \cos u_2 x|dx \\
&\le 2\int_{-A}^{A}|f(x)|\cdot|\frac{u_1-u_2}{2}|\cdot|x|dx + 2\int_{|x|>A}|f(x)|dx \\
&\le \delta AM + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

因为这里 A 是给定的, 故不妨就设 $\delta\le\frac{\varepsilon}{A}$, 进而有

$$\delta AM + 2\varepsilon \le \varepsilon M + 2\varepsilon$$

从而由 ε 的任意性即知命题得证.

9.4.3 问题

1. 证明: 函数

$$f(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}dt$$

在 $[0,1)$ 上连续.

证明 (遵循答案的提示)

注意到

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-x-n\pi}}{|\sin(x+n\pi)|^{\alpha}}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{n\pi}}\int_0^{\pi}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx = \frac{1}{1-e^{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx
\end{aligned}$$

下面证明 $\int_0^{\pi}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx$ 在 $[0,1)$ 上连续, 这可以通过说明其在 $[0,1)$ 上一致连续得到, 进而只需说明其在任意闭区间 $[0,\eta]\subset[0,1)$ 上一致收敛即可. 将其分成如下三段:

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx,\quad \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx,\quad \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx$$

分别记之为 I_1,I_2,I_3. 对 I_1, 知在 ε 足够小时:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\sim |\int_0^{\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x^{\alpha}}dx| \sim |\int_0^{\varepsilon}\frac{1-x+o(x)}{x^{\alpha}}dx| \\
&= |\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{x^{\alpha}} - \int_0^{\varepsilon}\frac{x}{x^{\alpha}}dx + \int_0^{\varepsilon}\frac{o(x)}{x^{\alpha}}dx| \\
&\le |\iint_0^{\varepsilon}\frac{dx}{x^{\eta}}| + |\int_0^{\varepsilon}x^{1-\eta}dx| + \int_0^{\varepsilon}\frac{|o(x)|}{x^{\eta}}dx
\end{aligned}$$

既然 $\eta<1$, 知后三者都是收敛的, 进而由 Weierstrass 判别法可知 I_1 一致收敛. 对 I_2, 知

$$|I_2|\le\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}\varepsilon}dx\le\frac{1}{\sin^{\eta}\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}e^{-x}dx$$

最后的式子是收敛的, 且在 $\varepsilon\to 0$ 时可通过对 e^{ε} 和 $e^{\pi-\varepsilon}$ 作等价来肯定极限的存在性, 故由 Weierstrass 判别法知 I_2 一致收敛. 而对 I_3, 作代换 $u=\pi-x$, 知该情况与 I_1 相同, 从而 I_3 也一致收敛.

综上, 在任意的 $[0,\eta]\subset[0,1)$ 上, $\int_0^{\pi}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx$ 一致收敛, 进而由 $\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}$ 的连续性即得 $f(\alpha)$ 的连续性.

2. 通过积分

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}ue^{-ux}dx\quad(0<u\le 1)$$
$$\psi(u)=\int_0^{+\infty}ue^{u(u-x)}dx\quad(1\le u<+\infty)$$

说明含参变量反常积分的 Dini 定理在开区间或无穷区间上不成立.

注

此处的 Dini 定理如下

定理 9.4.1 (Dini) *设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 非负. 如果*

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

解

对第一个式子, 显然 ue^{-ux} 在 $[0,+\infty)\times(0,1]$ 上连续, 但取 $u=\frac{1}{x}$ 代入即知 φ 不一致收敛.

对第二个式子, 显然 $ue^{u(u-x)}$ 在 $[0+\infty)\times[1,+\infty)$ 上连续, 但取 $u=x$ 代入即知 φ 不一致收敛.

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}dx$.

解

记 $I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}dx$, 有:

$$I_{\alpha}=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+\alpha^2x^2}\frac{\arctan\beta x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\beta x}{x(1+\alpha^2x^2)}dx$$
$$I_{\beta\alpha}=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+\beta^2x^2}\frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}dx$$

这其中微分的可行性用 Weierstrass 判别法足以判别. 当 $\beta\ne\alpha$ 时, 不妨设 $\beta^2>\alpha^2$, 有:

$$\begin{aligned}I_{\beta\alpha}&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}(\frac{1}{1+\alpha^2x^2}-\frac{1}{1+\beta^2x^2})dx\\&=\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}(\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2dx}{1+\alpha^2x^2}-\int_0^{+\infty}\frac{\beta^2dx}{1+\beta^2x^2})\\&=\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}(\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\alpha dx}{1+\alpha^2x^2}-\beta\int_0^{+\infty}\frac{\beta dx}{1+\beta^2x^2})=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

从而

$$I_{\alpha}=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\beta)+C$$

代入 $\beta=0$ 知 $I_{\alpha}(\alpha,0)=0$, 进而 $C=-\frac{\pi}{2}\ln(\alpha)$, 即

$$I_{\alpha}=\frac{\pi}{2}\ln(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})$$

进而

$$I=\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)-\frac{\pi}{2}\alpha\ln\alpha+f(\beta)$$

但届于 α,β 是同等地位的, 故通过计算 $I_\beta,I_{\alpha\beta}$ 可得

$$I=\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)-\frac{\pi}{2}\beta\ln\beta+g(\alpha)$$

进而只能有 $f(\beta)-\frac{\pi}{4}\beta\ln\beta\equiv g(\alpha)-\frac{\pi}{4}\alpha\ln\alpha\equiv const$, 又代入 $\beta=0$ 可知 $f(\beta)=0$, 故最后可得:

$$I=\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)-\frac{\pi}{4}\alpha\ln\alpha-\frac{\pi}{4}\beta\ln\beta$$

4. 计算积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}(\iint\limits_D\frac{\sin(t\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy)dt$$

式中

$$D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$$

解

先考虑重积分:

$$\iint\limits_D\frac{\sin(t\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_{[1,2]\times[0,2\pi)}\frac{\sin tr}{r}\cdot rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\sin trdr=2\pi\int_1^2\sin trdr$$

故若记原来的积分为 I, 有:

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}dt\int_1^2 2\pi\sin trdr=\int_0^{+\infty}dt\int_1^2\sin trdr$$

引入收敛因子 $e^{-px},p>0$, 考虑积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt\int_1^2\sin trdr=\int_0^{+\infty}dt\int_1^2 e^{-pt}\sin trdr$$

注意到 $|e^{-pt}\sin tr|\le|e^{-pt}|$, 而后者收敛, 故由 Weierstrass 判别法知 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin trdt$ 在 $[1,2]$ 上一致收敛. 又因为连续性显然, 故由命题 10. 4. 4(反常积分号与常义积分号换序定理) 可知:

$$\int_0^{+\infty}dt\int_1^2 e^{-pt}\sin trdr=\int_1^2 dr\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin trdt=\int_1^2\frac{r}{p^2+r^2}dr=\frac{1}{2}\ln(\frac{4+p^2}{1+p^2})$$

因为本身 $\int_0^{+\infty}dt\int_1^2 e^{-pt}\sin trdr$ 和 $\frac{1}{2}\ln(\frac{4+p^2}{1+p^2})$ 在 $[1,2]$ 上都一致收敛, 故可以在积分号下取极限 $p\to 0$, 进而得到原积分为 $\frac{1}{2}\ln 4=\ln 2$.

5. 利用已知积分, 计算下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx(a>0)$;

解

知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx &= \int_0^{+\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2-2a}dx = e^{-2a}\int_0^{+\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2}dx \\ &= e^{-2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}d(\frac{t+\sqrt{t^2+4a}}{2}) = e^{-2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{t^2+4a}})dt \\ &= \frac{1}{2}e^{-2a}(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{t}{\sqrt{t^2+4a}}dt) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2a}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

这里最后一步是因为 $e^{-t^2}\frac{t}{\sqrt{t^2+4a}}$ 是奇函数.

注

根据答案, 这里有一个通用的结论:

结论对 $a>0, b>0$, 有:

$$\int_0^{+\infty} f((ax-\frac{b}{x})^2)dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(x^2)dx$$

这个命题的证明和本题所用的方法没有任何区别. 同样, 在 [3] 中也提到了下面的等价例题:

例题证明等式

$$\int_0^{+\infty} f(ax+\frac{b}{x}) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})dt$$

其中 $a>0, b>0$.

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-\cos bx}{x^2}dx(a>0)$;

解

知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-\cos bx}{x^2}dx &= -\int_0^{+\infty}(e^{-ax^2}-\cos bx)d\frac{1}{x} \\ &= -(\frac{e^{-ax}-\cos bx}{x}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{-ae^{-ax^2}+b\sin bx}{x}dx) \\ &= a - a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}}{x}dx + b\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}dx \\ &= a + \frac{\pi b}{2} - a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}}{x}dx\end{aligned}$$

这其中

$$\begin{aligned}I &:= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}}{x}dx = e^{-ax^2}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xd\frac{e^{-ax^2}}{x} \\ &= -1 - \int_0^{+\infty}\frac{x(-2ax^2e^{-ax^2}-e^{-ax^2})}{x^2}dx = -1+2a\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx - I \\ \Rightarrow I &= \sqrt{\pi a} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

从而原式即 $\frac{3}{2}a+\frac{\pi b}{2}-a\sqrt{\pi a}$.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$;

解

知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx &= -\int_0^{+\infty}\sin^4 x d\frac{1}{x} = -(\frac{\sin^4 x}{x}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}dx)\\ &= 1+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin x(\frac{1-\cos 2x}{2})\cos x}{x}dx\\ &= 1+2\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx - 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos 2x\cos x}{x}dx\\ &= 1+2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = 1+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx(\alpha>0,\beta>0)$.

解

知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}dx &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx\int_\beta^\alpha 3x\sin^3 yx\cos yxdy = \int_0^{+\infty}dx\int_\beta^\alpha 3\sin^2 yx(\sin yx\cos yx)dy\\ &= \frac{3}{4}\int_0^{+\infty}dx\int_\beta^\alpha(\sin 2yx-\frac{1}{2}\sin 4yx)dy\end{aligned}$$

下面分别计算

$$\int_0^{+\infty}dx\int_\beta^\alpha\sin 2yxdy,\quad \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}dx\int_\beta^\alpha\sin 4yxdy$$

这便是利用第 4 题中也用过的收敛因子法, 这里套用第 4 题中的式子即得:

$$\int_0^{+\infty}dx\int_\beta^\alpha\sin 2yxdy = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}dx\int_\beta^\alpha\sin 4yxdy = \frac{1}{8}\ln\frac{\alpha}{\beta}$$

从而

$$\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}dx\int_\beta^\alpha(\sin 2yx-\frac{1}{2}\sin 4yx)dy = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}\ln\frac{\alpha}{\beta} = \frac{9}{32}\ln\frac{\alpha}{\beta}$$

即为欲求.

对第 5 题 (3) 的补充:

习题

(a) 利用等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\sin xdx\int_0^{+\infty}e^{-xy}dy$$

并根据累次积分中交换积分次序的可能性, 重新求出例 13 中 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

的值.

解

给定常数 $A,\delta>0$, 先考察下述积分交换次序的可能性:

$$F = \int_0^{+\infty}dx\int_\delta^A e^{-xy}\sin xdy$$

(a1) 函数 $e^{-xy}\sin x$ 在 $(0,+\infty)\times[\delta,A]$ 上显然连续.

(a2) 在区间 $[\delta,A]$ 上, 考虑:

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} d\cos x \\
&= -e^{-xy}\cos x|_0^{+\infty} - y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x dx = 1 - y\int_0^{+\infty} e^{-xy} d\sin x \\
&= 1 - ye^{-xy}\cos x|_0^{+\infty} - y^2\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx = 1 - y^2 I \\
&\Rightarrow I = \frac{1}{1+y^2}
\end{aligned}$$

而这显然在 $[\delta,A]$ 上一致收敛.

从而根据命题 10.4.1(反常积分号与极限换序定理), 可知 F 在 $[\delta,A]$ 上可积且有等式:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_\delta^A e^{-xy}\sin x dy = \int_\delta^A dy \int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx = \arctan A - \arctan\delta$$

在上述等式中同时取 $\delta\to 0, A\to+\infty$, 即得:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dy = \frac{\pi}{2}$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(b) 试证: 当 $\alpha>0,\beta>0$ 时,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \beta<\alpha \\ \frac{\pi}{4}, & \beta=\alpha \\ 0, & \beta>\alpha \end{cases}$$

这个积分通常称为 Dirichlet 间断因子.

证明

首先注意到:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x) dx$$

当 $\beta<\alpha$ 时:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x) dx &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{(\alpha+\beta)x} d(\alpha+\beta)x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{(\alpha-\beta)x} d(\alpha-\beta)x \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

当 $\beta=\alpha$ 时:

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{(\alpha+\beta)x} d(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{4}$$

当 $\beta < \alpha$ 时:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{(\alpha+\beta)x}d(\alpha+\beta)x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\beta-\alpha)x}{(\beta-\alpha)x}d(\beta-\alpha)x\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=0\end{aligned}$$

命题即证.

(c) 设 $\alpha>0,\beta>0$, 验证等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\beta, & \beta\le\alpha\\ \frac{\pi}{2}\alpha, & \alpha\ge\beta\end{cases}$$

证明

注意到:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\beta x}{x}dx &= -\int_0^{+\infty}\sin\alpha x\sin\beta x d\frac{1}{x}\\ &= -(\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(\beta\sin\alpha x\cos\beta x+\alpha\cos\alpha x\sin\beta x)dx)\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\beta}{x}\sin\alpha x\cos\beta xdx+\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{x}\cos\alpha x\sin\beta xdx\end{aligned}$$

而当 $\beta\le\alpha$, 根据 (b) 有:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{x}\sin\alpha x\cos\beta xdx+\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{x}\cos\alpha x\sin\beta xdx=\frac{\pi}{2}\beta+0=\frac{\pi}{2}\beta$$

当 $\alpha\le\beta$, 有:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{x}\sin\alpha x\cos\beta xdx+\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{x}\cos\alpha x\sin\beta xdx=0+\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{\pi}{2}\alpha$$

命题即证.

(d) 试证: 如果 $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是正数, 且 $\alpha>\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i$, 那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\alpha_1 x}{x}\cdots\frac{\sin\alpha_n x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$$

证明

用归纳法, 知 $n=1$ 的情况即 (c) 所证结论, 设 $n-1$ 时题式成立, 对 n, 注意到:

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\alpha_1 x}{x}\cdots\frac{\sin\alpha_n x}{x}dx\\ =&-\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\sin\alpha x\sin\alpha_1 x\cdots\sin\alpha_n xd\frac{1}{x^n}\\ =&-\frac{1}{n}(\frac{1}{x^n}\sin\alpha x\sin\alpha_1 x\cdots\sin\alpha_n x)|_0^{+\infty}+\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^n}d\sin\alpha x\sin\alpha_1 x\cdots\sin\alpha_n x\\ =&\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}(\alpha\cos\alpha x\prod_{i=1}^n\sin\alpha_i x+\sum_{i=1}^n\alpha_i\sin\alpha x\sin\alpha_2\cdots\cos\alpha_i x\cdots\sin\alpha_n x)\frac{dx}{x^n}\\ =&\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}(\alpha\cos\alpha x\prod_{i=1}^n\sin\alpha_i x)\frac{dx}{x^n}+\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}(\sum_{i=1}^n\alpha_i\sin\alpha x\sin\alpha_1 x\cdots\cos\alpha_i x\cdots\sin\alpha_n x)\frac{dx}{x^n}\\ =&\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}(\alpha\cos\alpha x\prod_{i=1}^n\sin\alpha_i x)\frac{dx}{x^n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\int_0^{+\infty}(\alpha_i\sin\alpha x\sin\alpha_1 x\cdots\cos\alpha_i x\cdots\sin\alpha_n x)\frac{dx}{x^n}\end{aligned}$$

对其中第一个式子, 有:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}(\alpha\cos\alpha x\prod_{i=1}^n\sin\alpha_i x)\frac{dx}{x^n}\\=&\frac{\alpha}{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\alpha_1)x-\sin(\alpha-\alpha_1)x)\prod_{i=2}^n\sin\alpha_i x\frac{dx}{x^n}\\=&\frac{\alpha}{n}(\int_0^{+\infty}\sin(\alpha+\alpha_1)x\prod_{i=2}^n\sin\alpha_i x\frac{dx}{x^n}-\int_0^{+\infty}\sin(\alpha-\alpha_1)x\prod_{i=2}^n\sin\alpha_i x\frac{dx}{x^n})\end{aligned}$$

注意到上面的两个积分都满足归纳假设的条件, 按照归纳假设, 上即

$$\frac{\alpha}{n}(\frac{\pi}{2}\alpha_2\cdots\alpha_n-\frac{\pi}{2}\alpha_2\cdots\alpha_n)=0$$

而对其中的第二个式子, 其作为和式, 对其中的每一项有:

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_i}{n}\int_0^{+\infty}\sin\alpha x\sin\alpha_1 x\cdots\cos\alpha_i x\cdots\sin\alpha_n x\frac{dx}{x^n}\\=&\frac{\alpha_i}{2n}\int_0^{+\infty}(\sin(\alpha+\alpha_i)x+\sin(\alpha-\alpha_i)x)\sin\alpha_1 x\cdots\sin\alpha_n x\frac{dx}{x^n}\\=&\frac{\alpha_i}{2n}\int_0^{+\infty}\sin(\alpha+\alpha_i)x\sin\alpha_1 x\cdots\sin\alpha_n x\frac{dx}{x^n}+\frac{\alpha_i}{2n}\int_0^{+\infty}\sin(\alpha-\alpha_i)\sin\alpha_1 x\cdots\sin\alpha_n x\frac{dx}{x^n}\end{aligned}$$

同样, 上面的两个积分都满足归纳假设的条件, 按照归纳假设, 上即

$$\frac{\alpha_i}{2n}\frac{\pi}{2}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n\alpha_k+\frac{\alpha_i}{2n}\frac{\pi}{2}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n\alpha_k=\frac{\pi}{2n}\prod_{i=1}^n\alpha_i$$

从而综上:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\alpha_1 x}{x}\cdots\frac{\sin\alpha_n x}{x}dx=0+\sum_{i=1}^n\frac{\pi}{2n}\prod_{j=1}^n\alpha_i=\frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^n\alpha_i$$

满足归纳法要求! 进而命题得证.

9.5 补充: 陈纪修上含参反常积分部分内容

1. 证明下列含参变量反常积分在指定区间上一致收敛:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx, y\geq a>0$;

证明

知

$$|\int_0^{+\infty}\cos xydx|=\frac{1}{y}|\int_0^{+\infty}\cos udu|\leq\frac{\pi}{y}\leq\frac{\pi}{a}$$

进而其一致有界, 而用 Weierstrass 判别法易证单调递减函数 $\frac{1}{x^2+y^2}\rightrightarrows 0, x\to+\infty$. 从而根据 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛.

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx, 0\leq\alpha\leq\alpha_0$;

证明

将原积分写成

$$(\int_0^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty})\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx=:I_1+I_2,\varepsilon>0$$

对 I_1, 知 $x \to 0$ 时

$$|\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin 2x}{x+\alpha} e^{-\alpha x} dx| \le |\int_0^{\varepsilon} \frac{2x}{x+\alpha} e^{-\alpha x} dx| \le |\int_0^{\varepsilon} 2e^{-\alpha x} dx| \le 2\varepsilon$$

从而 I_1 一致收敛. 对 I_2, 知 $x \to +\infty$ 时 $|\int_0^{+\infty} \sin 2x dx| \le \frac{\pi}{2}$ 一致有界, 而由 Weierstrass 判别法易证单调递减函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha} \rightrightarrows 0, x \to +\infty$. 从而由 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛.

综上, 由 I_1, I_2 的一致收敛性知原积分在指定区间上一致收敛.

(3) $\int_0^{+\infty} x \sin x^4 \cos \alpha x dx, a \le \alpha \le b$.

证明 (遵循答案的提示)

题设积分中需要验证的点为 $+\infty$, 故记

$$I(A) = \int_A^{+\infty} x \sin x^4 \cos \alpha x dx$$

有:

$$\begin{aligned}
I(A) &= -4\int_A^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2}(-4x^3 \sin x^4) dx = -4\int_A^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2} d\cos x^4 \\
&= -4\frac{\cos \alpha x \cos x^4}{x^2}|_A^{+\infty} - 4\int_A^{+\infty} \cos x^4 (\frac{\alpha x^2 \sin \alpha x + 2x \cos \alpha x}{x^4}) dx \\
&= -4\frac{\cos \alpha x \cos x^4}{x^2}|_A^{+\infty} - 4\int_A^{+\infty} \frac{\alpha \cos x^4 \sin \alpha x}{x^2} dx - 8\int_A^{+\infty} \frac{\cos x^4 \cos \alpha x}{x^3} dx
\end{aligned}$$

当 $A \to +\infty$, 逐一验证上三式:

$$\begin{aligned}
&|-4\frac{\cos \alpha x \cos x^4}{x^2}|_A^{+\infty}| = |4\frac{\cos \alpha A \cos A^4}{A^2}| \le \frac{4}{A^2} \to 0 \\
&|-4\int_A^{+\infty} \frac{\alpha \cos x^4 \sin \alpha x}{x^2} dx| \le 4\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{4}{A} \to 0 \\
&|-8\int_A^{+\infty} \frac{\cos x^4 \cos \alpha x}{x^3} dx| \le 8\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{16}{A^2} \to 0
\end{aligned}$$

综上, $A \to +\infty, I(A) \to 0$, 同时 A 的取值和 α 无关, 故原积分一致收敛.

2. 说明下列含参变量反常积分在指定区间上非一致收敛:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\alpha(1+x^2)} dx, 0 < \alpha < +\infty$;

证明

令 $\alpha = \frac{1}{x}$, 知此时

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin 1}{1+x^2} dx = \sin 1 \int_0^{+\infty} (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx$$

而后者在 $x \to +\infty$ 时显然发散, 故原积分非一致收敛.

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x} dx, 0 < \alpha < 2$.

证明

首先可以证明如下引理:

引理 9.5.1 *对反常积分 $\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx$(其中 ω 为瑕点或无穷大) 而言, 如果 $[a,\omega) \ni x \to \omega, f(x) \sim h(x)$, 那么:*

$$\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx \sim \int_a^{\omega} h(x)g(x)dx$$

特别地, 这两个积分同时收敛或发散.

证明

当 $f(x)\sim h(x),[a,\omega)\ni x\to\omega$, 知可以将等价写成:

$$f(x)=h(x)+o(h(x)),\quad [a,\omega)\ni x\to\omega$$

进而当 $[a,\omega)\ni x\to\omega$ 时有:

$$\begin{aligned}\int_a^\omega f(x)g(x)dx&=\int_a^\omega (h(x)+o(h(x)))g(x)dx=\int_a^\omega h(x)g(x)dx+\int_a^\omega o(h(x))g(x)dx\\&=\int_a^\omega h(x)g(x)dx+o(1)\int_a^\omega h(x)g(x)dx=\int_a^\omega h(x)g(x)dx+o(\int_a^\omega h(x)g(x)dx)\end{aligned}$$

这便是

$$\int_a^\omega f(x)g(x)dx\sim\int_a^\omega h(x)g(x)dx$$

根据引理, 取 $\alpha=2-\frac{1}{x}$, 根据 $x^{\frac{1}{x}}\sim 1$ 知, 若取 $\varepsilon>0$ 足够小, 有:

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{x^{2-\frac{1}{x}}}\sin\frac{1}{x}dx=-\int_0^\varepsilon x^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}d\frac{1}{x}\sim-\int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{x}d\frac{1}{x}$$

但后者是发散的, 故原积分非一致收敛.

3. 设 $f(t)$ 在 $t>0$ 上连续, 反常积分 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 当 $\lambda=a$ 与 $\lambda=b$ 时都收敛, 证明 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明

将原积分写成:

$$(\int_0^1+\int_1^{+\infty})t^\lambda f(t)dt=:I_1+I_2$$

对 I_1 而言, 将积分写成

$$\int_0^1 t^{\lambda-a}\cdot t^a f(t)dt$$

知 $\int_0^1 t^a g(t)dt$ 收敛, 而 $t^{\lambda-a}\le 1$ 在 $t\to 0^+$ 时一致有界, 故根据 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛. 对 I_2 而言, 将积分写成

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{b-\lambda}}\cdot t^b f(t)dt$$

知 $\int_1^{+\infty}t^b f(t)dt$ 收敛, 而 $\frac{1}{t^{b-\lambda}}\le 1$ 在 $t\to+\infty$ 时一致有界, 故根据 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛.

综上, 命题得证.

4. 讨论下列含参变量反常积分的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$, 在 $y\ge y_0>0$;

解

知需要讨论的点在 $+\infty$, 但注意到 $|\int_0^{+\infty}\cos xydy|=\frac{1}{y}|\int_0^{+\infty}\cos udu|\le\frac{\pi}{y}\le\frac{\pi}{y_0}$ 一致有界, 而 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x\to+\infty$ 时显然一致趋零, 故根据 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$, 在

(i) $a<\alpha<b$;

解

将原积分写成:

$$(\int_{-\infty}^{a}+\int_{a}^{b}+\int_{b}^{+\infty})e^{-(x-\alpha)^2}dx=:I_1+I_2+I_3$$

对 I_1, 知 $|I_1|\le\int_{-\infty}^{a}e^{-(x-a)^2}dx$, 而后者根据 Poisson 积分的存在性知其收敛到定值, 从而由 Weierstrass 判别法知 I_1 一致收敛.

对 I_2, 知其作为常义积分当然一致收敛.

对 I_3, 知 $|I_3|\le\int_{b}^{+\infty}e^{-(x-b)^2}dx$, 而后者根据 Poisson 积分的存在性知其收敛到定值, 从而由 Weierstrass 判别法知 I_3 一致收敛.

综上, 原积分一致收敛.

(ii) $-\infty<\alpha<+\infty$;

解

取 $\alpha=x$, 知原积分即 $\int_{-\infty}^{+\infty}1dx$ 显然发散, 故其不一致收敛.

(3) $\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 xdx$, 在

(i) $p\ge p_0>0$;

解

知需要考察的点为 $x\to0^+$. 既然 p_0 已经给定, 可以证明当 x 足够小时有

$$\ln^2 x\le x^{-\frac{p_0}{2}}$$

进而取 $\delta>0$ 足够小, 有:

$$|\int_0^{\delta}x^{p-1}\ln^2 xdx|\le|\int_0^{\delta}x^{p_0-1}\ln^2 xdx|\le\int_0^{\delta}x^{\frac{p_0}{2}-1}dx$$

但 $\frac{p_0}{2}-1>-1$, 从而上式右端积分收敛, 进而根据 Weierstrass 判别法知原积分一致收敛.

(ii) $p>0$;

解

根据推论 10.3.1, 知 $x^{p-1}\ln^2 x$ 显然在 $(0,1]\times[0,1]$ 上连续, 但原积分在 $p=0$ 时发散, 故届于 $p>0$ 的闭包包含 $p=0$, 知原积分不一致收敛.

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx$, 在

(i) $\alpha\ge\alpha_0>0$;

解

注意到 $|\int_0^{+\infty}\sin xdx|\le\pi$ 一致有界, 同时根据 Weierstrass 判别法可证单调递减函数 $e^{-\alpha x}\rightrightarrows 0,x\to+\infty$, 从而根据 Abel-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛.

(ii) $\alpha>0$.

解

取 $\alpha=\frac{1}{x}$, 知原积分即 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{e}\sin xdx$ 显然发散.

5. 证明: 函数 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

证明

对 $(0,+\infty)$ 上的每个给定的点 α_0, 可以找到 $0<\alpha_1\leq\alpha_0$, 并取 α_0 的邻域满足 $U(\alpha_0)\subset[\alpha_1,+\infty)$. 此时, 对 $U(\alpha_0)$ 内的每个点而言, 知 $|\int_1^{+\infty}\cos xdx|\leq\pi$, 同时由 Weierstrass 判别法知单调递减函数 $\frac{1}{x^\alpha}\rightrightarrows 0, x\to+\infty, \alpha\in U(\alpha_0)$, 从而根据 Abei-Dirichlet 判别法可知原积分一致收敛, 这说明在 $U(\alpha_0)$ 内, 对趋向 $U(\alpha_0)$ 内的任意点 α_2 的基 $\mathfrak{B}_\alpha$ 有:

$$\lim_{\mathfrak{B}_\alpha}F(\alpha)=\lim_{\mathfrak{B}_\alpha}\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx=\int_1^{+\infty}\lim_{\mathfrak{B}_\alpha}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha_2}}dx=F(\alpha_2)$$

进而 $F(\alpha)$ 在 α_0 处收敛, 这对 $(0,+\infty)$ 上的每个点都成立, 从而 $F(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

6. 确定函数 $F(y)=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 的连续范围.

解

当 $y\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ 时, 容易验证原积分发散, 从而欲求范围只能是 $(0,2)$ 的子集, 下面证明 $(0,2)$ 即为欲求.

对 $(0,2)$ 中

7. 设 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 存在, 证明: $f(x)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

证明

8. 证明: 函数 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微.

证明

题即证明如下三个命题:

(a1) $\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}$ 在 $(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 上连续, 而这是显然的.

(a2) $\int_0^{+\infty}\frac{-2(x+t)\cos x}{(1+(x+t)^2)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 这是因为作代换 $u=x+t$, 有:

$$|\int_t^{+\infty}\frac{-2u\cos(u-t)}{(1+u^2)^2}du|\leq|\int_t^{\infty}\frac{d(1+u^2)}{(1+u^2)^2}|=\frac{1}{1+t^2}\leq 1$$

从而根据 Weierstrass 判别法知原积分一致收敛.

(a3) $I(t)$ 至少在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一点收敛. 这可以令 $t=0$ 来得到.

综上, $I(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微.

9. 利用 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$, 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx(b>a>0)$.

解

知

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy$$

下面证明上右式积分次序可交换, 这是因为对 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 而言, 有 $|\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx|\leq|\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx|$, 而后者关于 y 显然是一致收敛的, 从而原积分在 $[a,b]$ 上一致收敛. 从而积分次序可交换, 有:

$$\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}$$

从而 $\ln\frac{b}{a}$ 即为欲求.

10. 利用 $\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xydy$, 计算 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx(p>0,b>a>0)$.

解

知

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-px}\cos xydy$$

下面证明上右式积分次序可交换, 这是因为首先 $e^{-px}\cos xy$ 显然在 $(0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续, 其次对积分 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos xydx$, 知 $|\int_0^{+\infty}\cos xydx|=\frac{1}{y}|\int_0^{+\infty}\cos udu|\leq\frac{\pi}{y}\leq\frac{\pi}{a}$ 一致有界, 而单调递减函数 $e^{-px}\rightrightarrows 0, x\to+\infty$, 从而该积分一致收敛. 故根据反常积分号和常义积分号换序定理可知:

$$\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-px}\cos xydy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos xydx:=I$$

计算 I 有:

$$\begin{aligned}
I&=-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\cos xyde^{-px}\\
&=-\frac{1}{p}(e^{-px}\cos xy|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-px}d\cos xy)\\
&=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}y\int_0^{+\infty}e^{-px}\sin xydx=\frac{1}{p}+\frac{y}{p^2}\int_0^{+\infty}\sin xyde^{-px}\\
&=\frac{1}{p}+\frac{y}{p^2}(e^{-px}\sin xy|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-px}d\sin xy)=\frac{1}{p}-\frac{y^2}{p^2}\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos xydx\\
&=\frac{1}{p}-\frac{y^2}{p^2}I\Rightarrow I=\frac{p}{p^2+y^2}
\end{aligned}$$

进而

$$\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos xydx=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}dy=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}$$

11. 利用 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}(a>0)$, 计算 $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}(n\in\mathbb{N}^+)$.

解

知

$$\begin{aligned}
I_n&=\frac{x}{(a+x^2)^{n+1}}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}xd(a+x^2)^{-n-1}\\
&=(n+1)\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{(a+x^2)^{n+2}}dx=2(n+1)I_n-2a(n+1)I_{n+1}\\
\Rightarrow& I_{n+1}=\frac{1}{a}\frac{2n+1}{2n+2}I_n
\end{aligned}$$

进而有:

$$I_n=\frac{1}{a}\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}=\cdots=\frac{1}{a^{n-1}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}I_1=\frac{\pi}{2a^{n-\frac{1}{2}}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

12. 计算 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

解 (遵循答案的提示)

知

$$g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\arctan\alpha xd\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha-\int_1^{+\infty}\frac{\alpha\sqrt{x^2-1}}{x(1+\alpha^2x^2)}dx$$

在最后的积分中令 $t=\sqrt{x^2-1}$ 有:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\alpha\sqrt{x^2-1}}{x(1+\alpha^2x^2)}dx&=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha t}{\sqrt{t^2+1}(1+\alpha^2(t^2+1))}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha t^2}{(t^2+1)(1+\alpha^2+\alpha^2t^2)}dt\\&=\alpha\int_0^{+\infty}(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^2t^2}-\frac{1}{1+t^2})dt\\&=\alpha(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}(\mathrm{sgn}\alpha\cdot\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha)\end{aligned}$$

进而可得

$$g(\alpha)=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha\cdot(|\alpha|+1-\sqrt{1+\alpha^2})$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a,b>0)$$

证明 (遵循答案的提示)

设 $A''>A'>0$, 知:

$$\begin{aligned}\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx&=\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_{A'}^{A''}\frac{f(bx)}{x}dx\\&=\int_{aA'}^{aA''}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{bA'}^{bA''}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{aA'}^{bA'}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aA''}^{bA''}\frac{f(x)}{x}dx\\&=f(\xi_1)\int_{aA'}^{bA'}\frac{dx}{x}-f(\xi_2)\int_{aA''}^{bA''}\frac{dx}{x}=(f(\xi_1)-f(\xi_2))\ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

这其中 $\xi_1\in(aA',bA'),\xi_2\in(aA'',bA'')$, 令 $A'\to0^+,A''\to+\infty$, 则知 $f(\xi_1)\to f(0),f(\xi_2)\to0$, 即有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

14.

(1) 利用 $\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 推出

$$L(c)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}\quad(c>0)$$

注

这和前一节中的第 5 题一样, 这里不再赘述.

(2) 利用积分号下求导的方法引出 $\frac{dL}{dc}=-2L$, 以此推出与 (1) 同样的结果, 并计算

$$\int_0^{+\infty}e^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}dy\quad a>0,b>0$$

解

容易验证 $L(c)$ 确实满足反常积分号与微分换序定理的条件, 进而有:

$$\frac{dL}{dc}=-\int_0^{+\infty}\frac{2c}{y^2}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}d\frac{c}{y}=2\int_{+\infty}^0 e^{-t^2-\frac{c^2}{t^2}}dt=-2L$$

进而解微分方程可知 $L=Ce^{-2c}$, 其中 C 是常数. 注意到 $L(c)$ 关于 c 连续, 进而可知 $C=\lim\limits_{c\to 0}L(c)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 命题即得. 需计算的第二个式子在前一节的第 5 题中已经给出, 这里不再赘述.

15. 利用 $\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt=\frac{1}{\alpha^2+x^2}$, 计算 $J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx(\alpha>0)$.

解

知

$$\begin{aligned}J&=\int_0^{+\infty}\cos\beta x\cdot\frac{1}{\alpha^2+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\cos\beta xdx\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt\\&=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha^2+x^2)}\cos\beta xdx=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha^2+x^2)}\cos\beta xdx\end{aligned}$$

[1] 中第 381 面例 6 已经给出了最后的积分中内层积分的结果, 这里引用该式子:

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}},\quad a>0$$

代入可知:

$$J=\int_0^{+\infty}e^{-t\alpha^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}dt=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t\alpha^2-\frac{\beta^2}{4t}}d\sqrt{t}=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2-\frac{\beta^2}{4x^2}}dx$$

这便回到了上一问, 可以得到最后结果为

$$J=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|\beta|}$$

9.6 Γ 函数和 B 函数

9.6.1 公式回顾

Γ 函数和 B 函数的定义如下:

$$B(\alpha,\beta):=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$
$$\Gamma(\alpha):=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

而 Γ 函数和 B 函数有如下的关系:

命题 9.6.1 $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

对于 B 函数, 除开下面的题目所提到的情形, 其还有下面的等价形式:

命题 9.6.2 $B(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy$.

对于 Γ 函数, 其有如下著名的公式:

命题 9.6.3 (余元公式) $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

特别地, [1] 中介绍了下面的定理用以给出 Γ 函数的极限形式.

定理 9.6.1 *设 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 满足以下三个条件:*

1. *对任意的 $x>0, f(x)>0$ 且 $f(1)=1$;*

2. *对任意的 $x>0, f(x+1)=xf(x)$;*

3. *$\ln f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.*

那么对任意的 $x>0$, 有 $f(x)=\Gamma(x)$.

证明

只需要证明这三个条件能唯一确定一个函数 f, 因为 Γ 显然也满足这三个条件.

出于条件 2, 只需要对 $x\in(0,1)$ 讨论即可. 届于 $\ln f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数, 有:

$$\frac{\ln f(n)-\ln f(n-1)}{n-(n-1)}\leq\frac{\ln f(n+x)-\ln f(n)}{(n+x)-n}\leq\frac{\ln f(n+1)-\ln f(n)}{(n+1)-n}$$

其中 n 是大于 1 的正整数. 由条件 1,2 知 $f(n)=(n-1)!$, 进而上式可写为:

$$\ln(n-1)!-\ln(n-2)!\leq\frac{\ln f(n+x)-\ln(n-1)!}{x}\leq\ln n!-\ln(n-1)!$$

即

$$x\ln(n-1)\leq\ln f(n+x)-\ln(n-1)!\leq x\ln n$$

在上各式中同加 $\ln(n-1)!$ 有:

$$\ln((n-1)^x(n-1)!)\leq\ln f(n+x)\leq(n^x(n-1)!)$$

即

$$(n-1)^x(n-1)!\leq f(n+x)\leq n^x(n-1)!$$

由条件 2 知:

$$f(n+x)=(n-1+x)(n-2+x)\cdots(1+x)xf(x)$$

代入得

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\leq f(x)\leq\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

注意到这是对任意的 n 而言的, 而上式中部的 $f(x)$ 已经和 n 无关, 故将上式左端中的 $n-1$ 换为 n, 式子依旧成立, 也即:

$$\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\leq f(x)\leq\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{x+n}{n}$$

但对固定的 $x>0$, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\sim\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{x+n}{n}$$

从而夹逼即有:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

进而可知定理中的三个条件唯一确定一个函数. 又因为 $\Gamma(x)$ 显然也满足这三个条件, 故命题即证.

□

根据上述定理, 有以下 $\Gamma(x)$ 的极限形式公式:

定理 9.6.2 对任意的 $x > 0$, 有

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

9.6.2 练习题

1. 证明

(1) $\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} x^{2s-1} e^{-x^2} dx (s > 0)$;

证明

在定义式中令 $x = u^2$, 有:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} (u^2)^{\alpha-1} e^{-u^2} \cdot 2udu = 2\int_0^{+\infty} u^{2\alpha-1} e^{-u^2} du$$

此即欲证式.

(2) $\Gamma(s) = a^s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-ax} dx (s > 0, a > 0)$.

证明

在定义式中令 $x = au, a > 0$, 有:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} (au)^{\alpha-1} e^{-au} \cdot adu = a^\alpha \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-au} du$$

此即欲证式.

2. 证明:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta \quad (p > 0, q > 0)$$

证明

在定义式中令 $x = \sin^2\theta$, 有:

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{\alpha-1}(1-\sin^2\theta)^{\beta-1} \cdot 2\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1}\theta \cos^{2\beta-1}\theta d\theta \end{aligned}$$

此即欲证式.

3. 利用 Γ 函数, 计算下列积分 (在解题过程中统一记题设积分为 I):

(1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$;

解

知

$$I = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} dx = B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{3}{8}\pi$$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$;

解

知

$$I = B(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{5}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{8}\pi$$

(3) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

解

令 $x^3 = u$, 有:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{u^{-\frac{2}{3}}du}{1+u} = \frac{1}{3}B(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(1)} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^6 x dx$.

解

利用第 2 题的结论, 有:

$$I = \frac{1}{2}B(3, \frac{7}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{13}{2})} = \frac{8}{429}$$

4. 证明: $\ln B(p,q)$ 关于变量 p 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

证明

根据凸函数的定义, 取定 $p_1, p_2 > 0$, 此即证明对任意的 $\lambda \in [0,1]$ 有:

$$\ln B(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2, q) \geq \lambda \ln B(p_1, q) + (1-\lambda)\ln B(p_2, q)$$

代入定义式即

$$\ln \int_0^1 x^{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 - 1}(1-x)^q dx \geq \lambda \ln \int_0^1 x^{p_1-1}(1-x)^{q-1}dx + (1-\lambda)\int_0^1 x^{p_2-1}(1-x)^{q-1}dx$$

故只需证明

$$\int_0^1 x^{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 - 1}(1-x)^q dx \geq (\int_0^1 x^{p_1-1}(1-x)^{q-1}dx)^{\lambda}(\int_0^1 x^{p_2-1}(1-x)^{q-1}dx)^{1-\lambda}$$

但根据 Holder 不等式上式已经成立, 故命题得证.

5. 计算极限

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \sqrt{\alpha}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x^5)^{\alpha}dx$$

解

记 $u = x^5$, 有:

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x^5)^{\alpha}dx &= \sqrt{\alpha}\int_0^1 u^{\frac{3}{10}}(1-u)^{\alpha}\cdot\frac{1}{5}u^{-\frac{4}{5}}du \\ &= \frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\alpha}du = \frac{1}{5}\sqrt{\alpha}B(\frac{1}{2}, \alpha) = \frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)}\end{aligned}$$

但根据 Stirling 公式: $\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}(\frac{x}{e})^x, x\to+\infty$ 有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)}&\sim\frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\frac{\sqrt{2\pi(\alpha-1)}(\frac{\alpha-1}{e})^{\alpha-1}}{\sqrt{2\pi(\alpha-\frac{1}{2})}(\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{e})^{\alpha-\frac{1}{2}}}\sim\frac{1}{5}\frac{\sqrt{e}\sqrt{\frac{\alpha-1}{e}}(\frac{\alpha-1}{e})^{\alpha-1}}{(\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{e})^{\alpha-\frac{1}{2}}}\\&\sim\frac{1}{5}\sqrt{e}\frac{(\frac{\alpha-1}{e})^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{e})^{\alpha-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

故欲求即 $\frac{1}{5}$.

6. 证明对于任意的实数 a, 有:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=1$$

证明

由 Stirling 公式可知:

$$\begin{aligned}\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}&\sim\frac{x^a\sqrt{2\pi(x-1)}(\frac{x-1}{e})^{x-1}}{\sqrt{2\pi(x+a-1)}(\frac{x+a-1}{e})^{x+a-1}}\sim\frac{(\frac{x-1}{e})^a e^a(\frac{x-1}{e})^{x-1}}{(\frac{x+a-1}{e})^{x+a-1}}\\&=e^a\frac{(\frac{x-1}{e})^{x+a-1}}{(\frac{x+a-1}{e})^{x+a-1}}=e^a(1-\frac{a}{x+a-1})^{x+a-1}\sim e^a\cdot e^{-a}=1,\quad x\to+\infty\end{aligned}$$

命题即证.

7. 设 $a>0, ac-b^2>0, \alpha>\frac{1}{2}$, 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha}=\frac{(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\frac{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\pi}$$

证明

知

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha}&=\frac{1}{a^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})^\alpha}=\frac{1}{a^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{((x+\frac{b}{a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2})^\alpha}\\&=\frac{1}{a^\alpha}\cdot\frac{1}{(\frac{ca-b^2}{a^2})^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{((\frac{a}{\sqrt{ca-b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{ca-b^2}})^2+1)^\alpha}:=I\end{aligned}$$

令 $t=\frac{a}{\sqrt{ca-b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{ca-b^2}}$, 知 $dx=\frac{\sqrt{ca-b^2}}{a}dt$, 进而有:

$$\begin{aligned}I&=\frac{a^\alpha}{(ca-b^2)^\alpha}\cdot\frac{\sqrt{ca-b^2}}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^\alpha}=\frac{(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du}{(u+1)^\alpha}\\&=\frac{(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{(u+1)^\alpha}du=\frac{(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{a^{1-\alpha}}B(\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2})\\&=\frac{(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)}=\frac{(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\frac{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

命题即证.

9.6.3 问题

1. 讨论函数

$$f(s,p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^s}{(a+bx^p)^q}dx,\quad(a>0,b>0,p>0)$$

的定义域, 并用 Γ 函数表示 $f(s,p,q)$.

注在 [4] 中有相同的习题, 下面抄录并解决 (定义域根据题目给出的表达式与 $B(\alpha,\beta)$ 中要求的 $\alpha,\beta>0$ 即得):

习题证明: $\int_0^{+\infty}\frac{x^pdx}{(a+bx^q)^r}=\frac{a^{-r}}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{p+1}{q}}B(\frac{p+1}{q},r-\frac{p+1}{q})$.

证明

知:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^pdx}{(a+bx^q)^r}=\frac{1}{a^r}\int_0^{+\infty}\frac{x^pdx}{(1+\frac{b}{a}x^q)^r}$$

记 $u=\frac{b}{a}x^q$, 知 $x^p=(\frac{a}{b})^{\frac{p}{q}}u^{\frac{p}{q}}$, 进而有:

$$\frac{1}{a^r}\int_0^{+\infty}\frac{x^pdx}{(1+\frac{b}{a}x^q)^r}=\frac{1}{a^r}\int_0^{+\infty}\frac{(\frac{au}{b})^{\frac{p}{q}}\cdot\frac{1}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{1}{q}}u^{\frac{1}{q}-1}du}{(1+u)^r}=\frac{a^{-r}}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{p+1}{q}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{p+1}{q}-1}du}{(1+u)^r}$$

令 $\alpha-1=\frac{p+1}{q}-1,\alpha+\beta=r$, 即得

$$\frac{a^{-r}}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{p+1}{q}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{p+1}{q}-1}du}{(1+u)^r}=\frac{a^{-r}}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{p+1}{q}}B(\frac{p+1}{q},r-\frac{p+1}{q})$$

命题即证.

2. 证明:

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\ln\sqrt{2\pi}$$

• 证明 (这个证明中的一致性还有些问题)

注意到题目可以写成

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\ln\Gamma(x)dx=\ln\sqrt{2\pi}$$

记

$$\Gamma_n(x)=\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

根据 $\Gamma(x)$ 的性质知:

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)=\Gamma(x)$$

故在任意紧集 $[\varepsilon,1]\subset(0,1]$ 上, 因为 $\Gamma_n(x)$ 与 $\Gamma(x)$ 关于 x 都是连续函数, 故由 Dini 定理知上述极限一致. 又因为对任意的 n 和任意的 $\varepsilon>0$, $\int_\varepsilon^1\ln\Gamma_n(x)dx$ 必可积, 从而根据定理 9. 3. 4(常义积分号与极限换序定理) 可知:

$$\int_\varepsilon^1\ln\Gamma(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^1\ln\Gamma_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^1\ln\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}dx$$

这其中

$$\begin{aligned}I:=&\int_0^1\ln\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}dx=\int_\varepsilon^1(x\ln n+\ln n!-\ln x-\ln(x+1)-\cdots-\ln(x+n))dx\\=&\frac{1}{2}\ln n+\ln n!-(-1+(2\ln2-1\ln1-1)+\cdots+((n+1)\ln(n+1)-n\ln n-1))\\=&\frac{1}{2}\ln n+\ln n!-(n+1)\ln(n+1)+1+n+1=\ln\frac{n!\sqrt{n}e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\sim\ln\frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^ne^{\frac{\theta_n}{12n}}\sqrt{n}e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\\=&\ln\sqrt{2\pi}e^{\frac{\theta_n}{12n}}\cdot e\cdot(\frac{n}{n+1})^{n+1}\sim\ln\sqrt{2\pi},\quad n\to\infty\end{aligned}$$

命题即证.

另证 (遵循答案的提示)

令 $u=1-x$ 有:

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx=\int_0^1 \ln\Gamma(1-u)du=\int_0^1 \ln\Gamma(1-x)dx$$

进而

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx&=\frac{1}{2}\int_0^1(\ln\Gamma(x)+\ln\Gamma(1-x))dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln\frac{\pi}{\sin\pi x}dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln\frac{\pi}{\sin x}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\pi}{\sin x}dx\end{aligned}$$

由等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\pi}{\sin x}dx=\frac{1}{2}\ln\pi+\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2\pi}$$

命题即证.

3. 证明:

$$\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)dx=\frac{1}{\pi}(\ln\frac{\pi}{2}+1)$$

•(极限估阶的部分有问题, 算不到题式上) 证明

令 $u=1-x$ 知:

$$\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)dx=\int_1^0\sin(\pi-\pi u)\ln\Gamma(1-u)d(1-u)=\int_0^1\sin(\pi x)\ln\Gamma(1-x)dx$$

从而记题式左端为 I, 有:

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}(\int_0^1\sin\pi x\ln\Gamma(x)dx+\int_0^1\sin\pi x\ln\Gamma(1-x)dx)=\frac{1}{2}\int_0^1\sin\pi x\ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x))dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\sin\pi x\ln\frac{\pi}{\sin\pi x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\ln\frac{\pi}{\sin x}dx=\frac{1}{2\pi}(\int_0^{\pi}\sin x\ln\pi dx-\int_0^{\pi}\sin x\ln\sin xdx)\\&=\frac{1}{\pi}\ln\pi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin xd\cos x=\frac{1}{\pi}\ln\pi+\frac{1}{2\pi}(\cos x\ln\sin x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx)\\&=\frac{1}{\pi}\ln\pi+\frac{1}{2\pi}\cos x\ln\sin x|_0^{\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx\\&=\frac{1}{\pi}\ln\pi+\frac{1}{2\pi}\cos x\ln\sin x|_0^{\pi}-\frac{1}{2\pi}(\int_0^{\pi}\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}-\int_0^{\pi}\sin xdx)\\&=\frac{1}{\pi}\ln\pi+\frac{1}{2\pi}\cos x\ln\sin x|_0^{\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}+\frac{1}{\pi}\\&=\frac{1}{\pi}\ln\pi+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}(\cos x\ln\sin x|_0^{\pi}-\ln\tan\frac{x}{2}|_0^{\pi})\end{aligned}$$

4. 证明:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2(\frac{1}{4})$$

证明

5. 证明:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{m+k+1} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

6. 设 $f(x) = (\int_0^x e^{-t^2} dt)^2, g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$. 证明:

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$$

并由此证明:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

证明

注意到

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) &= 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + \int_0^1 (-2x)e^{-x^2(1+t^2)}dt \\ &= 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt - 2\int_0^x e^{-x^2-u^2}du = 0\end{aligned}$$

这说明只能有

$$f(x) + g(x) \equiv const$$

代入 $x = 0$ 知:

$$f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$$

从而可知

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$$

在上式中令 $x \to +\infty$, 知 $g(x) \to 0$, 进而有:

$$f(+\infty) = (\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt)^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

7. 利用公式

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

证明: 对任意的实数 x, 有:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})$$

证明

根据余元公式:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

代入 $\Gamma(x)$ 的极限表达式有:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin \pi x} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-x} n!}{(1-x)(1-x+1)\cdots(1-x+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n!)^2}{(1-x)(1-x+1)\cdots(1-x+n)x(x+1)\cdots(x+n)}\end{aligned}$$

将上式中 πx 换成 t 有:

$$\frac{\pi}{\sin t}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n!)^2}{(1-\frac{t}{\pi})(1-\frac{t}{\pi}+1)\cdots(1-\frac{t}{\pi}+n)\frac{t}{\pi}(\frac{t}{\pi}+1)\cdots(\frac{t}{\pi}+n)}$$

进而:

$$\begin{aligned}\sin t&=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot(n!)^2}(1-\frac{t}{\pi})(1+\frac{t}{\pi})\cdots(n-\frac{t}{\pi})(n+\frac{t}{\pi})\cdot\frac{t}{\pi}\cdot(n+1-\frac{t}{\pi})\\&=t\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot(n!)^2}\cdot n!\cdot n!\cdot(1-\frac{t^2}{\pi^2})\cdots(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2})(n+1-\frac{t}{\pi})\\&=t\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{t^2}{k^2\pi^2})=t\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2})\end{aligned}$$

Chapter 10

Fourier 分析

10.1 周期函数的 Fourier 级数

10.1.1 定理整理

引理 10.1.1 (Riemann-Lebesgue) *设 f 在 $[a,b]$(b 可以是 $+\infty$) 上可积且绝对可积, 则:*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0$$

证明

先证明第一个式子成立. 首先考虑 $b<+\infty$ 的情况. 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则其必有界, 进而存在常数 M 使得 $|f(x)|\le M, x\in[a,b]$. 记 $n=[\sqrt{\lambda}]$, 则 $\lambda\to+\infty, n\to\infty$. 现在将区间 $[a,b]$ 作 n 等分, 分点为

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)\quad i=0,1,\cdots,n$$

记 ω_i 为 f 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 既然 f 可积, 知:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=0$$

其中 $\Delta_i=x_i-x_{i-1}$. 注意到:

$$|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x dx|=\frac{1}{\lambda}|\sin\lambda x_{i-1}-\sin\lambda x_i|\le\frac{2}{\lambda}$$
$$|\cos\lambda x|\le 1$$

及

$$\begin{aligned}
&|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx|\\
=&|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x dx|\\
=&|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_{i-1}))\cos\lambda x dx+\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x dx|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_{i-1}))\cos\lambda x dx\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x dx\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|(f(x)-f(x_{i-1}))\cos\lambda x|dx + \sum_{i=1}^{n}|f(x_{i-1})|\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\cos\lambda x|dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|(f(x)-f(x_{i-1}))|dx + \frac{2n}{\lambda}M = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2n}{\lambda}M \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{\sqrt{\lambda}}M \to 0, \quad \lambda\to+\infty
\end{aligned}
$$

再考虑反常绝对可积的情况. 不妨设 b 是 f 唯一的瑕点, 根据反常绝对可积的定义知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$ 使得

$$\int_{b-\eta}^{b}|f(x)|dx<\varepsilon$$

既然 f 在 $[a,b-\eta]$ 上 Riemann 可积, 由上述结论知存在 $\lambda_0>0$, 使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时有:

$$\left|\int_{a}^{b-\eta}f(x)\cos\lambda x dx\right|<\varepsilon$$

进而当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| &= \left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x dx + \int_{b-\eta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx\right| \\
&\leq \left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x dx\right| + \left|\int_{b-\eta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx\right| < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

至此即证.

再考虑 $b=+\infty$ 的情况, 因为 f 在 $(a,+\infty)$ 上绝对可积, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A_0>0$, 使得 $\int_{A_0}^{+\infty}|f(x)|dx<\varepsilon$. 又根据前面的讨论知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^{A_0}f(x)\cos\lambda x dx=0$$

故存在 $\lambda_0>0$, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有

$$\left|\int_a^{A_0}f(x)\cos\lambda x dx\right|<\varepsilon$$

于是, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有:

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)\cos\lambda x dx\right| \leq \left|\int_a^{A_0}f(x)\cos\lambda x dx\right| + \int_{A_0}^{+\infty}|f(x)|dx < 2\varepsilon.$$

另一个式子同理可证.

□

在 [4] 上补充了关于 Riemann-Lebesgue 引理的复数形式的证明:

引理 10.1.2 (Riemann-Lebesgue) *如果局部可积函数 $f:(\omega_1,\omega_2)\to\mathbb{R}$ 在区间 (ω_1,ω_2) 上 (至少在反常意义下) 绝对可积, 则*

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}f(x)e^{i\lambda x}dx\to 0,\quad \mathbb{R}\ni\lambda\to\infty$$

证明

在最简单的情况下, (ω_1,ω_2) 是有限区间, 而 $f(x)\equiv 1$, 此时欲证式即

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\lambda x}dx=0$$

但[1]

$$|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\lambda x}dx|=|\frac{e^{i\lambda\omega_2}-e^{i\lambda\omega_1}}{i\lambda}|\le|\frac{1}{\lambda}|\to 0$$

进而此种情况得证. 下面的讨论就是把一般情况化成这种简单情况.

固定 $\varepsilon>0$, 首先取区间 $[a,b]\subset(\omega_1,\omega_2)$ 使得对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 成立:

$$|\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}dx-\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx|<\varepsilon$$

注意到:

$$\begin{aligned}
&|\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}dx-\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx|\\
=&|\int_{\omega_1}^{a} f(x)e^{i\lambda x}dx+\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx+\int_b^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}dx-\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx|\\
=&|\int_{\omega_1}^{a} f(x)e^{i\lambda x}dx+\int_b^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}dx|\le|\int_{\omega_1}^{a} f(x)e^{i\lambda x}dx|+|\int_b^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}dx|\\
\le&\int_a^{\omega_1}|f(x)e^{i\lambda x}|dx+\int_b^{\omega_2}|f(x)e^{i\lambda x}|dx=\int_a^{\omega_1}|f(x)|\cdot|e^{i\lambda x}|dx+\int_b^{\omega_2}|f(x)|\cdot|e^{i\lambda x}|dx\\
=&\int_a^{\omega_1}|f(x)|dx+\int_b^{\omega_2}|f(x)|dx
\end{aligned}$$

根据 f 在 (ω_1,ω_2) 上 (反常) 可积的定义知, 上式是可以任意小的, 从而可以取得这样的 $[a,b]$.

由于 $f\in\mathfrak{R}([a,b],\mathbb{R})$, 故由 Dauboux 定理知:

$$0\le\int_a^b f(x)dx-\sum_{j=1}^n m_j\Delta x_j<\varepsilon$$

其中 $m_j=\inf\limits_{[x_{j-1},x_j]}f(x)$ 是 Dauboux 下和.

现在做 $[a,b]$ 上的一个分段常数函数 $g(x)=m_j, x\in[x_{j-1},x_j), j=1,\cdots,n$. 进而可得在 $[a,b]$ 上 $g(x)\le f(x)$, 且:

$$\begin{aligned}
0\le&|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx-\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx|\\
\le&\int_a^b|f(x)-g(x)|\cdot|e^{i\lambda x}|dx=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon
\end{aligned}$$

但

$$\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx=\sum_{j=1}^n\int_{x_{j-1}}^{x_j}m_je^{i\lambda x}dx=\frac{1}{i\lambda}\sum_{j=1}^n(m_je^{i\lambda x})|_{x_{j-1}}^{x_j}\to 0,\quad\mathbb{R}\ni\lambda\to+\infty$$

这其中的最后一个式子正是前面所证明的简单情况, 故可知对任意的 $[a,b]\subset(\omega_1,\omega_2)$ 都有

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\to 0,\quad\mathbb{R}\ni\lambda\to+\infty$$

进而命题即证.

□

[1]这里 $|c|$ 代表 c 在 $\mathbb{C}$ 中的模长, 不用 $\|c\|$ 的原因在于这个符号会用在后面 $\mathscr{R}_2$ 空间中的距离上.

推论 10.1.1 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是某个可积且绝对可积函数的 *Fourier* 系数, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

10.1.2 练习题

1. 证明: n 次三角多项式

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

的 Fourier 级数就是它自己.

证明

注意到三角函数系的正交性, 有:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)\cos nx dx = \begin{cases} \alpha_k, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)\sin nx dx = \begin{cases} \beta_k, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

进而 T_n 的 Fourier 系数依旧是 α_k, β_k, 命题即证.

2. 设 f 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数. 证明:

(1) 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi) = f(x)$, 那么 $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$;

证明

知

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx - k\pi)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)(\cos kx + \cos(kx - k\pi))dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx - k\pi)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)(\sin kx + \sin(kx - k\pi))dx$$

当 k 为奇数, 知上两式皆为 0, 命题即证.

(2) 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi) = -f(x)$, 那么 $a_{2n} = b_{2n} = 0$.

证明

知

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx dx - \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx - k\pi)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)(\cos kx - \cos(kx - k\pi))dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx dx - \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx - k\pi)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)(\sin kx - \sin(kx - k\pi))dx$$

当 k 为偶数, 知上两式皆为 0, 命题即证.

3. 设 a_n, b_n 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数 f 的 Fourier 系数. 证明: 平移函数 $f(x+h)$ 的 Fourier 系数是

$$\tilde{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh, \quad \tilde{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh.$$

证明

知

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx-kh)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\cos khdx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\sin khdx$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\sin kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx-kh)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\cos khdx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\sin khdx$$

令 $k=n$ 并比对即得结论.

4. 如果级数

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) < +\infty,$$

那么级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

必为某周期为 2π 的函数的 Fourier 级数.

证明

5. 计算极限 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 \ln x\cos^2\lambda xdx$.

解

知

$$\int_0^1 \ln x\cos^2\lambda xdx = \int_0^1 \ln x\frac{\cos 2\lambda x - 1}{2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \ln xdx = \frac{1}{2}, \quad \lambda\to+\infty$$

其中 $\int_0^1 \ln x\cos 2\lambda xdx$ 依 Riemann-Lebesgue 定理趋零.

6. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导, f' 可积且绝对可积. 如果 $f(-\pi)=f(\pi)$, 证明:

$$a_n = o(\frac{1}{n}), \quad b_n = o(\frac{1}{n}) \quad n\to\infty$$

10.2 Fourier 级数的收敛定理

10.2.1 定理整理

首先根据 [4] 来探讨 Dirichlet 核的引出:

考察 Fourier 级数的部分和:

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = S_n(x)$$

将

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

代入上式, 得:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)})dt$$

但其中:

$$D_n(u) := \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{e^{i(n+1)u} - e^{-inu}}{e^{iu}-1} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}$$

其中 $u=0$ 时另记 $D_n(u)=2n+1$, 这便得到了:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)dt \tag{10.1}$$

从而 $D_n(u)$ 便叫做 Dirichlet 核. 容易验证 $D_n(u)$ 是 $2\pi-$ 周期偶函数, 且:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)du=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(u)du=1$$

现在设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $2\pi-$ 周期函数 (或是从 $[-\pi,\pi]$ 周期延拓到 $\mathbb{R}$ 上的函数), 在(10.1)中令 $u=x-t$ 换元, 可得:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_n(t)dt \tag{10.2}$$

现在注意到 $D_n(t)$ 是偶函数, 从而有:

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0}f(x-t)D_n(t)dt+\int_0^{\pi}f(x-t)D_n(t)dt)\\&=\frac{1}{2\pi}(\int_0^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt+\int_0^{\pi}f(x-t)D_n(t)dt)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt\end{aligned}$$

如果 f 满足 Riemann-Lebesgue 引理的条件 (在区间上局部可积且绝对可积), 将上式写成:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt$$

其中 $\delta>0$, 注意到在 (δ,π) 上 $\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ 也满足 Riemann-Lebesgue 引理的条件, 从而上式中的第二个式子在 $n\to\infty$ 时趋零, 进而有:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt+o(1),\quad n\to\infty$$

进而由这个式子可知 Fourier 级数在一点的收敛性完全由函数在这一点的任意一个小邻域中的性质确定. 这便是局部化原理:

定理 10.2.1 (局部化原理) *设 f 和 g 是区间 $(-\pi,\pi)$ 上的实值或复值局部可积且 (至少在反常积分意义下) 绝对可积的函数. 如果 f 和 g 在点 $x_0\in(-\pi,\pi)$ 的一个小邻域中相等, 则它们的 Fourier 级数*

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx},\quad g(x)\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k(g)e^{ikx}$$

在 x_0 点同时收敛或发散, 而且当收敛时, 它们的和相等.

下面讨论 Fourier 级数在一点收敛的充分条件:

定义 10.2.1 (Dini 条件) *称定义在点 $x\in\mathbb{R}$ 的空心邻域上的函数 $f:\overset{\circ}{U}(x)\to\mathbb{C}$ 在点 x 处满足 Dini 条件, 如果:*

1. *在点 x 存在以下两个单侧极限:*

$$f(x_-)=\lim_{t\to 0^+}f(x-t),\quad f(x_+)=\lim_{t\to 0^+}f(x+t)$$

2. 对某个 $\varepsilon > 0$, 积分

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{[f(x-t)-f(x_-)]+[f(x+t)-f(x_+)]}{t}dt$$

绝对收敛.

定义 10.2.2 (单侧 Hölder 条件) 定义在点 x 的空心邻域 $\mathring{U}(x)$ 中的连续函数满足单侧 *Hölder* 条件[2], 如果其有单侧极限 $f(x_-), f(x_+)$, 且:

$$|f(x+t)-f(x_+)| \le Mt^{\alpha}$$
$$|f(x-t)-f(x_-)| \le Mt^{\alpha}$$

其中 $t>0, 0<\alpha\le 1$, M 是正常数.

容易知道单侧 Hölder 条件比 Dini 条件要更强些.

定理 10.2.2 (Fourier 级数在一点收敛的充分条件) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是 $2\pi-$ 周期函数, 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 如果函数 f 在点 $x\in\mathbb{R}$ 满足 *Dini* 条件, 则它的 *Fourier* 级数在点 x 收敛, 且:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx} = \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}$$

证明

注意到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)dt = \int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt = 1$$

知:

$$\begin{aligned}
&S_n(x) - \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt - \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}dt\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x_-)+f(x_+))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}((f(x+t)-f(x_+))+(f(x-t)-f(x_-)))\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})tdt
\end{aligned}$$

注意到 $t\to 0^+$ 时 $\sin\frac{1}{2}t\sim\frac{1}{2}t$, 而由 f 满足 Dini 条件知上述积分中 $\sin(n+\frac{1}{2})t$ 前的项, 在 $(0,\pi)$ 上满足 Riemann-Lebesgue 引理的条件, 从而当 $n\to\infty$, 知上述积分趋于零, 也即:

$$S_n(x)\to\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2},\quad n\to\infty$$

□

[2]这在 [1] 中称为 α 阶 Lipschitz 条件.

10.3 Fourier 级数的 Cesaro 求和

10.3.1 定理整理

远在(8.6.1), 我们就已经定义了 Cesaro 和, 不过在这里还是稍微修改一下以符合 Fourier 展开中的那个 $\frac{a_0}{2}$:

$$\sigma_n(x) := \frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}, \quad n=1,2,\cdots.$$

其可以看成周期函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的 Fourier 三角级数的相应部分和的算术平均.

现在记

$$\mathfrak{F}_n(t)=\frac{1}{n+1}(D_0(t)+D_1(t)+\cdots+D_n(t))$$

回顾之前得到的式子(10.2):

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_n(t)dt$$

则可知:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_0(t)dt+\cdots+\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_n(t)dt)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\mathfrak{F}_n(t)dt$$

再将 $D_n(t)$ 写开, 考虑:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_n(t)&=\frac{1}{n+1}(\frac{\sin(0+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}+\frac{\sin(1+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}+\cdots+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t})\\&=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sum_{k=0}^{n}\sin(k+\frac{1}{2})t=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sum_{k=0}^{n}[\cos kt-\cos(k+1)t]\\&=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}t}\cdot\sin^2\frac{n+1}{2}t\end{aligned}$$

进而称函数

$$\mathfrak{F}_n(t)=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{(n+1)\sin^2\frac{1}{2}t}$$

为 Fejér 核. 这个函数将会在后面补充泛函分析时再作进一步介绍, 彼时会用 $\delta-$ 型函数给出 Fejér 定理的一个更简洁的证明. 但在此还是先给出目前更容易接受的 Fejér 定理的一系列证明, 为此可以注意到 Cesaro 和如下的形式:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt$$

并且验证可得 Fejér 核的下述性质:

$$\int_0^{\pi}\mathfrak{F}_n(t)dt=1$$

定理 10.3.1 (Fejér) *设 $f\in\mathfrak{R}[-\pi,\pi]$, 如果 f 在 x_0 处有左右极限 $f(x_0-0), f(x_0+0)$, 那么它的 Fourier 级数在 x_0 处的 Cesaro 和为*

$$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)).$$

证明

记 $s=\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$, 要证

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=s.$$

知

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(x_0)-s &= \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt-\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)) \\
&= \frac{1}{2(n+1)\pi}(\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi})f(x_0-t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt-\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)) \\
&= \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt-\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)) \\
&= \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt-\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x_0+0)+f(x_0-0))\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt \\
&= \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt \\
&:= \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt
\end{aligned}
$$

其中

$$
\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s
$$

既然 f 在 x_0 处的左右极限都存在, 根据定义知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $t<\delta$ 时有

$$
|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\varepsilon,\quad |f(x_0-t)-f(x_0-0)|<\varepsilon
$$

进而将上式写成:

$$
\frac{1}{2(n+1)\pi}(\int_{0}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi})\varphi(t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt:=I_1+I_2
$$

这其中

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= |\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\delta}\varphi(t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt| \le \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\delta}|\varphi(t)|\cdot\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt \\
&< \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\delta}2\varepsilon\cdot\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt \le \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\pi}2\varepsilon\cdot\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt=2\varepsilon \\
|I_2| &= |\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{\delta}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt| \le \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\varphi(t)|\cdot\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{1}{2}t}dt \\
&\le \frac{1}{2(n+1)\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}\int_{\delta}^{\pi}|\varphi(t)|\sin^2\frac{n+1}{2}tdt \le \frac{1}{2(n+1)\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\delta}\int_{0}^{\pi}|\varphi(t)|dt \sim \frac{A}{n}
\end{aligned}
$$

其中 A 是一个有界常数, 从而可知 $n\to\infty$ 时:

$$
|\sigma_n(x_0)-s|\le|I_1|+|I_2|\to 0
$$

定理即证.

□

当 f 是周期为 2π 的连续函数时, 有下述更强的结果:

定理 10.3.2 (Fejér) *如果 f 是周期为 2π 的连续函数, 那么它的 Fourier 级数在 Cesaro 意义下在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 f.*

这个定理就留待泛函分析的部分, 用卷积的相关定理解决吧.

10.4 平方平均逼近

10.4.1 定理整理

定义 10.4.1 设 $f \in \mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$, 如果存在三角多项式序列 $\{T_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2dx=0$$

则称 $\{T_n\}$ 平方平均收敛于 f, 或者称 f 可用三角多项式平方平均逼近.

上面的定义中, $\mathfrak{R}_2[a,b]$ 代表所有在 $[a,b]$ 上可积且平方 (模方) 可积的函数的全体, 其构成一个赋范空间, 范数由内积

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

诱导而来:

$$\| f \|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

下面给出一般的 Fourier 系数与 Fourier 级数的定义:

定义 10.4.2 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $\mathfrak{R}_2[a,b]$ 中一个给定的正交系. 对任意的 $f\in\mathfrak{R}_2[a,b]$, 称

$$c_k=\frac{\langle f,\varphi_k\rangle}{\langle\varphi_k,\varphi_k\rangle}=\frac{\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^b\varphi^2(x)dx},\quad k=0,1,\cdots$$

为 f 关于正交系 $\{\varphi_k\}$ 的 *Fourier* 系数. 由此产生的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ 称为 f 关于正交系 $\{\varphi_k\}$ 的 *Fourier* 级数, 记为

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x).$$

当正交系 $\{\varphi_k\}$ 规范时, 可以讨论 Fourier 系数的极值性质, 也即问对于给定的 f 和正整数 n, 怎样的 φ 和多项式 T_n 可以使得范数

$$\| f-T_n \|=\sqrt{\int_a^b(f(x)-T_n(x))^2dx}$$

取最小值, 即平方平均误差最小? 设 $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k$, 有:

$$\begin{aligned}\| f-T_n \|^2&=\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)T_n(x)dx+\int_a^b T_n^2(x)dx\\&=\| f \|^2-2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_j(x)dx\\&=\| f \|^2-2\sum_{k=0}^{n}c_k\alpha_k+\sum_{k=0}^{n}\alpha^2=\| f \|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2+\sum_{k=0}^{n}(c_k-\alpha_k)^2\end{aligned}$$

上面的最后一个式子当且仅当 $c_k=\alpha_k(k=0,1,\cdots,n)$ 时取得最小值, 此时

$$\| f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k \|^2=\| f \|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2$$

从这个式子可以得到著名的 Bessel 不等式:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leq \| f \|^2$$

其中 $\{c_k\}$ 是 f 关于 $\{\varphi_k\}$ 的 Fourier 系数. 注意到上式对任意的 n 都是成立的, 这说明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2$ 收敛, 进而

$$\lim_{n\to\infty} c_k = 0$$

这便是 Fourier 系数的必要条件.

当 Bessel 不等式中的等号成立时, 即有如下的正交系完全性条件:

定理 10.4.1 *设 $\{\varphi_k\}$ 是 $\mathfrak{R}_2[a,b]$ 中有限或可数个非零的相互正交的规范向量, 那么下列诸条件彼此等价:*

1. *向量组 $\{\varphi_k\}$ 关于 $\mathfrak{R}_2[a,b]$ 是完全的;*

2. *对任函数 $f(x) \in \mathfrak{R}_2[a,b]$ 成立 Fourier 级数展开式:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

   其中 $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$, 这个等号是在平方平均的意义下成立的;

3. *对任何函数 $f(x) \in \mathfrak{R}_2[a,b]$ 成立 Parseval 等式:*

$$\| f \|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

上面的式子中 ∞ 在 $\{\varphi_k\}$ 仅有 n 个向量时可改为 n.

上述式子对一般的赋有内积的向量空间其实都成立, 对不规范的 $\{\varphi_k\}$ 也只需将上诸式的 Fourier 系数改为 $\frac{\langle f,\varphi_k\rangle}{\langle \varphi_k,\varphi_k\rangle}$, 但一个向量组的完全与否是等到实变函数论学习 $\mathfrak{L}^2$ 空间时再谈的, 这就留在补充部分再进行介绍了.

特别地, 上述定理在三角函数系中即为:

定理 10.4.2 (Fourier 三角级数的平均收敛性) *任意函数 $f \in \mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$[3] 的 Fourier 级数在平均意义下收敛于它自己, 即:*

$$f(x) \underset{\mathfrak{R}_2}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\sin kx,$$

并且成立 Parseval 等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)dx = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k(f)|^2$$

[3] 即从 $[-\pi,\pi]$ 到 $\mathbb{C}$ 的, 可积且平方 (模方) 可积的函数空间

10.5 Fourier 积分与 Fourier 变换

定义 10.5.1 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 对任意的实数 u, 定义

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos utdt$$
$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin utdt$$

这两个积分都是绝对收敛的. 称

$$\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)du$$

为 f 的 *Fourier* 积分, 记为

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)du$$

并记

$$S(\lambda, x) = \int_0^{\lambda}(a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)du$$

定理 10.5.1 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 则 $a(u), b(u)$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

证明

由 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积知对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{A}|f(t)|dt + \int_{A}^{+\infty}|f(t)|dt < \varepsilon$$

注意到 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 从而对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 当 $|x_1 - x_2| < \eta$ 时有

$$|\cos x_1 - \cos x_2| < \varepsilon$$

现取 $\delta = \frac{\eta}{A}$, 当 $|u_1 - u_2| < \delta, t \in [-A, A]$ 时, 由于

$$|u_1 t - u_2 t| < A\delta = \eta$$

故

$$|\cos u_1 t - \cos u_2 t| < \varepsilon$$

进而当 $|u_1 - u_2| < \delta$ 时有:

$$\begin{aligned}
|a(u_1) - a(u_2)| &= |\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u_1 tdt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u_2 tdt| \\
&= \frac{1}{\pi}|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos u_1 t - \cos u_2 t)dt| \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\cdot|\cos u_1 t - \cos u_2 t|dt \\
&= \frac{1}{\pi}(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{+\infty})|f(t)|\cdot|\cos u_1 t - \cos u_2 t|dt \\
&\le \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dx + \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)|\cdot|\cos u_1 t - \cos u_2 t|dt + \frac{2}{\pi}\int_{A}^{+\infty}|f(t)|dt \\
&< \frac{2}{\pi}\varepsilon + \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)|dt\cdot\varepsilon + \frac{2}{\pi}\varepsilon
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性即证命题, $b(u)$ 同理可证.

$\square$

根据这个定理可知 $S(\lambda,x)$ 对任意的 $\lambda\in(0,+\infty)$ 都是有意义的. 将 $a(u),b(u)$ 代入 $S(\lambda,x)$ 知

$$\begin{aligned}S(\lambda,x)&=\int_0^\lambda(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos utdt\cdot\cos ux+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin utdt\cdot\sin ux)du\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(ut-ux)dt\end{aligned}$$

注意我们的目的是研究 $\lambda\to+\infty$ 时的 $S(\lambda,x)$, 进而可以首先考虑将 $S(\lambda,x)$ 转化成形如 Fourier 级数部分和的 Dirichlet 核形式来进行研究, 也即下面的定理:

定理 10.5.2 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 那么对任意的 $\lambda>0$ 都有

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

证明

考虑证明 $S(\lambda,x)$ 的积分换序公式成立:

$$\int_0^\lambda du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(ut-ux)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_0^\lambda f(t)\cos(ut-ux)du$$

根据重积分中的 Fubini 定理, 对任意给定的正数 A 已经有:

$$\int_0^\lambda du\int_{-A}^{A}f(t)\cos(ut-ux)dt=\int_{-A}^{A}dt\int_0^\lambda f(t)\cos(ut-ux)du\tag{10.3}$$

根据 f 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积的定义知对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $B_0>0$, 使得当 $B>B_0$ 时有:

$$\int_{-\infty}^{-B}|f(t)|dt+\int_B^{+\infty}|f(t)|dt<\varepsilon$$

进而不妨就令 $A>B_0$, 此时:

$$\begin{aligned}&|\int_0^\lambda du\int_{-A}^{A}f(t)\cos(ut-ux)dt-\int_0^\lambda du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(ut-ux)dt|\\=&|\int_0^\lambda du\int_{-A}^{A}f(t)\cos(ut-ux)dt-\int_0^\lambda du(\int_{-\infty}^{-A}+\int_{-A}^{A}+\int_A^{+\infty})f(t)\cos(ut-ux)dt|\\=&|\int_0^\lambda du(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{+\infty})f(t)\cos(ut-ux)dt|\\\le&\int_0^\lambda|\int_{-\infty}^{-A}f(t)\cos(ut-ux)dt|du+\int_0^\lambda|\int_A^{+\infty}f(t)\cos(ut-ux)dt|du\\\le&\int_0^\lambda\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\cdot|\cos(ut-ux)|dtdu+\int_0^\lambda\int_A^{+\infty}|f(t)|\cdot|\cos(ut-ux)|dtdu\\\le&\int_0^\lambda\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dtdu+\int_0^\lambda\int_A^{+\infty}|f(t)|dtdu\le\lambda\varepsilon\end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^\lambda(\int_{-A}^{A}f(t)\cos(ut-ux)dt)du=\int_0^\lambda(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(ut-ux)dt)du$$

进而在(10.3)两端令 $A\to+\infty$ 即得换序公式. 这样一来:

$$\begin{aligned}
S(\lambda,x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_0^{\lambda}f(t)\cos(tu-tx)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(t-x)u}{t-x}|_0^{\lambda}\cdot f(t)dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\frac{\sin(t-x)\lambda}{t-x}dt=\frac{1}{\pi}(\int_{-\infty}^{0}+\int_0^{+\infty})f(t)\cdot\frac{\sin(t-x)\lambda}{t-x}dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{0}f(-u)\cdot\frac{\sin(-u-x)\lambda}{-u-x}d(-u)+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cdot\frac{\sin(t-x)\lambda}{t-x}dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{x}^{+\infty}f(x-t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-x}^{+\infty}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}dt
\end{aligned}$$

这便得到了 Fourier 积分的局部化定理:

定理 10.5.3 对任意给定的 $\delta>0$ 与 x, 有:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}dt+o(1)$$

这个定理的证明与 Fourier 级数的情况很类似, 同样是需要应用 Dini 条件, 在此就先省略了.

与 Fourier 级数的情况相同, Fourier 积分也有复形式, 这在 [4] 中记作:

$$\mathfrak{F}[f](\xi):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx$$

进而

$$f(x)\sim\int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}[f](\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

叫作函数 f 的 Fourier 积分.

回顾 Dini 条件的定义(10.2.1), 在 Fourier 积分的复形式下可以得到下述收敛性定理:

定理 10.5.4 (Fourier 积分在一点的收敛性定理) *设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 且在 $\mathbb{R}$ 的每个有限区间上分段连续. 如果其在点 $x\in\mathbb{R}$ 满足 Dini 条件, 则其 Fourier 积分在这一点收敛到 $\frac{1}{2}(f(x_-)+f(x_+))$, 即函数 f 在该点的左右极限之和的一半.*

证明[4]

在(10.5.3)中令 $\delta=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ 并令 $\lambda\to\infty$ 有:

$$\begin{aligned}
S(\lambda,x)&\sim\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}dt\sim\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}(f(x_+)+f(x_-))\frac{\sin\lambda t}{t}dt\\
&=\frac{1}{\pi}(f(x_+)+f(x_-))\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\frac{1}{\pi}(f(x_+)+f(x_-))\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\frac{\sin\lambda t}{\lambda t}d(\lambda t)\\
&=\frac{1}{\pi}(f(x_+)+f(x_-))\int_0^{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin u}{u}du=\frac{1}{\pi}(f(x_+)+f(x_-))\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}(f(x_+)+f(x_-)).
\end{aligned}$$

最后, 考虑规范化的 Fourier 变换:

$$\hat{f}(\xi):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx$$

[4] 当然这个还是需要问一下助教的

并记

$$\tilde{f}(\xi)L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx$$

[4] 中给出了结论:

$$\tilde{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f$$

从而 $\tilde{f}$ 又称作 Fourier 逆变换.

Chapter 11

补充：Lebesgue 理论初步

国内的数学分析教材大多没有系统地提及 Lebesgue 理论, 如有提及也仅仅是在 Lebesgue 可积性准则的部分作出了一点介绍, 这些内容一般放在实变函数的课程中. 但 [5] 将 Lebesgue 理论的初步内容和一些强大且有用的定理放在了其最后一章, [4] 中的一道习题也有所提及:

习题注意到下面的事实是有益的, 关于积分号下取极限有那样一些定理, 它们给出了远比定理 3(一致收敛则积分与极限号可交换的定理) 自由得多且保证这种运算合理的充分条件. 这些定理是 Lebesgue 积分理论的基本成果之一. 当函数按 Riemann 意义在区间 $[a,b]$ 上可积时, 即 $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, 这个函数也属于按 Lebesgue 意义可积的函数空间 $\mathfrak{L}[a,b]$, 并且 f 的 Riemann 和 Lebesgue 积分值 $(R)\int_a^b f(x)dx$ 与 $(L)\int_a^b f(x)dx$ 是相同的.

一般地, 空间 $\mathfrak{L}[a,b]$ 是空间 $\mathfrak{R}[a,b]$ 按积分度量的完备化 (更准确地说是 $\tilde{\mathfrak{R}}[a,b]$), 而积分 $L\int_a^b$ 是线性函数 $R\int_a^b$ 从 $\mathfrak{R}[a,b]$ 到 $\mathfrak{L}[a,b]$ 的延拓.

Lebesgue 控制收敛定理断言: 给定由函数 $f_n \in \mathfrak{L}[a,b]$ 构成的序列 $\{f_n|n \in \mathbb{N}\}$, 如果存在它的一个非负控制函数 $F \in \mathfrak{L}[a,b]$, 即对 $[a,b]$ 上几乎所有 x, 有 $|f_n(x)| \le |F(x)|$, 那么从对区间 $[a,b]$ 上几乎所有 x 点有 $f_n \to f$ 的收敛性可以得出 $f \in \mathfrak{L}[a,b]$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx$.

(a) 举例说明, 即使序列 $\{f_n|n \in \mathbb{N}\}$ 的所有函数在区间 $[a,b]$ 上有同一个常数界 M, 从条件 $f_n \in \mathfrak{R}[a,b], n \in \mathbb{N}$, 以及在区间 $[a,b]$ 上所有点有 $f_n \to f$, 也不能推出 $f \in \mathfrak{R}[a,b]$.

(b) 试根据所叙述的积分 $(R)\int_a^b$ 与 $(L)\int_a^b$ 的相互关系和 Lebesgue 定理证明: 如果在习题 (a) 的条件下, 还知道 $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, 那么 $(R)\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n(x)dx$, 这是定理 3 的本质性的加强.

(c) 可以再叙述一个适合于 Riemann 积分的 Lebesgue 单调收敛定理:

如果由函数 $f_n \in \mathfrak{R}[a,b]$ 构成的序列 $\{f_n|n \in \mathbb{N}\}$ 单调地收敛于零, 即 $0 \le f_{n+1} \le f_n$, 且对任意 $x \in [a,b]$, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $f_n(x) \to 0$, 那么, $(R)\int_a^b f_n(x)dx \to 0$.

试证这个断言, 在必要时可以利用下面有益的事实.

(d) 设 $f \in \mathfrak{R}[0,1], |f| \le M$ 且 $\int_0^1 f(x)dx \ge \alpha > 0$, 那么集合 $E = \{x \in [0,1]|f(x) \ge \frac{\alpha}{2}\}$ 包含有限多个长度之和不小于 $\frac{\alpha}{4M}$ 的区间.

这个结论的证明, 比如说, 可以利用闭区间 [0,1] 的那种划分 P 中的构成区间, 它所对应的 Darboux 下和 $s(f,P)$ 满足关系式 $0 \le \int_0^1 f(x)dx - s(f,P) \le \frac{\alpha}{4}$.

历史上, 从 Riemann 积分到 Lebesgue 积分, 中间也有无数的大家讨论这其中的可积性问题. 前面所介绍的 Lebesgue 可积性准则便是这一时代问题的终结. 引用 [17] 的一句话来说: "从所发生的

事情来看, 带有几分讽刺意味的事实是, 彻底了解了 Riemann 积分的人正是使它不久就变得陈旧的人: 这就是 Lebesgue.” Lebesgue 理论极大的优化了 Riemann 积分中可能遇见的各种问题, 这一章就来讨论其中核心的两个问题: 其一是上面的习题所提到的, 简化积分号下取极限条件的 Lebesgue 控制收敛定理, 而其二是在讨论含参反常积分时让诸多初学者很恼火但又不得不着手绕弯路研究的东西——反常积分号的换序条件, 也即这一章将要介绍的 Tonelli 定理与 Fubini 定理.

诸多实变函数教材同样把 $\mathscr{L}^p$ 空间选入了 Lebesgue 理论中. $\mathscr{L}^p$ 空间本身是讨论诸多收敛性的一块基石, 在之后的 Fourier 分析中会大量涉及, 故本章的最后一节也会来讨论这一部分知识.

11.1 Lebesgue 理论的预备知识: 集函数和测度的延拓

本节内容主要选自 [5].

11.1.1 集函数

约定:

$$A - B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

定义 11.1.1 (环) *对集合族 $\mathscr{R}$, 当对任意的 $A \in \mathscr{R}, B \in \mathscr{R}$ 有:*

$$A \cup B \in \mathscr{R}, \quad A - B \in \mathscr{R}$$

那么就称 $\mathscr{R}$ 是一个环. 而若环 $\mathscr{R}$ 满足对任意的 $A_n \in \mathscr{R}(n = 1, 2, \cdots)$ 有:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$$

那么就称环 $\mathscr{R}$ 为一个 σ 环.

对于环 $\mathscr{R}$, 注意到下面逻辑表达式的等价性:

$$\begin{aligned}
x \in A \cap B &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin (A - B)) \\
&\Leftrightarrow x \in (A - (A - B))
\end{aligned}$$

从而 $A \cap B = A - (A - B)$. 因为 $A - B \in \mathscr{R}$, 按环的定义 $A - (A - B)$ 当然也应该在 $\mathscr{R}$ 中, 故 $A \cap B \in \mathscr{R}$. 同样对 σ 环 $\mathscr{R}$ 也需要注意到下面的逻辑表达式:

$$\begin{aligned}
x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow &(x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \cdots \wedge (x \in A_n) \wedge \cdots \\
\Leftrightarrow &(x \in A_1) \wedge (x \notin A_1 \vee x \in A_2) \wedge \cdots \wedge (x \notin A_1 \vee x \in A_n) \wedge \cdots \\
\Leftrightarrow &(x \in A_1) \wedge (\neg(x \notin (A_1 - A_2))) \wedge \cdots \wedge (\neg(x \notin (A_1 - A_n))) \wedge \cdots \\
\Leftrightarrow &(x \in A_1) \wedge \neg((x \in (A_1 - A_2)) \vee \cdots \vee (x \in (A_1 - A_n)) \vee \cdots) \\
\Leftrightarrow &(x \in A_1) \wedge \neg(x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n)) \\
\Leftrightarrow &(x \in A_1) \wedge (x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n)) \Leftrightarrow x \in (A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n))
\end{aligned}$$

从而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n)$. 按环的定义, 首先有 $\forall n \in \mathbb{N}(A_1 - A_n \in \mathscr{R})$, 其次因为 $\mathscr{R}$ 是 σ 环, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n) \in \mathscr{R}$. 最后, 因为 $\mathscr{R}$ 是环, 所以 $A_1 - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n) \in \mathscr{R}$. 这说明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$.

定义 11.1.2 (集函数) *如果 ϕ 对所有的 $A \in \mathscr{R}$ 都对应了一个扩张实数系 (即 $\mathbb{R}$ 加上 $+\infty, -\infty$ 两个元素) 中的元素 $\phi(A)$, 就称 ϕ 是一个集函数.*

当

$$A \cap B = \oslash \Rightarrow \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B)$$

就称 ϕ 是**可加的**.

当

$$\forall i \neq j(A_i \cap A_j = \oslash) \Rightarrow \phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$$

就称 ϕ 是**可数可加的**.

我们一般都假设 ϕ 的值域不同时包含 $+\infty$ 和 $-\infty$, 因为如果这样, 取 $\phi(A) = +\infty, \phi(B) = -\infty$, 那关于它的可加性, 式子右端的 $\phi(A) + \phi(B)$ 就没有什么意义了. 同样, 我们一般也不考虑那些只能取到 $+\infty$ 或者 $-\infty$ 的集函数.

关于可数可加性, 式子左端的值不随 A_n 排列方式的变化而变化是一件很有趣的事情, 因为这样一来式子右端作为一个无穷级数, 无论它所包含的项怎么排列, 它的值都不会变化, 这正说明如果这个级数是收敛的, 那它必绝对收敛, 而如果这个级数不收敛, 它就只能为 $+\infty$ 或者 $-\infty$.

如果 ϕ 是可加的, 那么 ϕ 有如下的几个性质:

1. $\phi(\oslash) = 0$;

   证明　取 $A = B = \oslash$, 有 $\phi(A \cup B) = \phi(\oslash) = \phi(\oslash) + \phi(\oslash)$, 从而命题即证.

2. 当 $\forall i \neq j(A_i \neq A_j)$ 时, 有 $\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n)$;

   证明　用归纳法, $n = 2$ 的情形即为 ϕ 的可加性, 若 $n - 1$ 时式子成立, 则 n 时有:

   $$\begin{aligned}\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n) &= \phi((A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n) \\ &= \phi(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) + \phi(A_n) = \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_{n-1}) + \phi(A_n)\end{aligned}$$

   从而命题得证.

3. $\phi(A_1 \cup A_2) + \phi(A_1 \cap A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2)$;

   证明　对上式左端, 注意到

   $$A_1 \cup A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 - A_1)$$

   而上式右端的三个集合两两不交, 从而有:

   $$\begin{aligned}\phi(A_1 \cup A_2) + \phi(A_1 \cap A_2) &= \phi((A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 - A_1)) + \phi(A_1 \cap A_2) \\ &= \phi(A_1 - A_2) + \phi(A_2 - A_1) + 2\phi(A_1 \cap A_2)\end{aligned}$$

   而对上式右端, 注意到

   $$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2), \quad A_2 = (A_2 - A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$$

   而上面的两个分解都是不交的, 从而有:

   $$\begin{aligned}\phi(A_1) + \phi(A_2) &= \phi((A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2)) + \phi((A_2 - A_1) \cup (A_1 \cap A_2)) \\ &= \phi(A_1 - A_2) + \phi(A_1 \cap A_2) + \phi(A_2 - A_1) + \phi(A_1 \cap A_2)\end{aligned}$$

   比对即知命题得证.

4. 若 $\forall A \in \mathscr{R}(\phi(A) \geq 0)$, 且 $A_1 \subset A_2$, 则 $\phi(A_1) \leq \phi(A_2)$.
   证明　注意到 $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$, 而显然 $A_1 \cap (A_2 - A_1) = \oslash$, 从而根据可加性有:
   $$\phi(A_2) = \phi(A_1 \cup (A_2 - A_1)) = \phi(A_1) + \phi(A_2 - A_1)$$
   但因为 $A_2 - A_1 \in \mathscr{R}$, 根据条件知 $\phi(A_2 - A_1) \geq 0$, 从而题式得证.
   届于这条性质的存在, 非负可加集函数通常又被称作是单调的.
5. 若 $B \subset A, |\phi(B)| < +\infty$, 则 $\phi(A - B) = \phi(A) - \phi(B)$.
   证明　因为 $A = (A - B) \cup B$, 而 $(A - B) \cap B = \oslash$, 故根据可加性有:
   $$\phi(A) = \phi((A - B) \cup B) = \phi(A - B) + \phi(B)$$
   命题即证.

定理 11.1.1 设 ϕ 是环 $\mathscr{R}$ 上的一个可数可加的集函数, 并设 $A_n \in \mathscr{R}(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots, A \in \mathscr{R}$, 其中
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
则当 $n \to \infty$ 时有:
$$\phi(A_n) \to \phi(A)$$

形象起见, 可以画一个示意图:

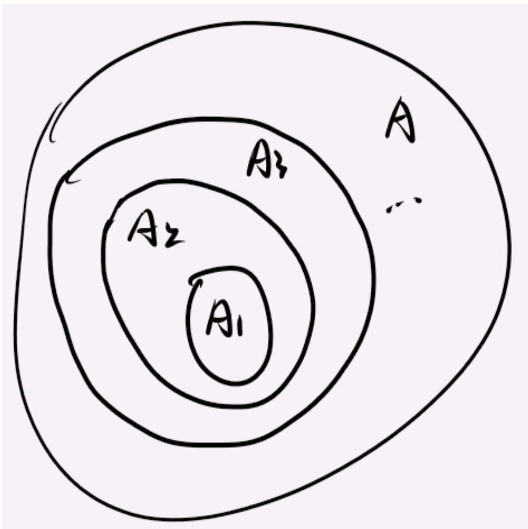


图 11.1: A_n 是递增列

证明
取 $B_1 = A_1$, 并取:
$$B_n = A_n - A_{n-1} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$
则知 $\forall i \neq j(B_i \cap B_j = \oslash), A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k, A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. 既然 ϕ 可数可加, 有:
$$\phi(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi(B_i), \quad \phi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(B_i)$$
对 n 取极限即得欲证结果.

$\square$

11.1.2 Lebesgue 测度的构造

定义 11.1.3 **(p 维区间)** 设 $\mathbb{R}^p$ 为 p 维欧氏空间, 当我们说 $\mathbb{R}^p$ 中的区间时, 我们指的是满足

$$a_i \le x_i \le b_i \quad (i=1,\cdots,p)$$

的点 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_p)$ 的集合. 若将上述关系式中部分或全部的 $\le$ 换成 $<$, 所得到的集合我们也称为区间.

注意到上述定义中 $a_i=b_i$ 的情况并没有被排除掉. 特别地, 空集也是区间.

如果 A 是有限个区间的并, 就称它是一个**基本集**[1].

如果 I 是一个区间, 不管定义中的不等号严不严格, 我们都定义:

$$m(I)=\prod_{i=1}^{p}(b_i-a_i)$$

如果 $A=I_1\cup\cdots\cup I_n$, 且这些区间两两不交, 就取

$$m(A)=m(I_1)+\cdots+m(I_n)$$

记 $\mathscr{E}$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的基本子集族, 注意到 $\mathscr{E}$ 有如下性质:

1. $\mathscr{E}$ 是环, 但不是 σ 环.

   证明　届于有限个区间的并做有限次并运算和差运算依旧能写成有限个区间的并, $\mathscr{E}$ 自然是环. 但是若 $\mathscr{E}$ 是 σ 环, 这意味着 $\forall A_n\in\mathscr{R}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{R})$. 而不妨就取 $A_n=\{n\}$, 知 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{n\}$ 显然不是基本集, 从而其不在 $\mathscr{E}$ 内, 命题得证.

2. 若 $A\in\mathscr{E}$, 则 A 能写成有限个区间的不交并.

   证明　这里仅讨论一维情况: 记 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}[a_k,a_k']$. 若区间列 $\{[a_k,a_k']\}$ 中存在相交区间 $[a_i,a_i']$ 和 $[a_j,a_j']$, 不失一般性就设 $a_i\le a_j\le a_i'\le a_j'$, 则取区间 $[a_i,a_j)$ 和 $[a_j,a_j']$ 分别替代原先的区间. 知这两个新区间是不交的, 对区间列中所有这样的区间作如是替代即可. 对那些半开半闭区间和开区间的分解及更高维情况, 这样另分区间的方法都是类似的.

3. 若 $A\in\mathscr{E}$, 则 $m(A)$ 良定义. 也就是说, 如果 A 有两个不同的不交并分解, 则这两个分解能导出相同的 $m(A)$ 值.

   证明　记:

   $$A=\bigcup_{k=1}^{n}I_k=\bigcup_{p=1}^{m}J_p$$

   其中 $\forall i\ne j(I_i\cap I_j=\oslash,J_i\cap J_j=\oslash)$. 上述等式说明了下面两个集合上的关系:

   $$\bigcup_{k=1}^{n}I_k\subset\bigcup_{p=1}^{m}J_p,\quad \bigcup_{p=1}^{m}J_p\subset\bigcup_{k=1}^{n}I_k$$

   首先考虑分解式中的区间统一由开区间或闭区间构成, 不失一般性记 $I_k=[a_{k1},a_{k1}']\times\cdots\times[a_{kp},a_{kp}'],J_k=[b_{k1},b_{k1}']\times\cdots\times[b_{kp},b_{kp}']$. 从而上述第一个式子说明在第 $i(i=1,\cdots,p)$ 个维度上, 有:

   $$\bigcup_{k=1}^{n}[a_{ki},a_{ki}']\subset\bigcup_{k=1}^{m}[b_{ki},b_{ki}']$$

[1] 有一个事实 Rudin 中并未强调, 但在之后的证明中会起到关键作用: 基本集是有界的.

因为 $\{J_p\}$ 的不交性与区间的连通性, 上式说明对每一个单独的 $[a_{ki}, a'_{ki}]$, 它只能含于某个 $[b_{ki}, b'_{ki}]$, 从而 $a'_{ki} - a_{ki} \le b'_{ki} - b_{ki}$, 进而有:

$$m(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{p}(a'_{ki} - a_{ki}) \le \sum_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{p}(b'_{ki} - b_{ki}) = m(\bigcup_{k=1}^{m} J_k)$$

同理可证 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{m} J_k) \le m(\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k)$, 进而这两者相等, 此种情况下命题得证.
若上述式子中出现了半开半闭区间, 便出现了 $[a_{ki}, a'_{ki}] \subset [b_{ki}, b'_{ki}) \cup [b_{si}, b'_{si}], b'_{ki} = b_{si}$ 的情况, 此时

$$a'_{ki} - a_{ki} \le (b'_{ki} - b_{ki}) + (b'_{si} - b_{si})$$

但在 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k)$ 的表达式中, 这无非是把单个的 $m(I_k)$ 拆成了两部分:

$$\begin{aligned} m(I_k) &= (a'_{k1} - a_{k1})\cdots(a'_{ki} - a_{ki})\cdots(a'_{kp} - a_{kp}) \\ &\le (a'_{k1} - a_{k1})\cdots(b'_{ki} - b_{ki} + b'_{si} - b_{si})\cdots(a'_{kp} - a_{kp}) \\ &= (a'_{k1} - a_{k1})\cdots(b'_{ki} - b_{ki})\cdots(a'_{kp} - a_{kp}) + (a'_{k1} - a_{k1})\cdots(b'_{si} - b_{si})\cdots(a'_{kp} - a_{kp}) \end{aligned}$$

而上述式子中除 $b'_{ki} - b_{ki}$ 和 $b'_{si} - b_{si}$ 的部分依旧可以继续放缩, 最后依旧能够得到 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{m} J_k)$ 的表达式.
综上, 命题即证.

4. m 在 $\mathscr{E}$ 上有可加性.
证明　由性质 3 即得.

注意到当 $p = 1, 2, 3$, m 分别对应长度, 面积和体积.

定义 11.1.4 (正则性) 设非负可加集函数 ϕ 定义在 $\mathscr{E}$ 上, 若对任意的 $A \in \mathscr{E}$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $F \in \mathscr{E}, G \in \mathscr{E}$ 满足 F 是闭集, G 是开集, $F \subset A \subset G$, 且

$$\phi(G) - \varepsilon \le \phi(A) \le \phi(F) + \varepsilon$$

那么就称 ϕ 是正则的.

例 11.1.1 *(a)* 集函数 m 是正则的.
(b) 取 $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^1$, 并取 α 是对全体实数有定义的单调递增函数. 设:

$$\begin{aligned} \mu([a,b)) &= \alpha(b-0) - \alpha(a-0), \\ \mu([a,b]) &= \alpha(b+0) - \alpha(a-0), \\ \mu((a,b]) &= \alpha(b+0) - \alpha(a+0), \\ \mu((a,b)) &= \alpha(b-0) - \alpha(a+0). \end{aligned}$$

这里 $[a,b)$ 是集合 $a \le x < b$, 其余类似. 鉴于 α 可能不连续, 区间的开闭情况必须区分开来. 如果 μ 对基本集有定义, 那么 μ 在 $\mathscr{E}$ 上是正则的.

证明
这里只证明 $[a,b)$ 的情况, 其余情况类似.

按照正则性的定义, 取 $F=(a,b), A=[a,b), G=[a,b]$, 知:

$$\mu(F)=\alpha(b-0)-\alpha(a+0)$$
$$\mu(A)=\alpha(b-0)-\alpha(a-0)$$
$$\mu(G)=\alpha(b+0)-\alpha(a-0)$$

从而有:

$$\mu(F)-\mu(A)=\alpha(a-0)-\alpha(a+0)$$

但因为 α 是单增的, 必然有 $\alpha(a-0)-\alpha(a+0)\leq 0$, 从而对任意一个正数 ε 都有 $\alpha(a-0)-\alpha(a+0)<\varepsilon$. 同理有:

$$\mu(A)-\mu(G)=\alpha(b-0)-\alpha(b+0)$$

可以得到对任意的 $\varepsilon>0$ 都有 $\alpha(b-0)-\alpha(b+0)\leq 0<\varepsilon$. 从而正则性定义中的不等式成立, 命题得证.

下一步, 我们来说明每个 $\mathscr{E}$ 上的正则集函数都能扩张成某个包含 $\mathscr{E}$ 的 σ 环上的可数可加集函数.

定义 11.1.5 (外测度) *设 μ 是 $\mathscr{E}$ 上的可加、正则、非负且有限的集函数. 考虑用可数个开基本集 A_k 覆盖 $\mathbb{R}^p$ 的任意子集 E:*

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

为了叙述清楚, 记这样的开覆盖 $\{A_k\}$ 都在族 $\mathfrak{A}$ 中, 定义

$$\mu^*(E)=\inf_{\{A_k\}\in\mathfrak{A}}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

根据记号可以看出下确界是在 E 的全体基本集开覆盖中取的[2]. 称 $\mu^*(E)$ 是 E 对应于 μ 的外测度.

$\mu^*(E)$ 有如下两条基本的性质:

1. $\mu^*(E)\geq 0$.
   证明　这条性质因 μ 非负而成立.

2. 若 $E_1\subset E_2$, 则 $\mu^*(E_1)\leq\mu^*(E_2)$.
   证明　取 E_2 的任意可数基本集开覆盖 $\{A_{k2}\}\in\mathfrak{A}_2$, 知 $\{A_{k2}\}$ 同样在 E_1 的可数基本集开覆盖族 $\mathfrak{A}_1$ 中, 从而 $\mathfrak{A}_2\subset\mathfrak{A}_1$, 进而

$$\mu^*(E_1)=\inf_{\{A_k\}\in\mathfrak{A}_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\leq\inf_{\{A_k\}\in\mathfrak{A}_2}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu^*(E_2)$$

   命题即证.

定理 11.1.2 *(a) 对任意的 $A\in\mathscr{E}$, $\mu^*(A)=\mu(A)$.*

(b) 若 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 则

$$\mu^*(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$$

*注意到 (a) 意味着 μ^* 是 μ 从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathbb{R}^p$ 的全体子集族的延拓. (b) 被称为*次可加性*.*

---

[2]在 Rudin 中这里被表述成可数基本集开覆盖, 但事实上总可以在第 n 项后取 $A_{n+1}=\cdots=\varnothing$ 来达到有限基本集开覆盖的效果, 故这里对定义作出了表述上的修改.

证明

(a) 首先说明 μ 有次可加性, 也即说明下列式子:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall A_i(i=1,2,\cdots,n)(\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i))$$

这是因为如若取 $B_1 = A_1, B_i = A_i - A_{i-1}, i = 2,\cdots,n$, 由 μ 的可加性知:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{n} \mu(A_i - A_{i-1})$$

但 $A_i - A_{i-1} \subset A_i(i = 2,\cdots,n)$, 这说明

$$\mu(A_1) + \sum_{i=2}^{n} \mu(A_i - A_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

从而对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} A_i$$

而极限过程是保非严格不等号的, 这说明在广义实数系中, 有:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} A_i$$

其次证明对任意的开基本集 G, 有 $\mu^*(G) = \mu(G)$. 记 G 的全体基本集开覆盖族为 $\mathfrak{G}$. 因为

$$\forall \{A_n\} \in \mathfrak{G}(G \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n)$$

根据非负可加集函数的性质 4(单调性) 与上面已经推知的次可加性即得:

$$\forall \{A_n\} \in \mathfrak{G}(\mu(G) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n))$$

从而 $\mu(G)$ 是 $\{\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) | \{A_n\} \in \mathfrak{G}\}$ 的一个下界, 从而根据下确界的定义:

$$\mu(G) \leq \mu^*(G) = \inf_{\{A_k\} \in \mathfrak{G}} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n$$

但既然 G 本身是开基本集, 知 $G \in \mathfrak{G}$, 从而

$$\mu^*(G) = \inf_{\{A_n\} \in \mathfrak{G}} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \leq \mu(G)$$

根据这两个不等式即可推知 $\mu(G) = \mu^*(G)$.

最后, 对任意的 $A \in \mathscr{E}$ 证明这件事. 任取 $A \in \mathscr{E}, \varepsilon > 0$. 届于 μ 是正则的, 知对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在开集 $G \in \mathscr{E}$ 使得

$$A \subset G, \quad \mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

既然 $A \subset G$, 根据 μ^* 的性质 2 与上面已经推知的 $\mu(G) = \mu^*(G)$ 知

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(G) = \mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

既然 ε 是任意的, 这便有:

$$\mu^*(A) \leq \mu(A)$$

根据 μ^* 作为下确界的定义, 由下确界的性质知对任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在一列开基本集覆盖 $\{A_n\} \in \mathfrak{G}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

但根据 μ 的正则性, 知存在闭集 $F \in \mathscr{E}$ 满足:

$$F \subset A, \quad \mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$$

但既然 $F \subset \mathscr{E}$, 知 F 有界, 从而 F 作为有界闭集是紧集, 这说明 F 能被有限个开基本集覆盖. 届于 $\{A_n\}$ 覆盖 A, 而 $F \subset A$, 知 $\{A_n\}$ 必覆盖 F, 从而可从中选取有限个开覆盖满足:

$$F \subset A_1 \cup \cdots \cup A_N$$

从而:

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_N) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{N} A_i + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{+\infty} A_i + \varepsilon \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

届于 ε 是任意的, 这便有

$$\mu(A) \leq \mu^*(A)$$

从而综上, 有:

$$\mu(A) = \mu^*(A)$$

□

(b)(次可加性) 取 $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, 不妨设 $\forall n \in \mathbb{N}(\mu^*(E) < +\infty)$. 给定 $\varepsilon > 0$, 对每个 E_n 取其开基本集覆盖 $\{A_{nk}\}(k = 1, 2, \cdots)$, 出于 $\mu^*(E)$ 作为下确界的性质, 知总能找到这样的 $\{A_{nk}\}(k = 1, 2, \cdots)$ 使得:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

但介于 ε 是任意的, 且 $\{A_{nk}\}$ 的存在性出于下确界的性质可以得到保证, 这里不妨针对每个 E_n 选取特定的 ε_n, 得到特定的 $\{A_{nk}\}$ 以便研究. 这里取 $\varepsilon_n = 2^{-n}\varepsilon$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon$$

知 $\{A_{nk}\}(n, k = 1, 2, \cdots)$ 构成 E 的一个开基本集覆盖, 从而:

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

又因为 ε 是任意的, 故:

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n)$$

而当 $\exists n \in \mathbb{N}(\mu^*(E_n) = +\infty)$, 知上式显然成立, 从而定理证毕.

□

定义 11.1.6 对任意的 $A \subset \mathbb{R}^p, B \subset \mathbb{R}^p$, 定义:

$$S(A,B) = (A-B) \cup (B-A)$$
$$d(A,B) = \mu^*(S(A,B))$$

当

$$\lim_{n\to\infty} d(A,A_n) = 0$$

时, 记 $A_n \to A$.

如果存在一列基本集 $\{A_n\}$ 使得 $A_n \to A$, 就称 A 是**有限** μ **可测**的, 并记 $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.
如果 A 是可数个有限 μ 可测集的并, 就称 A 是 μ **可测**的, 并记 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$.
$S(A,B)$ 称为 A 和 B 的"对称差". 可以注意到 $d(A,B)$ 正是一个距离函数. 这是因为:

- 正定性 既然 μ^* 非负, 知 $d(A,B) \geq 0$. 同时显然有 $S(A,A) = \oslash \Rightarrow d(A,A) = \mu^*(\oslash) = 0$.
- 对称性 显然 $S(A,B) = S(B,A)$, 从而 $d(A,B) = \mu^*(S(A,B)) = \mu^*(S(B,A)) = d(B,A)$.
- 三角不等式 首先说明 $S(A,B) \cup S(B,C) \supset S(A,C)$, 这可以通过 Venn 图理解:

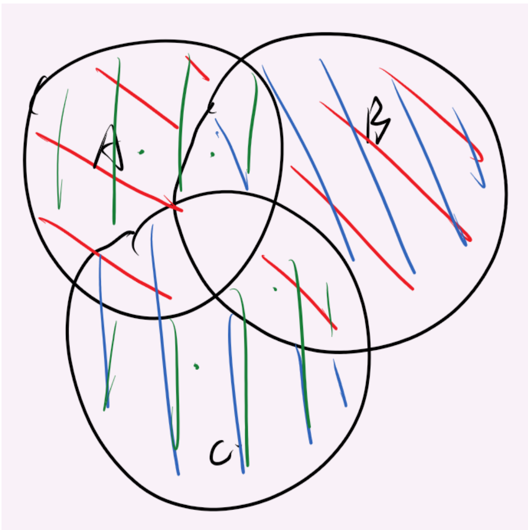


图 11.2: 红, 蓝, 绿分别代表 $S(A,B), S(B,C), S(A,C)$

从而根据 μ^* 的次可加性和单调性:

$$d(A,B) + d(B,C) = \mu^*(S(A,B)) + \mu^*(S(B,C)) \geq \mu^*(S(A,B) \cup S(B,C)) \geq \mu^*(S(A,C)) = d(A,C)$$

下面的定理就会带我们得到之前所希望的 μ 的延拓.

定理 11.1.3 $\mathfrak{M}(\mu)$ 是 σ-环, μ^* 在 $\mathfrak{M}(\mu)$ 上可数可加.

在证明这条定理之前, 先阐明几条 $S(A,B)$ 和 $d(A,B)$ 的性质:

1. $S(A,B) = S(B,A), \quad S(A,A) = 0$. 这根据并运算的交换律即得.
2. $S(A,B) \subset S(A,C) \cup S(C,B)$. 这正是上面证明三角不等式时先证明的关系式.

3. $S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$.

   证明

   任取 $x \in S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$, 先设 $x \in (A_1 \cup A_2 - B_1 \cup B_2)$, 有: 也即 $x \in A_1 \cup A_2 \wedge x \notin B_1 \cup B_2$. 进而 $x \in (A_1 - B_1) \wedge x \in (A_2 - B_2) \Rightarrow x \in (A_1 - B_1)$

$$\begin{aligned} x \in (A_1 \cup A_2 - B_1 \cup B_2) &\Rightarrow x \in (A_1 \cup A_2) \wedge x \notin (B_1 \cup B_2) \\ &\Rightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2) \wedge (x \notin B_1 \wedge x \notin B_2) \\ &\Rightarrow (x \in A_1 \wedge x \notin B_1) \wedge (x \in A_2 \wedge x \notin B_2) \\ &\Rightarrow x \in (A_1 - B_1) \cap (A_2 - B_2) \Rightarrow x \in (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2) \end{aligned}$$

   另一方面, 仿照上面的过程可以推出

$$x \in (B_1 \cup B_2 - A_1 \cup A_2) \Rightarrow x \in (B_1 - A_1) \cup (B_2 - A_2)$$

   这说明

$$S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \subset ((A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2)) \cup ((B_1 - A_1) \cup (B_2 - A_2)) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$$

   命题即证.

4. $S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$. 这在上一条性质中对 $A_i, B_i (i = 1, 2)$ 取补集即得.

5. $S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$. 这是因为 $A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c$, 其中 A^c 表示 A 的补集.

这些关于 $S(A, B)$ 的性质彰显着如下关于 $d(A, B)$ 的性质:

1. $d(A, B) = d(B, A), \quad d(A, A) = 0$. 这根据 $S(A, B)$ 的性质 1 和 μ^* 的良定义性即得.
2. $d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B)$.
3. $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \le d(A_1, B_1) + d(A_1, B_2)$.
4. $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.
5. $d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.

后 4 条性质都可以用 $S(A, B)$ 相同编号的性质和 μ^* 的性质 2 结合来推出. 这其中性质 1 和性质 2 说明 $d(A, B)$ 是一个测度 (如果忽略 $d(A, B) \not\Rightarrow A = B$ 的话). 特别地, 如果 $\mu = m$, A 是一个可数集, 而 $B = \oslash$, 有:

$$d(A, B) = m^*(A) = 0$$

这是因为既然 A 是可数集, 记 A 中的第 n 个点为 a_n, 并记 $I_n = (a - n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}), \varepsilon > 0$, 注意到 $m(I_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < 2^{-n}\varepsilon$, 从而有:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = \varepsilon$$

进而

$$m^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = \varepsilon$$

这说明 $m^*(A)$ 小于任意给定的正数, 也即 $m^*(A)=0$. 现在如果定义当 $d(A,B)=0$ 时 A,B 等价(等价关系的合理性容易验证), 我们就将 $\mathbb{R}^p$ 中的子集划分成了一些等价类, 而 $d(A,B)$ 是这个等价类的集合中的一个度量, 进而 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 可以看成 $\mathscr{E}$ 的闭包. 这个说明对整个证明并没有什么必要, 但是它可以用来解释证明背后的一些思路.

我们还需要一个 $d(A,B)$ 的性质——当 $\mu^*(A),\mu^*(B)$ 中至少有一个有限时, 有:

$$|\mu^*(A)-\mu^*(B)|\leq d(A,B)$$

这是因为如果 $0\leq\mu^*(B)\leq\mu^*(A)$, 则有

$$d(A,\oslash)\leq d(A,B)+d(B,\oslash)$$

这便是

$$\mu^*(A)\leq d(A,B)+\mu^*(B)$$

移项即得欲证式, 另一种情况同理.

现在可以来证明定理 10.7.3 了:

证明

设 $A\in\mathfrak{M}_F(\mu),B\in\mathfrak{M}_F(\mu)$, 根据 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 的定义, 可以在 $\mathscr{E}$ 中选择 $\{A_n\},\{B_n\}$ 使得 $A_n\to A,B_n\to B,n\to\infty$. 从而根据 $d(A,B)$ 的性质有:

1. $A_n\cup B_n\to A\cup B$,
2. $A_n\cap B_n\to A\cap B$,
3. $A_n-B_n\to A-B$,
4. $\mu^*(A_n)\to\mu^*(A)$

同时, 因为 $d(A_n,A)\to 0$, 故 $\mu^*(A)<+\infty$. 由上面断言中的 1,3 知 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 是环. 根据可加集函数的性质 3, 有

$$\mu(A_n)+\mu(B_n)=\mu(A_n\cup B_n)+\mu(A_n\cap B_n)$$

令 $n\to\infty$, 由断言 4 和定理 10.7.2 的 (a), 有:

$$\mu^*(A)+\mu^*(B)=\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B)$$

如果 $A\cap B=\oslash$, 则知 $\mu^*(A\cap B)=0$. 这说明 μ^* 在 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 上可加.

现在令 $A\in\mathfrak{M}(\mu)$, 知 A 能被表示成一列 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 中的集合的不交并. 这是因为根据 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 的定义, 将 A 写成 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A'_n$, 其中 $A'_n\in\mathfrak{M}_F(\mu),A_1=A'_1$, 且记

$$A_n=(A'_1\cup\cdots\cup A'_n)-(A'_1\cup\cdots\cup A'_{n-1}),\quad n=2,3,4,\cdots$$

则

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

就是所希望的不交并表达式. 由定理 10.7.2 的 (b) 知:

$$\mu^*(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$$

但与此同时, 对任意的 n 而言, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \subset A$, 进而由 μ^* 在 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 上的可加性有:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

根据极限的保不等号性即知

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

进而可得

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \tag{11.1}$$

设 $\mu^*(A)$ 有限, 记 $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, 则上式表明

$$d(A, B_n) = \mu^*(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \to 0, \quad n \to \infty$$

从而知 $B_n \to A, n \to \infty$. 又因为 $B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, 知 $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

到此, 便说明了 $(A \in \mathfrak{M}(\mu) \wedge \mu^*(A) < +\infty) \Rightarrow A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. 现在可以说明 μ^* 在 $\mathfrak{M}(\mu)$ 上可数可加了. 这是因为如果

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

其中 $\{A_n\}$ 是 $\mathfrak{M}(\mu)$ 中的一列不交集. 由 (10. 1) 式知道如果 $\mu^*(A_n) < +\infty$ 对任意的 n 都成立, 那么可数可加性已经得证. 而如果这其中有一个是 $+\infty$, 要证的结论便成为了 $+\infty = +\infty$, 归于平凡了.

最后, 说明 $\mathfrak{M}(\mu)$ 是 $\sigma-$ 环. 如果 $A_n \in \mathfrak{M}(\mu), n = 1, 2, 3, \cdots$, 根据可数个可数集之并仍为可数集可知 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$. 进而可设

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}(\mu), \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}(\mu)$$

这其中 $A_n, B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. 可知:

$$A_n \cap B = A_n \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

进而 $A_n \cap B \in \mathfrak{M}(\mu)$, 同时根据

$$\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n) < +\infty$$

可知 $A_n \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. 进而 $A_n - B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, 且由 $A - B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n - B)$ 可知 $A - B \in \mathfrak{M}(\mu)$. 从而 $\mathfrak{M}(\mu)$ 为 $\sigma-$ 环, 证毕!

□

现在, 如果 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, 我们就把 $\mu(A)$ 换成 $\mu^*(A)$. 从而本来只在 $\mathscr{E}$ 上定义的 μ, 被延拓成了 $\sigma-$ 环
$\mathfrak{M}(\mu)$ 上的可数可加集函数. 这个延拓后的函数称为测度. $\mu = m$ 的特殊情况称为 $\mathbb{R}^p$ 上的 Lebesgue 测度.

注

1. 如果 A 是开集, 则 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. 这是因为 $\mathbb{R}^p$ 中的任一开集都是一列可数个开区间的并. 进而通过取补集可知所有闭集都在 $\mathfrak{M}(\mu)$ 中.

2. 如果 $A \in \mathfrak{M}(\mu), \varepsilon > 0$, 则存在开集 F 和闭集 G 使得

$$F \subset A \subset G$$

其中

$$\mu(G - A) < \varepsilon, \quad \mu(A - F) < \varepsilon$$

第一个不等式是因为 μ^* 是通过用开基本集覆盖来定义的, 而第二个不等式是取了补集.

3. 如果集合 E 能通过从开集出发, 经过可数次交并补运算来得到, 就说 E 是 Borel 集. $\mathbb{R}^p$ 上全体 Borel 集的集合 $\mathscr{B}$ 是 $\sigma-$ 环. 事实上, 它是包含全体开集的最小 $\sigma-$ 环. 根据注 1, $E \in \mathscr{B} \Rightarrow E \in \mathfrak{M}(\mu)$, 也即 Borel 集必 $\mu-$ 可测.

4. 如果 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, 则存在 Borel 集 F, G 满足 $F \subset A \subset G$ 且

$$\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0$$

这可以通过在注 2 中令 $\varepsilon = \frac{1}{n}$ 并令 $n \to \infty$ 得到.

既然 $A = F \cup (A - F)$, 可知每个 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ 都是一个 Borel 集和一个零测集的并.

对每个 μ 而言，Borel 集都是 $\mu-$ 可测的. 但零测集 (也即满足 $\mu^*(E) = 0$ 的集合 E) 可能在不同的 μ 下是不同的.

5. 对每个 μ, 零测集构成 $\sigma-$ 环.

6. 在 Lebesgue 测度的情况下, 全体可数集都是零测集. 但也有不可数集 (事实上是完备集) 是零测集. Cantor 集就是一个例子:

令 $E_0 = [0, 1]$, 移除区间 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 并令 E_1 为下列区间的并

$$[0, \frac{1}{3}], \quad [\frac{2}{3}, 1]$$

再移除这些区间中间三分之一的部分, 并令 E_2 为下列区间的并:

$$[0, \frac{1}{9}], \quad [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}], \quad [\frac{6}{9}. \frac{7}{9}], \quad [\frac{8}{9}, 1]$$

不断重复这个过程，便可以得到一个紧集列满足:

- $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$;
- E_n 是 2^n 个区间的并, 其中每个区间的长度都是 3^{-n}

集合

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

便称作 Cantor 集. P 显然完备, 而同样可以证明 P 非空. 容易看出 $m(E_n) = (\frac{2}{3})^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且既然 $P = \bigcap E_n$, 必对每个 n 都有 $P \subset E_n$, 进而 $m(P) = 0$.

11.2 测度空间, 可测函数, Lebesgue 积分与控制收敛定理

定义 11.2.1 *设 X 是集合, 其不需要为欧氏空间, 或任何度量空间的子集. 如果存在 X 的子集所构成的 $\sigma-$ 环 $\mathfrak{M}$(被称作可测集) 与一个在 $\mathfrak{M}$ 上定义的非负可数可加集函数 μ(被称作一个测度), 那么就称 X 为一个测度空间.*

如果另外有 $X \in \mathfrak{M}$, 就称 X 是一个可测空间.

比方说, 可以取 $X = \mathbb{R}^p$, $\mathfrak{M}$ 为 $\mathbb{R}^p$ 中所有 Lebesgue 可测集构成的集合, μ 为 Lebesgue 测度.

或者可以令 X 为全体正整数的集合, $\mathfrak{M}$ 为 X 的全体子集构成的集合, $\mu(E)$ 为 E 中的元素个数.

另一个例子出现在概率论中, 其中事件可以看做集合, 事件发生的概率便是一个可加 (或可数可加) 的集函数.

在接下来的部分我们讨论的都是可测空间. 需要强调的是如果牺牲掉我们已经达到并起约束作用的 Lebesgue 测度 (比方说在实轴上的一段区间), 接下来我们要讨论的积分理论会变得不能更简单了. 事实上, 这个理论的基本特点在一般情形下会变得更加清楚, 彼时就会知道所有这些都建立在一个 $\sigma-$ 环上的可数可加集函数罢了.

为了方便, 引进记号

$$\{x|P\}$$

用来表示所有具有性质 P 的元素 x 构成的集合.

11.2.1 可测函数

定义 11.2.2 *设 f 是定义在可测空间 X 上的函数, 值域为广义实数系. 如果集合*

$$\{x|f(x) > a\}$$

对所有实数 a 都是可测的, 就称 f 可测.

例 11.2.1 *如果在定义 12.1.6 中令 $X = \mathbb{R}^p, \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mu)$, 那么所有连续函数 f 都是可测的, 因为 $\{x|f(x) > a\}$ 是开集.*

定理 11.2.1 *下面四个条件是等价的:*

1. *$\{x|f(x) > a\}$ 对全体实数 a 可测.*
2. *$\{x|f(x) \geq a\}$ 对全体实数 a 可测.*
3. *$\{x|f(x) < a\}$ 对全体实数 a 可测.*
4. *$\{x|f(x) \leq a\}$ 对全体实数 a 可测.*

证明

注意到

$$\{x|f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\}$$

$$\{x|f(x) < a\} = X - \{x|f(x) \geq a\}$$

$$\{x|f(x) \leq a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f(x) < a + \frac{1}{n}\}$$

$$\{x|f(x) > a\} = X - \{x|f(x) \leq a\}$$

进而 $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

□

根据上述定理, 这些条件都可以用来定义可测性.

定理 11.2.2 如果 f 可测, 则 $|f|$ 可测.

证明

$$\{x||f(x)|<a\}=\{x|f(x)<a\}\cap\{x|f(x)>-a\}$$

定理 11.2.3 设 $\{f_n\}$ 是一列可测函数. 对 $x\in X$, 令

$$g(x)=\sup f_n(x)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$
$$h(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x)$$

则 g 和 h 均可测.

对 inf 和 $\underline{\lim}$ 情况是一样的.

证明

知

$$\{x|g(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x)>a\},$$
$$h(x)=\inf g_m(x)$$

其中 $g_m(x)=\sup f_n(x)(n\geq m)$.

□

推论 11.2.1 1. 如果 f 和 g 可测, 则 $\max\{f,g\}$ 和 $\min\{f,g\}$ 均可测.

如果

$$f^{+}=\max\{f,0\},\quad f^{-}=-\min\{f,0\}\tag{11.2}$$

则特别有 f^{+} 和 f^{-} 均可测.

2. 可测函数的收敛列的极限可测.

定理 11.2.4 设 f 和 g 是定义在 X 上的可测实值函数, 令 F 是 $\mathbb{R}^2$ 的实值连续函数, 取

$$h(x)=F(f(x),g(x)),\quad x\in X$$

则 h 可测.

特别地, $f+g$ 和 fg 均可测.

证明

令

$$G_a=\{(u,v)|F(u,v)>a\}$$

出于 F 的连续性, 可知 G_a 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集, 进而有

$$G_a=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$$

这其中 $\{I_n\}$ 是一列开区间:

$$I_n = \{(u,v)|a_n < u < b_n, c_n < v < d_n\}$$

既然

$$\{x|a_n < f(x) < b_n\} = \{x|f(x) > a_n\} \cap \{x|f(x) < b_n\}$$

是可测集, 知

$$\{x|(f(x),g(x)) \in I_n\} = \{x|a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x|c_n < g(x) < d_n\}$$

是可测集, 从而

$$\begin{aligned}\{x|h(x) > a\} &= \{x|(f(x),g(x)) \in G_a\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|(f(x),g(x)) \in I_n\}\end{aligned}$$

是可测集. 根据可测函数的定义命题即证.

□

综上, 我们可以说所有分析中的常见运算, 包括极限运算, 当作用在可测函数上时, 得到的都是可测函数; 也就是说, 所有能被这些常见运算生成的函数都是可测函数.

但是, 还有一个棘手的情况 (在 Lebesgue 测度与实轴上): 设 $h(x) = f(g(x))$, 其中 f 可测且 g 连续, 则 h 不一定可测.

读者可能注意到了测度在我们对可测函数的讨论中并未提及. 事实上, X 上的可测函数类只依赖于 $\sigma-$ 环 $\mathfrak{M}$(可以参照定义 12.2.1 的说明). 比方说, 我们可能讨论 $\mathbb{R}^p$ 上的 Borel 可测函数, 即满足

$$\{x|f(x) > a\}$$

总是 Borel 集的函数 f, 但不需要引进任何特定的测度.

11.2.2 简单函数

定义 11.2.3 设 s 是 X 上的实值函数, 如果 s 的值域是有限集, 就称 s 是一个简单函数.

令 $E \subset X$, 并令

$$K_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

称 K_E 为 E 的示性函数.

设 s 的值域为 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$. 令

$$E_i = \{x|s(x) = c_i\} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i} \tag{11.3}$$

这就是说, 每个简单函数都是示性函数的有限线性组合. 显然 s 可测当且仅当 $E_1, \cdots, E_n$ 可测.

有趣的是, 所有函数都能通过简单函数来近似:

定理 11.2.5 设 f 是 X 上的实值函数, 则存在简单函数列 $\{s_n\}$ 满足 $s_n(x) \to f(x), n \to \infty$ 对每个 $x \in X$ 成立. 如果 f 可测, 则 $\{s_n\}$ 可选作可测函数列. 如果 $f \geq 0$, 则 $\{s_n\}$ 可选作单调递增列.

证明

若 $f \geq 0$, 考虑

$$E_{ni} = \{x|\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{i}{2^n}\}, \quad F_n = \{x|f(x) \geq n\}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, i = 1, 2, \cdots, n2^n$$

取

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{ni}} + nK_{F_n}$$

则 $s_n(x)$ 即为满足条件的函数. 一般地, 令 $f = f^+ - f^-$, 并将上述构造应用到 f^+ 和 f^- 上即可.

□

注意如果 f 有界, 则上面构造的函数列 $\{s_n\}$ 是一致收敛到 f 的.(这根据 Dini 定理即得)

11.2.3 积分

接下来我们将定义可测空间 X 上的积分, 其中 $\mathfrak{M}$ 是可测集构成的 $\sigma-$ 环, 而 μ 是测度. 希望看到更具体的情况的读者可以想象 X 是实轴, 或一段区间, 而 μ 是 Lebesgue 测度.

定义 11.2.4 设

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x), \quad x \in X, c_i > 0 \tag{11.4}$$

可测, 并设 $E \in \mathfrak{M}$. 定义

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i) \tag{11.5}$$

如果 f 可测非负, 则定义

$$\int_E f d\mu = \sup I_E(s) \tag{11.6}$$

这其中 sup 在全体满足 $0 \leq s \leq f$ 的可测简单函数 s 中取.

(11.6)左端称作 f 关于测度 μ 在 E 上的 Lebesgue 积分. 需要注意到这个积分可能取到 $+\infty$.

容易发现

$$\int_E s d\mu = I_E(s) \tag{11.7}$$

对全体非负可测简单函数 s 成立.

定义 11.2.5 设 f 可测, 考虑积分

$$\int_E f^+ d\mu, \quad \int_E f^- d\mu \tag{11.8}$$

其中 f^+ 和 f^- 在(11.2)中定义.

如果(11.8)中至少有一个积分是有限的, 就定义

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \tag{11.9}$$

如果(11.8)中的两个积分都有限, 则(11.9)有限, 此时称 f 于 E 上对测度 μ 在 *Lebesgue* 意义下可积 *(*或可和*)*; 记为在 E 上 $f \in \mathscr{L}(\mu)$. 如果 $\mu = m$, 通常记作在 E 上 $f \in \mathscr{L}$.

这个术语可能会发人疑惑: 如果(11.9)是 $+\infty$ 或 $-\infty$, 那么 f 在 E 上的积分的确定义了, 尽管在上述意义下 f 并不可积; f 在 E 上可积仅当它在 E 上的积分有限.

我们主要的研究兴趣在可积函数上, 尽管在一些情况下我们更希望在一般情形下处理这些东西.

注

下述性质是显然的:

1. 如果 f 是 E 上的可测有界函数, 且 $\mu(E)<+\infty$, 则在 E 上 $f\in\mathscr{L}(\mu)$.

2. 如果 $a\le f(x)\le b$ 对任意 $x\in E$ 成立, 且 $\mu(E)<+\infty$, 则
$$a\mu(E)\le\int_E fd\mu\le b\mu(E)$$

3. 如果在 E 上 $f,g\in\mathscr{L}(\mu)$, 且对任意 $x\in E$ 都有 $f(x)\le g(x)$, 则
$$\int_E fd\mu\le\int_E gd\mu$$

4. 如果在 E 上 $f\in\mathscr{L}(\mu)$, 则在 E 上 $cf\in\mathscr{L}(\mu)$, 其中 c 是任意常数, 且有
$$\int_E cfd\mu=c\int_E fd\mu$$

5. 如果 $\mu(E)=0$, f 可测, 则
$$\int_E fd\mu=0$$

6. 如果在 E 上 $f\in\mathscr{L}(\mu), A\in\mathfrak{M}$, 且 $A\subset E$, 则在 A 上 $f\in\mathscr{L}(\mu)$.

定理 11.2.6 *1. 设 f 在 X 上非负可测. 对 $A\in\mathfrak{M}$, 定义*
$$\phi(A)=\int_A fd\mu$$
则 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 上可数可加.

2. 当在 X 上 $f\in\mathscr{L}(\mu)$ 时, 上述结论同样成立.

证明

将 f 写成 f^+-f^- 便知 $1\Rightarrow 2$.

要证明 1, 便是证明若 $A_n\in\mathfrak{M}(n=1,2,3,\cdots), A_i\cap A_j=\varnothing, i\ne j$, 且 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 时有
$$\phi(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A_n)\tag{11.10}$$

如果 f 是示性函数, 则 ϕ 的可数可加性恰与 μ 的可数可加性等价, 因为
$$\int_A K_E d\mu=\mu(A\cap E)$$

如果 f 是简单函数, 则 f 形如(11.4), 结论便再一次成立.

一般情况下, 知对满足 $0\le s\le f$ 的可测简单函数 s 有:
$$\int_A sd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}sd\mu\le\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A_n)$$

进而由(11.9)与上确界的性质知

$$\phi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n) \tag{11.11}$$

如果对某些 n 而言 $\phi(A_n) = +\infty$, 则(11.10)是平凡的, 因为 $\phi(A) \geq \phi(A_n)$(这是因为 $A_n \subset A$). 现设对全体 n 都有 $\phi(A_n) < +\infty$.

给定 $\varepsilon > 0$, 可以选出一个可测函数 s 满足 $0 \leq s \leq f$, 且有

$$\int_{A_1} s d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} s d\mu \geq \int_{A_2} f d\mu - \varepsilon$$

从而

$$\phi(A_1 \cup A_2) \geq \int_{A_1 \cup A_2} s d\mu = \int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \geq \phi(A_1) + \phi(A_2) - 2\varepsilon$$

进而有

$$\phi(A_1 \cup A_2) \geq \phi(A_1) + \phi(A_2)$$

进而由归纳法可得对任意的 n 有:

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n)$$

既然 $A \supset A_1 \cup \cdots \cup A_n$, 上式说明

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n) \tag{11.12}$$

从而由(11.11)与(11.12)即得(11.10).

□

推论 11.2.2 *若 $A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{M}$, 且 $\mu(A - B) = 0$, 则*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu$$

这是因为 $A = B \cup (A - B)$, 根据前面的注 5 即得.

注

上述引理表明零测集在积分中可忽略.

如果集合

$$\{x | f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

是零测集, 就记在 E 上有 $f \sim g$.

注意到 $f \sim f; f \sim g \Rightarrow g \sim f; f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$. 可知 $\sim$ 是等价关系.

如果在 E 上 $f \sim g$, 显然有

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$$

对于任意的 $A \subset E$ 在两个积分都存在时成立.

如果所有的 $x \in E - A$ 都满足性质 P, 且如果 $\mu(A) = 0$, 就称 P 对几乎所有 $x \in E$ 成立, 或者 P 在 E 上几乎处处成立. (" 处处" 的概念建立在特定的测度之上. 这里若非特殊说明, 一般都认为测度指 Lebesgue 测度.)

如果在 E 上 $f \in \mathscr{L}(\mu)$, 知 f 必在 E 上几乎处处有界. 更多情况下不失一般性我们都认为给定的函数一开始就是有界的.

定理 11.2.7 若在 E 上 $f \in \mathscr{L}(\mu)$, 则在 E 上 $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$, 且

$$|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$$

证明

记 $E = A \cup B$, 其中在 A 上 $f(x) > 0$, 在 B 上 $f(x) < 0$. 由定理 12.2.6 知

$$\int_E |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty$$

从而 $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$. 既然 $f \leq |f|, -f \leq |f|$, 可知

$$\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu, \quad -\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu$$

命题即证.

□

既然 f 的可积性说明了 $|f|$ 的可积性, Lebesgue 积分通常又被称为一个绝对收敛积分. 当然, 定义一个不绝对收敛积分是可能的, 在一些问题下这也是必要的. 但这样的积分就丧失了 Lebesgue 积分的一些良好性质, 在分析中扮演的角色也不如后者那么重要.

定理 11.2.8 若 f 在 E 上可测, $|f| \leq g$, 且在 E 上 $g \in \mathscr{L}(\mu)$. 则在 E 上 $f \in \mathscr{L}(\mu)$.

证明

注意到 $f^+ \leq g$ 与 $f^- \leq g$ 即可.

□

定理 11.2.9 (Lebesgue 单调收敛定理) 设 $E \in \mathfrak{M}$. 令 $\{f_n\}$ 是一列可测函数满足:

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots, \quad x \in E$$

用下式定义 f:

$$f_n(x) \to f(x), \quad x \in E, n \to \infty$$

则

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu, \quad n \to \infty$$

证明

由 $\{f_n\}$ 是递增列知, 当 $n \to \infty$ 时必对某个 α 有

$$\int_E f_n d\mu \to \alpha$$

既然

$$\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$$

根据极限的保号性有

$$\alpha \leq \int_E f d\mu$$

选取 $c \in (0,1)$, 并令 s 为满足 $0 \leq s \leq f$ 的简单可测函数. 取

$$E_n = \{x | f_n(x) \geq cs(x)\}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

届于 $\{f_n\}$ 是递增列, 知 $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$, 又根据 f 的定义, 取

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

进而对每个 n, 有:

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu$$

在上式中令 $n \to \infty$. 考虑到积分是可数可加的集函数, 我们大可在上式中应用定理 12.1.1, 进而可得

$$\alpha \geq c \int_E s d\mu$$

令 $c \to 1$, 知

$$\alpha \geq \int_E s d\mu$$

从而由(11.9)可知

$$\alpha \geq \int_E f d\mu$$

这便得到了

$$\alpha \geq \int_E f d\mu \geq \alpha$$

也即

$$\alpha = \int_E f d\mu$$

从而命题得证.

□

定理 11.2.10 设 $f = f_1 + f_2$, 其中在 E 上 $f_i \in \mathscr{L}(\mu)(i = 1, 2)$. 则在 E 上 $f \in \mathscr{L}(\mu)$, 且

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu \tag{11.13}$$

证明

首先考虑 $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$. 如果 f_1, f_2 是简单函数, 则从(11.5)和(11.7)已经能推出上式. 否则, 选择非负可测简单函数递增列 $\{s'_n\}$ 与 $\{s''_n\}$ 分别收敛到 f_1 与 f_2. 这种构造的可行性在定理 12.2.5 中已经阐明了. 取 $s_n = s'_n + s''_n$, 则有

$$\int_E s_n d\mu = \int_E s'_n d\mu + \int_E s''_n d\mu$$

在上式中令 $n \to \infty$ 并套用单调收敛定理即证(11.13).

再考虑 $f_1 \geq 0, f_2 \leq 0$. 取

$$A = \{x | f(x) \geq 0\}, \quad B = \{x | f(x) < 0\}$$

知 f, f_1 和 $-f_2$ 在 A 上均非负, 从而

$$\int_A f_1 d\mu = \int_A f d\mu + \int_A (-f_2) d\mu = \int_A f d\mu - \int_A f_2 d\mu$$

类似地, $-f, f_1$ 和 $-f_2$ 在 B 上均非负, 从而

$$\int_B (-f_2) d\mu = \int_B f_1 d\mu + \int_B (-f) d\mu \Rightarrow \int_B f_1 d\mu = \int_B f d\mu - \int_B f_2 d\mu$$

从而将上两式相加即得(11.13).

□

一般情况下, E 能被分成四个集合 E_i, 其中每个集合上 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 符号都是固定的. 上面证明的两种情况便说明:

$$\int_{E_i} f d\mu = \int_{E_i} f_1 d\mu + \int_{E_i} f_2 d\mu, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

从而将这四式相加即得(11.13).

下面我们将考察单调收敛定理的级数版本.

定理 11.2.11 设 $E \in \mathfrak{M}$. 如果 $\{f_n\}$ 是非负可测函数列, 且

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in E$$

则

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

证明

只需注意到 f 定义式右端中的部分和函数正是一个单增函数列即可.

□

定理 11.2.12 (Fatou) 设 $E \in \mathfrak{M}$. 如果 $\{f_n\}$ 是非负可测函数列, 且

$$f(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E$$

则

$$\int_E f d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \tag{11.14}$$

上式中严格不等号是有可能取到的.

证明

对 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 和 $x \in E$, 令

$$g_n(x) = \int f_i(x), \quad i \ge n$$

则 g_n 在 E 上可测, 且

$$0 \le g_1(x) \le g_2(x) \le \cdots$$

同时有

$$g_n(x) \le f_n(x), \quad g_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty$$

进而根据单调收敛定理有

$$\int_E g_n d\mu \to \int_E f d\mu$$

进而由上式与 $g_n \le f_n$ 推知(11.14).

□

定理 11.2.13 (Lebesgue 控制收敛定理) 设 $E \in \mathfrak{M}$. 令 $\{f_n\}$ 是可测函数列, 且满足:

$$f_n(x) \to f(x), \quad x \in E, n \to \infty \tag{11.15}$$

如果在 E 上存在 $g \in \mathscr{L}(\mu)$, 且满足

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, x \in E \tag{11.16}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \tag{11.17}$$

因为(11.16), 称 $\{f_n\}$ 被 g 所控制, 进而我们所讨论的是控制收敛. 根据前面关于" 几乎处处" 的注, 当(11.15)在 E 上几乎处处成立时结论也成立.

证明

首先, (11.16)与定理 12.2.7 可以断言在 E 上 $f_n \in \mathscr{L}(\mu), f \in \mathscr{L}(\mu)$.

既然 $f_n + g \geq 0$, Fatou 定理 (引理) 表明:

$$\begin{aligned}
&\int_E (f+g) d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E (f_n + g) d\mu \\
\Rightarrow &\int_E f d\mu + \int_E g d\mu = \int_E f d\mu + \varliminf_{n\to\infty} g d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E (f_n + g) d\mu \\
\Rightarrow &\int_E f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E (f_n + g) d\mu - \varliminf_{n\to\infty} \int_E g d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int_E (f_n + g) d\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int_E (-g) d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu
\end{aligned}$$

从而有

$$\int_E f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \tag{11.18}$$

同样, 既然 $g - f_n \geq 0$, 有:

$$\begin{aligned}
&\int_E (g-f) d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n) d\mu \\
\Rightarrow &\varliminf_{n\to\infty} g d\mu - \int_E f d\mu = \int_E g d\mu - \int_E f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n) d\mu \\
\Rightarrow &-\int_E f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n) d\mu - \varliminf_{n\to\infty} \int_E g d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n) d\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int_E (-g) d\mu = \varliminf_{n\to\infty} (-\int_E f_n d\mu)
\end{aligned}$$

从而有

$$-\int_E f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} (-\int_E f_n d\mu)$$

这等价于

$$\int_E f d\mu \geq \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \tag{11.19}$$

从而(11.17)由(11.18)与(11.19)即可推知.

□

推论 11.2.3 如果 $\mu(E) < +\infty$, 且 $\{f_n\}$ 在 E 上一致有界, 同时在 E 上 $f_n \to f, n \to \infty$, 则(11.17)成立.

一致有界收敛列一般称作有界收敛.

11.3 Lebesgue 积分与 Riemann 积分

本节内容主要选自 [5].

接下来, 我们要讨论的定理便是在区间上 Riemann 可积必 Lebesgue 可积, 且 Riemann 可积函数是在相当严格的连续性下才能研究的对象. 抛开 Lebesgue 理论允许我们处理更广的一类函数外, 或许它最大的优势在于简化了很多保极限的运算; 在这个观点之下, Lebesgue 收敛定理被视作 Lebesgue 理论的核心.

Riemann 积分理论中的一个难点在于 Riemann 可积函数列 (甚至是连续函数列) 的极限未必是 Rie- mann 可积的. 这个困难如今不复存在了, 因为可测函数列的极限必可测.

令测度空间 X 为实轴上的一段区间 $[a,b]$, 并令 $\mu=m$(Lebesgue 测度), $\mathfrak{M}$ 是 $[a,b]$ 的全体 Lebesgue 可测子集族. 不同于

$$\int_X f dm$$

我们还是习惯用更熟悉亲切的记号

$$\int_a^b f dx$$

来表示 f 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分. 为了把这和 Riemann 积分区分开来, 我们把后者记作

$$\mathscr{R}\int_a^b f dx$$

定理 11.3.1 *1. 如果在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathfrak{R}$, 则在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathscr{L}$, 且*

$$\int_a^b f dx=\mathscr{R}\int_a^b f dx \tag{11.20}$$

2. 若 f 在 $[a,b]$ 上有界, 则在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathfrak{R}$ 当且仅当 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

上述定理的第 2 条正是第四章介绍过的 Lebesgue 定理, 但这里还是给出一个借助 Lebesgue 积分完成的证明.

证明

当 f 在 $[a,b]$ 上有界, 考虑 $\{P_k\}$ 是 $[a,b]$ 的一系列划分, 其中 P_{k+1} 是 P_k 的加细, 并设 P_k 中相邻两点的距离小于 $\frac{1}{k}$[3]. 记:

$$s(f,P_k)=\sum_{i=1}^n \Delta x_i \inf_{x\in\Delta_i} f(x)$$
$$S(f,P_k)=\sum_{i=1}^n \Delta x_i \sup_{x\in\Delta_i} f(x)$$

这其中 Δ_i 是 P_k 对应的那些区间, 而 Δx_i 对应 P_k 中相邻两点的距离. 根据 Darboux 上下和的定义有:

$$\lim_{k\to\infty} s(f,P_k)=\mathscr{R}\underline{\int} f dx,\quad \lim_{k\to\infty} S(f,P_k)=\mathscr{R}\overline{\int} f dx$$

(在这个证明当中, 所有积分都是在 $[a,b]$ 上作的.)

设 $P_k=\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}$, 其中 $x_0=a, x_k=b$, 定义

$$S_k(a)=s_k(a)=f(a)$$

[3]这里默认了 $\{P_k\}$ 是等距划分族

对 $x_{i-1} < x \le x_i, 1 \le i \le n$, 取 $S_k(x) = \sup\limits_{x\in(x_{i-1},x_i]} f(x), s_k(x) = \sup\limits_{x\in(x_{i-1},x_i]} f(x)$, 知

$$s(f,P_k) = \int s_k dx, \quad S(f,P_k) = \int S_k dx$$

同时既然 P_{k+1} 是 P_k 的加细, 有:

$$s_1(x) \le s_2(x) \le \cdots \le f(x) \le \cdots \le S_2(x) \le S_1(x), \quad x \in [a,b]$$

根据上式, 存在

$$s(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x), \quad S(x) = \lim_{k\to\infty} S_k(x)$$

观察到 s 和 S 都是 $[a,b]$ 上的有界可测函数, 且有

$$s(x) \le f(x) \le S(x), \quad a \le x \le b \tag{11.21}$$

进而根据单调收敛定理即得

$$\int sdx = \mathscr{R}\underline{\int} fdx, \quad \int Sdx = \mathscr{R}\overline{\int} fdx$$

直到这里, 除了 f 在 $[a,b]$ 上有界以外没有再用到其他假设了.

为了完成证明, 由 Darboux 定理知 $f \in \mathfrak{R}$ 当且仅当其上下 Darboux 积分相等, 这等价于

$$\int sdx = \int Sdx$$

又因为本身有 $s \le S$, 上式成立当且仅当对几乎所有的 $x \in [a,b]$ 成立 $s(x) = S(x)$. 此时, (11.21)即

$$s(x) = f(x) = S(x)$$

在 $[a,b]$ 上几乎出处成立, 进而(11.20)即证.

更多地, 如果 x 不属于任何一个 P_k, 容易看出 $s(x) = S(x)$ 当且仅当 f 在 x 处连续. 既然 P_k 的并是可数集, 其测度即为 0, 进而可知 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续当且仅当 $s(x) = S(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立, 这又等价于 $f \in \mathfrak{R}$.

这便完成了整个证明.

□

Lebesgue 理论在很大程度上保留了我们所熟知的积分与微分的关系. 如果在 $[a,b]$ 上 $f \in \mathscr{L}$, 且

$$F(x) = \int_a^x fdt, \quad a \le x \le b$$

则在 $[a,b]$ 上几乎处处有 $F'(x) = f(x)$.

相反地, 如果 F 在 $[a,b]$ 上处处可导 (这里" 几乎处处" 是不够充分的!) 且在 $[a,b]$ 上 $F' \in \mathscr{L}$, 则

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt, \quad a \le x \le b$$

11.4 Tonelli 定理与 Fubini 定理

本节内容主要选自 [14].

首先作出符号上的约定. 令 $n=p+q, p, q\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^p &= \{(\xi_1,\cdots,\xi_p)|\xi_i\in\mathbb{R}, i=1,\cdots,p\}\\
\mathbb{R}^q &= \{(\xi_{p+1},\cdots,\xi_n)|\xi_j\in\mathbb{R}, j=p+1,\cdots,n\}\\
\mathbb{R}^n &= \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)|\xi_i\in\mathbb{R}, i=1,\cdots,n\}
\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^q$, 并记定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f 的 Lebesgue 积分为

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

我们要解决的问题是等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^p} d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

何时成立? 首先有下面的定理:

定理 11.4.1 (Tonelli) *设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数, 有:*

1. *对几乎处处的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$ 作为 $\boldsymbol{y}$ 的函数在 $\mathbb{R}^q$ 上非负可测.*

2. *记*
$$F_f(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$
则 $F_f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数.

3. $\int_{\mathbb{R}^p} F_f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^p} d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$.

考虑到非负可测函数是非负简单可测函数递增列的极限, 自然可以想到先对简单函数类证明, 再由此出发证明非负可测函数类. 下面的引理可以让定理的证明叙述简明一些. 记满足上述条件 1,2,3 的非负可测函数全体为 $\mathscr{F}$(知 $\mathscr{F}$ 显然非空).

引理 11.4.1 1. *若 $f\in\mathscr{F}$ 且 $a\geq 0$, 则 $af\in\mathscr{F}$.*

2. *若 $f_1,f_2\in\mathscr{F}$, 则 $f_1+f_2\in\mathscr{F}$.*

3. *若 $f,g\in\mathscr{F}, f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq 0$, 且在 $\mathbb{R}^n$ 上 $g\in\mathscr{L}$, 则*
$$f-g\in\mathscr{F}$$

4. *若 $f_k\in\mathscr{F}(k=1,2,\cdots), f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leq f_{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(k=1,2,\cdots)$, 且有*
$$\lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$$
则 $f\in\mathscr{F}$.

证明

1,2 通过 Lebesgue 积分的线性性质知显然成立.

对 3, 因为 $g\in\mathscr{F}$ 且 $g\in\mathscr{L}$, 由条件 3 知 $F_g(\boldsymbol{x})$ 几乎处处有限. 再根据条件 2 可知, 对几乎处处的 $\boldsymbol{x}$, 将 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 看作 $\boldsymbol{y}$ 的函数, 则其在 $\mathbb{R}^q$ 上几乎处处有限. 于是从等式

$$(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\quad a.e.(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^n$$

推知 $f-g$ 满足三个条件, 也即 $f-g\in\mathscr{F}$.

对 4, 显然 f 满足条件 1. 而条件 2,3 根据单调收敛定理即得. 从而 $f\in\mathscr{F}$.

□

现在可以来证明定理 12.4.1 了.

证明

首先, 定理 12,4,1 的结论可以改述为: 全体非负可测函数都属于 $\mathscr{F}$. 根据引理 12.4.1 第 4 条, 只需证明全体非负简单可测函数都属于 $\mathscr{F}$. 又根据引理 12.4.1 第 2 条与(11.3)知只需证明任意可测集 E 上的特征函数 $K_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 都属于 $\mathscr{F}$ 即可. 下面就对可测集讨论:

(i) 当 $E=I_1\times I_2$, 其中 I_1 与 I_2 分别是 $\mathbb{R}^p$ 和 $\mathbb{R}^q$ 中的广义区间. 显然有:

$$\int_{\mathbb{R}^n}K_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=m(E)=|I_1|\times|I_2|$$

另一方面, 对每个 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p$, $K_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 显然是 $\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数, 且有

$$F_K(\boldsymbol{x})=\begin{cases}|I_2|, & \boldsymbol{x}\in I_1\\ 0, & \boldsymbol{x}\notin I_1\end{cases}$$

进而 $F_K(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数, 且

$$\int_{\mathbb{R}^p}F_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=|I_1|\times|I_2|$$

从而 $K_E\in\mathscr{F}$.

(ii) 当 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 可记

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k,\quad E_k=\bigcup_{i=1}^{k}I_i$$

其中 I_k 是互不相交的广义区间. 根据上面的结论知 $K_{E_k}\in\mathscr{F}$. 又注意到 K_{E_k} 递增, 而 $K_E=\lim\limits_{k\to\infty}K_{E_k}$, 进而根据引理 12.4.1 第 4 条即知 $K_E\in\mathscr{F}$.

(iii) 当 E 是有界闭集, 则其可以表示为两个有界开集的差集, 从而由上述结论与引理 12.4.1 第 3 条得 $K_E\in\mathscr{F}$.

(iv) 设 $\{E_k\}$ 是递减可测集合列, 且 $m(E_1)<\infty$, 记

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$$

则知若 $K_{E_k}\in\mathscr{F}$, 类似于引理 12.4.1 第 4 条, 用控制收敛定理可证 $K_E\in\mathscr{F}$.

(v) 当 E 是零测集, 则存在递减开集列 $\{G_k\}$ 满足 $G_k\supset E(k=1,2,\cdots)$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}m(G_k)=0$$

令 $H=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$, 则由 (ii) 与 (iv) 知 $K_H\in\mathscr{F}$. 又注意到 $E\subset H$, 且 $m(H)=0$, 知:

$$\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}K_H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0$$

与

$$\int_{\mathbb{R}^n}K_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0=\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}K_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

从而 K_E 满足条件 3. 上述等式还指出, 对几乎处处的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p$, 有:

$$F_{K_E}(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^p}K_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0$$

进而可知对几乎处处的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p$ 有 $K_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ 在 $\mathbb{R}^q$ 上几乎处处成立. 这说明 K_E 满足条件 1,2, 进而 $K_E\in\mathscr{F}$.

(vi) 若 $E\in\mathfrak{M}$, 考虑到 E 能被表示成两个互不相交的集合的并:

$$E=(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)\cup Z$$

其中每个 F_k 都是有界闭集, 而 Z 是零测集. 令

$$K=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$$

由 (iii) 与类似 (ii) 的方法可以证明 $K_K\in\mathscr{F}$, 再根据等式

$$K_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=K_K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+K_Z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

推知 $K_E\in\mathscr{F}$.

□

定理 11.4.2 (Fubini) *若在 $\mathbb{R}^n$ 上 $f\in\mathscr{L}$, 设 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, 则*

1. *对几乎处处的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p$, 在 $\mathbb{R}^q$ 上 $f\in\mathscr{L}$.*

2. *在 $\mathbb{R}^p$ 上有*
$$\int_{\mathbb{R}^q}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\in\mathscr{L}$$

3. *有:*
$$\int_{\mathrm{R}^n}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\int_{\boldsymbol{R}^q}d\boldsymbol{y}\int_{\mathbb{R}^p}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}$$

证明

令 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-f^-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 则根据非负可测函数的 Tonelli 定理可知, $f^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和 $f^-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 均满足上述的三个结论, 又由这些积分值均有限知它们之间能作减法运算, 从而 Fubini 定理得证.

□

11.5 $\mathscr{L}^p$ 空间

本节内容参考了 [14], 主要目标是为了解决 [4] 中的一道习题:

习题试证函数类 S 的函数[4]在空间 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 中稠密, 这里 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 是由绝对平方可积函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 构成的, 在其中定义了内积 $\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}(f\cdot\overline{g})(x)dx$, 由这个内积产生的范数 $\| f\|=(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$ 以及距离 $d(f-g)=\| f-g\|$.

[4]这里 S 代表速降函数空间, 或者可以理解为还没有赋上收敛性的 Schwarz 空间

11.5.1 $\mathscr{L}^p$ 空间的定义与不等式

在数学分析课程中的 Fourier 分析部分, 其实我们已经多多少少接触过 $\mathscr{L}^p$ 空间了, 彼时我们用平方平均逼近来研究 Fourier 级数的收敛性. 而 $\mathscr{L}^p$ 空间阐述的即为"p 方平均逼近", 定义如下:

定义 11.5.1 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 记

$$\| f \|_p = (\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty$$

我们用 $\mathscr{L}^p(E)$ 表示使 $\| f \|_p < \infty$ 的 f 的全体, 称其为 $\mathscr{L}^p$ 空间.

当然, 在研究 $\mathscr{L}^p$ 空间的性质时, 函数本身在 $\mathbb{R}^n$ 意义下的模长也很重要, 这在 Lebesgue 理论中称为" 本性":

定义 11.5.2 设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, $m(E) > 0$[5]. 若存在常数 M 使得 $|f(x)| \leq M$ 几乎处处成立, 就称 $f(x)$ 在 E 上本性有界, M 称为 $f(x)$ 的本性上界. 一切本性上界的下确界, 就称为 $f(x)$ 在 E 上的本性上确界, 记作 $\| f \|_\infty$. 用 $\mathscr{L}^\infty(E)$ 表示在 E 上本性有界的函数所构成的集合.

用 $\| f \|_\infty$ 表示本性有界函数的缘由, 可以从 [4] 中的一道习题窥得:

习题设 E 是具有非零测度的 Jordan 可测集, 而 $f : E \to \mathbb{R}$ 是 E 上的连续非负可积函数, $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$. 证明:

$$\lim_{n \to \infty} (\int_E f^n(x) dx)^{\frac{1}{n}} = M$$

下面说明至少在 $p \geq 1$ 时, $\mathscr{L}^p(E)$ 构成线性空间:

定理 11.5.1 若 $f, g \in \mathscr{L}^p(E), 1 \leq p \leq \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则:

$$\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}^p(E).$$

证明

当 $1 \leq p < \infty$, 由 Jensen 不等式可知:

$$|\alpha f + \beta g|^p \leq ||\alpha f| + |\beta g||^p \leq 2^{p-1}(|\alpha f|^p + |\beta g|^p)$$

从而

$$\int_E |\alpha f + \beta g|^p(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leq \int_E 2^{p-1}(|\alpha f|^p(\boldsymbol{x}) + |\beta g|^p(\boldsymbol{x})) d\boldsymbol{x} < \infty$$

进而 $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}^p(E)$.

当 $p = \infty$, 知:

$$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \cdot |f| + |\beta| \cdot |g| \leq |\alpha| \, \| f \|_\infty + |\beta| \, \| g \|_\infty < \infty$$

从而 $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}^\infty(E)$.

综上, 定理即证.

$\square$

注意到这里其实 $0 < p < 1$ 时结论也是成立的, 但在研究 $\mathscr{L}^p$ 空间时我们主要的兴趣都放在 $p \geq 1$ 上, 所以只选取了 $p \geq 1$ 进行证明.

在 $\mathscr{L}^p$ 空间中有两个十分常用的不等式, 在此之前先给出共轭指标的定义:

[5] 即 E 不是零测集

定义 11.5.3 若 $p, p' > 1$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 则称 p 与 p' 为共轭指标. 若 $p = 1$, 则规定共轭指标 $p' = \infty$, 若 $p' = 1$, 则规定共轭指标 $p = \infty$.

定理 11.5.2 (Hölder) 设 p 与 p' 为共轭指标, 若 $f \in \mathscr{L}^p(E), g \in \mathscr{L}^{p'}(E)$, 则有:

$$\int_E |f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} \leq (\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} (\int_E |g(\boldsymbol{x})|^{p'} d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p'}}, \quad 1 < p < \infty$$

且

$$\int_E |f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} \leq \| g \|_\infty \int_E |f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}, \quad p = 1$$

当 $p = \infty$ 时有类似结论. 上述式子可以统一地写成:

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_{p'}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

证明

首先验证 $p = 1$ 的情况, 此时 $f \in \mathscr{L}^1(E), g \in \mathscr{L}^\infty(E)$, 从而:

$$\int_E |f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} \leq \int_E |f(\boldsymbol{x})| \cdot \| g \|_\infty d\boldsymbol{x} = \| g \|_\infty \int_E |f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}$$

$p = \infty$ 的情况是类似的.

其次, 当 $\| f \|_p$ 或 $\| g \|_{p'}$ 为零时, 不妨就设 $\| f \|_p = 0$, 即:

$$\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} = 0$$

此时必有 f 在 E 上几乎处处为零, 否则取 f 在 E 上的支集 $\mathrm{supp} f \subset E$, 知 $m(\mathrm{supp} f) > 0$, 从而

$$\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \geq \int_{\mathrm{supp} f} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} > 0$$

矛盾. 进而这说明 $\mathrm{supp} f$ 是零测集, 又注意到 $\mathrm{supp}(f \cdot g) \subset \mathrm{supp} f$, 知 $\mathrm{supp}(f \cdot g)$ 也是零测集, 也即 $f \cdot g$ 在 E 上几乎处处为零, 进而:

$$0 = \int_E |f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} \leq (\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} (\int_E |g(\boldsymbol{x})|^{p'} d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p'}} = 0 \cdot (\int_E |g(\boldsymbol{x})|^{p'} d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p'}} = 0$$

最后, 当 $\| f \|_p > 0, \| g \|_{p'} > 0, p, p' < \infty$, 注意到 Young 不等式:

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{p'}b, \quad a, b > 0$$

在上式中令

$$a = \frac{|f(\boldsymbol{x})|^p}{\| f \|_p^p}, \quad b = \frac{|g(\boldsymbol{x})|^{p'}}{\| g \|_{p'}^{p'}}$$

知

$$\frac{|f(\boldsymbol{x})|}{\| f \|_p} \cdot \frac{|g(\boldsymbol{x})|}{\| g \|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(\boldsymbol{x})|^p}{\| f \|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(\boldsymbol{x})|^{p'}}{\| g \|_{p'}^{p'}}$$

两端积分有:

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{|f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})|}{\| f \|_p \cdot \| g \|_{p'}} d\boldsymbol{x} &\leq \frac{1}{p} \int_E \frac{|f(\boldsymbol{x})|^p}{\| f \|_p^p} d\boldsymbol{x} + \frac{1}{p'} \int_E \frac{|g(\boldsymbol{x})|^{p'}}{\| g \|_{p'}^{p'}} d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\| f \|_p^p} \int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\| g \|_{p'}^{p'}} \int_E |g(\boldsymbol{x})|^{p'} d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{p} \frac{1}{\| f \|_p^p} \cdot \| f \|_p^p + \frac{1}{p'} \frac{1}{\| g \|_{p'}^{p'}} \cdot \| g \|_{p'}^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

两边同乘 $\| f \|_p \| g \|_{p'}$ 即得:

$$\int_E |f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} \leq \| f \|_p \| g \|_{p'}$$

定理即证.

□

定理 11.5.3 (Minkowski) 若 $f, g \in \mathscr{L}^p(E)(1 \leq p < \infty)$, 则

$$(\int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} \leq (\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} + (\int_E |g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}$$

也即

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p .$$

证明

当 $p = 1$ 时, 此即

$$\int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} \leq \int_E |f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} + \int_E |g(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}$$

由三角不等式即得.

当 $1 < p < \infty$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
\int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} &= \int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^{p-1} \cdot |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} \\
&\leq \int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^{p-1} (|f(\boldsymbol{x})| + |g(\boldsymbol{x})|) d\boldsymbol{x} \\
&= \int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^{p-1} \cdot |f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} + \int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^{p-1} \cdot |g(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

对最后式子的第一项, 用 Hölder 不等式有:

$$\begin{aligned}
\int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^{p-1} \cdot |f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} &\leq (\int_E (|f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} d\boldsymbol{x})^{\frac{p-1}{p}} (\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} \\
&= (\int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{p-1}{p}} \cdot (\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} = \| f + g \|_p^{p-1} \cdot \| f \|_p
\end{aligned}$$

而对第二项, 类似地用 Hölder 不等式有:

$$\begin{aligned}
\int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^{p-1} \cdot |g(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} &\leq (\int_E (|f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} d\boldsymbol{x})^{\frac{p-1}{p}} (\int_E |g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} \\
&= (\int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{p-1}{p}} \cdot (\int_E |g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} = \| f + g \|_p^{p-1} \cdot \| g \|_p
\end{aligned}$$

这说明:

$$\| f + g \|_p^p = \int_E |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \leq \| f + g \|_p^{p-1} \cdot \| f \|_p + \| f + g \|_p^{p-1} \cdot \| g \|_p$$

不妨设 $\| f + g \|_p \neq 0$, 在上式两边同时除以 $\| f + g \|_p^{p-1}$ 即有

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

而当 $\| f + g \|_p = 0$ 时, 显然有

$$\| f + g \|_p = 0 \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

定理即证.

□

11.5.2 $\mathscr{L}^p$ 空间中的距离和极限

上一节给出了 $\mathscr{L}^p$ 空间的定义, 并给出了在研究 $\mathscr{L}^p$ 空间时常用的两个不等式, 下面就开始正式研究 $\mathscr{L}^p$ 空间中所谓的"p 方平均逼近". 借助在上一节中给出的定义:

$$\| f \|_p := (\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}$$

可以给出 $\mathscr{L}^p$ 空间中的一个度量:

$$d(f,g) := \| f - g \|_p$$

这个度量中, 正定性和对称性是显然的, 而三角不等式正是上节中的 Minkowski 不等式. 但在这里需要额外注意一点: 此处的" 正定性" 已经不是传统意义上的了, 这是因为 $d(f,g) = 0$ 本质上说的是

$$(\int_E |f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} = 0$$

进而这只能说明 $f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})$ 几乎处处为零, 而不能断言 $f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})$ 恒等于零. 在这个意义上, 一般把几乎处处相等的函数 f, g 划分到一个等价类里, 视作 $\mathscr{L}^p(E)$ 中的" 同一个" 元素. 在阐明这一点之后, 即得如下断言:

定理 11.5.4 对于 $f, g \in \mathscr{L}^p(E)$, 定义

$$d(f,g) = \| f - g \|_p, \quad 1 \le p \le \infty$$

则 $(\mathscr{L}^p(E), d)$ 是一个距离空间, 一般仍把它记作 $\mathscr{L}^p(E)$.

在有了距离的概念后, 就可以定义 $\mathscr{L}^p(E)$ 中的极限了, 这便是一直所说的"p 方平均逼近":

定义 11.5.4 设 $f_k \in \mathscr{L}^p(E)(k = 1, 2, \cdots)$. 若存在 $f \in \mathscr{L}^p(E)$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = \lim_{k\to\infty} \| f_k - f \|_p = 0$$

则称 $\{f_k\}$ 依 $\mathscr{L}^p(E)$ 的意义收敛于 f, $\{f_k\}$ 为 $\mathscr{L}^p(E)$ 中的收敛列, f 为 $\{f_k\}$ 在 $\mathscr{L}^p(E)$ 中的极限.

$\mathscr{L}^p(E)$ 中的极限有下面两条基本的性质:

命题 11.5.1 (唯一性) 若

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \|_p = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \| f_k - g \|_p = 0, \quad p \ge 1$$

则 $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ 几乎处处成立.

证明

根据条件知:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} = 0$$

进而

$$\int_E |f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \int_E |f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \int_E |f(\boldsymbol{x}) - f_k(\boldsymbol{x}) + f_k(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}$$
$$\le M \lim_{k\to\infty} \int_E (|f(\boldsymbol{x}) - f_k(\boldsymbol{x})|^p + |f_k(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})|^p) d\boldsymbol{x} = 0$$

其中最后一步中 M 是一个常数, 最后一步的原理是 Jensen 不等式. 上式即说明 $|f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|^p$ 几乎处处为零, 也即 $f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})$ 几乎处处成立.

□

命题 11.5.2 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\| f_k-f\|_p=0, p\geq 1$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\| f_k\|_p=\| f\|_p$$

证明

根据 Minkowski 不等式有:

$$|\| f_k\|_p-\| f\|_p|\leq\| f_k-f\|_p$$

进而根据条件与夹逼准则即证命题.

□

伴随着极限概念, 自然也会产生 Cauthy 列:

定义 11.5.5 设 $\{f_k\}\subset\mathscr{L}^p(E)$, 若

$$\lim_{k,j\to\infty}\| f_k-f_j\|_p=0$$

则称 $\{f_k\}$ 是 $\mathscr{L}^p(E)$ 中的 *Cauthy* 列.

既然 $d(f,g)$ 是度量, 在 $\mathscr{L}^p(E)$ 中自然会考虑 Cauthy 准则是否成立? 这个结论是肯定的, 且 Cauthy 准则的成立恰意味着 $\mathscr{L}^p(E)$ 是完备的距离空间. 但届于要证明这件事情又需要花一番功夫去介绍其牵扯到的一些定理, 在这里就还是略过证明, 直接给出结论好了:

定理 11.5.5 (Cauthy) $\mathscr{L}^p(E)\supset\{f_k\}$ 在 $\mathscr{L}^p(E)$ 意义下收敛当且仅当其为 $\mathscr{L}^p(E)$ 中的 *Cauthy* 列.

11.5.3 $\mathscr{L}^p$ 空间中的卷积

这一节的内容核心在于恒等逼近定理, 它是证明 $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密性的一大利器. 从形式上看, 它类似于命题(12.2.1). 在此之前, 还是先给出证明它所需要的工具 (主要是广义 Minkowski 不等式):

定理 11.5.6 设 $g(\boldsymbol{x})$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 若存在 $M>0$, 使得对一切在 E 上可积的简单函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$[6], 都有

$$\left|\int_E g(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right|\leq M\|\varphi\|_p,\quad p\geq 1$$

则 $g\in\mathscr{L}^{p'}(E)$(p' 是 p 的共轭指标), 且 $\| g\|_{p'}\leq M$.

证明

当 $p>1$, 为了估计 $\int_E|g(\boldsymbol{x})|^{p'}d\boldsymbol{x}$, 考虑作具有紧支集的非负可测简单函数递增列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(\boldsymbol{x})=|g(\boldsymbol{x})|^{p'}$$

再令

$$\psi_k(\boldsymbol{x})=(\varphi_k(\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{p}}\cdot\mathrm{sgn}g(\boldsymbol{x})$$

[6] 回顾: 简单函数就是值域为有限集的实值函数.

可得

$$\| \psi_k \|_p = (\int_E |(\varphi_k(\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{p}} \cdot \mathrm{sgn} g(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} = (\int_E \varphi_k(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}$$

注意到

$$0 \le \varphi_k(\boldsymbol{x}) = (\varphi_k(\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} = (\varphi_k(\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{p}} (\varphi_k(\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{p'}} \le (\varphi_k(\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{p}} |g(\boldsymbol{x})| = \psi_k(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})$$

同时, $\psi_k(\boldsymbol{x})$ 依旧是简单函数, 从而根据条件有

$$|\int_E g(\boldsymbol{x}) \psi_k(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}| \le M \| \psi_k \|_p$$

进而

$$\int_E \varphi_k(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \le \int_E \psi_k(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \le M \| \psi_k \|_p = M(\int_E \varphi_k(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}$$

这说明:

$$(\int_E \varphi_k(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x})^{1-\frac{1}{p}} = (\int_E \varphi_k(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p'}} \le M$$

也即

$$\int_E \varphi_k(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \le M^{p'}$$

根据单调收敛定理, 在上式两端令 $k \to \infty$ 即有:

$$\int_E |g(\boldsymbol{x})|^{p'} d\boldsymbol{x} \le M^{p'}$$

从而 $g \in \mathscr{L}^{p'}(E)$, 且 $\| g \|_{p'} \le M$.

当 $p = 1$, 即需证明 $g \in \mathscr{L}^{\infty}(E)$, 且 $\| g \|_{\infty} \le M$. 用反证法, 不妨设 $g(x) \ge 0$, 若 $g \notin \mathscr{L}^{\infty}(E)$, 这说明 g 在 E 上是无界函数, 进而存在 E 中的可测集列 $\{A_k\}$ 使得

$$g(\boldsymbol{x}) \ge k, \quad x \in A_k, k = 1, 2, \cdots$$

其中每个 A_k 都不是零测集. 现在令

$$\varphi_k(\boldsymbol{x}) := \chi_{A_k}(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in A_k \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin A_k \end{cases}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

则对给定的 k 有

$$\frac{\int_E \varphi_k(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}{\| \varphi_k \|_1} = \frac{\int_{A_k} \varphi_k(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}{\| \varphi_k \|_1} \ge \frac{\int_{A_k} k\varphi_k(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}{\int_{A_k} |\varphi_k(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}} = k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

进而并不存在 $M > 0$ 使得对所有在 E 上可积的简单函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 都有

$$|\int_E g(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}| \le M \| \varphi \|_1$$

矛盾! 故只能有 $g \in \mathscr{L}^{\infty}(E)$, 命题即证.

□

定理 11.5.7 (广义 Minkowski 不等式) 设 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 若对几乎处处的 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p < \infty)$, 且有

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} d\boldsymbol{y} = M < \infty$$

则

$$(\int_{\mathbb{R}^n} |\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} \le \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} d\boldsymbol{y}.$$

证明

$p=1$ 时命题是显然的, 下面设 $p>1$, p' 是 p 的共轭指标, 并令

$$F(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|d\boldsymbol{y}$$

命题即证明

$$(\int_{\mathbb{R}^n}|F(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}=\| F \|_p\leq M$$

套用定理(11.5.6)的条件, 希望证明对于任意的可积简单函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$, 有:

$$|\int_{\mathbb{R}^n}F(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}|\leq M\|\varphi\|_{p'},\quad M>0$$

事实上:

$$\begin{aligned}|\int_{\mathbb{R}^n}F(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}|&\leq\int_{\mathbb{R}^n}|F(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}|\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|d\boldsymbol{y}|\cdot|\varphi(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}\\&=\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\cdot|\varphi(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\cdot|\varphi(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x})d\boldsymbol{y}\\&\leq\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\boldsymbol{x})|^{p'}d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p'}}d\boldsymbol{y}\\&=(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\boldsymbol{x})|^{p'}d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p'}}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}d\boldsymbol{y}=M\|\varphi\|_{p'}\end{aligned}$$

从而根据定理(11.5.6), 知 $F(\boldsymbol{x})\in\mathscr{L}^p(E)$, 且 $\| F\|_p\leq M$, 写开即:

$$(\int_{\mathbb{R}^n}|F(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}=(\int_{\mathbb{R}^n}|\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}\leq M=\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}d\boldsymbol{y}$$

命题即证.

□

最后, 终于可以来介绍这一节乃至这一章所解决的核心问题–恒等逼近定理了:

定理 11.5.8 (恒等逼近定理) 设 $\Delta\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $\|\Delta\|_1=\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=1$, $\Delta_\alpha=\frac{1}{\alpha^n}\Delta(\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha})$. 若 $f\in\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)(1\leq p<\infty)$, 则

$$\lim_{\alpha\to0^+}\| f*\Delta_\alpha-f\|_p=\lim_{\alpha\to0^+}(\int_{\mathbb{R}^n}|f*\Delta_\alpha(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}=0$$

在这个定理中, Δ_α 可以看做 $\delta-$ 型函数族, 进而定理说明在 $\mathscr{L}^p$ 意义下 $f*\Delta_\alpha$ 在 $\alpha\to0^+$ 时收敛于 f. 从这里可以看出它已经很像命题(12.2.1)了.

证明

根据卷积的定义知:

$$\begin{aligned}(f*\Delta_\alpha)(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})&=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\\&=\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}))\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\\&=\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}))\frac{1}{\alpha^n}\Delta(\frac{\boldsymbol{y}}{\alpha})d\boldsymbol{y}\\&=\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{t})-f(\boldsymbol{x}))\Delta(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}\\&=\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}))\Delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

从而根据广义 Minkowski 不等式, 有:

$$\begin{aligned}(\int_{\mathbb{R}^n}|(f*\Delta_\alpha)(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} &= (\int_{\mathbb{R}^n}|\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}))\Delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|(f(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}))\Delta(\boldsymbol{y})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}d\boldsymbol{y}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}\Delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

记

$$F_\alpha(\boldsymbol{y})=(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}$$

则知

$$(\int_{\mathbb{R}^n}|(f*\Delta_\alpha)(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}=\int_{\mathbb{R}^n}F_\alpha(\boldsymbol{y})\Delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

希望证明

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}F_\alpha(\boldsymbol{y})\Delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0$$

注意到

$$\begin{aligned}F_\alpha(\boldsymbol{y}) &\le (\int_{\mathbb{R}^n}(|f(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})|+|f(\boldsymbol{x})|)^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}} \le (\int_{\mathbb{R}^n}(|f(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})|^p+|f(\boldsymbol{x})|^p)d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}\\ &= 2^{\frac{1}{p}}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}\parallel f\parallel_p\end{aligned}$$

从而

$$0\le|F_\alpha(\boldsymbol{y})\Delta(\boldsymbol{y})|\le 2\frac{1}{p}\parallel f\parallel_p\cdot|\Delta(\boldsymbol{y})|$$

又注意到由控制收敛定理有

$$\lim_{\alpha\to 0^+}F_\alpha(\boldsymbol{y})=0$$

届于 $\Delta\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n), f\in\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$, 自然知 $2\frac{1}{p}\parallel f\parallel_p\cdot|\Delta(\boldsymbol{y})|\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, 从而根据控制收敛定理有:

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}F_\alpha(\boldsymbol{y})\Delta(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^n}(\lim_{\alpha\to 0^+}F_\alpha(\boldsymbol{y})\Delta(\boldsymbol{y}))d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^n}0d\boldsymbol{y}=0$$

定理即证.

$\square$

Chapter 12

补充：初探泛函分析

泛函与广义函数本身并不属于数学分析这门课程的内容. 但 [4] 中尝试性的给出了介绍, 并将其应用在了 Weierstrass 逼近定理的证明与 Fourier 分析中. 本章沿其脉络浅要介绍广义函数的相关知识 (其实也仅仅是一些定义定理的整理), 给出 [4] 中对 Weierstrass 逼近定理的证明, 并为后面 Fourier 分析中证明 Weierstrass 三角逼近定理与 Dirichlet 核, Fejer 核与其他相关知识做准备.

12.1 卷积与卷积的性质

定义 12.1.1 *由关系式*

$$(u*v)(x):=\int_{\mathbb{R}}u(y)v(x-y)dy$$

(假定对一切 $x\in\mathbb{R}$, 该式中的反常积分都存在) 确定的函数 $u*v:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 叫作函数 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 与 $v:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的卷积.

下面是讨论卷积的存在性前所需要用到的一些定义. 设 $f:G\to\mathbb{C}$ 是定义在开集 $G\subset\mathbb{R}$ 上的实或复函数.

定义 12.1.2 *如果每一点 $x\in G$ 都有邻域 $U(x)\subset G$, 使得函数 $f|_{U(x)}$ 在 $U(x)$ 中可积, 就称函数 f 是 G 上的局部可积函数. 特别地, 如果 $G=\mathbb{R}$, 函数 f 局部可积的条件显然等价于: 对任何区间 $[a,b]$, 总有 $f|_{[a,b]}\in\mathfrak{R}[a,b]$.*

定义 12.1.3 *集合 $\{x\in G|f(x)=0\}$ 在 G 中的闭包称作函数 f 的支集, 记作 $\mathrm{supp}(f)$. 称函数 f 是在 G 中具有紧支集的函数, 如果其支集 $\mathrm{supp}(f)$ 是紧集.*

命题 12.1.1 (卷积的存在性) *下面三个条件中的每一个都是局部可积函数 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 与 $v:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的卷积 $u*v$ 存在的充分条件:*

1. *函数 $|u|^2$ 与 $|v|^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积*
2. *函数 $|u|,|v|$ 其中之一在 $\mathbb{R}$ 上可积, 而另一个在 $\mathbb{R}$ 上有界*
3. *函数 u,v 之一具有紧支集.*

证明

1. 根据均值不等式知

$$\int_{\mathbb{R}}|u(y)v(x-y)|dy\le\frac{1}{2}(\int_{\mathbb{R}}|u|^2(y)dy+\int_{\mathbb{R}}|v|^2(x-y)dy)=\frac{1}{2}(\int_{\mathbb{R}}|u|^2(y)dy+\int_{\mathbb{R}}|v|^2(y)dy)$$

进而由 Weierstrass 判别法即得结论.

2. 不妨设 $|u|$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 而在 $\mathbb{R}$ 上有 $|v| \le M$, 则此时:

$$\int_{\mathbb{R}} |u(y)v(x-y)|dy \le M \int -\mathbb{R}|u|(y)dy < +\infty$$

进而由 Weierstrass 判别法即得结论.

3. 不妨设 $\operatorname{supp}(u) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$, 则此时知

$$\int_{\mathbb{R}} u(y)v(x-y)dy = \int_a^b u(y)v(x-y)dy$$

而后者显然存在.

□

命题 12.1.2 (卷积的对称性) *如果卷积 $u*v$ 存在, 那么卷积 $v*u$ 存在, 且*

$$u*v = v*u.$$

证明

此即证明

$$\int_{\mathbb{R}} u(y)v(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} v(y)u(x-y)dy$$

作相应的换元即可.

□

命题 12.1.3 (卷积的保位移性) *设 T_{x_0} 是位移算子, 即 $(T_{x_0})f(x) = f(x-x_0)$, 且函数 u, v 的卷积 $u*v$ 存在, 则有下列等式:*

$$T_{x_0}(u*v) = (T_{x_0}u)*v = u*(T_{x_0}v).$$

证明

此即证

$$\int_{\mathbb{R}} u(y)v((x-x_0)-y)dy = \int_{\mathbb{R}} u(y-x_0)v(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} u(y)v((x-y)-x_0)dy$$

作相应的换元即可.

□

命题 12.1.4 (卷积的微分法) *如果 u 是局部可积函数, v 是具紧支集函数类 $C_0^{(m)}(0 \le m \le +\infty)$ 中的函数, 那么 $(u*v) \in C^{(m)}$, 且*

$$D^k(u*v) = u*(D^k v).$$

12.2 $\delta-$ 型函数与 Weierstrass 代数多项式逼近定理

下面介绍贯穿广义函数理论中极其重要的一类函数: $\delta-$ 型函数族.

定义 12.2.1 *由依赖于参变量 $\alpha \in A$ 的函数 $\Delta_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 构成的函数族 $\{\Delta_\alpha | \alpha \in A\}$ 称作 A 中关于基底 $\mathfrak{B}$ 的 $\delta-$ 型函数族, 如果其满足下面三个条件:*

1. 函数族中所有函数都是非负的 $(\Delta_\alpha(x) \ge 0)$;

2. 对于函数族中的任一函数 Δ_α, 有 $\int_{\mathbb{R}} \Delta_\alpha(x)dx = 1$;

3. 对于点 $0 \in \mathbb{R}$ 的任一邻域 U, 有 $\lim\limits_{\mathfrak{B}} \int_U \Delta_\alpha(x)dx = 1$.

最后一个条件和 $\lim\limits_{\mathfrak{B}} \int_{\mathbb{R}\setminus U} \Delta_\alpha(x)dx = 0$ 是等价的.

下面是一些 $\delta-$ 型函数的例子, 它们会在之后的许多地方出现.

例 12.2.1 设 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的任意非负紧支可积函数且 $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$. 当 $\alpha > 0$ 时构造函数 $\Delta_\alpha(x) := \frac{1}{\alpha}\varphi(\frac{x}{\alpha})$, 这些函数构成的函数族当 $\alpha \to 0^+$ 时显然是 $\delta-$ 型的.

例 12.2.2 考虑函数序列

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{\int_{|x|<1}(1-x^2)^n dx}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

要证明其为 $\delta-$ 型, 只需要验证定义(12.2.1)的第三条即可. 注意到任给 $\varepsilon \in (0, 1]$, 有:

$$0 \leq \int_\varepsilon^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_\varepsilon^1 (1-\varepsilon^2)^n dx = (1-\varepsilon^2)^n(1-\varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty$$

同时

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx > \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$$

进而条件 3 成立.

这个函数将会在 Weierstrass 代数多项式逼近定理中大放异彩.

例 12.2.3 设

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \frac{\cos^{2n} x}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx}, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

同样只需要验证第三个条件, 注意到:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2}B(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{n} > \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2n}$$

另一方面, 当 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时有:

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \leq \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varepsilon dx < \frac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^{2n}$$

进而有:

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \Delta_n(x)dx \to 0, \quad n \to \infty$$

进而条件 3 成立.

这个函数将会在 Weierstrass 三角多项式逼近定理中大放异彩.

定义 12.2.2 给定函数 $f : G \to \mathbb{C}$ 和集合 $E \subset G$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $\rho > 0$, 使得对任何 $x \in E$ 和任何 x 在 G 中的 $\rho-$ 邻域 $U_G^\rho(x)$ 中的点 y, 都成立关系式 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 则称 f 在集合 E 上一致连续.

下面是上面所说的两个" 大放异彩" 的先决条件:

命题 12.2.1 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是有界函数, 而 $\{\Delta_\alpha|\alpha\in A\}$ 当 $\alpha\to\omega$ 时是 $\delta-$ 型函数族, 如果对任何 $\alpha\in A$, 卷积 $f*\Delta_\alpha$ 都存在, 且函数 f 在集合 $E\subset\mathbb{R}$ 上一致连续, 那么在 E 上有:

$$(f*\Delta_\alpha)(x)\rightrightarrows f(x),\quad \alpha\to\omega$$

证明

既然 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 设 $|f(x)|\le M$. 任意给定 $\varepsilon>0$, 根据一致连续的定义选取相应的 ρ, 并用 $U(0)$ 来表示点 0 在 $\mathbb{R}$ 中的 $\rho-$ 邻域.

考虑到卷积的对称性, 可得:

$$\begin{aligned}
&|(f*\Delta_\alpha)(x)-f(x)|\\
=&|\int_{\mathbb{R}}f(x-y)\Delta_\alpha(y)dy-f(x)|\\
=&|\int_{\mathbb{R}}f(x-y)\Delta_\alpha(y)dy-f(x)\cdot\int_{\mathbb{R}}\Delta_\alpha(y)dy|\\
=&|\int_{\mathbb{R}}f(x-y)\Delta_\alpha(y)dy-\int_{\mathbb{R}}f(x)\Delta_\alpha(y)dy|\\
=&|\int_{\mathbb{R}}(f(x-y)-f(x))\Delta_\alpha(y)dy|\le\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)-f(x)|\cdot|\Delta_\alpha(y)|dy\\
=&\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)-f(x)|\Delta_\alpha(y)dy\\
=&\int_{U(0)}|f(x-y)-f(x)|\Delta_\alpha(y)dy+\int_{\mathbb{R}\setminus U(0)}|f(x-y)-f(x)|\Delta_\alpha(y)dy\\
<&\int_{U(0)}\varepsilon\cdot\Delta_\alpha(y)dy+\int_{\mathbb{R}\setminus U(0)}2M\Delta_\alpha(y)dy\\
\le&\varepsilon+2M\int_{\mathbb{R}\setminus U(0)}\Delta_\alpha(y)dy
\end{aligned}$$

当 $\alpha\to\omega$ 时, 最后的积分趋零, 进而命题得证.

□

接下来的两个推论就体现了这一致收敛性的强大之处.

推论 12.2.1 任何一个在 $\mathbb{R}$ 上连续的具紧支集的函数能够用无限次可微的具紧支集的函数来一致逼近.

证明

此即验证函数族 C_0^∞ 在上述意义下在 C_0 中处处稠密. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}k\cdot\exp(-\frac{1}{1-x^2}), & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$$

其中乘以 k 是为了保证 $\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx=1$.

首先, 函数 φ 是无限可微的具紧支集的函数. 进而由例(12.2.1)知无限可微函数族 $\Delta_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha}\varphi(\frac{x}{\alpha})$
当 $\alpha\to0^+$ 时是 $\delta-$ 型的. 如果 $f\in C_0$, 显然有 $f*\Delta_\alpha\in C_0$. 进一步, 根据卷积的微分法知 $f*\Delta_\alpha\in C-0^{(\infty)}$. 最后根据上述命题可知: 在 $\mathbb{R}$ 上, 当 $\alpha\to0^+$ 时, 有 $f*\Delta_\alpha\rightrightarrows f$.

□

推论 12.2.2 (Weierstrass 代数多项式逼近定理) 每一个在闭区间上连续的函数在这个区间上都能够用代数多项式一致逼近.

这里 [4] 中把一般情况写成了注, 但这其实是之前的一道作业, 这里就直接抄录下来.

证明

考虑函数序列

$$\Delta_n(x)=\begin{cases}\frac{(1-\frac{x^2}{M^2})^n}{\int_{|\frac{x}{M}|<1}(1-\frac{x^2}{M^2})^n dx}, & |\frac{x}{M}|\le 1\\ 0, & |\frac{x}{M}|>1\end{cases}$$

可以注意到这仅仅是将已经知道的 $\delta-$ 型序列

$$\Delta_n(x)=\begin{cases}\frac{(1-x^2)^n}{\int_{|x|<1}(1-x^2)^n dx}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

中的 x 替换为 $\frac{x}{M}$, 从而可知新定义的函数序列也为 $\delta-$ 型. 对 $\mathbb{R}$ 中的任意紧集 K, 知既然其为有界闭集, 必存在一个闭区间 $[a,b]$ 满足 $K\subset[a,b]$. 不失一般性, 可设 $a=-b$, 因为总可以通过将 x 换成 $x-s$ 来得到不关于原点对称的区间上相同的结论. 进一步, 可设 a 是 K 的下确界, b 是 K 的上确界. 设 K 能被划分成连通分支 $[a_1,b_1]=[a,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_k,b_k]=[a_k,b]$. 现在将给定的函数 $f\in C(\bigcup\limits_{n=1}^{k}[a_n,b_n])$ 按下面的方式延拓成 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $F(x)$：当 $x\in\mathbb{R}\backslash[a-1,b+1]$ 时, 令 $F(x)=0$；当 $x\in[b_{i-1},a_i](i=2,\cdots,k)$ 时, 令 $F(x)=f(b_{i-1})$. 而在区间 $[a-1,a]$ 和 $[b,b+1]$ 上, 则分别将 0 与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 与 0 线性连接起来. 现在取用开头构造的 $\Delta_n(x)$ 并令 $M=b+1.$, 则由命题 5 可以推出, 在 $[a-1,b+1]$ 上, 当 $n\to\infty$ 时, $F*\Delta_n\rightrightarrows F$, 特别地这对每个 $[a_i,b_i](i=1,\cdots,k)$ 也成立. 而此时有：

$$\begin{aligned}F*\Delta_n(x):&=\int_{-\infty}^{+\infty}F(y)\Delta_n(x-y)dy=\int_{-b-1}^{b+1}F(y)\Delta_n(x-y)dy\\&=\int_{-b-1}^{b+1}F(y)p_n(1-(\frac{x-y}{b+1})^2)^n dy=\int_{-b-1}^{b+1}F(y)(\sum_{i=0}^{2n}a_i(y)x^i)dy\\&=\sum_{i=0}^{2n}(\int_{-b-1}^{b+1}F(y)a_i(y)dy)x^i\end{aligned}$$

最后的表达式是 $2n$ 次多项式 $P_{2n}(x)$, 这便证明了当 $n\to\infty$ 时, 在 $[a-1,b+1]$ 上有 $P_{2n}\rightrightarrows F$. 特别地有 $P_{2n}|_{[a_i,b_i]}\rightrightarrows F|_{[a_i,b_i]}=f_{[a_i,b_i]}, i=1,\cdots,k$, 从而命题得证.

12.3 广义函数的定义

[4] 中的广义函数定义是以一个例子给出的:

例 12.3.1 *设 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 取 C_0 类函数 (在 $\mathbb{R}$ 上连续紧支的函数) 作为测试函数, 函数 f 产生如下作用在 C_0 上的泛函*

$$\langle f,\varphi\rangle:=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi(x)dx$$

利用 $\delta-$ 型的具紧支集的函数族, 容易推出, 在 C_0 上 $\langle f,\varphi\rangle\equiv 0$ 当且仅当在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x)\equiv 0$.

这个例子下面一大段话的意思可以用一个图来说明:

首先选定一个函数 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 比如说 f_1. 这时, 随着 f_1 的选定, 固定了这么一个等待填空的积分:

$$\int_{\mathbb{R}}f_1(x)\Box dx$$

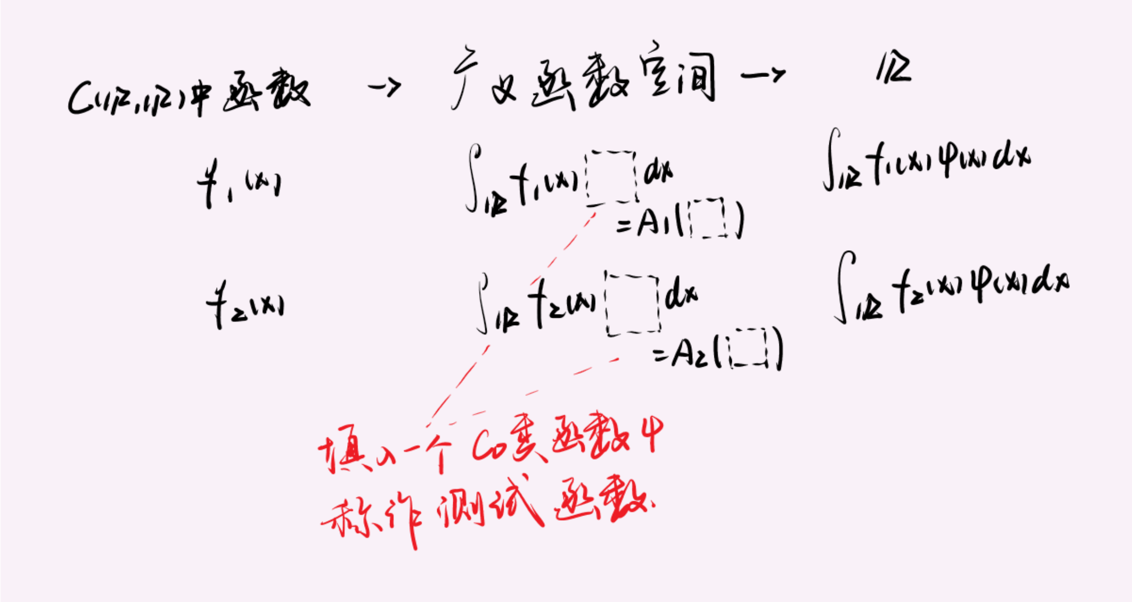


图 12.1: 广义函数图解

上面的 □ 处应该填一个叫测试函数的函数, 在这个例子中测试函数是在 C_0 类函数里面选的, 所以可以把 C_0 类函数叫作测试函数空间. 如果把上面的积分视作一个新的函数 A_1, 这个函数自然以 □ 的部分作为变量, 即:

$$A_1(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\varphi(x)dx$$

从而测试函数空间可以看做是 A_1 的定义域. 而随着这个 $\varphi(x)$ 的固定, 上式自然就成了一个一元反常积分, 最后应该是一个实数. 这便确定了一个从测试函数空间 C_0 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 这样的映射就称作泛函. 对于这个特别的例子而言, 因为积分是线性的, 所以这个例子又可以称作是线性泛函. 注意 A_1 本身是先定义了 f_1 才能定义的, 而随着 f_1 的变化, 比如把 f_1 换成 f_2, 上面的积分填空题自然就变成了:

$$\int_{\mathbb{R}} f_2(x)\square dx$$

这就是一个新的泛函 A_2. 而在标准的泛函分析教材中, 测试函数空间上的一切线性连续泛函都叫作广义函数.

上面是便于理解而对泛函和广义函数概念作出的笼统解释, 注意到最后我们只是简单提到了"连续泛函", 这里的连续性本质上是依赖于测试函数空间 C_0 和值域 $\mathbb{R}$ 的结构的. 而泛函本身也有收敛性: 如果用 P 表示测试函数空间, 下面的定义就给出了广义函数空间, 广义函数和泛函的弱收敛性 (即点态收敛性或逐点收敛性).

定义 12.3.1 *设 P 是由函数构成的一个线性空间, 将其作为测试函数空间. P 上所有线性连续 (可以是实的也可以是复的) 泛函构成的线性空间 P' 叫作 P 上的广义函数空间. 同时假定, 每个 $f \in P$ 产生一个泛函 $A_f = \langle f, \cdot \rangle \in P'$ 且映射 $f \mapsto A_f$ 是 P 到 P' 的连续嵌入. P' 中的元叫广义函数. 广义函数的收敛性如下定义:*

$$P' \ni A_n \to A \in P' := \forall \varphi \in P(A_n(\varphi) \to A(\varphi))$$

即泛函的弱收敛性.

上面最后的收敛性可以这么理解. 之前已经说过随着 f 的改变, 它产生的泛函 A 也是随即改变的. 如果现在给出一个函数列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$, 与之相伴自然就产生了一列积分填空题:

$$
\begin{aligned}
A_1(\square) &= \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\square dx \\
A_2(\square) &= \int_{\mathbb{R}} f_2(x)\square dx \\
&\vdots \\
A_n(\square) &= \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\square dx \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

如果给一个测试函数 φ, 这些填空题就产生了一列实数:

$$
\begin{aligned}
A_1(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\varphi(x)dx \\
A_2(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} f_2(x)\varphi(x)dx \\
&\vdots \\
A_n(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

如果现在再给一个函数 f 产生的泛函 A, 当填入 φ 时得到的数

$$
A(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx
$$

满足:

$$
\lim_{n\to\infty} A_n(\varphi) = A(\varphi)
$$

就说广义函数 A_n 收敛到 A.

根据定义可以知道, 测试函数空间本身可以有很多种选择. 但是其中有一种是特别香的, 我们一般叫它基本测试函数空间[1], 它的定义如下:

定义 12.3.2 *对于空间 $C_0^{(\infty)}(G,\mathbb{C})$(即从 G 到 $\mathbb{C}$ 的无限可微紧支函数所构成的空间), 在其中引入如下的收敛性: 如果存在紧集 $K \subset G$, 使得由在 $C_0^{(\infty)}(G,\mathbb{C})$ 中的函数 φ_n 构成的函数序列 $\{\varphi_n\}$ 中的所有函数的支集都含在 K 中, 并且存在一个 $C_0^{(\infty)}(G,\mathbb{C})$ 中的函数 φ, 在 K 上对任何的 $m = 0, 1, 2, \cdots$, 当 $n \to \infty$ 时都有 $\varphi_n^{(m)} \rightrightarrows \varphi^{(m)}$, 就称在 $C_0^{(\infty)}(G,\mathbb{C})$ 中序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于 φ. 称引入了这个收敛性的空间 $C_0^{(\infty)}(G,\mathbb{C})$ 为基本测试函数空间, 记作 $\mathfrak{D}(G)$. 当 $G = \mathbb{R}$ 时, 简记作 $\mathfrak{D}$.*

可以看到基本测试函数空间的收敛性还是相当严格的, 这也就给其中的函数带来了特别良好的性质. 如果泛函 A 把基本测试函数空间当成测试函数空间, 其所对应的广义函数空间就记作 $\mathfrak{D}'(G)$, 简记作 $\mathfrak{D}'$. 之后我们就研究 $\mathfrak{D}$ 和 $\mathfrak{D}'$ 中的函数了.

在这一节的末尾, 需要提一嘴我们之前介绍的 $\delta-$ 型函数. 这类函数在广义函数中扮演着十分奇妙的角色, 请看下面意识流一样的演示:

$$
\begin{aligned}
\langle \delta, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} (\lim_{\alpha\to 0^+} \delta_\alpha(x))\varphi(x)dx = \lim_{\alpha\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \delta_\alpha(x)\varphi(x)dx \\
&\sim \lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^\alpha \delta_\alpha(x)\varphi(x)dx \sim \lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^\alpha \delta_\alpha(x)\varphi(0)dx \sim \varphi(0)
\end{aligned}
$$

[1]这个函数空间的学名叫 Sobolev-Schwarz 广义函数空间, 简称 Schwarz 广义函数空间, 后者是大多研究者的叫法.

但注意 δ 本身不是一个正常的函数, 所以其实没法用 $\int_{\mathbb{R}}\delta(x)\varphi(x)dx$ 来计算 $\langle\delta,\varphi\rangle$ 的值. 这个值其实是定义出来的, 而定义的想法就是上面的演示:

$$\langle\delta,\varphi\rangle := \varphi(0).$$

与之相对的是正则广义函数的概念:

定义 12.3.3 *$F\in\mathfrak{D}'(G)$ 称为正则广义函数, 如果它能表成*

$$F(\varphi)=\int_G f(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in\mathfrak{D}(G),$$

其中 f 是 G 上的局部可积函数.

12.4 广义函数与函数的乘积

如果 f 在 $\mathbb{R}$ 上局部可积, $g\in C^{(\infty)}$, 那么对任何函数 $\varphi\in C_0^{(\infty)}$, 一方面有 $g\varphi\in C_0^{(\infty)}$, 另一方面根据乘法分配律显然成立等式:

$$\int_{\mathbb{R}}(f(x)\cdot g(x))\cdot\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)\cdot(g(x)\cdot\varphi(x))dx$$

为了看得更清楚, 这可以简写成

$$\int_{\mathbb{R}}(f\cdot g)(x)\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)(g\cdot\varphi)(x)dx$$

进一步就有:

$$\langle f\cdot g,\varphi\rangle=\langle f,g\cdot\varphi\rangle.$$

由此就可以得出广义函数 $F\in\mathfrak{D}'$ 与函数 $g\in C^{(\infty)}$ 的乘积 $F\cdot g$ 的定义:

$$\langle F\cdot g,\varphi\rangle := \langle F,g\cdot\varphi\rangle$$

上面的式子其实也是很多广义函数等式的表示思路: φ 是任给的一个测试函数, 而广义函数 $F\cdot g$ 的值对每一个 φ 都是给定的, 这也就确定了 $F\cdot g$ 本身 (就像一个正常的函数 $f(x)$, 当你知道 x 在区间 $[a,b]$ 上取的每一点, 对应的 $f(x)$ 的值的时候, $f(x)$ 自己也就确定了).

特别地, 对于广义函数 δ 而言, 如果 $g\in C^{(\infty)}$, 有:

$$\langle\delta\cdot g,\varphi\rangle=\langle\delta,g\cdot\varphi\rangle=(g\cdot\varphi)(0)=g(0)\varphi(0).$$

12.5 广义函数的微分

如果 $f\in C^{(1)},\varphi\in C_0^{(\infty)}$, 那么由分部积分法有:

$$\int_{\mathbb{R}}f'(x)\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)df(x)=\varphi(x)f(x)|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi'(x)dx=-\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi'(x)dx.$$

其中最后一步是因为 φ 是个紧支函数, 这说明其在足够远处取 0. 这个等式是下面的广义函数 $F\in\mathfrak{D}'$ 的微分法的基本定义出发点:

$$\langle F',\varphi\rangle := -\langle F,\varphi'\rangle$$

可以来计算几个猎奇的例子, 这些例子突破了传统的求导.

例 12.5.1 求 *Heaviside* 函数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

的导数 H'.

解

取 $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, 有:

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)|_0^{\infty} = \varphi(0)$$

但是 $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, 这说明:

$$\langle H', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

从而在广义函数的意义上有:

$$H' = \delta.$$

例 12.5.2 求 $\langle \delta', \varphi \rangle$.

解

知

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0).$$

不过广义函数的高阶导数和正常函数的高阶导数定义思路差不多: $F^{(n+1)} := (F^{(n)})'$. 广义函数的导数有下面几个性质:

命题 12.5.1 任何广义函数 $F \in \mathfrak{D}'$ 都是无穷次可微的.

证明

这是因为任给 $m \in \mathbb{N}$, 有:

$$\langle F^{(m)}, \varphi \rangle = \langle (F^{(m-1)})', \varphi \rangle = -\langle F^{(m-1)}, \varphi' \rangle = \cdots = (-1)^m \langle F, \varphi^{(m)} \rangle.$$

□

命题 12.5.2 微分算子 $D : \mathfrak{D}' \to \mathfrak{D}'$ 是线性的.

这一条显然.

命题 12.5.3 如果 $F \in \mathfrak{D}', g \in C^{(\infty)}$, 那么 $(F \cdot g) \in \mathfrak{D}'$, 且有 *Leibniz* 公式:

$$(F \cdot g)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C - m^k F^{(k)} \cdot g^{(m-k)}$$

证明

作为例子我们证明 $m = 1$ 时这个式子成立:

$$\begin{aligned}\langle (F \cdot g)', \varphi \rangle &:= -\langle Fg, \varphi \rangle = -\langle F, g \cdot \varphi' \rangle = -\langle F, (g \cdot \varphi)' - g' \cdot \varphi \rangle \\ &= -\langle F, (g \cdot \varphi)' \rangle + \langle F, g' \cdot \varphi \rangle = \langle F', g\varphi \rangle + \langle F, g' \cdot \varphi \rangle \\ &= \langle F' \cdot g, \varphi \rangle + \langle F \cdot g', \varphi \rangle = \langle F' \cdot g + F \cdot g', \varphi \rangle.\end{aligned}$$

一般的情况可以用归纳法.

□

命题 12.5.4 微分算子 $D : \mathfrak{D}' \to \mathfrak{D}'$ 是连续的.

证明

设在 $\mathfrak{D}'$ 中当 $m \to \infty$ 时有 $F_m \to F$. 此时当 $m \to \infty$ 时对任何函数 $\varphi \in \mathfrak{D}$ 都有 $\langle F_m, \varphi \rangle \to \langle F, \varphi \rangle$. 此时:

$$\langle F_m', \varphi \rangle = -\langle F_m, \varphi' \rangle \to -\langle F, \varphi' \rangle = \langle F', \varphi \rangle.$$

□

命题 12.5.5 如果由局部可积函数 $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 组成的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 的每个紧集上一致收敛, 那么在广义函数意义下它可以逐项微分任意次, 且由此得到的级数在 $\mathfrak{D}'$ 中收敛.

证明

注意到级数的部分和 $S_m(x)$ 本身也是局部可积的, 从而有:

$$\langle S_m, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} S_m(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\varphi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\varphi(x)dx = \langle S, \varphi \rangle$$

这其中极限和积分号能交换是因为一致收敛性. 再根据微分算子的连续性即有 $S_m' \to S'$.

经过了这一系列讨论, 可以发现广义函数的微分, 包括广义函数意义本身, 都是正常的函数 (称作古典函数理论) 的极大拓展. 尤其是 $\delta-$ 型函数这个概念与命题(12.2.1), 它们会在 Fourier 分析中再次出现, 彼时将为 Weierstrass 三角逼近定理带来一个十分简洁的证明. [4] 在这些内容后其实还介绍了多维的广义函数, 但这在之后的章节没有什么突出的应用, 在此就干脆省略好了.

Chapter 13

补充：初探渐近展开

渐近展开的内容出现在 [4] 的最后一章, 大部分的数学分析教科书都没有涉及这部分知识. 本章也算是我自己的整理笔记吧, 下面的内容主要来自 [4].

13.1 渐近公式和渐近级数

13.1.1 基本定义

谈起渐近行为, 一开始讲到的其实是远在刚刚学习极限时接触的等价量, 同阶量和高阶量. 这些量一般叫做函数的渐近估计, 定义如下:

定义 13.1.1 *设 $f:X\to Y$ 和 $g:X\to Y$ 是定义在集合 X 上的实值, 复值, 或一般向量值 (与集合 Y 的性质相对应) 的函数, 又设 $\mathfrak{B}$ 是 X 中的基. 这时, 关系式*

$$\begin{aligned} f=O(g)\text{或}f(x)=O(g(x)),&\quad x\in X\\ f=O(g)\text{或}f(x)=O(g(x)),&\quad \text{在基 }\mathfrak{B}\text{ 下}\\ f=o(g)\text{或}f(x)=o(g(x)),&\quad \text{在基 }\mathfrak{B}\text{ 下}\end{aligned}$$

根据它们自身的定义分别表示: 等式 $|f(x)|=\alpha(x)|g(x)|$ 中的实函数 $\alpha(x)$ 分别是 X 上的有界, 关于基 $\mathfrak{B}$ 最终有界和关于基 $\mathfrak{B}$ 为无穷小的函数.

定义 13.1.2 *关系式*

$$f\sim g\text{或}f(x)\sim g(x)\text{在基 }\mathfrak{B}\text{ 下}$$

通常叫做这两个函数在基 $\mathfrak{B}$ 下渐进相等, 或称它是在基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近等式[1], 它表示在基 $\mathfrak{B}$ 下有 $f(x)=g(x)+o(g(x))$.

不过同阶还有一个特殊的符号来表示:

定义 13.1.3 *如果 $f=O(g)$ 且同时有 $g=O(f)$, 则说 $f\asymp g$, 称 f 和 g 关于给定的基是同阶量.*

在不特别声明的情况下, 下面就设 $X=Y=\mathbb{R}$(也即研究的函数都是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$) 的, 并取 $\mathfrak{B}$ 是基 $X\ni x\to 0$ 或基 $X\ni x\to\infty$.

[1] 也经常用 $\simeq$ 表示渐近相等.

13.1.2 渐近序列和渐近级数

渐近展开的定义如下:

定义 13.1.4 设 $f(x)$ 是定义在集合 X 上的函数, $\mathfrak{B}$ 是集合 X 的一个基. 把在基 $\mathfrak{B}$ 下都成立的渐近公式序列

$$\begin{aligned}
f(x) &= \psi_0(x) + o(\psi_0(x)), \\
f(x) &= \psi_0(x) + \psi_1(x) + o(\psi_1(x)), \\
&\vdots \\
f(x) &= \psi_0(x) + \psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x) + o(\psi_n(x)), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

写成如下形式:

$$f(x) \simeq \psi_0(x) + \psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x) + \cdots$$

或者更简单地记成:

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x),$$

称它为函数 f 在给定的基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近展开.

根据上述形式对比可得:

$$o(\psi_n(x)) = \psi_{n+1}(x) + o(\psi_{n+1}(x)), \quad \text{在基 } \mathfrak{B} \text{ 下},$$

从而对任何 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 都有

$$\psi_{n+1}(x) = o(\psi_n(x)), \quad \text{在基 } \mathfrak{B} \text{ 下},$$

不过一般而言, 这些 $\{\psi_n(x)\}$ 都可以由一些比较基本的序列得来. 比方说 $1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \cdots$ 可以写成 $1 + 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots$, 从而在研究问题的时候我们更多的去考察 $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ 就可以了. 同样, 一般情况下, 渐近展开通常以函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$ 的线性组合

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots$$

的形式出现, 进而对 $\{\varphi_k(x)\}$ 有下述定义:

定义 13.1.5 设 X 是一个集合, 其中有一个基 $\mathfrak{B}$. 定义在 X 上的函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 叫做在基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近序列, 如果对于这个序列中任意相邻的两项 φ_n, φ_{n+1}, 都在基 $\mathfrak{B}$ 下成立 $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$, 而且则在基 $\mathfrak{B}$ 的任一元素上, 任何函数 $\varphi_n \in \{\varphi_n(x)\}$ 都不恒等于零.

上面的定义中最后一句话" 任何函数 $\varphi_n \in \{\varphi_n(x)\}$ 都不恒等于零" 是因为, 如果有某个 $\varphi_n(x) \equiv 0$, 那么 $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \equiv 0$, 进而 $\varphi_k(x) \equiv 0 (k \geq n)$.

例 13.1.1 下面的序列都是渐近序列:

1. $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots, \quad$ 当 $x \to 0$;
2. $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots, \frac{1}{x^n}, \cdots, \quad$ 当 $x \to \infty$;

3. $x^{p_1}, x^{p_2}, \cdots, x^{p_n}, \cdots,$ 当 $x \to 0, p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots;$

4. $x^{p_1}, x^{p_2}, \cdots, x^{p_n}, \cdots,$ 当 $x \to \infty, p_1 > p_2 > \cdots > p_n > \cdots;$

下面就用前面提到的线性组合的形式重新写一遍渐近展开的定义:

定义 13.1.6 *如果 $\{\varphi_n\}$ 是在基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近序列, 则形如*

$$f(x) \simeq c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots$$

的渐近展开叫作函数 f 在基 $\mathfrak{B}$ 下按渐近序列 $\{\varphi_n\}$ 的渐近展开或渐近级数.

13.1.3 渐近展开的唯一性

如果两个 (不同的) 函数 f 和 g 在某个基下是相等的 (也即它们的极限相等), 按照先前极限的经验, 它们应该在这个基下有同一种渐近行为, 如果划到等价类里就相当于是同一个元素, 这就是我们接下来要介绍的唯一性. 但在此之前, 需要特别强调一件事情: 渐近序列的选取是有讲究的. 不是每个函数都能随便选取渐近序列来进行渐近展开, 比如下面这个例子:

例 13.1.2 设 $\varphi_n(x) = \frac{1}{x^n}, n = 0, 1, 2, \cdots,$ 则 $e^{-x} = o(\varphi_n(x)), x \to +\infty.$

在这个例子中 e^{-x} 的渐近展开式只能是 $0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$, 但这没有什么意义. 这说明问题出在渐近序列的选取上. 这种现象引出了下面渐近零元的定义, 它相当于是上面所提到的等价类中的零元.

定义 13.1.7 *如果 $\{\varphi_n(x)\}$ 是在基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近序列, 则称对每个 $n = 0, 1, \cdots$ 都有 $f(x) = o(\varphi_n(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下成立的函数 f 为关于序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的渐近零元.*

现在, 既然定义了等价类中的零元, 就可以说等价类中的元素什么时候" 相等" 了:

定义 13.1.8 *称函数 f 和 g 在基 $\mathfrak{B}$ 下关于该基的渐近函数序列 $\{\varphi_n\}$ 是渐近重合的, 如果这两个函数的差 $f - g$ 关于序列 $\{\varphi_n\}$ 是渐近零元.*

命题 13.1.1 (渐近展开的唯一性) *设 $\{\varphi_n\}$ 是在某一基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近函数序列.*

1. *如果在基 $\mathfrak{B}$ 下函数 f 能按序列 $\{\varphi_n\}$ 渐近展开, 则展开式是唯一的.*

2. *如果函数 f 和 g 都能按序列 $\{\varphi_n\}$ 渐近展开, 则当且仅当函数 f 和 g 在基 $\mathfrak{B}$ 下关于序列 $\{\varphi_n\}$ 渐近重合时, 它们的渐近展开是相同的.*

证明

只需要证明 1. 就足够了. 现在设函数 φ 在基 $\mathfrak{B}$ 的任何元素上都不恒等于零 (否则按照定义(13.1.5)知这种情况就没有研究的意义了), 下面证明如果在基 $\mathfrak{B}$ 下有 $f(x) = o(\varphi(x))$, 且同时在基 $\mathfrak{B}$ 下有 $f(x) = c\varphi(x) + o(\varphi(x))$, 则 $c = 0$.

事实上, 由 $f(x) = c\varphi(x) + o(\varphi(x))$ 知在基 $\mathfrak{B}$ 下有:

$$|f(x)| = |c\varphi(x) + o(\varphi(x))| \geq |c||\varphi(x)| - o(|\varphi(x)|)$$

进而如果 $|c| > 0$, 总是能找到基中的某个元素 (也即在极限过程中找到 N), 使得在它其中的元素 (相当于在极限过程中令 $n > N$) 都成立不等式 $|f(x)| \geq \frac{c}{2}|\varphi(x)|$. 但用同样的道理可知既然 $f(x) =$

$o(\varphi(x))$, 总能找到基中的某元素使得在其中都有 $|f(x)| \le |\frac{c}{3}||\varphi(x)|$, 进而有 $\frac{|c|}{2}|\varphi(x)| < \frac{|c|}{3}|\varphi(x)|$, 从而 $|c| > 0$ 必导出矛盾, 进而只能有 $|c| = 0 \Rightarrow c = 0$.

上面这个命题说明了渐近零元的渐近展开是唯一的.

下面再研究一般函数 f 按序列 $\{\varphi_n\}$ 的渐近展开.

设同时在基 $\mathfrak{B}$ 下有

$$f = c_0\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x)) = \tilde{c}_0\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$$

将二者相减有:

$$0 = (c_0 - \tilde{c}_0)\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))\text{在基 } \mathfrak{B} \text{ 下}$$

但注意到同时有 $0 = o(\varphi_0(x))$, 故只能有 $c_0 - \tilde{c}_0 = 0 \Rightarrow c_0 = \tilde{c}_0$, 进而由归纳可得原命题成立.

□

13.1.4 渐近公式的计算性质与渐近幂级数

命题 13.1.2 (渐近展开的线性性) *如果函数 f 和 g 可在基 $\mathfrak{B}$ 下按渐近序列 $\{\varphi_n\}$ 渐近展开: $f \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n, g \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n$, 则它们的线性组合 $\alpha f+\beta g$ 也能这样展开, 且 $(\alpha f+\beta g) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)\varphi_n$.*

这个命题可以由 $ao(\varphi(x)) + bo(\varphi(x)) = o(\varphi(x))$ 推出.

命题 13.1.3 (渐近等式的积分运算) *设 f 是区间 $I = [a,\omega)$(或 $(\omega,a]$) 上的连续函数:*

1. *如果 g 是区间 I 上的非负连续函数, 而积分 $\int_a^\omega g(x)dx$ 发散. 设*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt$$

则从关系式

$$f(x) = O(g(x)), \quad f(x) = o(g(x)), \quad f(x) \sim g(x) \quad \text{当} I \ni x \to \omega$$

可以相应地得到:

$$F(x) = O(G(x)), \quad F(x) = o(G(x)), \quad F(x) \sim G(x) \quad \text{当} I \ni x \to \omega$$

2. *如果区间 $I = [a,\omega)$ 上的非负连续函数 $\varphi_n(x), n = 0, 1, \cdots$ 当 $I \ni x \to \omega$ 时组成一个渐近序列:*

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$$

而当 $x \in I$ 时积分 $\Phi_n(x) = \int_x^\omega \varphi_n(x)dx$ 收敛, 则当 $I \ni x \to \omega$ 时, 函数 $\Phi_n(x), n = 0, 1, \cdots$ 也组成一个渐近序列:

$$\int_x^\omega \varphi_0(t)dt, \int_x^\omega \varphi_1(t)dt, \int_x^\omega \varphi_2(t)dt, \cdots$$

3. *如果积分 $\mathfrak{F}(x) = \int_x^\omega f(t)dt$ 收敛, 而函数 $f(x)$ 当 $I \ni x \to \omega$ 时按 2. 中的渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 有渐近展开 $f(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, 则对于函数 $\mathfrak{F}$ 成立当 $I \ni x \to \omega$ 时按渐近序列 $\{\Phi_n(x)\}$ 的渐近展开式 $\mathfrak{F}(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(x)$.*

证明

1. 相当于说明了函数的渐近行为可以推广到它们积分的渐近行为. 下面首先证明第一个式子:$f(x)=O(g(x))\Rightarrow F(x)=O(G(x))$.

如果当 $I\ni x\to\omega$ 时有 $f(x)=O(g(x))$, 按照定义知存在 $x_0\in I$ 和常数 $M>0$ 使得当 $x\in[x_0,\omega)$ 时有 $|f(x)|\le M|g(x)|=Mg(x)$. 因为 f 本身是连续函数, 故在 $[a,x_0]$ 上 f 必有界, 进而 $\int_a^{x_0}f(x)dx$ 有界. 从而:

$$\begin{aligned}|F(x)|=|\int_a^{\omega}f(x)dx|=|(\int_a^{x_0}+\int_{x_0}^{\omega})f(x)dx|&\le|\int_a^{x_0}f(x)dx|+|\int_{x_0}^{\omega}f(x)dx|\\&\le|\int_a^{x_0}f(x)dx|+M\int_{x_0}^{\omega}g(x)dx=O(\int_a^{x_0}g(x)dx)\end{aligned}$$

而对剩下两个式子, 根据 L'Hospital 法则有:

$$\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}$$

从而当 $I\ni x\to\omega$ 时 $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)}=1$ 可推出相应的结论. 命题即证.

□

2. 相当于说明了渐近序列的积分依旧是渐近序列. 根据 $\Phi_n(x)$ 的定义知 $I\ni x\to\omega$ 时有 $\Phi_n(x)\to 0$, 从而由 L'Hospital 法则有:

$$\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}=0$$

进而 $\Phi_{n+1}(x)=o(\Phi_n(x))$, 满足渐近序列的条件.

□

3. 相当于说明了在渐近展开两边作形式积分, 所得到的结果依旧是渐近展开. 把 $f(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$
在有限处截断并写开:

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+r_n(x)$$

注意到在 2. 中特别说明了 $\varphi_n(x),n=0,1,\cdots$ 都是连续函数, 从而

$$r_n(x)=f(x)-c_0\varphi_0(x)-c_1\varphi_1(x)-\cdots-c_n\varphi_n(x)$$

也是连续函数, 进而当 $I\ni x\to\omega$ 时有 $R_n(x)=\int_x^{\omega}r_n(t)dt=0$. 又根据渐近展开的定义知 $I\ni x\to\omega$ 时本身有 $r_n(x)=o(\varphi_n(x))$, 从而:

$$\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{R_n(x)}{\Phi_n(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\int_x^{\omega}r_n(t)dt}{\int_x^{\omega}\Phi_n(t)dt}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)}=0$$

从而当 $I\ni x\to\omega$ 时, 等式

$$\mathfrak{F}(x)=c_0\Phi_0(x)+c_1\Phi_1(x)+\cdots+c_n\Phi_n(x)+R_n(x)$$

中 $R_n(x)=o(\Phi_n(x))$, 满足渐近展开的定义, 命题即证.

但是需要注意一点, 渐近等式和渐近级数一般不能进行微分, 有例如下:

例 13.1.3 *函数 $f(x)=e^{-x}\sin(e^x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微, 且当 $x\to+\infty$ 时关于渐近序列 $\{\frac{1}{x^n}\}$ 是渐近零元. 但函数 $\frac{1}{x^n}$ 的导数依旧可以写成 $\frac{1}{x^k}$ 的形式, $f'(x)=-e^{-x}\sin(e^x)+\cos(e^x)$ 却已经不再是渐近零元了, 甚至当 $x\to+\infty$ 时关于 $\{\frac{1}{x^n}\}$ 没有渐近展开.*

抛开这个例子, 其实一般情况下研究函数的渐近行为所经常使用的渐近序列依旧是 $\{x^n\}$ 和 $\{\frac{1}{x^n}\}$, 而这两者之间只不过是倒数关系, 通过换元是可以相互变动的, 所以为了方便就只讨论 $\{x^n\}$ 好了. 届于关于这个序列的渐近展开是幂级数的形式, 一般就称之为渐近幂级数. 为了讨论它的性质, 设 0 是集合 E 的极限点, 而当 $E \ni x \to 0$ 时有:

$$f(x) \simeq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$g(x) \simeq b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

于是有下述性质成立:

命题 13.1.4 (线性性) $(\alpha f + \beta g) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$.

这其实就是渐近展开线性性的一种特殊情况, 证明就略过了.

命题 13.1.5 (渐近幂级数乘法) $(f \cdot g)(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 其中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, n = 0, 1, \cdots$.

证明

根据高阶无穷小 o 的性质, 当 $E \ni x \to 0$ 时有:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n))(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))\\ &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

命题即证.

□

命题 13.1.6 (渐近幂级数除法) 如果 $b_0 \neq 0$, 则 $(\frac{f}{g})(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, 其中系数 d_n 从以下的递推关系式求出:

$$a_0 = b_0 d_0, a_1 = b_0 d_1 + b_1 d_0, \cdots, a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k d_{n-k}.$$

证明

当 $b_0 \neq 0$, 知当 $E \ni x \to 0$ 时 $g(x) \neq 0$, 从而可以设 $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$. 现在按命题(13.1.5)选取 $h(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + r_n(x)$ 的系数 $d_0, d_1, \cdots, d_n$, 只需验证这确实是渐近展开, 也即 $r_n(x) = o(x^n)$ 即可. 根据恒等式 $f(x) = g(x)h(x)$ 知:

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\\ &= (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n))(d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + r_n(x))\\ &= (b_0 d_0) + \cdots + (b_0 d_n + b_1 d_{n-1} x + \cdots + b_n d_0) x^n + b_0 r_n(x) + o(r_n(x)) + o(x^n)\end{aligned}$$

注意到 $b_0 \neq 0$, 从而比对知只能有

$$o(x^n) = b_0 r_n(x) + o(r_n(x)) + o(x^n)$$

此即 $r_n(x) = o(x^n)$, 命题即证.

□

命题 13.1.7 (渐近幂级数积分) 如果 E 是点 0 的空心邻域或半邻域, 而 f 在 E 上连续, 则

$$\int_0^x f(t)dt \simeq a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

这是命题(13.1.3)中 3. 的特殊情况, 证明就略过了.

命题 13.1.8 (渐近幂级数微分) 如果 E 是点 0 的空心邻域或半邻域, 而 $f \in C^{(1)}(E)$, 且有

$$f'(x) \simeq a_0' + a_1'x + \cdots$$

则 $a_n' = (n+1)a_{n+1}, n = 0, 1, \cdots$.

证明

既然 $f \in C^{(1)}(E)$, 知 $f'(x)$ 在 E 上连续有界, 从而 $\int_0^x f'(t)dt$ 存在, 进而 $f(x) = a_0 + \int_0^x f'(t)dt$. 从而根据命题(13.1.7)知:

$$f(x) \simeq a_0 + a_0'x + \frac{a_1'}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}'}{n}x^n + \cdots$$

又根据渐近展开的唯一性即得命题所述的递推关系.

□

渐近幂级数的积分和微分在渐近序列 $\{\frac{1}{x^n}\}$ 中的形式如下:

命题 13.1.9 (渐近幂级数积分) 如果 U 是无限大在 $\mathbb{R}$ 中的邻域或半邻域, 而函数 f 在 U 中连续并且有渐近展开

$$f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots, \quad 当 U \ni x \to \infty$$

则在 U 中的区间上的积分

$$\mathfrak{F}(x) = \int_x^{\infty} (f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t})dt$$

收敛, 且有如下的渐近展开:

$$\mathfrak{F}(x) \simeq \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{nx^n} + \cdots, \quad 当 U \ni x \to \infty$$

证明

当 $U \ni t \to \infty$ 时, 首先有 $f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \sim \frac{a_2}{t^2}$, 从而 $\mathfrak{F}(x)$ 与 $\int_x^{\infty} \frac{a_2}{t^2}dt$ 共敛散, 后者自然是收敛的. 而要说明 $\mathfrak{F}(x)$ 的展开式成立, 只需对渐近展开式

$$f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \simeq \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \cdots + \frac{a_n}{t^n} + \cdots, \quad 当 U \ni t \to \infty$$

两边积分即可.

□

命题 13.1.10 如果 U 是无限大在 $\mathbb{R}$ 中的邻域或半邻域, 而 $f \in C^{(1)}(U)$ 有渐近展开:

$$f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots, \quad 当 U \ni x \to \infty$$

同时, f' 有渐近展开:

$$f'(x) \simeq a_0' + \frac{a_1'}{x} + \frac{a_2'}{x^2} + \cdots + \frac{a_n'}{x^n} + \cdots, \quad 当 U \ni x \to \infty$$

则 f' 的展开式可以通过对 f 的展开式形式微分得到, 且

$$a_n' = -(n-1)a_{n-1}, n = 2, 3, \cdots 且 a_0' = a_1' = a_0 = a_1 = 0.$$

证明

根据 $f'(x)$ 的渐近展开式知当 $U \ni x \to \infty$ 时有 $f'(x) = a_0' + \frac{a_1'}{x} + O(\frac{1}{x^2})$, 进而:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = a_0'x + a_1' \ln x + O(1), \quad 当U \ni x \to \infty$$

但是本身有

$$f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots, \quad 当U \ni x \to \infty$$

且序列 $x, \ln x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots$ 在 $U \ni x \to \infty$ 时是渐近的, 从而由渐近展开的唯一性知只能有 $a_0' = a_1' = 0$, 进而得到:

$$f'(x) \simeq \frac{a_2'}{x^2} + \cdots + \frac{a_n'}{x^n} + \cdots, \quad 当U \ni x \to \infty$$

对这个渐近展开式两边积分, 由渐近展开的唯一性即得结论.

□

13.2 渐近积分, Laplace 方法

本节内容主要参考了 [4],[8],[21] 与 [22].

Laplace 积分是形如

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx$$

的积分, 其中 $S(x)$ 是实值函数, 而 λ 是参数. Laplace 本人所研究的是形如 $\int_a^b \phi(x)(f(x))^n dx$, 而这是令 $S(x) = \ln f(x)$ 的特殊情形. 一般情况下, Laplace 方法讨论的是 Laplace 积分在 $\mathbb{R} \ni \lambda \to +\infty$ 时的渐近行为, 而其核心思想在于当 $\lambda \to +\infty$ 时, 考察 $e^{\lambda S(x)}$ 的极大值点, 会发现这些点与那些非极大值点的差距越来越大, 整个函数的图像在这些点也变得越来越" 尖", 进而可以考虑用在这些点的小邻域代替整个区间对函数进行积分. 这种思想依 [4] 所言, 恰是泛函分析中 $\delta-$ 函数的雏形.

在此之前可以先看 [22] 中的一个例子来更好的体会这种" 越来越尖" 的形象:

例 13.2.1 *设 $k > 0, a < \xi < b$, 则对任意确定的 a, b, ξ 有:*

$$\int_a^b e^{-kn(x-\xi)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{kn}}(1 + o(n^{-P})), \quad n \to +\infty$$

这其中 P 是一个正数.

证明

令 $t = \sqrt{kn}(x - \xi)$, 有:

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-kn(x-\xi)^2}dx &= \int_{\sqrt{kn}(a-\xi)}^{\sqrt{kn}(b-\xi)} e^{-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{kn}}dt = \frac{1}{\sqrt{kn}}(\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{-\sqrt{kn}(\xi-a)} - \int_{\sqrt{kn}(b-\xi)}^{\infty})e^{-t^2}dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{kn}} - \frac{1}{\sqrt{kn}}(\int_{\sqrt{kn}(b-\xi)}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\sqrt{kn}(\xi-a)})e^{-t^2}dt\end{aligned}$$

注意到对给定的 $P > 0$, 总存在足够大的 t_0 使得当 $t > t_0$ 时有:

$$e^{-t^2} < t^{-2P-2}$$

进而可以选取足够大的 n 使得 $\sqrt{kn}(b-\xi) > t_0$, 此时:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{kn}} \int_{\sqrt{kn}(b-\xi)}^{\infty} e^{-t^2} dt < \frac{1}{\sqrt{kn}} \int_{\sqrt{kn}(b-\xi)}^{\infty} t^{-2P-2} dt = \frac{1}{\sqrt{kn}} \frac{-t^{-2P-1}}{2P+1} |_{\sqrt{kn}(b-\xi)}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{kn}} \frac{(\sqrt{kn}(b-\xi))^{-2P-1}}{2P+1} = O(n^{-P-1}), \quad n \to +\infty$$

同理, 可知

$$0 < \frac{1}{\sqrt{kn}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{kn}(\xi-a)} = O(n^{-P-1}), \quad n \to +\infty$$

代回原式知:

$$\int_a^b e^{-kn(x-\xi)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{kn}} + O(n^{-P-1}) = \sqrt{\frac{\pi}{kn}}(1 + O(n^{-P-\frac{1}{2}})) = \sqrt{\frac{\pi}{kn}}(1 + o(n^{-P})), \quad n \to \infty$$

命题即证.

□

注意到这个例子中 $P > 0$ 是可以任意给定的, [4] 中用下述记号来表示这种性质:

$$\int_a^b e^{-kn(x-\xi)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}(1 + o(n^{-\infty})), \quad n \to +\infty$$

下面给出这所谓" 用小邻域代替整个区间" 的原理, 即 Laplace 积分的局部化原理. 在此之前先给出两个引理. 这两个引理分别用来限制整个积分的值与确定每一个" 尖点" 对整个积分的贡献.

引理 13.2.1 (指数型估计) 对 *Laplace* 积分

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx$$

设 $M = \sup\limits_{a<x<b} S(x) < \infty$, 又设对某个值 $\lambda_0 > 0$, *Laplace* 积分绝对收敛. 那么 *Laplace* 积分对任何的 $\lambda \geq \lambda_0$ 都绝对收敛, 且对这样的 λ 成立估计:

$$|F(\lambda)| \leq \int_a^b |f(x) e^{\lambda S(x)}| dx \leq A e^{\lambda M}.$$

证明

当 $\lambda \geq \lambda_0$ 时, 知:

$$\begin{aligned}
|F(\lambda)| &= |\int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx| = |\int_a^b f(x) e^{\lambda_0 S(x)} e^{(\lambda-\lambda_0) S(x)} dx| \\
&\leq \int_a^b |f(x) e^{\lambda_0 S(x)}| \cdot e^{(\lambda-\lambda_0) S(x)} dx \leq \int_a^b |f(x) e^{\lambda_0 S(x)}| \cdot e^{(\lambda-\lambda_0) M} dx \\
&= (e^{-\lambda_0 M} \int_a^b |f(x) e^{\lambda_0 S(x)}| dx) \cdot e^{\lambda M} := A e^{\lambda M}
\end{aligned}$$

其中因为 $\lambda = \lambda_0$ 时 Laplace 积分绝对收敛, 知 $\int_a^b |f(x) e^{\lambda_0 S(x)}| dx$ 是确定的常数, 进而上述的记法没有问题, 命题即证.

□

引理 13.2.2 (极大值点的贡献的估计) 对 *Laplace* 积分

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx$$

设对某值 $\lambda=\lambda_0$ 其绝对收敛，又设在积分区间 $I=(a,b)$ 的内部或边界上存在点 x_0，使得 $S(x_0)=\sup\limits_{a<x<b} S(x)=M$. 如果函数 $f(x)$ 和 $S(x)$ 在 x_0 处连续，且 $f(x_0)\neq 0$，则对于任意的 $\varepsilon>0$ 和点 x_0 在 I 中的充分小邻域 $U_I(x_0)$，使得下述估计

$$|\int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx| \geq Be^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}, \quad B>0 \text{ 是一个常数}$$

对于 $\lambda\geq\max\{\lambda_0,0\}$ 都是成立的.

证明

为了方便起见，不妨就假定 $f(x)$ 是实值函数. 对于固定的 $\varepsilon>0$，取邻域 $U_I(x_0)$，使得在其中有 $|f(x)|\geq\frac{1}{2}|f(x_0)|$[2]且 $S(x_0)-\varepsilon\leq S(x)\leq S(x_0)$[3]. 于是至少在 $U_I(x_0)$ 中 $f(x)$ 的符号是不变的，从而对于 $\lambda\geq\max\{\lambda_0,0\}$ 有：

$$\begin{aligned}|\int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx| &= \int_{U_I(x_0)}|f(x)|e^{\lambda S(x)}dx \geq \int_{U_I(x_0)}\frac{1}{2}|f(x_0)|e^{\lambda S(x)}dx \\ &\geq \int_{U_I(x_0)}\frac{1}{2}|f(x_0)|e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}dx = \int_{U_I(x_0)}\frac{1}{2}|f(x_0)|dx\cdot e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)} := Be^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}.\end{aligned}$$

命题即证.

□

下面就可以正式介绍局部化原理了：

定理 13.2.1 (局部化原理) 对 *Laplace* 积分

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx$$

设当 $\lambda=\lambda_0$ 时其绝对收敛，且在积分区间 $I=(a,b)$ 的内部或边界上函数 $S(x)$ 有唯一的绝对极大值点，即在点 x_0 的任何邻域 $U(x_0)$ 外均有：

$$\sup_{I\backslash U(x_0)} S(x)<S(x_0)$$

如果函数 $f(x),S(x)$ 同时在点 x_0 连续，且 $f(x_0)\neq 0$，则：

$$F(\lambda)=F_{U_I(x_0)}(\lambda)(1+O(\lambda^{-\infty})) := (1+O(\lambda^{-\infty}))\int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx, \quad \lambda\to+\infty$$

其中 $U_I(x_0)$ 是点 x_0 在 I 中的某邻域.

证明

根据极大值点贡献的估计引理(13.2.2)，如果 $U_I(x_0)$ 足够小，则对任意的 $\varepsilon>0$ 都成立：

$$|F_{U_I(x_0)}(\lambda)| := |\int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx| \geq Be^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}, \quad \lambda\to+\infty$$

又根据指数型估计(13.2.1)，在 $I\backslash U_I(x_0)$ 上知：

$$|F_{I\backslash U_I(x_0)}| := \int_{I\backslash U_I(x_0)}|f(x)|e^{\lambda S(x)}dx\leq Ae^{\lambda\mu}, \quad \lambda\to+\infty$$

[2]这个性质的存在由 $f(x)$ 是连续函数而来 ($f(x)$ 足够靠近 $f(x_0)$，其模自然比 $\frac{1}{2}f(x_0)$ 大).

[3]这是极值点的性质.

这其中 A 是一个常数, 而 $\mu = \underset{I\setminus U_I(x_0)}{S(x)} < S(x_0)$. 注意到随着 $U_I(x_0)$ 的确定, μ 是一个确定的数.

综合两式, 注意到:

$$F(\lambda) := F_I(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda) + F_{I\setminus U_I(x_0)}(\lambda)$$

从而

$$|\frac{F(\lambda)}{F_{U_I(x_0)}(\lambda)}| \le 1 + \frac{|F_{I\setminus U_I(x_0)}|}{F_{U_I}(x_0)} \le 1 + \frac{Ae^{\lambda\mu}}{Be^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}} = 1 + \frac{A}{B}e^{\lambda(\mu - S(x_0)+\varepsilon)}, \quad \lambda \to +\infty$$

自然, 可以选取足够小的 ε 使得 $\mu - S(x_0) + \varepsilon < 0$, 此时对任意的正数 P 都有:

$$\frac{\frac{A}{B}e^{\lambda(\mu - S(x_0)+\varepsilon)}}{\lambda^P} \to 0, \quad \lambda \to +\infty$$

这恰从定义上说明了

$$\frac{A}{B}e^{\lambda(\mu - S(x_0)+\varepsilon)} = O(\lambda^{-\infty}), \quad \lambda \to +\infty$$

从而通分即有

$$F(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\infty})), \quad \lambda \to +\infty$$

命题获证.

□

在明确了局部化原理后, 就可以来研究最朴素的 Laplace 渐近积分定理了. 下面首先给出 $f(x)S^n(x)$ 形式的 Laplace 积分:

定理 13.2.2 (Laplace) *设 $f(x), S(x)$ 是定义在有限或无穷区间 (a,b) 上的函数, 记 $S(x) = e^{h(x)}$(即 $h(x) = \ln S(x)$), 它们满足下述条件:*

1. *$f(x)S^n(x)$ 在 (a,b) 上绝对可积, $n = 0, 1, 2, \cdots$;*
2. *$h(x)$ 在 (a,b) 的内点 x_0 处达到绝对最大值, $h \in C^{(2)}(U(x_0))$, 且 $h'(x_0) = 0, h''(x_0) < 0$;*
3. *$f(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $f(x_0) \neq 0$.*

则有:

$$\int_a^b f(x)S^n(x)dx \sim f(x_0)S^{n+\frac{1}{2}}(x_0) \cdot \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_0)}}, \quad n \to \infty$$

即

$$\int_a^b f(x)e^{nh(x)}dx \sim f(x_0)e^{nh(x_0)} \cdot \sqrt{\frac{-2\pi}{nh''(x_0)}}$$

证明

根据局部化原理, 首先知道:

$$\int_a^b f(x)e^{nh(x)}dx \sim \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)e^{nh(x)}dx, \quad n \to \infty$$

根据 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 可以在 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 上考虑 $f(x) = f(x_0) + o(1), x \to x_0$, 进而:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)e^{nh(x)}dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} (f(x_0) + o(1))e^{nh(x)}dx \sim f(x_0)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{nh(x)}dx, \quad n \to \infty$$

对 $e^{nh(x)}$, 考虑 $h(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 展开:

$$h(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}h''(\xi)(x - x_0)^2 = h(x_0) + \frac{1}{2}h''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

代入知

$$f(x_0)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{nh(x)}dx = f(x_0)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{nh(x_0)+\frac{1}{2}nh''(\xi)(x-x_0)^2}dx = f(x_0)e^{nh(x_0)}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{\frac{1}{2}nh''(\xi)(x-x_0)^2}dx$$

而最后的积分恰是例(13.2.1), 其中 $-k=\frac{1}{2}h''(\xi)$, 进而根据例(13.2.1)知 $n\to\infty$ 时有

$$f(x_0)e^{nh(x_0)}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{nh''(\xi)(x-x_0)^2}dx \sim f(x_0)e^{nh(x_0)}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\sqrt{\frac{\pi}{(-\frac{1}{2}h''(\xi))n}} = f(x_0)e^{nh(x_0)}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\sqrt{\frac{-2\pi}{h''(\xi)n}}$$

最后, 因为 $h(x)\in C^{(2)}(U(x_0))$, 知 $h''(\xi)=h''(x_0)+o(1), \xi\to x_0$, 进而 $n\to\infty$ 时有

$$f(x_0)e^{nh(x_0)}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\sqrt{\frac{-2\pi}{h''(\xi)n}} \sim f(x_0)e^{nh(x_0)}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\sqrt{\frac{-2\pi}{h''(x_0)n}}$$

这便说明了

$$\int_a^b f(x)e^{nh(x)}dx \sim f(x_0)e^{nh(x_0)}\cdot\sqrt{\frac{-2\pi}{nh''(x_0)}},\quad n\to\infty$$

如果代入 $h(x)=\ln S(x)$, 首先由 $h'(x_0)=0=\frac{S'(x_0)}{S(x_0)}$ 知

$$h''(x_0)=\frac{S''(x_0)S(x_0)-(S'(x_0))^2}{S^2(x_0)}=\frac{S''(x_0)}{S(x_0)}$$

进而有

$$f(x_0)e^{nh(x_0)}\cdot\sqrt{\frac{-2\pi}{nh''(x_0)}} = f(x_0)S^{n+\frac{1}{2}}(x_0)\cdot\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_0)}},\quad n\to\infty$$

从而

$$\int_a^b f(x)S^n(x)dx \sim f(x_0)S^{n+\frac{1}{2}}(x_0)\cdot\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_0)}},\quad n\to\infty$$

得证.

□

上述的 Laplace 定理只考虑了绝对最大值点 x_0 在 (a,b) 的内部, 但也可以令 x_0 在 (a,b) 的边界, 此时唯一产生不同的地方在于对例(13.2.1)的应用中, ξ 变成了 a 或 b, 进而在套用 Euler-Poisson 积分时结果应该是 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

注意到在定理的推导过程中, 核心的步骤在于对 $S(x)$ 作 Taylor 展开. 当 $S(x)$ 的连续可微性更强的时候, 当然可以通过增加 $S(x)$ 的 Taylor 展开的项数, 提高渐近公式的精度, 这也便是 [4] 中所谓" 函数在临界点邻域中的典型形式" 的思想. 同样, 如果 $f(x)$ 也有 Taylor 展开或者其它比连续更好的性质, 也可以将它代入式子得到更精确的结果. 这便是下面的一组 Watson 引理:

设 $\alpha>0,\beta>0,0<a\le\infty$, 而 $f\in C([0,a],\mathbb{R})$. 记

$$W(\lambda):=\int_0^a x^{\beta-1}f(x)e^{-\lambda x^\alpha}dx$$

有:

引理 13.2.3 (Watson) *如果已知 $f(x)=f(0)+O(x), x\to 0$, 那么 $W(\lambda)$ 在 $\lambda\to+\infty$ 时的渐近式的主项有下述形式:*

$$W(\lambda)=\frac{1}{\alpha}f(0)\Gamma(\frac{\beta}{\alpha})\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}+O(\lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}})$$

证明

根据局部化原理, 首先有

$$W(\lambda)=\int_0^{\varepsilon}x^{\beta-1}f(x)e^{-\lambda x^{\alpha}}dx+O(\lambda^{-\infty}),\quad \lambda\to+\infty$$

代入 $f(x)=f(0)+O(x),x\to 0$, 有:

$$\begin{aligned}W(\lambda)&=\int_0^{\varepsilon}x^{\beta-1}(f(0)+O(x))e^{-\lambda x^{\alpha}}dx+O(\lambda^{-\infty})\\&=f(0)\int_0^{\varepsilon}x^{\beta-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}dx+O(x)\int_0^{\varepsilon}x^{\beta-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}dx+O(\lambda^{-\infty}),\quad \lambda\to+\infty\end{aligned}$$

令 $u=\lambda x^{\alpha}$, 知 $x=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}u^{\frac{1}{\alpha}}$, 代入有:

$$\begin{aligned}W(\lambda)&=f(0)\int_0^{\lambda\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\lambda^{-\frac{\beta-1}{\alpha}}u^{\frac{\beta-1}{\alpha}}e^{-u}\cdot\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du\\&\quad+O(x)\int_0^{\lambda\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\lambda^{-\frac{\beta-1}{\alpha}}u^{\frac{\beta-1}{\alpha}}e^{-u}\cdot\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du+O(\lambda^{-\infty})\\&=f(0)\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}\int_0^{\lambda\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}u^{\frac{\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du+O(x)\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}\int_0^{\lambda\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}u^{\frac{\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du+O(\lambda^{-\infty})\\&=\frac{f(0)}{\alpha}\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}(\int_0^{+\infty}u^{\frac{\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du+O(\lambda^{-\infty}))+O(x)\frac{\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha}(\int_0^{+\infty}u^{\frac{\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du+O(\lambda^{-\infty}))+O(\lambda^{-\infty})\\&=\frac{f(0)}{\alpha}\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}\Gamma(\frac{\beta}{\alpha})+O(x)\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}},\quad \lambda\to+\infty\end{aligned}$$

其中第三行到第四行是对积分 $\int_0^{\lambda\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}u^{\frac{\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du$ 应用了局部化原理. 现在令 $\varepsilon=\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$, 知 $O(x)=O(\lambda^{-\frac{1}{\alpha}})$, 从而 $O(x)\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}=O(\lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}})$, 命题即证.

□

引理 13.2.4 (Watson) *如果当 $x\to 0$ 时有 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+O(x^{n+1})$, 则:*

$$W(\lambda)=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n}a_k\Gamma(\frac{k+\beta}{\alpha})\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}+O(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}),\quad \lambda\to+\infty$$

证明

对于 $0\le k\le n$, 在 $W(\lambda)$ 中代入 $f(x)=x^k$ 知

$$\begin{aligned}W_k(\lambda)&:=\int_0^{a}x^{\beta-1}x^ke^{-\lambda x^{\alpha}}dx=\int_0^{a}x^{k+\beta-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}dx\\&=\int_0^{\lambda a^{\alpha}}\lambda^{-\frac{k+\beta-1}{\alpha}}u^{\frac{k+\beta-1}{\alpha}}e^{-u}\cdot\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du=\frac{1}{\alpha}\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}\int_0^{\lambda a^{\alpha}}u^{\frac{k+\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du\end{aligned}$$

注意到任取 $p>0$, 总能找到足够大的 u 使得在其之后都有 $e^{-u}<u^{-p}$, 从而在积分 $\int_{\lambda a^{\alpha}}^{\infty}u^{\frac{k+\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du$ 中假定 λ 足够大, 并设 $e^{-u}<u^{-p_k}$, 其中 $p_k>\frac{k+\beta}{\alpha}$, 代入有:

$$\int_{\lambda a^{\alpha}}^{\infty}u^{\frac{k+\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du<\int_{\lambda a^{\alpha}}^{\infty}u^{\frac{k+\beta}{\alpha}-1}u^{-p_k}du=\frac{\alpha}{k+\beta-p_k\alpha}u^{\frac{k+\beta}{\alpha}-p_k}|_{\lambda a^{\alpha}}^{\infty}=\frac{\alpha a^{k+\beta-p_k\alpha}}{p_k\alpha-k-\beta}\lambda^{\frac{k+\beta}{\alpha}-p_k}=O(\lambda^{\frac{k+\beta}{\alpha}-p_k})$$

现在希望 $\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}O(\lambda^{\frac{k+\beta}{\alpha}-p_k})=O(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}})$, 考虑

$$-p_k=-\frac{n+\beta+1}{\alpha}\Rightarrow p_k=\frac{1}{\alpha}(n+\beta+1)$$

从而

$$W_k(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}(\int_0^\infty u^{\frac{k+\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du - \int_{\lambda a^\alpha}^\infty u^{\frac{k+\beta}{\alpha}-1}e^{-u}du)$$
$$= \frac{1}{\alpha}\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}\cdot\Gamma(\frac{k+\beta}{\alpha}) + O(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}), \quad \lambda\to+\infty$$

故将 $f(x)$ 的展开式代入 $W(\lambda)$ 知:

$$W(\lambda) = \sum_{k=0}^n W_k(\lambda) + \int_0^a x^{\beta-1}O(x^{n+1})e^{-\lambda x^\alpha}dx$$
$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^n a_k\Gamma(\frac{k+\beta}{\alpha})\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} + O(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}) + O(1)\int_0^a x^{n+\beta}e^{-\lambda x^\alpha}dx$$
$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^n a_k\Gamma(\frac{k+\beta}{\alpha})\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} + O(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}), \quad \lambda\to+\infty$$

命题即证.

□

引理 13.2.5 (Watson) *如果 f 在 $x=0$ 处无穷次可微, 则有渐近展开:*

$$W(\lambda) \simeq \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Gamma(\frac{k+\beta}{\alpha})\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \quad \lambda\to+\infty$$

且这个渐近展开式关于 λ 可以任意次微分.

证明

在引理(13.2.4)中, 已经知道 $O(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}) = o(\lambda^{-\frac{n+\beta}{\alpha}})$, 进而当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无穷次可微, 则考虑其在 $x=0$ 处的 Taylor 展开:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

应用引理(13.2.4)即得

$$W(\lambda) \simeq \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Gamma(\frac{k+\beta}{\alpha})\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \quad \lambda\to+\infty$$

至于上式关于 λ 的任意可微性, 知积分

$$W(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1}f(x)e^{-\lambda x^\alpha}dx$$

关于 λ 的积分依旧是 $W(\lambda)$ 的形式, 进而重复上述的三个引理可以得到 $W'(\lambda)$ 的渐近展开式. 而既然 $W'(\lambda)$ 已经有渐近展开式了, 这个展开式便恰是引理(13.2.5)中式子的形式微分. 更高阶的导数通过归纳即得.

有了这些准备, 就可以探讨相对一般情况下的 Laplace 定理了. 这在 [4] 中称作渐近式的典型主项定理. 如同 Watson 引理一样, 这里分成三块来叙述并证明:

首先设 Laplace 积分

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx$$

中积分区间 $I=[a,b]$ 是有限的, $f, S\in C(I,\mathbb{R})$, 且 $\underset{x\in I}{S(x)}$ 只在一个点 $x_0\in I$ 取到. 进一步, 设 $f(x_0)\neq 0$, 且当 $I\ni x\to x_0$ 时 $f(x) = f(x_0) + O(x-x_0)$, 则:

定理 13.2.3 (Laplace) *如果 $S(a)=\max\limits_{x\in I}S(x)$, 也即 $x_0=a$, $S\in C^{(2)}(U(x_0))$, 且 $S'(x_0)\neq 0$(在这里准确来说是 $S'(x_0)<0$), 则:*

$$F(\lambda)=\frac{f(x_0)}{-S'(x_0)}e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-1}[1+O(\lambda^{-1})],\quad \lambda\to+\infty.$$

证明

由局部化原理首先有

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx=\int_a^{a+\varepsilon}f(x)e^{\lambda S(x)}dx+O(\lambda^{-\infty}):=F_{U_\varepsilon(a)}(\lambda)+O(\lambda^{-\infty}),\quad \lambda\to+\infty$$

根据条件, $f(x)=f(a)+O(x-a), I\ni x\to a$, 并注意到 $S\in C^{(2)}(U(a))$, 这说明 $S(x)=S(a)+S'(a)(x-a)+o(x-a), I\ni x\to a$, 将这两者代入有:

$$\begin{aligned}
F_{U_\varepsilon(a)}(\lambda)+O(\lambda^{-\infty})&=\int_a^{a+\varepsilon}(f(a)+O(x-a))\cdot e^{\lambda(S(a)+S'(a)(x-a)+o(x-a))}dx+O(\lambda^{-\infty})\\
&=f(a)\cdot e^{\lambda S(a)}\cdot\int_a^{a+\varepsilon}e^{\lambda S'(a)(x-a)+\lambda o(x-a)}dx\\
&+e^{\lambda S(a)}\cdot\int_a^{a+\varepsilon}O(x-a)e^{\lambda S'(a)(x-a)+\lambda o(x-a)}dx+O(\lambda^{-\infty})\\
&=\frac{1}{\lambda}f(a)e^{\lambda S(a)}\int_0^{\lambda\varepsilon}e^{S'(a)t+o(t)}dt+\frac{1}{\lambda}e^{\lambda S(a)}\int_0^{\lambda\varepsilon}O(\frac{t}{\lambda})e^{S'(a)t+o(t)}dt+O(\lambda^{-\infty})\\
&=\frac{1}{\lambda}f(a)e^{\lambda S(a)}\cdot\frac{1}{S'(a)+o(1)}e^{(S'(a)+o(1))t}|_0^{\lambda\varepsilon}+\frac{e^{\lambda S(a)}}{\lambda^2}O(\int_0^{\lambda\varepsilon}te^{(S'(a)+o(1))t}dt)+O(\lambda^{-\infty})\\
&=-\frac{1}{\lambda}\frac{f(a)}{S'(a)}e^{\lambda S(a)}+\frac{e^{\lambda S(a)}}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{S'(a)+o(1)}O(\int_0^{\lambda\varepsilon}e^{(S'(a)+o(1))t}dt)+O(\lambda^{-\infty})\\
&=-\frac{1}{\lambda}\frac{f(a)}{S'(a)}e^{\lambda S(a)}+e^{\lambda S(a)}O(\lambda^{-2})+O(\lambda^{-\infty})=\frac{f(a)}{-S'(a)}e^{\lambda S(a)}\lambda^{-1}[1+O(\lambda^{-1})],\quad \lambda\to+\infty
\end{aligned}$$

命题即证.

定理 13.2.4 (Laplace) *如果 $a<x_0<b$, 也即 $S(x)$ 的绝对最大值点在 $[a,b]$ 的内部, $S\in C^{(3)}(U(x_0))$, 且 $S''(x_0)\neq 0$(在这里准确来说是 $S''(x_0)<0$), 则:*

$$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}}f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-\frac{1}{2}}[1+O(\lambda^{-\frac{1}{2}})],\quad \lambda\to+\infty.$$

证明

注意到既然 $S(x_0)$ 已经是绝对最大值点, 且 $x_0\in(a,b)$, 必有 $S'(x_0)=0$, 从而首先根据局部化原理有:

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}f(x)e^{\lambda S(x)}dx+O(\lambda^{-\infty}):=F_{U_\varepsilon(a)}(\lambda)+O(\lambda^{-\infty}),\quad \lambda\to\infty$$

根据条件, $f(x)=f(x_0)+O(x-x_0), I\ni x\to x_0$, 并注意到 $S\in C^{(3)}(U(x_0))$, 这说明

$S(x) = S(x_0) + \frac{1}{2}S''(x_0)(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2, I \ni x \to x_0$, 将这两者代入有:

$$\begin{aligned}
F_{U_\varepsilon(x_0)}(\lambda) + O(\lambda^{-\infty}) &= \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} (f(x_0) + O(x-x_0)) \cdot e^{\lambda(S(x_0)+\frac{1}{2}S''(x_0)(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2)}dx + O(\lambda^{-\infty}) \\
&= f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{\frac{1}{2}(S''(x_0)+o(1))\lambda(x-x_0)^2}dx \\
&+ e^{\lambda S(x_0)} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} O(x-x_0)e^{\frac{1}{2}(S''(x_0)+o(1))\lambda(x-x_0)^2}dx + O(\lambda^{-\infty}) \\
&= 2f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \int_0^{\sqrt{-\frac{1}{2}(S''(x_0)+o(1))\lambda\varepsilon^2}} e^{-u^2} d(\sqrt{\frac{-2}{(S''(x_0)+o(1))\lambda}}u + x_0) \\
&+ 2e^{\lambda S(x_0)} \int_0^{\sqrt{-\frac{1}{2}(S''(x_0)+o(1))\lambda\varepsilon^2}} O(\frac{u}{\lambda})e^{-u^2}du + O(\lambda^{-\infty}) \\
&= 2f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \cdot \sqrt{\frac{-2}{(S''(x_0)+o(1))\lambda}} \int_0^{\sqrt{-\frac{1}{2}(S''(x_0)+o(1))\lambda\varepsilon^2}} e^{-u^2}du \\
&+ 2\frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\lambda} O(\int_0^{\sqrt{-\frac{1}{2}(S''(x_0)+o(1))\lambda\varepsilon^2}} ue^{-u^2}du) + O(\lambda^{-\infty}) \\
&= 2f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \cdot \sqrt{\frac{-2}{(S''(x_0)+o(1))}} \cdot \lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + o(1)) + 2\frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\lambda}O(1) \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}} f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-\frac{1}{2}}(1 + o(1) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})) \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}} f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-\frac{1}{2}}[1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})], \quad \lambda \to +\infty
\end{aligned}$$

命题即证.

定理 13.2.5 (Laplace) *如果 $S(a) = \max\limits_{x\in I} S(x)$, 也即 $x_0 = a$, $S'(a) = 0$, 但 $S''(a) \neq 0$(在这里准确来说是 $S''(a) < 0$), 则:*

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{-2S''(x_0)}} f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-\frac{1}{2}}[1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})], \quad \lambda \to +\infty$$

这个定理的证明和定理(13.3.3)的证明并没有什么太大的区别, 唯一需要注意的是在定理(13.3.3)中绝对极大值点在 $[a, b]$ 的内部, 而这里绝对极大值点到了 $[a, b]$ 的边界, 这意味着在套用 Euler-Poisson 积分时只需要取一半的区间, 所以相较于定理(13.3.3)而言这个定理的证明过程中多了一个 $\frac{1}{2}$. 这也便解释了为什么这个定理中的式子恰是定理(13.3.3)的 $\frac{1}{2}$ 了.

在进入最后的定理前, 还是先给出一个例子放缓一下节奏吧.

对 Γ 函数:

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^\infty t^\lambda e^{-t}dt, \quad \lambda > -1$$

将其写成 Laplace 积分的形式:

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^\infty e^{-t}e^{\lambda \ln t}dt$$

当 $\lambda > 0$ 时, 考虑换元:$t = \lambda x$, 可以得到:

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}e^{\lambda \ln \lambda x}d\lambda x = \lambda^{\lambda+1} \int_0^\infty e^{-\lambda(x-\ln x)}dx$$

可以发现现在得到的函数恰好满足定理(13.3.3)的条件, 其中 $f(x) \equiv 1, S(x) = \ln x - x$. 不难得到 $S(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的绝对极大值点 $x_0 = 1$, 且 $S''(1) = -1$, 进而套用定理(13.3.3)有:

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{-(-1)}} \cdot 1 \cdot e^{\lambda\cdot(-1)}\lambda^{-\frac{1}{2}}[1+O(\lambda^{-\frac{1}{2}})] = \sqrt{2\pi\lambda}(\frac{\lambda}{e})^{\lambda}[1+O(\lambda^{-\frac{1}{2}})], \quad \lambda \to +\infty$$

这恰是 Stirling 公式.

13.3 Laplace 积分的渐近展开

在前面部分的介绍中, 或多或少可以发现我们所得到的最终式子总是含有 $f(x_0)$ 的, 这都是局部化原理的条件中限定了 $f(x_0) \neq 0$ 的功劳. 但假如 $f(x_0) = 0$, 或者 $f(x_0) \to 0$, 局部化原理就不怎么管用了. 这一节所讨论的就是这种情况. 但是届于再去讨论一遍局部化原理与 Watson 引理实在是太繁琐了, [4] 便选择了研究 $f, S \in C^{(\infty)}$ 的情况, 并直接给出了下述局部化原理:

定理 13.3.1 (局部化原理) *Laplace 积分*

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx$$

在 $\lambda \to +\infty$ 时关于渐近序列 $\{e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-p_k}\}(p_0 < p_1 < \cdots)$ 精确到零元的渐近式, 与其在点 $x_0 \in [a, b]$ 的任意小邻域上的那一部分渐近式是一样的, 其中 x_0 是函数 $S(x)$ 在 I 上的唯一的极大值点. 即:

$$F(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda)[1+O(\lambda^{-\infty})], \quad \lambda \to +\infty$$

明确了局部化原理后, 就可以着手本节的核心定理了. 在此之前还是统一地给出定理的条件:

设 Laplace 积分

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx$$

中, $I = [a, b]$ 是有限区间, $f, S \in C(I, \mathbb{R})$, $\max\limits_{x\in I} S(x)$ 只在一个点 $x_0 \in I$ 达到, 且 f, S 在点 x_0 的某一邻域 $U_I(x_0)$ 中属于 $C^{(\infty)}(U_I(x_0), \mathbb{R})$.

定理 13.3.2 (Laplace 渐近展开定理) *如果 $x_0 = a, S^{(m)}(a) \neq 0$, 但 $S^{(1)}(a) = S^{(2)}(a) = \cdots = S^{(m-1)}(a) = 0$, 则:*

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-\frac{1}{m}} e^{\lambda S(a)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k}{m}}, \quad \lambda \to +\infty$$

其中

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(-1)^{k+1}m^k}{k!}\Gamma(\frac{k+1}{m})(h(x,a)\frac{d}{dx})^k(f(x)h(x,a))|_{x=a}, \\ h(x,a) &= \frac{(S(a)-S(x))^{1-\frac{1}{m}}}{S'(x)}. \end{aligned}$$

证明

首先, 根据局部化引理, $F(\lambda)$ 可以用 $F_{U_I(x_0)}(\lambda)$ 来代换. 它们之间存在 $e^{\lambda S(x_0)}O(\lambda^{-\infty})$ 的差距, 但届于这是渐近展开式, 这个差距可以忽略. 下面便研究

$$F_{U_I(x_0)}(\lambda) = \int_a^{a+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)}dx$$

其次, 根据 $S^{(m)}(a)\neq 0, S^{(i)}(a)=0(1\leq i<m)$, 且 $S\in C^{(\infty)}(U_I(x_0))$, 知可以在 $x=a$ 处对 $S(x)$ 作 Taylor 展开:

$$\begin{aligned}S(x)&=S(a)+S'(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{k!}S^{(k)}(a)(x-a)^k+\cdots\\&=S(a)+\frac{1}{m!}S^{(m)}(a)(x-a)^m+\frac{1}{m!}o((x-a)^m)\end{aligned}$$

将这个结果代入 $F_{U_I(x_0)}(\lambda)$ 可得:

$$F(\lambda)=\int_a^{a+\varepsilon}f(x)e^{\lambda S(a)+\frac{\lambda}{m!}(S^{(m)}(a)+o(1))(x-a)^m}dx$$

再考虑换元, 注意到 $S^{(m)}(a)<0$, 令 $u^m=-\frac{1}{m!}(S^{(m)}(a)+o(1))(x-a)^m$, 知 $x=(-\frac{m!}{S^{(m)}(a)+o(1)})^{\frac{1}{m}}u+a$, 进而:

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=e^{\lambda S(a)}\int_0^{-(\frac{S^{(m)}(a)+o(1)}{m!})^{\frac{1}{m}}\varepsilon}f(x)e^{-\lambda u^m}d((-\frac{m!}{S^{(m)}(a)+o(1)})^{\frac{1}{m}}u+a)\\&=e^{\lambda S(a)}(-\frac{m!}{S^{(m)}(a)})^{\frac{1}{m}}\int_0^{\varepsilon_1}g(u)e^{-\lambda u^m}du,\quad\lambda\to+\infty\end{aligned}$$

其中

$$g(u)=f((-\frac{m!}{S^{(m)}(a)+o(1)})^{\frac{1}{m}}u+a)$$

如果记 $\varphi(u)=(-\frac{m!}{S^{(m)}(a)+o(1)})^{\frac{1}{m}}u+a$, 则上述积分可以写成:

$$F(\lambda)=e^{\lambda S(a)}\int_0^{\varepsilon_1}f(\varphi(u))\varphi'(u)e^{-\lambda u^m}du$$

根据 Watson 引理(13.2.5), 知

$$\int_0^a x^{\beta-1}f(x)e^{-\lambda x^\alpha}dx\simeq\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Gamma(\frac{k+\beta}{\alpha})\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}},\quad\lambda\to+\infty$$

现在, 希望有

$$e^{\lambda S(a)}\int_0^{\varepsilon_1}f(\varphi(u))\varphi'(u)e^{-\lambda u^m}du\simeq\lambda^{-\frac{1}{m}}e^{\lambda S(a)}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-\frac{k}{m}},\quad\lambda\to+\infty$$

即

$$\int_0^{\varepsilon_1}f(\varphi(u))\varphi'(u)e^{-\lambda u^m}du\simeq\lambda^{-\frac{1}{m}}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-\frac{k}{m}},\quad\lambda\to+\infty$$

同 Watson 引理对比知可将 Watson 引理中的 β 换成 1, α 换成 m, x 换成 u, 而 $f(x)$ 换成 $f(\varphi(u))\varphi'(u)$, 此时可知

$$\int_0^{\varepsilon_1}f(\varphi(u))\varphi'(u)e^{-\lambda u^m}du\simeq\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[f(\varphi(u))\varphi'(u)]^{(k)}(0)}{k!}\Gamma(\frac{k+1}{m})\lambda^{-\frac{k+1}{\alpha}},\quad\lambda\to+\infty$$

从而只能有

$$a_k=\frac{1}{m}\frac{[f(\varphi(u))\varphi'(u)]^{(k)}(0)}{k!}\Gamma(\frac{k+1}{m})$$

进而只需求出 $[f(\varphi(u))\varphi'(u)]^{(k)}(0)$ 就足够了. 注意

$$S(x)-S(a)=\frac{1}{m!}(S^{(m)}(a)+o(1))(x-a)^m=-u^m=S(\varphi(u))-S(a)\tag{13.1}$$

上式对 u 求导得:

$$S'(\varphi(y))\varphi'(y) = -mu^{m-1}$$

从而

$$\varphi'(y) = -mu^{m-1} \cdot \frac{1}{S'(\varphi(u))} = -mu^{m-1} \cdot \frac{1}{S'(x)} \tag{13.2}$$

在(13.1)中解得

$$u = (S(a) - S(x))^{\frac{1}{m}}$$

代入(13.2)得

$$\varphi'(u) = -m(S(a) - S(x))^{\frac{m-1}{m}} \cdot \frac{1}{S'(x)} = -m\frac{(S(a) - S(x))^{1-\frac{1}{m}}}{S'(x)}$$

根据链式法则知

$$\frac{d}{du} = \varphi'(u)\frac{d}{dx} = -m\frac{(S(a) - S(x))^{1-\frac{1}{m}}}{S'(x)}\frac{d}{dx}$$

从而如果记

$$\Phi(u) = f(x)\varphi'(u)$$

可得

$$\begin{aligned}
\frac{d^k\Phi}{du^k}(0) &= (-m\frac{(S(a) - S(x))^{1-\frac{1}{m}}}{S'(x)}\frac{d}{dx})^k\Phi(0) = (-m)^k(\frac{(S(a) - S(x))^{1-\frac{1}{m}}}{S'(x)}\frac{d}{dx})^k(f(x)\varphi'(u))|_{u=0} \\
&= (-m)^k(\frac{(S(a) - S(x))^{1-\frac{1}{m}}}{S'(x)}\frac{d}{dx})^k(f(x) \cdot -mu^{m-1} \cdot \frac{1}{S'(x)})|_{u=0} \\
&= (-m)^{k+1}(\frac{(S(a) - S(x))^{1-\frac{1}{m}}}{S'(x)}\frac{d}{dx})^k(f(x) \cdot (S(a) - S(x))^{\frac{m-1}{m}} \cdot \frac{1}{S'(x)})|_{x=a} \\
&:= (-m)^{k+1}(h(x,a)\frac{d}{dx})^k(f(x) \cdot h(x,a))|_{x=a}
\end{aligned}$$

其中

$$h(x,a) = \frac{(S(a) - S(x))^{1-\frac{1}{m}}}{S'(x)}$$

命题即证.

□

这个定理叙述的是绝对最大值点 x_0 在积分区间 $[a,b]$ 边界的情况, 针对 x_0 在 $[a,b]$ 内部的情况有下述定理:

定理 13.3.3 (Laplace) *如果 $a < x_0 < b, S^{(2m)}(x_0) \neq 0$, 但 $S^{(1)}(x_0) = S^{(2)}(x_0) = \cdots = S^{(2m-1)}(x_0) = 0$, 则:*

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-\frac{1}{2m}} e^{\lambda S(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-\frac{k}{m}}, \quad \lambda \to +\infty$$

其中

$$\begin{aligned}
c_k &= 2\frac{(-1)^{2k+1}(2m)^{2k}}{(2k)!}\Gamma(\frac{2k+1}{2m})(h(x,x_0)\frac{d}{dx})^{2k}(f(x)h(x,x_0))|_{x=x_0}, \\
h(x,x_0) &= \frac{(S(x_0) - S(x))^{1-\frac{1}{2m}}}{S'(x)}.
\end{aligned}$$

这个定理的证明与定理(13.3.2)并无太大区别, 只需注意当 x_0 在 $[a,b]$ 时对所引用的 Watson 引理作相应改动即可. 证明就略去了.

定理 13.3.4 (Laplace) 如果 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ 且 $f(x) \sim \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, x \to x_0$, 则在定理(13.3.2)中渐近式的主项为

$$F(\lambda) = \frac{1}{m}\lambda^{-\frac{n+1}{m}} e^{\lambda S(a)} \Gamma(\frac{n+1}{m})(\frac{m!}{|S^{(m)}(a)|})^{\frac{n+1}{m}} [\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + O(\lambda^{-\frac{n+1}{m}})],$$

而在定理(13.3.3)中渐近式的主项为

$$F(\lambda) = \frac{1}{m}\lambda^{-\frac{n+1}{2m}} e^{\lambda S(x_0)} \Gamma(\frac{n+1}{2m})(\frac{(2m)!}{|S^{(2m)}(x_0)|})^{\frac{n+1}{2m}} [\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(\lambda^{-\frac{n+1}{2m}})].$$

这个定理的证明恰似 Watson 引理(13.2.4), 它们二者都是直接将 $f(x)$ 的等价代入了积分进行处理得到答案. 再去重复一遍这样的证明实在是繁文缛节, 自己认为把握到这里的思想就足够了.

最后, 还有一个关于上述展开式的微分定理:

定理 13.3.5 (Laplace) 定理(13.3.2)和(13.3.3)中的渐近展开式关于 λ 可以任意次微分.

这一条性质恰由 Watson 引理(13.2.5)中的任意次可微而来.

综合来看, 整个 Laplace 渐近展开定理的思想其实不过是将函数的 Taylor 展式代入了 Laplace 积分之中, 这样的思想几乎是贯彻了这一整章. 关于 Laplace 积分更多的内容出现在复分析中, 就待彼时再进一步深入学习吧.

Chapter 14

补充: 数学分析 III 作业集

14.1 第一次作业

8 月 29 日作业

1. 说明例 3——5 中所研究的函数序列是否一致收敛.

解

例 3 中的序列 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ 一致收敛, 因为 $|f(x) - f_n(x)| = |f_n(x)| = |\frac{\sin nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$, 即 $\Delta_n \leq \frac{1}{n^2}$, 因此, 当 $n \to \infty$ 时, $\Delta_n \to 0$.

例 4 中的序列 $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$ 一致收敛, 因为 $|f(x)-f_n(x)| = |f_n(x)| = 2(n+1)x(1-x^2)^n$, 当 $x = 1$ 时 $f_n(1) \equiv 0$, 而当 $x \in [0, 1)$ 时 $\Delta_n \leq 4nxq^n \to 0, n \to \infty$, 这里 $0 < q = q(x) < 1$.

例 5 中的序列 $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ 不一致收敛, 因为 $\Delta_m = \sup|f(x) - f_m(x)| = 1 \neq 0$.

3.

(a) 证明例 1 中所研究的函数序列在任何一个区间 $[0, 1-\delta] \subset [0, 1]$ 上一致收敛, 但在集合 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

证明

对函数序列 $f_n(x) = x^n$, 当 $x \in [0, 1-\delta]$, 知 $0 \leq x < 1$, 从而函数序列在该区间上收敛到 0, 又因为 $|f(x) - f_n(x)| = |f_n(x)| = x^n \to 0, n \to \infty$, 知 $\Delta_n \to 0, n \to \infty$, 进而其在该区间上一致收敛. 而在 [0,1] 上有：

$$\Delta_n = \sup_{[0,1]}|f(x) - f_n(x)| = \sup_{[0,1)}|f(x) - f_n(x)| = \sup_{[0,1)}|f_n(x)| = 1 \neq 0$$

故其在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

(b) 证明上述结论对于例 9 所研究的序列也是正确的.

证明

对函数序列 $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, 若在 [0,1] 上研究, 知 $\Delta_n = f_n(2^{-\frac{1}{n}})$. 当考虑的区间为 $[0, 1-\delta]$ 时, 知总能找到足够大的 n 使得 $2^{-\frac{1}{n}} > 1-\delta$, 此时在 $[0, 1-\delta]$ 内即有 $\Delta_n = f_n(1-\delta) \to 0, n \to \infty$, 进而题设序列一致收敛. 但若考虑的区间为 [0,1], 知此时必有 $\Delta_n = \frac{1}{4} \neq 0$, 从而其不一致收敛.

(c) 证明例 8 中研究的函数族 f_t, 当 $t \to 0$ 时, 在任何一个区间 $[\delta, 1] \subset [0, 1]$ 上一致收敛, 但在集合 [0,1] 上不一致收敛.

证明

对该函数族, 知若在 $[\delta,1]$ 上研究, 必存在某个足够小的 t 满足 $2t<\delta$, 此时 $f_t\equiv 0$, 自然其一致收敛. 但若研究的区间为 [0,1], 知 $\Delta_t=1\neq 0$, 进而其不一致收敛.

(d) 研究函数族 $f_t(x)=\sin tx$ 当 $t\to 0$ 时的收敛性和一致收敛性, 然后再研究 $t\to\infty$ 的情况.

解

$t\to 0$ 时, 知对任意给定的点 x_0, 都有 $f_t(x)=\sin tx_0\sim tx_0\to 0$, 从而 $f_t(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛到 0. 又因为 $\Delta_t=\sup|f(x)-f_t(x)|=\sup|f_t(x)|=\sup|\sin tx|$, 但取 $x=\frac{\pi}{2t}$ 总能有 $\Delta_t=1\neq 0$, 故其在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛. 但若给定 $\mathbb{R}$ 的任意有界区间 [a,b](或其它的开闭形式), 知此时 $|\sin tx|\leq|tx|\leq|t|\max\{a,b\}\to 0$, 从而 $f_t(x)$ 在有界区间上一致收敛.

$t\to\infty$ 时, 显然 $f_t(x)$ 在 $x=0$ 处收敛到 0. 对任意给定的非零的点 x_0, 取 $t_{n_1}=\frac{(2n+1)\pi}{2x_0},t_{n_2}=\frac{n\pi}{x_0}$, 知 $n\to\infty,t_{n_1},t_{n_2}\to\infty$, 但 $f_{t_{n_1}}(x_0)\neq f_{t_{n_2}}(x_0)$, 从而其不收敛, 更不一致收敛.

(e) 说明函数族 $f_t(x)=e^{-tx^2}$ 当 $t\to+\infty$ 时在任意确定的集合 $E\subset\mathbb{R}$ 上的收敛性特性.

解

当 $x=0$, 知 $f_t(x)\equiv 1$, 自然其一致收敛到 $f(x)=1$.

当 $x\neq 0$, 知对任意给定的点 x_0, 都有 $-tx_0^2\to-\infty,t\to+\infty$, 此时 $f_t(x)\to 0$, 从而 $f_t(x)$ 在 E 上逐点收敛到 $f(x)=0$. 再考察一致连续性：若 E 有界, 设 $E=[a,b]$, 则知

$$\Delta_t=\sup_E|f(x)-f_t(x)|=\sup_E|f_t(x)|\leq e^{-t\min\{a^2,b^2\}}\to 0$$

从而其一致收敛. 但当 E 无界, 不失一般性设之为 $[a,+\infty)$, 在 t 足够大时取 $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$, 知 $\Delta_t\geq\frac{1}{e}>0$, 从而其不一致收敛.

5.

(a) 在证明柯西准则充分性条件时, 我们关于 T 中的基 $\mathfrak{B}$ 取极限 $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f_{t_1}(x)=f(x)$, 但是 $t_1\in B$, 而 $\mathfrak{B}$ 是 T 的基, 不是 B 的基. 我们能保持 t_1 在 B 中, 实现这个极限的过渡吗？

解

可以, 因为 $B\subset T$, 在对 T 取极限的时候 B 是随取定基的变化而变化的, 且始终保持 $B\subset T$.

(b) 说明在函数族 $f_t:X\to\mathbb{R}$ 的一致收敛性柯西准则的证明中, 何处用到了 $\mathbb{R}$ 的完备性.

解

在对 t_1 取极限时, 断言 $f(x)$ 也是从 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射时用到的.

(c) 注意, 如果函数族 $\{f_t:X\to\mathbb{R},t\in T\}$ 中所有函数都是常值函数, 那么所证明的定理正好给出了函数 $\varphi:T\to\mathbb{R}$ 关于 T 中基 $\mathfrak{B}$ 的极限存在性的柯西准则.

解

若函数族 $\{f_t:X\to\mathbb{R},t\in T\}$ 中所有函数都是常值函数, 这便说明 $f_t(x)$ 与 x 无关, 进而再将 $f_t(x)$ 视作二元函数 $F(x,t)$ 时, 可省略掉 x 将其视作一元函数 $\varphi(t)$, 从而题设自然成立.

8 月 31 日作业

1. 研究下列级数对于各种实参数 α 的值在集 $E\subset\mathbb{R}$ 上的收敛性.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$

解

统一记题目给出的级数通项为 $a_n(x)$, 显然当 $nx=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$, 也即 $x=\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2}+k\pi),k\in\mathbb{Z}$ 时, 题设级数必一致收敛到 0, 从而下面讨论 $\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2}+k\pi)\notin E,k\in\mathbb{Z}$ 的情况：

当 $\alpha\le 0$, 知 $\frac{\cos nx}{n^\alpha}\nrightarrow 0$, 进而级数不收敛.

当 $\alpha>1$, 知 $|\frac{\cos nx}{n^\alpha}|\le\frac{1}{n^\alpha}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法知级数在 E 上绝对且一致收敛.

当 $0<\alpha\le 1$, 可知 $|\sum\limits_{k=0}^{n}\cos kx|\le|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}|$, 而 $\frac{1}{n^\alpha}$ 递减趋于 0, 故当 $2k\pi\notin E,k\in\mathbb{Z}$ 时, 原级数由阿贝尔狄利克雷判别法可知在 E 上一致收敛;而当 $2k\pi\in E,k\in\mathbb{Z}$, 知此时级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, 显然发散.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$

解

在上题中把 x 换成 $\frac{\pi}{2n}-x$ 可知：当 $n(\frac{\pi}{2n}-x)=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$, 也即 $x=\frac{k\pi}{n},k\in\mathbb{Z}$ 时, 题设级数必一致收敛到 0, 从而下面讨论 $\frac{k\pi}{n}\notin E,k\in\mathbb{Z}$ 的情况：

当 $\alpha\le 0$, 由上题知级数不收敛.

当 $\alpha>1$, 由上题知级数在 E 上绝对且一致收敛.

当 $0<\alpha\le 1$, 可知 $|\sum\limits_{k=0}^{n}\sin kx|\le|\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}|$, 而 $\frac{1}{n^\alpha}$ 递减趋于 0, 故当 $\pi+2k\pi\notin E,k\in\mathbb{Z}$ 时, 原级数由阿贝尔狄利克雷判别法可知在 E 上一致收敛；而当 $\pi+2k\pi\in E,k\in\mathbb{Z}$, 知此时级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, 显然发散.

3. 证明：如果狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^x}$ 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 收敛, 那么它在集合 $x\ge x_0$ 上一致收敛, 而且, 如果 $x>x_0+1$, 那么级数绝对收敛.

证明

当 $x\ge x_0$, 有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$$

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^{x_0}}$ 一致有界, $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 递减趋 0, 从而由阿贝尔狄利克雷判别法知原级数一致收敛.

当 $x>x_0+1$, 由实数的完备性知 $\exists q>0(x\ge x_0+1+q)$. 届于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^{x_0}}$ 已经收敛了, 知 n 足够大时 $|\frac{c_n}{n^{x_0}}|$ 必有界, 记 $|\frac{c_n}{n^{x_0}}|<M$. 故当 n 足够大时, 有：

$$|\frac{c_n}{n^x}|\le|\frac{c_n}{n^{x_0+1+q}}|=|\frac{c_n}{n^{x_0}}|\cdot\frac{1}{n^{1+q}}\le M\frac{1}{n^{1+q}}$$

而后者的级数收敛, 故由比较审敛法可知命题成立.

4. 验证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 虽然在 $\mathbb{R}$ 上收敛但不一致收敛.

证明

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 而言, 利用阿贝尔狄利克雷判别法：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{nx^2}{(1+x^2)^n}$$

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 0, 从而只需说明 $b_n=\frac{nx^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调且一致有界. 容易验证 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n(1+x^2)}$. 当 $x>0$ 时该比值总会在足够多项后恒小于 1, 进而 b_n 在足够多项后递减. 又因为 $\frac{nx^2}{(1+x^2)^n}\leq\frac{nx^2}{1+nx^2}\leq 1$, 从而 b_n 一致有界, 故原级数一致收敛.

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, 当 $x=0$ 时知其显然收敛, 而若给定点 x_0 研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^2}{(1+x_0^2)^n}$, 知其即为一个收敛的几何级数, 故该级数在 $\mathbb{R}$ 上收敛, 计算可得 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x^2}{(1+x^2)^k}=1-\frac{1}{(1+x^2)^n}$, 进而有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$$

但

$$\begin{aligned}\Delta_n&=\sup_{\mathbb{R}}|S(x)-S_n(x)|=\sup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}|S(x)-S_n(x)|\\&=\sup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}|\frac{1}{(1+x^2)^n}|=1\nrightarrow 0\end{aligned}$$

从而级数不一致收敛.

5.

(a) 以练习 2 的级数为例验证：级数一致收敛的魏尔斯特拉斯检验法中的条件是级数一致收敛的充分但非必要的条件.

解

取 $a_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}x^n, 0\leq x\leq 1$, 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 一致收敛, 但

$$\sup_{[0,1]}|a_n(x)|=\sup_{[0,1]}\frac{x^n}{n}=\frac{1}{n}$$

若存在收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 使得对一切足够大的 $n\in\mathbb{N}$ 有 $M_n\geq\sup\limits_{[0,1]}|a_n(x)|$, 知此时必有 $M_n\geq\frac{1}{n}$, 但根据比较审敛法即知此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 发散！故找不到这样的收敛数项级数, 也即这个函数不满足魏尔斯特拉斯检验法的条件, 非必要性得证.

(b) 构造级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$, 使它的项在区间 $0\leq x\leq 1$ 上非负连续, 它在此区间上一致收敛, 同时, 由 $M_n=\max\limits_{0\leq x\leq 1}|a_n(x)|$ 组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 发散.

解

(来自史济怀的例子) 取

$$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n}\\ 0, & x\neq\frac{1}{n}\end{cases}$$

即可.

9 月 2 日作业

证明：对任意的 $\alpha>0$, 级数

$$1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

收敛且绝对收敛.

证明

用 Raabe 判别法：记 $a_n = |\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}|$, 在 n 足够大时有：

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{n+1}{n-\alpha}-1)=\frac{(1+\alpha)n}{n-\alpha}\to 1+\alpha>1$$

进而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ 收敛, 也即原级数绝对收敛.

9 月 5 日作业

课堂练习验证超几何级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

当 $|x|<1$ 时收敛.

证明

用 D'Alembert 判别法, 记级数的通项的绝对值为 a_n, 有：

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{|\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)|}{(n+1)!|\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)|}|x^{n+1}|\cdot\frac{n!|\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)|}{|\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)||x^n|}\\&=\frac{|(\alpha+n)(\beta+n)||x|}{(n+1)|(\gamma+n)|}\to|x|<1\end{aligned}$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 也即命题成立.

1. 利用幂级数, 求方程 $y''(x)-y(x)=0$ 满足以下条件 (a) 或 (b) 的解:

(a) $y(0)=0, y(1)=1$;

解

设 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, 可知 $y''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$, 进而方程等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2}-c_n)x^n=0$$

比对可知 $c_{n+2}=\frac{c_n}{(n+2)(n+1)}$, 同时代入 $0,1$ 有 $y(0)=c_0, y(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$, 进而结合初值条件有：

$$\begin{cases}c_0=0\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n=1\end{cases}$$

可知 $c_{2k}=0, k\in\mathbb{N}, c_{2k+1}=\frac{c_1}{(2k+1)!}$, 进而上式可进一步化为：

$$c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}=1$$

注意到

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

从而有：

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

上两式相减得

$$e - e^{-1} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$$

从而可知 $c_1 = \frac{2e}{e^2-1}$, 进而 $c_{2k+1} = \frac{2e}{e^2-1}\frac{1}{(2k+1)!}$, 从而解即

$$y(x) = \frac{2e}{e^2-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

进一步, 在 e^x 的泰勒展开式中分别代入 x 和 $-x$ 并将两者相减, 可得

$$e^x - e^{-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

从而

$$y(x) = \frac{e}{e^2-1}(e^x - e^{-x})$$

(b) $y(0) = 1, y(1) = 0.$

解

同 (a), 由初值条件知：

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = 0 \end{cases}$$

可知 $c_{2k} = \frac{c_0}{(2k)!} = \frac{1}{(2k)!}, c_{2k+1} = \frac{c_1}{(2k+1)!}$, 进而将此二式代入上式得：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} + c_1\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = 0$$

由

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad e^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

可知：

$$e + e^{-1} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$$

$$e - e^{-1} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$$

进而有

$$e + e^{-1} + c_1(e - e^{-1}) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{e^2+1}{1-e^2}$$

从而代入可知：

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \frac{e^2+1}{e^2-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

又知：

$$e^x + e^{-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$e^x - e^{-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

代入有：

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - \frac{e^2+1}{e^2-1}(e^x - e^{-x})) = -\frac{e^2+3}{2(e^2-1)}e^x + \frac{3e^2+1}{2(e^2-1)}e^{-x}$$

5. 求

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k e^{ik\varphi}$;

解

显然 $r=0$ 时级数为 0, 下面讨论 $r \neq 0$ 的情况：

当 $\varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 有：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ik\varphi} &= \sum_{k=0}^{n} (re^{i\varphi})^k \\ &= \frac{1-(re^{i\varphi})^n}{1-re^{i\varphi}}\end{aligned}$$

当 $\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 有：

$$\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ik\varphi} = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k \cos k\varphi$;

解

显然 $r=0$ 时级数为 0, 下面讨论 $r \neq 0$ 的情况：

当 $\varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, 由 (a) 与 Euler 公式知, 当 $\varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ik\varphi} &= \frac{1-(re^{i\varphi})^n}{1-re^{i\varphi}} \\ &= \frac{1}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}(1 - r\cos\varphi - r^n\cos n\varphi + r^{n+1}\cos(n-1)\varphi) \\ &+ i\frac{1}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}(r\sin\varphi - r^n\sin n\varphi + r^{n+1}\sin(n-1)\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^{n} r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^{n} r^k\cos k\varphi + i\sum_{k=0}^{n} r^k \sin k\varphi\end{aligned}$$

比较实部即知

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \cos k\varphi = \frac{1}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}(1 - r\cos\varphi - r^n\cos n\varphi + r^{n+1}\cos(n-1)\varphi)$$

当 $\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, 知

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \cos k\varphi = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k \sin k\varphi$.

解

显然 $r=0$ 时级数为 0, 下面讨论 $r \neq 0$ 的情况:

当 $\varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, 同 (b), 比较虚部即知

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \sin k\varphi = \frac{1}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}(r\sin\varphi - r^n \sin n\varphi + r^{n+1}\sin(n-1)\varphi)$$

当 $\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, 知级数为 0.

证明当 $|r| < 1$ 时,

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k e^{ik\varphi} = \frac{1}{1-r\cos\varphi - ir\sin\varphi}$;

证明

由 (b) 知当 $\varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ik\varphi} = \frac{1-(re^{i\varphi})^n}{1-re^{i\varphi}}$$

当 $|r| < 1, n \to \infty$, 知:

$$\frac{1-(re^{i\varphi})^n}{1-re^{i\varphi}} \to \frac{1}{1-re^{i\varphi}} = \frac{1}{1-r\cos\varphi - ir\sin\varphi}$$

代入 $\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 知上式也成立.

(e) $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2}$;

证明

由 (b) 知当 $\varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \cos k\varphi = \frac{1}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}(1 - r\cos\varphi - r^n \cos n\varphi + r^{n+1}\cos(n-1)\varphi)$$

进而当 $|r| < 1, n \to \infty$, 有:

$$\frac{1}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}(1 - r\cos\varphi - r^n \cos n\varphi + r^{n+1}\cos(n-1)\varphi) \to \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2}$$

进而有

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2} - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2}$$

代入 $\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 知上式也成立.

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2}$.

证明

由 (c) 知当 $\varphi \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \sin k\varphi = \frac{1}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}(r\sin\varphi - r^n \sin n\varphi + r^{n+1}\sin(n-1)\varphi)$$

进而当 $|r| < 1, n \to \infty$, 有:

$$\frac{1}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}(r\sin\varphi - r^n \sin n\varphi + r^{n+1}\sin(n-1)\varphi) \to \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2}$$

从而有:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \sin k\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2}$$

代入 $\varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 知上式也成立.

用级数求和的阿贝尔方法验证:

(g) $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi = 0$, 如果 $\varphi \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

证明

由 (e) 知当 $\varphi \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, 有:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2} - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2}, |r| < 1$$

既然 $r = 1$ 时式子的右端有确定值 0, 根据阿贝尔方法可将其规定为左端的值, 也即

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi = 0$$

(h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\varphi$, 如果 $\varphi \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

证明

由 (f) 知当 $\varphi \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, 有:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \sin k\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2}, |r| < 1$$

既然 $r = 1$ 时式子的右端有确定值 $\frac{\sin\varphi}{2-2\cos\varphi}$, 根据阿贝尔方法可将其规定为左端的值, 也即

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi = \frac{\sin\varphi}{2-2\cos\varphi} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi$$

6. 考虑级数的乘积

$$(a_0 + a_1 + \cdots)(b_0 + b_1 + \cdots) = (c_0 + c_1 + \cdots)$$

其中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$. 利用命题 1 证明：如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 分别收敛于 A, B, C, 那么 $AB = C$.

证明

考察幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n, \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$, 记 $\sum_{k=0}^{n} a_kx^k = f_k(x), \sum_{k=0}^{n} b_kx^k = g_k(x), \sum_{k=0}^{n} c_kx^k = h_k(x)$, 从而比对题式左右两端, 可知 c_i 与 $\sum_{k=0}^{i} a_kb_{i-k}$ 都是 x^i 的系数. 根据命题 1, 既然 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n, \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ 都在 $x=1$ 处收敛, 知它们的和都在 $[0,1]$ 上连续, 且它们都一致收敛, 从而有

$$\lim_k f_k(x) \lim_k g_k(x) = \lim_k (f_k(x) \lim_k g_k(x)) = \lim_k (f_k(x)g_k(x)) = \lim_k h_k(x), x \in [0,1]$$

将 $x=1$ 代入上式两端, 左端即 AB, 右端即 C, 从而命题得证.

9 月 7 日作业

课堂练习详细说明阿尔采拉——阿斯柯利定理中“如果现在取对角线序列 $\{g_n = f_n^n, n \in \mathbb{N}\}$, 那么, 容易看出, 它将在处处稠密集合 $E \subset K$ 的任何一点收敛”.

证明

根据定义, f_n^n 在点 $x_i|_{i=1}^n$ 收敛, 从而若给定 E 中的某个点 x_N, 则知序列 $\{f_n^n\}$ 中满足 $n > N$ 的那些项都在 x_N 处收敛.

9 月 14 日作业

1.

(a) 说明, 为什么关系式 (2) 中的函数 $F(y)$ 当依赖于参变量 $y \in Y$ 的函数 $\varphi_y(x) = f(x,y)$ 在区间 $a \le x \le b$ 上可积, 且关于 Y 中的某个基 $\mathfrak{B}$(例如, 关于基底 $y \to y_0$) 一致收敛到函数 $\varphi(x)$ 时, 函数 $F(y)$ 有极限 $\int_a^b \varphi(x)dx$.

证明

按照 $\varphi_y(x) \rightrightarrows \varphi(x)(y \to y_0)$ 的定义, 有：

$$\forall x \in [a,b] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall y \in Y(|y - y_0| < \delta \Rightarrow |\varphi_y(x) - \varphi(x)| < \varepsilon)$$

进而当 $|y - y_0| < \delta$, 有：

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= |\int_b^a \varphi_y(x)dx - \int \varphi(x)dx| \\ &\le \int_a^b |\varphi_y(x) - \varphi(x)|dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a), \quad y \to y_0 \end{aligned}$$

进而根据极限的定义知 $\lim\limits_{y \to y_0} F(y) = \int_a^b \varphi(x)dx = F(y_0)$. 这里定积分届于题目所述关于 x 的可积性而存在.

(b) 试证：如果 E 是 $\mathbb{R}^m$ 中的可测集, 而函数 $f : E \times I^n \to \mathbb{R}$ 在集 E 和 n 维区间 I^n 的直积 $E \times I^n = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{m+n} | x \in E \wedge t \in I^n\}$ 上有定义且连续, 那么当 $E_t = E$ 时, 由等式 (1) 定义的函数 F 在 I^n 上连续.

• 证明 (此处证明后证实有误, 具体证明会抽空补上)

固定 $\boldsymbol{x}$, 并将 f 视作关于 $\boldsymbol{t}$ 的函数. 届于 f 在 I^n 上连续, 由于 I^n 是紧集, f 必在 I^n 上一致连续, 进而根据定义有：

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2 \in I^n (\| \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 \| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{t}_1) - f(\boldsymbol{t}_2)| < \varepsilon)$$

知上式是对任意 $\boldsymbol{x} \in E$ 都成立的, 从而当 $E_t = E$ 时, 令 $\| \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 \| < \delta$, 有：

$$\begin{aligned} |F(\boldsymbol{t}_1) - F(\boldsymbol{t}_2)| &= |\int_E f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_1) d\boldsymbol{x} - \int_E f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_2) d\boldsymbol{x}| \\ &\leq \int_E |f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_1) - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_2)| d\boldsymbol{x} < \int_E \varepsilon d\boldsymbol{x} = \mu(E)\varepsilon \end{aligned}$$

届于 E 是可测集, 知 $\mu(E)$ 至少有界, 从而由 ε 的任意性即得 $F(\boldsymbol{t})$ 的连续性.

(c) 设 $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$, 且 $f \in C(P, \mathbb{R}).\alpha, \beta \in C([c, d], [a, b])$, 试证：函数 (7) 在区间 $[c, d]$ 上连续.

证明

将 f 视作关于 y 的函数, 知 $f \in C([c, d], \mathbb{R})$, 进而由 $f \in C([c, d], \mathbb{R}), \alpha, \beta \in C([c, d], [a, b])$ 的定义有：

$$\forall y_0 \in [c, d] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in [c, d] (|y - y_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon)$$
$$\forall y_0 \in [c, d] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in [c, d] (|y - y_0| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \varepsilon)$$
$$\forall y_0 \in [c, d] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in [c, d] (|y - y_0| < \varepsilon \Rightarrow |\beta(y) - \beta(y_0)| < \varepsilon)$$

从而当 $|y - y_0| < \delta$, 注意到由 $f \in C(P, \mathbb{R})$ 与 P 的紧性可知 f 在 P 上有界, 同理 α, β 亦有界, 从而可设 $\exists M > 0(\max\{|f|, |\alpha|, |\beta|\} \leq M)$, 有：

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= |\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx| \\ &= |\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx| \\ &\leq |\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y) dx| + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} |f(x, y) - f(x, y_0)| dx + |\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx| \\ &\leq M|\alpha(y) - \alpha(y_0)| + M|\beta(y) - \beta(y_0)| + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \varepsilon dx < (2M + \beta(y_0) - \alpha(y_0))\varepsilon \leq 4M\varepsilon \end{aligned}$$

由 ε 的任意性即得命题.

2.

(a) 试证：如果 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 那么函数 $F(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x + t) dt$ 在 $\mathbb{R}$ 上不仅连续而且可微.

证明

由 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 的定义知：

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

首先考察 $F(x)$ 的连续性. 不失一般性, 设 $a > 0$, 令 $|x - x_0| < \delta$, 至此时对任意的 t 都有 $|(x + t) - (x_0 + t)| < \delta$, 进而：

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= |\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x + t) dt - \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x_0 + t) dt| \\ &\leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |f(x + t) - f(x_0 + t)| dt < \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \varepsilon dt = \varepsilon \end{aligned}$$

从而由 ε 的任意性可知 $F(x)$ 连续. 再考察 $F(x)$ 的可微性, 取 $0<|h|<\delta$, 并取 $x_0\in\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
&|F(x_0+h)-F(x_0)-\frac{f(x_0+a)-f(x_0+a)}{2a}h|\\
=&|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(x_0+h+t)dt-\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(x_0+h)dt-\frac{f(x_0+a)-f(x_0+a)}{2a}h|\\
=&\frac{1}{2a}|\int_{-a}^{a}(f(x_0+h+t)-f(x_0+t)-\frac{1}{2a}(f(x_0+a)-f(x_0+a))h)dt|
\end{aligned}
$$

既然 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 其必存在原函数, 不妨设 $G(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是 f 的一个原函数, 知 G 必定可微, 进而由 Newton-Leibniz 法则知:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2a}|\int_{-a}^{a}(f(x_0+h+t)-f(x_0+t)-\frac{1}{2a}(f(x_0+a)-f(x_0+a))h)dt|\\
=&\frac{1}{2a}|G(x_0+h+a)-G(x_0+h-a)-G(x_0+a)+G(x_0-a)-(f(x_0+a)-f(x_0-a))h|\\
=&\frac{1}{2a}|hf(x_0+a+\xi)-h(f(x_0-a+\eta))-f(x_0+a)h+f(x_0-a)h|\\
=&|h|\cdot\frac{1}{2a}|f(x_0+a+\xi)-f(x_0+a)+f(x_0-a)-f(x_0-a+\eta)|
\end{aligned}
$$

这里 $0\le|\xi|,|\eta|\le|h|$, 进而当 $h\to0$, 由 f 的连续性知

$$\frac{1}{2a}|f(x_0+a+\xi)-f(x_0+a)+f(x_0-a)-f(x_0-a+\eta)|\to0$$

这便说明 $h\to0$ 时:

$$|F(x_0+h)-F(x_0)-\frac{f(x_0+a)-f(x_0+a)}{2a}h|=o(h)$$

进而 F 在 $\mathbb{R}$ 上可微.

(b) 求函数 $F(x)$ 的导数, 并证明 $F\in C^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

证明

根据 (a) 已经知道 $F'(x)=\frac{f(x+a)-f(x-a)}{2a}$, 而既然 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, a 是给定的常数, 由连续函数的复合知 $\frac{1}{2a}(f(x+a)-f(x-a))$ 依旧是连续函数, 从而 $F\in C^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. 利用含参变积分的微分法证明. 当 $|r|<1$ 时:

$$F(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx=0$$

证明

知

$$
\begin{aligned}
\frac{dF}{dr} &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r}(\ln(1-2r\cos x+r^2))dx \\
&= \int_0^\pi \frac{2r-2\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx \\
&= \int_0^\pi \frac{2r-\frac{1+r^2}{r}+\frac{1+r^2}{r}-2\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx \\
&= \frac{r^2-1}{r}\int_0^\pi \frac{dx}{1-2r\cos x+r^2}+\frac{\pi}{r} \\
&= \frac{r^2-1}{r}\int_0^\pi \frac{dx}{(r-1)^2\cos^2\frac{x}{2}+(r+1)^2\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{\pi}{r} \\
&= 2\frac{r^2-1}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t dt}{(r-1)^2+(r+1)^2\tan^2 t}+\frac{\pi}{r} \\
&= 2\frac{r^2-1}{r}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(r-1)^2+(r+1)^2u^2}+\frac{\pi}{r} \\
&= \frac{2}{r}\int_0^{+\infty} \frac{d(\frac{r+1}{r-1}t)}{1+(\frac{r+1}{r-1}t)^2}+\frac{\pi}{r}=0
\end{aligned}
$$

从而 $F(r)\equiv C$, 其中 C 是一个常数. 又因为代入 $r=0$ 可知 $F(0)=\int_0^\pi 0dx=0$, 从而 $F(r)\equiv 0$, 题式得证.

4. 验证下面的函数满足例 2 所说的 Bessel 方程：

$$x^2u''+xu'+(x^2-n^2)u=0$$

(a) $u=x^n\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi$;

证明

知

$$
\begin{aligned}
u' &= x^n\int_0^\pi \cos\varphi(-\sin(x\cos\varphi))\sin^{2n}\varphi d\varphi+nx^{n-1}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
&= nx^{n-1}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi-x^n\int_0^\pi \cos\varphi\sin(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
u'' &= nx^{n-1}\int_0^\pi \cos\varphi(-\sin(x\cos\varphi))\sin^{2n}\varphi d\varphi+n(n-1)x^{n-2}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
&- x^n\int_0^\pi \cos^2\varphi\cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi-nx^{n-1}\int_0^\pi \cos\varphi\sin(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
&= -x^n\int_0^\pi \cos^2\varphi\cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi+n(n-1)x^{n-2}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
&- 2nx^{n-1}\int_0^\pi \cos\varphi\sin(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi
\end{aligned}
$$

代入方程有：

$$
\begin{aligned}
& x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u \\
=& -x^{n+2}\int_0^\pi \cos^2\varphi\cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi + n(n-1)x^n\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
& -2nx^{n+1}\int_0^\pi \cos\varphi\sin(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi + nx^n\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
& -x^{n+1}\int_0^\pi \cos\varphi\sin(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi + x^{n+2}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
& -n^2x^n\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
=& x^{n+2}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n+2}\varphi d\varphi - (2n+1)x^{n+1}\int_0^\pi \cos\varphi\sin(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi \\
=& x^{n+2}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n+2}\varphi d\varphi - x^{n+1}\int_0^\pi \sin(x\cos\varphi)d(\sin^{2n+1}\varphi) \\
=& x^{n+2}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n+2}\varphi d\varphi - x^{n+1}(\sin(x\cos\varphi)\sin^{2n+1}\varphi)|_0^\pi \\
& +x^{n+1}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\varphi\cos(x\cos\varphi)\cdot(-x\sin\varphi)d\varphi = 0
\end{aligned}
$$

(b) $J_n(x) = \frac{x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos xtdt$;

证明

知

$$
\begin{aligned}
J_n'(x) &= -\frac{x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 t(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\sin xtdt + \frac{nx^{n-1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos xtdt \\
J_n''(x) &= -\frac{x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 t^2(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos xtdt - \frac{nx^{n-1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 t(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\sin xtdt \\
&- \frac{nx^{n-1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 t(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\sin xtdt + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos xtdt \\
&= \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos xtdt - \frac{2nx^{n-1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 t(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\sin xtdt \\
&- \frac{x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^1 t^2(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos xtdt
\end{aligned}
$$

代入方程有

$$
\begin{aligned}
&x^2J_n''+xJ_n'+(x^2-n^2)J_n\\
=&\frac{n(n-1)x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac12}\cos xtdt-\frac{2nx^{n+1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}\sin xtdt\\
-&\frac{x^{n+2}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}t^2(1-t^2)^{n-\frac12}\cos xtdt-\frac{x^{n+1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}\sin xtdt\\
+&\frac{nx^n}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac12}\cos xtdt+\frac{x^{n+2}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac12}\cos xtdt\\
-&\frac{n^2x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac12}\cos xtdt\\
=&\frac{x^{n+2}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+\frac12}\cos xtdt-\frac{(2n+1)x^{n+1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}\sin xtdt\\
=&\frac{x^{n+1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+\frac12}d\sin xt-\frac{(2n+1)x^{n+1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}\sin xtdt\\
=&-\frac{x^{n+1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}\sin xtd(1-t^2)^{n+\frac12}-\frac{(2n+1)x^{n+1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}\sin xtdt=0
\end{aligned}
$$

(c) 试证：与不同的 $n\in\mathbb{N}$ 相对应的函数 J_n 满足关系 $J_{n+1}=J_{n-1}-2J_n'$.

证明

知题式即：

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^{n+1}}{(2n+1)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+\frac12}\cos xtdt\\
=&\frac{x^{n-1}}{(2n-3)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac32}\cos xtdt+\frac{2x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}\sin xtdt\\
-&\frac{2nx^{n-1}}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac12}\cos xtdt\\
\Leftrightarrow&\frac{x^2}{(2n+1)(2n-1)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+\frac12}\cos xtdt\\
=&\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac32}\cos xtdt+\frac{2x}{2n-1}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}\sin xtdt\\
-&\frac{2n}{2n-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac12}\cos xtdt
\end{aligned}
$$

而：

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2}{(2n+1)(2n-1)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+\frac12}\cos xtdt\\
=&\frac{x}{(2n+1)(2n-1)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+\frac12}d\sin xt=\frac{x}{2n-1}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}\sin xtdt\\
=&\frac{-1}{2n-1}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}d\cos xt=\frac{1}{2n-1}\int_{-1}^{1}\cos xt(-(2n-1)t^2(1-t^2)^{n-\frac32}+(1-t^2)^{n-\frac12})dt\\
=&\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac32}\cos xtdt+\frac{2x}{2n-1}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n-\frac12}\sin xtdt\\
-&\frac{2n}{2n-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac12}\cos xtdt
\end{aligned}
$$

比对即知题式得证.

14.2 第二次作业

9 月 16 日作业

1. 设 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \cdots < \omega$, 用级数和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y)$ 的形式表示积分 $\int_a^{\omega} f(x,y)dx$, 其中 $\varphi_n(y) = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)dx$. 证明：当且仅当上述形式的任意序列 $\{a_n\}$ 相应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y)$ 在集合 $E \subset Y$ 上都一致收敛时, 积分 $\int_a^{\omega} f(x,y)dx$ 在集合 E 上一致收敛.

证明

当 $\int_a^{\omega} f(x,y)dx$ 在 E 上一致收敛, 设 $\int_a^{\omega} f(x,y)dx \rightrightarrows g(y)$, 按定义有：

$$\forall y \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall w \in (-\infty, \omega)(\omega - w < \delta \Rightarrow |\int_a^w f(x,y)dx - g(y)| < \varepsilon)$$

上述式子可以按照 $\{a_n\}|_{n=0}^{\infty}$ 的分划另写成：

$$|\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)dx - g(y)| < \varepsilon$$

而此即

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) - g(y)| < \varepsilon$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \rightrightarrows g(y)$, 而届于 $w \to \omega$ 的过程可包含每一种 $\{a_n\}$ 的可能, 上述过程自然对任意的 $\{a_n\}$ 成立, 进而 $\forall \{a_n\}(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \rightrightarrows g(y), y \in E)$.

当 $\forall \{a_n\}(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \rightrightarrows g(y), y \in E)$, 按定义有：

$$\forall y \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall n \in \mathbb{N}(n > N \Rightarrow |\sum_{k=1}^{n} \varphi_n(y) - g(y)| < \varepsilon)$$

上述式子代入 $\varphi_n(y) = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)dx$ 有：

$$|\int_a^{a_n} f(x,y)dx - g(y)| < \varepsilon$$

因为 a_n 是任意的, $n \to \infty$ 时 a_n 可以囊括所有 $w \to \omega$ 的情况, 从而上述式子可以写作

$$|\int_a^w f(x,y)dx - g(y)| < \varepsilon, \omega - w < \delta(\varepsilon)$$

这便是 $\int_a^{\omega} f(x,y)dx \rightrightarrows g(y)$ 的定义.

2. 验证：函数 $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}dt$ 满足 Bessel 方程 $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$.

证明

知：

$$J_0'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{t\sin xt}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
$$J_0''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{t^2\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

进而代入方程有：

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{t^2\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}dt-\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{t\sin xt}{x\sqrt{1-t^2}}dt+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}dt=0\\
\Leftrightarrow&\int_0^1\sqrt{1-t^2}\cos xtdt=\int_0^1\frac{t\sin xt}{x\sqrt{1-t^2}}dt
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\sqrt{1-t^2}\cos xtdt&=\frac{1}{x}\int_0^1\sqrt{1-t^2}d\sin xt\\
&=\frac{1}{x}((\sqrt{1-t^2}\sin xt)|_0^1-\int_0^1\sin xtd\sqrt{1-t^2})=\frac{1}{x}\int_0^1\frac{t\sin xt}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}
$$

比对即知命题得证.

3.

(a) 根据等式 $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}$, 证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}}$$

证明

记 $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}$, 有：

$$
\begin{aligned}
I_n&=(\frac{y}{(x^2+y^2)^n})|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}dy\\
&=2nI_n-2nx^2I_{n+1}
\end{aligned}
$$

从而有递推式：

$$I_n=\frac{(2n-3)}{x^2(2n-2)}I_{n-1}=\frac{(2n-3)(2n-5)}{x^4(2n-2)(2n-4)}I_{n-2}=\cdots=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{x^{2n-2}}I_1=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{x^{2n-1}}$$

进而题式得证.

(b) 验证：

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+\frac{y^2}{n})^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}$$

证明

由 (a)：

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}=\frac{1}{x^{2n}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+\frac{y^2}{x^2})^n}\Rightarrow\quad\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+\frac{y^2}{x^2})^n}=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}x$$

代入 $x=\sqrt{n}$ 即证.

(c) 证明：当 $n\to+\infty$ 时, 在 $\mathbb{R}$ 上, $(1+\frac{y^2}{n})^{-n}\searrow e^{-y^2}$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+\frac{y^2}{n})^n}=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy$$

证明

先证 $(1+\frac{y^2}{n})^{-n}\searrow e^{-y^2}$：已知 $(1+\frac{1}{n})^n\nearrow e$, 故 $(1+\frac{y^2}{n})^n=(1+\frac{y^2}{n})^{\frac{n}{y^2}\cdot y^2}\nearrow e^{y^2}$, 进而 $\frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^n}\searrow\frac{1}{e^{y^2}}$, 命题即证.

再证题目所给的极限式, 知其可以转化为证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^n}-e^{-y^2})dy=0$$

注意到 $E=(0,+\infty)$ 是 Lebesgue 可测集, 对任意的 n 而言 $f_n(y)=\frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^n}-e^{-y^2}$ 都是 E 上的可测函数, 同时注意到 $f_n(y)\searrow 0$, 从而根据 Lebesgue 单调收敛定理, 有：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(y)d\mu=\int_E\lim_{n\to+\infty}f_n(y)d\mu=0$$

而上式左端根据 $\forall n\in\mathbb{N}(f_n(y)\in\mathfrak{R}(E))$ 知其正是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{(1+\frac{y^2}{n})^n}-e^{-y^2})dy$, 从而命题得证.

(d) 试推证下面的 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

证明 (本题应该有些问题, 下面的过程会逐步推导出错误点并尝试改正)

注意到届于 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 有不等式：

$$\sin^{2n+1}x\le\sin^{2n}x\le\sin^{2n+1}x$$

积分有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}xdx$$

运用积分的 Wallis 公式计算有：

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\le\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\le\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

简化有：

$$\frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}\le\frac{\pi}{2}\le\frac{(2n-2)!!(2n)!!}{((2n-1)!!)^2}$$

再证明 $n\to+\infty$, $\frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}\sim\frac{(2n-2)!!(2n)!!}{((2n-1)!!)^2}$, 这是因为：

$$\frac{(2n-2)!!(2n)!!}{((2n-1)!!)^2}\frac{(2n+1)!!(2n-1)!!}{((2n)!!)^2}=\frac{2n+1}{2n}\to 1, n\to+\infty$$

从而可得：

$$n\to+\infty,\quad\frac{\pi}{2}\sim\frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}$$

但是根据函数 $\frac{1}{x}$ 的连续性, 有如下过程成立：

$$\frac{2}{\pi}\sim\frac{(2n+1)!!(2n-1)!!}{((2n)!!)^2}=\frac{(2n+1)(2n-1)^2((2n-3)!!)^2}{2n\cdot 2n((2n-2)!!)^2}\sim 2n\frac{((2n-3)!!)^2}{((2n-2)!!)^2}$$

这里已经与题式不同了, 如果再根据 $\sqrt{x}$ 的连续性, 可以推知如下式子：

$$\frac{1}{\pi}\sim\sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$$

从而下述式子成立：

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

得到该式后, 再利用 (b), (c) 与 Poisson 积分已知的结论来证明该题, 就不那么困难了：

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+\frac{y^2}{n})^n}=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}\sim\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\\ \Leftrightarrow&\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad n\to+\infty\end{aligned}$$

9 月 19 日作业

1. 利用等式

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

证明：

(a) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2xydx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}$.

证明

记 $F(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2xydx$, 知 $F'(y)=-\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\sin 2xydx$, 但同时注意到：

$$\begin{aligned}F(y)&=\frac{1}{2y}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2xyd(2xy)=\frac{1}{2y}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}d\sin(2xy)\\&=\frac{1}{2y}(e^{-x^2}\sin 2xy|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\sin(2xy)(-2x)e^{-x^2}dx)=-\frac{1}{2y}F'(y)\end{aligned}$$

解微分方程 $F(y)=-\frac{1}{2y}F'(y)$ 可得 $F(y)=Ce^{-y^2}$. 根据所给条件可知 $F(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=C$, 从而可得 $F(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}$, 题式得证.

(b) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin 2xydx=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt$.

证明

记 $F(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin 2xydx$, 知 $F'(y)=\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\cos 2xydx$, 但同时注意到：

$$\begin{aligned}F(y)&=\frac{1}{2y}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin 2xyd(2xy)=-\frac{1}{2y}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}d\cos 2xy\\&=-\frac{1}{2y}(e^{-x^2}\cos 2xy|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-2x)e^{-x^2}\cos 2xydx)=\frac{1}{2y}-\frac{1}{2y}F'(y)\end{aligned}$$

解微分方程 $F(y)=\frac{1}{2y}-\frac{1}{2y}F'(y)$ 得 $F(y)=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt+Ce^{-y^2}$. 根据所给条件可知 $F(0)=0=C$, 从而可得 $F(y)=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt$, 题式得证.

2. 试证：

利用下式中的这两个积分作为参变量 t 的函数都满足方程 $y''+y=\frac{1}{t}$ 且当 $t\to+\infty$ 时趋于零的事实证明, 当 $t>0$ 时成立恒等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+x^2}dx=\int_t^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x}dx$$

证明

不妨记：

$$F_1(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+x^2}dx,\quad F_2(t)=\int_t^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x}dx$$

届于已经知道 $F_1(t), F_2(t)$ 都是方程 $y''+y=\frac{1}{t}$ 的解, 有 $F_1(t)-F_2(t)$ 是方程 $y''+y=0$ 的解. 解微分方程 $y''+y=0$ 得 $y=C_1\sin(t+C_2)$. 因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}F_1(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}F_2(t)=0$, 故 $\lim\limits_{t\to+\infty}(F_1(t)-F_2(t))=0$. 但通解 $y=C_1\sin(t+C_2)$ 中, 解满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$ 当且仅当 $C_1=0$, 也即 $y\equiv 0$. 从而 $F_1(t)-F_2(t)$ 作为该方程满足给定条件的解只能恒等于 0, 也即 $F_1(t)=F_2(t)$, 命题即证.

14.3 第三次作业

9 月 23 日作业

1.

(a) 设 $a>0, b>0$, 并利用等式

$$\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$$

计算它右端的积分.

解

首先考察积分次序交换的合理性：显然 e^{-xy} 在 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续. 既然 $a>0$, 知 $0\le e^{-xy}\le e^{-ax}$, 而 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 在 $[a,b]$ 上显然一致收敛, 故 $\int_a^b e^{-xy}dy$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 这说明题式左端的积分次序可以交换, 从而：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy&=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx=\int_a^b(-\frac{1}{y})dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}d(-xy)\\&=\int_a^b\frac{1}{y}dy=\ln\frac{a}{b}\end{aligned}$$

从而欲求为 $\ln\frac{a}{b}$.

(b) 设 $a>0, b>0$, 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos xdx$$

解

知

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos xdx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}\cos xdy$$

再考察积分次序交换的合理性：显然 $e^{-xy}\cos x$ 在 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续. 届于 $|e^{-xy}\cos x|\le e^{-xy}$, 而关于后者在 (a) 中已经说明 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 故 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos xdx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 这说明上式右端的积分次序可以交换, 从而有：

$$\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}\cos xdy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos xdx$$

其中

$$\begin{aligned}I:=\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos xdx&=\int_0^{+\infty}e^{-xy}d\sin x\\&=(e^{-xy}\sin x)|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\sin xde^{-xy}=y\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx\\&=-y\int_0^{+\infty}e^{-xy}d\cos x=-y((e^{-xy}\cos x)|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\cos xde^{-xy})\\&=y-y^2\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos xdx=y-y^2I\end{aligned}$$

从而 $I=\frac{y}{1+y^2}$, 进而有：

$$\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos xdx=\int_a^b\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+b^2}{1+a^2})$$

从而欲求为 $\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}$.

(c) 利用 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$$

和等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x}\int_a^b\sin xydy=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$$

计算该等式右端的积分.

解

首先考察积分次序交换的合理性：显然 $\frac{\sin xy}{x}$ 在 $(0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续, 再考察一致收敛性, 把积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 写成 $(\int_0^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty})\frac{\sin xy}{x}dx$, 其中 $\varepsilon>0$. 对这两个积分分别讨论：

当 $\varepsilon\to0$, 有 $\frac{\sin xy}{x}\sim y$, 而 $\int_0^{\varepsilon}ydx$ 显然是一致收敛的, 故 $\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin xy}{x}dx$ 一致收敛.

再对 $x\in(\varepsilon,+\infty)$ 讨论：出于 $\sin xy$ 的周期性, 知 $|\int_{\varepsilon}^{+\infty}\sin xydx|\le\frac{2\pi}{y}\le\frac{2\pi}{a}$, 从而 $|\int_{\varepsilon}^{+\infty}\sin xydx|$ 在 $[a,b]$ 上一致有界. 又因为 $\frac{1}{x}$ 是单调递减一致趋 0 的, 故根据 Abel-Dirichlet 判别法知 $\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 一致收敛.

综上, $\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin xy}{x}dx$ 一致收敛, 从而题式左端积分次序可以交换, 有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x}\int_a^b\sin xydy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{xy}dxy=\int_a^b\frac{\pi}{2}dy=\frac{\pi}{2}(b-a)$$

故欲求为 $\frac{\pi}{2}(b-a)$.

2.

(a) 试证：当 $k>0$ 时

$$\int_0^{+\infty}e^{-kt}\sin tdt\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du=\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin tdt$$

证明

题目即证如下几个命题：

(a1) 函数 $e^{-(k+u^2)t}\sin t$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续.

这件事情是显然的.

(a2) 两个积分

$$F(t)=\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin tdu,\quad\Phi(u)=\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin tdt$$

中的第一个关于 t 在任何区间 $[0,t_0]\subset[0,+\infty)$ 上一致收敛, 而第二个关于 u 在任何区间 $[0,u_0]\subset[0,+\infty)$ 上一致收敛.

先证第一个命题, 当 $t>0$ 时, 知：

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin tdu=e^{-kt}\sin t\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}du\\&=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-kt}\sin t\int_0^{+\infty}e^{-u^2t}d(u\sqrt{t})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-kt}\sin t\end{aligned}$$

而当 $t=0$, 知 $F(0)=0$, 容易验证 $\lim\limits_{t\to0^+}F(t)=F(0)=0$. 从而 $F(t)$ 在 $[0,t_0]$ 上连续, 自然也一致收敛.

再证第二个命题, 知：

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=-\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}d\cos t=-e^{-(k+u^2)t}\cos t|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\cos tde^{-(k+u^2)t}\\&=1-(k+u^2)\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\cos tdt=1-(k+u^2)\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}d\sin t\\&=1-(k+u^2)e^{-(k+u^2)t}\sin t|_0^{+\infty}+(k+u^2)\int_0^{+\infty}\sin tde^{-(k+u^2)t}\\&=1-(k+u^2)^2\Phi(u)\Rightarrow\Phi(u)=\frac{1}{1+(u^2+k)^2}\end{aligned}$$

知 $\Phi(u)$ 首先与 t 无关, 其次在 $[0,u_0]$ 上连续, 故其一致收敛.

(a3) 两个累次积分

$$\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}|\sin t|du,\quad\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}|\sin t|dt$$

中至少有一个存在.

不妨就验证上左式存在, 也即验证

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-kt}|\sin t|dt$$

存在. 将上述积分写成

$$(\int_0^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty})\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-kt}\sin tdt$$

其中 $\varepsilon>0$. 当 $\varepsilon\to0^+$, 对第一个积分有：

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-kt}|\sin t|\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}t(1-kt)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\sqrt{t}-kt\sqrt{t})$$

从而

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-kt}\sin tdt\sim\int_0^{\varepsilon}\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\sqrt{t}-kt\sqrt{t})dt$$

显然存在. 而当 $t\in(\varepsilon,+\infty)$, 有：

$$|\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-kt}|\sin t||\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}|\frac{1}{\sqrt{t}e^{kt}}|\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-kt}$$

而

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-kt}dt$$

显然存在, 故综上, 原积分存在.

根据上面已经证明的三个命题, 可推知题式积分次序可交换, 进而命题得证.

(b) 试证上述等式当值 $k=0$ 时仍然有效.

证明

要证

$$\int_0^{+\infty}e^{-kt}\sin tdt\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du=\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin tdt$$

在 $k=0$ 时成立, 即证

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(k+u^2)^2}$$

对 $k=0$ 成立. 注意到对任何的 $a,b>0$, 当 $t\in[0,a]\subset[0,+\infty), u\in[0,b]\subset[0,+\infty)$ 时有：

$$e^{-kt}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\rightrightarrows\frac{\sin t}{\sqrt{t}},\quad k\to 0$$
$$\frac{1}{1+(k+u^2)^2}\rightrightarrows\frac{1}{1+u^4},\quad k\to 0$$

根据这两个一致收敛性, 同时注意到欲证式两端本身都是一致收敛的, 进而有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\lim_{k\to 0}\int_0^{+\infty}e^{-kt}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\lim_{k\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(k+u^2)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}$$

命题即证.

(c) 利用 Euler-Poisson 积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

验证

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du$$

证明

知

$$\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}d(u\sqrt{t})=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

题式即证.

(d) 利用最后的等式和关系式

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$
$$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

得出 Fresnel 积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx,\quad\int_0^{+\infty}\cos x^2dx$$

的值 $(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}})$.

解

根据 (b) 的结论, 只需计算 $\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}$ 的值即可推出答案:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4} &= \int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+2u^2+1-2u^2} = \int_0^{+\infty}\frac{du}{(u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{u(u^2-\sqrt{2}u+1)} - \frac{1}{u(u^2+\sqrt{2}u+1)})du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}(\frac{\sqrt{2}-u}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1})du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\int_0^{+\infty}\frac{d(\frac{1}{2}(u^2+\sqrt{2}u+1))}{u^2+\sqrt{2}u+1} + \int_0^{+\infty}\frac{d(\sqrt{2}u+1)}{(\sqrt{2}u+1)^2+1} \\
&- \int_0^{+\infty}\frac{d(\frac{1}{2}(u^2-\sqrt{2}u+1))}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \int_0^{+\infty}\frac{d(\sqrt{2}u-1)}{(\sqrt{2}u-1)^2+1}) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

进而由

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}$$

可知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

最后, 根据题目给出的等式有:

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

要计算 $\int_0^{+\infty}cosx^2dx$, 由题目给出的等式与 (c) 知:

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\cos t du$$

由 Fubini 定理知:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\cos t du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\cos t dt$$

而

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\cos t dt = \int_0^{+\infty}e^{-tu^2}d\sin t \\
&= -\int_0^{+\infty}\sin t de^{-tu^2} = u^2\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t dt = -u^2\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}d\cos t \\
&= -u^2(e^{-tu^2}\cos t|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\cos t dr^{-tu^2}) = u^2 - u^4 I \\
&\Rightarrow I = \frac{u^2}{1+u^4}
\end{aligned}$$

从而只需求出 $\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du$ 即可, 注意到:

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4} = \int_{+\infty}^0\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{1+\frac{1}{t^4}} = \int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

故有:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\cos t dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty}\cos x^2dx$$

命题即证.

3.

(a) 利用等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\sin xdx\int_0^{+\infty}e^{-xy}dy$$

并根据累次积分中交换积分次序的可能性, 重新求出例 13 中 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

的值.

解

给定常数 $A,\delta>0$, 先考察下述积分交换次序的可能性：

$$F=\int_0^{+\infty}dx\int_\delta^A e^{-xy}\sin xdy$$

(a1) 函数 $e^{-xy}\sin x$ 在 $(0,+\infty)\times[\delta,A]$ 上显然连续.

(a2) 在区间 $[\delta,A]$ 上, 考虑：

$$\begin{aligned}
I:&=\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx=-\int_0^{+\infty}e^{-xy}d\cos x\\
&=(-e^{-xy}\cos x)|_0^{+\infty}-y\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos xdx=1-y\int_0^{+\infty}e^{-xy}d\sin x\\
&=1-(ye^{-xy}\cos x)|_0^{+\infty}-y^2\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx=1-y^2I\\
&\Rightarrow I=\frac{1}{1+y^2}
\end{aligned}$$

而这显然在 $[\delta,A]$ 上一致收敛.

从而根据命题 7, 可知 F 在 $[\delta,A]$ 上可积且有等式：

$$\int_0^{+\infty}dx\int_\delta^A e^{-xy}\sin xdy=\int_\delta^A dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx=\arctan A-\arctan\delta$$

在上述等式中同时取 $\delta\to0,A\to+\infty$, 即得：

$$\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdy=\frac{\pi}{2}$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

(b) 试证：当 $\alpha>0,\beta>0$ 时,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta xdx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \beta<\alpha\\ \frac{\pi}{4}, & \beta=\alpha\\ 0, & \beta>\alpha\end{cases}$$

这个积分通常称为 Dirichlet 间断因子.

证明

首先注意到：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x)dx$$

当 $\beta<\alpha$ 时：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x)dx&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{(\alpha+\beta)x}d(\alpha+\beta)x+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{(\alpha-\beta)x}d(\alpha-\beta)x\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

当 $\beta=\alpha$ 时：

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{(\alpha+\beta)x}d(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{4}$$

当 $\beta<\alpha$ 时：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x)dx&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{(\alpha+\beta)x}d(\alpha+\beta)x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\beta-\alpha)x}{(\beta-\alpha)x}d(\beta-\alpha)x\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=0\end{aligned}$$

命题即证.

(c) 设 $\alpha>0,\beta>0$, 验证等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\beta, & \beta\le\alpha\\ \frac{\pi}{2}\alpha, & \alpha\ge\beta\end{cases}$$

证明

注意到：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\beta x}{x}dx&=-\int_0^{+\infty}\sin\alpha x\sin\beta x d\frac{1}{x}\\&=-(\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(\beta\sin\alpha x\cos\beta x+\alpha\cos\alpha x\sin\beta x)dx)\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{x}\sin\alpha x\cos\beta x dx+\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{x}\cos\alpha x\sin\beta x dx\end{aligned}$$

而当 $\beta\le\alpha$, 根据 (b) 有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{x}\sin\alpha x\cos\beta x dx+\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{x}\cos\alpha x\sin\beta x dx=\frac{\pi}{2}\beta+0=\frac{\pi}{2}\beta$$

当 $\alpha\le\beta$, 有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{x}\sin\alpha x\cos\beta x dx+\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{x}\cos\alpha x\sin\beta x dx=0+\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{\pi}{2}\alpha$$

命题即证.

(d) 试证：如果 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是正数, 且 $\alpha > \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdots \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

证明

用归纳法, 知 $n=1$ 的情况即 (c) 所证结论, 设 $n-1$ 时题式成立, 对 n, 注意到：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdots \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx \\
=&-\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \sin \alpha x \sin \alpha_1 x \cdots \sin \alpha_n x d\frac{1}{x^n} \\
=&-\frac{1}{n}(\frac{1}{x^n} \sin \alpha x \sin \alpha_1 x \cdots \sin \alpha_n x)|_0^{+\infty} + \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n} d \sin \alpha x \sin \alpha_1 x \cdots \sin \alpha_n x \\
=&\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} (\alpha \cos \alpha x \prod_{i=1}^{n} \sin \alpha_i x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin \alpha x \sin \alpha_2 \cdots \cos \alpha_i x \cdots \sin \alpha_n x) \frac{dx}{x^n} \\
=&\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} (\alpha \cos \alpha x \prod_{i=1}^{n} \sin \alpha_i x) \frac{dx}{x^n} + \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin \alpha x \sin \alpha_1 x \cdots \cos \alpha_i x \cdots \sin \alpha_n x) \frac{dx}{x^n} \\
=&\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} (\alpha \cos \alpha x \prod_{i=1}^{n} \sin \alpha_i x) \frac{dx}{x^n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{+\infty} (\alpha_i \sin \alpha x \sin \alpha_1 x \cdots \cos \alpha_i x \cdots \sin \alpha_n x) \frac{dx}{x^n}
\end{aligned}$$

对其中第一个式子, 有：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} (\alpha \cos \alpha x \prod_{i=1}^{n} \sin \alpha_i x) \frac{dx}{x^n} \\
=&\frac{\alpha}{n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \alpha_1) x - \sin(\alpha - \alpha_1) x) \prod_{i=2}^{n} \sin \alpha_i x \frac{dx}{x^n} \\
=&\frac{\alpha}{n} (\int_0^{+\infty} \sin(\alpha + \alpha_1) x \prod_{i=2}^{n} \sin \alpha_i x \frac{dx}{x^n} - \int_0^{+\infty} \sin(\alpha - \alpha_1) x \prod_{i=2}^{n} \sin \alpha_i x \frac{dx}{x^n})
\end{aligned}$$

注意到上面的两个积分都满足归纳假设的条件, 按照归纳假设, 上即

$$\frac{\alpha}{n} (\frac{\pi}{2} \alpha_2 \cdots \alpha_n - \frac{\pi}{2} \alpha_2 \cdots \alpha_n) = 0$$

而对其中的第二个式子, 其作为和式, 对其中的每一项有：

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_i}{n} \int_0^{+\infty} \sin \alpha x \sin \alpha_1 x \cdots \cos \alpha_i x \cdots \sin \alpha_n x \frac{dx}{x^n} \\
=&\frac{\alpha_i}{2n} \int_0^{+\infty} (\sin(\alpha + \alpha_i) x + \sin(\alpha - \alpha_i) x) \sin \alpha_1 x \cdots \sin \alpha_n x \frac{dx}{x^n} \\
=&\frac{\alpha_i}{2n} \int_0^{+\infty} \sin(\alpha + \alpha_i) x \sin \alpha_1 x \cdots \sin \alpha_n x \frac{dx}{x^n} + \frac{\alpha_i}{2n} \int_0^{+\infty} \sin(\alpha - \alpha_i) \sin \alpha_1 x \cdots \sin \alpha_n x \frac{dx}{x^n}
\end{aligned}$$

同样, 上面的两个积分都满足归纳假设的条件, 按照归纳假设, 上即

$$\frac{\alpha_i}{2n} \frac{\pi}{2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k + \frac{\alpha_i}{2n} \frac{\pi}{2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k = \frac{\pi}{2n} \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$$

从而综上：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdots \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx = 0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \prod_{j=1}^{n} \alpha_i = \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$$

满足归纳法要求！进而命题得证.

9 月 30 日作业

1. 证明：

(a) $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\pi$.

证明

知

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{1}=\pi$$

(b) $B(\alpha,1-\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$.

证明

由式子 (7)：

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy$$

代入 $\beta=1-\alpha$ 即知：

$$B(\alpha,1-\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$$

(c) $\frac{\partial B}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x dx$.

证明

首先验证微分运算的可行性, 只需验证 $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x dx$ 一致收敛即可. 知当 $x\to 0^+$ 时, $|\ln x|<|x^{\frac{\alpha}{2}}|$, 进而有：

$$|x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x|<|x^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-x)^{\beta-1}|$$

而右式根据 $B(\frac{\alpha}{2},\beta)$ 的存在性, 其在 $(0,1)$ 上的积分自然一致收敛. 而当 $x\to 1^-$ 时, 知 $|\ln x|\to 0$, 从而更加肯定了原积分在 (0,1) 上的一致收敛性, 微分运算可行.

综上, 有：

$$\frac{\partial B}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}(x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1})dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x dx$$

(d) $\int_0^{+\infty}\frac{x^p dx}{(a+bx^q)^r}=\frac{a^{-r}}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{p+1}{q}}B(\frac{p+1}{q},r-\frac{p+1}{q})$.

证明

知：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p dx}{(a+bx^q)^r}=\frac{1}{a^r}\int_0^{+\infty}\frac{x^p dx}{(1+\frac{b}{a}x^q)^r}$$

记 $u=\frac{b}{a}x^q$, 知 $x^p=(\frac{a}{b})^{\frac{p}{q}}u^{\frac{p}{q}}$, 进而有：

$$\frac{1}{a^r}\int_0^{+\infty}\frac{x^p dx}{(1+\frac{b}{a}x^q)^r}=\frac{1}{a^r}\int_0^{+\infty}\frac{(\frac{au}{b})^{\frac{p}{q}}\cdot\frac{1}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{1}{q}}u^{\frac{1}{q}-1}du}{(1+u)^r}=\frac{a^{-r}}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{p+1}{q}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{p+1}{q}-1}du}{(1+u)^r}$$

令 $\alpha-1=\frac{p+1}{q}-1,\alpha+\beta=r$, 即得

$$\frac{a^{-r}}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{p+1}{q}}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{p+1}{q}-1}du}{(1+u)^r}=\frac{a^{-r}}{q}(\frac{a}{b})^{\frac{p+1}{q}}B(\frac{p+1}{q},r-\frac{p+1}{q})$$

命题即证.

(e) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$.

证明

在 (d) 中令 $p=0,a=b=r=1,q=n$ 得:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}=\frac{1}{n}B(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}\frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(1-\frac{1}{n})}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$$

(f) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

证明

在 (e) 中令 $n=3$ 得:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

(g) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha},0<\alpha<1$.

证明

在 (d) 中令 $p=\alpha-1,a=b=r=q=1$ 可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x}=B(\alpha,1-\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

(h) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln^n x}{1+x}dx=\frac{d^n}{d\alpha^n}(\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}),0<\alpha<1$.

证明

只需证明对任意给定的 $n\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln^{n-1}x}{1+x}dx$ 积分与微分可换序即可, 用归纳法:

$n=1$ 时, 只需证明 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}dx$ 在 $\alpha\in(0,1)$ 上一致收敛. 知当 $x\to0^+$, 有:

$$|\frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}|\le|\frac{x^{\frac{\alpha}{2}-1}}{1+x}|$$

其中 $|\ln x|<|x^{\frac{\alpha}{2}}|,x<\varepsilon$. 而后者根据 $B(\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2})$ 的存在性知其收敛. 又当 $x\to+\infty$, 有:

$$|\frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}|\le|\frac{x^{\alpha+\frac{1}{k}-1}}{1+x}|$$

其中 $|\ln x|\le x^{\frac{1}{k}},x>N(k)$. 不妨就取 k 满足 $1-\frac{1}{k}-\alpha>0$, 从而后者根据 $B(\alpha+\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}-\alpha)$ 的存在性知其收敛. 综上, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 积分和微分可换序, $n=1$ 成立.

假设 $n-1$ 时成立, n 时只需证明 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln^n x}{1+x}dx$ 在 $\alpha(0,1)$ 上一致收敛. 知当 $x\to0^+$, 有:

$$|\frac{x^{\alpha-1}\ln^n x}{1+x}|\le|\frac{x^{\frac{\alpha}{2}-1}}{1+x}|$$

其中 $|\ln^n x|<|x^{\frac{\alpha}{2}}|,x<\varepsilon(n)$. 而后者根据 $B(\frac{\alpha}{2},1=\frac{\alpha}{2})$ 的存在性知其收敛. 又当 $x\to+\infty$, 有:

$$|\frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}|\le|\frac{x^{\alpha+\frac{1}{k}-1}}{1+x}|$$

其中 $|\ln^n x| \le x^{\frac{1}{k}}, x > N(n,k)$. 不妨就取 k 满足 $1-\frac{1}{k}-\alpha>0$, 从而后者根据 $B(\alpha+\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}-\alpha)$ 的存在性知其收敛. 综上, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln^{n-1}x}{1+x}dx$ 积分和微分可换序.

综上, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln^{n-1}x}{1+x}dx$ 的积分和微分都可换序, 进而欲证式即在 (g) 所得式子的两边求 n 次导所得.

(i) 由极坐标方程 $r^n = a^n\cos n\varphi$ 给出的曲线的长度可用公式 $aB(\frac{1}{2},\frac{1}{2n})$ 表示.$(n\in\mathbb{N}, a>0)$

证明

题设方程即 $r = a\cos^{\frac{1}{n}} n\varphi$. 考虑 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2n})$, 并记曲线在该区间上的长度为 I_0, 有:

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\varphi})^2}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{a^2\cos^{\frac{2}{n}}n\varphi + a^2\cos^{\frac{2}{n}-2}n\varphi\sin^2 n\varphi}d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} a|\cos n\varphi|^{\frac{1}{n}-1}d\varphi = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a|\cos\theta|^{\frac{1}{n}-1}d\theta = \frac{a}{n}\cdot\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{2n})
\end{aligned}
$$

进而欲求即 $2nI_0 = aB(\frac{1}{2},\frac{1}{2n})$.

2. 证明:

(a) $\Gamma(1)=\Gamma(2)$;

证明

容易验证 $\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = \Gamma(1)$.

(b) Γ 函数的导数 Γ' 在某点 $x_0\in(1,2)$ 为零;

证明

既然已经证明了 Γ 是无限次可微的, 其当然在 $[1,2]$ 上连续, $(1,2)$ 上可微, 进而由 Rolle 定理可知存在 $x_0\in(1,2)$ 使得 $\Gamma'(x_0)=0$.

(c) 函数 Γ' 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调上升的;

证明

知:

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^2 x\cdot e^{-x}dx$$

届于 $x^{\alpha-1}\ln^2 x\cdot e^{-x} > 0$, 知 $\Gamma''(\alpha)>0, \alpha\in(0,+\infty)$, 从而 Γ' 在 $(0,+\infty)$ 上单调上升.

(d) Γ 函数在区间 $(0,x_0)$ 上单调下降, 而在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调上升;

证明

既然 Γ' 单调上升, 且 $\Gamma'(x_0)=0$, 知 $\alpha\in(0,x_0)$ 时 $\Gamma'(\alpha)<0$, $\alpha\in(x_0,+\infty)$ 时 $\Gamma'(\alpha)>0$, 从而可得 Γ 函数在区间 $(0,x_0)$ 上单调下降, 而在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调上升.

(e) 积分 $\int_0^1(\ln\frac{1}{u})^{x-1}\ln\ln\frac{1}{u}du$ 当 $x=x_0$ 时等于零;

证明

知

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln x\cdot e^{-x}dx$$

令 $x=\ln\frac{1}{u}$, 知:

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^1(\ln\frac{1}{u})^{\alpha-1}\ln\ln\frac{1}{u}du$$

根据 (b) 知 $\Gamma'(x_0)=0$, 代入上式即证命题.

(f) $\Gamma(\alpha)\sim\frac{1}{\alpha}$, 当 $\alpha\to0^+$ 时;

证明

题即证明 $\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)\sim1,\alpha\to0^+$. 注意到既然已经知道 $\Gamma(\alpha)$ 在任何一个区间 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 上一致收敛, 自然有：

$$\lim_{\alpha\to0^+}\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\lim_{\alpha\to0^+}x^\alpha e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$$

命题即证.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$.

证明

注意到

$$\Gamma(\frac{1}{n})=\int_0^{+\infty}x^{\frac{1}{n}-1}e^{-x}dx\sim n,\quad n\to+\infty$$

在上式中令 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 知：

$$\int_0^{+\infty}\frac{y}{y^n}e^{-y^n}ny^{n-1}dy=\int_0^{+\infty}ne^{-y^n}dy\sim n,\quad n\to+\infty$$

此即

$$\int_0^{+\infty}e^{-y^n}dy\sim1,\quad n\to+\infty$$

命题即证.

3. Euler 公式

$$E:=\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma(\frac{k}{n})=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

(a) 证明：

$$E^2=\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma(\frac{k}{n})\Gamma(\frac{n-k}{n})$$

将定义式写开有：

$$E=\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\cdots\Gamma(\frac{n-2}{n})\Gamma(\frac{n-1}{n})$$
$$E=\Gamma(\frac{n-1}{n})\Gamma(\frac{n-2}{n})\cdots\Gamma(\frac{2}{n})\Gamma(\frac{1}{n})$$

上下相乘即得：

$$E^2=\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma(\frac{k}{n})\Gamma(\frac{n-k}{n})$$

(b) 验证：

$$E^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin2\frac{\pi}{n}\cdot\cdots\cdot\sin(n-1)\frac{\pi}{n}}$$

证明

对每个 $1 \le k \le n-1$, 由余元公式知：

$$\Gamma(\frac{k}{n})\Gamma(1-\frac{k}{n}) = \frac{\pi}{\sin\frac{k}{n}\pi}$$

进而由 (a)：

$$E^2 = \prod_{k=1}^{n-1}\Gamma(\frac{k}{n})\Gamma(\frac{n-k}{n}) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{k}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{1}{n}\pi\sin\frac{2}{n}\pi\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi}$$

(c) 根据恒等式 $\frac{z^n-1}{z-1} = \prod\limits_{k=1}^{n-1}(z-e^{i\frac{2k\pi}{n}})$, 当 $z \to 1$ 时, 得到下面关系式

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}})$$

从它又得到关系式

$$n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

证明

对固定的 n, 知：

$$\lim_{z\to1}\frac{z^n-1}{z-1} = \lim_{z\to1} nz^{n-1} = n = \lim_{z\to1}\prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}})$$

对每个 $1 \le k \le n-1$ 有：

$$\begin{aligned}1-e^{i\frac{2k\pi}{n}} &= 1-\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} = 2\sin^2\frac{k\pi}{n} - 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n} \\ &= 2\sin\frac{k\pi}{n}(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}) = 2\sin\frac{k\pi}{n}e^{i(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2})}\end{aligned}$$

进而

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = \prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}e^{i(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2})} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}e^{i(\frac{(n-1)\pi}{2}-\frac{(n-1)\pi}{2})} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

(d) 试利用最后的等式推出 Euler 公式.

证明

根据 (b),(c) 有：

$$E^2 = \frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n} \Rightarrow E = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

4. Legendre 公式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha)$$

(a) 证明：

$$B(\alpha,\alpha) = 2\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2)^{\alpha-1}dx$$

证明

知

$$B(\alpha,\alpha)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}dx=\int_0^1(x-x^2)^{\alpha-1}dx=\int_0^1(\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2)^{\alpha-1}dx$$

但注意到此时被积函数与积分区间都是关于 $\frac{1}{2}$ 对称的, 故：

$$B(\alpha,\alpha)=2\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2)^{\alpha-1}dx$$

(b) 在上述积分中作变量替换, 证明：$B(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2^{2\alpha-1}}B(\frac{1}{2},\alpha)$.

证明

首先, 令 $y=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2$, 知 $x=\sqrt{\frac{1}{4}-y}+\frac{1}{2}$, 有：

$$B(\alpha,\alpha)=2\int_0^{\frac{1}{4}}y^{\alpha-1}(\frac{1}{4}-y)^{-\frac{1}{2}}dy$$

再取 $u=4y$, 有：

$$B(\alpha,\alpha)=2\int_0^1 4^{1-\alpha}u^{\alpha-1}\cdot 2(1-u)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}du=\frac{1}{2^{2\alpha-1}}B(\alpha,\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{2\alpha-1}}B(\frac{1}{2},\alpha)$$

(c) 推出 Legendre 公式.

证明

知

$$B(\alpha,\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}$$
$$B(\frac{1}{2},\alpha)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}$$

进而根据 (b) 与 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ 有：

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}=\frac{1}{2^{2\alpha-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\Rightarrow\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha)$$

10 月 5 日作业

1. 发展全椭圆积分的例子：

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi,\quad K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

并令 $\tilde{k}=\sqrt{1-k^2},\tilde{E}(k):=E(\tilde{k}),\tilde{K}(k):=K(\tilde{k})$. 试仿照 Legendre, 证明：

(a) $\frac{d}{dk}(E\tilde{K}+\tilde{E}K-K\tilde{K})=0$;

证明

注意到：

$$\frac{d\tilde{K}}{dk}=(\frac{\tilde{E}}{k^2\sqrt{1-k^2}}-\frac{\tilde{K}}{\sqrt{1-k^2}})(\frac{-k}{\sqrt{1-k^2}})=\frac{k\tilde{K}}{1-k^2}-\frac{\tilde{E}}{k(1-k^2)}$$
$$\frac{d\tilde{E}}{dk}=\frac{\tilde{E}-\tilde{K}}{\sqrt{1-k^2}}(\frac{-k}{\sqrt{1-k^2}})=\frac{k\tilde{K}}{1-k^2}-\frac{k\tilde{E}}{1-k^2}$$

结合已经知道的公式, 有：

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dk}(E\tilde{K}+\tilde{E}K-K\tilde{K})\\
=&\tilde{K}\frac{dE}{dk}+E\frac{d\tilde{K}}{dk}+K\frac{d\tilde{E}}{dk}+\tilde{E}\frac{dK}{dk}-\tilde{K}\frac{dK}{dk}-K\frac{d\tilde{K}}{dk}\\
=&\frac{E\tilde{K}-K\tilde{K}}{k}+\frac{E\tilde{E}}{k(1-k^2)}-\frac{K\tilde{E}}{k}-\frac{\tilde{K}E}{k(1-k^2)}+\frac{K\tilde{K}}{k}-\frac{E\tilde{E}}{k(1-k^2)}+\frac{kE\tilde{K}}{1-k^2}\\
&-\frac{kK\tilde{E}}{1-k^2}+\frac{kK\tilde{K}}{1-k^2}+\frac{K\tilde{E}}{k(1-k^2)}-\frac{kK\tilde{K}}{1-k^2}\\
=&0
\end{aligned}
$$

命题即证.

(b) $E\tilde{K}+\tilde{E}K-K\tilde{K}=\frac{\pi}{2}$.

见下题.

2. 仍然使用上题的记号, 试给出一个方法, 使能借助 Euler 积分能完成这个问题的第二部分, 也是更加奥妙的部分.

(a) 注意, 当 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 将有 $\tilde{k}=k$, 且

$$\tilde{E}=E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad \tilde{K}=K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

证明

知此时 $\tilde{k}=k=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 代入即得题式.

(b) 经过相应的变量替换, 由这些积分所归结成的形式推出, 当 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 有

$$K=\frac{1}{2\sqrt{2}}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),\quad 2E-K=\frac{1}{2\sqrt{2}}B(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$$

证明

知

$$
\begin{aligned}
K&=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}=\sqrt{2}\int_1^0\frac{d\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\\
&=\sqrt{2}\int_1^0(-\frac{1}{\sqrt{1-x}})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}\\
&=\sqrt{2}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1-t}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}\sqrt{1-t}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

同时

$$\begin{aligned}2E-K&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}})d\varphi\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2-\sin^2\varphi-1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}d\varphi=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\\&=\sqrt{2}\int_1^0\frac{xd\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2}\int_1^0\frac{x}{\sqrt{1+x}}\cdot(\frac{-1}{\sqrt{1-x}})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1\frac{tdt^2}{\sqrt{1-t^4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1\frac{2t^2dt}{\sqrt{1-t^4}}\\&=\sqrt{2}\int_0^1\frac{u^{\frac{1}{2}}du^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1-u}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1\frac{u^{-\frac{1}{4}}du}{\sqrt{1-u}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}B(\frac{3}{4},\frac{1}{2})\end{aligned}$$

(c) 现在得到, 当 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 有

$$E\tilde{K}+\tilde{E}K-K\tilde{K}=\frac{\pi}{2}$$

证明

由 (b), 知：

$$\begin{aligned}E\tilde{K}+\tilde{E}K-K\tilde{K}=2EK-KK=(2E-K)K&=\frac{1}{2\sqrt{2}}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}B(\frac{3}{4},\frac{1}{2})\\&=\frac{1}{8}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}=\frac{1}{2}\Gamma^2(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

3.

(a) 验证卷积的结合律：$u*(v*w)=(u*v)*w$.

证明

由 Fubini 定理：

$$(u*v)*w=\int\limits_{\mathbb{R}}(\int\limits_{\mathbb{R}}u(z)v(y-z)dz)w(x-y)dy=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}u(z)v(y-z)w(x-y)dydz$$

$$u*(v*w)=\int\limits_{\mathbb{R}}(\int\limits_{\mathbb{R}}v(z)w(y-z)dz)u(x-y)dy=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}u(x-y)v(z)w(y-z)dydz$$

令

$$\begin{cases}p=x-y\\q-p=z\\r-q=y-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=x-y\\q=x-y+z\\r=x\end{cases}$$

可知 $\frac{\partial(p,q)}{\partial(y,z)}=1$, 进而有：

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}u(x-y)v(z)w(y-z)dydz=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}u(p)v(q-p)w(x-q)dpdq$$

进而比对即得命题.

(b) 照例设 $\Gamma(\alpha)$ 是 Euler Γ 函数, $H(x)$ 是 Heaviside 函数：

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

令

$$H_\lambda^\alpha(x):=H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x},\quad \alpha>0,\lambda\in\mathbb{C}$$

证明：

$$H_\lambda^\alpha * H_\lambda^\beta = H_\lambda^{\alpha+\beta}$$

证明

知：

$$\begin{aligned}
H_\lambda^\alpha * H_\lambda^\beta &= \int\limits_{\mathbb{R}} H(y)\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda y}H(x-y)\frac{(x-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{\lambda(x-y)}dy\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} H(y)H(x-y)\frac{y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{\lambda x}dy = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{\lambda x}dy\\
&= \int_0^x x^{\alpha+\beta-1}\frac{(\frac{y}{x})^{\alpha-1}(1-\frac{y}{x})^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{\lambda x}d\frac{y}{x} = \int_0^1 x^{\alpha+\beta-1}\frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{\lambda x}dt\\
&= x^{\alpha+\beta-1}e^{\lambda x}\frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

但上式中第二行中间的等号是基于 $\{y|y\geq 0\wedge x-y\geq 0\}\neq\oslash$ 的, 这等价于 $x\geq 0$. 而当 $x<0$, 知 $H(y)H(x-y)\equiv 0$, 从而上式为 0. 综上, 命题即证.

(c) 验证：函数 $F=H(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}$ 是函数 $f(x)=H(x)e^{\lambda x}$ 的 n 次幂卷积, 即：

$$F=\underbrace{f*f*\cdots*f}_{n}$$

证明

注意到

$$f(x)=H(x)e^{\lambda x}=H(x)\frac{x^{1-1}}{\Gamma(1)}e^{\lambda x}=H_\lambda^1$$

从而由 (b), 归纳可知：

$$\underbrace{f*f*\cdots*f}_{n}=H_\lambda^n=H(x)\frac{x^{n-1}}{\Gamma(n-1)}e^{\lambda x}=F(x)$$

14.4 第四次作业

10 月 7 日作业

1. 在 p398 推论 1 中设了

$$\varphi(x)=\begin{cases}k\cdot\exp(-\frac{1}{1-x^2}), & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

其中 k 取得使 $\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx=1$. 试给出 k 的一个上界和一个下界, 譬如 12, $\frac{3}{2}$, 越精细越好.

解

知显然有 $e^{-\frac{1}{1-x^2}} \le \frac{1}{e}$, 从而

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1 \le \frac{2k}{e} \Rightarrow k \ge \frac{e}{2}$$

故 $\frac{e}{2}$ 为 k 的一个下界.

注意到当 $|x| < \frac{1}{2}$, 有 $e^{-\frac{1}{1-x^2}} \ge e^{-\frac{4}{3}}$, 进而有:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1 \ge \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k \cdot e^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow k \le e^{\frac{4}{3}}$$

故 $e^{\frac{4}{3}}$ 为 k 的一个上界.

2. 给出 p399 对推论 2(Weierstrass 定理) 的证明中注 3 的详细证明.

证明

考虑函数序列

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-\frac{x^2}{M^2})^n}{\int_{|\frac{x}{M}|<1}(1-\frac{x^2}{M^2})^n dx}, & |\frac{x}{M}| \le 1 \\ 0, & |\frac{x}{M}| > 1 \end{cases}$$

可以注意到这仅仅是将已经知道的 $\delta-$ 型序列

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{\int_{|x|<1}(1-x^2)^n dx}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

中的 x 替换为 $\frac{x}{M}$, 从而可知新定义的函数序列也为 $\delta-$ 型. 对 $\mathbb{R}$ 中的任意紧集 K, 知既然其为有界闭集, 必存在一个闭区间 $[a,b]$ 满足 $K \subset [a,b]$. 不失一般性, 可设 $a=-b$, 因为总可以通过将 x 换成 $x-s$ 来得到不关于原点对称的区间上相同的结论. 进一步, 可设 a 是 K 的下确界, b 是 K 的上确界. 设 K 能被划分成连通分支 $[a_1,b_1]=[a,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_k,b_k]=[a_k,b]$. 现在将给定的函数 $f \in C(\bigcup\limits_{n=1}^{k}[a_n,b_n])$ 按下面的方式延拓成 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $F(x)$: 当 $x \in \mathbb{R}\backslash[a-1,b+1]$ 时, 令 $F(x)=0$; 当 $x \in [b_{i-1},a_i](i=2,\cdots,k)$ 时, 令 $F(x)=f(b_{i-1})$. 而在区间 $[a-1,a]$ 和 $[b,b+1]$ 上, 则分别将 0 与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 与 0 线性连接起来. 现在取用开头构造的 $\Delta_n(x)$ 并令 $M=b+1$., 则由命题 5 可以推出, 在 $[a-1,b+1]$ 上, 当 $n \to \infty$ 时, $F * \Delta_n \rightrightarrows F$, 特别地这对每个 $[a_i,b_i](i=1,\cdots,k)$ 也成立. 而此时有:

$$\begin{aligned} F * \Delta_n(x) :&= \int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\Delta_n(x-y)dy = \int_{-b-1}^{b+1} F(y)\Delta_n(x-y)dy \\ &= \int_{-b-1}^{b+1} F(y)p_n(1-(\frac{x-y}{b+1})^2)^n dy = \int_{-b-1}^{b+1} F(y)(\sum_{i=0}^{2n} a_i(y)x^i)dy \\ &= \sum_{i=0}^{2n}(\int_{-b-1}^{b+1} F(y)a_i(y)dy)x^i \end{aligned}$$

最后的表达式是 $2n$ 次多项式 $P_{2n}(x)$, 这便证明了当 $n \to \infty$ 时, 在 $[a-1,b+1]$ 上有 $P_{2n} \rightrightarrows F$. 特别地有 $P_{2n}|_{[a_i,b_i]} \rightrightarrows F|_{[a_i,b_i]} = f_{[a_i,b_i]}, i=1,\cdots,k$, 从而命题得证.

10 月 10 日作业

1. Stirling 公式

证明：

(a) $\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{2m+1}$, 当 $|x|<1$ 时.

证明

知

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}=2\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}=2x\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{2m+1}$$

(b) $(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(2n+1)^6}+\cdots$.

证明

在 (a) 中令 $x=\frac{1}{2n+1}$ 有：

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}})=\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)(2n+1)^{2m}}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)(2n+1)^{2m}}$$

进而有

$$(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)(2n+1)^{2m}}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(2n+1)^6}+\cdots$$

(c) $1<(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})<1+\frac{1}{12n(n+1)}$, 当 $n\in\mathbb{N}$ 时.

证明

由 (b) 知

$$\begin{aligned}1<(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})&<1+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(3)(2n+1)^{2m}}\\&=1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}=1+\frac{1}{12}\frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

(d) $1<\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}{e}<\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}$.

证明

在 (c) 中取指数有：

$$e<(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}<e\cdot e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$$

两边同时除以 e 得

$$1<\frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=e^{\frac{1}{12}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}$$

(e) $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 是单调递减数列.

证明

只需证明 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 有：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} = \frac{en^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}} < 1$$

其中最后一个不等号源自 (d) 左式.

(f) $b_n = a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ 是单调递增数列.

证明

只需证明 $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$, 有：

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n e^{-\frac{1}{12n}}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}} \cdot e^{\frac{1}{12n(n+1)}} > 1$$

其中最后一个不等号源自 (d) 右式.

(g) $n! = cn^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$, 其中 $0 < \theta_n < 1, c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明

首先证明 c 有定义, 这是因为 a_n, b_n 都是单调有界数列, 进而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在. 同时注意到

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{a_n} e^{-\frac{1}{12n}} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{12n}} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

故 $c = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 有意义. 特别地, 注意到 $\forall n \in \mathbb{N}(b_n < c < a_n)$, 代入有：

$$\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{12n}} < c < \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{0}{12n}}$$

考虑函数 $f_n(x) = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x}{12n}}$, 知对每个 n 都有 f_n 连续, 且有 $f_n(1) < c < f_n(0)$. 故由介值性可知存在 $\theta_n \in (0,1)$ 使得：

$$c = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\theta_n}{12n}}$$

此即题式.

(h) 从关系式 $\sin \pi x = \pi x \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2})$ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时能推出 Wallis 公式

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

证明

代入 $x = \frac{1}{2}$ 知：

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{4k^2}) = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{2k \cdot 2k} \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1) \cdot 2k \cdot 2k \cdot (2k-1)}{(2k)^4} = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4} \\
&= \pi \lim_{n\to\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4} = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{n[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4} (1 + \frac{1}{2n}) \\
&= \pi \lim_{n\to\infty} \frac{n[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4} \cdot \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2n}) = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{n[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4}
\end{aligned}$$

上式两边开方有：

$$1 = \sqrt{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

也即

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

题式即证.

(i) 成立 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1$$

证明

在 (h) 中代入 (g) 有：

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{c^2 n^{2n+1} e^{-2n+\frac{\theta_n}{6n}} \cdot 2^{2n}}{c(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n+\frac{\theta_{2n}}{24n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{c n^{2n+1} \cdot 2^{2n}}{2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

这其中 $0 < \theta_n, \theta_{2n} < 1$, 可得 $c = \sqrt{2\pi}$, 进而代回 (g) 有

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1$$

(j) $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}(\frac{x}{e})^x$, 当 $x \to +\infty$ 时.

证明

既然 $\Gamma(\alpha+1)$ 本身是一致收敛的, 有：

$$\Gamma(\alpha+1) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x^\alpha (1-\frac{x}{n})^n dx$$

进而：

$$\begin{aligned}
\int_0^n x^\alpha (1-\frac{x}{n})^n dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1-\frac{x}{n})|_0^n + \int_0^n \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} n(1-\frac{x}{n})^{n-1} \cdot \frac{1}{n} dx \\
&= \int_0^n \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1-\frac{x}{n})^{n-1} dx \\
&= \int_0^n \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{n-1}{n}(1-\frac{x}{n})^{n-2} dx \\
&= \int_0^n \frac{x^{\alpha+3}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}(1-\frac{x}{n})^{n-3} dx \\
&= \cdots = \int_0^n \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{n} dx \\
&= \frac{n! n^{\alpha+n+1}}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)n^n} = \frac{n! n^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)}
\end{aligned}$$

从而可知

$$\Gamma(\alpha+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)}$$

设

$$\Gamma_n(\alpha+1) := \frac{n!n^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)}$$

进而要证

$$\Gamma(\alpha+1) \sim \sqrt{2\pi\alpha}(\frac{\alpha}{e})^{\alpha}, \quad \alpha \to +\infty$$

可证

$$\frac{\Gamma_n(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi\alpha}(\frac{\alpha}{e})^{\alpha}} \sim 1, \quad n, \alpha \to +\infty$$

有：

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_n(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi\alpha}(\frac{\alpha}{e})^{\alpha}} &= \frac{n!n^{\alpha+1}}{\sqrt{2\pi\alpha}(\frac{\alpha}{e})^{\alpha}(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)} \\
&= \frac{n!\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{\sqrt{2\pi\alpha}(\frac{\alpha}{e})^{\alpha}(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)} \\
&= (\frac{n}{\alpha})^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{n^{n+1}e^{\alpha-n}}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \\
&= \exp\{(\alpha+\frac{1}{2})\ln\frac{n}{\alpha} + (n+1)\ln n + (\alpha-n) - \sum_{k=1}^{n+1}\ln(\alpha+k)\} \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{n+1}\ln(\alpha+k) &= -\int_0^{n+1}\ln(\alpha+s)ds + \sum_{k=1}^{n+1}\int_{k-1}^{k}[\ln(\alpha+s)-\ln(\alpha+k)]ds \\
&= -(\alpha+n+1)\ln(\alpha+n+1) + \alpha\ln\alpha + n + 1 + \sum_{k=1}^{n+1}\int_{k-1}^{k}[\ln(\alpha+s)-\ln(\alpha+k)]ds
\end{aligned}$$

其中由积分中值定理与微分中值定理知：

$$\begin{aligned}
\int_{k-1}^{k}[\ln(\alpha+s)-\ln(\alpha+k)]ds &= \int_{k-1}^{k}\frac{\ln(\alpha+s)-\ln(\alpha+k)}{s-k}(s-k)ds \\
&= \frac{\ln(\alpha+\xi_k)-\ln(\alpha+k)}{\xi_k-k}\int_{k-1}^{k}(s-k)ds = -\frac{1}{2(\alpha+\eta_k)}
\end{aligned}$$

其中 $\xi_k \in (k-1,k), \eta_k \in (\xi_k, k) \subset (k-1,k)$, 从而 $-\frac{1}{2(\alpha+\eta_k)} \in (-\frac{1}{2(\alpha+k-1)}, -\frac{1}{2(\alpha+k)})$. 进而有：

$$A := \sum_{k=1}^{n+1}\int_{k-1}^{k}[\ln(\alpha+s)-\ln(\alpha+k)]ds \in (-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\alpha+k-1}, -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\alpha+k}) := \Omega$$

由 Euler 常数公式：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + c + o(1), \quad n \to \infty$$

知

$$\Omega \subset (-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{[\alpha]+k-1}, -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{[\alpha]+k+1})$$

其中

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{[\alpha]+k-1} = \sum_{k=1}^{[\alpha]+n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{[\alpha]-1}\frac{1}{k} = \ln([\alpha]+n) + c - \ln([\alpha]-1) - c + o(1) = \ln\frac{[\alpha]-1}{[\alpha]+n} + o(1), \quad n, \alpha \to \infty$$

同理有

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{[\alpha]+k+1}=\ln\frac{[\alpha]+n+2}{[\alpha]+1}+o(1),\quad n,\alpha\to\infty$$

进而有

$$\Omega=(\frac{1}{2}\ln\frac{[\alpha]-1}{[\alpha]+n}+o(1),\frac{1}{2}\ln\frac{[\alpha]+1}{[\alpha]+n+2}+o(1)),\quad n,\alpha\to\infty$$

故知：

$$\begin{aligned}
&\exp\{(\alpha+\frac{1}{2})\ln\frac{n}{\alpha}+(n+1)\ln n+(\alpha-n)-(\alpha+n+1)\ln(\alpha+n+1)+\alpha\ln\alpha+n+1+\}\\
=&\exp\{(\alpha+n+1)\ln\frac{n}{n+\alpha+1}+(\alpha+1)+\frac{1}{2}\ln\frac{n}{\alpha}+A\}\\
\sim&\exp\{(\alpha+n+1)\ln(1-\frac{\alpha+1}{\alpha+n+1})+(\alpha+1)+\frac{1}{2}\ln\frac{n}{\alpha}+\frac{1}{2}\ln\frac{[\alpha]-1}{[\alpha]+n}\}\\
\sim&\exp\{-(\alpha+1)+(\alpha+1)+\frac{1}{2}\ln\frac{n([\alpha]-1)}{\alpha([\alpha]+n)}\}\sim 1,\quad n,\alpha\to\infty
\end{aligned}$$

又因为 $e^{\frac{\theta_n}{12n}}\sim 1,n\to\infty$, 可知：

$$\exp\{(\alpha+\frac{1}{2})\ln\frac{n}{\alpha}+(n+1)\ln n+(\alpha-n)-\sum_{k=1}^{n+1}\ln(\alpha+k)\}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}\sim 1,\quad n,\alpha\to\infty$$

从而

$$\frac{\Gamma_n(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi\alpha}(\frac{\alpha}{e})^{\alpha}}\sim 1,\quad \alpha\to+\infty$$

命题即证.

2. 称函数 $A(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为数列 $a_0,a_1,\cdots$ 的生成函数. 给定两个数列 $\{a_k\},\{b_k\}$. 如果认为当 $k<0$ 时, $a_k=b_k=0$, 那么, 自然地把 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 的卷积定义作 $\{c_k=\sum\limits_m a_mb_{k-m}\}$. 试证, 两个数列卷积的生成函数等于它们的生成函数的乘积.

证明

此即证

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{m=0}^{k}a_mb_{k-m})x^k=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)$$

将上式中 x 的各幂次所对应的系数比较, 固定 x 为 n 次, 左式系数即为 $\sum\limits_{m=0}^{n}a_mb_{n-m}$, 右式系数即为:

$$a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n=\sum_{m=0}^{n}a_mb_{n-m}$$

两者相等, 而这对任意的 n 都成立, 进而命题成立.

3.

(a) 设紧集 $K\subset\mathbb{R}$ 严格包含集合 E 的闭包 $\overline{E}$ 于自己内部. 试根据命题 5 证明：在 E 上, 当 $k\to\infty$ 时, $\int_K f(y)\Delta_k(x-y)dy\rightrightarrows f(x)$.

证明

根据命题 5, 知：

$$\int\limits_E f(y)\Delta_k(x-y)dy\rightrightarrows f(x),\quad k\to\infty$$

从而只需证明

$$\int\limits_{K\setminus E} f(y)\Delta_k(x-y)dy \to 0, \quad k\to\infty$$

即可. 根据 $\delta-$ 型函数的性质有：

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{K\setminus E}\Delta_k(x)dx = 0$$

又因为 f 有界, 故可设 $\exists M>0, |f|\le M$, 进而：

$$|\int\limits_{K\setminus E} f(y)\Delta_k(x-y)dy| \le \int\limits_{K\setminus E} M|\Delta_k(x-y)|dy \to 0$$

从而命题得证.

(b) 试从展开式 $(1-z)^{-1} = 1+z+z^2+\cdots$ 推出

$$g(\rho,\theta) := \frac{1+\rho e^{i\theta}}{2(1-\rho e^{i\theta})} = \frac{1}{2} + \rho e^{i\theta} + \rho^2 e^{i2\theta} + \cdots, \quad 0\le\rho<1$$

证明

既然 $\rho<1$, 知 $(1-\rho e^{i\theta})^{-1} = 1+\rho e^{i\theta}+\rho^2e^{i2\theta}+\cdots$ 绝对收敛, 从而有：

$$\begin{aligned} g(\rho,\theta) &= \frac{1}{2}(1+\rho e^{i\theta})(1+\rho e^{i\theta}+\rho^2 e^{i2\theta}+\cdots) \\ &= \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n e^{in\theta}) \\ &= \frac{1}{2}(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n e^{in\theta}) = \frac{1}{2}+\rho e^{i\theta}+\rho^2 e^{i2\theta}+\cdots \end{aligned}$$

命题即证.

(c) 试验证：当 $0\le\rho<1$ 时,

$$P_\rho(\theta) := \mathrm{Re}g(\rho,\theta) = \frac{1}{2}+\rho\cos\theta+\rho^2\cos2\theta+\cdots$$

且函数 $P_\rho(\theta)$ 有如下形式

$$P_\rho(\theta) = \frac{1}{2}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

叫做圆的泊松核.

证明

在 (b) 中对右式应用 Euler 公式有：

$$g(\rho,\theta) = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n e^{in\theta} = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\rho^n\cos n\theta + i\rho^n\sin n\theta)$$

进而知

$$P_\rho(\theta) = \mathrm{Re}g(\rho,\theta) = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n\theta$$

又因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}g(\rho,\theta)&=\mathrm{Re}\frac{1+\rho e^{i\theta}}{2(1-\rho e^{i\theta})}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\frac{1+\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta-i\rho\sin\theta}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\frac{(1+\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta)(1-\rho\cos\theta-i\rho\sin\theta)}{(1-\rho\cos\theta)^2+\rho^2\sin^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}=P_\rho(\theta)\end{aligned}$$

命题即证.

(d) 试证：由依赖于参变量 $\rho\in[0,1)$ 的函数 $P_\rho(\theta)$ 构成的函数族具有性质：$P_\rho(\theta)\geq 0$; $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\rho(\theta)d\theta=1$; 当 $\rho\to 1^-$ 时, $\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon}P_\rho(\theta)d\theta\to 0$, 其中 $\varepsilon>0$.

证明

首先, 因为 $0\leq\rho<1$, 故 $1-\rho^2>0$, 且注意到 $1-2\rho\cos\theta+\rho^2\geq 1-2\rho+\rho^2=(\rho-1)^2>0$, 故 $P_\rho(\theta)>0$.

其次, 既然 $0\leq\rho<1$, 由 Weierstrass 判别法知 $P_\rho(\theta)$ 关于 θ 一致收敛, 进而有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\rho(\theta)d\theta&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n\theta)\\&=\frac{1}{\pi}(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\rho^n\cos n\theta d\theta)=\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

最后, 当 $\theta\in(\varepsilon,2\pi-\varepsilon)$, 知 $\cos\theta<\cos\varepsilon$, 进而

$$0\leq P_\rho(\theta)=\frac{1}{2}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}<\frac{1}{2}\frac{1-\rho^2}{1-2\cos\varepsilon\rho+\rho^2}\to\frac{1}{2}\frac{1-1}{2-2\cos\varepsilon}=0,\rho\to 1^-$$

从而有

$$\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon}P_\rho(\theta)d\theta\to 0,\quad \rho\to 1^-,\varepsilon>0$$

命题即证.

(e) 试证：如果 $f\in C[0,2\pi]$, 那么函数

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\rho(\theta-t)f(t)dt$$

在圆 $\rho<1$ 内是调和函数, 并且当 $\rho\to 1^-$ 时, $u(\rho,\theta)\rightrightarrows f(\theta)$. 这样一来, 用泊松核能在圆内构造在圆的边界上取给定边界值的调和函数.

证明 (这一题对调和函数的证明并没有做出来, 下面展示的是自己尝试过的两个思路)

只需验证 $P_\rho(\theta)$ 为调和函数, 直接求导有：

$$\frac{\partial P}{\partial \rho}=\frac{1}{2}\frac{-2\rho(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)-(2\rho-2\cos\theta)(1-\rho^2)}{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{2\rho^2\cos\theta-4\rho+2\cos\theta}{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}&=\frac{1}{2}\frac{(4\rho\cos\theta-4)(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^2-2(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)(2\rho-2\cos\theta)(2\rho^2\cos\theta-4\rho+2\cos\theta)}{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^4}\\
&=\frac{(4\rho\cos\theta-4)(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)-2(2\rho-2\cos\theta)(2\rho^2\cos\theta-4\rho+2\cos\theta)}{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^3}\\
&=\frac{1}{2}\frac{-4\rho^3\cos\theta+12\rho^2-12\rho\cos\theta+8\cos^2\theta-4}{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^3}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta}=-\rho(1-\rho^2)\frac{\sin\theta}{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}&=-\rho(1-\rho^2)\frac{\cos\theta(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^2-2(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)(2\rho\sin\theta)\sin\theta}{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^4}\\
&=-\rho(1-\rho^2)\frac{\cos\theta(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)-4\rho\sin^2\theta}{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^3}\\
&=\frac{1}{2}\frac{2\rho^5\cos\theta+(4\cos^2\theta-8)\rho^4-(4\cos^2\theta+8)\rho^2-2\rho\cos\theta}{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)^3}
\end{aligned}$$

发现此处两者相加并不为 0！下为另一个思路：

要验证 $P_\rho(\theta)$ 为调和函数, 即验证 $\Delta g(\rho,\theta)$ 的实部为 0, 有：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \rho}&=\frac{1}{2}\frac{2e^{i\theta}}{(1-\rho e^{i\theta})^2}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}&=\frac{1}{2}\frac{4e^{i2\theta}}{(1-\rho e^{i\theta})^3}\\
\frac{\partial g}{\partial \theta}&=\frac{1}{2}\frac{2\rho ie^{i\theta}}{(1-\rho e^{i\theta})^2}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}&=\frac{1}{2}\frac{-2\rho e^{i\theta}-2\rho^2e^{i2\theta}}{(1-\rho e^{i\theta})^3}
\end{aligned}$$

进而即验证

$$\mathrm{Re}\frac{(4-2\rho^2)e^{i2\theta}-2\rho e^{i\theta}}{(1-\rho e^{i\theta})^3}=0$$

有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\frac{(4-2\rho^2)e^{i2\theta}-2\rho e^{i\theta}}{(1-\rho e^{i\theta})^3}=0\\
\Leftrightarrow&\mathrm{Re}\frac{[(4-2\rho^2)e^{i2\theta}-2\rho e^{i\theta}](1-\rho e^{-i\theta})^3}{(1+\rho e^{i\theta})^3(1+\rho e^{-i\theta})^3}=0\\
\Leftrightarrow&\mathrm{Re}[(4e^{i2\theta}-2\rho^2e^{i2\theta}-2\rho e^{i\theta})(1-3\rho e^{-i\theta}+3\rho^2e^{i(-2\theta)}-\rho^3e^{i(-3\theta)})]=0\\
\Leftrightarrow&\mathrm{Re}[(4-2\rho^2)e^{i2\theta}+(6\rho^3-14\rho)e^{i\theta}+(12\rho^2+6\rho-6\rho^4)+(2\rho^5-10\rho^3)e^{i(-\theta)}+2\rho^4e^{i(-2\theta)}]=0
\end{aligned}$$

同样无法判断其为调和函数！

当 $\rho\to 1^-$, 知

$$u(\rho,\theta)\sim\frac{1}{\pi}\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}P_\rho(\theta-t)f(t)dt\sim\frac{1}{\pi}f(\theta)\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}P_\rho(\theta-t)dt=f(\theta)$$

其中左边的等价源自 $\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon}P_\rho(\theta)d\theta=0,\rho\to 1^-,\varepsilon>0$, 右边的等价源自 f 的连续性, 而最后的等式源自 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\rho(\theta)d\theta=1$.

10 月 18 日答疑后整理

要证明 $P_\rho(\theta)$ 是调和函数, 只需证明 $g(\rho,\theta)$ 是调和函数. 记 $z=\rho e^{i\theta}$, 要证明 $g(\rho,\theta)$ 是调和函数, 只需证:

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}g(z)=\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}\frac{1+z}{2(1-z)}=0$$

这是因为对算子而言, 有:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})\\
&\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})\\
\Rightarrow&\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}=\frac{1}{4}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})\circ(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})=\frac{1}{4}(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})=\frac{1}{4}\Delta
\end{aligned}$$

容易验证 $g(z)$ 本身在开集 $\{z||z|<1\}$ 上是 $C^{(\infty)}$ 类函数, 从而 $\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}g=\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}\partial z}g$, 进而首先有:

$$\frac{\partial}{\partial z}g=\frac{1}{(1-z)^2}=:h(z)$$

注意到 $h(z)$ 是 $\{z||z|<1\}$ 上的解析函数, 从而其满足 Cauthy-Riemann 方程, 进而有 $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}h=0$, 这便是 $\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}\partial z}g=0$, 从而 g 是调和函数. 特别地, 既然 $P_\rho(\theta)=\mathrm{Re}g$, 知 $P_\rho(\theta)$ 也是调和函数.

(f) 设 u,v 是具有相同周期 T 的局部可积函数, 可以按以下方式正确地定义卷积运算 (周期卷积)

$$(u\underset{T}{*}v)(x):=\int_a^{a+T}u(y)v(x-y)dy$$

$\mathbb{R}$ 上的周期函数可以解释为定义在圆周上的函数, 因此自然认为上边引进的运算是给定在圆周上的两个函数的卷积.

试证：如果 $f(\theta)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的局部可积函数 (或同样地, f 是圆周上的函数), 由依赖于参数 ρ 的函数 $P_\rho(\theta)$ 构成的函数族具有 (d) 中所列举的泊松核的性质, 那么, 当 $\rho\to1^-$ 时, 在函数 f 的任一连续点处, 有 $(f\underset{2\pi}{*}P_\rho)(\theta)\to f(\theta)$.

证明

知

$$(f\underset{2\pi}{*}P_\rho)(\theta)=\int_0^{2\pi}P_\rho(\theta-t)f(t)dt$$

但注意到推导出 (f) 中 $u(\rho,\theta)\rightrightarrows f(\theta),\rho\to1^-$ 时并未用到 $P_\rho(\theta)$ 的解析式, 故 (f) 的过程可照搬至此, 进而命题得证.

14.5 第五次作业

10 月 14 日作业

1.

(a) 试验证, 以下 $\mathfrak{D}'$ 中的极限是正确的:

$$\lim_{\alpha\to0^+}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}=\pi\delta;\lim_{\alpha\to0^+}\frac{\alpha x}{\alpha^2+x^2}=\pi x\delta;\lim_{\alpha\to0^+}\frac{x}{x^2+\alpha^2}=\ln|x|$$

证明

对 $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}=\pi\delta$ 的证明：

首先证明对任意的 $\varphi\in\mathfrak{D}$, 有

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\varphi(x)dx=\pi\varphi(0)$$

不妨设 $0\in\operatorname{supp}\varphi$, 不失一般性设 $\varphi(0)>0$, 考虑积分

$$\int_0^{\sqrt{\alpha}}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\varphi(x)dx=\varphi(\xi)\int_0^{\sqrt{\alpha}}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}dx=\varphi(\xi)\arctan\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\quad \xi\in(0,\sqrt{\alpha})$$

当 $\alpha\to 0^+$, 有：

$$\varphi(\xi)\arctan\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\to\frac{\pi}{2}\varphi(\xi)\sim\frac{\pi}{2}\varphi(0)$$

其中最后的等价基于 φ 的连续性而来, 再考虑积分

$$\int_{\sqrt{\alpha}}^a\frac{\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\varphi(x)dx, a>\sqrt{\alpha}>0$$

知既然 $\varphi(x)$ 是连续紧支函数, 其必能在 $[\sqrt{\alpha},a]$ 上取到最大最小值点, 设 $\exists M>0(|\varphi(x)|\le M)$, 有：

$$|\int_{\sqrt{\alpha}}^a\frac{\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\varphi(x)dx|\le M\int_{\sqrt{\alpha}}^a\frac{\alpha^2}{\alpha+\alpha^2}dx\to 0,\alpha\to 0^+$$

综上知对任意的 $a>0$, 有

$$\int_0^a\frac{\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\varphi(x)dx=\frac{\pi}{2}\varphi(0)$$

同理可证对任意的 $b<0$ 有

$$\int_b^0\frac{\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\varphi(x)dx=\frac{\pi}{2}\varphi(0)$$

进而当 $0\in\operatorname{supp}\varphi$ 时有：

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\varphi(x)dx=\pi\varphi(0)$$

而当 $0\notin\operatorname{supp}\varphi$, 设 $\operatorname{supp}\varphi$ 有连通分支 $[a,b]$, 并不失一般性设 $b>a>0$. 届于 φ 在 $[a,b]$ 上连续, 其必在该区间上有界, 设 $\exists M>0,|\varphi(x)|<M$, 有：

$$|\int_a^b\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\varphi(x)dx|\le M\int_a^b\frac{\alpha}{\alpha^2+a^2}=\frac{M(b-a)\alpha}{a^2+\alpha^2}\to 0,\alpha\to 0^+$$

这对 $\operatorname{supp}\varphi$ 的每一个连通分支都成立, 进而可知

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\varphi(x)dx=\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\varphi(x)dx=0=\pi\cdot 0=\pi\varphi(0)$$

综上, 对任意的 $\varphi\in\mathfrak{D}$, 有：

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\varphi(x)dx=\pi\varphi(0)$$

进而：

$$\langle\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2},\varphi\rangle=\pi\varphi(0)=\pi\langle\delta,\varphi\rangle=\langle\pi\delta,\varphi\rangle,\quad \alpha\to 0^+$$

这便说明了在 $\mathfrak{D}'$ 中有：

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}=\pi\delta$$

对 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\frac{\alpha x}{\alpha^2+x^2}=\pi x\delta$ 的证明：

设 $F=\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$, 由前论证知 $\langle F,\varphi\rangle=\langle\pi\delta,\varphi\rangle,\alpha\to0^+$, 进而有：

$$\begin{aligned}\langle\frac{\alpha x}{\alpha^2+x^2},\varphi\rangle&=\langle F\cdot x,\varphi\rangle=\langle F,x\cdot\varphi\rangle\\&=\langle\pi\delta,x\cdot\varphi\rangle=\langle\pi\delta x,\varphi\rangle,\quad\alpha\to0^+\end{aligned}$$

这便说明了在 $\mathfrak{D}'$ 中有：

$$\lim_{\alpha\to0^+}\frac{\alpha x}{\alpha^2+x^2}=\pi x\delta$$

对 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\frac{x}{x^2+\alpha^2}=\ln|x|$ 的证明：

此处怀疑这道题题目出错了, 下面证明在 $\mathfrak{D}'$ 中 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\frac{x}{x^2+\alpha^2}=\frac{1}{x}$, 知对任意的 $\varphi\in\mathfrak{D}$ 有：

$$\lim_{\alpha\to0^+}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{x}{x^2+\alpha^2}\varphi(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}}\lim_{\alpha\to0^+}\frac{x}{x^2+\alpha^2}\varphi(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}\cdot\varphi(x)dx$$

此即 $\langle\frac{x}{x^2+\alpha^2},\varphi\rangle=\langle\frac{1}{x},\varphi\rangle,\alpha\to0^+$, 进而可得欲证式. 这里上述积分和极限能换序是因为 φ 具紧支集, 从而原积分必一致收敛.

(b) 试证：如果 $f=f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上局部可积函数, 而 $f_\varepsilon=f(x+\varepsilon)$, 那么在 $\mathfrak{D}'$ 内, 当 $\varepsilon\to0$ 时, 有 $f_\varepsilon\to f$.

证明

题即证明 $\forall\varphi\in\mathfrak{D}$：

$$\lim_{\varepsilon\to0}|\int\limits_{\mathbb{R}}(f(x+\varepsilon)-f(x))\varphi(x)dx|\to0$$

既然 f 局部可积, 知其首先在 $\mathbb{R}$ 上可积, 进而其在 $\mathbb{R}$ 上仅有可数个间断点, 记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$. 同时, 注意到 f 本身在 $\mathbb{R}$ 上的每个有界集内必有界. 下面首先分两种情况来给出记号, 这里记 $\Delta_n=\sup\limits_{\overline{U}_\varepsilon(x_n)\backslash\{x_n\}}|f(x)-f(x_n)|$, 有：

对 $\{x_n\}$ 的发散子列 $\{x_{n_p}\}$, 知既然 $\varphi\in\mathfrak{D}$, 总存在 N_1 使得 $n>N\Rightarrow x_n\notin\mathrm{supp}\varphi$, 进而记 $M_1=\max\{\Delta_i|_{i=1}^{N_1}\}$.

对 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_q}\}$, 记 $x_{n_q}\to x^q$, 根据收敛的定义知对任意给定的 ε, 总存在 $N_2(\varepsilon)$ 使得 $n>N_2\Rightarrow x_n\in U_\varepsilon(x_q)$, 进而记 $M_2=\max\{\Delta_i|_{i=1}^{N_2}\}$, 并记 $\exists M>0\forall x\in U_\varepsilon(x^q)(|f(x)|\le M)$.

为了叙述上的简单起见, 设 $\{x_{n_p}\}$ 和 $\{x_{n_q}\}$ 不交且穷尽 $\{x_n\}$. 同时, 既然 $\varphi\in\mathfrak{D}$, 设 $|\varphi|$ 有上界 R. 又考虑到在 f 连续的那些区间上题式显然成立, 故只需要验证下式即可：

$$\lim_{\varepsilon\to0}I:=\lim_{\varepsilon\to0}|\int\limits_{\bigcup\limits_i\overline{U}_\varepsilon(x_i)}(f(x+\varepsilon)-f(x))\varphi(x)dx|\to0$$

知：

$$\begin{aligned}
I &= |\int_{\bigcup_i \overline{U}_{\varepsilon_i}(x_i)} (f(x+\varepsilon)-f(x))\varphi(x)dx| \le \int_{\bigcup_i \overline{U}_{\varepsilon_i}(x_i)} |f(x+\varepsilon)-f(x)||\varphi(x)|dx \\
&= \int_{\bigcup_p \overline{U}_{\varepsilon_{i_p}}(x_{n_p})} |f(x+\varepsilon)-f(x)|\cdot|\varphi(x)|dx + \int_{\bigcup_q \overline{U}_{\varepsilon_{i_q}}(x_{n_q})} |f(x+\varepsilon)-f(x)|\cdot|\varphi(x)|dx \\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned}$$

这其中 ε_{i_p} 和 ε_{i_q} 都是和 ε 相关的数. 考虑第一个式子, 因为 $\{x_{n_p}\}$ 发散, 故 $\bigcup\limits_p \overline{U}_{\varepsilon_{i_p}}(x_{n_p}) \cap \mathrm{supp}\varphi$ 必定是有界集, 不妨就设

$$\bigcup_p \overline{U}_{\varepsilon_{i_p}}(x_{n_p}) \cap \mathrm{supp}\varphi = \bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{U}_{\varepsilon_{n_i}}(x_{n_i})$$

从而在 I_1 的式子中令 $\varepsilon_{n_i} = \varepsilon$, 有：

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{N_1} \overline{U}_\varepsilon(x_{n_i})} |f(x+\varepsilon)-f(x)|\cdot|\varphi(x)|dx \\
&\le 2M_1 \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{N_1} \overline{U}_\varepsilon(x_{n_i})} |\varphi(x)|dx \le 2M_1RN_1 \cdot 2\varepsilon = 4M_1RN_1\varepsilon
\end{aligned}$$

对 I_2, 既然 $\{x_{n_q}\}$ 收敛到 x^q, 不妨就设

$$\bigcup_q \overline{U}_{\varepsilon_{i_q}}(x_{n_q}) = \overline{U}_\varepsilon(x^p) \cup (\bigcup_{j=1}^{N_2(\varepsilon)} \overline{U}_{\varepsilon_{n_j}}(x_{n_j}))$$

进而令 $\varepsilon_{n_j} = \varepsilon^j$, 有：

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\overline{U}_\varepsilon(x^p) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{N_2(\varepsilon)} \overline{U}_{\varepsilon_{n_j}}(x_{n_j}))} |f(x+\varepsilon)-f(x)|\cdot|\varphi(x)|dx \\
&\le \int_{\overline{U}_\varepsilon(x^p)} |f(x+\varepsilon)-f(x)|\cdot|\varphi(x)|dx + \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{N_2(\varepsilon)} \overline{U}_{\varepsilon_{n_j}}(x_{n_j})} |f(x+\varepsilon)-f(x)|\cdot|\varphi(x)|dx \\
&\le 2M \int_{\overline{U}_\varepsilon(x^p)} |\varphi(x)|dx + 2M_2 \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{N_2(\varepsilon)} \overline{U}_{\varepsilon_{n_j}}(x_{n_j})} |\varphi(x)|dx \\
&\le 2MR\cdot 2\varepsilon + 2M_2 \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \overline{U}_{\varepsilon_{n_j}}(x_{n_j})} |\varphi(x)|dx \le 4MR\varepsilon + 2M_2R\cdot 2\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j \\
&= 4MR\varepsilon + 4M_2R\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}
\end{aligned}$$

综上：

$$I \le 4M_1RN_1\varepsilon + 4MR\varepsilon + 4M_2R\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon \to 0^+$$

命题即证.

(c) 试证：如果 $\{\Delta_\alpha\}$ 当 $\alpha\to 0$ 时是 $\delta-$ 型光滑函数族, 那么当 $\alpha\to 0$ 时, $F_\alpha=\int_{-\infty}^{x}\Delta_\alpha(t)dt\to H$, 其中 H 是对应于 Heaviside 函数的广义函数.

证明

任取 $\varphi\in\mathfrak{D}$, 记 $G_\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)du$, 有：

$$\begin{aligned}
\langle F_\alpha,\varphi\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}}(\int_{-\infty}^{x}\Delta_\alpha(t)dt)\varphi(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}}(\int_{-\infty}^{x}\Delta_\alpha(t)dt)d(\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)du)\\
&=(\int_{-\infty}^{x}\Delta_\alpha(t)dt)(\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)du)|_{-\infty}^{+\infty}-\int\limits_{\mathbb{R}}(\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(u)du)\Delta_\alpha(x)dx\\
&=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx-\langle\Delta_\alpha,G_\varphi\rangle\sim\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx-\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx\\
&=\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx=\langle H,\varphi\rangle,\quad \alpha\to 0^+
\end{aligned}$$

从而在 $\mathfrak{D}'$ 上有 $F_\alpha\to H$. 命题即证.

2.

(a) 对于用式子 $\langle F,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\varphi(x)dx$ 确定的广义函数 F, 验证下面等式：

$$\begin{aligned}
&\langle F',\varphi\rangle=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}dx\\
&\langle F'',\varphi\rangle=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{\frac{3}{2}}}dx\\
&\langle F''',\varphi\rangle=\frac{3}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^{\frac{5}{2}}}dx\\
&\cdots\\
&\langle F^{(n)},\varphi\rangle=\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n+1}{2}}}dx
\end{aligned}$$

证明 (本题验证式中最后一个式子, 积分中分母的次数个人觉得应该是 $\frac{2n-1}{2}$...)

知

$$
\begin{aligned}
\langle F',\varphi\rangle &= -\langle F,\varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty}\sqrt{x}d\varphi(x) \\
&= -(\sqrt{x}\varphi(x)|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\varphi(x)d\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}dx \\
\langle F'',\varphi\rangle &= -\langle F',\varphi'\rangle = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}d\varphi(x) \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\varphi(x)d\frac{1}{\sqrt{x}}) = -\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^{\frac{3}{2}}}dx + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} \\
&\sim -\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^{\frac{3}{2}}}dx + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(0)}{x^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{\frac{3}{2}}}dx \\
\langle F''',\varphi\rangle &= -\langle F'',\varphi'\rangle = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{d(\varphi(x)-x\varphi'(0))}{x^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)}{x^{\frac{3}{2}}}|_0^{+\infty} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(\varphi(x)-x\varphi'(0))d\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{3}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)}{x^{\frac{5}{2}}}dx - \frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)}{x^{\frac{3}{2}}} \\
&\sim \frac{3}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)}{x^{\frac{5}{2}}}dx - \frac{3}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(0)}{x^{\frac{5}{2}}}dx = \frac{3}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^{\frac{5}{2}}}dx
\end{aligned}
$$

这其中 $\langle F'',\varphi\rangle$ 推导过程中涉及的等价解释如下：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(0)}{x^{\frac{3}{2}}}dx \\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} \sim -(\frac{\varphi(0)}{\sqrt{x}}|_0^{+\infty}) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\sqrt{x}} = 0 \\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 0^+}\frac{x\varphi'(\xi_x)}{\sqrt{x}} = 0
\end{aligned}
$$

最后的式子中 $0<\xi_x<x$, 其显然成立, 故等价成立. 而 $\langle F''',\varphi\rangle$ 推导过程中涉及的等价解释如下：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(0)}{x^{\frac{5}{2}}}dx \\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)}{x^{\frac{3}{2}}} \sim -(\frac{\varphi(0)}{x^{\frac{3}{2}}}|_0^{+\infty}) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^{\frac{3}{2}}} = 0 \\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2}{2}\varphi''(\xi_x)}{x^{\frac{3}{2}}} = 0
\end{aligned}
$$

最后的式子基于 Taylor 公式, $0<\xi_x<x$, 其显然成立, 故等价成立.

对 n 阶情况, 用归纳法. 如若 $n-1$ 成立, 也即下式成立：

$$
\langle F^{(n-1)},\varphi\rangle = \frac{(-1)^{n-2}(2n-5)!!}{2^{n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}\varphi^{(n-3)}(0)}{x^{\frac{2n-3}{2}}}dx
$$

则对 n, 有：

$$
\begin{aligned}
&\langle F^{(n)},\varphi\rangle=-\langle F^{(n-1)},\varphi'\rangle\\
&\quad=\frac{(-1)^{n-1}(2n-5)!!}{2^{n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)-x\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-3}{2}}}dx\\
&\quad=\frac{(-1)^{n-1}(2n-5)!!}{2^{n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{d(\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0))}{x^{\frac{2n-3}{2}}}\\
&\quad=\frac{(-1)^{n-1}(2n-5)!!}{2^{n-1}}\cdot\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-3}{2}}}|_0^{+\infty}\\
&\quad-\frac{(-1)^{n-1}(2n-5)!!}{2^{n-1}}\cdot(-\frac{2n-3}{2})\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-1}{2}}}dx\\
&\quad=-\lim_{x\to0^+}\frac{(-1)^{n-1}(2n-5)!!}{2^{n-1}}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-3}{2}}}\\
&\quad+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{n}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-1}{2}}}dx\\
&\quad\sim\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{n}}\int_0^{+\infty}\frac{-\varphi(0)}{x^{\frac{2n-1}{2}}}dx\\
&\quad+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{n}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-1}{2}}}dx\\
&\quad=\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{n}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-1}{2}}}dx
\end{aligned}
$$

这其中的等价解释如下：

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-3}{2}}}\sim\frac{2}{2n-3}\int_0^{+\infty}\frac{-\varphi(0)}{x^{\frac{2n-1}{2}}}dx\\
\Leftrightarrow&\lim_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-3}{2}}}\sim\frac{2}{2n-3}\cdot\frac{3-2n}{2}(\frac{\varphi(0)}{x^{\frac{2n-3}{2}}}|_0^{+\infty})\\
\Leftrightarrow&\lim_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n-3}{2}}}=0\\
\Leftrightarrow&\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(\xi_x)}{x^{\frac{2n-3}{2}}}=0
\end{aligned}
$$

其中最后一步基于 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处的 $n-2$ 阶 Taylor 展开, 最后的式子中分子是 Taylor 展开的余项, $0<\xi_x<x$, 而最后的极限式显然成立. 故等价成立.

综上, 命题得证.

(b) 试证：如果 $n-1<p<n$, 而广义函数 x_+^{-p} 由

$$\langle x_+^{-p},\varphi\rangle:=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^p}dx$$

确定, 那么它的导函数 $-px_+^{-(p+1)}$ 是用

$$\langle -px_+^{-(p+1)},\varphi\rangle=-p\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^{p+1}}dx$$

确定的广义函数.

证明

知

$$
\begin{aligned}
\langle (x_+^{-p})', \varphi\rangle &= -\langle x_+^{-p}, \varphi'\rangle \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)-x\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^p}dx \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{d(\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0))}{x^p} \\
&= -\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^p}|_0^{+\infty} \\
&+ \int_0^{+\infty}(\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0))d\frac{1}{x^p} \\
&= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^p} \\
&- p\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^{p+1}}dx \\
&\sim p\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(0)}{x^{p+1}}dx - p\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^{p+1}}dx \\
&= -p\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^{p+1}}dx = \langle -px_+^{-(p+1)}, \varphi\rangle
\end{aligned}
$$

这其中的等价解释如下：

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^p} \sim p\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(0)}{x^{p+1}}dx \\
\Leftrightarrow &-\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^p} \sim p\cdot(-\frac{1}{p}\frac{\varphi(0)}{x^p}|_0^{+\infty}) \\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^p} \sim \lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(0)}{x^p} \\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^p} = 0 \\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(\xi_x)}{x^p} = 0
\end{aligned}
$$

这其中最后一个充要条件基于 $\varphi(x)$ 的 n 阶 Taylor 展开, 最后极限式的分子为该展开的余项, $0 < \xi_x < x$, 届于 $\varphi \in \mathfrak{D}$ 可知 $\varphi^{(n)}(\xi_x)$ 有界, 又因为 $p < n$ 可知 $n-p > 0$. 综合这些条件可知上述最后一个极限式成立, 从而该等价成立, 命题即证.

3. 把由等式

$$
\langle F, \varphi\rangle := V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx (:= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty})\frac{\varphi(x)}{x}dx)
$$

确定的广义函数记作 $\mathfrak{P}\frac{1}{x}$, 试证:

(a) $\langle \mathfrak{P}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx$.

证明

知

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{P}\frac{1}{x},\varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty})\frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(-x)}{-x}dx+\int_{\varepsilon}^{=\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx\\
&:= \int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx
\end{aligned}$$

命题即证.

(b) $(\ln|x|)'=\mathfrak{P}\frac{1}{x}$.

证明

知:

$$\begin{aligned}
\langle(\ln|x|)',\varphi\rangle &= -\langle\ln|x|,\varphi'\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty})\ln|x|\varphi'(x)dx\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\ln|x|d\varphi(x)+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\ln|x|d\varphi(x))\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varphi(x)\ln|x||_{-\infty}^{-\varepsilon}-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\varphi(x)d\ln|x|+\varphi(x)\ln|x||_{\varepsilon}^{+\infty}-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\varphi(x)d\ln|x|)\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varphi(-\varepsilon)\ln|\varepsilon|-\varphi(\varepsilon)\ln|\varepsilon|-\int_{+\infty}^{\varepsilon}\varphi(-x)d\ln x-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\varphi(x)d\ln x)\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}((\varphi(\varepsilon)+o(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon))\ln\varepsilon+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(-x)}{x}dx-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(o(1)\varepsilon\ln\varepsilon+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx := \int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx = \langle\mathfrak{P}\frac{1}{x},\varphi\rangle
\end{aligned}$$

这其中第 5 个等号基于 ε 足够小时由 φ 连续所引出的式子, 而第 7 个等号基于 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\varepsilon=0$. 从而由上述论证可知, 至少在 $\mathfrak{D}$ 上有 $\mathfrak{P}\frac{1}{x}=(\ln|x|)'$.

(c) $\langle(\mathfrak{P}\frac{1}{x})',\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx$.

证明

$$\begin{aligned}
\langle(\mathfrak{P}\frac{1}{x})',\varphi\rangle &= -\langle\mathfrak{P}\frac{1}{x},\varphi'\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty})\frac{\varphi'(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{d\varphi(x)}{x}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{d\varphi(x)}{x})\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}(\frac{\varphi(x)}{x}|_{-\infty}^{-\varepsilon}-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\varphi(x)d\frac{1}{x}+\frac{\varphi(x)}{x}|_{\varepsilon}^{+\infty}-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\varphi(x)d\frac{1}{x})\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(-x)}{x^2}dx+\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon})\\
&\sim \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x^2}dx-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{2\varphi(0)}{x^2}dx) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx\\
&:= \int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx
\end{aligned}$$

这其中的等价解释如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}\sim\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{-2\varphi(0)}{x^2}dx\Leftrightarrow\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}\sim 2\varphi(0)(\frac{1}{x}|_{\varepsilon}^{+\infty})\\
\Leftrightarrow&\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}+\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\sim 0\Leftrightarrow\frac{\varphi(-\varepsilon)+\varphi(\varepsilon)-2\varphi(0)}{\varepsilon}\sim 0\\
\Leftrightarrow&\frac{(\varphi(\varepsilon)-\varphi(0))-(\varphi(0)-\varphi(-\varepsilon))}{\varepsilon}\sim 0\Leftrightarrow\frac{\varepsilon\varphi'(\xi_1)-\varepsilon\varphi'(\xi_2)}{\varepsilon}\sim 0\\
\Leftrightarrow&\varphi'(\xi_1)-\varphi'(\xi_2)\sim 0,\quad\varepsilon\to 0^+
\end{aligned}$$

其中 $-\varepsilon<\xi_2<0<\xi_1<\varepsilon$, 届于 $\varphi\in\mathfrak{D}$, 知 $\varphi'(x)$ 连续, 从而最后的等价成立, 进而命题得证.

(d) $\frac{1}{x+i0}:=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{x+iy}=-i\pi\delta+\mathfrak{P}\frac{1}{x}$.

证明

记 $\frac{1}{x+iy}$ 所确定的广义函数为 f_y, 此即证明对任意的 $\varphi\in\mathfrak{D}$：

$$\lim_{y\to 0^+}\langle f_y,\varphi\rangle=\langle -i\pi\delta+\mathfrak{P}\frac{1}{x},\varphi\rangle$$

考虑分别计算两边, 对右式有：

$$\langle -i\pi\delta+\mathfrak{P}\frac{1}{x},\varphi\rangle=\langle -i\pi\delta,\varphi\rangle+\langle\mathfrak{P}\frac{1}{x},\varphi\rangle=-i\pi\varphi(0)+V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

对左式有：

$$\begin{aligned}
\langle f_y,\varphi\rangle&:=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x+iy}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)(x-iy)}{x^2+y^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\varphi(x)}{x^2+y^2}dx-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\varphi(x)}{x^2+y^2}dx\\
&\sim V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx-i\pi\varphi(0)
\end{aligned}$$

这其中的等价基于本次作业第 1 题 (a) 中的第一个和第三个极限. 进而比对知二者相等, 从而命题即证.

4.

(a) 试证：线性算子 $A:\mathfrak{D}'\to\mathfrak{D}'$ 的基本解 E, 一般来说, 不是单值的. 它们彼此相差齐次方程 $Af=0$ 的一个解.

证明

设 A 的两个基本解为 E_1,E_2, 有：

$$AE_1=\delta_1$$
$$AE_2=\delta_2$$

两式相减, 届于 A 是线性算子, 有：

$$A(E_2-E_1)=\delta_1-\delta_2$$

下面验证在 $\mathfrak{D}'$ 上 $\delta_1-\delta_2=0$, 这是因为：

$$\langle\delta_1-\delta_2,\varphi\rangle=\langle\delta_1,\varphi\rangle-\langle\delta_2,\varphi\rangle=\varphi(0)-\varphi(0)=0=\langle 0,\varphi\rangle$$

进而在 $\mathfrak{D}'$ 上知 E_2-E_1 是齐次方程 $Af=0$ 的一个解, 命题即证.

(b) 考虑微分算子

$$P(x,\frac{d}{dx}) := \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)$$

试证:如果 $u_0 = u_0(x)$ 是方程 $P(x,\frac{d}{dx})u_0 = 0$ 满足初始条件 $u_0(0) = \cdots = u_0^{(n-2)}(0) = 0, u_0^{(n-1)}(0) = 1$ 的一个解, 那么函数 $E(x) = H(x)u_0(x)$(其中 $H(x)$ 是 Heaviside 函数) 是算子 $P(x,\frac{d}{dx})$ 的基本解.

证明

为了书写方便, 还是记 $P(x,\frac{d}{dx}) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x)\frac{d^i}{dx^i}, a_n(x) = 1$. 题即验证:

$$P(x,\frac{d}{dx})E = \delta$$

进而此即验证:

$$\langle P(x,\frac{d}{dx})E, \varphi\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

根据已有的结论 $H' = \delta$ 与 Leibniz 公式, 知:

$$\frac{d^n}{dx^n}E = \sum_{i=0}^{n} C_n^i H^{(i)}(x)u_0^{(n-i)}(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \delta^{(i-1)}(x)u_0^{(n-i)}(x)$$

再根据结论 $\langle \delta^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$ 有 (这里记 $\delta^{-1} = H$):

$$\begin{aligned}
\langle P(x,\frac{d}{dx})E, \varphi\rangle &= \langle (\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i} + a_0(x))E, \varphi\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i} C_i^k \delta^{(k-1)}u_0^{(i-k)} + a_0 H u_0, \varphi\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle a_i \sum_{k=0}^{i} C_i^k \delta^{(k-1)}u_0^{(i-k)}, \varphi\rangle + \langle a_0 H u_0, \varphi\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i} C_i^k \langle a_i \delta^{(k-1)}u_0^{(i-k)}, \varphi\rangle + \langle H, a_0 u_0 \varphi\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i} C_i^k \langle \delta^{(k-1)}, a_i u_0^{(i-k)}\varphi\rangle + \langle H, a_0 u_0 \varphi\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1} C_i^k (a_i u_0^{(i-k)}\varphi)^{(k-1)}(0) + \langle H, a_i u_0^{(i)}\varphi\rangle) + \langle H, a_0 u_0 \varphi\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1} C_i^k (a_i u_0^{(i-k)}\varphi)^{(k-1)}(0) + \sum_{i=1}^{n}\langle H, a_i u_0^{(i)}\varphi\rangle + \langle H, a_0 u_0 \varphi\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1} C_i^k (\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j u_0^{(i-k+j)}(a_i\varphi)^{(k-1-j)})(0) + \sum_{i=1}^{n}\langle H, a_i u_0^{(i)}\varphi\rangle + \langle H, a_0 u_0 \varphi\rangle \\
&= (u_0^{(n-1)} a_n \varphi)(0) + \langle H, \sum_{i=1}^{n} a_i u_0^{(i)}\varphi\rangle + \langle H, u_0\varphi\rangle \\
&= u_0^{(n-1)}(0)a_n(0)\varphi(0) + \langle H, (P(x,\frac{d}{dx})(u_0) - a_0 u_0)\varphi\rangle + \langle H, a_0 u_0 \varphi\rangle \\
&= \varphi(0) + \langle H, P(x,\frac{d}{dx})(u_0)\varphi\rangle = \varphi(0) + \langle H, 0\rangle = \varphi(0)
\end{aligned}$$

命题即证.

(c) 用上边所说的方法求下面算子的基本解:

$$(\frac{d}{dx} + a), (\frac{d^2}{dx^2} + a^2), \frac{d^m}{dx^m}, (\frac{d}{dx} + a)^m, m \in \mathbb{N}$$

解

对 $(\frac{d}{dx}+a)$：

首先用 (b) 的方法给出一个基本解, 考虑初值问题

$$(\frac{d}{dx}+a)f=f'+af=0,\quad f(0)=1$$

解之得 $f(x)=e^{-ax}$, 从而函数 $E(x)=H(x)f(x)=H(x)e^{-ax}$ 是 $(\frac{d}{dx}+a)$ 的一个基本解.

再根据 (a) 的方法给出基本解系, 知 $(\frac{d}{dx}+a)f=0$ 的通解为 $f(x)=Ce^{-ax}$, 从而该算子的基本解系为 $H(x)e^{-ax}+Ce^{-ax}$, 这里 C 是任意常数.

对 $(\frac{d^2}{dx^2}+a^2)$：

首先用 (b) 的方法给出一个基本解, 考虑初值问题

$$(\frac{d^2}{dx^2}+a^2)f=0,\quad f(0)=0,f'(0)=1$$

解之得 $f(x)=\frac{1}{a}\sin ax$, 从而函数 $E(x)=H(x)f(x)=\frac{1}{a}H(x)\sin ax$ 是 $(\frac{d^2}{dx^2}+a^2)$ 的一个基本解.

再根据 (a) 的方法给出基本解系, 知 $(\frac{d^2}{dx^2}+a^2)f=0$ 的通解为 $C_1\cos ax+C_2\sin ax$, 从而该算子的基本解系为 $\frac{1}{a}H(x)\sin ax+C_1\cos ax+C_2\sin ax$, 其中 C_1,C_2 是任意常数.

对 $\frac{d^m}{dx^m}$：

首先用 (b) 的方法给出一个基本解, 考虑初值问题

$$\frac{d^m}{dx^m}f=0,\quad f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-2)}(0)=0,f^{(m-1)}(0)=1$$

解之得

$$f(x)=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

从而函数 $E(x)=H(x)f(x)=\frac{H(x)}{(m-1)!}x^{m-1}$ 是 $\frac{d^m}{dx^m}$ 的一个基本解.

再根据 (a) 的方法给出基本解系, 知 $\frac{d^m}{dx^m}f=0$ 的通解为 $\sum\limits_{i=0}^{m-1}C_ix^i$, 从而该算子的基本解系为 $\frac{H(x)}{(m-1)!}x^{m-1}+\sum\limits_{i=0}^{m-1}C_ix^i$, 其中 $C_i(i=0,\cdots,m-1)$ 是任意常数.

对 $(\frac{d}{dx}+a)^m$：

首先用 (b) 的方法给出一个基本解, 考虑初值问题

$$(\frac{d}{dx}+a)^mf=\sum_{i=0}^{m}C_m^ia^{m-i}f^{(m-i)}=0,\quad f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-2)}(0)=0,f^{(m-1)}(0)=1$$

解之得

$$f=\frac{1}{(m-1)!}e^{-ax}x^{m-1}$$

从而函数 $E(x)=\frac{H(x)}{(m-1)!}e^{-ax}x^{m-1}$ 是 $(\frac{d}{dx}+a)^m$ 的一个基本解.

再根据 (a) 的方法给出基本解系, 知 $(\frac{d}{dx}+a)^mf=0$ 的通解为 $e^{-ax}\sum\limits_{i=0}^{m-1}C_ix^i$, 从而该算子的基本解系为 $\frac{H(x)}{(m-1)!}x^{m-1}+e^{-ax}\sum\limits_{i=0}^{m-1}C_ix^i$, 其中 $C_i(i=0,\cdots,m-1)$ 是任意常数.

(d) 利用得到的结果和卷积, 求以下方程的解：

$$\frac{d^m u}{dx^m} = f; (\frac{d}{dx} + a)^m u = f, \quad f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

解

记两方程的解分别为 u_1, u_2, 对应 (c) 中的基本解分别为 E_1, E_2, 知：

$$\frac{d^m}{dx^m} u = f \Rightarrow u_1(x) = (f * E_1)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x-t)}{(m-1)!} t^{m-1} dt$$
$$(\frac{d}{dx} + a)^m u = f \Rightarrow u_2(x) = (f * E_2)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x-t)}{(m-1)!} e^{-at} t^{m-1} dt$$

10 月 17 日作业

1.

(a) 证明：对任何集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ 和任何 $\varepsilon > 0$, 可以构造函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 同时满足下面三个条件：

1. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n (0 \leq f(\boldsymbol{x}) \leq 1)$;
2. $\forall \boldsymbol{x} \in M (f(\boldsymbol{x}) = 1)$;
3. $\mathrm{supp} f \subset M_\varepsilon$

其中 M_ε 是集合 M 的 $\varepsilon-$ 邻域.

证明

考虑用高维的 Weierstrass 逼近定理来证明该命题, 为此抄录第四版 p429 T4 并尝试证明：

习题利用卷积证明下面的 Weierstrass 逼近定理的变体.

(a) 任何一个在 n 维紧区间 $\boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ 能够在 $\boldsymbol{I}$ 上用 n 个变量的代数多项式一致逼近.

证明

首先, 考虑函数序列

$$\Delta_n(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{(1-\boldsymbol{x}^2)^n}{\int\limits_{\|\boldsymbol{x}\|<1} (1-\boldsymbol{x}^2)^n d\boldsymbol{x}}, & \| \boldsymbol{x} \| \leq 1 \\ 0, & \| \boldsymbol{x} \| > 1 \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)', \| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x^i)^2}, d\boldsymbol{x} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. 要验证这个序列是 $\delta-$ 型的, 即验证如下三条性质：

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n(\boldsymbol{x}) \geq 0$, 这是显然的.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_n(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1$, 这是显然的.
3. $\forall \varepsilon \in (0,1), \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{B(0;\varepsilon)} \Delta_n(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1$. 这是因为对任意的 $\varepsilon \in (0,1]$, 考虑积分：

$$I_1 := \int\limits_{B(0;1)\setminus B(0;\varepsilon)} (1-\boldsymbol{x}^2)^n d\boldsymbol{x}$$

作 n 维球坐标换元：

$$\begin{cases}x_1 = r\cos\theta_1\\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2\\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\ \vdots\\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\end{cases}$$

其中 $\theta_i \in [0,\pi](i = 1,\cdots,n-2), \theta_{n-1} \in [0,2\pi), r > 0$, 知该微分同胚对应的 Jacobi 式为：

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2} =: J(r,\boldsymbol{\theta})$$

这里记 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}), d\boldsymbol{\theta} = d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}, S(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{r^{n-1}}J(r,\boldsymbol{\theta})$. 进而对 I 有：

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\limits_{[\varepsilon,1)\times[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi)} J(r,\boldsymbol{\theta})(1-r^2)^n dr d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}\\ &= \int_\varepsilon^1 r^{n-1}(1-r^2)^n dr \int\limits_{[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi)} S(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}\\ &\le M(n)\int_\varepsilon^1 r^{n-1}(1-r^2)^n dr\end{aligned}$$

这里 $M(n)$ 是仅关于 n 的正数, 考察最后的被积函数 $f(r) = r^{n-1}(1-r^2)^n$ 在 $[\varepsilon,1)$ 上的单调性, 验证如下：

$$f'(r) = r^{n-2}(1-r^2)^{n-1}(n-1+(1-3n)r^2), \quad \varepsilon \le r < 1$$

这其中 $1-r^2 < 0, n-1+(1-3n)r^2 < 0$, 故 $f'(r)$ 与 $(-1)^n$ 同号, 特别地, 其在 $[\varepsilon,1)$ 上必单调, 进而有：

$$\begin{aligned}M(n)\int_\varepsilon^1 f(r)dr &\le M(n)\int_\varepsilon^1 \max\{f(\varepsilon),f(1)\}dr \le M(n)\max\{\int_\varepsilon^1 \varepsilon^{n-1}(1-\varepsilon^2)^n dr, 0\}\\ &= M(n)\max\{\varepsilon^{n-1}(1-\varepsilon^2)^n(1-\varepsilon),0\} \to 0, \quad \varepsilon \to 0\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}I_2 &:= \int\limits_{B(0;1)} (1-\boldsymbol{x}^2)^n d\boldsymbol{x} = \int\limits_{(0,1)\times[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi)} J(r,\boldsymbol{\theta})(1-r^2)^n dr d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}\\ &= \int_0^1 r^{n-1}(1-r^2)^n dr \int\limits_{[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi)} S(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} \ge m(n)\int_0^1 r^{n-1}(1-r^2)^n dr\\ &= m(n)\int_0^1 r^{n-1}(1-r)^n dr \ge m(n)\int_0^1 r^n(1-r)^n dr = m(n)\int_0^1 (r-r^2)^n dr\\ &\ge m(n)\int_0^{\frac{1}{2}} (r-r^2)^n dr \ge m(n)\int_0^{\frac{1}{2}} (2r^2-r^2)^n dr = \frac{m(n)}{(2n+1)2^{2n+1}}\end{aligned}$$

由此推出该性质成立.

综上, 这里给出的序列 $\{\Delta_n(\boldsymbol{x})\}$ 确为 $\delta-$ 型.

其次, 注意到课本上定义 5 中的 G 并没有限定为 $\mathbb{R}$, 从而该定义可以套用至高维, 于是形同命题 5 有如下命题：

命题 14.5.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 是有界函数, 而 $\{\Delta_\alpha|\alpha\in A\}$ 当 $\alpha\to\omega$ 时是 $\delta-$ 型函数族, 如果对任何 $\alpha\in A$, 卷积 $f*\Delta_\alpha$ 存在且函数 f 在集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上一致连续, 那么在 E 上:

$$(f*\Delta_\alpha)(\boldsymbol{x})\rightrightarrows f(\boldsymbol{x}),\quad \alpha\to\omega$$

证明

设在 $\mathbb{R}^n$ 上, $|f(\boldsymbol{x})|\le M$, 对给定的 $\varepsilon>0$, 根据一致连续的定义挑选 $\rho>0$ 且用 $B(0;\rho)$ 表示点 0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\rho-$ 邻域.

考虑卷积的对称性, 得到以下对所有 $\boldsymbol{x}\in E$ 同时成立的估计:

$$\begin{aligned}
&|(f*\Delta_\alpha)(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\\
=&|\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})|=|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}))\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}|\\
\le&\int\limits_{B(0;\rho)}|f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})|\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}+\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0;\rho)}|f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})|\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\\
<&\varepsilon\int\limits_{B(0;\rho)}\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}+2M\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0;\rho)}\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\\
\le&\varepsilon+2M\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0;\rho)}\Delta_\alpha(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

当 $\alpha\to\omega$ 时, 最后的积分趋于 0, 于是从某个时刻开始, 对所有的 $\boldsymbol{x}\in E$, 有不等式

$$|(f*\Delta_\alpha)(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|<2\varepsilon$$

这就完成了上述命题的证明.

最后, 证明高维的 Weierstrass 逼近定理 (即该题的命题):

证明

不妨就设 $\boldsymbol{I}=[a,b]^n$, 其中 $0<a<b<1$. 将给定的函数 $f\in C(\boldsymbol{I})$ 按下面的方式延拓成 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 F: 当 $x\in\mathbb{R}^n\setminus(0,1)^n$ 时, 令 $F(\boldsymbol{x})=0$, 而在区域 $[0,1]^n\setminus\boldsymbol{I}^\circ$ 上, 则将 $f(\partial\boldsymbol{I})$ 和 $\|[0,1]^n$ 线性连结起来. 现在如果取上面已经给出的 $\delta-$ 型函数序列 Δ_n, 那么由命题 1 就能推出, 在 $\boldsymbol{I}$ 上, 当 $n\to\infty$ 时, $F*\Delta_n\rightrightarrows f=F|_{\boldsymbol{I}}$. 而当 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I}\subset[0,1]^n$ 时有

$$\begin{aligned}
F*\Delta_n(\boldsymbol{x}):=&\int\limits_{\mathbb{R}^n}F(\boldsymbol{y})\Delta_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\int\limits_{[0,1]^n}F(\boldsymbol{y})\Delta_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\\
=&\int\limits_{[0,1]^n}F(\boldsymbol{y})p_n(1-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2)^nd\boldsymbol{y}=\int\limits_{[0,1]^n}F(\boldsymbol{y})(\sum_{k=0}^{2n}a_k(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}^k)d\boldsymbol{y}\\
=&\sum_{k=0}^{2n}(\int\limits_{[0,1]^n}F(\boldsymbol{y})a_k(\boldsymbol{y}d\boldsymbol{y}))\boldsymbol{x}^k
\end{aligned}$$

最后的表达式是关于 $\boldsymbol{x}$ 的多项式 $P_{2n}(\boldsymbol{x})$, 进而命题即证.

至此, 第 4 题的 (b),(c),(d) 问都可以作为上述命题的推论给出, 于是可以通过以下方式解决该题中 M 有界的情形:

令

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in M\\ 0, & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus M_\varepsilon\end{cases}$$

而对于在 $M_\varepsilon \backslash M$ 上的点, 则将它们与 0 线性连结起来. 于是 $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 进而由 Weierstrass 逼近定理知存在一致收敛到 f 的多项式族 P_f^n. 取 $\lim\limits_{n\to\infty} P_f^n$ 即为欲求.

注

在这里其实已经发现了上面的思路是不对的, 但是删掉又觉得太浪费了, 于是就留存下来, 反正这个文件也不是最后上交的 ww.

至于为什么这个思路不对, 原因有下:

1. 这个思路仅仅适用于 M 有界的情况, 虽说无可厚非, 也可以用三角多项式 (也即思路中的 (e) 问) 来补救, 但终究还是有所限制.
2. 核心错误在于这样的逼近并不能保证 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. 这两者的区别在于题目要求的函数是给定函数满足无穷次可微, 而这个逼近能做到的是任给有限次可微, 给出满足条件的函数, 两者的差别正如连续和一致连续的差别, 这个逼近并不是题目的充分条件.

下面是遵循前面的题目给出的解答:

证明

考虑下面的函数:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} a \cdot \exp(\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1}), & \|\boldsymbol{x}\| < 1, \\ 0, & \|\boldsymbol{x}\| \geq 1 \end{cases}$$

其中常数 a 选得使 $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1$, 下面证明当 $\alpha \to 0^+$ 时, 函数族 $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\alpha}\varphi(\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $C_0^{(\infty)}$ 类 $\delta-$ 型函数族:

1. $\forall \alpha > 0 (\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) \geq 0)$, 这是显然的.
2. $\forall \alpha > 0 (\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1)$, 这是因为:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha}\varphi(\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha}) d\boldsymbol{x} = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{B(0;\alpha)} a \cdot \exp(\frac{1}{\| \frac{\boldsymbol{x}}{\alpha} \|^2 - 1}) d\boldsymbol{x} \\ &= \int\limits_{B(0;\alpha)} a \cdot \exp(\frac{1}{\| \frac{\boldsymbol{x}}{\alpha} \|^2 - 1}) d\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha} = \int\limits_{B(0;1)} a \cdot \exp(\frac{1}{\| \boldsymbol{t} \|^2 - 1}) d\boldsymbol{t} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} a \cdot \exp(\frac{1}{\| \boldsymbol{t} \|^2 - 1}) d\boldsymbol{t} = 1 \end{aligned}$$

3. $\forall \varepsilon \in (0, 1] (\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \int\limits_{B(0;\varepsilon)} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1)$, 这是因为考虑 n 维球坐标换元有:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

其中 $\theta_i \in [0, \pi] (i = 1, \cdots, n-2), \theta_{n-1} \in [0, 2\pi), r > 0$, 知该微分同胚对应的 Jacobi 式为:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} =: J(r, \boldsymbol{\theta})$$

这里记 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}), d\boldsymbol{\theta}=d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}, S(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{r^{n-1}}J(r,\boldsymbol{\theta})$. 从而有:

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B(0;\varepsilon)} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int\limits_{B(0;\alpha)\backslash B(0;\varepsilon)} \frac{1}{\alpha}\cdot a\cdot\exp\Big(\frac{1}{\|\frac{\boldsymbol{x}}{a}\|^2-1}\Big)d\boldsymbol{x} \\
&= \int\limits_{B(0;\alpha)\backslash B(0;\varepsilon)} a\cdot\exp\Big(\frac{1}{\|\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha}\|^2-1}\Big)d\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha} = \int\limits_{B(0;1)\backslash B(0;\frac{\varepsilon}{\alpha})} a\cdot\exp\Big(\frac{1}{\|\boldsymbol{t}\|^2-1}\Big)d\boldsymbol{t}
\end{aligned}$$

当 $\alpha<\varepsilon$, 上右式中即有 $B(0;1)\backslash B(0;\frac{\varepsilon}{\alpha})=\oslash$, 进而上右式积分在 $\varepsilon>\alpha\to0^+$ 时为 0. 又记 $I_2=\int\limits_{B(0;\varepsilon)}\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$, 考虑到:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_{B(0;\varepsilon)} \frac{1}{\alpha}\cdot a\cdot\exp\Big(\frac{1}{\|\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha}\|^2-1}\Big)d\boldsymbol{x} = \int\limits_{B(0;\varepsilon)} a\cdot\exp\Big(\frac{1}{\|\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha}\|^2-1}\Big)d\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha} \\
&= \int\limits_{B(0;\frac{\varepsilon}{\alpha})} a\cdot\exp\Big(\frac{1}{\|\boldsymbol{t}\|^2-1}\Big)d\boldsymbol{t} = \int\limits_{[0,\frac{\varepsilon}{\alpha}]\times[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi)} a\cdot\exp\Big(\frac{1}{r^2-1}\Big)\cdot J(r,\boldsymbol{\theta})drd\boldsymbol{\theta} \\
&= a\int_0^{\frac{\varepsilon}{\alpha}} r^{n-1}\cdot\exp\Big(\frac{1}{r^2-1}\Big)dr\int_{[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi)} S(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} \\
&\geq aM(n)\int_0^{\frac{\varepsilon}{\alpha}} r^{n-1}\cdot\exp\Big(\frac{1}{(\frac{\varepsilon}{\alpha})^2-1}\Big)dr \geq aM(n)\frac{1}{[\frac{n}{2}]!}\Big|\frac{1}{(\frac{\varepsilon}{\alpha})^2-1}\Big|^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{n}(r^n|_0^{\frac{\varepsilon}{\alpha}}) \\
&\sim p(n)>0, \quad \varepsilon>\alpha\to0^+
\end{aligned}$$

其中 $M(n)=\int\limits_{[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi)} S(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}$ 是仅和 n 有关的正数, 上面过程中的倒数第二行第二个不等号基于 Taylor 展开式, 而 $p(n)$ 同样是仅和 n 有关的正数. 结合已证明的性质 2, 此条性质即证.

容易验证 $\forall\alpha>0(\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})\in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n))$, 从而函数族 $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\alpha}\varphi(\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $C_0^{(\infty)}$ 类 $\delta-$ 型函数族. 再取函数

$$\chi_M(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in M\\ 0, & \boldsymbol{x}\notin M\end{cases}$$

下面证明: $f(\boldsymbol{x})=(\chi_M*\varphi_\alpha)(\boldsymbol{x})$ 满足题意:

1. $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n(0\leq f(\boldsymbol{x})\leq1)$, 这一条是显然的.

2. $\forall\boldsymbol{x}\in M(f(\boldsymbol{x})=1)$, 这是因为

$$f(\boldsymbol{x})=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\chi_M(\boldsymbol{y})\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\int\limits_M\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=1$$

3. $\mathrm{supp}f\subset M_\varepsilon$, 这是因为既然 ε 已经给定, 取 $\alpha<\varepsilon$, 则 $\mathrm{supp}\varphi_\alpha\subset M_\varepsilon$, 自然有 $\mathrm{supp}f\subset\mathrm{supp}\varphi\subset M_\varepsilon$.

4. $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, 这是因为 $\forall m\in\mathbb{N}, f^{(m)}=(\chi_M*\varphi_\alpha)^{(m)}=(\chi_M*\varphi_\alpha^{(m)})$, 而后者存在.

综上, f 即为欲求.

(b) 证明: 对 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭集 M, 存在非负函数 $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, 使得 $(f(\boldsymbol{x})=0)\Leftrightarrow(\boldsymbol{x}\in M)$.

证明

将 (a) 中的函数记作 $f_{\alpha,M}$, 对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意闭集 M, 首先取开集 $\mathbb{R}^n\backslash M$, 再另取集合 N 满足 $N_\varepsilon=\mathbb{R}^n\backslash M$, 这里 ε 是给定的. 取 $f_{\varepsilon,N}$ 即为欲求.

14.6 第六次作业

10 月 21 日作业

1. 求出半径为 r 的 n 维球体的最大内接 n 维正方体的边长.

解

注意到 $(\pm\frac{r}{\sqrt{n}},\pm\frac{r}{\sqrt{n}},\cdots,\pm\frac{r}{\sqrt{n}})$ 在球上, 且这 2^n 个点围成一正方体, 即球的最大内接 n 维正方体, 进而其边长为 $\frac{2r}{\sqrt{n}}$.

2. 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 证明当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^n}=0$.

证明

知

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{x}}{\parallel\boldsymbol{x}\parallel^n}&=\nabla\cdot(\frac{x^1}{(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^{\frac{n}{2}}},\cdots,\frac{x^n}{(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^{\frac{n}{2}}})=\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{x^k}{(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^{\frac{n}{2}}}\\&=\sum_{k=1}^n\frac{(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^{\frac{n}{2}}-\frac{n}{2}\cdot2x^k\cdot x^k\cdot(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^n}=\sum_{k=1}^n\frac{(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^{\frac{n}{2}}-n(x^k)^2(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^n}\\&=\frac{n(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^{\frac{n}{2}}-n(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(\sum\limits_{i=1}^n(x^i)^2)^n}=0\end{aligned}$$

3.

(a) 采用例 11 中的记号并利用公式 (12)：

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\}+(\lceil f)_S\cos\alpha_i\delta_S$$

验证：如果 f 在 $\overline{\mathbb{R}^n\backslash S}$ 上二阶可微且一阶连续可微, 那么

$$\frac{\partial^2f}{\partial x^i\partial x^j}=\{\frac{\partial^2f}{\partial x^i\partial x^j}\}+\frac{\partial}{\partial x^j}((\lceil f)_S\cos\alpha_i\delta_S)+(\lceil\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\})_S\cos\alpha_j\delta_S$$

证明

不失一般性, 取 $i=2,j=1$, 知：

$$\begin{aligned}\langle\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^1}f,\varphi\rangle&=-\langle\frac{\partial}{\partial x^1}f,\frac{\partial}{\partial x^2}\varphi\rangle=-\langle\{\frac{\partial f}{\partial x^1}\}+(\lceil f)_S\cos\alpha_1\delta_S,\frac{\partial}{\partial x^2}\varphi\rangle\\&=-\langle\{\frac{\partial f}{\partial x^1}\},\frac{\partial}{\partial x^2}\varphi\rangle-\langle(\lceil f)_S\cos\alpha_1\delta_S,\frac{\partial}{\partial x^2}\varphi\rangle\\&=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial f}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^2})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}-\int\limits_S((\lceil f)_S\cos\alpha_1\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^2})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\&=-\int\limits_{x^1x^3\cdots x^n}\cdots\int dx^1dx^3\cdots dx^n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x^1}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}(\boldsymbol{x})dx^2-\int\limits_S((\lceil f)_S\cos\alpha_1\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^2})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\&=\int\limits_{x^1x^3\cdots x^n}\cdots\int dx^1dx^3\cdots dx^n((\lceil\frac{\partial f}{\partial x^1})\varphi+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^1}f\cdot\varphi dx^2)-\int\limits_S((\lceil f)_S\cos\alpha_1\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^2})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\&=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2f}{\partial x^2\partial x^1}\varphi d\boldsymbol{x}+\int\limits_{x^1x^3\cdots x^n}\cdots\int(\lceil\frac{\partial f}{\partial x^1})\varphi dx^1dx^3\cdots dx^n-\int\limits_S((\lceil f)_S\cos\alpha_1\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^2})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} \varphi d\boldsymbol{x} + \frac{\partial}{\partial x^1} \int\limits_{x^1 x^3 \cdots x^n} \cdots \int ([f)\varphi dx^1 dx^3 \cdots dx^n - \int\limits_S (([f)_S \cos\alpha_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^2})(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} \varphi d\boldsymbol{x} + \frac{\partial}{\partial x^1} \int\limits_S ([f)\varphi \cos\alpha_2 d\sigma - \int\limits_{x^2 \cdots x^n} \cdots \int ([f) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} dx^2 \cdots dx^n \\
&:= I_1 + I_2 - \int\limits_{x^3 \cdots x^n} \cdots \int dx^3 \cdots dx^n \int_{-\infty}^{+\infty} ([f) \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} dx^2 \\
&= I_1 + I_2 + \int\limits_{x^3 \cdots x^n} \cdots \int dx^3 \cdots dx^n ([([f)\varphi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x^2}([f)\varphi dx^2) \\
&= I_1 + I_2 + \int\limits_{x^2 \cdots x^n} \cdots \int \frac{\partial([f)}{\partial x^2} \varphi dx^2 \cdots dx^n \\
&= I_1 + I_2 + \int\limits_S (\frac{\partial([f)}{\partial x^2}) \cos\alpha_1 \varphi d\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

在最后的式子中, I_1 对应于 $\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\}$, I_2 对应于 $\frac{\partial}{\partial x^j}(([f)_S \cos\alpha_i \delta_S)$, 而最后一项对应于 $([\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\})_S \cos\alpha_j \delta_S$, 命题即证.

(b) 试证：和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}([\frac{\partial f}{\partial x^i})_S \cos\alpha_i$ 等于函数 f 在相应的点 $\boldsymbol{x} \in S$ 的法向导数的跃度 $([\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}})_S$, 并且这个跃度不依赖法线方向的选取, 等于函数 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 的曲面 S 两侧法向导数的和 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_1} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_2}(\boldsymbol{x})$.

(c) 试验证关系式

$$\Delta f = \{\Delta f\} + ([\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}})_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(([f)_S \delta_S)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是法向导数 (即 $\langle \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}} \rangle := -\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} \rangle$), 而 $([f)_S$ 是函数 f 在点 $\boldsymbol{x} \in S$ 沿法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的跃度.

(d) 试利用得到的 Δf 的表达式, 证明古典的 Green 公式

$$\int\limits_G (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f) d\boldsymbol{x} = \int\limits_S (f\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} - \varphi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}) d\sigma$$

其中 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有限区域, 它的边界 S 是分片光滑曲面；$f, \varphi \in C^{(1)}(G) \cap C^{(2)}(G)$, 且左边的积分至少在反常积分意义下是存在的.

(e) 试证：如果 $\delta-$ 函数对应于放置在空间 $\mathbb{R}^n$ 的坐标原点 O 处的单位电荷, 而函数 $-\frac{\partial \delta}{\partial x^1}$ 对应于位于原点 O 沿 x^1 轴正向电偶极矩为 $+1$ 电偶极子, 而函数 $\nu(\boldsymbol{x})\delta_S$ 是曲面 S 上面密度为 $\mu(\boldsymbol{x})$ 的分布电荷的单层分布, 那么, 所谓双层分布的函数 $-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu(\boldsymbol{x})\delta_S)$ 则对应着曲面 S 上密度为 $\nu(\boldsymbol{x})$ 沿法向 $\boldsymbol{n}$ 的电偶极子的分布.

(f) 假定 Green 公式中的 $\varphi = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}$, 试利用例 14 的结果证明：任何一个区域 G 上的 $C^{(1)}(\overline{G})$ 类调和函数 f 能表成区域 G 的边界 S 上的单层和双层分布的势和.

10 月 24 日作业

1. 验证当 $t > 0$ 时, 对函数

$$E(x,t) = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2 t}}$$

有

$$(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta) E = 0$$

证明

当 $t>0$ 时, 知

$$E(x,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2t}}$$

有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}E&=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\cdot\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2t^2}\cdot e^{-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2t}}-\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^n}\cdot\frac{n}{2}\cdot t^{-\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2t}}\\&=e^{-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2t}}(\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2(2a\sqrt{\pi})^nt^{\frac{n}{2}+2}}-\frac{n}{2(2a\sqrt{\pi})^nt^{\frac{n}{2}+1}})\\\frac{\partial}{\partial x^i}E&=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\frac{\partial}{\partial x^i}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}=-\frac{x^i}{(2a\sqrt{\pi t})^n2a^2t}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}\\\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}E&=\frac{(x^i)^2}{(2a\sqrt{\pi t})^n4a^4t^2}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}-\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n2a^2t}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}\\\Delta E&=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}E=\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{(2a\sqrt{\pi t})^n4a^4t^2}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}-\frac{n}{(2a\sqrt{\pi t})^n2a^2t}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}\\a^2\Delta E&=\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{(2a\sqrt{\pi t})^n4a^2t^2}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}-\frac{n}{(2a\sqrt{\pi t})^n2t}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}\\&=\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2(2a\sqrt{\pi})^nt^{\frac{n}{2}+2}}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}-\frac{n}{2(2a\sqrt{\pi})^nt^{\frac{n}{2}+1}}e^{-\frac{\sum_{k=1}^n(x^k)^2}{4a^2t}}\end{aligned}$$

从而便有 $(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta)E=0$.

2. 验证

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^td\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

是方程

$$\Box_au:=(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})u=f$$

的解.

证明

记 $G(x,t,\tau)=\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$, 知：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}G(x,t,\tau)&=af(x+a(t-\tau),\tau)+af(x-a(t-\tau),\tau)\\\frac{\partial}{\partial x}G(x,t,\tau)&=f(x+a(t-\tau),\tau)-f(x-a(t-\tau),\tau)\end{aligned}$$

进而对 $u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^tG(x,t,\tau)d\tau$, 有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u&=\frac{1}{2a}(G(x,t,t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}G(x,t,\tau)d\tau)\\&=\frac{1}{2a}\int_0^t(af(x+a(t-\tau),\tau)+af(x-a(t-\tau),\tau))d\tau\\&=\frac{1}{2}\int_0^t(f(x+a(t-\tau),\tau)+f(x-a(t-\tau),\tau))d\tau\\\frac{\partial}{\partial t^2}u&=\frac{1}{2}(f(x,t)+f(x,t))=f(x,t)\\\frac{\partial}{\partial x}u&=\frac{1}{2a}\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}G(x,t,\tau)d\tau\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^t (f(x+a(t-\tau),\tau) - f(x-a(t-\tau),\tau))d\tau$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0$$

从而可知 $\Box_a u = f(x,t)$, 命题即证.

3. 试验证以下广义函数理论意义下的等式

(a) $\Delta E = \delta$, 如果

$$E(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{x}|, & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \\ -\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-2)} \parallel \boldsymbol{x} \parallel^{-(n-2)}, & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, n>2 \end{cases}$$

证明

当 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$, 知

$$E(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4\pi}\ln((x^1)^2+(x^2)^2)$$

注意到

$$\Delta E = div\, grad\, E = \frac{1}{2\pi}\, div\, \frac{\boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^2}$$

从而有:

$$\begin{aligned}\langle \Delta E, \varphi\rangle &= \langle \frac{1}{2\pi}\, div\, \frac{\boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^2}, \varphi\rangle = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} (\frac{\boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^2}\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{\varepsilon<\|\boldsymbol{x}\|<\frac{1}{\varepsilon}} (\frac{\boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^2}\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{\varepsilon<\|\boldsymbol{x}\|<\frac{1}{\varepsilon}} div(\frac{\boldsymbol{x}\varphi(\boldsymbol{x})}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^2})d\boldsymbol{x} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=\varepsilon} \varphi(\boldsymbol{x})\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^2}d\sigma \\ &= \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle\end{aligned}$$

而当 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, n>2$, 知

$$\Delta E = div\, grad\, E = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\, div\, \frac{\boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^{-n}}$$

从而有:

$$\begin{aligned}\langle \Delta E, \varphi\rangle &= \langle \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\, div \parallel \boldsymbol{x} \parallel^{-n}, \varphi\rangle = -\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\frac{\boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^n}\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \\ &= -\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{\varepsilon<\|\boldsymbol{x}\|<\frac{1}{\varepsilon}} (\frac{\boldsymbol{x}}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^n}\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \\ &= -\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{\varepsilon<\|\boldsymbol{x}\|<\frac{1}{\varepsilon}} div(\frac{\boldsymbol{x}\varphi(\boldsymbol{x})}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^n})d\boldsymbol{x} \\ &= -\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=\varepsilon} \varphi(\boldsymbol{x})\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel^n}d\sigma \\ &= \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle\end{aligned}$$

命题即证.

(b) $(\Delta+k^2)E=\delta$, 如果

$$E(\boldsymbol{x})=-\frac{e^{ik\|\boldsymbol{x}\|}}{4\pi\parallel\boldsymbol{x}\parallel}\quad or\quad E(\boldsymbol{x})=-\frac{e^{-ik\|\boldsymbol{x}\|}}{4\pi\parallel\boldsymbol{x}\parallel},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

(c) $\square_a E=\delta$, 其中 $\square_a=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2[(\frac{\partial}{\partial x^1})^2+\cdots+(\frac{\partial}{\partial x^n})^2]$, 而

$$E(\boldsymbol{x})=\frac{H(at-\parallel\boldsymbol{x}\parallel)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-\parallel\boldsymbol{x}\parallel^2}},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2,t\in\mathbb{R}$$

或

$$E(\boldsymbol{x})=\frac{H(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}\equiv\frac{H(t)}{2\pi a}\delta(a^2t^2-\parallel\boldsymbol{x}\parallel^2),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,t\in\mathbb{R}$$

其中 $H(t)$ 是 Heaviside 函数, $S_{at}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3|\parallel\boldsymbol{x}\parallel=at\}$ 是球面, $a>0$.

(d) 利用上面的结果, 把具微分算子 A 的方程 $Au=f$ 的解 u 表成卷积 $f*E$ 的形式. 例如, 假定函数 f 连续, 试验证所得到的含参变量积分确实满足方程 $Au=f$.

10 月 26 日作业

1. 最小二乘法. 我们用实验来研究量 y 对量 $x_1,\cdots,x_n$ 的依赖关系 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$. 实验结果列于下表

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	y
a_1^1	a_2^1	$\cdots$	a_n^1	b^1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_1^m	a_2^m	$\cdots$	a_n^m	b^m

在它的行里指出了参数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一组值 $(a_1^i,a_2^i,\cdots,a_n^i)$ 和与之相应的 y 的值 b^i, 它是用具有一定精确度的仪器测量得到的. 我们要根据这些实验数据求出一个便于计算的经验公式 $y=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i x_i$, 这个未知的线性函数的系数 $\alpha+1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 应当选得使按经验公式所得的结果与实验中所得的结果的均方差 $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^m(b^k-\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i a_i^k)^2}$ 达到最小.

试把这个问题解释成用向量 $(a_i^1,\cdots,a_i^m),i=1,\cdots,n$ 的线性组合最佳逼近向量 $(b^1,\cdots,b^m)$ 的问题, 并证明问题能归结为求解形如线性方程组

$$\begin{cases}\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1\rangle\alpha_1+\cdots+\langle\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_1\rangle\alpha_n=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1\rangle,\\ \quad\vdots\\ \langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_n\rangle\alpha_1+\cdots+\langle\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_n\rangle\alpha_n=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_n\rangle,\end{cases}$$

的问题.

解

注意到 $\{\boldsymbol{x}_i=(a_i^1,\cdots,a_i^m)^T,i=1,\cdots,n\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一组向量. 为简便起见, 不妨先假设这 n 个向量无关. 首先利用 Gram-Schmidt 方法将它化成正交基：

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{x}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}_i=\boldsymbol{x}_i-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\langle\boldsymbol{x}_i,\tilde{\boldsymbol{x}}_k\rangle}{\langle\tilde{\boldsymbol{x}}_k,\tilde{\boldsymbol{x}}_k\rangle}\boldsymbol{x}_k,\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}_n=\boldsymbol{x}_n-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\langle\boldsymbol{x}_n,\tilde{\boldsymbol{x}}_k\rangle}{\langle\tilde{\boldsymbol{x}}_k,\tilde{\boldsymbol{x}}_k\rangle}\boldsymbol{x}_k$$

再将上述基规范化：

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1=\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}_1}{\parallel\tilde{\boldsymbol{x}}_1\parallel},\cdots,\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i=\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}_i}{\parallel\tilde{\boldsymbol{x}}_i\parallel},\cdots,\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_n=\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}_n}{\parallel\tilde{\boldsymbol{x}}_n\parallel}$$

最后, 求出 $\boldsymbol{y} = (b^1, \cdots, b^m)^T$ 在规范正交基 $\{\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i, i = 1, \cdots, n\}$ 下的 Fourier 展式：

$$\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{y}, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1 \rangle \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{y}, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i \rangle \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i + \cdots + \langle \boldsymbol{y}, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_n \rangle \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_n$$

为了得到一般规律, 假如 $\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, \cdots, n\}$ 已经是规范正交基, 将上式中的 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i$ 换回 $\boldsymbol{x}_i$, 则可知 $\alpha_i = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle$, 进一步在上式两端分别与 $\boldsymbol{x}_i$ 作内积有：

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle \alpha_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle \alpha_i + \cdots + \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle \alpha_n = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1 \rangle \\ \quad \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_1 \rangle \alpha_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle \alpha_i + \cdots + \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_n \rangle \alpha_n = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle \\ \quad \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_1 \rangle \alpha_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_i \rangle \alpha_i + \cdots + \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \rangle \alpha_n = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{cases}$$

记上述的系数矩阵为 G, 根据 Claim 法则即得：

$$\alpha_1 = \frac{1}{\det G} \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$\alpha_i = \frac{1}{\det G} \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\det G} \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix}$$

即为欲求.

现在回到一般情况, 根据 Gram-Schmidt 方法与规范化方法, 记 $\{\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i, i = 1, \cdots, n\}$ 与 $\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, \cdots, n\}$ 之间存在用矩阵 A 表示的线性同构, 即：

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

记基 $\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, \cdots, n\}$ 对应的 Gram 矩阵为 $G_{\boldsymbol{x}}$, $\{\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i, i = 1, \cdots, n\}$ 对应的 Gram 矩阵为 $G_{\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}}$, 可知

$$G_{\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}} = A G_{\boldsymbol{x}} A^T$$

又知对 $\alpha_i, i = 1, \cdots, n$ 所对应的行列式：

$$\begin{vmatrix} \langle \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{y}, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i \rangle & \cdots & \langle \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{y}, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i \rangle & \cdots & \langle \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_n \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{y}, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_i \rangle & \cdots & \langle \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_n, \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_n \rangle \end{vmatrix} = \det A \cdot \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix} \det A^T$$

故有：

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{\det A \cdot \det G_{\boldsymbol{x}} \cdot \det A^T} \det A \cdot \begin{vmatrix} \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix} \det A^T \\
&= \frac{1}{\det G_{\boldsymbol{x}}} \begin{vmatrix} \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix} \\
\alpha_i &= \frac{1}{\det A \cdot \det G_{\boldsymbol{x}} \cdot \det A^T} \det A \cdot \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix} \det A^T \\
&= \frac{1}{\det G_{\boldsymbol{x}}} \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix} \\
\alpha_n &= \frac{1}{\det A \cdot \det G_{\boldsymbol{x}} \cdot \det A^T} \det A \cdot \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix} \cdot \det A^T \\
&= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_n \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_i \rangle & \cdots & \langle A^{-1}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \rangle \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

即为欲求.

2.

(a) 设 $C[a,b]$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一切连续函数所构成的线性空间, 其中定义了在该区间上函数的一致收敛性度量, 而 $C_2[a,b]$ 还是这个线性空间, 但其中定义了在该区间上函数的均方差度量 (即 $d(f,g)=\sqrt{\int_a^b |f-g|^2(x)dx}$). 试证：函数在 $C[a,b]$ 中的收敛性蕴含它们在 $C_2[a,b]$ 中的收敛性, 但逆命题不成立, 而且空间 $C_2[a,b]$ 不完备, 这与空间 $C[a,b]$ 不同.

证明 (周二问：什么是一致收敛性度量？)

为证明 $C_2[a,b]$ 不完备, 简便起见就设 $[a,b]=[0,2]$. 取：

$$f=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\in(0,2]\end{cases},\quad f_n=\begin{cases}-\frac{1}{n}(x-\frac{1}{n})+1, & x\in[0,\frac{1}{n})\\ 0, & x\in[\frac{1}{n},1]\end{cases}$$

知 $f\notin C_2[a,b], f_n\in C_2[a,b]$, 且：

$$\sqrt{\int_0^2 |f-f_n|^2(x)dx}=\sqrt{\int_0^{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}(x-\frac{1}{n})-1)^2dx}=\sqrt{-\frac{2}{3n^5}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}}\to 0, n\to\infty$$

这说明在 $C_2[0,2]$ 中 $f_n\to f, n\to\infty$, 进而 $C_2[0,2]$ 不完备!

(b) 说明为什么函数系 $\{1,x,x^2,\cdots\}$ 线性无关且在 $C_2[a,b]$ 中完全, 但不是这个空间的基底.

证明

该函数系首先显然是线性无关的, 其次对任意的 $f\in C_2[a,b]$ 和任意的 $\varepsilon>0$, 根据 Weierstrass 逼近定理知存在代数多项式 $P(x)$ 使得 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon$, 进而

$$\| f-P \|:=\sqrt{\int_a^b |f-P|^2(x)dx}<\varepsilon\sqrt{b-a}$$

从而用向量组 $\{x^k,k=0,1,2,\cdots\}$ 中的函数的有限线性组合可在 $C_2[a,b]$ 的范数意义下任意精确地逼近函数 f, 也即函数系在 $C_2[a,b]$ 中完全.

但该函数系不是 $C_2[a,b]$ 的基, 为了叙述方便不妨取 $[a,b]=[-1,1]$. 首先证明如果级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$ 在 $C_2[-1,1]$ 中收敛, 那么其作为幂级数在 $(-1,1)$ 上逐点收敛. 这是因为根据级数收敛的必要条件, 当 $k\to\infty$ 时有 $\| \alpha_k x^k \|\to 0$. 又因为

$$\| \alpha_k x^k \|^2=\int_{-1}^1(\alpha_k x^k)^2x=\alpha_k^2\frac{2}{2k+1}$$

故对足够大的 k 有 $|\alpha_k|<\sqrt{2k+1}$, 进而幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$ 在 (-1,1) 上收敛.

现在用 φ 表示这个幂级数在 (-1,1) 上的和, 注意到在每个闭区间 $[c,d]\subset(-1,1)$ 上, 幂级数一致收敛于 $\varphi|_{[c,d]}$, 进而也在 $C_2[-1,1]$ 中收敛.

由此可得, 如果在闭区间 [-1,1] 上连续的函数 f 是这个级数在 $C_2[-1,1]$ 中收敛意义下的和, 则 f
和 φ 在 (-1,1) 上重合. 但 φ 是无穷次可微的, 从而若在 [-1,1] 上取不在 (-1,1) 上无穷可微的函数, 则这个函数就不能在 $C_2[-1,1]$ 中关于函数系 $\{x^k,k=0,1,\cdots\}$ 展成级数.

(c) 说明 Legendre 多项式为什么是 $C_2[-1,1]$ 的一个完全正交系, 且是该空间的基底.

证明

首先验证 Legendre 多项式是正交系, 采用

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

作为 Legendre 多项式的定义, 只需验证其与多项式 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 都正交即可, 因为 $P_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ 正是由这些多项式线性生成的. 为了方便, 不妨就记 $f(x) = (x^2-1)^n$, $\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$, 进而当 $k < n$ 时有：

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^k P_n(x)dx &= \int_{-1}^1 x^k \cdot \frac{1}{2^n n!} f^{(n)}(x)dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 x^k df^{(n-1)}(x) \\ &= \frac{1}{2^n n!} x^k f^{(n-1)}(x)|_{-1}^1 - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 kx^{k-1} f^{(n-1)}(x)dx \\ &= -\frac{1}{2^n n!} k \int_{-1}^1 x^{k-1} df^{(n-2)}(x) = \cdots = (-1)^{k-1}\frac{1}{2^n n!}k!\int_{-1}^1 x f^{(n-k+1)}(x)dx \\ &= (-1)^k \frac{1}{2^n n!} k! f^{(n-k)}(x)|_{-1}^1 = 0\end{aligned}$$

这其中每一次分部积分, 表示成跃度的那一项为 0 是因为 $f(x) = (x-1)^n(x+1)^n$, 由高等代数知识知 $f^{(k)}(x)(k < n)$ 表示式的那些项总含有 $(x+1)(x-1)$ 作为公因式, 从而 $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0$.

其次说明 Legendre 多项式是完全系, 这根据 Weierstrass 逼近定理即得.

最后说明 Legendre 多项式是 $C_2[-1,1]$ 的基. 给定 $f \in C_2[-1,1]$, 记

$$a_i = \frac{\langle f(x), P_i(x)\rangle}{\langle P_i(x), P_i(x)\rangle} =: \frac{1}{M_i}\int_{-1}^1 f(x)P_i(x)dx$$

即 a_i 是 $f \in C_2[-1,1]$ 在正交系 $\{P_i(x), i = 0, 1, \cdots\}$ 下的 Fourier 系数. 下面说明下面的 Fourier 级数即证命题：

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x)$$

(d) 求出 $\sin \pi x$ 在区间 $[-1,1]$ 按 Legendre 多项式系的 Fourier 展开的前四项.

解

首先注意到

$$\tilde{P}_0(x) \equiv 1, \tilde{P}_1(x) = x, \tilde{P}_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \tilde{P}_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

分别计算 Fourier 系数的分子有:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P_0(x)\sin\pi x dx &= \int_{-1}^1 \sin\pi x dx = 0 \\ \int_{-1}^1 P_1(x)\sin\pi x dx &= \int_{-1}^1 x\sin\pi x dx = \frac{2}{\pi} \\ \int_{-1}^1 P_2(x)\sin\pi x dx &= \int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})\sin\pi x dx = 0 \\ \int_{-1}^1 P_3(x)\sin\pi x dx &= \int_{-1}^1 (x^3 - \frac{3}{5}x)\sin\pi x dx = \frac{4}{5\pi} - \frac{12}{\pi^3}\end{aligned}$$

而第二个与第四个 Fourier 系数的分母为:

$$\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} P_3^2(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx = \frac{8}{175}$$

从而欲求为:

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot x + (\frac{4}{5\pi} - \frac{12}{\pi^3}) \cdot \frac{175}{8} \cdot (x^3 - \frac{3}{5}x) = \frac{3}{\pi}x + (\frac{35}{2\pi} - \frac{525}{2\pi^3})(x^3 - \frac{3}{5}x)$$

(e) 试证: 第 n 个 Legendre 多项式在 $C_2[-1,1]$ 中的范数 $\| P_n \|$ 的平方等于

$$\frac{2}{2n+1} (= (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!2^{2n}} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx)$$

证明

记 $f(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$, 知

$$\begin{aligned}
\| P_n \|^2 &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \cdot \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} dx = \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x) f^{(n)}(x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x) df^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x) f^{(n-1)}(x)|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(n-1)}(x) f^{(n+1)}(x) dx \\
&= -\int_{-1}^{1} f^{(n+1)}(x) df^{(n-2)}(x) = \cdots = (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(2n)}(x) f(x) dx \\
&= \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx := M_n \int_{-1}^{1} (x+1)^n (x-1)^n dx \\
&= M_n \int_{0}^{2} t^n (t-2)^n dt = M_n \cdot \frac{1}{n+1} \int_{0}^{2} (t-2)^n dt^{n+1} \\
&= M_n \frac{1}{n+1} (t^{n+1}(t-2)^n|_0^2 - n \int_0^2 t^{n+1}(t-2)^{n-1} dt) \\
&= -M_n \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \int_0^2 (t-2)^{n-1} dt^{n+2} = \cdots = (-1)^n M_n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_0^2 t^{2n} dt \\
&= (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot 2^{2n+1} = \frac{2}{2n+1}
\end{aligned}$$

(f) 试证: 在一切最高次项的系数等于 1 的 n 次多项式中, Legendre 多项式 $\tilde{P}_n(x)$, 按区间 $[-1,1]$ 上的平均意义, 偏离零最小.

解

考虑用单项式系 $\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$ 逼近 x^n. 注意到该单项系正交规范化后即为 Legendre 多项式系, 而利用关于 Legendre 多项式系逼近 x^n 的 Fourier 级数所收敛于的向量 $\boldsymbol{x}_e$, 可得 $\tilde{P}_n(x) = x^n - \boldsymbol{x}_e$, 进而由 Fourier 系数的极值性质可知:

$$\| x^n - \boldsymbol{x}_e \| = \| \tilde{P}_n(x) \| \leq \| x^n - \boldsymbol{y} \|$$

这其中 $\boldsymbol{y}$ 是单项式系 $\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$ 所张成的空间中的全体向量. 上式进而在均值意义上说明了 $\tilde{P}_n(x)$
在 $[-1,1]$ 上是最小的, 也即偏离零最小.

(g) 说明为什么任意函数 $f\in C_2([-1,1],\mathbb{C})$ 都满足等式

$$\int_{-1}^{1}|f|^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})|\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx|^2$$

这里 $\{P_0,P_1,\cdots\}$ 是 Legendre 多项式系.

6. 作为本征函数的 *Legendre* 多项式

(a) 利用 Legendre 多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

的表达式以及等式 $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$, 证明 $P_n(1)=1$.

证明

注意到 $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}=\frac{d^n[(x+1)^n(x-1)^n]}{dx^n}$, 知在 $x=1$ 时, 该式子的展开式中仅有 $\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}\cdot(x+1)^n$ 不为 0, 同样在 $x=-1$ 时, 仅有 $\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}\cdot(x-1)^n$ 不为 0, 从而：

$$P_n(1)=\frac{1}{2^n n!}\cdot n!\cdot 2^n=1$$

(b) 对等式 $(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^n=2nx(x^2-1)^n$ 求微分, 试证 $P_n(x)$ 满足方程

$$(x^2-1)\cdot P_n''(x)+2x\cdot P_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0$$

证明

记 $D=\frac{d}{dx}, f=(x^2-1)^n$, 题设等式即

$$(x^2-1)Df=2nxf$$

逐次求导有：

$$\begin{aligned}(x^2-1)D^2f+2xDf&=2nxDf+2nf\\(x^2-1)D^3f+4xD^2f+2Df&=2nxD^2f+4nDf\\(x^2-1)D^4f+6xD^3f+6D^2f&=2nxD^3f+6nD^2f\\(x^2-1)D^5f+8xD^4f+10D^3f&=2nxD^4f+8nD^3f\\&\vdots\\(x^2-1)D^{n+2}f+2(n+1)xD^{n+1}f+&\end{aligned}$$

(c) 试验证算子

$$A:=(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}+2x\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}[(x^2-1)\frac{d}{dx}]$$

在空间 $C^2[-1,1]\subset\mathfrak{R}_2[-1,1]$ 上的对称性, 并根据关系式 $A(P_n)=n(n+1)P_n$ 说明 Legendre 多项式的正交性.

(d) 试利用系 $\{1,x,x^2,\cdots\}$ 在 $C^2[-1,1]$ 中的完全性证明：算子 A 的与本征值 $\lambda=n(n+1)$ 对应的本征空间的维数不超过 1.

(e) 试证:算子 $A=\frac{d}{dx}[(x^2-1)\frac{d}{dx}]$ 在 $C^2[-1,1]$ 中没有不包含在 Legendre 多项式系 $\{P_0(x),P_1(x),\cdots\}$ 中的本征函数, 也没有与一切数 $n(n+1)(n=0,1,2,\cdots)$ 不同的本征值.

14.7 第七次作业

10 月 28 日作业

1. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 则乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

证明

既然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 首先有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$. 注意到：

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos x_n)$$

从而只需证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos x_n$ 收敛或趋 $-\infty$. 注意到该级数不一定是正项级数, 故转而研究其绝对收敛性, 知：

$$|\ln\cos x_n| = |\ln(1+\cos x_n - 1)| \sim |\cos x_n - 1 + o(\cos x_n - 1)| \sim |\frac{1}{2}x_n^2 + o(x_n^2)|$$

而

$$\sum_{n=A}^{\infty} |\frac{1}{2}x_n^2 + o(x_n^2)| \le \sum_{n=A}^{\infty} |x_n^2| = \sum_{n=A}^{\infty} x_n^2$$

收敛 (这里 A 取足够大的有限数使得 $|o(x_n^2)| \le \frac{1}{2}x_n^2, n \ge A$), 故知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\ln\cos x_n|$ 收敛, 进而自然有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos x_n$ 收敛, 也即 $\exp(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos x_n)$ 收敛, 故原乘积收敛.

2. 当 $n > 0$ 在什么范围时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x}$ 收敛?

解

首先是老师课上方法的整理：

注意到 $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x}$, 且

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{k\pi dx}{1+(k+1)^n\pi^n\sin^2 x} \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{(k+1)\pi dx}{1+k^n\pi^n\sin^2 x}$$

进而：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \frac{k\pi dx}{1+(k+1)^n\pi^n\sin^2 x} \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \le \int_0^{\pi} \frac{(k+1)\pi dx}{1+k^n\pi^n\sin^2 x}\\
\Rightarrow &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\pi dx}{1+(k+1)^n\pi^n\sin^2 x} \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(k+1)\pi dx}{1+k^n\pi^n\sin^2 x}\\
\Rightarrow &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\pi dx}{\cos^2 x+[(k+1)^n\pi^n+1]\sin^2 x} \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(k+1)\pi dx}{\cos^2 x+(k^n\pi^n+1)\sin^2 x}\\
\Rightarrow &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\pi d\tan x}{1+[(k+1)^n\pi^n+1]\tan^2 x} \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(k+1)\pi d\tan x}{1+(k^n\pi^n+1)\tan^2 x}
\end{aligned}$$

对上左式有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\pi d\tan x}{1+[(k+1)^n\pi^n+1]\tan^2 x} = \frac{2k\pi}{\sqrt{(k+1)^n\pi^n+1}}\arctan[\sqrt{(k+1)^n\pi^n+1}\tan x]|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k\pi^2}{\sqrt{(k+1)^n\pi^n+1}}$$

对上右式有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(k+1)\pi d\tan x}{1+(k^n\pi^n+1)\tan^2 x} = \frac{2(k+1)\pi}{\sqrt{k^n\pi^n+1}}\arctan[\sqrt{k^n\pi^n+1}\tan x]|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{k^n\pi^n+1}}$$

进而有

$$\frac{k\pi^2}{\sqrt{(k+1)^n\pi^n+1}} \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \le \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{k^n\pi^n+1}}$$

即得：

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \sim \frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}}, \quad k\to+\infty$$

要想级数收敛, 只需 $\frac{n}{2}-1>1 \Rightarrow n>4$ 即可.

下面是自己想的方法 (但是结果更弱...)

首先将积分写成下面的级数形式：

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x}$$

首先, 估计 $\int_{k\pi-\delta_k}^{k\pi+\delta_k} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x}$, 知：

$$\int_{k\pi-\delta_k}^{k\pi+\delta_k} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \le \int_{k\pi-\delta_k}^{k\pi+\delta_k} xdx = 2k\pi\delta_k$$

要想 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2k\pi\delta_k$ 收敛, 不妨考虑 $\delta_k \le \frac{1}{k^\alpha}, \alpha>2$.

再估计 $\int_{k\pi+\delta_k}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x}$, 知：

$$\begin{aligned}
&\int_{k\pi+\delta_k}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x}\\
\le&\int_{k\pi+\delta_{k+1}}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x} \le \int_{k\pi+\delta_{k+1}}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}} \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 \delta_{k+1}}\\
\sim&\int_{k\pi+\delta_{k+1}}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}} \frac{xdx}{1+x^n\delta_{k+1}^2} = \int_{k\pi+\delta_{k+1}}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}} \frac{xdx}{1+x^n\cdot\frac{1}{(k+1)^{2\alpha}}}\\
\le&\int_{k\pi+\delta_{k+1}}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}} \frac{xdx}{1+(k\pi+\delta_{k+1})^n\cdot\frac{1}{(k+1)^{2\alpha}}} \le \int_{k\pi+\delta_{k+1}}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}} \frac{((k+1)\pi-\delta_{k+1})dx}{1+(k\pi+\delta_{k+1})^n\cdot\frac{1}{(k+1)^{2\alpha}}}\\
\le&\frac{\pi((k+1)\pi-\delta_{k+1})dx}{1+(k\pi+\delta_{k+1})^n\cdot\frac{1}{(k+1)^{2\alpha}}} \sim \frac{\pi((k+1)\pi-\delta_{k+1})\cdot(k+1)^{2\alpha}dx}{(k+1)^{2\alpha}+(k\pi+\delta_{k+1})^n}
\end{aligned}$$

注意到最后的式子和 $k^{2\alpha+1-\max\{2\alpha,n\}}$ 同阶, 进而要想使级数收敛, 需有 $2\alpha+1-\max\{2\alpha,n\} < -1 \Rightarrow n > 2\alpha+2>6$.

在这之后自己也尝试过令 $\delta_k = \frac{1}{k^2(\ln k)^\alpha}, \delta_k = \frac{1}{k^2\ln k(\ln\ln k)^\alpha}$ 来讨论, 但最终发现这样下去无论怎么逼近, 总会需要 $n>5$, 进而这种方法最多只能得到 $n>5$.

3. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}$ 收敛, 其中 $c_n\ge 0$, 证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}$$

收敛.

解

既然 $c_n\ge 0$, 交换求和顺序有：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}$$

首先对固定的 n 估计 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}$, 知:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}\leq\int_0^{+\infty}\frac{c_n}{x^2+n^2}dx=\frac{\pi}{2}\frac{c_n}{n}$$

再考虑关于 n 的求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\frac{c_n}{n}$, 根据条件知该级数收敛, 从而由比较判别法即知原级数收敛.

4. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 中将 $f(x)=|x|$ 展成 Fourier 级数.

解

$k\geq 1$ 时, 考虑:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kxdx&=2\int_0^{\pi}x\cos kxdx=\frac{1}{k}\int_0^{\pi}xd\sin kx=\frac{1}{k}(x\sin kx|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin kxdx)\\&=-\frac{1}{k^2}\cos kx|_0^{\pi}=\frac{1}{k^2}(1-\cos k\pi)\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin kxdx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x|=\pi^2$$

进而有:

$$|x|=\pi^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(1-\cos k\pi)\cos kx$$

即为欲求.

5. 在区间 $(-l,l)$ 中将 $f(x)=e^{ax}$ 展成 Fourier 级数.

解

$k\geq 1$ 时, 考虑:

$$\int_{-l}^{l}e^{ax}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi}{l}kxdx=\frac{al^{\frac{3}{2}}}{a^2l^2+\pi^2k^2}(e^{al}-e^{-al})\cos k\pi$$

$$\int_{-l}^{l}e^{ax}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi}{l}kxdx=\frac{-\pi kl^{\frac{1}{2}}}{a^2l^2+\pi^2k^2}(e^{al}-e^{-al})\cos k\pi$$

$$\int_{-l}^{l}e^{ax}\cdot\frac{1}{\sqrt{2l}}dx=\frac{1}{a\sqrt{2l}}(e^{al}-e^{-al})$$

从而

$$e^{ax}=\frac{1}{a\sqrt{2l}}(e^{al}-e^{-al})+(e^{al}-e^{-al})\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{al}{a^2l^2+\pi^2k^2}\cos k\pi\cos\frac{\pi}{l}kx-\frac{\pi k}{a^2l^2+\pi^2k^2}\cos k\pi\sin\frac{\pi}{l}kx)$$

即为欲求.

11 月 2 日作业

1. *Hermite 多项式*. 在量子力学中当研究线性振荡器方程时, 必须考察具有内积 $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}fgdx$ 的函数类 $C^{(2)}(\mathbb{R})\subset\mathfrak{R}_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 以及特殊函数 $H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),n=0,1,2,\cdots$.

(a) 试证：$H_0(x)=1, H_1(x)=2x, H_2(x)=4x^2-2$.

证明

知：

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= (-1)^0 e^{x^2}\cdot(e^{-x^2}) = 1\\
H_1(x) &= (-1)^1 e^{x^2}\cdot(-2xe^{-x^2}) = 2x\\
H_2(x) &= (-1)^2 e^{x^2}\cdot(4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}) = 4x^2-2
\end{aligned}$$

(b) 试证：$H_n(x)$ 是 n 次多项式. 函数系 $\{H_0(x), H_1(x), \cdots\}$ 叫 Hermite 多项式系.

证明

注意到：

$$H_n'(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2}) + (-1)^n\cdot 2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

可得

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

进而知 $H_n(x)$ 为多项式可以推得 $H_{n+1}(x)$ 为多项式. 现在知道 $H_0(x)$ 确实是多项式, 进而由归纳法即知对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $H_n(x)$ 都是多项式.

(c) 试验证：函数 $H_n(x)$ 满足方程 $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH(x) = 0$.

证明

知

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

进而

$$H_n''(x) = (H_n'(x))' = 2xH_n'(x) + 2H_n(x) - H_{n+1}'(x)$$

题即证

$$(2n+2)H_n(x) - H_{n+1}'(x) = 0$$

再代入

$$H_{n+1}'(x) = 2xH_{n+1}(x) - H_{n+2}(x)$$

可知题即证

$$H_{n+2}(x) - 2xH_{n+1}(x) + (2n+2)H_n(x) = 0$$

代入 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ 知题即证

$$(-1)^{n+2}e^{x^2}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(e^{-x^2}) - 2x\cdot(-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2}) + (2n+2)\cdot(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = 0$$

整理知题即验证

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(e^{-x^2}) + 2x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2}) + (2n+2)\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = 0$$

注意到 $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$, 由 Leibniz 公式有：

$$(-2xe^{-x^2})^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k(-2x)^{(n-k)}(e^{-x^2})^{(k)} = -2n(e^{-x^2})^{(n-1)} - 2x(e^{-x^2})^{(n)} = (e^{-x^2})^{(n+1)}$$

将 n 换成 $n+1$ 即：

$$(e^{-x^2})^{(n+2)} = -2x(e^{-x^2})^{(n+1)} - (2n+2)(e^{-x^2})^{(n)}$$

此即欲证式, 从而命题即证.

(d) 函数 $\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$ 叫 Hermite 函数. 试证：$\psi_n''(x) + (2n+1-x^2)\psi_n(x) = 0$, 且当 $x \to 0$ 时有 $\psi_n(x) \to 0$.

证明

知

$$\begin{aligned}
\psi_n'(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}}H_n'(x) - xe^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x) \\
\psi_n''(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}}H_n''(x) - 2xe^{-\frac{x^2}{2}}H_n'(x) + (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)
\end{aligned}$$

进而整理知题即证

$$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n''(x) - 2xe^{-\frac{x^2}{2}}H_n'(x) + 2ne^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x) = 0$$

但这个式子两边约去 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 后正是上面已经得证的结论！进而命题得证.

(e) 试验证：当 $m \neq n$ 时有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n\psi_m dx = 0$.

证明

不妨设 $n > m$, 题即证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = 0$$

注意到

$$e^{-x^2}H_n(x) = e^{x^2}\cdot(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\cdot(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})dx = (-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)d(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})) \\
&= (-1)^n(H_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} H_m'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})dx) \\
&= (-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m'(x)d(\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}e^{-x^2}) = \cdots = (-1)^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(x)e^{-x^2}dx
\end{aligned}$$

但 $m = \deg H_m(x) < \deg H_n(x) = n$, 从而 $H_m^{(n)}(x) \equiv 0$, 进而最后的式子为 0, 也即欲证式成立.

(f) 试证：Hermite 多项式在 $\mathbb{R}$ 上以 e^{-x^2} 为权正交.

证明

根据权正交的定义和 (e) 中已经证明的式子即得结论.

2. *Chebyshev-Laguerre* 多项式 $\{L_n(x); n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 可用公式 $L_n(x) := e^x\frac{d^n(x^ne^{-x})}{dx^n}$ 定义. 试验证：

(a) $L_n(x)$ 是 n 次多项式;

证明

由 Leibniz 公式有：

$$(x^ne^{-x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(x^n)^{(k)}(e^{-x})^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{(n-k+1)!}x^{n-k}e^{-x}$$

进而

$$L_n(x)=e^x(x^ne^{-x})^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n!)^2}{k!(n-k)!(n-k+1)!}x^{n-k}$$

自然是多项式.

(b) 函数 $L_n(x)$ 满足方程

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0$$

证明

知

$$L_n'(x)=e^x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^ne^{-x})+e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$$
$$L_n''(x)=e^x\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^ne^{-x})+2e^x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^ne^{-x})+e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$$

进而整理得题即证

$$x(x^ne^{-x})^{(n+2)}+(x+1)(x^ne^{-x})^{(n+1)}+(n+1)(x^ne^{-x})^{(n)}=0$$

设 $f=x^ne^{-x}$, 有：

$$f'=-x^ne^{-x}+nx^{n-1}e^{-x}=-f+\frac{n}{x}f\Rightarrow xf'+(x-n)f=0$$

对该式两边首先求一次导有：

$$xf''+(x-n+1)f'+f=0$$

再对上式两边求 n 次导有：

$$xf^{(n+2)}+nf^{(n+1)}+(x-n+1)f^{(n+1)}+nf^{(n)}+f^{(n)}=0$$

整理即得

$$xf^{(n+2)}+(x+1)f^{(n+1)}+(n+1)f^{(n)}=0$$

命题即证.

(c) Chebyshev-Laguerre 多项式系 $\{L_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 在半直线 $[0,+\infty)$ 上以 e^{-x} 为权正交.

解

此即证明

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}L_mL_ndx=0,\quad m\neq n$$

不妨设 $n>m$, 注意到：

$$e^{-x}L_n=e^{-x}\cdot e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$$

进而有：

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}L_mL_ndx=\int_0^{+\infty}L_md((x^ne^{-x})^{(n-1)})=L_m(x^ne^{-x})^{(n-1)}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(x^ne^{-x})^{(n-1)}L_m'dx$$
$$=-\int_0^{+\infty}L_m'd((x^ne^{-x})^{(n-2)})=\cdots=(-1)^n\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}L_m^{(n)}dx$$

但注意到 $\deg L_m(x)=m<n$, 进而 $L_m^{(n)}(x)\equiv 0$, 进而上述最后一个式子为 0, 也即题式得证.

3. *Chebyshev* 多项式 $\{T_0(x)\equiv 1, T_n(x)=2^{1-n}\cos n(\arccos x); n\in\mathbb{N}\}$ 当 $|x|<1$ 时可由公式

$$T_n(x)=\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

给出. 试证:

(a) $T_n(x)$ 是 n 次多项式;

证明

考虑

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}=\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})^{(k)}((1-x^2)^n)^{(n-k)}$$

知

$$(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})'=\frac{2x}{1-x^2}$$

进一步, 对后式求 n 次导有:

$$\begin{aligned}(2x\cdot\frac{1}{1-x^2})^{(n)}&=2x(\frac{1}{1-x^2})^{(n)}+2n(\frac{1}{1-x^2})^{(n-1)}=2x(\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x})^{(n)}+2n(\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x})^{(n-1)}\\
&=2x\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\frac{1}{1+x})^{(n-k)}(\frac{1}{1-x})^{(k)}+2n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(\frac{1}{1+x})^{(n-k-1)}(\frac{1}{1-x})^{(k)}\\
&=2x\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}(n-k)!(\frac{1}{1+x})^{n-k+1}\cdot k!(\frac{1}{1-x})^{k+1}\\
&+2n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!(\frac{1}{1+x})^{n-k-1+1}\cdot k!(\frac{1}{1-x})^{k+1}\\
&=2xn!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\frac{1}{1+x})^{n-k+1}(\frac{1}{1-x})^{k+1}-2n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\frac{1}{1+x})^{n-k}(\frac{1}{1-x})^{k+1}\\
&=2n!(-1)^{n+1}(\frac{x}{x+1}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{1+x})^{n-k}(\frac{1}{x-1})^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{1+x})^{n-k}(\frac{1}{1-x})^{k+1})\\
&=2n!(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{1+x})^{n-k+1}(\frac{1}{1-x})^{k}\end{aligned}$$

上式中分母出现的 $x+1$ 的最高次是 $n+1$, $1-x$ 的最高次是 n, 代入到原来的式子中则知这两个次数分别为 k 和 $k-1$. 但 $((1-x^2)^n)^{(n-k)}=((1+x)^n(1-x)^n)^{(n-k)}$ 的展开式中 $1+x, 1-x$ 的最小次数已经是 k, 这便说明那些形如 $\frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x}$ 的项全部被消去了, 进而 $T_n(x)$ 是 n 次多项式.

(b) $T_n(x)$ 满足方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$$

证明

知

$$\begin{aligned}T_n'(x)&=\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}-\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\\
T_n''(x)&=\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}-2\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\\
&-\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

代入整理知题即证

$$(1-x^2)((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}})^{(n+2)}-3x((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}})^{(n+1)}-(1-n^2)((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}})^{(n)}=0$$

记 $f=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$, 知

$$\sqrt{1-x^2}f=(1-x^2)^n$$

两边求一次导有

$$\sqrt{1-x^2}f'-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f=n(1-x^2)^{n-1}\cdot(-2x)$$

整理得

$$(1-x^2)f'+(2n-1)xf=0$$

对该式两边同时求一次导有

$$(1-x^2)f''+(2n-3)xf'+(2n-1)f=0$$

再对上式两边同求 n 次导并整理有

$$(1-x^2)f^{(n+2)}-3xf^{(n+1)}+(n^2-1)f^{(n)}=0$$

欲证式即得证, 进而命题得证.

(c) Chebyshev 多项式系 $\{T_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 在开区间 $(-1,1)$ 上以 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 为权正交.

证明

此即证明对任意的 $m\neq n$ 有

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_mT_ndx=0$$

既然常数不影响积分值是否为零, 简便起见记 $S_n(x)=\frac{(2n)!}{(-2)^n n!}T_n(x)$, 不妨设 $n>m$, 题即证

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}S_mS_ndx=0$$

注意到

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}S_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}=\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

进而

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}S_mS_ndx&=\int_{-1}^{1}S_m\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}dx=\int_{-1}^{1}S_md(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}})\\&=S_m\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}S_m'\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}dx\\&=\cdots=(-1)^n\int_{-1}^{1}S_m^{(n)}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}dx\end{aligned}$$

但 $\deg S_m(x)=m<n$, 这说明 $S_m^{(n)}(x)\equiv 0$, 进而上述最后一个式子为 0, 也即欲证式成立, 从而命题得证.

14.8 第八次作业

11 月 7 日作业

1.

(a) 试证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi$$

并求这个级数在其他的点 $x\in\mathbb{R}$ 的和.

证明

知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos kxdx=-\frac{1}{2k}\int_0^{2\pi}xd\sin kx=0\\
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin kxdx=\frac{1}{2k}\int_0^{2\pi}xd\cos kx=\frac{1}{k}\\
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}=0
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad 0<x<2\pi$$

由 Archimedes 原理, 必存在整数 k 使得 $x-2k\pi\in(0,2\pi)$, 进而对 $x\in\mathbb{R}$, 记这样的整数为 k_x, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-2k_x\pi)}{n}=\frac{\pi-(x-2k_x\pi)}{2}=\frac{(2k_x+1)\pi-x}{2},\quad x\in\mathbb{R}$$

现在, 试利用上述展开以及 Fourier 三角级数的运算法则证明：

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},0<x<\pi.$

证明

将上述的 x 换成 $2x$ 有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n2x}{n}=\frac{\pi-2x}{2},\quad 0<2x<2\pi$$

此即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}=\frac{\pi-2x}{2},\quad 0<x<\pi$$

两边同乘 $\frac{1}{2}$ 即得题式.

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\frac{\pi}{4},0<x<\pi.$

证明

注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<\pi$$

又因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\quad 0<x<\pi$$

即得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\frac{\pi}{4},\quad 0<x<\pi$$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=\frac{x}{2},|x|<\pi.$

证明

在 (a) 所得式子中令 $x=\pi-t$, 得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin n(\pi-t)}{n}=\frac{\pi-(\pi-t)}{2}=\frac{t}{2},\quad -\pi<t<\pi$$

提出上左式的 $n\pi$ 与负号即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=\frac{x}{2},\quad |x|<\pi$$

(e) $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,|x|<\pi.$

证明[1]

知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin kxdx=0\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{k}\int_0^{\pi}x^2d\sin kx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{k^2}\int_0^{\pi}xd\cos kx=\frac{4}{k^2}(-1)^k\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

故有：

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad |x|<\pi$$

(f) $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},0\le x\le\pi.$

证明

对 (c) 两边积分有

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}=\frac{\pi}{4}x+C,\quad 0<x<\pi$$

其中 C 是一个常量. 代入 $x=\frac{\pi}{2}$, 有 $0=\frac{\pi^2}{8}+C$, 得 $C=-\frac{\pi^2}{8}$, 进而有

$$\frac{\pi}{4}x=\frac{\pi^2}{8}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\quad 0<x<\pi$$

[1]此处题目有误, 这里誊写的题目已经改正了, 第四版、第七版和英文版中右式常数项 $\frac{\pi^2}{3}$ 全部写成了 $\frac{\pi}{3}$.

这便是

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, 0 < x < \pi$$

又注意到 $f(x) = x$ 在 0 和 π 处满足单侧 Hölder 条件, 故上述 Fourier 级数在 $x = 0$ 和 $x = \pi$ 处也收敛, 特别地, 在这两个端点处收敛到 0. 进而便有：

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, 0 \le x \le \pi$$

(g) $\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, 0 \le x \le \pi.$

证明

首先考察 (e) 的定义域是否可以扩充为 $|x| \le \pi$, 这便是验证 $f(x) = x^2$ 在 $x = -\pi$ 和 $x = \pi$ 处是否满足单侧 Hölder 条件. 事实上, 当 t 足够小 (比如小于 π), 有：

$$|(-\pi+t)^2 - \pi^2| = |t^2 - 2\pi t| \le |t^2| + 2\pi|t| \le \pi|t| + 2\pi|t| = 3\pi|t|$$

进而其满足单侧 Hölder 条件, 对 $x = \pi$ 同理, 从而 (e) 可以优化为

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad |x| \le \pi$$

进而

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12} &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{1}{4}(\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx) - \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}) + \frac{\pi^2}{6} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \\
&= \sum_{n-1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} \quad 0 \le x \le \pi
\end{aligned}$$

(h) 绘出这里的三角级数的和在整个数轴上的图像. 利用所得到的结果求下列数项级数的和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

解

在 (c) 中代入 $x = \frac{\pi}{2}$ 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

上式即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

在 (g) 中代入 $x=0$ 有

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

这便是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

在 (g) 中代入 $x=\pi$ 有

$$-\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

这便是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

2. 试证：

(a) 如果 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ 是奇 (偶) 函数, 则它的 Fourier 系数有以下特点：$a_k(f)=0(b_k(f)=0)$ 当 $k=0,1,2,\cdots$;

证明

当 f 是奇函数, 知 $f(x)\cos kx(k=0,1,2,\cdots)$ 为奇函数, 从而

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=0$$

当 f 是偶函数, 知 $f(x)\sin kx(k=0,1,2,\cdots)$ 为奇函数, 从而

$$b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=0$$

(b) 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 具有周期 $\frac{2\pi}{m}$, 则它的 Fourier 系数 $c_k(f)$ 仅当 k 是 m 的倍数时才可能不等于零;

证明

知

$$2\pi c_k(f)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{ikt}dt$$

考虑到 $f(t)$ 和 e^{ikt} 的周期性, 有：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{ikt}dt=\sum_{k=0}^{m-1}\int_{-\pi+k\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+(k+1)\frac{2\pi}{m}}f(t)e^{ikt}dt$$

分别来考虑上式中的实部和虚部, 对实部, 当 k 不为 m 的倍数时, 有：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1}\int_{-\pi+k\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+(k+1)\frac{2\pi}{m}} f(t)\cos ktdt\\
=&\int_{-\pi}^{-\pi+\frac{2\pi}{m}} f(t)\cos ktdt+\int_{-\pi+\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t)\cos ktdt+\cdots+\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\cos ktdt\\
=&\int_{-\pi+\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t-\frac{2\pi}{m})\cos k(t-\frac{2\pi}{m})dt+\int_{-\pi+\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t)\cos ktdt+\cdots+\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\cos ktdt\\
=&\int_{-\pi+\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t)(\cos(kt-\frac{2k\pi}{m})+\cos kt)dt+\int_{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+3\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t)\cos ktdt+\cdots+\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\cos ktdt\\
=&\int_{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+3\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t-\frac{2\pi}{m})(\cos(k(t-\frac{2\pi}{m})-\frac{2k\pi}{m})+\cos k(t-\frac{2\pi}{m})+\cos kt)dt+\cdots+\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\cos ktdt\\
=&\cdots=\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\sum_{i=0}^{m-1}\cos(kt-i\frac{2k\pi}{m})dt=\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{m}}\sum_{i=0}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{m}\cos(kt-i\frac{2k\pi}{m})dt\\
=&\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{m}}(\sin(kt+\frac{k\pi}{m})-\sin(kt-\frac{2k\pi}{m}(m-1)+\frac{k\pi}{m}))dt=0
\end{aligned}
$$

而对虚部有：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1}\int_{-\pi+k\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+(k+1)\frac{2\pi}{m}} f(t)\sin ktdt\\
=&\int_{-\pi}^{-\pi+\frac{2\pi}{m}} f(t)\sin ktdt+\int_{-\pi+\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t)\sin ktdt+\cdots+\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\sin ktdt\\
=&\int_{-\pi+\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t-\frac{2\pi}{m})\sin k(t-\frac{2\pi}{m})dt+\int_{-\pi+\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t)\sin ktdt+\cdots+\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\sin ktdt\\
=&\int_{-\pi+\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t)(\sin(kt-\frac{2k\pi}{m})+\sin kt)dt+\int_{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+3\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t)\sin ktdt+\cdots+\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\sin ktdt\\
=&\int_{-\pi+2\cdot\frac{2\pi}{m}}^{-\pi+3\cdot\frac{2\pi}{m}} f(t-\frac{2\pi}{m})(\sin(k(t-\frac{2\pi}{m})-\frac{2k\pi}{m})+\sin k(t-\frac{2\pi}{m})+\sin kt)dt+\cdots+\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\sin ktdt\\
=&\cdots=\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\sum_{i=0}^{m-1}\sin(kt-i\frac{2k\pi}{m})dt=\int_{\pi-\frac{2k\pi}{m}}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{m}}\sum_{i=0}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{m}\sin(kt-i\frac{2k\pi}{m})dt\\
=&\int_{\pi-\frac{2\pi}{m}}^{\pi} f(t)\frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{m}}(\cos(kt-\frac{k\pi}{m})-\cos(kt-\frac{2k\pi}{m}(m-1)-\frac{k\pi}{m}))dt=0
\end{aligned}
$$

其中 k 不为 m 的倍数保证了 $\frac{\sin\frac{k\pi}{m}}{\sin\frac{k\pi}{m}}$ 的合法性. 综上命题即证.

(c) 如果 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ 是实值的, 则对于任何 $k\in\mathbb{N}, c_k(f)=\overline{c}_{-k}(f)$;

证明

知

$$
\begin{aligned}
c_k(f)&=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)\\
c_{-k}(f)&=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)
\end{aligned}
$$

当 f 是实值的, 知 $a_k,b_k\in\mathbb{R}$, 进而自然有 $c_k(f)=\overline{c}_{-k}(f),\forall k\in\mathbb{N}$.

(d) $|a_k(f)| \le 2\sup\limits_{|x|<\pi}|f(x)|, |b_k(f)| \le 2\sup\limits_{|x|<\pi}|f(x)|, |c_k(f)| \le \sup\limits_{|x|<\pi}|f(x)|$.

证明

知

$$|a_k(f)| = \frac{1}{\pi}|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\cos kx|dx \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sup_{|x|<\pi}|f(x)|dx = 2\sup_{|x|<\pi}|f(x)|$$

$$|b_k(f)| = \frac{1}{\pi}|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\sin kx|dx \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sup_{|x|<\pi}|f(x)|dx = 2\sup_{|x|<\pi}|f(x)|$$

$$|c_k(f)| = \frac{1}{2\pi}|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx} dx| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)e^{ikx}|dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sup_{|x|<\pi}|f(x)|dx = \sup_{|x|<\pi}|f(x)|$$

11 月 9 日作业

1.

(a) 试证: 对于任意的 $a \in \mathbb{R}$, 函数系 $\{\cos kx|k = 0, 1, \cdots\}, \{\sin kx|k \in \mathbb{N}\}$ 都是空间 $\mathfrak{R}_2[a, a+\pi]$ 中的完全系.

证明

先验证 $a = 0$ 的情况, 即证明函数系 $\{\cos kx|k = 0, 1, \cdots\}$,$\{\sin kx|k \in \mathbb{N}\}$ 都是空间 $\mathfrak{R}_2[0, \pi]$ 上的完全系. 任取 $f(x) \in \mathfrak{R}_2[0, \pi]$, 作 $f(x)$ 的偶性延拓:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ f(-x), & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

则 $g(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的偶函数. 根据 11 月 7 日第 2 题 (a) 问知其 Fourier 系数特点为 $b_k(g) = 0, k = 0, 1, 2, \cdots$, 进而其 Fourier 级数为:

$$g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(g)\cos kx$$

其中

$$\begin{aligned} a_k(g) &= \frac{\langle g, \cos kx\rangle}{\langle \cos kx, \cos kx\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{\langle f, \cos kx\rangle}{\langle \cos kx, \cos kx\rangle} =: a_k(f) \end{aligned}$$

这里 $a_k(f)$ 即 f 在 $[0, \pi]$ 上关于 $\{\cos kx|k = 0, 1, \cdots\}$ 的 Fourier 系数, 现在, 根据 Fourier 级数的平均收敛性知:

$$g(x) \underset{\mathfrak{R}_2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(g)\cos kx$$

按定义即

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n \in \mathbb{N}(n > N \Rightarrow \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(g(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(g)\cos kx)^2 dx} < \varepsilon)$$

两边平方可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(g(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(g)\cos kx)^2 dx < \varepsilon^2$$

由 $(g(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(g)\cos kx)^2$ 是偶函数与前面推知的 $a_k(g) = a_k(f)$ 知

$$\int_{-\pi}^{\pi}(g(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(g)\cos kx)^2 dx = 2\int_0^{\pi}(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\cos kx)^2 dx < \varepsilon^2$$

这便是

$$\sqrt{\int_0^\pi (f(x)-\sum_{k=0}^n a_k(f)\cos kx)^2 dx} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

从而有

$$f(x) \underset{\mathfrak{R}_2}{=} \sum_{k=0}^\infty a_k(f)\cos kx$$

进而 $\{\cos kx|k=0,1,\cdots\}$ 在 $\mathfrak{R}_2[0,\pi]$ 上完全.

再取 $f(x)$ 的奇性延拓:

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le \pi \\ -f(-x), & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

则 $h(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数, 从而知其 Fourier 系数特点为 $a_k(h)=0, k=1,2,\cdots$. 进而其 Fourier 级数为:

$$h(x)\sim \sum_{k=1}^\infty b_k(h)\sin kx$$

其中

$$\begin{aligned} b_k(h) &= \frac{\langle h,\sin kx\rangle}{\langle \sin kx,\sin kx\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi h(x)\sin kx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx dx = \frac{\langle f,\sin kx\rangle}{\langle \sin kx,\sin kx\rangle} =: b_k(f) \end{aligned}$$

这里 $b_k(f)$ 即 f 在 $[0,\pi]$ 上关于 $\{\sin kx|k\in\mathbb{N}\}$ 的 Fourier 系数, 现在, 根据 Fourier 级数的平均收敛性知:

$$h(x) \underset{\mathfrak{R}_2}{=} \sum_{k=1}^\infty b_k(h)\sin kx$$

按定义即

$$\forall \varepsilon>0 \exists N>0 \forall n\in\mathbb{N}(n>N \Rightarrow \sqrt{\int_{-\pi}^\pi (h(x)-\sum_{k=1}^n b_k(h)\sin kx)^2 dx} < \varepsilon)$$

两边平方可得

$$\int_{-\pi}^\pi (h(x)-\sum_{k=1}^n b_k(h)\sin kx)^2 dx < \varepsilon^2$$

由 $(h(x)-\sum\limits_{k=1}^n b_k(h)\sin kx)^2$ 是偶函数与前面推知的 $b_k(h)=b_k(f)$ 知

$$\int_{-\pi}^\pi (h(x)-\sum_{k=1}^n b_k(h)\sin kx)^2 dx = 2\int_0^\pi (f(x)-\sum_{k=1}^n b_k(f)\sin kx)^2 dx < \varepsilon^2$$

这便是

$$\sqrt{\int_0^\pi (f(x)-\sum_{k=1}^n b_k(f)\sin kx)^2 dx} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

从而有

$$f(x) \underset{\mathfrak{R}_2}{=} \sum_{k=0}^\infty b_k(f)\sin kx$$

进而 $\{\sin kx|k\in\mathbb{N}\}$ 在 $\mathfrak{R}_2[0,\pi]$ 上完全.

下面考虑任意给定的 $a\in\mathbb{R}$.

对于函数系 $\{\cos kx|k=0,1,\cdots\}$, 作延拓:

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,a+\pi] \\ f(2a-x), & x\in[a-\pi,a) \end{cases}$$

并令 $h(x)=g(x+a)$, 则 $h(x)$ 是定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数. 再考虑 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的周期延拓 $u(x)$, 既然 $\{\cos kx|k=0,1,\cdots\}$ 在 $\mathfrak{R}_2[0,\pi]$ 上完全[2], 根据正交系完全性条件, 在 $[-\pi,\pi]$ 上有下述 Persaval 等式成立:

$$\| u(x) \|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(u)|^2$$

但注意到在 $[-\pi,\pi]$ 上有:

$$\begin{aligned} \| u(x) \|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}u^2(x)dx=\int_{a-\pi}^{a+\pi}u^2(x)dx=\int_{a-\pi}^{a+\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi}g^2(x+a)dx \\ &= \int_{a-\pi}^{a}g^2(x)dx+\int_{a}^{a+\pi}g^2(x)dx=\int_{a-\pi}^{a}f^2(2a-x)dx+\int_{a}^{a+\pi}f^2(x)dx \\ &= 2\int_{a}^{a+\pi}f^2(x)dx=2\| f \|^2 \\ a_k(u) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cos kxdx \end{aligned}$$

(b) 求函数 $f(x)=x$ 按上述每个函数系在区间 $[0,\pi]$ 上的展开式.

解

取 $g(x)=|x|$, 在 $[-\pi,\pi]$ 上知

$$\begin{aligned} a_0(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{\pi}{2} \\ a_k(g) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kxdx=-\frac{2\sin k\pi}{\pi k^2} \end{aligned}$$

进而有:

$$g(x)\sim\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(\cos k\pi-1)}{\pi k^2}\cos kx,\quad x\in[-\pi,\pi]$$

也即

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(\cos k\pi-1)}{\pi k^2}\cos kx,\quad x\in[0,\pi]$$

取 $h(x)=x$, 在 $[-\pi,\pi]$ 上知

$$b_k(h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kxdx=\frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

进而有:

$$h(x)\sim 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx,\quad x\in[-\pi,\pi]$$

也即

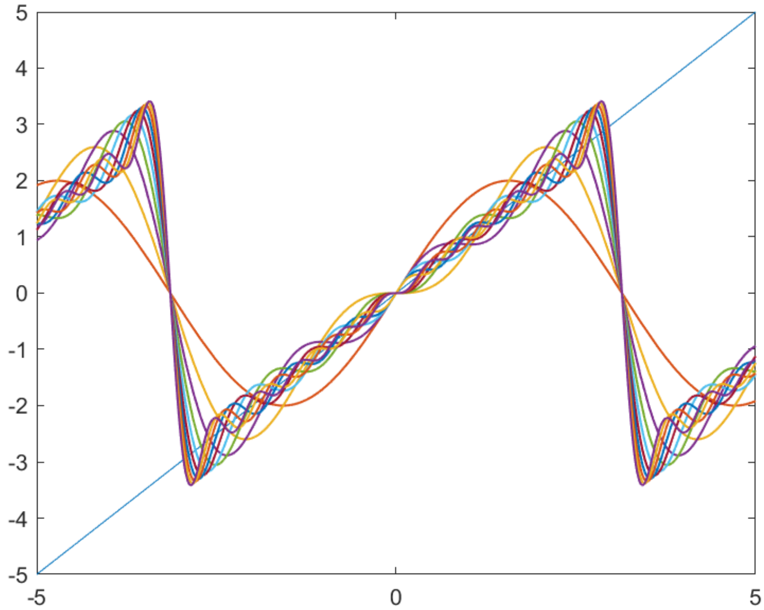
$$f(x)\sim 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx,\quad x\in[0,\pi]$$

[2] 下面的过程用的是 $\{\cos kx|k=0,1,\cdots\}$ 在 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 上完全

(c) 绘出所得 Fourier 级数的和在整个数轴上的图像.

解

如图



(d) 指出函数 $f(x)=|x|$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 三角级数, 并阐明它在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上是否一致收敛于这个函数.

解

由 (b) 知

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\cos k\pi - 1)}{\pi k^2} \cos kx, \quad x \in [-\pi,\pi]$$

注意到 $|-\pi|=|\pi|$, 从而该级数一致收敛于 $|x|$.

2. 函数 f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$ 可以看成幂级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k z^k (= \sum\limits_{-\infty}^{-1} c_k z^k + \sum\limits_{0}^{+\infty} c_k z^k)$ 的特殊情形, 其中 z 在复平面的单位圆的圆周上变化 (即 $z=e^{it}$).

试证: 如果函数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ 的 Fourier 系数 $c_k(f)$ 减小得那样快, 使 $\varlimsup\limits_{k\to-\infty} |c_k(f)|^{\frac{1}{k}} = c_- > 1$, 而 $\varlimsup\limits_{k\to+\infty} |c_k(f)|^{\frac{1}{k}} = c_+ < 1$, 则

(a) 可以把函数 f 看成用级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$ 表示的定义在环形区域 $c_-^{-1} - < |z| < c_+^{-1}$ 中的某个函数在单位圆圆周上的迹[3];

证明

[3]英文版表述: The function f can be regarded as the image of the unit circle under a function represented in the annulus $c_-^{-1} < |z| < c_+^{-1}$ by the series $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$.

注意到

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)(e^{ix})^k \\
&= \sum_{-\infty}^{-1} c_k(f)(e^{ix})^k + \sum_{0}^{+\infty} c_k(f)(e^{ix})^k
\end{aligned}
$$

对其中第二个式子, 由 Cauthy-Hadamard 公式知:

$$
R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}(|c_k(f)|)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{c_+}
$$

从而要想让上述第二个式子收敛, 需满足: $|z| < c_+^{-1}$.

对其中第一个式子, 将其改写成:

$$
\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)(e^{ix})^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(f)(\frac{1}{e^{ix}})^k
$$

由 Cauthy-Hadamard 公式知:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}|c_{-k}(f)|^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}(\frac{1}{|c_{-k}(f)|})^{\frac{1}{-k}}} \\
&= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to-\infty}}(\frac{1}{|c_k(f)|})^{\frac{1}{k}}} = \underline{\lim\limits_{k\to-\infty}}|c_k(f)|^{\frac{1}{k}} = c_-
\end{aligned}
$$

从而要想让上述第一个式子收敛, 需满足: $\frac{1}{|z|} < c_-$, 也即 $|z| > c_-^{-1}$.

综上, 便可以考虑函数:

$$
g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)z^k, \quad c_-^{-1} < |z| < c_+^{-1}
$$

知 $f(x) = g(e^{ix})$, 而 e^{ix} 显然在单位圆上, 故命题得证.

(b) 当 $z = x + iy, \ln\frac{1}{c_-} < y < \ln\frac{1}{c_+}$, 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikz}$ 绝对收敛 (特别地, 它的和与求和顺序无关);

证明

在 (a) 所得到的 $g(z)$ 中代入 $e^{iz} = e^{-y+ix}$ 得:

$$
g(e^{iz}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)(e^{(-y+ix)})^k
$$

进而当 $\ln\frac{1}{c_-} < y < \ln\frac{1}{c_+}$, 知 $c_-^{-1} < e^y = |z| < c_+^{-1}$, 再有 (a) 与 Abel 定理即知级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}$

(c) 在由条件 $a \le \mathrm{Im}z \le b$(其中 $\ln\frac{1}{c_-} < a < b < \ln\frac{1}{c_+}$) 确定的复平面中的带形区域内, 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikz}$ 绝对且一致收敛;

(d) 试利用展开式 $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$ 和 Euler 公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 证明

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{\cos x}{1!} + \cdots + \frac{\cos nx}{n!} + \cdots &= e^{\cos x}\cos(\sin x) \\
\frac{\sin x}{1!} + \cdots + \frac{\sin nx}{n!} + \cdots &= e^{\cos x}\sin(\sin x)
\end{aligned}
$$

证明

在题目第一个展开式中代入 $z=e^{ix}$ 有:

$$e^{e^{ix}}=1+\frac{e^{ix}}{1!}+\cdots+\frac{(e^{ix})^n}{n!}+\cdots$$

两边代入 Euler 公式与 De Moivre 公式 $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$ 有:

$$e^{\cos x+i\sin x}=1+\frac{\cos x+i\sin x}{1!}+\cdots+\frac{\cos nx+i\sin nx}{n!}+\cdots$$

进而:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(e^{\cos x+i\sin x})&=e^{\cos x}\cos(\sin x)=1+\frac{\cos x}{1!}+\cdots+\frac{\cos nx}{n!}+\cdots\\ \mathrm{Im}(e^{\cos x+i\sin x})&=e^{\cos x}\sin(\sin x)=\frac{\sin x}{1!}+\cdots+\frac{\sin nx}{n!}+\cdots\end{aligned}$$

(e) 试利用展开式 $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$, $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$ 验证

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)!}&=\sin(\cos x)\cosh(\sin x)\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)!}&=\cos(\cos x)\sinh(\sin x)\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2nx}{(2n)!}&=\cos(\cos x)\cosh(\sin x)\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 2nx}{(2n)!}&=\cos(\cos x)\sin h(\sin x)\end{aligned}$$

证明

首先做准备工作: 在题式中的两个展开式中分别代入 $z=e^{ix},z=i\sin x$ 可得:

$$\begin{aligned}\cos(e^{ix})&=1-\frac{e^{i2x}}{2!}+\frac{e^{i4x}}{4!}-\cdots=1-\frac{\cos 2x+i\sin 2x}{2!}+\frac{\cos 4x+i\sin 4x}{4!}-\cdots\\ \sin(e^{ix})&=e^{ix}-\frac{e^{i3x}}{3!}+\frac{e^{i5x}}{5!}-\cdots=(\cos x+i\sin x)-\frac{\cos 3x+i\sin 3x}{3!}+\frac{\cos 5x+i\sin 5x}{5!}-\cdots\\ \cos(i\sin x)&=1+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^4 x}{4!}+\cdots\\ &=\frac{1}{2}(1+\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin^2 x}{2!}+\cdots)+\frac{1}{2}(1+\frac{\sin(-x)}{1!}+\frac{\sin^2(-x)}{2!}+\cdots)\\ &=\frac{1}{2}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})=\cosh(\sin x)\\ \sin(i\sin x)&=i\sin x+i\frac{\sin^3 x}{3!}+i\frac{\sin^5 x}{5!}+\cdots\\ &=i\cdot\frac{1}{2}((1+\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin^2 x}{2!}+\cdots)-(1+\frac{\sin(-x)}{1!}+\frac{\sin^2(-x)}{2!}+\cdots))\\ &=i\cdot\frac{1}{2}(e^{\sin x}-e^{-\sin x})=i\sinh(\sin x)\end{aligned}$$

进而有:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)!}\\
=&\mathrm{Re}(\sin(e^{ix}))=\mathrm{Re}(\sin(\cos x+i\sin x))=\mathrm{Re}(\sin(\cos x)\cos(i\sin x)+\cos(\cos x)\sin(i\sin x))\\
=&\mathrm{Re}(\sin(\cos x)\cosh(\sin x)+\cos(\cos x)\cdot i\sinh(\sin x))=\sin(\cos x)\cosh(\sin x)\\
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)!}\\
=&\mathrm{Im}(\sin(e^{ix}))=\mathrm{Im}(\sin(\cos x+i\sin x))=\mathrm{Im}(\sin(\cos x)\cos(i\sin x)+\cos(\cos x)\sin(i\sin x))\\
=&\mathrm{Im}(\sin(\cos x)\cosh(\sin x)+\cos(\cos x)\cdot i\sinh(\sin x))=\cos(\cos x)\sinh(\sin x)\\
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2nx}{(2n)!}\\
=&\mathrm{Re}(\cos(e^{ix}))=\mathrm{Re}(\cos(\cos x+i\sin x))=\mathrm{Re}(\cos(\cos x)\cos(i\sin x)-\sin(\cos x)\sin(i\sin x))\\
=&\mathrm{Re}(\cos(\cos x)\cosh(\sin x)-\sin(\cos x)\cdot i\sinh(\sin x))=\cos(\cos x)\cosh(\sin x)\\
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 2nx}{(2n)!}\\
=&\mathrm{Im}(\cos(e^{ix}))=\mathrm{Im}(\cos(\cos x+i\sin x))=\mathrm{Im}(\cos(\cos x)\cos(i\sin x)-\sin(\cos x)\sin(i\sin x))\\
=&\mathrm{Im}(\cos(\cos x)\cosh(\sin x)-\sin(\cos x)\cdot i\sinh(\sin x))=-\sin(\cos x)\sinh(\sin x)
\end{aligned}$$

11 月 14 日作业

1. 试验证:

(a) 对于任何 $a\in\mathbb{R}$, 函数系 $\{1,\cos k\frac{2\pi}{T}x,\sin k\frac{2\pi}{T}x|k\in\mathbb{N}\}$, $\{e^{ik\frac{2\pi}{T}x}|k\in\mathbb{Z}\}$ 都是空间 $\mathfrak{R}_2([a,a+T],\mathbb{C})$ 中的完全正交系;

证明

已经知道 $\{1,\cos kx,\sin kx|k\in\mathbb{N}\}$,$\{e^{ik\frac{2\pi}{T}x}|k\in\mathbb{Z}\}$ 都是空间 $\mathfrak{R}_2([0,2\pi],\mathbb{C})$ 中的完全正交系. 进而对空间 $\mathfrak{R}_2([a,a+T],\mathbb{C})$ 中的任意函数 $f(x)$, 令

$$g(x)=f(\frac{2\pi}{T}(x-a))$$

(b) $T-$ 周期函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 关于上述的函数系的 Fourier 系数 $a_k(f),b_k(f),c_k(f)$ 与它是在区间 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 上还是在任何其他形如 $[a,a+T]$ 的区间上展成 Fourier 级数无关.

(c) 如果 $c_k(f)$ 和 $c_k(g)$ 是 $T-$ 周期函数 f 和 g 的 Fourier 系数, 则

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(x)\overline{g}(x)dx=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k(f)\overline{c}_k(g)$$

(d) $T-$ 周期光滑函数 f 和 g 的用因子 $\frac{1}{T}$ 规范化了的" 卷积"

$$h(x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)g(t)dt$$

的 Fourier 系数 $c_k(h)$ 与函数 f 与 g 的 Fourier 系数 $c_k(f), c_k(g)$ 满足关系 $c_k(h) = c_k(f)c_k(g)(k \in \mathbb{Z})$.

2.

(a) 设 $x_m = \frac{2\pi m}{2n+1}, m = 0, 1, \cdots, 2n$. 试验证

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\cos kx_m \cos lx_m = \delta_{kl},$$
$$\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\sin kx_m \sin lx_m = \delta_{kl},$$
$$\sum_{m=0}^{2n}\sin kx_m \cos lx_m = 0$$

这里 k, l 是非负整数, 而 $\delta_{kl} = 0$ 当 $k \neq l, \delta_{kl} = 1$ 当 $k = l$.

证明

(b) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 $2\pi-$ 周期, 且在一个周期上绝对可积的函数. 用点 $x_m = \frac{2\pi m}{2n+1}, m = 0, 1, \cdots, 2n$, 把区间 $[0, 2\pi]$ 分成 $2n+1$ 个相等的区间. 我们用与区间 $[0, 2\pi]$ 的这个分划对应的矩形公式计算积分

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx$$

的近似值. 这时, 我们得到

$$\tilde{a}_k(f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{m=1}^{2n} f(x_m)\cos kx_m$$
$$\tilde{b}_k(f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{m=1}^{2n} f(x_m)\sin kx_m$$

并且用它们代替函数 f 的 Fourier 系数的前 n 项和 $S_n(f, x)$ 中的相应的系数 $a_k(f)$ 和 $b_k(f)$.

试证: 这时得到的是函数 f 在节点 $x_m(m = 0, 1, 2, \cdots, 2n)$ 的 n 阶插值三角多项式 $\tilde{S}_n(f, x)$, 即在这些节点处有 $f(x_m) = \tilde{S}_n(f, x_m)$.

11 月 16 日作业

1.

(a) 详细写出下列关系式的证明:

(i) 对任何函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 都成立等式

$$\mathfrak{F}[\overline{f}](-\xi) = \overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}$$

证明

知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[\overline{f}](-\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(x)e^{-i(-\xi)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(x)\overline{e^{-i\xi x}}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)e^{-i\xi x}}dx = \frac{1}{2\pi}\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\xi x}dx} = \overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}\end{aligned}$$

命题即证.

(ii) 如果 f 是实值偶函数, 即 $\overline{f(x)}=f(x)=f(-x)$, 则

$$\begin{aligned}&\overline{\mathfrak{F}_c[f](\xi)}=\mathfrak{F}_c[f](\xi),\\&\mathfrak{F}_s[f](\xi)\equiv 0\\&\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}=\mathfrak{F}[f](\xi)=\mathfrak{F}[f](-\xi)\end{aligned}$$

证明

知

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{F}_c[f](\xi)}&=\overline{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\xi x dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)\cos\xi x dx}\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(x)\overline{\cos\xi x}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\xi x dx=\mathfrak{F}_c[f](\xi)\\\mathfrak{F}_s[f](\xi)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\xi x dx=0\\\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}&=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)e^{-i\xi x}}dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(x)\overline{e^{-i\xi x}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i(-\xi)x}dx=\mathfrak{F}[f](-\xi)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x)e^{-i\xi(-x)}dx=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x)e^{-i\xi(-x)}d(-x)\\&=\frac{1}{2\pi}\int--\infty^{+\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx=\mathfrak{F}[f](\xi)\end{aligned}$$

这其中题目要求的第二个式子恒等于零的推导过程用到了 $f(x)\sin\xi x$ 是奇函数.

(iii) 如果 f 是实值奇函数, 即 $\overline{f(x)}=f(x)=-f(-x)$, 则

$$\begin{aligned}&\mathfrak{F}_c[f](\xi)\equiv 0\\&\overline{\mathfrak{F}_s[f](\xi)}=\mathfrak{F}_s[f](\xi)\\&\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}=-\mathfrak{F}[f](\xi)=\mathfrak{F}[f](-\xi)\end{aligned}$$

证明[4]

知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_c[f](\xi)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\xi x dx=0\\\overline{\mathfrak{F}_s[f](\xi)}&=\overline{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\xi x dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)\sin\xi x}dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(x)\overline{\sin\xi x}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-f(-x))\sin\xi x dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x)\sin(\xi(-x))dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x)\sin(\xi(-x))d(-x)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\xi x dx=\mathfrak{F}_s[f](\xi)\\\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}&=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)e^{-i\xi x}}dx\end{aligned}$$

[4] 第四版中上第二式右式误写为 $\mathfrak{F}_s[f](\xi)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(x)\overline{e^{-i\xi x}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cdot e^{-i(-\xi)x}dx = \mathfrak{F}[f](-\xi)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-f(-x))e^{-i\xi(-x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x)e^{-i\xi(-x)}d(-x)\\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx = -\mathfrak{F}[f](\xi)
\end{aligned}
$$

其中第一个式子用到了 $f(x)\cos\xi x$ 是奇函数.

(iv) 如果 f 是纯虚的函数, 即 $\overline{f(x)} = -f(x)$, 则

$$\mathfrak{F}[\overline{f}](-\xi) = -\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}$$

证明

知

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}[\overline{f}](-\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(x)e^{-i(-\xi)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-f(x))\cdot e^{-i(-\xi)x}dx\\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i(-\xi)x}dx = -\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}
\end{aligned}
$$

(b) 把 Fourier 变换看做映射 $f\mapsto\hat{f}$, 试证, 它有如下经常用到的性质:

$$f(at)\mapsto\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$$

(相似法则);

证明

题即证

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{a2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\frac{\omega}{a}t}dt$$

记上左式为 I 并在其中令 $at=u$(这里默认 $a>0$, 可以证明 $a<0$ 的情况得到的结论是一样的), 有

$$I = \frac{1}{a2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\omega\frac{u}{a}}du = \frac{1}{a2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u}du$$

命题即证.

$$f(t-t_0)\mapsto\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

(输入信号位移–Fourier 原像关于时间的位移, 或位移定理);

证明

题即证

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega t_0}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

记上左式为 I 并在其中令 $u=t-t_0$, 有

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\omega(u+t_0)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\omega u}\cdot e^{-i\omega t_0}du = e^{-i\omega t_0}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\omega u}du$$

命题即证.

$$[f(t+t_0)\pm f(t-t_0)]\mapsto\begin{cases}\hat{f}(\omega)2\cos\omega t_0,\\ \hat{f}(\omega)2\sin\omega t_0,\end{cases}$$
$$f(t)e^{\pm i\omega_0 t}\mapsto\hat{f}(\omega\pm\omega_0)$$

(Fourier 变换关于频率的位移);

证明

由位移定理知:

$$\begin{aligned}f(t+t_0)+f(t-t_0)&\mapsto\hat{f}(\omega)e^{i\omega t_0}+\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t_0}=\hat{f}(\omega)\cdot 2\cos\omega t_0\\ f(t+t_0)-f(t-t_0)&\mapsto\hat{f}(\omega)e^{i\omega t_0}-\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t_0}=\hat{t}(\omega)\cdot 2\sin\omega t_0\end{aligned}$$

再考虑最后一个式子, 知此即证

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\pm i\omega_0 t}\cdot e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i(\omega\pm\omega_0)t}dt$$

这只需注意到 $e^{\pm i\omega_0 t}e^{-i\omega t}=e^{-i(\omega\mp\omega_0)t}$ 即可. (出于这个原因, 自己觉得题目的式子写成 $f(t)e^{\pm i\omega_0 t}\mapsto\hat{f}(\omega\mp\omega_0)$ 或许会更严谨...)

$$f(t)\cos\omega_0 t\mapsto\frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0)+\hat{f}(\omega+\omega_0)]$$
$$f(t)\sin\omega_0 t\mapsto\frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0)-\hat{f}(\omega+\omega_0)]$$

(简谐信号的振幅调制);

证明

首先注意到这个映射 (记为 A) 的线性性:

$$\begin{aligned}Af_1(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{-i\omega t}dt=\hat{f}_1(\omega)\\ Af_2(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)e^{-i\omega t}dt=\hat{f}_2(\omega)\\ \Rightarrow A(\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t))&=\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t))e^{-i\omega t}dt\\ &=\frac{\lambda_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{-i\omega t}dt+\frac{\lambda_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)e^{-i\omega t}dt\\ &=\lambda_1\hat{f}_1(\omega)+\lambda_2\hat{f}_2(\omega)=\lambda_1 Af_1(t)+\lambda_2 Af_2(t)\end{aligned}$$

从而, 注意到 $\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}),\sin\omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t})$, 由上述关于频率的位移的性质得:

$$\begin{aligned}f(t)\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}f(t)e^{i\omega_0 t}+\frac{1}{2}f(t)e^{-i\omega_0 t}\mapsto\frac{1}{2}\hat{f}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\hat{f}(\omega+\omega_0)=\frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0)+\hat{f}(\omega+\omega_0)]\\ f(t)\sin\omega_0 t=\frac{1}{2}f(t)e^{i\omega_0 t}-\frac{1}{2}f(t)e^{-i\omega_0 t}\mapsto\frac{1}{2}\hat{f}(\omega-\omega_0)-\frac{1}{2}\hat{f}(\omega+\omega_0)=\frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0)+\hat{f}(\omega+\omega_0)]\end{aligned}$$

命题即证.

$$f(t)\sin^2\frac{\omega_0 t}{2}\mapsto\frac{1}{4}[2\hat{f}(\omega)-\hat{f}(\omega-\omega_0)-\hat{f}(\omega+\omega_0)]$$

证明

由上述振幅调制与倍角公式 $\sin^2\frac{\omega_0 t}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\omega_0 t)$ 得:

$$f(t)\sin^2\frac{\omega_0 t}{2}=\frac{1}{2}f(t)-\frac{1}{2}f(t)\cos\omega_0 t\mapsto\frac{1}{2}\hat{f}(\omega)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0)+\hat{f}(\omega+\omega_0)]=\frac{1}{4}[2\hat{f}(\omega)-\hat{f}(\omega-\omega_0)-\hat{f}(\omega+\omega_0)]$$

(c) 试求下列函数的 Fourier 变换 (或如通常说的 *Fourier* 像)

$$\Pi_A(t)=\begin{cases}\frac{1}{2A}, & |t|\le A\\ 0, & |t|>A\end{cases}$$

(矩形脉冲);

解 (下面统一记题目给出的函数为 f)

知

$$\mathfrak{F}[f](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi_A(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2A}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{4\pi A}\frac{1}{-i\omega}(e^{-i\omega A}-e^{i\omega A})=\frac{\sin\omega A}{2\pi\omega A}$$

特别地, 当 $\omega=0$ 时知 $\mathfrak{F}[f](0)=\frac{1}{2\pi}$, 从而:

$$\mathfrak{F}[F](\Omega)=\begin{cases}\frac{\sin\omega A}{2\pi\omega A}, & \omega\neq 0\\ \frac{1}{2\pi}, & \omega=0\end{cases}$$

$$\Pi_A(t)\cos\omega_0 t$$

(用矩形脉冲调制的简谐信号);

解

知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f](\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi_A(t)\cos\omega_0 t\cdot e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2A}\cos\omega_0 t\cdot e^{-i\omega t}dt\\&=\frac{1}{4\pi A}\int_{-A}^{A}\cos\omega_0 t(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt=\frac{1}{4\pi A}\int_{-A}^{A}\cos\omega_0 t\cos\omega t dt\\&=\frac{1}{4\pi A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}(\cos(\omega+\omega_0)t+\cos(\omega-\omega_0)t)dt\\&=\frac{1}{8\pi A}(\int_{-A}^{A}\cos(\omega+\omega_0)tdt+\int_{-A}^{A}\cos(\omega-\omega_0)tdt)\\&=\frac{1}{8\pi A}(\frac{1}{\omega+\omega_0}(\sin(\omega+\omega_0)A-\sin(\omega+\omega_0)(-A))+\frac{1}{\omega-\omega_0}(\sin(\omega-\omega_0)A-\sin(\omega-\omega_0)(-A)))\\&=\frac{1}{4\pi A(\omega+\omega_0)}\sin(\omega+\omega_0)A+\frac{1}{4\pi A(\omega-\omega_0)}\sin(\omega-\omega_0)A,\quad\omega\neq\pm\omega_0\end{aligned}$$

而当 $\omega = \pm\omega_0 \neq 0$, 知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f](\omega_0) &= \frac{1}{4\pi A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}(\cos 2\omega_0 t + 1)dt = \frac{\sin 2\omega_0 A}{8\pi\omega_0 A} + \frac{1}{4\pi}\\ \mathfrak{F}[f](-\omega_0) &= \frac{1}{4\pi A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}(1 + \cos\omega_0 t)dt = \frac{\sin 2\omega_0 A}{8\pi\omega_0 A} + \frac{1}{4\pi}\end{aligned}$$

最后, 当 $\omega = \omega_0 = 0$, 显见 $\mathfrak{F}[f](0) = \frac{1}{2\pi}$. 综上:

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \begin{cases}\frac{1}{4\pi A(\omega+\omega_0)}\sin(\omega+\omega_0)A + \frac{1}{4\pi A(\omega-\omega_0)}\sin(\omega-\omega_0)A, & \omega \neq \pm\omega_0\\ \frac{\sin 2\omega_0 A}{8\pi\omega_0 A} + \frac{1}{4\pi}, & \omega = \pm\omega_0 \neq 0\\ \frac{1}{2\pi}, & \omega = \omega_0 = 0\end{cases}$$

$$\Pi_A(t+2A) + \Pi_A(t-2A)$$

(两个同一极性矩形脉冲)

解

记题设函数为 $f_{2A} + f_{-2A}$, 根据前面推知的 Fourier 变换的线性性知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f_{2A} + f_{-2A}](\omega) &= \mathfrak{F}[f_{2A}](\omega) + \mathfrak{F}[f_{-2A}](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi_A(t+2A)e^{-i\omega t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi_A(t-2A)e^{-i\omega t}dt\\ &= \frac{1}{4\pi A}\int_{-3A}^{-A}e^{-i\omega t}dt + \frac{1}{4\pi A}\int_{A}^{3A}e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{4\pi A}\int_{A}^{3A}e^{i\omega t}dt + \frac{1}{4\pi A}\int_{A}^{3A}e^{-i\omega t}dt\\ &= \frac{1}{4\pi A}\int_{A}^{3A}2\cos\omega t dt = \frac{1}{2\pi\omega A}(\sin 3\omega A - \sin\omega A)\end{aligned}$$

特别地, 当 $\omega = 0$ 时知 $\mathfrak{F}[f_{2A} + f_{-2A}](0) = \frac{1}{\pi}$, 从而

$$\mathfrak{F}[f_{2A} + f_{-2A}](\omega) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi\omega A}(\sin 3\omega A - \sin\omega A), & \omega \neq 0\\ \frac{1}{\pi}, & \omega = 0\end{cases}$$

$$\Pi_A(t-A) - \Pi_A(t+A)$$

(两个不同极性的矩形脉冲);

解

记题设函数为 $f_{-A} - f_A$, 根据前面推知的 Fourier 变换的线性性知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f_{-A} - f_A](\omega) &= \mathfrak{F}[f_{-A}](\omega) - \mathfrak{F}[f_A](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi_A(t-A)e^{-i\omega t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi_A(t+A)e^{-i\omega t}dt\\ &= \frac{1}{4\pi A}\int_{0}^{2A}e^{-i\omega t}dt + \frac{1}{4\pi A}\int_{-2A}^{0}e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{4\pi A}\int_{-2A}^{2A}e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{4\pi A}\int_{-2A}^{2A}\cos\omega t dt\\ &= \frac{1}{2\pi\omega A}\sin 2\omega A\end{aligned}$$

特别地, 当 $\omega=0$ 时知 $\mathfrak{F}[f_{-A}-f_A](0)=\frac{1}{\pi}$, 从而

$$\mathfrak{F}[f_{-A}-f_A](\omega)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi\omega A}\sin 2\omega A, & \omega\neq 0\\ \frac{1}{\pi}, & \omega=0\end{cases}$$

$$\Lambda_A(t)=\begin{cases}\frac{1}{A}(1-\frac{|t|}{A}), & |t|\le A\\ 0, & |t|>A\end{cases}$$

(三角形脉冲);

解

知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f](\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda_A(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{1}{A}(1-\frac{|t|}{A})e^{-i\omega t}dt\\&=\frac{1}{2\pi A}\int_{-A}^{A}e^{-i\omega t}dt-\frac{1}{2\pi A^2}\int_{-A}^{A}|t|e^{-i\omega t}dt\\&=\frac{1}{2\pi A}\int_{-A}^{A}\cos\omega tdt-\frac{1}{\pi A^2}\int_{0}^{A}t\cos\omega tdt\\&=\frac{1}{\pi A}\sin\omega A-\frac{1}{\pi A^2}(\frac{1}{\omega}A\sin\omega A+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega A-\frac{1}{\omega^2})\\&=\frac{1}{\pi A}\sin\omega A-\frac{1}{\pi\omega A}\sin\omega A+\frac{1}{\pi\omega^2A^2}(1-\cos\omega A)\end{aligned}$$

特别地, 当 $\omega=0$ 时知 $\mathfrak{F}[f](0)=\frac{1}{2\pi}$, 从而

$$\mathfrak{F}[f](\omega)=\begin{cases}\frac{1}{\pi A}\sin\omega A-\frac{1}{\pi\omega A}\sin\omega A+\frac{1}{\pi\omega^2A^2}(1-\cos\omega A), & \omega\neq 0\\ \frac{1}{2\pi}, & \omega=0\end{cases}$$

$$\cos at^2\text{和}\sin at^2(a>0)$$

解

设 $f(t)=\cos at^2, g(t)=\sin at^2$, 并记:

$$\mathfrak{F}_N[f](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\cos at^2e^{-i\omega t}dt$$
$$\mathfrak{F}_N[g](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\sin at^2e^{-i\omega t}dt$$

进而知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_N[f](\omega)&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-i\omega}\int_{-N}^{N}\cos at^2de^{-i\omega t}\\&=-\frac{1}{2i\pi\omega}(\cos at^2e^{-i\omega t}|_{-N}^{N}+2a\int_{-N}^{N}te^{-i\omega t}\sin at^2dt)\\&=-\frac{1}{2i\pi\omega}(-2i\cos aN^2\sin\omega N+2a\int_{-N}^{N}te^{-i\omega t}\sin at^2dt)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi\omega}\cos aN^2\sin\omega N + \frac{ai}{\pi\omega}\int_{-N}^{N} tr^{-i\omega t}\sin at^2 dt \\
\mathfrak{F}_N[g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-i\omega}\int_{-N}^{N}\sin at^2 de^{-i\omega t} \\
&= -\frac{1}{2i\pi\omega}(\sin at^2 e^{-i\omega t}|_{-N}^{N} - 2a\int_{-N}^{N} te^{-i\omega t}\cos at^2 dt) \\
&= -\frac{1}{2i\pi\omega}(-2i\sin aN^2\sin\omega N - 2a\int_{-N}^{N} te^{-i\omega t}\cos at^2 dt) \\
&= \frac{1}{\pi\omega}\sin aN^2\sin\omega N - \frac{ai}{\pi\omega}\int_{-N}^{N} te^{-i\omega t}\cos at^2 dt
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega}\mathfrak{F}_N[f](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\cos at^2(-ite^{-i\omega t})dt = -\frac{i}{2\pi}\int_{-N}^{N} t\cos at^2 e^{-i\omega t}dt \\
\frac{d}{d\omega}\mathfrak{F}_N[g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\sin at^2(-ite^{-i\omega t})dt = -\frac{i}{2\pi}\int_{-N}^{N} t\sin at^2 e^{-i\omega t}dt
\end{aligned}
$$

这便得到

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}_N[f](\omega) &= \frac{1}{\pi\omega}\cos aN^2\sin\omega N - \frac{2a}{\omega}\frac{d}{d\omega}\mathfrak{F}_N[g](\omega) \\
\mathfrak{F}_N[g](\omega) &= \frac{1}{\pi\omega}\sin aN^2\sin\omega N + \frac{2a}{\omega}\frac{d}{d\omega}\mathfrak{F}_N[f](\omega)
\end{aligned}
$$

为了简便起见, 记:

$$
\begin{aligned}
y_1(\omega) &= \mathfrak{F}_N[g](\omega) \\
y_2(\omega) &= \mathfrak{F}_N[f](\omega) \\
\boldsymbol{y}(\omega) &= (y_1, y_2)^T \\
h_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi a}\cos aN^2\sin\omega N \\
h_2(\omega) &= -\frac{1}{2\pi a}\sin aN^2\sin\omega N
\end{aligned}
$$

则进一步需要考虑线性非齐次方程组:

$$
\boldsymbol{y}'(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega}{2a} \\ \frac{\omega}{2a} & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}(\omega) + \begin{pmatrix} h_1(\omega) \\ h_2(\omega) \end{pmatrix}
$$

首先考虑与之相应的齐次方程组:

$$
\begin{cases} y_1' = -\frac{\omega}{2a}y_2 \\ y_2' = \frac{\omega}{2a}y_1 \end{cases}
$$

将第二式两边对 ω 求导并将第一式代入得

$$
y_2'' = -\frac{\omega^2}{4a^2}y_2 + \frac{1}{2a}y_1 \Rightarrow y_1 = 2ay_2'' + \frac{\omega^2}{2a}y_2
$$

代回到第一式有

$$
4a^2y_2''' + \omega^2y_2' + 3\omega y_2 = 0
$$

(这之后就不会解这个方程了...)

查阅师兄所给的资料可得这两个函数的 Fourier 逆变换为:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos((\sqrt{a}t)^2) e^{it(\sqrt{a}\omega)} d(\sqrt{a}t) = \frac{1}{4}(\cos\frac{a\omega^2}{2} + \sin\frac{a\omega^2}{2})$$
$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin((\sqrt{a}t)^2) e^{it(\sqrt{a}\omega)} d(\sqrt{a}t) = \frac{1}{4}(\cos\frac{a\omega^2}{2} - \sin\frac{a\omega^2}{2})$$

$$|t|^{-\frac{1}{2}} \text{和} |t|^{-\frac{1}{2}} e^{-a|t|} (a > 0)$$

解

对第一个式子, 知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{-\frac{1}{2}} \cos\omega t dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

对第二个式子, 知

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{-\frac{1}{2}} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{-\frac{1}{2}} e^{-a|t|} \cos\omega t dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{\cos\omega t}{\sqrt{t}} dt = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+a)} \cos\omega t du \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+a)} \cos\omega t dt = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{u^2+a}{\omega^2 + (u^2+a)^2} du\end{aligned}$$

下面求解 $\int_0^{+\infty} \frac{u^2+a}{\omega^2+(u^2+a)^2} du$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{u^2+a}{\omega^2+(u^2+a)^2} du &= \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{\omega^2+(u^2+a)^2} + \frac{a}{\omega^2+(u^2+a)^2}) du \\ &= \int_0^{+\infty} (\frac{u^2}{(u^2+a+i\omega)(u^2+a-i\omega)} + \frac{a}{(u^2+a+i\omega)(u^2+a-i\omega)}) du \\ &= \int_0^{+\infty} (\frac{\frac{1}{2} - i\frac{a}{2\omega}}{u^2+a+i\omega} + \frac{\frac{1}{2} + i\frac{a}{2\omega}}{u^2+a-i\omega} + \frac{i\frac{a}{2\omega}}{u^2+a+i\omega} + \frac{-i\frac{a}{2\omega}}{u^2+a-i\omega}) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\frac{1}{a+i\omega} \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{a+i\omega}}u)^2+1} + \frac{1}{a-i\omega} \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{a-i\omega}}u)^2+1}) du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} (\frac{1}{\sqrt{a+i\omega}} + \frac{1}{\sqrt{a-i\omega}}) = \frac{\pi}{4} (\frac{\sqrt{a-i\omega} + \sqrt{a+i\omega}}{\sqrt{a^2+\omega^2}}) \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \cdot \sqrt{a+i\omega+a-i\omega+2(a^2+\omega^2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{a^2+\omega^2} + 1}\end{aligned}$$

从而代入知

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{a}{a^2+\omega^2} + 1}$$

(d) 试求下列函数的 Fourier 原像:

$$\operatorname{sinc}\frac{\omega A}{\pi}, \quad 2i\frac{\sin^2 \omega A}{\omega A}, \quad 2\operatorname{sinc}^2\frac{\omega A}{\pi}$$

这里 $\mathrm{sinc}\frac{x}{\pi} := \frac{\sin x}{x}$ 是读数函数.

解

统一记给出的函数为 f_1, f_2, f_3, 知

$$\tilde{f}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega A}{\omega A}e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega A}{\omega A}\cos\omega x d\omega$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\cos\frac{x}{A}udu = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\cos|\frac{x}{A}|udu = \begin{cases} \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |x| < |A| \\ \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |x| = |A| \\ 0, & |x| > |A| \end{cases}$$

$$\tilde{f}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}2i\frac{\sin^2\omega A}{\omega A}e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}2i\frac{\sin^2\omega A}{\omega A}\cdot i\sin\omega x d\omega$$
$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega A}{\omega A}\sin\omega x d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega A}d\omega - \int_0^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega A}\cos 2\omega A d\omega)$$
$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{sgn}(x)(\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega|x|}{\omega A}d\omega - \int_0^{\infty}\frac{\sin\omega|x|}{\omega A}\cos 2\omega A d\omega)$$
$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{sgn}(x)(\frac{1}{A}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{A}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\cos\frac{2A}{|x|}udu) = \begin{cases} 0, & |x| > 2A \\ -\frac{1}{A}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\mathrm{sgn}(x), & |x| = 2A \\ -\frac{1}{A}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sgn}(x), & |x| < 2A \end{cases}$$

$$\tilde{f}_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_3(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}2\frac{\sin^2\omega A}{\omega A}\frac{e^{i\omega x}}{\omega A}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}2\frac{\sin^2\omega A}{\omega A}\frac{\cos\omega x}{\omega A}d\omega$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega A}{\omega A}\cdot\frac{1}{\omega A}(\sin(A+x)\omega + \sin(A-x)\omega)d\omega$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega A}{\omega A}\frac{\sin(A+x)\omega}{\omega A}d\omega + \int_0^{\infty}\frac{\sin\omega A}{\omega A}\frac{\sin(A-x)\omega}{\omega A}d\omega)$$
$$= \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin(1+\frac{x}{A})u}{u}du + \int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin(1-\frac{x}{A})u}{u}du) = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2 - \mathrm{sgn}(x)\frac{|x|}{A})$$

即得欲求.

(e) 利用上边的结果, 求下述我们已经遇到过的积分的值:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2 dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2 dx$$

解

首先证明下述命题成立:(这个命题目前还没有证出来, 按照下述的过程来的话应该证明对 $\xi \to 0$ 的极限关于 A 一致, 自己卡在这一步了.)

命题 14.8.1 *如果 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 存在, 那么*

$$\lim_{\xi\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx = \lim_{\xi\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\xi\to 0}\hat{f}(\xi) = \lim_{\xi\to 0}\tilde{f}(\xi).$$

证明

考虑证明:

$$\lim_{\xi\to0}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)e^{i\xi x}dx=\lim_{A\to+\infty}\lim_{\xi\to0}\int_{-A}^{A}f(x)e^{i\xi x}dx$$

进而可以考虑对于每一个给定的 A, 有

$$\int_{-A}^{A}f(x)e^{i\xi x}dx\rightrightarrows\int_{-A}^{A}f(x)dx,\quad \xi\to0$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 不妨就令 $\delta=\delta(\varepsilon)<\frac{1}{\varepsilon^2}<\frac{1}{A^2}$ 足够小, 此时当 $0<|\xi|<\delta$, 知 $|\xi x|<\delta A$ 有:

$$\begin{aligned}
&|\int_{-A}^{A}f(x)e^{i\xi x}dx-\int_{-A}^{A}f(x)dx|\\
=&|\int_{-A}^{A}f(x)(e^{i\xi x}-1)dx|\sim|\int_{-A}^{A}f(x)(i\xi x+\frac{(i\xi x)^2}{2})dx|\\
\le&|\int_{-A}^{A}f(x)(\xi x)dx|+\frac{1}{2}|\int_{-A}^{A}f(x)(\xi x)^2dx|
\end{aligned}$$

记上述函数分别对应的 Fourier 原像为 $f_1.f_2,f_3,f_4$, 知:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx&=\lim_{\xi\to0}\sqrt{2\pi}f_1(\xi)=\pi\\
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx&=\lim_{\xi\to0}\sqrt{2\pi}f_2(\xi)=\pi\\
\int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2dx&=\lim_{\xi\to0}\sqrt{2\pi}f_3(\xi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\\
\int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2dx&=\lim_{\xi\to0}\sqrt{2\pi}f_4(\xi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

(f) 验证函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分可以写成以下任一种形式:

$$\begin{aligned}
f(t)\sim\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(\omega)e^{it\omega}d\omega&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega(x-t)}dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos 2\omega(x-t)dx
\end{aligned}$$

证明

知[5]

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(\omega)e^{it\omega}d\omega=&\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\omega}dx)e^{it\omega}d\omega\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\omega(t-x)}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega(x-t)}dx\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega(x-t)}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega(x-t)d\omega\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos 2u(x-t)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos 2\omega(x-t)d\omega\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos 2\omega(x-t)dx
\end{aligned}$$

[5] 这里感觉题目的 $\hat f(\omega)$ 写成 $\mathfrak{F}[f](\omega)$ 或许更合适? 因为 $\hat f(\omega)$ 乘的常数是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, 似乎凑不到 $\frac{1}{2\pi}$ 上... 下面的过程是按 $\mathfrak{F}[f](\omega)$ 来算的.

上式中第二行证明了第一个欲证式, 第三行考虑了被积函数的奇偶性, 其中的所有积分换序依照 Fubini 定理.

14.9 第九次作业

11 月 18 日作业

1. 设 $f = f(x,y)$ 是二维 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ 在半平面 $y \geq 0$ 上满足以下条件的解: $f(x,0) = g(x)$, 而且对任何 $x \in \mathbb{R}$ 当 $y \to +\infty$ 时有 $f(x,y) \to 0$.

(a) 验证函数 f 关于变量 x 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi,y)$ 具有 $\hat{g}(\xi)e^{-y|\xi|}$ 的形式.

证明

在 Laplace 方程两边同时对 x 应用 Fourier 变换有:

$$(i\xi)^2\hat{f}(\xi,y) + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2}(\xi,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2}(\xi,y) = \xi^2\hat{f}(\xi,y)$$

将 $\hat{f}(\xi,y) = \hat{g}(\xi)e^{-y|\xi|}$ 代入上述方程有:

$$|\xi|^2\hat{g}(\xi)e^{-y|\xi|} = \xi^2\hat{g}(\xi)e^{-y|\xi|} = |\xi|^2\hat{g}(\xi)e^{-y|\xi|}$$

显然成立! 故命题即证.

(b) 试求函数 $e^{-y|\xi|}$ 关于变量 ξ 的 Fourier 原像.

解

记 $h(\xi,y) = e^{-y|\xi|}$, 知

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y|\xi|}e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y|\xi|}\cos x\xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-y\xi}\cos x\xi d\xi \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-y\xi}d\sin x\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\sin x\xi de^{-y\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x}\int_0^{+\infty} e^{-y\xi}\sin x\xi d\xi \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-y\xi}d\cos x\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2}(-1 - \int_0^{+\infty}\cos x\xi de^{-y\xi}) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2y}{x^2}(-1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}y\tilde{h}(x,y)) \\
\Rightarrow \tilde{h}(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

(c) 现在, 试求函数 f 的 Poisson 积分形式的表达式

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}g(\xi)d\xi$$

解

记 $g(x,y) := g(x)$, 知:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \tilde{\hat{f}}(x,y) = (\widetilde{\hat{\ } \cdot h})(x,y) = (\tilde{\hat{g}} * \tilde{h})(x,y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{h}(x-\xi,y)g(\xi,y)d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}g(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

11 月 21 日作业

1.

(a) 验证函数 $e^{-a|\boldsymbol{x}|}(a>0)$ 以及它的对 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 的一切导数, 在无穷远处的减小速度比变量 $|\boldsymbol{x}|$ 的任何负指数幂都快. 尽管如此, 这个函数并不属于函数类 S.

证明

对于 $e^{-a|\boldsymbol{x}|}$, 题即证明对任意的 $\alpha>0$ 有

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\frac{|\boldsymbol{x}|^{\alpha}}{e^{a|\boldsymbol{x}|}}=0$$

注意到对任意给定的 α:

$$|\frac{|\boldsymbol{x}|^{\alpha}}{e^{a|\boldsymbol{x}|}}|\leq\frac{|\boldsymbol{x}|^{\alpha}}{1+a|\boldsymbol{x}|+\cdots+\frac{1}{[\alpha+1]!}(a|\boldsymbol{x}|)^{[\alpha+1]}}\leq\frac{[\alpha+1]!}{a^{[\alpha+1]}}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\to 0$$

从而该情况得证.

记 $f(\boldsymbol{x})=e^{-a|\boldsymbol{x}|}$, 对任意导数 $D^{|\alpha|}f(\boldsymbol{x})$, 考虑对 $|\alpha|$ 用归纳法. $|\alpha|=0$ 的情况已证, 现设 $|\alpha|=m-1$ 时结论成立, 对 $|\alpha|=m$, 知 $D^m f(\boldsymbol{x})$ 只能是 $D^{m-1}f(\boldsymbol{x})$ 在某一个分量上所新求的一次偏导, 不妨就设这个分量为 x^1, 即 $D^m f(\boldsymbol{x}):=\frac{\partial}{\partial x^1}D^{m-1}f(\boldsymbol{x})$, 并记 $(x^2,\cdots,x^n)=\hat{\boldsymbol{x}}$. 已知:

$$\forall\beta>0\forall\varepsilon>0\exists M>0\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n(|\boldsymbol{x}|>M\Rightarrow||\boldsymbol{x}|^{\beta}D^{m-1}f(\boldsymbol{x})|<\varepsilon)$$

用反证法, 如果存在 $\beta_0\in\mathbb{N},\varepsilon_0>0$, 使得对任意的 $M>0$ 都存在 $|\boldsymbol{x}_0|=|(x_0^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|>M$, 且 $||(x^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}D^m f(x_0^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|\geq\varepsilon_0$, 不失一般性, 考虑:

$$|(x_0^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}D^m f(x_0^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)\geq\varepsilon_0$$

也即

$$|(x_0^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}\frac{\partial}{\partial x^1}D^{m-1}f(x_0^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)\geq\varepsilon_0$$

有:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}D^{m-1}f(x_0^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)\geq\frac{\varepsilon_0}{|(x_0^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}}$$

显然 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 上是 $C^{(\infty)}$ 类, 从而存在 $\delta>0$, 使得上式在集合 $\{(x^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)\in\mathbb{R}^n|x_0^1-\delta<x<x_0^1+\delta\}$ 上都成立, 进而两边对 x^1 在 $(x_0^1-\delta,x_0^1+\delta)$ 上积分有:

$$\begin{aligned}\int_{x_0^1-\delta}^{x_0^1+\delta}\frac{\partial}{\partial x^1}D^{m-1}f(x^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)dx^1&=D^{m-1}f(x_0^1+\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)-D^{m-1}f(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)\\&\geq\int_{x_0^1-\delta}^{x_0^1+\delta}\frac{\varepsilon_0}{|(x^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}}dx^1\geq\int_{x_0^1-\delta}^{x_0^1+\delta}\frac{\varepsilon_0}{|x_0^1+\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0|^{\beta_0}}dx^1=\frac{2\delta\varepsilon_0}{|(x_0^1+\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}}\end{aligned}$$

其中第二行积分的放缩默认了 $x_0^1\leq 0$, 对于 $x_0^1<0$ 的操作类似, 在此不再赘述. 根据归纳假设, 注意到:

$$\begin{aligned}&|D^{m-1}f(x_0^1+\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)-D^{m-1}f(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|\\\leq&|D^{m-1}f(x_0^1+\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|+|D^{m-1}f(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|\\<&\frac{\varepsilon}{|(x_0^1+\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta}}+\frac{\varepsilon}{|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta}}\leq\frac{2\varepsilon}{|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta}}\end{aligned}$$

现在令 $\varepsilon=\varepsilon_0$, 则希望找到 β 使得:

$$\frac{2}{|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta}}<\frac{2\delta}{|(x_0^1+\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}}$$

注意到在 δ 足够小 (至少满足 $|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|>|(2\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|$) 时有估计:

$$\frac{2\delta}{|(x_0^1+\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}}=\frac{2\delta}{|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)+(2\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}}\geq\frac{2\delta}{(|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|+|2\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0|)^{\beta_0}}\geq\frac{2}{2^{\beta_0}|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}}$$

故只需要

$$\frac{2}{|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta}}<\frac{2}{2^{\beta_0}|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|^{\beta_0}}$$

既然现在 $x_0^1,\hat{\boldsymbol{x}}_0,\beta_0,\delta$ 都已经固定, 只需取

$$\beta>\frac{\beta_0\ln(2|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|)}{\ln(|(x_0^1-\delta,\hat{\boldsymbol{x}}_0)|)}$$

即可, 进而导出矛盾, 从而只能有归纳假设对于 $|\alpha|=m$ 也成立, 进而由归纳法即得命题.

至于 $f(\boldsymbol{x})\notin S$, 这只需验证 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\{0\}$ 处不可导, 注意到:

$$\frac{1-e^{-a|\boldsymbol{h}|}}{|\boldsymbol{h}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{h}|}(1-1+a|\boldsymbol{h}|-\frac{1}{2}a^2|\boldsymbol{h}|^2+o(|\boldsymbol{h}|^2))=a-\frac{a^2}{2}|\boldsymbol{h}|+o(|\boldsymbol{h}|),\quad |\boldsymbol{h}|\to 0$$

届于上右端式中常数项 a 的存在, 上述极限并不满足 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\{0\}$ 处可微的定义, 进而其在 $\{0\}$ 处不可导. 但函数类 S 要求 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可导, 进而 $f(\boldsymbol{x})\notin S$, 命题得证.

(b) 试证, 这个函数的 Fourier 变换在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微, 但不属于函数类 S(仍然是因为 $e^{-a|x|}$ 在 $x=0$ 不可微).

证明

对一元函数 $f(x)=e^{-a|x|}$ 作 Fourier 变换有:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi)&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}e^{-i\xi x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}\cos\xi x dx=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos\xi x dx\\&=\frac{2}{\xi}\int_0^{+\infty}e^{-ax}d\sin\xi x=\frac{2a}{\xi}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin\xi x dx=-\frac{2a}{\xi^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}d\cos\xi x\\&=-\frac{2a}{\xi^2}(-1+a\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos\xi x dx)=-\frac{2a}{\xi^2}(-1+\frac{a}{2}\hat{f}(\xi))\Rightarrow\hat{f}(\xi)=\frac{2a}{a^2+\xi^2}\end{aligned}$$

根据表达式显然有 $\hat{f}(\xi)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微, 但令 $\beta=3$ 即有 $|\xi^\beta\hat{f}(\xi)|\to+\infty,\xi\to\infty$, 进而 $\hat{f}(\xi)\notin S$.

2.

(a) 试证函数类 S 的函数在空间 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 中稠密, 这里 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 是由绝对平方可积函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 构成的, 在其中定义了内积 $\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}(f\cdot\overline{g})(x)dx$, 由这个内积产生的范数 $\parallel f\parallel=(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$ 以及距离 $d(f-g)=\parallel f-g\parallel$.

证明[6]

注意到

$$C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})\subset S\subset\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$$

从而如果能证明 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 在 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 中稠密, 自然可得欲证. 现在设 $\mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 是 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 中的紧支函数构成的空间, 首先证明 $\mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 在 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ 中稠密.

任取 $f(\boldsymbol{x})\in\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, 考虑示性函数列:

$$X_k(\boldsymbol{x}):=\begin{cases}1, & |\boldsymbol{x}|\leq k\\0, & |\boldsymbol{x}|>k\end{cases}$$

[6]在为了方便做记号的基础上改动了原题的记号

则显然有任给 $k \in \mathbb{N}$, $f_k(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) \cdot X_k(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, 进而只需证明 $\| f_k - f \| \to 0, k \to +\infty$ 即可, 即证:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \to 0, \quad k \to \infty$$

注意到在逐点意义上本身有:

$$|f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})|^2 \to 0, \quad k \to \infty$$

这是因为对于给定的点 $\boldsymbol{x}_0$, 总可以选取 $k > K = [[\boldsymbol{x}_0] + 1]$, 此时

$$|f_k(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)|^2 = |f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)| = 0$$

又注意到显然有 $|f_k(\boldsymbol{x})| \leq |f(\boldsymbol{x})|$, 进而:

$$|f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})|^2 \leq |f_k(\boldsymbol{x})|^2 + 2|f_k(\boldsymbol{x})| \cdot |f(\boldsymbol{x})| + |f(\boldsymbol{x})|^2 \leq 4|f(\boldsymbol{x})|^2$$

但本身有 $f \in \mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} 4|f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} < +\infty$$

从而根据控制收敛定理, 可知:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} \to \int_{\mathbb{R}^n} 0 d\boldsymbol{x} = 0, \quad k \to \infty$$

即知 $f_k(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 的意义下收敛到 $f(\boldsymbol{x})$, 进而 $\mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 在 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 中稠密.

下一步, 证明 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 在 $\mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 中稠密, 这可以通过卷积的方法完成. 考虑下述函数:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} a \cdot \exp(\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1}), & \| \boldsymbol{x} \| < 1, \\ 0, & \| \boldsymbol{x} \| \geq 1 \end{cases}$$

在 10 月 17 日作业的第 1 题中已经证明了函数族 $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\alpha}\varphi(\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha})$ 在 $\alpha \to 0^+$ 时是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $C_0^{(\infty)}$ 类 $\delta-$ 型函数族. 如果 $f \in \mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, 考虑到:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f * \varphi_\alpha|^2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{y})\varphi_\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})|^2 d\boldsymbol{y} \leq \int_{B(\boldsymbol{x},\alpha)} |f(\boldsymbol{y}) \cdot \frac{a}{\alpha} \cdot \exp(\frac{1}{\frac{1}{\alpha^2} \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 - 1})|^2 d\boldsymbol{y} \\ &\leq M\alpha^2 \int_{B(\boldsymbol{x},\alpha)} a^2 \cdot \exp(\frac{2}{\frac{1}{\alpha^2} \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 - 1}) d\boldsymbol{y} < +\infty, \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

其中 M 是 $|f|^2$ 在 $B(\boldsymbol{x}, \alpha)$ 上的一个上界, 从而 $f * \varphi_\alpha \in \mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, 进而 $f * \varphi_\alpha \in \mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. 又根据卷积的定义与对称性:

$$(f * \varphi_\alpha)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\varphi_\alpha(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

这说明 $f * \varphi_\alpha \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. 现在根据恒等逼近定理有:

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \| f * \varphi - f \| = 0$$

这说明 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 中的函数 $f * \varphi_\alpha$ 在 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 的意义下收敛到 $f(\boldsymbol{x})$, 而 $\mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \ni f(\boldsymbol{x})$ 的选取是任意的, 从而 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 在 $\mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 中稠密.

最后, 因为 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 在 $\mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 中稠密, $\mathfrak{R}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 在 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ 中稠密, 可知 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 在 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 中稠密. 又因为 S 包含了 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, 自然便知 S 在 $\mathfrak{R}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ 中稠密, 命题即证.

•[7](b) 现在把 S 看做具有上述距离的距离空间 (即有 $\mathbb{R}^n$ 上均方差意义下的收敛性). 设 $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, 或简记做 L^2, 是距离空间 (S,d) 的完备化. 每个元素 $f \in L_2$ 由函数 $\varphi_k \in S$ 的序列 $\{\varphi_k\}$ 确定, 这个序列是距离 d 意义下的 Cauthy 序列.

试证, 这时函数 φ_k 的 Fourier 像的序列 $\{\hat{\varphi}_k\}$ 也是 S 中的 Cauthy 序列, 因而, 它给出一个确定的元素 $\hat{f} \in L^2$, 这个元素很自然地应叫做元素 $f \in L^2$ 的 Fourier 变换.

证明

由 $\{\varphi_k\}$ 是 Cauthy 列知:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall p,q \in \mathbb{N}(p > q > N \Rightarrow \| \varphi_q + \cdots + \varphi_p \|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_q + \cdots + \varphi_p|^2(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} < \varepsilon)$$

知:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_q(\boldsymbol{t}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_q(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}\\ &\vdots\\ \hat{\varphi}_p(\boldsymbol{t}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_p(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}\| \hat{\varphi}_q + \cdots + \hat{\varphi}_p \|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}_q + \cdots + \hat{\varphi}_p|^2(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\int_{\mathbb{R}^n}(\varphi_q(\boldsymbol{x}) + \cdots + \varphi_p(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}|^2 d\boldsymbol{t}\end{aligned}$$

(c) 在 L_2 中引进自然的代数结构和内积, 关于它们, Fourier 变换 $L_2 \widehat{\to} L_2$ 是 L_2 到自身上的线性同构映射.

(d) 通过函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 这个例子可以看出, 如果 $f \in \mathfrak{R}_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 未必有 $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. 虽然如此, 如果 $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 则由于 f 是局部可积的, 可以考察积分

$$\hat{f}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-\xi x}dx.$$

试验证: $\hat{f}_A \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 且 $\hat{f}_A \in \mathfrak{R}_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(e) 试证: 当 $A \to +\infty$, $\hat{f}_A$ 在 L_2 中趋于某元素 $\hat{f} \in L_2$, 且当 $A \to +\infty$ 时有 $\| \hat{f}_A \| \to \| \hat{f} \| = \| f \|$(这叫 Plancherel 定理).

11 月 23 日作业

1. 我们记得, 量 $M_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$ 叫作函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的 n 阶矩. 特别地, 如果 f 是一个概率分布密度, 亦即 $f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, 则 $x_0 = M_1(f)$ 是具有分布 f 的随机变量 x 的数学期望, 而这个随机变量的方差 $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{+\infty}(x-x_0)^2 f(x)dx$ 能表示成 $\sigma^2 = M_2(f) - M_1(f)$ 的形式.

我们考察函数 f 的下列 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

把 $e^{-i\xi x}$ 展成级数, 试证:

[7]本题剩下的小问我会持续思考并补充, 因为提交作业的时间原因只能先打上标记了.

(a) 如果, 譬如, $f\in S$, 则 $\hat{f}(\xi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^nM_n(f)}{n!}\xi^n$.

证明

注意到若 $f\in S$, 自然有 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx$ 关于 ξ 一致, 从而积分号和求和号可换, 有:

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i\xi x)^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-i\xi)^n\int_{-\infty}^{+\infty}x^nf(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^nM_n(f)}{n!}\xi^n$$

命题即证.

(b) $M_n(f)=(i)^n\hat{f}^{(n)}(0),n=0,1,\cdots$

证明

在 (a) 中两边同对 ξ 求 n 次导有:

$$\hat{f}^{(n)}(\xi)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-i)^kM_k(f)n!}{k!}\xi^{n-k}$$

代入 $\xi=0$ 得:

$$\hat{f}^{(n)}(0)=(-i)^nM_n(f)\Rightarrow M_n(f)=(i)^n\hat{f}^{(n)}(0),\quad n=0,1,\cdots$$

命题即证.

(c) 现设 f 是实值的, 则[8] $\hat{f}(\xi)=A(\xi)e^{i\varphi(\xi)}$, 这里 $A(\xi)$ 是模, 而 $\varphi(\xi)$ 是 $\hat{f}(\xi)$ 的辐角, 同时, $A(\xi)=A(-\xi)$ 和 $\varphi(-\xi)=-\varphi(\xi)$. 为规范起见, 设 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$. 试验证

$$\hat{f}(\xi)=1+i\varphi'(0)\xi+\frac{A''(0)-(\varphi'(0))^2}{2}\xi^2+o(\xi^2),\quad \xi\to 0$$

且

$$x_0:=M_1(f)=-\varphi'(0),\text{而}\sigma^2=M_2(f)-M_1^2(f)=A''(0).$$

证明[9]

将 $\hat{f}(\xi)$ 在 $\xi=0$ 处 Taylor 展开, 由奇偶性可知 $A'(0)=\varphi(0)=0=\varphi''(0)$, 进而:

$$\hat{f}(\xi)-\hat{f}(0)=\hat{f}'(0)\xi+\frac{\hat{f}''(0)}{2}\xi^2+o(\xi^2),\quad \xi\to 0$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i0x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1=A(0)\\
&\hat{f}'(0)=A(0)(i\varphi'(0))e^{i\varphi(0)}+A'(0)e^{i\varphi(0)}=i\varphi'(0)\\
&\hat{f}''(0)=A'(0)(i\varphi'(0))e^{i\varphi(0)}+A(0)(i\varphi''(0))e^{i\varphi(0)}+A(0)(i\varphi'(0))^2e^{i\varphi(0)}+A''(0)e^{i\varphi(0)}+A'(0)(i\varphi'(0))e^{i\varphi(0)}\\
&\qquad=A''(0)-(\varphi'(0))^2
\end{aligned}$$

从而代入即知:

$$\hat{f}(\xi)=1+i\varphi'(0)\xi+\frac{A''(0)-(\varphi'(0))^2}{2}\xi^2+o(\xi^2),\quad \xi\to 0$$

但根据 (a) 同时有:

$$\hat{f}(\xi)=1+(-i)M_1(f)\xi+\frac{(-i)^2M_2(f)}{2}\xi^2+o(\xi^2),\quad \xi\to 0$$

[8] 英文版此处对应的单词是 and.

[9] 该题在第四版和第七版上均有误, 抄录时已改正.

比对知:

$$
\begin{aligned}
x_0 = M_1(f) &= \frac{-i}{i}\varphi'(0) = -\varphi'(0)\\
-\frac{M_2}{2} &= \frac{A''(0)-(\varphi'(0))^2}{2} \Rightarrow M_2 = (\varphi'(0))^2 - A''(0)\\
&\Rightarrow \sigma^2 = (\varphi'(0))^2 + A''(0) - (-\varphi'(0))^2 = A''(0)
\end{aligned}
$$

命题即证.

2. *测不准原理.* 设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(p)$ 是 S 类函数 (或 11 月 21 日作业第 2 题中空间 L_2 的元素), 而且 $\psi=\hat{\varphi}$ 以及 $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2(p)dp=1$. 在这种情况下, 函数 $|\varphi|^2$ 和 $|\psi|^2$ 可以分别看做是两个随机变量 x 和 p 的概率分布密度.

(a) 试证: 可用函数 φ 的自变量位移 (相当于特别选取自变量的起算点), 不改变量 $\|\hat{\varphi}\|$, 但能使得到的新函数 φ, 使 $M_1(|\varphi|^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x|\varphi|^2(x)dx=0$, 然后, 在不改变 $M_1(|\varphi|^2)=0$ 的前提下, 对函数 ψ 经过类似的自变量位移达到使 $M_1(|\psi|^2)=\int_{-\infty}^{\infty}p|\psi|^2(p)dp=0$.

令

$$\varphi_1(x)=\varphi(x+M_1(|\varphi|^2))$$

则知:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi_1}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)e^{-ipx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+M_1(|\varphi|^2))e^{-ipx}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ip(x-M_1(|\varphi|^2))}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipM_1(|\varphi|^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ipx}dx = e^{ipM_1(|\varphi|^2)}\psi(p)
\end{aligned}
$$

从而

$$|\widehat{\varphi_1}(p)| = |\psi(p)| \Rightarrow \|\widehat{\varphi_1}\| = \|\psi\| = \|\hat{\varphi}\|$$

进而上述自变量位移不改变量 $\|\hat{\varphi}\|$, 又考虑:

$$
\begin{aligned}
M_1(|\varphi_1|^2) &= \int_{-\infty}^{\infty}x|\varphi_1|^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}x|\varphi_1(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}x|\varphi(x+M_1(|\varphi|^2))|^2dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(x-M_1(|\varphi|^2))|\varphi|^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}x|\varphi|^2(x)dx - M_1(|\varphi|^2)\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^2(x)dx\\
&= M_1(|\varphi|^2) - M_1(|\varphi|^2) = 0
\end{aligned}
$$

从而 $M_1(|\varphi_1|^2)=0$, 这便是一个满足题意的函数, 令 φ_1 为新的 φ, 记

$$\psi_1(p)=\psi(p+M_1(|\psi|^2))$$

重复上述操作即证命题.

(b) 对于实参数 α, 考察量

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\alpha x\varphi(x)+\varphi'(x)|^2dx \geq 0$$

试根据 Parseval 等式和公式 $\hat{\varphi}'(p)=ip\hat{\varphi}(p)$, 证明 $\alpha^2M_2(|\varphi|^2)-\alpha+M_2(|\psi|^2)\geq 0$.(关于 M_1 和 M_2 的定义可参看本次作业第一题.)

证明

首先知道:

$$M_2(|\varphi|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\varphi|^2(x)dx$$
$$M_2(|\psi|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} p^2|\psi|^2(x)dx$$

进而:

$$\begin{aligned}
0 \le &\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x\varphi(x) + \varphi'(x)|^2 dx \le \int_{-\infty}^{\infty} (|\alpha x\varphi(x)| + |\varphi'(x)|)^2 dx \\
=&\int_{-\infty}^{\infty} (|\alpha x\varphi(x)|^2 + 2|\alpha x\varphi(x)|\cdot|\varphi'(x)| + |\varphi'(x)|^2)dx \\
=&\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x\varphi(x)|^2 dx + 2\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x\varphi(x)|\cdot|\varphi'(x)|dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(p)|^2 dp \\
=&\alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2|\varphi|^2(x)dx + 2|\alpha|\int_{-\infty}^{\infty} |x|\cdot|\varphi(x)|d|\varphi(x)| + \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi'}(p)|^2 dp \\
=&\alpha^2 M_2(|\varphi|^2) + |\alpha|((|x|\cdot|\varphi(x)|^2)_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2(x)dx) + \int_{-\infty}^{\infty} |ip\hat{\varphi}(p)|^2 dp \\
=&\alpha^2 M_2(|\varphi|^2) - |\alpha| + \int_{-\infty}^{\infty} p^2|\psi|^2(p)dp = \alpha^2 M_2(|\varphi|^2) - |\alpha| + M_2(|\psi|^2) \\
\le&\alpha^2 M_2(|\varphi|^2) - \alpha + M_2(|\psi|^2)
\end{aligned}$$

命题即证. 其中第一行是三角不等式, 第三个等号应用了 Parseval 等式, 而第四个等号应用了公式 $\hat{\varphi}'(p) = ip\hat{\varphi}(p)$.

(c) 试由此推出

$$M_2(|\varphi|^2)M_2(|\psi|^2) \ge \frac{1}{4}$$

这个关系式表明函数 φ 本身越" 集中", 它的 Fourier 变换就越" 疏散", 反过来也对.

在量子力学中, 这个关系式叫做测不准原理, 它有具体的物理含义. 譬如, 不可能把量子的坐标和它的动量同时测量精确. 这个基本的事实 (叫作 Heisenberg 测不准原理) 在数学上与上边求出的 $M_2(|\varphi|^2)$ 和 $M_2(|\psi|^2)$ 之间的关系式一致的.

证明

在 (b) 中取实二次函数

$$f(\alpha) = \alpha^2 M_2(|\varphi|^2) - \alpha + M_2(|\psi|^2)$$

则由 $f(\alpha)$ 至多一实根知其判别式非负, 从而:

$$\Delta = 1 - 4M_2(|\varphi|^2)M_2(|\psi|^2) \le 0 \Rightarrow M_2(|\varphi|^2)M_2(|\psi|^2) \ge \frac{1}{4}$$

3.

(a) 试利用例 1 求出用函数

$$\Delta_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}, & |t| \le \alpha \\ 0, & |t| > \alpha \end{cases}$$

表示的信号的谱.

解

知:

$$c(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_\alpha(t)e^{-it\tau}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2\alpha}e^{-it\tau}dt=\frac{\sin\alpha\tau}{2\pi\alpha\tau}.$$

故欲求为 $c(\tau)=\frac{\sin\alpha\tau}{2\pi\alpha\tau}$.

(b) 细致地考察当 $\alpha\to 0^+$ 时[10]函数 $\Delta_\alpha(t)$ 及其谱的变化情况; 按照你的看法, $\delta-$ 函数所表示的单位脉冲的谱是怎样的.

解

当 $\alpha\to 0^+$, 注意到 $\Delta_\alpha(t)$ 越来越靠近 $\delta-$ 型函数, 而 $c(\tau)\to\frac{1}{2\pi},\alpha\to 0^+$. 按照这个趋势来看的话, $\delta-$ 函数所表示的单位脉冲的谱应恒为 $\frac{1}{2\pi}$.

(c) 现在试利用例 2 求出理想低频滤波器 (具频率上限 a) 的输出信号 $\varphi(t)$, 它是单位脉冲 $\delta(t)$ 的响应.

解

由 (b) 知 $\delta(t)$ 的谱为 $\frac{1}{2\pi}$, 进而由例 2 知:

$$\varphi(t)=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2\pi}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\cos\omega t d\omega=\frac{\sin at}{\pi t}$$

即为欲求.

(d) 现在试根据所得到的结果解释科捷列尼科夫级数项的物理意义, 并提供一个以科捷列尼科夫公式

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(\frac{\pi}{a}k)\frac{\sin a(t-\frac{\pi}{a}k)}{a(t-\frac{\pi}{a}k)}$$

为基础播发具有有限谱信号 $f(t)$ 的方案.

解

科捷列尼科夫级数整体可以看做 $f(t)$ 与 $x(t)$ 的离散卷积, 也即输入信号与理想低频滤波器输出信号相应的卷积. 进而要播发有限谱信号 $f(t)$, 只需每隔 $\frac{\pi}{a}$ 传输一次 $f(kt)$ 的值即可.

14.10 第十次作业

11 月 25 日作业

1. *Schwarz* 空间. 试验证:

(a) 如果 $\varphi\in S$, 而 P 是多项式, 则 $(P\cdot\varphi)\in S$.

证明

显然 $\varphi\in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})\Rightarrow(P\cdot\varphi)\in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. 任取 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$, 有:

$$x^\beta(P\cdot\varphi)^{(\alpha)}(x)=x^\beta\sum_{k=0}^{\alpha}C_\alpha^kP^{(k)}(x)\varphi^{(\alpha-k)}(x)$$

[10]第四版在此处有误, 本题已改正.

注意到上述最后一个式子是多个形如 $x^m\varphi^{(l)}(x)$ 的式子相加, 记和为 Σ, 由 $\varphi\in S$ 可知 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\Sigma|<\varepsilon$, 进而 $(P\cdot\varphi)\in S$, 命题即证.

(b) 如果 $\varphi\in S$, 则 $D^\alpha\varphi\in S$ 且 $D^\beta(P\cdot D^\alpha\varphi)\in S$, 这里 α 和 β 是任意多重指标, 而 P 是多项式.

证明

既然 $\varphi\in S$, 知对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ 有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\boldsymbol{x}^\beta D^\alpha\varphi|<\infty$$

现将 α 换成 $\alpha+\alpha_0$, 上式依旧成立, 而根据 $\varphi\in S$ 可知首先有 $\varphi\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, 从而多重指标中的微分次序可以任意交换, 进而对任意的 $\alpha_0\in\mathbb{N}$, 根据上述代换有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\boldsymbol{x}^\beta D^{\alpha+\alpha_0}\varphi|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|\boldsymbol{x}^\beta D^\alpha(D^{\alpha_0}\varphi)|<\varepsilon$$

而显然 $\varphi\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})\Rightarrow\forall\alpha\in\mathbb{N}(D^\alpha\varphi\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}))$, 这便说明了 $D^\alpha\varphi\in S$. 与 (a) 类似, 可以证明 $\varphi\in S\Rightarrow(P\cdot\varphi)\in S$, 其中 P 是多项式. 从而有:

$$\varphi\in S\Rightarrow\forall\alpha\in\mathbb{N}(D^\alpha\varphi\in S)\Rightarrow\forall\alpha\in\mathbb{N}((P\cdot D^\alpha)\in S)\Rightarrow\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}(D^\beta(P\cdot D^\alpha\varphi)\in S).$$

命题即证.

(c) 在 S 中引进以下收敛概念. 函数 $\varphi_k\in S$ 的序列 $\{\varphi_k\}$ 被认为收敛于零, 如果对任何非负多重指标 α,β, 函数序列 $\{x^\beta D^\alpha\varphi_k\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于零. 关系式 $\varphi_k\to\varphi\in S$ 表示 $(\varphi_k-\varphi)\to 0$ 在 S 中.

附加了这里指出的收敛性的速降函数线性空间 S 叫做 Schwarz 空间.

试证: 如果 $\varphi_k\to\varphi$ 在 S 中, 则 $\hat\varphi_k\to\hat\varphi$ 在 S 中当 $k\to\infty$. 这样一来, Fourier 变换是 Schwarz 空间中的线性连续变换.

证明

可以对函数空间 S 的维数作归纳. 知 $\dim S=1$ 时显然成立, 设 $\dim S\le n-1$ 时结论都成立, 对 $\dim S=n$: 由 $S\ni\varphi_k\to\varphi\in S,k\to\infty$ 的定义知:

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}(\boldsymbol{x}^\beta D^\alpha(\varphi_k-\varphi)\rightrightarrows 0).$$

注意到对每个固定的 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$, 有:

$$\boldsymbol{t}^\beta D^\alpha\hat\varphi_k(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{t}^\beta\frac{1}{i^\alpha}\widehat{\boldsymbol{x}^\alpha\varphi_k}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{t}^\beta\frac{1}{i^\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\boldsymbol{x}^\alpha\varphi_k(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{t}^\beta D^\alpha\hat\varphi(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{t}^\beta\frac{1}{i^\alpha}\widehat{\boldsymbol{x}^\alpha\varphi}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{t}^\beta\frac{1}{i^\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\boldsymbol{x}^\alpha\varphi(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}$$

从而:

$$|\boldsymbol{t}^\beta D^\alpha\hat\varphi_k(\boldsymbol{t})-\boldsymbol{t}^\beta D^\alpha\hat\varphi(\boldsymbol{t})|=|\frac{1}{i^\alpha}\boldsymbol{t}^\beta\int_{\mathbb{R}^n}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}|$$

注意到对任意的 $m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{N}$ 有:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} \\
=&\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-it^1x^1}e^{-it^2x^2}\cdots e^{-it^nx^n}dx^1dx^2\cdots dx^n \\
=&\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-it^2x^2}\cdots e^{-it^nx^n}dx^2\cdots dx^n\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))\frac{1}{-it^1}de^{-it^1x^1} \\
=&\frac{1}{it^1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-it^2x^2}\cdots e^{-it^nx^n}dx^2\cdots dx^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x})))e^{-it^1x^1} \\
=&\frac{1}{it^1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x})))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} \\
&\vdots \\
=&\frac{1}{i^{m_1+\cdots+m_n}(t^1)^{m_1}\cdots(t^n)^{m_n}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial^{m_1}x^1\partial^{m_2}x^2\cdots\partial^{m_n}x^n}(\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x})))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}dx
\end{aligned}$$

进而如果记 $\Omega = \{\boldsymbol{t} = (t^1, t^2, \cdots, t^n) \in \mathbb{R}^n | t^1t^2\cdots t^n = 0\}$, 则有:

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{t}^\beta D^\alpha\hat{\varphi}_k(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{t}^\beta D^\alpha\hat{\varphi}(\boldsymbol{t})| \\
=&|\frac{1}{i^\alpha}\boldsymbol{t}^\beta\int_{\Omega\cup(B(0;1)\setminus\Omega)\cup(\mathbb{R}^n\setminus(B(0;1)\cup\Omega))}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}| \\
\le&|\boldsymbol{t}^\beta\int_\Omega\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{t}^\beta\int_{B(0;1)\setminus\Omega}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}| \\
&+|\boldsymbol{t}^\beta\int_{\mathbb{R}^n\setminus(B(0;1)\cup\Omega)}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}| \\
=:&I_1+I_2+I_3
\end{aligned}$$

对 I_1, 根据归纳假设可知 $I_1 \rightrightarrows 0, k\to\infty$.

对 I_2, 注意到 $|\boldsymbol{t}^\beta| \le 1$, 从而

$$|\boldsymbol{t}^\beta\int_{B(0;1)\setminus\Omega}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}| \le |\int_{B(0;1)\setminus\Omega}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}| \rightrightarrows 0, k\to\infty.$$

对 I_3, 注意到此时 $|\boldsymbol{t}| \ge 1$, 从而 $|\boldsymbol{t}| \le |\boldsymbol{t}|^2$, 可得:

$$\begin{aligned}
I_3 &\le (|\boldsymbol{t}|^2)^\beta\int_{\mathbb{R}^n\setminus(B(0;1)\cup\Omega)}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}| \\
&= ((t^1)^2+(t^2)^2+\cdots+(t^n)^2)^\beta|\int_{\mathbb{R}^n\setminus(B(0;1)\cup\Omega)}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}| \\
&= \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n=\beta\\ \beta_1,\cdots,\beta_n\in\mathbb{N}}} C_{\beta_1,\cdots,\beta_n}(t^1)^{2\beta_1}(t^2)^{2\beta_2}\cdots(t^n)^{2\beta_n}|\int_{\mathbb{R}^n\setminus(B(0;1)\cup\Omega)}\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))e^{-i\boldsymbol{t}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}| \\
&= \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n=\beta\\ \beta_1,\cdots,\beta_n\in\mathbb{N}}} C_{\beta_1,\cdots,\beta_n}(t^1)^{2\beta_1}(t^2)^{2\beta_2}\cdots(t^n)^{2\beta_n}\cdot|\frac{1}{i^{(2\beta)}(t^1)^{2\beta_1}\cdots(t^n)^{2\beta_n}}| \\
&\times|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^{2\beta}}{\partial^{2\beta_1}x^1\cdots\partial^{2\beta_n}x^n}(\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x})))d\boldsymbol{x}| \\
&\le M\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n=\beta\\ \beta_1,\cdots,\beta_n\in\mathbb{R}^n}}|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^{2\beta}}{\partial^{2\beta_1}x^1\cdots\partial^{2\beta_n}x^n}(\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x})))d\boldsymbol{x}| < M_2\varepsilon, \quad k\to\infty
\end{aligned}$$

这其中 $C_{\beta_1,\cdots,\beta_n}$ 是关于 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的常数, M, M_1 是足够大的常数, 最后一步是因为:

$$\begin{aligned}&((\varphi_k-\varphi)\in S\Rightarrow \boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k-\varphi)\in S\Rightarrow \frac{\partial^{2\beta}}{\partial^{2\beta_1}x^1\cdots\partial^{2\beta_n}x^n}(\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k-\varphi))\in S)\\ \Rightarrow&(S\ni(\varphi_k-\varphi)\to 0\Rightarrow S\ni(\frac{\partial^{2\beta}}{\partial^{2\beta_1}x^1\cdots\partial^{2\beta_n}x^n}(\boldsymbol{x}^\alpha(\varphi_k-\varphi))\to 0))\end{aligned}$$

从而综上所述, 知:

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}(\boldsymbol{t}^\beta D^\alpha(\hat{\varphi}_k-\hat{\varphi})\rightrightarrows 0)$$

这说明在 S 中有

$$\hat{\varphi}_k-\hat{\varphi}\to 0,$$

也即

$$\hat{\varphi}_k\to\hat{\varphi}.$$

命题即证.

2. 如果函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的 Fourier 变换 $\breve{\mathfrak{F}}[f]$ 由公式

$$\breve{f}(\nu):=\breve{\mathfrak{F}}[f](\nu):=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt$$

定义, 则许多与 Fourier 变换有关的公式都将变得特别简单和优美.

(a) 试验证: $\hat{f}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\breve{f}(\frac{u}{2\pi})$.

证明[11]

知

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\breve{f}(\frac{u}{2\pi})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-2\pi i\frac{u}{2\pi}t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}dt=\hat{f}(u).$$

命题即证.

(b) 试证: $\breve{\mathfrak{F}}[\breve{\mathfrak{F}}[f]](t)=f(-t)$, 亦即

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\breve{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t}d\nu.$$

这是 $f(t)$ 按不同频率 ν 的谐波展开的最自然的形式, 而这个展开式中的 $\breve{f}(\nu)$ 是函数 f 的频谱.

证明

知:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\breve{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t}d\nu=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}\hat{f}(2\pi\nu)e^{2\pi i\nu t}d\nu=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)e^{iut}du=f(t)$$

最后的式子正是规范情况下的 Fourier 反演公式, 进而命题得证.

(c) 试验证: $\breve{\delta}=1, \breve{1}=\delta$.

证明

对第一个式子知

$$\begin{aligned}\langle\breve{\delta},\varphi\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-2\pi i\nu t}dt)\varphi(\nu)d\nu=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\nu)e^{-2\pi i\nu t}d\nu\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\breve{\varphi}(t)dt=\breve{\varphi}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=\langle 1,\varphi\rangle\end{aligned}$$

[11] 第四版中本题有误, 抄录时已改正.

从而在广义函数意义下 $\check{\delta}=1$.

对第二个式子知

$$\begin{aligned}\langle\check{1},\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i\nu t}dt)\varphi(\nu)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\nu)e^{-2\pi i\nu t}d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\check{\varphi}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(t)e^{it\cdot 0}dt \\ &= \tilde{\hat{\varphi}}(0) = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

从而在广义函数意义下 $\check{1}=\delta$. 上两式中积分换序的合理性由 $\varphi\in\mathfrak{D}$ 保证.

(d) 试证: Poisson 公式现在可取以下特别优美的形式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\check{\varphi}(n).$$

证明

由 Poisson 公式知

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\check{\varphi}(n) = \sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\hat{\varphi}}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\hat{\varphi}}(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n).$$

命题即证.

11 月 28 日作业

1.

(a) 设 $h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}$ 当 $|z|>R, z\in\mathbb{C}$. 试证: 当 $\mathbb{C}\ni z\to\infty$ 有 $h(z)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}$.

证明

既然 $h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}$, 这便已经假定了至少有 $a_n=O(1), n\to\infty$. 给定 n, 当 $a_n=0$, 可以选择在 $h(z)$ 的展开式中去除 a_nz^{-n} 这一项, 因为 $z\to\infty$ 时的渐近序列 $1, z, \cdots, z^{-n}, z^{-(n+1)}, \cdots$ 在去除 z^n 这一项后形成的新序列依旧是渐近序列, 故 $a_n=0$ 并不影响结论的正确性, 进而不妨选定 $a_n\neq 0$, 在 $z\to\infty$ 时注意到:

$$\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_kz^{-k}}{a_nz^{-n}} = \frac{1}{a_n}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^{n-k} = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}z^{-k} = z^{-n}\cdot\frac{1}{a_n}(h(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kz^{-k})\to 0,$$

这说明在 $z\to\infty$ 时有下述渐近公式序列成立:

$$\begin{aligned}&h(z) = a_0 + o(a_0)\\ &h(z) = a_0 + a_1z_o^{-1}(a_1z^{-1})\\ &\quad\vdots\\ &h(z) = a_0 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n} + o(a_nz^{-n})\\ &\quad\vdots\end{aligned}$$

即 $\mathbb{C}\ni z\to\infty$ 时有 $h(z)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}$.

•[12] (b) 假定方程 $y'(x)+y^2(x)=\sin\frac{1}{x^2}$ 的解 $y(x)$ 当 $x\to\infty$ 时有渐近展开 $y(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^{-n}$, 试求这个展开式的前三项.

解

既然方程的解已经有渐近展开, 知:

$$y^2(x)\simeq c_0^2+2c_0c_1\frac{1}{x}+(2c_0c_2+c_1^2)\frac{1}{x^2}+\cdots$$

又注意到 $\sin\frac{1}{x^2}$ 本身有渐近展开:

$$\sin\frac{1}{x^2}\simeq\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x^6}+\cdots$$

移项有:

$$y'(x)\simeq -c_0^2-2c_0c_1\frac{1}{x}-(2c_0c_2+c_1^2-1)\frac{1}{x^2}-(2c_0c_3+2c_1c_2)\frac{1}{x^3}\cdots$$

再进行形式微分有:

$$y'(x)\simeq -c_1\frac{1}{x^2}-2c_2\frac{1}{x^3}-\cdots$$

比对可得方程:

$$\begin{cases}-c_0^2=0\\ -2c_0c_1=0\\ -(2c_0c_2+c_1^2-1)=-c_1\\ -(2c_0c_3+2c_1c_2)=-2c_2\end{cases}$$

(这个方程解出的 c_1 不唯一, 到这一步之后就不知道怎么写了...)

•[13](c) 试证: 如果 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 当 $|z|<r, z\in\mathbb{C}$, 而当 $\mathbb{C}\ni z\to 0$ 时有 $g(z)\simeq b_1z+b_2z^2+\cdots$, 那么, $f\circ g$ 在点 $0\in\mathbb{C}$ 的某一空心邻域内有定义, 且当 $\mathbb{C}\ni z\to 0$ 有 $(f\circ g)(z)\simeq c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$, 这里系数 $c_0,c_1,\cdots$ 是用在收敛幂级数情况把一个级数代入另一个级数的方法得到的.

证明

当 $f\circ g$ 在 $0\in\mathbb{C}$ 的某空心邻域内有定义, 根据 $g(z)$ 的渐近展开式可知在 $z\to 0$ 时有下述渐近公式序列:

$$\begin{aligned}
&g(z)=b_1z+o(b_1z)\\
&g(z)=b_1z+b_2z^2+o(b_2z^2)\\
&g(z)=b_1z+b_2z^2+b_3z^3+o(b_3z^3)\\
&\qquad\vdots\\
&g(z)=b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots+b_nz^n+o(b_nz^n)\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

[12] 询问过此处可能产生的不唯一性, 没有很好的进展...

[13] 本题没有想出" 有定义" 是怎么证明的, 已经写出的过程是已知有定义推渐近展开式.

将它们逐个代入 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 有:

$$
\begin{aligned}
f(b_1z+o(b_1z)) &= a_0+a_1(b_1z+o(b_1z))+a_2(b_1z+o(b_1z))^2+\cdots=c_0+c_1z+o(c_1z)\\
f(\sum_{k=1}^{2}b_kz^k+o(b_2z^2)) &= a_0+a_1(\sum_{k=1}^{2}b_kz^k+o(b_2z^2))+a_2(\sum_{k=1}^{2}b_kz^k+o(b_2z^2))^2+\cdots=c_0+c_1z+c_2z^2+o(c_2z^2)\\
&\vdots\\
f(\sum_{k=1}^{n}b_kz^k+o(b_nz^n)) &= a_0+a_1(\sum_{k=1}^{n}b_kz^k+o(b_nz^n))+a_2(\sum_{k=1}^{n}b_kz^k+o(b_nz^n))^2+\cdots=\sum_{k=0}^{n}c_kz^k+o(c_kz^k)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

此即欲证的渐近展开.

2. 试证:

(a) 如果 f 在 $x\geq 0$ 是连续正单调函数, 则

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)=\int_0^n f(x)dx+O(f(n))+O(1),\quad \text{当}n\to\infty;$$

证明[14]

当 $f(x)$ 单调减, 知

$$\sum_{k=0}^{n}(f(k)-\int_k^{k+1}f(x)dx)\leq\sum_{k=0}^{n}(f(k)-f(k+1))=f(0)-f(n+1)$$

从而

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}f(k) &\leq \int_0^{n+1}f(x)dx+f(0)-f(n+1)=\int_0^n f(x)+\int_n^{n+1}f(x)dx-f(n+1)+f(0)\\
&\leq \int_0^n f(x)dx+f(n)-f(n+1)+f(0)=\int_0^n f(x)dx+O(f(n))+O(1),\quad n\to\infty
\end{aligned}
$$

而当 $f(x)$ 单调增, 知

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)\leq\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_0^{n+1}f(x)dx=\int_0^n f(x)dx+f(n+1)$$

从而

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)=\int_0^n f(x)dx+O(f(n))+O(1),\quad n\to\infty$$

命题即证.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+c+o(1)$, 当 $n\to\infty$.

证明

由 (a), 既然 $\frac{1}{x}$ 在 $x>0$ 是连续正单调函数, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_1^n\frac{1}{x}dx+O(\frac{1}{n})+O(1)=\ln n+o(1)+c,\quad n\to\infty$$

[14] 本题第四版, 第七版均有误, 抄录时已改正.

命题即证.

(c) $\sum\limits_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} \sim \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}$, 当 $n \to \infty$ 和 $\alpha > -1$.

证明

注意到 $x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}$ 在 $x > 2$ 是连续正单增函数, 有:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} &= \int_2^n x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}dx + O(n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}) + O(1) \\
&= \frac{1}{\alpha+1}\int_2^k (\ln x)^{\beta}dx^{\alpha+1} + O(n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}) + O(1) \\
&= \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1}(\ln x)^{\beta})|_2^n - \frac{\beta}{\alpha+1}\int_2^n x^{\alpha}(\ln x)^{\beta-1}dx + O(n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}) + O(1) \\
&= \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1} - \frac{\beta}{\alpha+1}\int_2^n x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}dx + O(n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}) + O(1), \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

下面证明

$$\frac{\beta}{\alpha+1}\int_2^n x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}dx = o(\frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}), \quad n \to \infty$$

这是因为注意到函数的单增性, 有:

$$\frac{\beta}{\alpha+1}\int_2^n x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}dx \le \frac{\beta}{\alpha+1}\cdot(n-2)n^{\alpha}(\ln n)^{\beta-1} \sim \frac{\beta}{\alpha+1}n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta-1} = o(\frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}), \quad n \to \infty$$

又显见

$$O(n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}) = o(\frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}), O(1) = o(\frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}), \quad n \to \infty$$

从而

$$\sum_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} = \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1} + o(\frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}) \sim \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}, \quad n \to \infty$$

命题即证.

3. 用分部积分法求下列函数当 $x \to +\infty$ 时的渐近展开:

(a) $\Gamma_s(x) = \int_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$–不完全 Γ 函数;

解

知

$$\begin{aligned}
\Gamma_s(x) &= -\int_x^{\infty} t^{s-1}de^{-t} = -(t^{s-1}e^{-t})|_x^{\infty} + (s-1)\int_x^{\infty} t^{s-2}e^{-t}dt \\
&\simeq x^{s-1}e^{-x} + (s-1)x^{s-2}e^{-x} + (s-1)(s-2)x^{s-3}e^{-x} + \cdots
\end{aligned}$$

容易验证其为 $x \to +\infty$ 时的渐近展开, 从而此即欲求.

(b) $\mathrm{er}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt$–概率误差函数 (我们提醒注意, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$–Euler-Poisson 积分);

解

令 $u=t^2$, 有:

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-t^2}dt &= \int_{x^2}^\infty \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}du = -\int_{x^2}^\infty \frac{1}{2\sqrt{u}}de^{-u} = -(\frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}})|_{x^2}^\infty + \frac{1}{2}\int_{x^2}^\infty e^{-u}d\frac{1}{\sqrt{u}}\\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{4}\int_{x^2}^\infty \frac{e^{-u}}{u^{\frac{3}{2}}}du = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{4}\frac{e^{-x^2}}{x^3} + \frac{3}{8}\int_{x^2}^\infty \frac{e^{-u}}{u^{\frac{5}{2}}}du\\ &\simeq \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{4}\frac{e^{-x^2}}{x^3} + \frac{3}{8}\frac{e^{-x^2}}{x^{\frac{5}{2}}} + \cdots\end{aligned}$$

容易验证其 $x\to+\infty$ 时的为渐近展开, 进而:

$$\begin{aligned}\text{er}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx - 2\int_x^\infty e^{-t^2}dt)\\ &\simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x^3} - \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x^{\frac{5}{2}}} + \cdots, \quad x\to+\infty\end{aligned}$$

即为欲求.

(c) $F(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^\alpha}dt$, 如果 $\alpha>0$.

解

知

$$\begin{aligned}F(x) &= -\frac{1}{\alpha+1}\int_x^\infty e^{it}dt^{-(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha+1}\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+1}} + \frac{i}{\alpha+1}\int_x^\infty \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}dt\\ &\simeq \frac{1}{\alpha+1}\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+1}} + \frac{i}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+2}} + \frac{i^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+3}} + \cdots, \quad x\to\infty\end{aligned}$$

容易验证其为 $x\to+\infty$ 时的渐近展开, 从而此即欲求.

4. 利用上一练习的结果, 求下列函数当 $x\to+\infty$ 时的渐近展开:

(a) $\text{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$–积分正弦 (我们提醒注意, $\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$–Dirichlet 积分);

解

考虑上一题的 (c), 令 $\alpha=1$ 并取展开式的虚部有:

$$\text{Im}(\int_x^\infty \frac{e^{it}}{t}) = \simeq \frac{1}{2}\frac{\sin x}{x^2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\cos x}{x^3} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\frac{\sin x}{x^4} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{\cos x}{x^5} + \cdots = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n!}\frac{\sin(x+(n-2)\frac{\pi}{2})}{x^n}$$

从而注意到

$$\text{Si}(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} - \text{Im}(\int_x^\infty \frac{e^{it}}{t})$$

代入得

$$\text{Si}(x) \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{6}\frac{\cos x}{x^3} + \cdots = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n!}\frac{\sin(x+(n-2)\frac{\pi}{2})}{x^n}, \quad x\to+\infty$$

此即欲求.

(b) $C(x)=\int_0^x\cos\frac{\pi}{2}t^2dt=\int_0^x\sin\frac{\pi}{2}t^2dt$–*Fresnel* 积分 (我们提醒注意, $\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$).

解

在 $\int_0^x \cos\frac{\pi}{2}t^2dt$ 中令 $u=\frac{\pi}{2}t^2$ 有:

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}x^2}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du$$

进而考虑上一题的 (c), 令 $\alpha=\frac{1}{2}$ 并取表达式的实部有:

$$\begin{aligned}G(x):=\mathrm{Re}(\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\frac{1}{2}}}dt)&\simeq\frac{2}{3}\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{4}{15}\frac{\sin x}{x^{\frac{5}{2}}}-\frac{8}{105}\frac{\cos x}{x^{\frac{7}{2}}}+\frac{16}{945}\frac{\sin x}{x^{\frac{9}{2}}}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!!}\frac{\cos(x+(n-1)\frac{\pi}{2})}{x^{\frac{1}{2}(2n+1)}},\quad x\to+\infty\end{aligned}$$

注意到

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_0^{\infty}\cos x^2dx-G(\frac{\pi}{2}x^2))$$

代入得

$$C(x)\simeq\frac{1}{4}-\frac{4}{3\pi^2}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x^2}{x^3}-\frac{16}{15\pi^3}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x^2}{x^5}+\cdots=\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{\pi^{n+1}(2n+1)!!}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x^2+(n-1)\frac{\pi}{2})}{x^{2n+1}},\quad x\to\infty$$

即为欲求.

在上一题 (c) 中令 $\alpha=\frac{1}{2}$ 并取表达式的虚部有:

$$\begin{aligned}H(x):=\mathrm{Im}(\int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{\frac{1}{2}}}dt)&\simeq\frac{2}{3}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{4}{15}\frac{\cos x}{x^{\frac{5}{2}}}-\frac{8}{105}\frac{\sin x}{x^{\frac{7}{2}}}-\frac{16}{945}\frac{\cos x}{x^{\frac{9}{2}}}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!!}\frac{\sin(x+(n-1)\frac{\pi}{2})}{x^{\frac{1}{2}(2n+1)}},\quad x\to+\infty\end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^x\sin\frac{\pi}{2}t^2dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_0^{\infty}\sin x^2dx-H(\frac{\pi}{2}x^2))$$

代入得

$$\int_0^x\sin\frac{\pi}{2}t^2dt\simeq\frac{1}{4}-\frac{4}{3\pi^2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x^2}{x^3}-\frac{16}{15\pi^3}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x^2}{x^5}+\cdots=\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{\pi^{n+1}(2n+1)!!}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x^2+(n-1)\frac{\pi}{2})}{x^{2n+1}},\quad x\to\infty$$

即为欲求.

课堂作业数列 $\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ 的项由下列关系式定义:

$$a_1=1,a_n=\frac{1}{n!}+\frac{a_1}{(n-1)!}+\frac{a_2}{(n-2)!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{1!}(n>1).$$

证明:

$$a_n=\frac{1}{2\ln^{n+1}2}+o(\frac{1}{2\ln^{n+1}2}),\quad n\to\infty.$$

证明

设

$$a_0=1,\quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

将 $f(x)$ 写开并代入 a_n 的递推式有:

$$\begin{aligned}f(x)-a_0=a_1x&\\ &+(\frac{1}{2!}+\frac{a_1}{1!})x^2\\ &+(\frac{1}{3!}+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_2}{1!})x^3\\ &+(\frac{1}{4!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{1!})x^4\\ &+(\frac{1}{5!}+\frac{a_1}{4!}+\frac{a_2}{3!}+\frac{a_3}{2!}+\frac{a_4}{1!})x^5\\ &+\cdots\end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned}&a_1x+\frac{a_1}{1!}x^2+\frac{a_2}{1!}x^3+\frac{a_3}{1!}x^4+\frac{a_4}{1!}x^5+\cdots=xf(x)\\ &\frac{1}{2!}x^2+\frac{a_1}{2!}x^3+\frac{a_2}{2!}x^4+\frac{a_3}{2!}x^5+\cdots=\frac{x^2}{2!}f(x)\\ &\frac{1}{3!}x^3+\frac{a_1}{3!}x^4+\frac{a_2}{3!}x^5+\cdots=\frac{x^3}{3!}f(x)\\ &\quad\vdots\end{aligned}$$

进而

$$f(x)-a_0=xf(x)+\frac{x^2}{2!}f(x)+\frac{x^3}{3!}f(x)+\cdots=(e^x-1)f(x)$$

代入 $a_0=1$ 便得到关系式

$$f(x)(e^x-1)=f(x)-1$$

从而

$$f(x)=\frac{1}{2-e^x}=\frac{1}{2}(1+\frac{e^x}{2}+\frac{e^{2x}}{2^2}+\frac{e^{3x}}{2^3}+\cdots)$$

将上式中的 $e^{kx}(k=1,2,\cdots)$ 全部展开, 可知对于 x^n 有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{2}\text{产生的系数}:&\quad\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n!}\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2^2}\text{产生的系数}:&\quad\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{n!}\cdot 2^n\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{3x}}{2^3}\text{产生的系数}:&\quad\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{n!}\cdot 3^n\\ &\vdots\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{kx}}{2^k}\text{产生的系数}:&\quad\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{n!}\cdot k^n\\ &\vdots\end{aligned}$$

将它们相加即得 x^n 的系数 a_n 为:

$$a_n=\frac{1}{2\cdot n!}(\frac{1^n}{2}+\frac{2^n}{2^2}+\cdots+\frac{k^n}{2^k}+\cdots)$$

进而只需证明

$$b_n:=2\ln^{n+1}2a_n=\frac{\ln^{n+1}2}{n!}(\frac{1^n}{2}+\frac{2^n}{2^2}+\cdots+\frac{k^n}{2^k}+\cdots)\to 1,\quad n\to\infty$$

令 $g(x)=\frac{x^n}{2^x}$, 则由 $g'(x)=\frac{x^{n-1}}{2^x}(n-x\ln 2)$ 知 $g(x)$ 在 $(0,\frac{n}{\ln 2})$ 上递增, 在 $(0,\frac{n}{\ln 2})$ 上递增, 在 $(\frac{n}{\ln 2},+\infty)$ 上递减.

一方面:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{2^k}\geq\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{2^x}dx-\int_{[\frac{n}{\ln 2}]}^{[\frac{n}{\ln 2}]+1}\frac{x^n}{2^x}dx=\frac{\Gamma(n+1)}{\ln^{n+1}2}-\int_{[\frac{n}{\ln 2}]}^{[\frac{n}{\ln 2}]+1}\frac{x^n}{2^x}dx\geq\frac{n!}{\ln^{n+1}2}-\frac{(\frac{n}{\ln n})^n}{2^{\frac{n}{\ln 2}}}$$

于是

$$b_n\geq 1-\frac{\ln^{n+1}2}{n!}\frac{n^n}{(e\ln 2)^n}=1-\frac{\ln 2}{n!}(\frac{n}{e})^n.$$

另一方面:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{2^k}\leq\int_0^{\infty}\frac{x^n}{2^x}dx+\max\{\frac{[\frac{n}{\ln 2}]^n}{2^{[\frac{n}{\ln 2}]}},\frac{([\frac{n}{\ln 2}]+1)^n}{2^{[\frac{n}{\ln 2}]+1}}\}\leq\frac{\Gamma(n+1)}{\ln^{n+1}2}+\frac{(\frac{n}{\ln 2})^n}{2^{\frac{n}{\ln 2}}}\leq\frac{n!}{\ln^{n+1}2}+\frac{(\frac{n}{\ln 2})^n}{2^{\frac{n}{\ln 2}}}$$

于是又有

$$b_n\leq 1+\frac{\ln^{n+1}2}{n!}\frac{n^n}{(e\ln 2)^n}=1+\frac{\ln 2}{n!}(\frac{n}{e})^n.$$

现在只需说明

$$\frac{\ln 2}{n!}(\frac{n}{e})^n\to 0,\quad n\to\infty$$

而 Stirling 公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta_n}{12}},\quad 0<\theta_n<1$$

正好能说明这一点.

11 月 30 日作业

1. 对前边讲的由 Poincaré 引进和研究过的按渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 展开的概念, Erdélyi 提出如下推广.

设 X 是一个集合, $\mathfrak{B}$ 是 X 中的基, $\{\varphi_n(x)\}$ 是 X 上在基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近序列. 如果在 X 上给定函数 $f(x),\psi_0(x),\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots$ 且对任何 $n=0,1,\cdots$ 有等式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\psi_k(x)+o(\varphi_n(x))\text{在基 }\mathfrak{B}\text{ 下},$$

则记

$$f(x)\simeq\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x),\{\varphi_n(x)\}\text{在基 }\mathfrak{B}\text{ 下},$$

并说在基 $\mathfrak{B}$ 下函数 f 有 *Erdélyi 意义下的渐近展开*.

(a) 请注意, 如果设 $\varphi_n(x)=x^{-n},n=0,1,\cdots$, 在 11 月 28 日第 4 题中我们得到的展开式是 Erdélyi 意义下的渐近展开.

证明

对 $\mathrm{Si}(x)$, 此即证明

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\sin(x+(k-2)\frac{\pi}{2})}{x^k}=o(\frac{1}{x^n}),\quad x\to\infty$$

注意到

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\sin(x+(k-2)\frac{\pi}{2})}{x^k}|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|\frac{1}{k!}\frac{\sin(x+(k-2)\frac{\pi}{2})}{x^k}|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{x^k}=\frac{1}{x^n(x-1)}=o(\frac{1}{x^n}),\quad x\to+\infty$$

这便说明 $\mathrm{Si}(x)$ 对应的展开式是 Erdélyi 意义下的渐近展开.

对 $C(x)$, 此即证明

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}}{\pi^{k+1}(2k+1)!!}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x^2+(k-1)\frac{\pi}{2})}{x^{2k+1}}=o(\frac{1}{x^n}),\quad x\to+\infty$$

注意到

$$\begin{aligned}|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}}{\pi^{k+1}(2k+1)!!}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x^2+(k-1)\frac{\pi}{2})}{x^{2k+1}}|&\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|\frac{2^{2k}}{\pi^{k+1}(2k+1)!!}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x^2+(k-1)\frac{\pi}{2})}{x^{2k+1}}|\\&\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{x^{2k+1}}=\frac{1}{x^{2n-1}(x^2-1)}=o(\frac{1}{x^n}),\quad x\to+\infty\end{aligned}$$

这便说明 $C(x)$ 对应的展开式是 Erdélyi 意义下的渐近展开.

(b) 试证在 Erdélyi 意义下的渐近展开没有唯一性 (可以改变函数 ψ_n).

•[15] (c) 试证: 如果给定了集合 X, X 中的基 $\mathfrak{B}$, X 上的函数 f 和序列 $\{\mu_n(x)\}$ 及 $\{\varphi_n(x)\}$, 设第二个序列在基 $\mathfrak{B}$ 下是渐近的, 则展开

$$f(x)\simeq\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mu_n(x),\{\varphi_n(x)\}\text{在基 }\mathfrak{B}\text{ 下}$$

(其中 a_n 是数值系数) 或者根本不可能, 或者是唯一的.

课堂作业找出所有 $[0,+\infty)$ 上正值连续函数 $g(x)$, 使得

$$\frac{1}{2}\int_0^x[g(t)]^2dt=\frac{1}{x}(\int_0^x g(t)dt)^2,\quad x\in(0,+\infty).$$

解

注意到既然 $g(x)$ 连续, $\int_0^x g(t)dt$ 和 $\int_0^x g^2(t)dt$ 均在 $(0,+\infty)$ 上可导, 从而对题式两边求导有:

$$\frac{1}{2}g^2(x)=\frac{2}{x}g(x)\int_0^x g(t)dt-\frac{1}{x^2}(\int_0^x g(t)dt)^2$$

令 $y=\int_0^x g(t)dt$, 则 $g(x)=y'(x)$, 方程即:

$$\frac{1}{2}(y')^2=\frac{2}{x}yy'-\frac{1}{x^2}y^2$$

注意到 $g(x)>0,x\in[0,+\infty)$, 从而必有 $y>0$, 进而在上式两端同乘 $\frac{x^2}{y^2}$ 有:

$$\frac{1}{2}(\frac{xy'}{y})^2=2(\frac{xy'}{y})-1$$

令 $h(x)=\frac{xy'(x)}{y(x)}$, 方程即:

$$\frac{1}{2}h^2=2h-1$$

解得

$$h(x)=2\pm\sqrt{2}.$$

[15](b), (c) 两问依旧不清楚: (b) 中的" 没有唯一性" 和 (c) 中的" 唯一性" 区别在哪? 对于 Erdélyi 意义下的展开没有很好理解...

当 $h=2+\sqrt{2}$, 此即

$$\frac{xy'}{y}=2+\sqrt{2}\Rightarrow(\ln y)'=\frac{2+\sqrt{2}}{x}\Rightarrow\ln y=(2+\sqrt{2})\ln x+C\Rightarrow y=Ce^{x^{2+\sqrt{2}}}\Rightarrow g=Cx^{1+\sqrt{2}}e^{x^{2+\sqrt{2}}}$$

当 $h=2-\sqrt{2}$, 此即

$$\frac{xy'}{y}=2-\sqrt{2}\Rightarrow(\ln y)'=\frac{2-\sqrt{2}}{x}\Rightarrow\ln y=(2-\sqrt{2})\ln x+C\Rightarrow y=Ce^{x^{2-\sqrt{2}}}\Rightarrow g=Cx^{1-\sqrt{2}}e^{x^{2-\sqrt{2}}}$$

又因为 g 需要在 $x=0$ 处有定义, 故此种情况舍去.

综上:

$$g(x)=Cx^{1+\sqrt{2}}e^{x^{2+\sqrt{2}}},\quad C>0.$$

14.11 第十一次作业

12 月 2 日作业

1. 一致渐近估计

设 X 是一个集合, $\mathfrak{B}_X$ 是 X 中的基, 还设 $f(x,y),g(x,y)$ 是定义在集合 X 上且依赖于参数 $y\in Y$ 的 (向量值) 函数. 记 $|f(x,y)|=\alpha(x,y)|g(x,y)|$. 称在基 $\mathfrak{B}_X$ 下的渐近关系

$$f(x,y)=o(g(x,y)),\quad f(x,y)=O(g(x,y)),\quad f(x,y)\sim g(x,y)$$

关于参数 y 在集合 Y 上是一致的, 如果在基 $\mathfrak{B}_X$ 下分别成立 $\alpha(x,y)\rightrightarrows 0$ 在 Y 上, $\alpha(x,y)$ 关于 $y\in Y$ 一致地最终有界, $\alpha(x,y)\rightrightarrows 1$ 在 Y 上.

试证: 如果在集合 $X\times Y$ 中引进这样的基 $\mathfrak{B}=\{B_X\times Y\}$, 其元素是基 $\mathfrak{B}_X$ 的元素 B_X 和集合 Y 的直积, 则上面所说的定义将分别与在基 $\mathfrak{B}$ 下的等式

$$f(x,y)=o(g(x,y)),\quad f(x,y)=O(g(x,y)),\quad f(x,y)\sim g(x,y)$$

等价.

证明

对第一个式子而言, 此即证明 $\alpha(x,y)\overset{\mathfrak{B}_X}{\rightrightarrows}0$ 与 $\alpha(x,y)\overset{\mathfrak{B}}{\to}0$ 等价. 知 $\alpha(x,y)\overset{\mathfrak{B}_X}{\rightrightarrows}0$ 的定义如下:

$$\forall\varepsilon>0\exists B_X(\varepsilon)\in\mathfrak{B}_X\forall y\in Y\forall x\in X(x\in B_X(\varepsilon)\Rightarrow|\alpha(x,y)|<\varepsilon)$$

而 $\alpha(x,y)\overset{\mathfrak{B}}{\to}0$ 的定义如下:

$$\forall\varepsilon>0\exists B(\varepsilon,(x,y))\in\mathfrak{B}\forall(x,y)\in X\times Y((x,y)\in B_X\times Y\Rightarrow|\alpha(x,y)|<\varepsilon)$$

在第一个定义中, 知

$$\forall y\in Y\forall x\in X\Leftrightarrow\forall(x,y)\in X\times Y$$

又注意到 $x\in B_X(\varepsilon)$ 本身可以写成 $x\in B_X(\varepsilon)\wedge y\in Y$, 从而这等价于 $(x,y)\in B_X\times Y$. 最后只需说明 $B(\varepsilon,(x,y))$ 与 $B_X(\varepsilon)$ 等价即可, 这是因为

$$x\in B_X(\varepsilon)\Rightarrow(x,y)\in B_X(\varepsilon)\times Y=B(\varepsilon,(x,y))$$
$$x\notin B_X(\varepsilon)\wedge X\cap Y=0\Rightarrow(x,y)\notin B_X(\varepsilon)\times Y$$

这说明 $x\in B_X(\varepsilon)\Leftrightarrow(x,y)\in B(\varepsilon,(x,y))$, 从而上述两个定义等价.

2. 一致渐近展开

渐近展开

$$f(x,y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\varphi_n(x) \text{在基 } \mathfrak{B}_X \text{ 下}$$

关于参数 y 在集合 Y 上是一致的, 如果对等式

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(y)\varphi_k(x) + r_n(x,y), \quad n = 0, 1, \cdots$$

中的 $r_n(x,y)$ 有关于 $y \in Y$ 的一致估计: $r_n(x,y) = o(\varphi_n(x))$ 在集合 X 的基 $\mathfrak{B}_X$ 下.

(a) 设 Y 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测 (有界) 集合, 又设对每个固定的值 $x \in X$, 函数 $f(x,y), a_0(y), a_1(y), \cdots$ 在 Y 上可积. 试证: 如果在这些条件下, 在基 $\mathfrak{B}_X$ 下的渐近展开 $f(x,y) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(y)\varphi_n(y)$ 关于参数 $y \in Y$ 是一致的, 则在基 $\mathfrak{B}_X$ 下渐近展开

$$\int_Y f(x,y)dy \simeq \sum_{n=0}^{\infty}(\int_Y a_n(y)dy)\varphi_n(x)$$

也成立.

(b) 设 $Y = [c,d] \subset \mathbb{R}$. 假定函数 $f(x,y)$ 对每个固定的 $x \in X$ 关于 y 在区间 Y 上连续可微, 而且在某一个 $y_0 \in Y$ 处有渐近展开

$$f(x,y_0) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y_0)\varphi_n(x) \text{在基 } \mathfrak{B}_X \text{ 下.}$$

试证: 如果这时成立关于 $y \in Y$ 一致的渐近展开

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y)\varphi_n(x) \text{在基 } \mathfrak{B}_X \text{ 下,}$$

且其系数 $\alpha_n(y), n = 0, 1, \cdots$ 关于 y 连续, 则原来的函数 $f(x,y)$ 在基 $\mathfrak{B}_X$ 下有渐近展开 $f(x,y) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(y)\varphi_n(x)$, 它关于 $y \in Y$ 是一致的, 系数 $a_n(y), n = 0, 1, \cdots$ 在区间 Y 上光滑依赖于 y, 且 $\frac{da_n}{dy}(y) = \alpha_n(y)$.

3. 设 $p(x)$ 是区间 $c \le x \le d$ 上的光滑正函数, 而 $u(x,\lambda)$ 是方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\lambda) = \lambda^2 p(x)u(x,\lambda)$ 的解.

(a) 如果在 $[c,d]$ 上 $p(x) \equiv 1$, 试求解 $u(x,\lambda)$.

解

将 λ 看成参数, 知当 $\lambda = 0$ 时有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x,\lambda) = 0 \Rightarrow u(x,\lambda) = C_1(\lambda)x + C_2(\lambda)$$

而当 $\lambda \neq 0$, 知

$$u(x,\lambda) = C_1(\lambda)e^{\lambda x} + C_2(\lambda)e^{-\lambda x}$$

从而

$$u(x,\lambda) = \begin{cases} C_1(\lambda)x + C_2(\lambda), & \lambda = 0 \\ C_1(\lambda)e^{\lambda x} + C_2(\lambda)e^{-\lambda x}, & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

其中 $C_1(0) = C_2(0) = 0$.

(b) 设 $0 < m \le p(x) \le M < +\infty$ 在 $[c,d]$ 上, 且 $u(c,\lambda) = 1, \frac{\partial u}{\partial x}(c,\lambda) = 0$. 试给出 $u(x,\lambda)$ 在 $x \in [c,d]$ 的下方和上方估计.

(c) 设 $\ln u(x,\lambda) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x)\lambda^{1-n}$ 当 $\lambda \to +\infty$, 这里 $c_0(x), c_1(x), \cdots$ 是光滑函数. 试利用 $(\frac{u'}{u})' = \frac{u''}{u} - (\frac{u'}{u})^2$ 证明 $(c_0'(x))^2 = p(x)$ 和 $(c_{n-1}'' + \sum\limits_{k=0}^{n} c_k' \cdot c_{n-k}')(x) = 0$.

12 月 5 日作业

一维情形的 *Laplace* 方法.

1.

(a) 对于 $\alpha > 0$, 函数 $h(x) = e^{-\lambda x^\alpha}$ 在 $x = 0$ 达到最大值. 同时, 若 $\delta = O(\lambda^{-\frac{1}{\alpha}})$, 则 $h(x)$ 在点 $x = 0$ 的 $\delta-$ 邻域内是 1 阶量.

利用引理 1, 证明: 如果 $0 < \delta < 1$, 则积分

$$W(\lambda) = \int_{c(\lambda,\delta)}^{a} x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx,$$

其中 $c(\lambda,\delta) = \lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}}$, 当 $\lambda \to +\infty$ 时的阶为 $O(e^{-A\lambda^\delta})$. 这里 A 是一个正常数.

证明

由引理 1 知:

$$|W(\lambda)| \le \int_{c(\lambda,\delta)}^{a} |x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha}| dx \le A_1 e^{-\lambda\cdot(\lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}})^\alpha} = A_1 e^{-\lambda^\delta}$$

命题即证.

- (b) 证明: 如果函数 f 在 $x = 0$ 连续, 则

$$W(\lambda) = \alpha^{-1}\Gamma(\frac{\beta}{\alpha})[f(0) + o(1)]\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} \quad 当\ \lambda \to +\infty.$$

证明[16]

首先估计下述积分:

$$W_1(\lambda) := \int_0^{c(\lambda,\delta)} x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx = \int_0^{\lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}}} x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx$$

注意到当 $\lambda \to +\infty$ 时, $\lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}} \to 0^+$, 从而根据 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续首先有 $f(x) = f(0) + o(1)$, 进而:

$$\begin{aligned}
W_1(\lambda) &= \int_0^{\lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}}} x^{\beta-1}(f(0) + o(1)) e^{-\lambda x^\alpha} dx = (f(0) + o(1)) \int_0^{\lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}}} x^{\beta-1} e^{-\lambda x^\alpha} dx \\
&= (f(0) + o(1)) \int_0^{\lambda^\delta} (\frac{u}{\lambda})^{\frac{\beta-1}{\alpha}} e^{-u} d(\frac{u}{\lambda})^{\frac{1}{\alpha}} = (f(0) + o(1))\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\lambda^\delta} u^{\frac{\beta}{\alpha}-1} e^{-u} du \\
&\sim (f(0) + o(1))\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} u^{\frac{\beta}{\alpha}-1} e^{-u} du = (f(0) + o(1))\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{\beta}{\alpha}), \quad \lambda \to +\infty
\end{aligned}$$

再估计题目中的积分, 由 (a) 注意到 $W(\lambda) = O(e^{-\lambda^\delta})$, 现比较 $e^{-\lambda^\delta}$ 与 $\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}$ 的阶数关系. 由 L'Hospital 法则知:

$$\frac{e^{-\lambda^\delta}}{\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}} = \frac{\lambda^{\frac{\beta}{\alpha}}}{e^{\lambda^\delta}} \to 0, \quad \lambda \to +\infty$$

[16] 不知本题中的 $W(\lambda)$ 还是题目中所给出的吗? 自己写的过程分别估计了 $(0, c(\lambda,\delta))$ 上的积分和本题中的积分, 并给出自己对于题目的疑惑.

这说明 $e^{-\lambda^{\delta}}=o(\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}})$, 进而 $W(\lambda)=o(\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}})$.

(这里便是疑惑了, 按照题目所给出的式子不该有 $W(\lambda)=o(\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}})$..?)

(c) 定理 1, (a) 中的条件 $f(x)=f(x_0)+O(x-x_0)$ 可以减弱, 用 f 在点 x_0 连续这个条件代替它. 试证: 这时渐近式主项不变, 但一般说, 等式 (2') 不再保持, 其中的 $O(x-x_0)$[17]现在应换成 $o(1)$.

证明

知此时 $f(x)=f(x_0)+o(1), x\to x_0$, 对

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx$$

首先由局部化原理知:

$$F(\lambda)=\int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx\cdot(1+O(\lambda^{-\infty}))=\int_a^{a+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)}dx\cdot(1+O(\lambda^{-\infty})),\quad \lambda\to+\infty$$

下一步考虑 $S\in C^{(1+1)}$, 进而由函数在临界点邻域的典型形式知存在点 x_0 的半邻域 I_x 和点 $O\in\mathbb{R}$ 的邻域 I_y 以及微分同胚 $\varphi\in C^{(1)}(I_x,I_y)$, 使

$$S(\varphi(y))=S(x_0)+sy,\quad \text{当}y\in I_y, s=\operatorname{sgn}S'(x_0)=-1$$

同时

$$\varphi(0)=x_0,\quad \varphi'(0)=\frac{1}{|S'(x_0)|}.$$

将其代入 $F(\lambda)$ 有:

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=\int_0^{\varepsilon_1} f(\varphi(y))e^{\lambda(S(x_0)-y)}d\varphi(y)\cdot(1+O(\lambda^{-\infty}))\\&=e^{\lambda S(x_0)}\int_0^{\varepsilon_1} f(\varphi(y))e^{-\lambda y}\varphi'(y)dy\cdot(1+O(\lambda^{-\infty})),\quad \lambda\to+\infty\end{aligned}$$

由 $f(\varphi(y))$ 与 $\varphi'(y)$ 在 $y=0$ 处的连续性, 在 (b) 中代入 $\alpha=\beta=1$, 将 $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ 视作 (b) 中的 f, 知:

$$F(\lambda)=e^{\lambda S(x_0)}(1+O(\lambda^{-\infty}))(f(\varphi(0))\varphi'(0)+o(1))\lambda^{-1}=\frac{f(x_0)}{-S'(x_0)}e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-1}(1+o(1)),\quad \lambda\to+\infty$$

命题即证.

2.

(a) Bernoulli 数 B_{2k} 由关系式

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}=-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k-1}, |t|<2\pi$$

定义. 已知

$$(\frac{\Gamma'}{\Gamma})(x)=\ln x+\int_0^{\infty}(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}})e^{-tx}dt.$$

试证

$$(\frac{\Gamma'}{\Gamma})(x)\simeq\ln x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k}x^{-2k}\text{当 } x\to+\infty.$$

[17]三版教材都是这样写的, 但自己感觉这里说的应该是 $O(\lambda^{-1})$?

证明[18]

首先说明对任意给定的足够大的 x(至少有 $x>1$), 积分 $\int_0^\infty(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}})e^{-tx}dt$ 收敛. 这是因为将其写开有:

$$\int_0^{+\infty}(\frac{e^{-tx}}{t}-\frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}})dt=\int_0^{+\infty}(\frac{1}{te^{xt}}-\frac{e^{(1-x)t}}{e^t-1})dt$$

注意到 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{te^{xt}}dt$ 和 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{(1-x)t}}{e^t-1}dt$ 在 $x>1$ 时显然收敛, 故原积分收敛, 从而可以在渐近意义下交换积分和级数次序, 有:

$$\begin{aligned}
(\frac{\Gamma'}{\Gamma})(x)&=\ln x+\int_0^\infty(-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k-1})e^{-tx}dt\\
&\simeq\ln x-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-tx}dt-\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k-1}e^{-tx}dt\\
&=\ln x+\frac{1}{2x}(e^{-tx})|_0^\infty-\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}\int_0^\infty(\frac{u}{x})^{2k-1}e^{-u}d\frac{u}{x}\\
&=\ln x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{-2k}\Gamma(2k)=\ln x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{-2k}(2k-1)!\\
&=\ln x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{2k}x^{-2k},\quad x\to+\infty
\end{aligned}$$

命题即证.

•[19](b) 试证: 当 $x\to+\infty$, 有

$$\ln\Gamma(x)\simeq(x-\frac{1}{2})\ln x-x+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}x^{-2k+1}$$

这个渐近展开式叫作 Stirling 级数.

证明

在 (a) 中所得式子中两端对 x 作有限区间上的积分, 注意到既然 $\int_1^x(\frac{\Gamma'}{\Gamma})(t)dt=\ln\Gamma(x)$ 收敛, 在其渐近展开式中交换积分和级数运算次序便是合法的, 进而有:

$$\begin{aligned}
\int_1^x(\frac{\Gamma'}{\Gamma})(t)dt=\ln\Gamma(x)&\simeq\int_1^x(\ln t-\frac{1}{2t}-\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{2k}t^{-2k})dt\\
&=\int_1^x\ln tdt-\int_1^x\frac{1}{2t}dt-\sum_{k=1}^\infty\int_1^x\frac{B_{2k}}{2k}t^{-2k}dt\\
&=(t\ln t)_1^x-\int_1^x dt-\frac{1}{2}(\ln t)|_1^x-\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{2k}\cdot\frac{1}{1-2k}(t^{1-2k})|_1^x\\
&=x\ln x-x+1-\frac{1}{2}\ln x+\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{2k}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}x^{-2k+1}
\end{aligned}$$

(c) 试利用 Stirling 级数求函数 $\Gamma(x+1)$ 当 $x\to+\infty$ 时的渐近式的头两项, 并把你的结果与例 13 的结果进行比较.

(d) 模仿例 13 的方法, 利用 Stirling 级数, 独立地证明

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}(\frac{x}{e})^x(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+O(\frac{1}{x^3}))\text{当 } x\to+\infty.$$

[18] 三版教材在最后一个式子中, $\sum$ 的下标都是 $k=0$, 不知这里是写错了还是另有深意?

[19] 在得到最后的式子后不知道怎么继续了, 两者之间差一个常数.

3.

(a) 设 $f\in C([0,a],\mathbb{R}),S\in C^{(1)}([0,a],\mathbb{R}),S(x)>0$ 在 $[0,a]$ 上, $S(x)$ 在 $x=0$ 达到最大且 $S'(0)\neq 0$. 试证: 如果 $f(0)\neq 0$, 则

$$I(\lambda):=\int_0^a f(x)S^\lambda(x)dx\sim -\frac{f(0)}{\lambda S'(0)}S^{\lambda+1}(0)\text{当 }\lambda\to+\infty.$$

证明

由局部化原理知取 $\varepsilon>0$ 足够小, 有:

$$I(\lambda)\sim\int_0^\varepsilon f(x)S^\lambda(x)dx,\quad \lambda\to+\infty$$

因为 $f\in C([0,a],\mathbb{R})$, 知

$$f(x)\sim f(0),x\to 0\Rightarrow I(\lambda)\sim f(0)\int_0^\varepsilon S^\lambda(x)dx=f(0)\int_0^\varepsilon e^{\lambda\ln S(x)}dx$$

既然 $S\in C^{(1)}([0,a],\mathbb{R})$ 且 $S(x)>0$, 知 $\ln S(x)\in C^{(1)}([0,a],\mathbb{R})$, 进而在 $(0,\varepsilon)$ 上对 $\ln S(x)$ 应用 Lagrange 定理知:

$$\ln S(x)=\ln S(0)+\frac{S'(\xi)}{S(\xi)}x\sim\ln S(0)+\frac{S'(0)}{S(0)}x,\quad x\to 0$$

其中最后的等价是因为 S 和 S' 都是连续函数, 从而注意到 $S'(0)<0$, 代入有:

$$\begin{aligned}f(0)\int_0^\varepsilon e^{\lambda\ln S(x)}dx&\sim f(0)\int_0^\varepsilon e^{\lambda(S(0)+\frac{S'(0)}{S(0)}x)}dx=f(0)S^\lambda(0)\int_0^\varepsilon e^{\lambda\frac{S'(0)}{S(0)}x}dx\\&=f(0)S^\lambda(0)\int_0^{\lambda\cdot\frac{S'(0)}{S(0)}\varepsilon}e^u\cdot\frac{1}{\lambda}\frac{S(0)}{S'(0)}du=f(0)\frac{S^{\lambda+1}(0)}{S'(0)}\int_0^{\lambda\frac{S'(0)}{S(0)}\varepsilon}e^u du\\&=f(0)\frac{S^{\lambda+1}(0)}{S'(0)}e^u\Big|_0^{\lambda\frac{S'(0)}{S(0)}\varepsilon}\sim f(0)\frac{S^{\lambda+1}(0)}{S'(0)}(0-1)=-f(0)\frac{S^{\lambda+1}(0)}{S'(0)},\quad\lambda\to+\infty\end{aligned}$$

命题即证.

(b) 如果还假定 $f,S\in C^{(\infty)}([0,a],\mathbb{R})$, 导出渐近展开

$$I(\lambda)\simeq S^{\lambda+1}(0)\sum_{k=0}^\infty a_k\lambda^{-(k+1)}\text{当 }\lambda\to+\infty.$$

证明

当 $f\in C^{(\infty)}([0,a],\mathbb{R})$, 记

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty a_kx^k$$

进而

$$I(\lambda)=\int_0^a\sum_{k=0}^\infty a_kx^kS^\lambda(x)dx=\sum_{k=0}^\infty a_k\int_0^a x^kS^\lambda(x)dx$$

对单个的 k, 记 $P(x)=\ln S(x)$, 由局部化原理有:

$$a_k\int_0^a x^kS^\lambda(x)dx=a_k\int_0^a x^ke^{\lambda P(x)}dx=a_k\int_0^\varepsilon x^ke^{\lambda P(x)}dx(1+O(\lambda^{-\infty})),\quad\lambda\to+\infty$$

根据函数在临界点邻域中的典型形式知, 存在 0 的半邻域 I_x 和 I_y 及微分同胚 $\varphi\in C^{(\infty)}(I_y,I_x)$, 使得

$$P(\varphi(y))=P(0)-y$$

同时

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi'(0)=\frac{1}{|P'(0)|}$$

将这些代入前式有

$$\begin{aligned}
&a_k\int_0^{\varepsilon} x^k e^{\lambda P(x)}dx(1+O(\lambda^{-\infty}))\\
=&a_k\int_0^{\varepsilon_1}\varphi^k(y)\varphi'(y)e^{\lambda P(0)-\lambda y}dy(1+O(\lambda^{-\infty}))\\
=&a_k\int_0^{\varepsilon_1}(\varphi(\frac{1}{\lambda})+o(1))^k\cdot(\varphi'(0)+o(1))\cdot e^{\lambda P(0)}\cdot e^{-\lambda y}dy(1+O(\lambda^{-\infty}))\\
=&a_k\cdot\varphi^k(\frac{1}{\lambda})\cdot\frac{1}{|P'(0)|}\cdot e^{\lambda\ln S(0)}\cdot(\int_0^{\varepsilon_1}e^{-\lambda y}dy+o(1))(1+O(\lambda^{-\infty}))\\
=&a_k\cdot(\varphi(0)+\varphi'(\xi)\frac{1}{\lambda})^k\cdot\frac{|S(0)|}{|S'(0)|}\cdot S^{\lambda}(0)\cdot(-\frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda\varepsilon_1}-1)+o(1))(1+O(\lambda^{-\infty}))\\
\sim& a_k\cdot\frac{M_k}{\lambda^k}\cdot S^{\lambda+1}(0)\cdot\frac{1}{\lambda},\quad \lambda\to+\infty
\end{aligned}$$

再将 a_kM_k 记作 a_k, 即知:

$$I(\lambda)\simeq\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot\lambda^{-(k+1)}\cdot S^{\lambda+1}(0),\quad \lambda\to+\infty$$

命题即证.

12 月 7 日作业

1.

(a) 试证

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}(1+O(n^{-1}))\text{当}n\to+\infty$$

证明

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt$$

验证可知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt$ 满足渐近式的典型主项定理 (c) 的所有条件, 其中令 $a=0,f(x)=1,\lambda=n,S(x)=\ln\cos x$, 进而应用定理有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot(1+O(\frac{1}{\sqrt{n}}))=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}(1+O(n^{-1})),\quad n\to\infty$$

命题即证.

•[20](b) 用 Euler 积分表示这个积分, 并证明当 $n\in\mathbb{N}$ 时它等于 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$.

证明

知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}tdt=\frac{1}{2}B(\frac{2n+1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{2n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

[20]这个结果不应该是 $2n$ 的情况吗? 本题的过程自己选用了 $2n$ 计算.

命题即证.

(c) 试求 Wallis 公式 $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]^2$.

证明

将 (b) 代入 (a) 有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \sqrt{\frac{\pi}{4n}}(1+O((2n)^{-1})), \quad n\to\infty$$

整理知

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}(1+O(n^{-1})), \quad n\to\infty$$

两边平方并考虑到 $O(n^{-1}) = o(1), n\to\infty$ 知:

$$\pi = \frac{1}{n}[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]^2, \quad n\to\infty$$

此即欲证.

(d) 试求 (a) 中积分当 $n\to+\infty$ 的渐近展开的头两项.

解

2.

(a) 试证 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ 当 $n\to+\infty$.

证明

在题式中令 $x=\sin\theta$ 有:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta d\theta$$

由上一题 (a) 知:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}(1+O(n^{-1})), \quad n\to\infty$$

又因为

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}(1+O(n^{-1})) \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}, \quad n\to\infty$$

从而有

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}, \quad n\to\infty$$

命题即证.

(b) 试求这个积分的渐近式的后继项.

3. 试证: 如果 $\alpha>0$, 则当 $x\to+\infty$, 有

$$\int_0^{+\infty} t^{-\alpha t} t^x dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e^\alpha}} x^{\frac{1}{2\alpha}} \exp(\frac{\alpha}{e} x^{\frac{1}{\alpha}}).$$

• 本题疑似有误, 下面是自己找到的形似的题目:

习题设 $\alpha>0$, 证明当 $t\to+\infty$ 时有

$$\int_0^{+\infty} t^{-\alpha t} x^t dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e\alpha}} x^{\frac{1}{2\alpha}} \exp(\frac{1}{e}\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}).$$

证明

考虑

$$\int_0^{+\infty} t^{-\alpha t}x^t dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t\ln t + t\ln x}dt = \int_0^{+\infty} e^{\ln x\cdot(t-\alpha\frac{\ln t}{\ln x})}dt$$

记 $S(t)=t-\alpha\frac{\ln t}{\ln x}$, 知 $S'(t)=1-\frac{\alpha}{\ln x}(1+\ln t)$, 令 $S'(t)=0$ 知 $t_0=\frac{1}{e}x^{\frac{1}{\alpha}}$. 又知 $S''(t_0)=-\frac{\alpha}{\ln x}\frac{1}{t_0}<0$, 容易验证此时 t_0 为 $S(t)$ 的绝对极大值点. 进而代入渐近式的典型主项定理 (b) 知:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{\ln x\cdot(t-\alpha\frac{\ln t}{\ln x})}dt &= \sqrt{\frac{2\pi}{-(-\frac{\alpha}{\ln x}\frac{1}{\frac{1}{e}x^{\frac{1}{\alpha}}})}}\cdot 1\cdot\exp(\ln x\cdot(\frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{e}-\alpha\cdot\frac{\frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{e}\cdot(\frac{1}{\alpha}\ln x-1)}{\ln x}))\cdot(\ln x)^{-\frac{1}{2}}[1+O((\ln x)^{-\frac{1}{2}})]\\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha e}}\cdot\sqrt{\ln x}\cdot x^{\frac{1}{2\alpha}}\exp(\frac{1}{e}x^{\frac{1}{\alpha}}\ln x-\frac{1}{e}x^{\frac{1}{\alpha}}\ln x+\frac{\alpha}{e}x^{\frac{1}{\alpha}})\cdot(\ln x)^{-\frac{1}{2}}[1+O((\ln x)^{-\frac{1}{2}})]\\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha e}}x^{\frac{1}{2\alpha}}\exp(\frac{\alpha}{e}x^{\frac{1}{\alpha}})[1+O((\ln x)^{-\frac{1}{2}})]\sim\sqrt{\frac{2\pi}{e\alpha}}x^{\frac{1}{2\alpha}}\exp(\frac{1}{e}\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}),\quad x\to+\infty\end{aligned}$$

14.12 第十二次作业

12 月 9 日作业

1.

(a) 求积分

$$\int_0^{+\infty}(1+t)^n e^{-nt}dt\text{当}n\to+\infty$$

的渐近式的主项.

(b) 利用所得的结果和恒等式 $k!n^{-k}=\int_0^{+\infty}e^{-nt}t^k dt$ 证明

$$\sum_{k=0}^{n}c_n^k k!n^{-k}=\sqrt{\frac{\pi n}{2}}(1+O(n^{-1}))\text{当}n\to+\infty$$

Chapter 15

参考文献

[1] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013.

[2] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[3] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[4] [俄] 卓里奇. 数学分析 (第四版)[M]. 蒋铎, 钱珮玲, 周美珂, 邝荣雨. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[5] [美]Walter Rudin. Principles of Mathematical Analysis, Third Edition[M]. 北京: 机械工业出版社, 2019.

[6] [德]Herbert Amann, Joechim Escher. Analysis[M]. Gary Brookfield. Switzerland: Birkhäuser Verlag, 2005.

[7] 米哈游. 《原神》世界任务-风起鹤归. 中国: 米哈游, 2021.

[8] 潘承洞, 于秀源. 阶的估计基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.

[9] A. Tauber. Ein satz aus der theorie der unendlichen reihen[J]. Monatsh. Math. Phys. 1897(6): 273-277.

[10] Ricardo Estrada, Jasson Vindas. On Tauber's second tauberian theorem[J]. Tohoku Math. J. 2021(64): 539-560.

[11] Hervé Queffélec, J.E.Littlewood:"The Converse of Abel's Theorem on Power Series"[J]. Jahresber Dtsch Math. 2014(116): 115-118.

[12] [英]G. H. Hardy. Divergent Series[M]. London: Oxford University Press, 1949.

[13] [美]H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick. Real Analysis, Fourth Edition[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.

[14] 周民强. 实变函数论 (第 2 版)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2008.

[15] 匡继昌. 实分析与泛函分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[16] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边. 数学分析习题课讲义 [M]. (下册) 北京: 高等教育出版社, 2004.

[17] [美]William Dunham. 微积分的历程: 从牛顿到勒贝格 [M]. 李伯民, 汪军, 张怀勇. 北京: 人民邮电出版社, 2010.

[18] 汪林. 数学分析中的问题和反例 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.

[19] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. Fourier Analysis an Introduction[M]. New Jersey: Princeton University Press, 2003.

[20] Loukas Grafakos. Classical Fourier Analysis[M]. London: Springer, 2010.

[21] N. G. De Brujin. Asymptotic Methods in Analysis[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1958.

[22] 徐利治, 陈文忠. 渐近分析方法及应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.