调和分析学习笔记

以及调和分析在偏微分方程中的初步应用

作者：UN

机构：北京师范大学数学科学学院

日期：2023.12.30 起著

封面：https://www.pixiv.net/artworks/98651471

模板来源：https://github.com/ElegantLaTeX

其分也，成也；其成也，毁也。——《齐物论》

目录

第一章 预备知识

首先回顾一些曾经的课程中学过的内容, 这里就只作列举不再证明了.

一般来说之后进行的讨论都是在 $\mathbb{R}^n$ 上的, 欧氏空间范数记作 $|\circledast|$. 若 $x\in\mathbb{R}^n, r>0$, 则用

$$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|x-y|<r\}$$

表示球心在 x, 半径为 r 的球. $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度记作 dx, $\mathbb{R}^n$ 中的单位球 S^{n-1} 上的面测度记作 $d\sigma$. 若 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则 E 的 Lebesgue 测度记作 $|E|$, 其示性函数记作 χ_E:

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

” 几乎处处” 或” 对几乎所有的 x” 指代一个性质在忽略零测集的意义下成立, 它们分别记作 a.e. 和 a.e.x.

若 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{N}^n$ 是多重指标, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, 则

$$D^a f=\frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1}\cdots\partial x_n^{a_n}}$$

其中 $|a|=a_1+\cdots+a_n, x^a=x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$.

设 (X,μ) 是测度空间, 则 $L^p(X,\mu)(1\le p<\infty)$ 表示由从 X 到 $\mathbb{C}$ 的全体 p 次可积函数构成的 Banach 空间, $f\in L^p(X,\mu)$ 的范数为:

$$\|f\|_{L^p}=\left(\int_X|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$L^\infty(X,\mu)$ 表示由从 X 到 $\mathbb{C}$ 的全体本性有界函数构成的 Banach 空间. 也就是说, 函数 $f\in L^\infty(X,\mu)$ 总满足

$$\exists C>0(\mu(\{x\in X:|f(x)|>C\})=0) \tag{1.1}$$

f 的范数记作 $\|f\|_{L^\infty}$, 它表示满足(1.1)式的 C 的下确界. 通常来说, X 都会取成 $\mathbb{R}^n$ 或其子集, $d\mu=dx$, 这种情况下一般简记空间为 L^p. 对一般的测度空间来说简记为 $L^p(X)$. 如果 μ 绝对连续, 且 $d\mu=wdx$, 就记空间为 $L^p(w)$. p 的共轭指数记为 p':

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

L^p 上的三角不等式根据 Minkowski 不等式是有积分形式的. 给定 σ 有限测度空间 $(X,\mu),(Y,\nu)$, 这个积分形式的不等式表为

$$\left(\int_X\left|\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\le\int_Y\left(\int_X|f(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}d\nu(y)$$

$\mathbb{R}^n$ 上两个函数 f,g 的卷积定义为

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy$$

其中右式积分至少需要是有意义的.

测试函数空间表示紧支无穷可微函数空间, 记作 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$; Schwartz 函数空间记为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Schwartz 函数表示在无穷远处速降的无穷可微函数 (更精确地来讲, Schwartz 函数与其任意阶导数都比任意多项式的衰减速度要快). 在给定合适的拓扑后, 它们的对偶空间 (亦即共轭空间) 分别称为分布空间与缓增分布空间. 分布与测试函数的卷积定义为: 如果 $T\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)^*, f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则

$$(T*f)(x)=\langle T,\tau_x\widetilde{f}\rangle$$

其中 $\widetilde{f}(y)=f(-y), \tau_x f(y)=f(x+y)$. 注意如果 T 是局部可积函数, 那么这个定义与前面的经典卷积定义就一样了. 类似可以取 $T\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ 与 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 来定义卷积.

最后, 式子中的 C 统一表示常数项, 这个常数项可能随着式子的推导而发生改变, 不过为了符号简便这里就统一记了.

1.1 补充: (实) 调和分析概览

本节选译自 Terence Tao Fourier Analysis 的课程讲义Note 0: Overview of harmonic analysis.

一般来说, 分析倾向于围绕经典的函数 (一般来说是实值函数或复值函数) 与算子 (以一个或多个函数作为输入, 以另外的一些函数作为输出) 展开研究. 调和分析[1]特别关注这些函数的量化性质, 以及这些量化性质在不同的 (通常很精确的) 算子下怎么变动. 量化性质的例子有: $f(x)$ 在一致有界时刻画它上确界的 M, 或者在平方可积时的 L^2 范数上界 A(也就是说 $\int |f(x)|^2 dx \leq A$). 调和分析的一个典型问题是: 如果函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 平方可积, 且其梯度 ∇f 存在且也平方可积, 那么 f 是否一致有界? ($n = 1$ 时成立, $n > 2$ 时不成立, 而 $n = 2$ 时几乎是不成立的. 这是 Sobolev 嵌入定理的一个特殊情况, 而 Sobolev 嵌入定理是 PDE 分析中的基本要点.) 如果这件事成立, 能否对一致上界有更精确的估计?

实函数或复函数, 比如单变量实值函数 $f(x)(x \in \mathbb{R})$, 远在高中时就在数学课程中很常见了. 在许多情况下, 我们会主要去处理特殊的函数: 多项式函数, 指数函数, 三角函数, 还有其它确定的函数. 这些函数有丰富的代数和几何结构, 在数学的诸多领域中也有很多技术能给出关于这些函数的问题的确切解答.

相反地, 分析关注的更多是一般的函数类: 具有一些定性性质的函数, 比如可测性, 有界性, 连续性, 可微性, 光滑性, 解析性, 可积性, 衰减性等等, 但这些函数没有确切的表达式, 于是它们也不再有那么多的代数和几何结构. 这类一般函数在譬如常或偏微分方程的研究中是很常见的, 因为这些方程的解通常没有确切的代数表达式, 而这并不妨碍它们具有一些例如可微性等等的共同定性性质. 也有可能一个函数有确切的表达式和结构, 但是出于一些原因, 用纯代数方法研究这些结构很困难, 于是研究者必须 (至少在一定程度上) 依靠更多的分析工具. 一个典例是 Airy 函数 $\mathrm{Ai}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi+\xi^3)} d\xi$, 它有确切的积分表达式, 但要理解诸如 $\mathrm{Ai}(x)$ 是否是收敛积分, $x \to \pm\infty$ 时这个积分是否趋零等等这些基本问题, 最简单的方法就是用调和分析的工具. 在这个例子里, 我们就可以用驻相估计原理同时回答这两个问题, 答案可能还很出人意料: Airy 函数在 $x \to +\infty$ 时有指数级衰减, 但在 $x \to -\infty$ 时仅有多项式级衰减.

调和分析作为分析的一个子领域, 特别关注函数的各种定量的界的研究. 比如调和分析关注函数 f 的界是多少, 而不是仅仅去假设 f 有界, 也就是去问满足对全体 (或几乎全体的)$x \in \mathbb{R}$ 而言 $|f(x)| \leq M$ 的最优的 $M \geq 0$ 是多少. 这个量称作 f 的确界范数或 L^∞ 范数, 记作 $\|f\|_{L^\infty}$. 或者, 如果假设 f 绝对可积, 研究者就可以量化这个性质, 引入 L^1 范数 $\|f\|_{L^1} := \int |f(x)| dx$; 更一般地, 研究者可以量化 $0 < p < \infty$ 时的 p 次可积性, 引入 L^p 范数 $\|f\|_{L^p} := (\int |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$. 类似地, 上面提到的其余量化性质也可以被不同的范数所量化, 而范数本身是用非负数 (或 $+\infty$) 去表示给出的函数, 这套方法也给出了用数量去研究函数某个性质的思路. 另外, 作为纯调和分析的一个重点来说, 这些范数的量化估计在应用数学, 例如数值算法的误差估计中也是很有用的.

函数有无穷的可能, 从而围绕函数可以定义的范数不出意外也有无穷多种; 研究者可以用很多方法刻画一个函数究竟有多" 大". 这些范数之间可能还有惊人的差别, 比如可能函数 f 的 L^∞ 范数非常大, 但 L^1 范数很小 (想像一个非常尖的函数, 它在很小的集合上取大值, 而在其余地方取零), 或反过来有很小的 L^∞ 范数和很大的 L^1 范数 (想像一个定义域很广的函数, 它本身取值很小, 但它在一个很大的集合上都非零). 研究者可以类似地把 L^2 范数与 L^1 范数或 L^∞ 范数作比较. 但我们发现在某种意义下 L^2 范数是在 L^1 范数和 L^∞ 范数" 之间" 的, 也就是说如果同时控制了 L^1 范数和 L^∞ 范数, 那么就自动地控制了 L^2 范数. 从直观上讲, 关键点在于 L^∞ 控制了尖型函数的出现, 而 L^1 控制了广分布函数的出现, 剩下的函数在它们中间的 L^2 范数下就有很好的表现. 从量化的角度看, 有下述不等式成立

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}$$

这是代数上 $|f(x)| \leq M \Rightarrow |f(x)|^2 \leq M|f(x)|$ 这件事的一个简单推论. 上面的不等式是 Hölder 不等式的一个特殊情况, 而 Hölder 不等式是调和分析中的一个基本不等式. 控制两个" 极端" 范数, 进而自动得到" 中间" 范数的控制的思想可以被大幅一般化, 导出插值理论中的一系列强大又方便的方法, 而插值理论本身也是调和分析的另一基本工具.

[1] 作者注: 严格来说, 这个词指向的是实调和分析. 抽象调和分析是另外一个领域, 它主要关注怎么用诸如平移或旋转的对称算子去研究 (在常见定义域上的) 实值或复值函数 (例如 Fourier 变换算子与其逆算子); 这个领域本身自然和实调和分析有关, 但它可能在本质上更接近表示论与泛函分析, 这里就不作讨论了.

对单个函数与其所有范数的研究有时显得很乏味. 数学的很多其他领域把关注点更多放在研究者不再考虑单个孤立对象 (函数), 而是引入从一个对象到另一个对象的映射的情形. 这些映射把单个 (或多个) 函数作为输入, 把另外的函数作为输出, 它们通常叫做算子或变换. 算子更像是更复杂的数学对象, 毕竟它们的输入和输出都是函数, 而函数本身的输入和输出都只是通常的数. 不过算子可以表示对函数的很多处理, 比如微分算子

$$f(x) \mapsto \frac{d}{dx} f(x)$$

还有它广为人知的逆算子: 积分算子

$$f(x) \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

一个不直观但是很重要的例子是 Fourier 变换

$$f(x) \mapsto \widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} f(y)dy.$$

有两个或更多输入的算子也是可以关注的点, 这样的算子典例有点态乘积

$$(f(x), g(x)) \mapsto f(x)g(x)$$

与卷积

$$(f(x), g(x)) \mapsto (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

当然, 调和分析也会关注其他的一些算子. 在历史上, 调和分析首先是研究与 Fourier 分析, 实分析和复分析有关的算子; 而在当代, 调和分析方法已经被用来研究更加广泛的算子. 这些技术在理解线性与非线性偏微分方程的解时 (如果把解看成应用在初值上的算子) 尤其有用, 它们也被用在解析和组合数论的理解中, 比如很多表达式中振荡项 (比如指数项) 的处理就源于此. 调和分析同样被应用在解析算子论中, 后者在几何测度论, 概率论, 遍历论, 数值分析与微分几何中都有出现.

调和分析的首要任务是同时得到量化性质与不同算子应用到函数上时的量化信息. 一个量化估计的典例就是不等式 $\|f * g\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} (\forall f, g \in L^2)$, 这是 Young 不等式的一个特殊情况, 用 Cauchy-Schwarz 不等式就可以证明; 利用它我们可以得到一个量化结论: 两个 L^2 函数的卷积是连续函数 (这是因为连续函数空间在 L^∞ 中闭, 而 L^2 函数能被光滑紧支函数以任意精度逼近).

1.2 测度论的必要知识

本节选自 **[FL]**, 旨在为后文预备测度论的相关定义与结论.

1.2.1 σ 代数

定义 1.1 (集代数, σ 代数)

设 X 是非空集合, 称 $\mathcal{A}$ 是 X 上的集代数, 如果 $\mathcal{A}$ 是由 X 的某些子集构成的非空集族, 且其在有限并运算和补运算下封闭. 也就是说, 若 $E_1, \cdots, E_n \in \mathcal{A}$, 则 $\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$; 另若 $E \in A$, 则 $E^c \in \mathcal{A}$. σ 代数指的是在可数并运算下封闭的代数. ♣

因为 $\bigcap_j E_j = (\bigcup_j E_j^c)^c$, 故代数 (或 σ 代数) 在有限 (或可数) 交运算下同样封闭. 另外, 如果 $\mathcal{A}$ 是代数, 则 $\varnothing \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$. 这是因为若 $E \in \mathcal{A}$, 则 $\varnothing = E \cap E^c \in \mathcal{A}, X = E \cup E^c \in \mathcal{A}$. 需要注意如果代数 $\mathcal{A}$ 只在可数不交并下封闭, 它也同样是 σ 代数. 这是因为设 $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$, 取

$$F_k = E_k \Big\backslash \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right] = E_k \cap \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right]^c,$$

则 $F_k \in \mathcal{A}$ 两两不交, 且 $\bigcup_{j=1}^\infty E_j = \bigcup_{k=1}^\infty F_k \in \mathcal{A}$, 因而 $\mathcal{A}$ 是 σ 代数. 这种将集列替换成不交集列的方法在后面会经常用到.

下面给出一些 σ 代数的例子. 任取集合 X, 显见其幂集 $\mathcal{P}(X)$ 与平凡子集族 $\{\varnothing, X\}$ 均为 σ 代数. 另若 X 不可数, 则

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : E\text{可数或}E^c\text{不可数}\}$$

是 σ 代数, 称之为可数集或余可数集的 σ 代数[2].

容易验证 X 上任意 σ 代数的交依旧是 σ 代数, 进而若 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 中的任意子集, 则存在一个最小的 σ 代数 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 包含 $\mathcal{E}$, 此即包含 $\mathcal{E}$ 的全体 σ 代数之交. 称 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 为 $\mathcal{E}$ 生成的 σ 代数, 关于它有下述引理:

引理 1.1

若 $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$, 则 $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

证明 因为 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ 是包含 $\mathcal{E}$ 的 σ 代数, 故它参与了与其它包含 $\mathcal{E}$ 的 σ 代数作交得到 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 的运算, 进而 $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$. □

如果 X 是测度空间, 或更一般的拓扑空间, 则由 X 中的开集族生成的 σ 代数称为 X 上的 Borel σ 代数, 记作 $\mathcal{B}_X$, 其中的元素称为 Borel 集. $\mathcal{B}_X$ 因此包含开集, 闭集, 开集的可数交, 闭集的可数并等集合. 其中对于可数交和可数并有一套标准的表示法: 我们称开集的可数交为 G_δ 集; 称闭集的可数并为 F_σ 集; 称 G_δ 集的可数并为 $G_{\delta\sigma}$ 集; 称 F_σ 集的可数交为 $F_{\sigma\delta}$ 集, 以此类推.

$\mathbb{R}$ 上的 Borel σ 代数将在后文发挥非常重要的作用. 在实变函数中已经证明了下述命题:

命题 1.1

$\mathcal{B}_\mathbb{R}$ 能被下述集族生成:

(i) 开区间族: $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a < b\}$,

(ii) 闭区间族: $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a < b\}$,

(iii) 半开半闭区间族: $\mathcal{E}_3 := \{(a, b] : a < b\}, \mathcal{E}_4 = \{[a, b) : a < b\}$,

(iv) 单边无穷开区间族: $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}, \mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,

(v) 单边无穷闭区间族: $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}, \mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是非空集族, $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \pi_\alpha : X \to X_\alpha$ 是坐标映射. 如果对每个 α 而言, $\mathcal{M}_\alpha$ 都是 X_α 上的 σ 代数, 则 X 上的乘积 σ 代数是由集族

$$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha, \alpha \in A\}$$

所生成的 σ 代数. 记该 σ 代数为 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$(若 $A = \{1, \cdots, n\}$, 则记之为 $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{M}_j$ 或 $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$).

命题 1.2

若 A 可数, 则 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ 是由 $\left\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\right\}$ 所生成的 σ 代数.

证明 若 $E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, 则有 $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta \in A} E_\beta \in \mathcal{M}\left(\left\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\right\}\right)$, 其中[3] $\beta \neq \alpha$ 时 $E_\beta = X$, 故由引理1.1知 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}\left(\left\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\right\}\right)$. 另一方面, $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$, 故同样由引理1.1知 $\mathcal{M}\left(\left\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\right\}\right) \subset \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. 命题至此即证. □

命题 1.3

设 $\mathcal{M}_\alpha$ 由 $\mathcal{E}_\alpha$ 生成, 其中 $\alpha \in A$. 则 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ 由 $\mathcal{F}_1 = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \alpha \in A\}$ 生成. 另若 A 可数且对任意 α 均有 $X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$, 则 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ 由 $\mathcal{F}_2 = \left\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha\right\}$ 生成.

证明 显见 $\mathcal{F}_1 \subset \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha, \alpha \in A\}$, 故 $F_1 \subset \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$, 从而由引理1.1知 $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1) \subset \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. 另一

[2]因为可数集的可数并依旧可数, 故这里定义的 $\mathcal{A}$ 确为 σ 代数.

[3]这个结论可以从 $A = \{1, \cdots, n\}$ 的情况出发来理解, 此时设 $(a, b) \in \mathcal{M}_1$, 则 $\pi_1^{-1}((a, b)) = \{(t, x_2, \cdots, x_n) : t \in (a, b), x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$, 这可以表为 $(a, b) \times \prod_{j=2}^n \mathbb{R}$.

方面, 对每个 α, 集族 $\{E\subset X_\alpha:\pi_\alpha^{-1}(E)\subset\mathcal{M}(\mathcal{F}_1)\}$ 显然是 X_α 上包含 $\mathcal{E}_\alpha$ 的 σ 代数, 进而它也包含 $\mathcal{M}_\alpha$. 也就是说对任意 $E\in\mathcal{M}_\alpha,\alpha\in A$ 均有 $\pi_\alpha^{-1}(E)\in\mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$, 因此 $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha\subset\mathcal{M}(F_1)$. 因此 $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha=\mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$. 命题第二个结论由第一个结论与前述命题结论即得. □

命题 1.4

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是度量空间, $X=\prod_{j=1}^n X_j$ 装备有乘积度量, 则 $\bigotimes_{j=1}^n\mathcal{B}_{X_j}\subset\mathcal{B}_X$. 另若 X_j 均为可分空间, 则 $\bigotimes_{j=1}^n\mathcal{B}_{X_j}=\mathcal{B}_X$.

证明 由命题1.3知 $\bigotimes_{j=1}^n\mathcal{B}_{X_j}$ 由 $\{\pi_j^{-1}(U_j):U_j\text{在 }X_j\text{ 中开},1\le j\le n\}$ 生成, 又因为 X 装备有乘积度量, 故 $\pi_j^{-1}(U_j)$ 在 X 中也为开集, 进而由引理1.1知 $\bigotimes_{j=1}^n\mathcal{B}_{X_j}\subset\mathcal{B}_X$. 现设 C_j 是 X_j 中的可数稠密子集, 设 $\mathcal{E}_j$ 是 X_j 中球心属于 C_j, 半径为有理数的球所构成的集列, 则 X_j 中的每个开集都是 $\mathcal{E}_j$ 中元素的并 (事实上因为 $\mathcal{E}_j$ 本身是可数集族, 故它们还是可数并). 另外, 集合 $\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in X:x_j\in C_j,1\le j\le n\}$ 是 X 的可数稠密子集[4], 且 X 中半径为 r 的球正是 X_j 中半径为 r 的球的乘积. 因此 $\mathcal{B}_{X_j}$ 由 $\mathcal{E}_j$ 所生成, $\mathcal{B}_X$ 由 $\left\{\prod_{j=1}^n:E_j\in\mathcal{E}_j\right\}$ 生成, 故由命题1.3知 $\mathcal{B}_X=\bigotimes_{j=1}^n\mathcal{B}_{X_j}$.

推论 1.1

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}=\bigotimes_{j=1}^n\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

我们用一个之后会用到的技巧上的结果来结束本小节.

定义 1.2 (初等族)

若 X 的子集族 $\mathcal{E}$ 满足

(i) $\varnothing\in\mathcal{E}$,
(ii) 若 $E,F\in\mathcal{E}$, 则 $E\cap F\in\mathcal{E}$,
(iii) 若 $E\in\mathcal{E}$, 则 E^c 是 $\mathcal{E}$ 中有限个不交元素的并,

则称 $\mathcal{E}$ 是一个初等族.

命题 1.5

若 $\mathcal{E}$ 是初等族, 则由 $\mathcal{E}$ 中有限个不交元素之并所组成的集族 $\mathcal{A}$ 是集代数.

证明 要说明 $\mathcal{A}$ 是集代数, 就是要说明 $\mathcal{A}$ 在有限并运算和补运算下封闭. 若 $A,B\in\mathcal{E}$, 设 $B^c=\bigcup_{j=1}^J C_j(C_j\in\mathcal{E}$ 两两不交), 则 $A\backslash B=\bigcup_{j=1}^J(A\cap C_j)$, $A\cup B=(A\backslash B)\cup B$, 其中并运算涉及的几何均两两不交, 故它们都是 $\mathcal{E}$ 中元素的有限不交并, 进而 $A\backslash B\in\mathcal{A}$, $A\cup B\in\mathcal{A}$. 下面用归纳法说明若 $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{E}$, 则 $\bigcup_{j=1}^n A_j\in\mathcal{A}$. 根据归纳假设, 可设 $A_1,\cdots,A_{n-1}$ 两两不交, 注意到

$$\bigcup_{j=1}^n A_j=A_n\cup\bigcup_{j=1}^{n-1}(A_j\backslash A_n)$$

可见 $\bigcup_{j=1}^n A_j$ 同样可写成有限不交并的形式, 因此 $\bigcup_{j=1}^n A_j\in\mathcal{A}$. 至此即得 $\mathcal{A}$ 对有限并封闭. 对于补运算, 设 $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{E}$, 因为 $\mathcal{E}$ 中每个元素的补都能表成 $\mathcal{E}$ 中元素的有限不交并, 故可记 $A_m^c=\bigcup_{j=1}^{J_m}B_m^j$, 其中 $B_m^1,\cdots,B_m^{J_m}\in\mathcal{E}$ 两两不交. 进而

$$\left(\bigcup_{m=1}^n A_m\right)^c=\bigcap_{m=1}^n\left(\bigcup_{j=1}^{J_m}B_m^j\right)=\bigcup_{\substack{1\le j_n\le J_m\\1\le m\le n}}(B_1^{j_1}\cap\cdots\cap B_n^{j_n})$$

上右式作为有限不交并在 $\mathcal{A}$ 中, 故上左式也在 $\mathcal{A}$ 中, 因此 $\mathcal{A}$ 对补运算封闭. □

[4] C_j 本身是可数集, 故这个集合当然可数.

1.2.2 测度

定义 1.3 (测度)

设 X 是装备了 σ 代数 $\mathcal{M}$ 的集合, $\mathcal{M}$ 上的测度 (或 $(X,\mathcal{M})$ 上的, 在 $\mathcal{M}$ 无歧义时也可以说 X 上的) 是函数 $\mu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$, 其满足

(i) $\mu(\varnothing)=0$,

(ii) 若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{M}$ 中两两不交的集合, 则 $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)$.

♣

上述定义中 (ii) 称为**可数可加性**, 它蕴含了**有限可加性:**

(ii') 若 $E_1,\cdots,E_n$ 是 $\mathcal{M}$ 中两两不交的集合, 则 $\mu(\bigcup_{j=1}^{n}E_j)=\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j)$.

前者蕴含后者是因为可以在 $j>n$ 时取 $E_j=\varnothing$. 满足 (i),(ii') 但不满足 (ii) 的函数 μ 称为**有限可加测度**.

定义 1.4 (可测空间, 可测集, 测度空间)

若 X 是集合, $\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(X)$ 是 σ 代数, 则 $(X,\mathcal{M})$ 称为可测空间, $\mathcal{M}$ 中的元素称为可测集. 若 μ 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的测度, 就称 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 为测度空间.

♣

对于测度空间 $(X,\mathcal{M},\mu)$, 有一套标准程序来判断测度 μ 的" 大小". 若 $\mu(X)<\infty$(这蕴含了对任意 $E\in\mathcal{M}$ 都有 $\mu(E)<\infty$, 因为 $\mu(X)=\mu(E)+\mu(E^c)$), 则称 μ 是有限测度; 若 $X=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$, 其中对全体 j 均有 $E_j\in\mathcal{M},\mu(E_j)<\infty$, 则称 μ 是 σ 有限测度. 更一般地, 若 $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$, 其中对全体 j 均有 $E_j\in\mathcal{M},\mu(E_j)<\infty$, 则称 E 在 μ 下 σ 有限[5]. 如果对每个 $E\in\mathcal{M}$, 只要 $\mu(E)=\infty$, 就存在 $F\in\mathcal{M}$ 满足 $F\subset E, 0<\mu(F)<\infty$, 则称 μ 是半有限测度.

容易说明每个 σ 有限测度都是半有限测度, 但反之不然. 幸运的是, 实际证明中用到的绝大多数测度都是 σ 有限测度, 这是因为非 σ 有限测度会有一些反直觉的行为. 下面列举一些典型的测度:

- 设 X 是任意非空集, $\mathcal{M}=\mathcal{P}(X)$, f 是 $X\to[0,\infty]$ 的任意函数, 则 f 定义了 $\mathcal{M}$ 上的一个测度:
$$\mu(E):=\sum_{x\in E}f(x).$$
其中在 E 不可数时, 求和定义为
$$\sum_{x\in E}f(x):=\sup\Big\{\sum_{x\in F}f(x):F\subset E, F\text{ 有限}\Big\}.$$
可以说明 μ 是半有限测度当且仅当对任意 $x\in X$ 均有 $f(x)<\infty$, μ 是 σ 有限测度当且仅当 μ 是半有限测度, 且 $\{x:f(x)>0\}$ 是可数集. 这种测度中, 有两个例子尤为重要: 若对任意 x 均有 $f(x)=1$, 则 μ 称为计数测度; 若存在 $x_0\in X$ 使得 $f(x_0)=1$, 且 $x\neq x_0$ 时 $f(x)=0$, 则 μ 称为 x_0 处的点质量或 Dirac 测度.
- 设 X 是不可数集, $\mathcal{M}$ 是可数集或余可数集的 σ 代数. 若定义 $\mathcal{M}$ 上的函数 μ 为
$$\mu(E)=\begin{cases}0, & E\text{可数}\\ 1, & E\text{余可数}\end{cases}$$
则 μ 显然是一个测度.
- 设 X 是无限集, $\mathcal{M}=\mathcal{P}(X)$, 定义
$$\mu(E)=\begin{cases}0, & E\text{有限}\\ \infty, & E\text{无限}\end{cases}$$
则 μ 是有限可加测度, 但它不是测度.

下面的定理总结了测度的基本性质.

[5] E 有 σ 有限测度这个说法是对的, 但会引起一点歧义.

定理 1.1

设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是测度空间.

(i) (单调性) 若 $E, F \in \mathcal{M}, E \subset F$, 则 $\mu(E) \le \mu(F)$.

(ii) (次可加性) 若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$. 则 $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

(iii) (下连续性) 若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}, E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, 则 $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim\limits_{j\to\infty} \mu(E_j)$.

(iv) (上连续性) 若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}, E_1 \supset E_2 \supset \cdots, \mu(E_1) < \infty$, 则 $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim\limits_{j\to\infty} \mu(E_j)$.

♡

证明 (i) 若 $E \subset F$, 则 $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E) \ge \mu(E)$.

(ii) 设 $F_1 = E_1$, $k > 1$ 时 $F_k = E_k \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right)$, 则 F_k 两两不交, 且对任意 n 均有 $\bigcup_{j=1}^{n} F_j = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$. 则由 (i) 知

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(iii) 设 $E_0 = \varnothing$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \backslash E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \backslash E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

(iv) 设 $F_j = E_1 \backslash E_j$, 则 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots, \mu(E_1) = \mu(F_j) + \mu(E_j)$, 且 $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = E_1 \backslash \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)$. 由 (iii) 即知

$$\mu(E_1) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j\to\infty} \mu(F_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j\to\infty} [\mu(E_1) - \mu(E_j)]$$

又因为 $\mu(E_1) < \infty$, 故移项即得欲证. □

对于测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$, 若 $E \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu(E) = 0$, 则称 E 为**零测集**. 根据次可加性可知零测集的任意可数并都是零测集. 如果关于点 $x \in X$ 的命题在除去某零测集后成立, 就称该命题**几乎处处成立** (简称为 a.e.). 若 $\mu(E) = 0$ 且 $F \subset E$, 则只要 $F \in \mathcal{M}$, 根据次可加性就有 $\mu(F) = 0$, 但一般来说未必有 $F \in \mathcal{M}$. 定义域囊括了全体零测子集的测度称为**完备测度**. 完备性有时可以规避技术上的麻烦, 通常我们用下述定理获得完备测度:

定理 1.2 (测度与 σ 代数的完备化)

设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是测度空间, 记 $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$, $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M} \text{且} \exists N \in \mathcal{N}(F \subset N)\}$. 则 $\overline{\mathcal{M}}$ 是 σ 代数, 且在 $\overline{\mathcal{M}}$ 上有 μ 的唯一完备延拓 $\overline{\mu}$.

♡

证明 因为 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 都对可数并封闭, 故 $\overline{\mathcal{M}}$ 也对可数并封闭. 若 $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$(其中 $E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{N}$), 则可设 $E \cap N = \varnothing$(否则把 F 和 N 换成 $F \backslash E$ 与 $N \backslash E$), 从而 $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$, 进而 $(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \backslash F)$. 又因为 $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}, N \backslash F \subset N$, 故 $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$, 亦即 $\overline{\mathcal{M}}$ 是 σ 代数.

现在在 $\overline{\mathcal{M}}$ 上延拓 μ. 仿照上述过程设 $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, 取 $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$, 下面说明 $\overline{\mu}$ 良定义. 若 $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$(其中 $F_j \in N_j \in \mathcal{N}(j = 1, 2)$), 则 $E_1 \subset E_2 \cup N_2$, 从而 $\mu(E_1) \le \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$, 类似可证 $\mu(E_2) \le \mu(E_1)$, 故 $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, 亦即 $\overline{\mu}$ 良定义. 显见 $\overline{\mu}$ 在 $\overline{\mathcal{M}}$ 上完备, 且容易说明 $\overline{\mu}$ 是 μ 在 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的唯一延拓, 命题至此即证. □

称定理1.2中提到的测度 $\overline{\mu}$ 为 μ 的完备化, 提到的 σ 代数 $\overline{\mathcal{M}}$ 称为 $\mathcal{M}$ 关于 μ 的完备化.

1.2.3 外测度与 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度

本小节是 [**ZMQ**] 已经介绍过的, 故在此只阐述内容, 不作证明.

定义 1.5 (外测度)

称非空集合 X 上的函数 $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ 为外测度, 如果其满足

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$,

(ii) 若 $A \subset B$, 则 $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$,

(iii) $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

♣

最常见的得到外测度的方法是从初等集出发: 首先约定初等集上的测度, 再用初等集通过可数并" 从外侧" 逼近任意集合. 下述命题是这个过程的准确表述:

命题 1.6 (外测度的构造)

设 $\mathcal{E}\subset\mathcal{P}(X),\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ 满足 $\varnothing\in\mathcal{E},X\in\mathcal{E},\rho(\varnothing)=0$. 对任意 $A\subset X$, 定义

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j):E_j\in\mathcal{E},A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right\}.$$

则 μ^* 是外测度.

从外测度到测度的基本步骤如下: 设 μ^* 是 X 上的一个外测度, 称 $A\subset X$ 是 μ^* 可测的, 如果

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c),\quad \forall E\subset X.$$

显见不等式 $\mu^*(E)\le\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$ 对任意 A 与任意 E 均成立, 故为了证明 A 是 μ^* 可测集, 只需证明反向不等式即可. 反向不等式中 $\mu^*(E)=\infty$ 的情况又是平凡的, 故 A 是 μ^* 可测集当且仅当

$$\mu^*(E)\ge\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c),\quad \forall E\subset X,\mu^*(E)<\infty$$

μ^* 可测性这一定义的动机在于如果 E 是一个" 表现良好" 的集合, 那么在 $E\supset A$ 时等式 $\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$ 表明 A 的外测度 $\mu^*(A)$ 等于其" 内测度"$\mu^*(E)-\mu^*(E\cap A^c)$. 从包含 A 的" 表现良好" 集到 X 中的任一子集这一鸿沟由下述重要定理跨越:

定理 1.3 (Carathéodory)

若 μ^* 是 X 上的外测度, 则 μ^* 可测集构成的集族 $\mathcal{M}$ 是 σ 代数, 且 μ^* 在 $\mathcal{M}$ 上的限制是完备测度.

现在对于 $\mathbb{R}$ 来说, 我们想在其上构造一个满足区间的测度恰为其长度的测度. 更进一步, 我们来构造定义在 Borel σ 代数 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 上的测度, 这样的测度称为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度.

命题 1.7

设 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是右连续的递增函数, $\mathcal{A}$ 是由半开半闭区间的有限不交并构成的集代数. 若 $(a_j,b_j](j=1,\cdots,n)$ 是不交的半开半闭区间, 记

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]\right)=\sum_{j=1}^{n}[F(b_j)-F(a_j)],$$

并令 $\mu_0(\varnothing)=0$, 则 μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上的预测度.

定理 1.4

若 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是右连续的递增函数, 则在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一 Borel 测度 μ_F 使得对任意 a,b 均有 $\mu_F((a,b])=F(b)-F(a)$. 若 G 也是这样的函数, 则 $\mu_F=\mu_G$ 当且仅当 $F-G$ 是常数. 反之, 若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度, 其在全体有界 Borel 集上均有限, 且定义

$$F(x)=\begin{cases}\mu((0,x]), & x>0\\ 0, & x=0\\ -\mu((-x,0]), & x<0\end{cases}$$

则 F 是右连续的递增函数, 且 $\mu=\mu_F$.

可以说明对任意右连续递增函数 F, 不仅仅是 Borel 测度 μ_F, 还有一个完备测度 $\overline{\mu}_F$ 的定义域也囊括了 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 事实上, $\overline{\mu}_F$ 正是 μ_F 的完备化, 且可以证明其定义域总是严格大于 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 我们同样记该测度为 μ_F, 称之为 F 诱导的 **Lebesgue-Stieltjes** 测度.

1.3 拓扑群

拓扑群的研究多用在抽象调和分析中, 但其中的一些结论在实调和分析中出乎意料地有用, 这里补充 [**LG1**] 中介绍的拓扑群.

定义 1.6 (拓扑群)

拓扑群 G 指的是关于对应法则

$$(x, y) \mapsto xy \tag{1.2}$$

成群的 Hausdorff 空间, 且映射 $(x, y) \mapsto xy$ 与 $x \mapsto x^{-1}$ 均连续. 拓扑群的 (唯一) 单位元记为 e, 其满足 $\forall x \in G(xe = ex = x)$.

♣

对 $A, B \subset G$ 约定

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$$

可以验证 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 每个拓扑群在单位元 e 处都存在一个对称[6]邻域构成的开拓扑基. 称拓扑群为局部紧群, 如果存在包含单位元的开集 U 满足 $\overline{U}$ 是紧集. 通过局部紧的性质可知群内的每个点都有具紧支集的开邻域.

定义 1.7 ((左)Haar 测度)

设 G 是局部紧群, 若由 G 中 Borel 集导出的正测度 λ 满足 λ 在全体非空开集上均非负, 在全体紧集上均有限, 且满足左不变性质, 即:

$$\lambda(tA) = \lambda(A) \tag{1.3}$$

对任意可测集 $A \subset G$ 与任意 $t \in G$ 均成立, 就称 λ 是 G 上的一个 (左)Haar 测度.

♣

若把左不变性质改为右不变性质, 即

$$\lambda(At) = \lambda(A)$$

对任意可测集 $A \subset G$ 与任意 $t \in G$ 均成立, 其余条件不变, 就可得到 G 上的右 Haar 测度定义. 可以说明 Haar 测度在正常数倍的意义下是唯一的. 若 G 是交换群, 则其上的任意左 Haar 测度都是右 Haar 测度的常数倍. 另外由可数紧集之并构成的局部紧群是在左或右 Haar 测度下的 σ 有限测度空间. 下面介绍一些局部紧群的例子.

例 1.1(欧氏空间, 格点, n 维环) 局部紧群的最经典例子就是 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{Z}^n$ 赋通常拓扑与 n 元组的通常加法了. 另外若定义 n 维环 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 为

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{[0, 1) \times \cdots \times [0, 1)^n}_{n\text{次}}$$

若在其上赋通常拓扑与群法则:

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = ((x_1 + y_1) \bmod 1, \cdots, (x_n + y_n) \bmod 1)$$

则 $\mathbb{T}^n$ 同样是局部紧群.

例 1.2 设 $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 赋通常乘法. 显见测度 $\lambda = \frac{dx}{|x|}$ 在乘法运算下不变:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(tx)\frac{dx}{|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{dx}{|x|}, \quad \forall f \in L^1(G, \mu), \forall t \in \mathbb{R}^*$$

于是 $\frac{dx}{|x|}$ 是 Haar 测度.

例 1.3 类似于上例, 在乘法群 $G = \mathbb{R}^+$ 中 $\frac{dx}{x}$ 也是一个 Haar 测度.

局部紧群与 Haar 测度理论在实调和分析中主要用于导出各种各样的不等式, 后面的内容中总是设出现的局部紧群可表为紧集的可数并. 在这一理论框架下可定义一般的卷积:

[6]亦即满足 $U = U^{-1}$ 的开集 U.

定义 1.8 (卷积)

若 $f,g\in L^1(G)$, 则 $f*g$ 定义为

$$(f*g)(x)=\int_G f(y)g^{y^{-1}x}d\lambda(y). \tag{1.4}$$

♣

1.4 一些重要的不等式和插值结果

本节主要参考 **[ZMQ]**, **[HJR]**, **[LG1]**, 旨在 (作为字典地) 介绍 L^p 空间理论中常见的不等式与 (相对初等的) 插值定理, 这些内容会在之后广泛用到. 下设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是测度空间.

1.4.1 Hölder 不等式

二指标 Hölder 不等式一般指下述定理:

定理 1.5 ((指标为 (p,q) 的)Hölder 不等式[ZMQ])

若 $f\in L^p(X,\mu), g\in L^{p'}(X,\mu)$, 则

$$\|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},\quad 1\le p\le\infty.$$

♡

证明

当 $p=1$ 或 ∞ 时, 欲证式显然成立.

当 $\|f\|_{L^p}=0$ 或 $\|g\|_{L^{p'}}=0$, 知 $f(x)g(x)=0$ 对 $x\in X$ 是 μ 几乎处处成立的, 欲证式进而成立.

当 $\|f\|_{L^p}>0, \|g\|_{L^{p'}}>0, p,p'<+\infty$, 回忆 Young 不等式

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{p'}}\le\frac{a}{p}+\frac{b}{p'},\quad a>0,b>0$$

代入 $a=\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}}, b=\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}}$ 得到

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^{p'}}}\le\frac{1}{p}\cdot\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p}+\frac{1}{p'}\cdot\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}}$$

两边积分有

$$\frac{\|fg\|_{L^1}}{\|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^{p'}}}\le\frac{1}{p}\cdot\frac{\|f\|_{L^p}^p}{\|f\|_{L^p}^p}+\frac{1}{p'}\cdot\frac{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

因而

$$\|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^{p'}}.$$

□

从二指标 Hölder 不等式可推知下述三指标 Hölder 不等式:

推论 1.2 ((指标为 (p,q,r) 的)Hölder 不等式[HJR])

设 p,q,r 满足:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q},\quad (p,q,r)\in[1,\infty]^3$$

若 $f\in L^p(X,\mu), g\in L^q(X,\mu)$, 则

$$\|fg\|_{L^r}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

♡

证明

对于 $(p,q,r)=(1,\infty,1),(\infty,q,q),(p,q,1),(\infty,\infty,\infty)$ 的情况, 利用 L^∞ 范数的定义或指标为 (p,q) 的 Hölder 不等式可证. 下面设 $(p,q,r)\in(1,\infty)^3$, 根据 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 知 $\frac{1}{r}>\max\{\frac{1}{p},\frac{1}{q}\}$, 于是 $1<r<\min\{p,q\}$, 得到 $\min\{\frac{p}{r},\frac{q}{r}\}>1$,

这便有

$$1=\frac{r}{p}+\frac{r}{q}=\frac{1}{\frac{p}{r}}+\frac{1}{\frac{q}{r}}.$$

故

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L^r}^r&=\int_X|f(x)|^r\cdot|g(x)|^r d\mu=\left(\int_X|f(x)|^{r\cdot\frac{p}{r}}d\mu\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_X|f(x)|^{r\cdot\frac{q}{r}}d\mu\right)^{\frac{r}{q}}\\&=\left(\int_X|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_X|g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{r}{q}}\end{aligned}$$

两边取 $\frac{1}{r}$ 次幂为

$$\|fg\|_{L^r}\le\left(\int_X|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X|g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}=\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

□

更一般地, 有下述多指标 Hölder 不等式成立:

推论 1.3 ((指标为 $(p_1,p_2,\cdots,p_k,p)$ 的)Hölder 不等式[LG1])

设 $p_1,p_2,\cdots,p_k,p$ 满足:

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k},\quad(p_1,p_2,\cdots,p_k,p)\in[1,\infty]^{k+1}$$

若 $f_i\in L^i(X,\mu)(i=1,2,\cdots,k)$, 则

$$\|f_1\cdots f_n\|_{L^p}\le\|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}}\cdots\|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

♡

证明

用归纳法, 当 $k=2$ 时, 已知 $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$, 欲证即推论1.2. 设 k 时命题成立, 对 $k+1$, 在 $p,p_1,\cdots,p_{k+1}$ 中任意一者为 ∞ 时, 命题都是显见的, 故可设 $(p,p_1,\cdots,p_{k+1})\in(1,\infty)^{k+2}$, 进而

$$\frac{p}{p_1}+\cdots+\frac{p}{p_k}+\frac{p}{p_{k+1}}=1,\quad(\frac{p}{p_1},\cdots,\frac{p}{p_k},\frac{p}{p_{k+1}})\in(0,1)^{k+2}$$

不妨设

$$\frac{1}{P_k}=\frac{p}{p_1}+\cdots+\frac{p}{p_k},\quad P_k>1$$

知

$$\frac{1}{P_k}+\frac{p}{p_{k+1}}=1\Rightarrow P_k=\left(\frac{p_{k+1}}{p}\right)'$$

进而:

$$\begin{aligned}\left(\int_X|f_1(x)\cdots f_{k+1}(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}&=\left(\int_X|f_1(x)\cdots f_k(x)|^p\cdot|f_{k+1}(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le\left(\left(\int_X|f_1(x)\cdots f_k(x)|^{p\cdot P_k}d\mu\right)^{\frac{1}{P_k}}\cdot\left(\int_X|f_{k+1}(x)|^{p\cdot\frac{p_{k+1}}{p}}d\mu\right)^{\frac{p}{p_{k+1}}}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_X|f_1(x)\cdots f_k(x)|^{p\cdot P_k}d\mu\right)^{\frac{1}{p\cdot P_k}}\cdot\|f_{k+1}\|_{L^{p_{k+1}}}\end{aligned}$$

注意

$$\frac{1}{p\cdot P_k}=\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}$$

记 $P=p\cdot P_k$, 则对 $P,p_1,\cdots,p_k$ 用归纳假设的 Hölder 不等式有:

$$\|f_1\cdots f_k\|_{L^P}\le\|f_1\|_{L^{p_1}}\cdots\|f_k\|_{L^{p_k}}$$

亦即

$$\left(\int_X|f_1(x)\cdots f_k(x)|^P d\mu\right)^{\frac{1}{P}}=\left(\int_X|f_1(x)\cdots f_k(x)|^{p\cdot P_k}d\mu\right)^{\frac{1}{p\cdot P_k}}\le\|f_1\|_{L^{p_1}}\cdots\|f_k\|_{L^{p_k}}$$

从而

$$\left(\int_X |f_1(x)\cdots f_{k+1}(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \|f_1\|_{L^{p_1}}\cdots\|f_k\|_{L^{p_k}}\cdot\|f_{k+1}\|_{L^{p_{k+1}}}$$

$k+1$ 情况成立, 命题即证. □

特别注意对于指标为 (p,p') 的 Hölder 不等式, 可以证明它在一些情况下是最优的, 此即下述定理:

定理 1.6 (指标为 (p,p') 的 Hölder 不等式的最优性[HJR])

设 $p\in[1,\infty]$, 实值函数 f 在 (X,μ) 上可测, 若

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\le 1}\int_X |f(x)g(x)|d\mu<\infty$$

则 $f\in L^p(X,\mu)$, 且

$$\|f\|_{L^p}=\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\le 1}\int_X f(x)g(x)d\mu.$$

证明

注意若 $f\in L^p(X,\mu)$, 则根据指标为 (p,p') 的 Hölder 不等式1.5:

$$\int_X f(x)g(x)d\mu\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}\Rightarrow\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\le 1}\int_X f(x)g(x)d\mu\le\|f\|_{L^p}$$

故只需证明

$$\|f\|_{L^p}\le\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\le 1}\int_X f(x)g(x)d\mu$$

首先考虑 $p=\infty$ 的情况, 设 $\lambda>0$ 满足 $\mu(\{x\in X:|f(x)|\ge\lambda\})>0$, 记

$$E_\lambda:=\{x\in X:|f(x)|\ge\lambda\}$$

考虑 $L^1(X,\mu)$ 中的非负紧支函数 g_0, 其支集为 E_λ, 且 $\|g_0\|_{L^1}=1$, 定义

$$g(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|}g_0(x)$$

则根据 g_0 的紧支性显见 g 紧支, 从而 $g\in L^1(X,\mu)$, 进一步 fg 是紧支的, 且 $fg\in L^1(X,\mu)$, 有

$$\int_X f(x)g(x)d\mu=\int_X\frac{f^2(x)}{|f(x)|}g_0(x)d\mu=\int_{E_\lambda}\frac{|f(x)|^2}{|f(x)|}g_0(x)d\mu=\int_{E_\lambda}|f(x)|g_0(x)d\mu\ge\lambda\int_{E_\lambda}g_0(x)d\mu=\lambda$$

这便说明对任意满足 $\mu(\{x\in X:|f(x)|\ge\lambda\})>0$ 的 $\lambda>0$, 总有

$$\lambda\le\int_X f(x)g(x)d\mu$$

取这些 λ 的上确界 $\|f\|_{L^\infty}$, 得

$$\|f\|_{L^\infty}\le\int_X f(x)g(x)d\mu$$

此时命题即证.

现在对于一般的 $p\in(1,\infty)$, 考虑 X 中的有限测度不降列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 满足 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}E_k=X$, 取

$$f_k(x)=\chi_{E_k\cap\{x\in X:|f(x)|\le k\}}\cdot f(x)$$

显见对任意固定的 $k\in\mathbb{N}$, f_k 的支集都是有限测度的, 因而 $\forall k\in\mathbb{N}\forall p\in(1,\infty)(f_k\in L^p(X,\mu))$, 进而设

$$g_k(x)=\frac{f_k(x)\cdot|f_k(x)|^{p-1}}{|f_k(x)|\cdot\|f_k\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}}$$

得

$$\|g_k\|_{L^{p'}}^{p'}=\frac{1}{\|f_k\|_{L^p}^p}\int_X|f_k(x)|^{(p-1)p'}d\mu=\frac{1}{\|f_k\|_{L^p}^p}\int_X|f_k(x)|^p d\mu=1$$

由 f_k, g_k 的构造知

$$\int_X f_k(x)g_k(x)d\mu = \int_X \frac{f_k^2(x)|f_k(x)|^{p-1}}{|f_k(x)|\cdot\|f_k\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}}d\mu = \int_X \frac{|f_k(x)|^2|f_k(x)|^{p-1}}{|f_k(x)|\cdot\|f_k\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}}}d\mu$$

$$= \left(\int_X |f_k(x)|^p d\mu\right)\|f_k\|_{L^p}^{-\frac{p}{p'}} = \|f_k\|_{L^p}^p \|f_k\|_{L^p}^{-\frac{p}{p'}} = \|f_k\|_{L^p}$$

故有

$$\|f_k\|_{L^p} \le \sup_{\|g\|_{L^{p'}}\le 1} \int_X f_k(x)g(x)d\mu$$

因为

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\le 1} \int_X |f(x)g(x)|d\mu < \infty$$

故由 Lebesgue 控制收敛定理, 在式子两边令 $k \to \infty$ 得到

$$\|f\|_{L^p} \le \sup_{\|g\|_{L^{p'}}\le 1} \int_X f(x)g(x)d\mu$$

最后, 对于 $p = 1$ 的情况, 考虑由下式定义的函数列 $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$g_k(x) = \chi_{\{x\in X: f_k(x)\neq 0\}}(x)\cdot\frac{f_k(x)}{|f_k(x)|}$$

显见 $\|g_k\|_{L^\infty} = 1$, 且

$$\int_X f(x)g_k(x)d\mu = \int_X f(x)\cdot\chi_{\{x\in X: f_k(x)\neq 0\}}(x)\cdot\frac{f_k(x)}{|f_k(x)|}d\mu$$

$$= \int_X f_k(x)\cdot\frac{f_k(x)}{|f_k(x)|}d\mu = \int_X \frac{|f_k(x)|^2}{|f_k(x)|}d\mu = \int_X |f_k(x)|d\mu$$

又因为

$$\sup_{\|g\|_{L^\infty}\le 1} \int_X |f(x)g(x)|d\mu < \infty$$

故由 Lebesgue 控制收敛定理, 在式子两边令 $k \to \infty$ 得到

$$\int_X |f(x)|d\mu = \|f\|_{L^1} \le \sup_{\|g\|_{L^\infty}\le 1} \int_X f(x)g(x)d\mu$$

命题即证. □

注 Hölder 不等式的最优性1.6同时可以从共轭空间算子范数的角度去理解, 具体参见泛函分析的相关内容.

1.4.2 Minkowski 不等式

Minkowski 不等式有两个形式, 但它们的本质是统一的.

定理 1.7 ((加和形式的)Minkowski 不等式[ZMQ])

若 $f, g \in L^p(X,\mu)(1 \le p \le \infty)$, 则

$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

♡

证明

当 $p = 1$ 时, 欲证式即三角不等式. 当 $p = \infty$ 时, 根据本性上确界的定义有

$$|f(x)| \le \|f\|_{L^\infty}, \quad |g(x)| \le \|g\|_{L^\infty}, \quad \mu-\text{a.e. } x \in X$$

故

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}, \quad \mu-\text{a.e. } x \in X$$

从而 $\|f+g\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$, 欲证式成立.

当 $1 < p < +\infty$, 有

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu &\le \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)+g(x)|d\mu\\ &\le \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)|d\mu + \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|g(x)|d\mu\\ &\le \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}} d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad+\left(\int_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}} d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left(\int_X |g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=\|f+g\|_{L^p}^{p-1}\cdot\|f\|_{L^p}+\|f+g\|_{L^p}^{p-1}\cdot\|g\|_{L^p}\end{aligned}$$

当 $\|f+g\|_{L^p}\neq 0$ 时, 这便是

$$\|f+g\|_{L^p}^p \le \|f+g\|_{L^p}^{p-1}(\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}) \Rightarrow \|f+g\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}$$

而当 $\|f+g\|_{L^p}=0$, 原式显然成立. □

定理 1.8 ((积分形式的)Minkowski 不等式[HJR])

设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是 σ 有限测度空间, f 是 $(X,\mu)\times(Y,\nu)$ 上的非负可测函数. 则对任意的 $1\le p\le q\le\infty$, 有

$$\|\|f(x,y)\|_{L^p(Y,\nu(y))}\|_{L^q(X,\mu(x))}\le\|\|f(x,y)\|_{L^q(X,\mu(x))}\|_{L^p(Y,\nu(y))}$$

♡

证明

当 $q=\infty$ 时, 欲证式显然成立, 下设 q 有限. 设 $r=(\frac{q}{p})'$, 有:

$$\begin{aligned}\|\|f(x,y)\|_{L^p(Y,\nu(y))}\|_{L^q(X,\mu(x))} &= \left(\int_X\left(\int_Y f^p(x,y)d\nu(y)\right)^{\frac{q}{p}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X\left(\int_Y f^p(x,y)d\nu(y)\right)^{\frac{q}{p}}d\mu(x)\right)^{\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{p}}\\ &\le \left\|\int_Y f^p(x,y)d\nu(y)\right\|_{L^{\frac{q}{p}}(X,\mu(x))}^{\frac{1}{p}} = \left\|\int_Y f^p(x,y)d\nu(y)\right\|_{L^{r'}(X,\mu(x))}^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{\text{(i)}}{=}\left(\sup_{\|g\|_{L^r(X,\mu(x))}\le 1}\int_X\left(\int_Y f^p(x,y)d\nu(y)\right)g(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{\text{(ii)}}{=}\left(\sup_{\|g\|_{L^r(X,\mu(x))}\le 1}\int_{X\times Y} f^p(x,y)g(x)d\nu(y)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{\text{(iii)}}{=}\left(\sup_{\substack{\|g\|_{L^r(X,\mu(x))}=1\\ g\ge 0}}\int_{X\times Y} f^p(x,y)g(x)d\nu(y)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{\text{(iv)}}{\le}\left(\int_Y\left(\sup_{\substack{\|g\|_{L^r(X,\mu(x))}=1\\ g\ge 0}}\int_X f^p(x,y)g(x)d\mu(x)\right)d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{\text{(v)}}{\le}\left(\int_Y\left(\sup_{\substack{\|g\|_{L^r(X,\mu(x))}=1\\ g\ge 0}}\|f^p(x,y)\|_{L^{\frac{q}{p}}(X,\mu(x))}\cdot\|g\|_{L^{(\frac{q}{p})'}(X,\mu(x))}\right)d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{\text{(vi)}}{=}\left(\int_Y\|f^p(x,y)\|_{L^{\frac{q}{p}}(X,\mu(x))}d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=\left(\int_Y\left(\int_X|f(x,y)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{p}{q}}d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} = \|\|f(x,y)\|_{L^q(X,\mu(x))}\|_{L^p(Y,\nu(y))}\end{aligned}$$

其中 (i) 是 Hölder 不等式的最优性1.6, (ii) 是 Fubini 定理 (定理条件需要 X,Y 的 σ 有限性), (iii) 参见 **[ZGQ]** 第二章习题 2.1.2, (iv) 是放大不等式 (积分后取上确界小于等于取上确界后积分), (v) 是 Hölder 不等式1.5, (vi) 是代入了 $r=(\frac{q}{p})'$ 与上确界中 $\|g\|_{L^r}=\|g\|_{L^{(\frac{p}{q})'}}=1$ 的条件. □

1.4.3 Young 不等式

在估计卷积时, Young 不等式是非常强大的工具.

定理 1.9 (Young 不等式[LG1])

设 $(p,q,r)\in[1,\infty]^3$ 满足

$$1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \tag{1.5}$$

并设 $f\in L^p(X,\mu), g\in L^q(X,\mu)$, 则 $f*g\in L^r(X,\mu)$, 且

$$\|f*g\|_{L^r}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

证明

当 $r=\infty$, 知

$$\|f*g\|_{L^1}=\int_X|f(y)g(x-y)|d\mu(y)\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}=\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

下面考虑 $r<\infty$, 知

$$\begin{aligned}|f*g|(x)&\le\int_X|f(y)g(x-y)|d\mu(y)\\&=\int_X|f(y)|^{\frac{r}{r+1}}|g(x-y)|^{\frac{1}{r+1}}|f(y)|^{\frac{1}{r+1}}|g(x-y)|^{\frac{r}{r+1}}d\mu(y)\end{aligned}$$

注意(1.5)式可写成 $\frac{r}{r+1}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})=1$, 故对上式应用 Hölder 不等式有:

$$\begin{aligned}|f*g|(x)&\le\left(\int_X(|f(y)|^{\frac{r}{r+1}}|g(x-y)|^{\frac{1}{r+1}})^{\frac{(r+1)p}{r}}d\mu(y)\right)^{\frac{r}{(r+1)p}}\cdot\left(\int_X(|f(y)|^{\frac{1}{r+1}}|g(x-y)|^{\frac{r}{r+1}})^{\frac{(r+1)q}{r}}d\mu(y)\right)^{\frac{r}{(r+1)q}}\\&=\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^{\frac{p}{r}}dy\right)^{\frac{r}{(r+1)p}}\cdot\left(\int_X|f(y)|^{\frac{q}{r}}|g(x-y)|^q dy\right)^{\frac{r}{(r+1)q}}\end{aligned}$$

对左边的因子再应用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}&\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^{\frac{p}{r}}d\mu(y)\right)^{\frac{r}{(r+1)p}}\\=&\left(\int_X|f(y)|^{p\cdot(1-\frac{p}{rq})}\cdot|f(y)|^{p\cdot\frac{p}{rq}}|g(x-y)|^{\frac{p}{r}}d\mu(y)\right)^{\frac{r}{(r+1)p}}\\\le&\left(\int_X|f(y)|^{p\cdot(1-\frac{p}{rq})\cdot\frac{1}{1-\frac{p}{rq}}}d\mu(y)\right)^{(1-\frac{p}{rq})\cdot\frac{r}{(r+1)p}}\cdot\left(\int_X|f(y)|^{p\cdot\frac{p}{rq}\cdot\frac{rq}{p}}|g(x-y)|^{\frac{p}{r}\cdot\frac{rq}{p}}d\mu(y)\right)^{\frac{p}{rq}\cdot\frac{r}{(r+1)p}}\\=&\left(\int_X|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{r}{(r+1)p}-\frac{1}{q(r+1)}}\cdot\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q(r+1)}}\\\le&\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q(r+1)}}\cdot\|f\|_{L^p}^{\frac{r}{r+1}(1-\frac{p}{qr})}\end{aligned}$$

同样对右边的因子应用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}}|f(y)|^{\frac{q}{r}}|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{r}{(r+1)q}}\\=&\left(\int_X|f(y)|^{\frac{q}{r}}|g(x-y)|^{q\cdot\frac{q}{rp}}\cdot|g(x-y)|^{q\cdot(1-\frac{q}{rp})}d\mu(y)\right)^{\frac{r}{(r+1)}q}\\\le&\left(\int_X|f(y)|^{\frac{q}{r}\cdot\frac{rp}{q}}|g(x-y)|^{q\cdot\frac{q}{rp}\cdot\frac{rp}{q}}d\mu(y)\right)^{\frac{q}{rp}\cdot\frac{r}{(r+1)q}}\cdot\left(\int_X|g(x-y)|^{q\cdot(1-\frac{q}{rp})\cdot\frac{1}{1-\frac{q}{rp}}}d\mu(y)\right)^{(1-\frac{q}{rp})\cdot\frac{r}{(r+1)q}}\\=&\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p(r+1)}}\cdot\left(\int_X|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{r}{(r+1)q}-\frac{1}{p(r+1)}}\\\le&\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p(r+1)}}\cdot\|g\|_{L^q}^{\frac{r}{r+1}(1-\frac{q}{pr})}\end{aligned}$$

代回得到

$$|f*g|(x)\le\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{r+1}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}\cdot\|f\|_{L^p}^{\frac{r}{r+1}(1-\frac{p}{qr})}\cdot\|g\|_{L^q}^{\frac{r}{r+1}(1-\frac{q}{pr})}$$

两边同取 r 次幂:

$$(|f|*|g|)^r(x)\le\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{r}{r+1}\cdot\frac{r+1}{r}}\cdot\|f\|_{L^p}^{\frac{r}{r+1}(r-\frac{p}{q})}\cdot\|g\|_{L^q}^{\frac{r}{r+1}(r-\frac{q}{p})}\tag{1.6}$$

注意

$$\begin{aligned}\frac{r}{r+1}\left(r-\frac{p}{q}\right)&=\frac{pq}{p+q}\left(r-\frac{p}{q}\right)=\frac{pq}{p+q}\left(\frac{pq}{p+q-pq}-\frac{p}{q}\right)=\frac{pq}{p+q}\frac{p(q-1)(p+q)}{q(p+q-pq)}\\&=p\cdot\frac{1-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}=p\cdot\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{r}}=r-p\end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{r}{r+1}\left(r-\frac{q}{p}\right)=r-q$$

故(1.6)式即

$$(|f|*|g|)^r(x)\le\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)\cdot\|f\|_{L^p}^{r-p}\cdot\|g\|_{L^q}^{r-q}$$

两边对 x 积分有:

$$\begin{aligned}\int_X(|f|*|g|)^r(x)d\mu(x)&\le\int_X\left(\int_X|f(y)|^p|g(x-y)|^q d\mu(y)\right)d\mu(x)\cdot\|f\|_{L^p}^{r-p}\cdot\|g\|_{L^q}^{r-q}\\&\overset{(i)}{=}\int_X|f(y)|^p\left(\int_X|g(x-y)|^q d\mu(x)\right)d\mu(y)\cdot\|f\|_{L^p}^{r-p}\cdot\|g\|_{L^q}^{r-q}\\&=\|f\|_{L^p}^p\|g\|_{L^q}^q\|f\|_{L^p}^{r-p}\|g\|_{L^q}^{r-q}=\|f\|_{L^p}^r\|g\|_{L^q}^r\end{aligned}$$

最后两边同取 $\frac{1}{r}$ 次幂即得:

$$\|f*g\|_{L^r}\le\|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q}$$

$r<\infty$ 的情况得证. □

特别令 $r=p,q=1$ 可得卷积的 Minkowski 不等式, **[LG1]** 中给出了下述在局部紧群中的结果:

定理 1.10 (局部紧群上关于卷积的 Minkowski 不等式)

若 G 是局部紧群, λ 是其上的左不变 Haar 测度, $1\le p\le\infty$, $f\in L^p(G)$, $g\in L^1(G)$, 则 $g*f$ 是 λ 几乎处处存在的, 且

$$\|g*f\|_{L^p(G,\lambda)}\le\|g\|_{L^1(G,\lambda)}\|f\|_{L^p(G,\lambda)}.\tag{1.7}$$

1.4.4 (相对初等的) 插值

[ZMQ] 中曾介绍过一些初等的插值结果, 它们无需引入泛函分析即可得证, 本节对这些结果作介绍.

定理 1.11 (一般集合上 $[p,\infty]$ 的插值)

设 $0<p\le q\le\infty$, 若 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $f\in L^q(\mathbb{R}^n)$.

证明

当 $q=p$ 或 $q=\infty$, 命题显然成立, 现设 $q\in(p,\infty)$, 知

$$\int_X|f(x)|^q dx=\int_X|f(x)|^p\cdot|f(x)|^{q-p}dx\le\|f\|_{L^\infty}\int_X|f(x)|^p dx$$

两边同时取 $\frac{1}{q}$ 次幂有

$$\|f\|_{L^q}\le\|f\|_{L^\infty}^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}<\infty$$

命题即证. □

定理 1.12 (有限测度集上指标为 (p,q) 的嵌入)

若 $E\subset\mathbb{R}^n, m(E)<\infty, 0<p<q\leq\infty$, 则 $L^q(E)\subset L^p(E)$, 且

$$\|f\|_{L^q}\leq m(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p}.$$

证明

当 $q=\infty$ 时命题显然成立, 下设 $q<\infty$, 取 $r=\frac{q}{p}$, 则 $r>1$, 有:

$$\int_E|f(x)|^p\,dx=\int_E|f(x)|^p\cdot 1dx\leq\left(\int_E|f(x)|^{p\cdot r}\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_E 1^{r'}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}=(m(E))^{\frac{1}{r'}}\left(\int_E|f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{r}}$$

两边同时取 $\frac{1}{p}$ 次幂有

$$\|f\|_{L^p}=m(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_E|f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}=m(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q}$$

命题即证. □

注 上述结果即 $L^q(E)\hookrightarrow L^p(E)$, 亦即 $L^q(E)$ 可以连续嵌入 $L^p(E)$.

定理 1.13 (L^p 范数的对数凸性ZMQ)

若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$, 且令 $0<p<q\leq\infty$, 则对任意 $\lambda\in(0,1)$, 设

$$\frac{1}{r}=\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{q}$$

均有 $p<r<q$, 且

$$\|f\|_{L^r}\leq\|f\|_{L^p}^{\lambda}\|f\|_{L^q}^{1-\lambda}.$$

证明

$p<r<q$ 容易说明, 知

$$1=\frac{\lambda r}{p}+\frac{(1-\lambda)r}{q}.$$

当 $p<q<\infty$ 时, 有:

$$\begin{aligned}\int_X|f(x)|^r\,dx&=\int_X|f(x)|^{\lambda r}|f(x)|^{(1-\lambda)r}\,dx\\&\leq\left(\int_X|f(x)|^{\lambda r\cdot\frac{p}{\lambda r}}\,dx\right)^{\frac{\lambda r}{p}}\left(\int_X|f(x)|^{(1-\lambda)r\cdot\frac{q}{(1-\lambda)r}}\,dx\right)^{\frac{(1-\lambda)r}{q}}\\&=\|f\|_{L^p}^{\lambda r}\|f\|_{L^q}^{(1-\lambda)r}\end{aligned}$$

当 $p<q=\infty$ 时, 知 $r=\frac{p}{\lambda}$, 于是:

$$\int_X|f(x)|^r\,dx=\int_X|f(x)|^{r-p}|f(x)|^p\,dx\leq\|f^{r-p}\|_{L^\infty}\int_X|f(x)|^p\,dx=\|f\|_{L^\infty}^{r(1-\lambda)}\|f\|_{L^p}^{r\lambda}$$

命题即证. □

笔记 在上述命题中, 若令 $\lambda\to1$ 或 $\lambda\to0$, 可得 $p<r<q\leq\infty$ 时有

$$\|f\|_{L^r}\leq\max\{\|f\|_{L^p},\|f\|_{L^q}\}$$

这说明 $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$.

定理 1.14 (加和空间的插值ZMQ)

设 $0<p<r<q<\infty, f\in L^r(\mathbb{R}^n)$, 则对任意的 $t>0$, 存在分解 $f(x)=g(x)+h(x)$, 其满足

$$\|g\|_{L^p}^p\leq t^{p-r}\|f\|_{L^r}^r,$$

$$\|h\|_{L^q}^q\leq t^{q-r}\|f\|_{L^r}^r.$$

证明

对 $t>0$, 作函数

$$g(x)=\begin{cases}0, & |f(x)|\le t\\ f(x), & |f(x)|>t\end{cases},\quad h(x)=f(x)-g(x)$$

有

$$\|g\|_{L^p}^p=\int_X |g(x)|^p dx=\int_X |g(x)|^{p-r}|g(x)|^r dx \overset{(i)}{\le} t^{p-r}\int_X |g(x)|^r dx\le t^{p-r}\int_X |f(x)|^r dx=t^{p-r}\|f\|_{L^r}^r$$

其中 (i) 是因为根据 g 的构造知在 $\operatorname{supp} g$ 中总有 $|g(x)|\ge t$, 而 $p-r<0$, 于是 $|g(x)|^{p-r}\le t^{p-r}$.

对另一式, 根据 h 的构造知在 $\operatorname{supp} h$ 中总有 $|h(x)|\le t$, 于是

$$\|h\|_{L^q}^q=\int_X |h(x)|^q dx=\int_X |h(x)|^{q-r}|h(x)|^r dx\le t^{q-r}\int_X |h(x)|^r dx\le t^{q-r}\int_X |f(x)|^r dx=t^{q-r}\|f\|_{L^r}^r$$

命题即证. □

笔记 在上述结果中, 若取 $t=1$, 并定义 $L^p(\mathbb{R}^n)+L^q(\mathbb{R}^n)$ 的范数为 $\|g+h\|_{L^p+L^q}=\|g\|_{L^p}+\|h\|_{L^q}(g\in L^p(\mathbb{R}^n),h\in L^q(\mathbb{R}^n))$, 则有

$$L^r(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)+L^q(\mathbb{R}^n).$$

1.5 拟赋范 Lebesgue 空间

在 **[ZMQ]**,**[ZGQ]** 或 PDE 的研究中, 对 Lebesgue 空间 L^p 的研究大多集中在 $1\le p\le\infty$ 的情形. **[LG1]** 中介绍了 $0<p<1$ 这一空缺的情况, 这类 Lebesgue 空间中诸多寻常的结论会略微发生改变, 本小节旨在简要介绍该空间. 设 X 是测度空间, μ 是其上的测度.

类似于 $1\le p<\infty$ 的情形, 在 $0<p<1$ 时同样记

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)}=\left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

但此时 $\|\circledast\|_{L^p(X,\mu)}$ 不再是范数, 事实上有下述命题:

定理 1.15 (反向 Hölder 不等式)

若 $0<p<1$, 则对任意 $f\in L^p(X,\mu), g\in L^{p'}(X,\mu)$ 有

$$\int_X |f(x)g(x)|dx\ge\|f\|_{L^p(X,\mu)}\|g\|_{L^{p'}(X,\mu)}.$$

证明 不妨设 $fg\in L^1(X,\mu)$, 记 $\overline{p}=\frac{1}{p}>1$, 则

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(X,\mu)}&=\left(\int_X |f(x)g(x)|^p\cdot|g(x)|^{-p}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le\left(\int_E |f(x)g(x)|^{p\cdot\overline{p}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\overline{p}}}\left(\int_X |g(x)|^{-p\overline{p}'}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}\frac{1}{\overline{p}'}}\\&=\frac{1}{\|g\|_{L^{p'}(X,\mu)}}\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x)\end{aligned}$$

此即欲证. □

定理 1.16 (反向 Minkowski 不等式)

若 $0<p<1$, 则对任意 $f,g\in L^p(X,\mu)$ 有

$$\||f|+|g|\|_{L^p(X,\mu)}\ge\|f\|_{L^p(X,\mu)}+\|g\|_{L^p(X,\mu)}.$$

证明 不妨设 $\||f|+|g|\|_{L^p(X,\mu)}>0$, 由反向 Hölder 不等式1.15知

$$\begin{aligned}\||f|+|g|\|_{L^p(X,\mu)}^p&=\int_X(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|)d\mu(x)\\&\geq\left(\int_X(|f(x)|+|g(x)|)^{p'(p-1)}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'}}(\|f\|_{L^p(X,\mu)}+\|g\|_{L^p(X,\mu)})\\&=\||f|+|g|\|_{L^p(X,\mu)}^{\frac{p}{p'}}(\|f\|_{L^p(X,\mu)}+\|g\|_{L^p(X,\mu)}).\end{aligned}$$

此即欲证. □

归纳即得下述一般定理:

定理 1.17 (反向 Minkowski 不等式)

若 $0<p<1$, 则对任意 $f_1,\cdots,f_n\in L^p(X,\mu)$ 与 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$\sum_{j=1}^N\|f_j\|_{L^p(X,\mu)}\leq\left\|\sum_{j=1}^N f_j\right\|_{L^p(X,\mu)}.$$

♡

不过在 $0<p<1$ 时, $\|\circledast\|_{L^p(X,\mu)}$ 将成为拟范数, 这由下述命题展现:

命题 1.8 ($\|\circledast\|_{L^p(X,\mu)}(0<p<1)$ 是拟范数)

若 $0<p<1$, 则对任意 $f_1,\cdots,f_n\in L^p(X,\mu)$ 与 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$\left\|\sum_{j=1}^N f_j\right\|_{L^p(X,\mu)}\leq N^{\frac{1-p}{p}}\sum_{j=1}^N\|f_j\|_{L^p(X,\mu)}.$$

♠

证明 首先证明对 $\{a_j\}_{j=1}^N\subset\mathbb{R}(N\in\mathbb{N})$ 有

$$\left(\sum_{j=1}^N|a_j|\right)^\theta\leq\sum_{j=1}^N|a_j|^\theta,\quad\forall 0\leq\theta\leq 1\tag{1.8}$$

这是因为当 $a_j=0(j=1,\cdots,N)$ 时命题显见, 当 $\{a_j\}_{1\leq j\leq N}$ 中至少有一项非零时设 $\{a_j\}_{1\leq j\leq N}\in l^1(\mathbb{R})\cap l^\theta(\mathbb{R})$, 则只需证明 $\|\{a_j\}_{1\leq j\leq N}\|_{l^1(\mathbb{R})}=1$ 的情况即可. 此时往证

$$\sum_{j=1}^N|a_j|^\theta\geq 1$$

但因为 $\|\{a_j\}_{1\leq j\leq N}\|_{l^1(\mathbb{R})}=1\Rightarrow\forall 1\leq j\leq N(|a_j|\leq 1)$, 故 $\forall 1\leq j\leq N(|a_j|\leq|a_j|^\theta)$, 因而

$$\sum_{j=1}^B|a_j|^\theta\geq\sum_{j=1}^N|a_j|=1$$

欲证成立. 另根据 Jensen 不等式知

$$\left(\sum_{j=1}^N a_j\right)^\theta\leq N^{\theta-1}\sum_{j=1}^N a_j^\theta,\quad\forall 1\leq\theta<\infty\tag{1.9}$$

现令 $\theta=\frac{1}{p}, a_j=\|f_j\|_{L^p(X,\mu)}^p$ 知

$$\left(\sum_{j=1}^N\int_X|f_j(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\leq N^{\frac{1-p}{p}}\sum_{j=1}^N\|f_j\|_{L^p(X,\mu)}.$$

再由(1.8)式知

$$\left(\sum_{j=1}^N|f_j(x)|\right)^p\leq\sum_{j=1}^N|f_j(x)|^p$$

于是

$$\left(\int_X(\sum_{j=1}^N |f_j(x)|)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^N \int_X |f_j(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \le N^{\frac{1-p}{p}} \sum_{j=1}^N \|f_j\|_{L^p(X,\mu)}$$

此即欲证. □

上述命题表明 $L^p(X,\mu)$ 在 $0<p<1$ 时是拟赋范线性空间. 下面说明关于 Lebesgue 空间完备性的一般结论:

定理 1.18

$L^p(X,\mu)(0<p<\infty)$ 是拟赋范 Banach 空间.

证明 当 $p>1$ 时, 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset L^p(X,\mu)$ 是基本列, 根据定义知

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall m,n>N(\|f_n-f_m\|_{L^p(X,\mu)}<\varepsilon)$$

故可选取 n_1 使得 $n>n_1$ 时 $\|f_{n_1}-f_n\|_{L^p(X,\mu)}<\frac{\varepsilon}{2}$, 进一步可选取 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 使得对任意 $m\ge 0$ 都有 $\|f_{n_j}-f_{n_{j+m}}\|_{L^p(X,\mu)}<\frac{\varepsilon}{2^j}$. 取 $f=f_{n_1}+\sum_{j=1}^{\infty}(f_{n_{j+1}}-f_{n_j})$, 往证 $f\in L^p(X,\mu)$, 这便只需证明 $\sum_{j=1}^{\infty}|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|\in L^p(X,\mu)$. 根据 Fatou 引理知:

$$\int_X\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|\right)^p d\mu(x)\le \varliminf_{k\to\infty}\int_X\left(\sum_{j=1}^{k}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|\right)^p d\mu(x)$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\int_X\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} &\le \varliminf_{k\to\infty}\left(\int_X\left(\sum_{j=1}^{k}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{\text{(i)}}{\le} \varliminf_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}\|_{L^p(X,\mu)}<\varepsilon\end{aligned}$$

其中 (i) 基于积分形式的 Minkowski 不等式1.8, 因而

$$\|f-f_{n_k}\|_{L^p(X,\mu)}=\left\|\sum_{j=k}^{\infty}(f_{n_j+1}-f_{n_j})\right\|_{L^p(X,\mu)}<\frac{\varepsilon}{2^{k-1}},$$

这说明 $f_{n_j}\to f(L^p(X,\mu))$, 根据基本列的性质即知 $f_n\to f(L^p(X,\mu))$.

当 $0<p<1$ 时, 同样设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset L^p(X,\mu)$ 是基本列, 根据定义知可选取子列 $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\|f_{n_j}-f_{n_{j+m}}\|_{L^p(X,\mu)}<\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{p}},\quad \forall m\ge 0$$

由 Fatou 引理与(1.8)式知

$$\begin{aligned}\int_X\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|\right)^p d\mu(x) &\le \varliminf_{k\to\infty}\int_X\left(\sum_{j=1}^{k}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|\right)^p d\mu(x)\\ &\le \varliminf_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}\|_{L^p(X,\mu)}^p<\varepsilon\end{aligned}$$

于是

$$\|f-f_{n_k}\|_{L^p}^p=\left\|\sum_{j=k}^{\infty}(f_{n_{j+1}}-f_{n_j})\right\|_{L^p(X,\mu)}^p<\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$$

这说明 $f_{n_j}\to f(L^p(X,\mu))$, 同样由基本列的性质即知 $f_n\to f(L^p(X,\mu))$. □

第二章 Fourier 级数与积分

2.1 Fourier 系数与级数

设 f 为定义在直线 $\mathbb{R}$ 或其区间上的函数, J. Fourier 于 1807 年为用分离变量的方法求解热传导方程自然地提出了将函数 f 表示成三角级数的求和形式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{2.1}$$

其中 $\{a_k, b_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为常数.

课堂笔记 (2024.2.19)

- J. Fourier 于 1807 年向巴黎科学院提交了关于热传导的基本论文《热的传播》, 但被 Lagrange, Laplace 和 Legendre 给拒了; 1811 年他又提交了一个修改版本, 该版本获巴黎科学院大奖, 却未正式发表; Fourier 在此书中推导出著名的热传导方程, 并在求解该方程时发现其解可以用三角函数构成的级数形式表示, 从而提出任意函数都可以展开成三角函数的无穷级数. Fourier 分析由此创立.
  1822 年, Fourier 终于出版了他的著名专著《热的解析理论》**[Fou]**. 在该专著中, J. Fourier 将 L. Euler(1777 年), D. Bernoulli(19 世纪中期, 即 1750 年左右) 等人在一些特殊情形下应用的三角级数方法发展成内容丰富的一般理论, 也就是现在称之为的 Fourier 分析.
- 为什么 Fourier 分析又称为调和分析呢?
  (i) 分析包含着”分”与”析”, 就是通过对事物内部适当的分析达到增进对其本质理解的目的.
  (ii) Fourier 分析主要研究把”任意函数”通过一定的分解表示为正弦和余弦函数的线性组合的形式, 而正弦和余弦函数在物理上是被充分研究而相对简单的函数类. 该想法与化学上的原子理论想法极其相似: 无穷多不同种类的物质均是由有限多种不同的原子构成的.
  (iii) 正弦和余弦函数对应于物理中的谐波, 其英文名为 harmonic wave. 因此, Fourier 分析又称为 harmonic analysis, 中文译为调和分析, 其实译为”谐波分析”可能更为恰当.
  (iv) 调和分析的一个主要研究思想就是: 把所要研究的数学对象 (如函数, 分布, 算子等) 分解成一些更简单的课题 (即所谓”原子”)(这些简单个体具有某些特殊的局部化 (如紧支集), 消失性 (积分为 0) 和尺寸条件 (如其 L^∞ 范数被支集的体积的幂次所控制)), 单独地分析这些简单的个体, 然后把所得的局部信息以一种整体和相关的方式组织起来, 从而得出所要研究的数学对象的结论.
  (v) 国际数学联盟前主席, Wolf 奖和 Abel 奖得主 L. Carleson 在文章*Thomas H. Wolff(1954-2000)*[a] 中指出: 调和分析在数学中的地位相当于原子理论在物理学中的地位.
- 2023 年 2 月 7 日 Wolf 奖官网公布的 2023 年年度 Wolf 奖得主 Ingrid Daubechies, 其研究工作主要是小波分析及其应用. 小波分析就源自于 Fourier 分析, 特别是调和分析中原子分解思想的进一步推广. 不同于 Fourier 分析只在研究重复 (周期) 信号中才能发挥最强大的作用, 小波分析对于处理具有不规则特征 (比如峰值等) 的非周期信号具有明显优势, 至今已在信号分析, 语音合成, 图像识别, 计算机识别, 数据压缩, 地震勘探, 大气与海洋波分析等方面的研究中都取得了十分有科学意义和应用价值的成果.

[a] https://www.ams.org/journals/notices/200105

现在回过头来仔细观察一下(2.1)式. 注意到(2.1)右式是周期为 2π 的函数, 因此若要(2.1)式成立, 则 f 也必须是周期为 2π 的函数. 因此, 为了研究(2.1)式, 我们只需考虑定义在一个长度为 2π 的区间上的函数 f: 利用 Euler 公式

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$$

我们能够用 $\{e^{ikx}: k\in\mathbb{Z}\}$ 替代(2.1)式中的 $\{\sin(kx),\cos(kx)\}_{k=0}^{\infty}$. 更进一步, 为方便起见, 替代周期为 2π 的函数, 我们将考虑周期为 1 的函数. 因此相应地, 我们将修改函数系 $\{e^{ikx}: k\in\mathbb{Z}\}$ 为 $\{e^{i2\pi kx}: k\in\mathbb{Z}\}$, 因为后者的周期为 1.

我们现在来详细推导出(2.1)式关于函数系 $\{e^{i2\pi kx}: k\in\mathbb{Z}\}$ 的形式, 为此先推导出(2.1)式关于函数系 $\{e^{ikx}: k\in\mathbb{Z}\}$ 的形式. 注意到对任意 $k\in\mathbb{Z}$ 和 $x\in\mathbb{R}$ 有:

$$\begin{cases} e^{ikx}=\cos(kx)+i\sin(kx) \\ e^{-ikx}=\cos(kx)-i\sin(kx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(kx)=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} \\ \sin(kx)=\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i} \end{cases}$$

从而由(2.1)式知

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}+b_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2i}\right) \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2i}\right)e^{ikx}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2}-\frac{b_k}{2i}\right)e^{-ikx} \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2i}\right)e^{ikx}+\sum_{k=-\infty}^{0}\left(\frac{a_{-k}}{2}-\frac{b_{-k}}{2i}\right)e^{ikx} \end{aligned}$$

因此, 若令

$$c_k:=\begin{cases} \frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2i}, & k\in\mathbb{N}:=\{1,2,\cdots\} \\ a_0, & k=0 \\ \frac{a_{-k}}{2}-\frac{b_{-k}}{2i}, & k\in\{-1,-2,\cdots\} \end{cases}$$

则

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}. \tag{2.2}$$

注意到对任意 $k\in\mathbb{Z}$ 有 $e^{ik(x+2\pi)}=e^{ikx}$, 故 f 必为周期为 2π 的函数.

现对周期为 2π 的函数 f, 令 $g(x):=f(2\pi x)$, 则 g 必为周期为 1 的函数, 从而由(2.2)式有

$$g(x)=f(2\pi x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i2\pi kx}.$$

因此可把(2.1)式中的问题归结为研究下述问题: 设 f 为周期为 1 的函数, 是否成立

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i2\pi kx}? \tag{2.3}$$

观察到对任意 $k,m\in\mathbb{Z}$ 有

$$\begin{aligned} &\int_0^1 e^{i2\pi kx}e^{-i2\pi mx}dx=\int_0^1 e^{i2\pi(k-m)}dx \\ &=\int_0^1\cos(2\pi(k-m)x)dx+i\int_0^1\sin(2\pi(k-m)x)dx \\ &=\begin{cases} 0, & k\neq m \\ 1, & k=m \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

若设(2.3)右式的级数是一致收敛到 f 的, 则由此与(2.4)式有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)e^{i2\pi mx}dx&=\int_0^1\sum_{-\infty}^{\infty}c_k e^{i2\pi kx}e^{-i2\pi mx}dx \\ &\overset{(A)}{=}\lim_{N\to\infty}\int_0^1\sum_{k=-N}^{N}c_k e^{i2\pi kx}e^{-i2\pi mx}dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N} c_k \int_0^1 e^{i2\pi kx}e^{-i2\pi mx}dx \\
&\overset{(B)}{=} c_m
\end{aligned}
$$

其中 (A) 蕴含的极限号与积分号交换需要用到 Lebesgue 控制收敛定理, 这就需要说明序列 $\left\{\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi kx}e^{-i2\pi mx}\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ 能被某 $L^1[0,1]$ 函数控制. 事实上若设 $f\in L^1[0,1]$ 且 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx}$ 一致收敛到 f, 则根据一致收敛的定义有

$$
\exists N_0\in\mathbb{N}\forall N\geq N_0\left(\left|\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi kx}-f(x)\right|\leq 1\right)
$$

据此知 $N\geq N_0$ 时有

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi kx}e^{-i2\pi mx}\right| &= \left|\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi kx}\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi kx}-f(x)\right| + |f(x)| \\
&< 1+|f(x)|
\end{aligned}
$$

而 $N\in\{1,2,\cdots,N_0-1\}$ 时另有

$$
\left|\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi kx}e^{-i2\pi mx}\right| \leq \left|\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi kx}\right| \leq \sum_{k=-N_0}^{N_0}|c_k|<\infty
$$

据此可以构造 $L^1[0,1]$ 函数

$$
h(x)=\max\left\{1+|f(x)|,\ \sum_{k=-N_0}^{N_0}|c_k|\right\}
$$

使得对任意 $N\in\mathbb{N}$ 均有 $\left|\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i2\pi kx}e^{-i2\pi mx}\right|\leq h(x)$, 再应用 Lebesgue 控制收敛定理即得 (A). 而 (B) 基于(2.4)式. 因此在一定的条件下, (2.3)右式的系数是由 f 唯一确定的, 且有上述明确的表达式.

用 $\mathbb{T}$ 表示一维环面, 即实数模 1 的加法群, 具体即

$$
\mathbb{T}:=\mathbb{R}/\mathbb{Z}:=\{[x]:x\in[0,1], y\in[x]\Leftrightarrow y=x+k, k\in\mathbb{Z}\}
$$

通常将 $\mathbb{T}$ 简记为 $\mathbb{T}:=[0,1]$. 因此称一个函数 f 在 $\mathbb{T}$ 上有定义, 就是指 $f(x)=f(x+k)$ 对任意 $x\in[0,1]$ 与任意 $k\in\mathbb{Z}$ 均成立, 亦即 f 式 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的函数.

定义 2.1 (函数的 Fourier 系数与 Fourier 级数)

对任意 $f\in L^1(\mathbb{T})$, 称 $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为 f 的 Fourier 系数, 其中对任意 $k\in\mathbb{Z}$ 都有

$$
\widehat{f}(k)=\int_0^1 f(x)e^{-i2\pi kx}dx. \tag{2.5}
$$

由这些系数组成的三角级数

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{i2\pi kx} \tag{2.6}
$$

称为 f 的 Fourier 级数.

♣

现在要研究的问题是: 在什么条件和什么意义下, 级数(2.6)等于 f?

2.2 点态收敛的判别法

记级数(2.6)的第 N 个部分和为 $S_N f(x)$, 亦即

$$
S_N f(x)=\sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}(k)e^{i2\pi kx}.
$$

这同时也表示(2.1)右式的第 N 个部分和.

为了研究 $S_N f(x)$, 我们需要考虑一个可操作的表达式, 为此需要下述引理:

引理 2.1

若 $f \in L^1(\mathbb{T})$, 则对任意 $a \in \mathbb{R}$ 均有

$$\int_a^{a+1} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt. \tag{2.7}$$

证明 若 $a=0$, 则(2.7)式显然成立. 现设 $a \in (0,1)$, 则

$$\int_a^{a+1} f(t)dt = \int_a^1 f(t)dt + \int_1^{a+1} f(t)dt.$$

在上右式第二项中令 $t := 1+\widetilde{t}$, 知 $t \in (1, a+1) \Leftrightarrow \widetilde{t} \in (0,a)$, 于是根据 f 周期为 1 知

$$\int_1^{a+1} f(t)dt = \int_0^a f(1+\widetilde{t})d\widetilde{t} = \int_0^a f(\widetilde{t})d\widetilde{t} = \int_0^a f(t)dt.$$

因此

$$\int_a^{a+1} f(t)dt = \int_a^1 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt.$$

(2.7)式因而成立.

若 $a \in (-\infty,0) \cup [1,\infty)$, 设 $[a]$ 是不超过 a 的最大整数, 则 $a-[a] \in [0,1)$, 令 $t := [a]+\widetilde{t}$ 知 $t \in [a,a+1] \Leftrightarrow \widetilde{t} \in [a-[a], a-[a]+1]$, 于是根据 f 周期为 1 知

$$\int_a^{a+1} f(t)dt = \int_{a-[a]}^{a-[a]+1} f([a]+\widetilde{t})d\widetilde{t} = \int_{a-[a]}^{a-[a]+1} f(\widetilde{t})d\widetilde{t} = \int_{a-[a]}^{a-[a]+1} f(t)dt.$$

根据 $a-[a] \in [0,1)$ 与上述结论即得

$$\int_a^{a+1} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt.$$

命题至此得证. □

利用引理2.1有:

$$\begin{aligned}
S_N f(x) &= \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 f(t)e^{-i2\pi kt}dt \cdot e^{i2\pi kx} = \int_0^1 f(x) \sum_{k=-N}^{N} e^{i2\pi k(x-t)}dt \\
&= -\int_x^{x-1} f(x-t) \sum_{k=-N}^{N} e^{i2\pi kt}dt = \int_{x-1}^{x} f(x-t) \sum_{k=-N}^{N} e^{i2\pi kt}dt \\
&= \int_0^1 f(x-t) \sum_{k=-N}^{N} e^{i2\pi kt}dt =: \int_0^1 f(x-t)D_N(t)dt,
\end{aligned}$$

其中 D_N 表示 Dirichlet 核:

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{i2\pi kt}, \quad t \in [0,1].$$

进一步, 利用幂级数求和公式与 Euler 公式有

$$\begin{aligned}
D_N(t) = e^{-i2\pi Nt}\frac{1-e^{i2\pi(2N+1)t}}{1-e^{i2\pi t}} &= \frac{e^{-i2\pi Nt}-e^{i2\pi(N+1)t}}{1-e^{i2\pi t}} \\
&= \frac{e^{i\pi t}(e^{-i\pi(2N+1)t}-e^{i\pi(2N+1)t})}{e^{i\pi t}(e^{-i\pi t}-e^{i\pi t})} \\
&= \frac{-2i\sin(\pi(2N+1)t)}{-2i\sin(\pi t)} = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

另外对 Dirichlet 核有下述估计:

(i) $\int_0^1 D_N(t)dt = 1$;

(ii) $\forall \delta \le |t| \le \frac{1}{2}(|D_N(t)| \le \frac{1}{\sin(\pi\delta)})$.

其中 (i) 是因为

$$\int_0^1 D_N(t)dt=\int_0^1\sum_{k=-N}^{N}e^{i2\pi k}tdt=1+\int_0^1\sum_{k=-N}^{-1}e^{i2\pi kt}dt+\int_0^1\sum_{k=1}^{N}e^{i2\pi kt}dt=1$$

(ii) 是因为 $\forall\delta\in(0,\frac{1}{2}](\sin(\pi\delta)>0)$, 于是

$$|D_N(t)|=\frac{|\sin(\pi(2N+1)t)|}{\sin(\pi t)}\le\frac{1}{\sin(\pi t)}\le\frac{1}{\sin(\pi\delta)},\quad \delta\le|t|\le\frac{1}{2}.$$

对于 Fourier 级数收敛性的研究, 我们首先需要确定 $\lim\limits_{N\to\infty}S_Nf(x)$ 对怎样的 x 存在, 得到存在性后再去谈它是否等于 $f(x)$. 下面给出两个点态收敛的审敛法:

定理 2.1 (Dini 审敛法)

对 $f\in L^1(\mathbb{T})$, 若 $x\in\mathbb{T}$ 满足 Dini 条件: 存在 $\delta>0$ 使得

$$\int_{|t|<\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt<\infty, \tag{2.9}$$

则

$$\lim_{N\to\infty}S_Nf(x)=f(x).$$

定理 2.2 (Jordan 审敛法)

若 f 是 x 某邻域内的有界变差函数[a], 则

$$\lim_{N\to\infty}S_Nf(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

[a]回忆有界变差函数的定义: 设 f 是定义在区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的一个函数, 记 $[a,b]$ 的任意一个分划 Δ 为:

$$a=:x_0<x_1<\cdots<x_n:=b$$

如果

$$\bigvee_a^b(f):=\sup_{\Delta}\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)-f(x_{i-1})|<\infty$$

其中 Δ 取遍 $[a,b]$ 的一切分划, 则称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

课堂笔记 (2024.2.26)

(1) Dini 审敛法2.1的关键点在于 Dini 条件(2.9)能够将几乎处处的条件升级为点态的条件: Dini 审敛法2.1的结论是点态成立的, 但 Lebesgue 积分本身不关心零测集上函数取值的变动, 这表明 Dini 条件本身就足以保证函数在每一点取值唯一. 下面两条结果能将这件事阐述清楚:

(a) 若 $f\in L^1(\mathbb{T})$, 且 f 在 x 点满足 Dini 条件(2.9), 那么 $|f(x)|<\infty$. 这是因为设 $|f(x)|=\infty$, 由 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 知 $|f(t)|<\infty$ 对几乎处处的 $t\in\mathbb{T}$ 均成立, 于是 $|f(x+t)|<\infty$ 对几乎处处的 $|t|<\delta$ 均成立. 现由 $|f(x)|=\infty$ 知 $\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|=\infty$ 对几乎处处的 $|t|<\delta$ 均成立, 于是

$$\int_{|t|<\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt=\infty$$

这与条件矛盾! 断言因而成立.

(b) 若 f 在 x 点满足 Dini 条件(2.9), 则 f 在 x 点处取值唯一, 亦即不能修改 f 在 x 点的值使其在该点处仍满足 Dini 条件. 这是因为若设 $f(x)=a_1$ 与 $f(x)=a_2$ 均满足 Dini 条件, 且 $a_1\ne a_2$, 则根据 Dini 条件知存在 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$ 使得

$$\infty=\int_{|t|<\delta}\frac{|a_1-a_2|}{|t|}dt\le\int_{|t|<\delta}\left|\frac{a_1-f(x+t)}{t}\right|dt+\int_{|t|<\delta}\left|\frac{f(x+t)-a_2}{t}\right|dt<\infty$$

左右两式矛盾! 故 $a_1=a_2$, 断言因而成立.

(2) Dini 条件(2.9)中 δ 的大小与结果是没有关系的, 只需要 $\delta>0$ 即可. 也就是说若 $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$, 则

$$\int_{|t|<\delta_1}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt<\infty\Leftrightarrow\int_{|t|<\delta_2}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt<\infty.$$

这是因为不妨设 $\delta_1<\delta_2$, 则显见 $\int_{|t|<\delta_2}|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}|dt<\infty\Rightarrow\int_{|t|<\delta_1}|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}|dt<\infty$. 现知

$$\begin{aligned}\int_{|t|<\delta_2}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt&=\int_{|t|<\delta_1}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt+\int_{\delta_1\le|t|<\delta_2}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt\\&\le\int_{|t|<\delta_1}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt+\frac{1}{\delta_1}\int_{\delta_1\le|t|<\delta_2}|f(x+t)-f(x)|dt\\&\le\int_{|t|<\delta_1}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt+\frac{1}{\delta_1}\left(\int_{\delta_1\le|t|<\delta_2}|f(x+t)|dt+2|f(x)|(\delta_2-\delta_1)\right)\\&\le\int_{|t|<\delta_1}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt+\frac{2}{\delta_1}(\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}+|f(x)|(\delta_2-\delta_1)),\end{aligned}$$

由 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 与上一条笔记 (a) 即得 $\int_{|t|<\delta_2}\left|\frac{f(x-t)-f(x)}{t}\right|dt<\infty$, 断言因而成立.

(3) Jordan 审敛法2.2的结果暗示了某点邻域内的有界变差函数在该点的左右极限必存在. 这是因为实变函数论的课程中已经有结论: 有界变差函数是两个单增函数之差, 而单增函数在定义域内的左右极限必定存在.

(4) Dini 审敛法2.1与 Jordan 审敛法2.2实际上是互不蕴含的. 下面给出两例:

(a) 存在 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 与 $x\in\mathbb{T}$ 使得 f 在 x 处的左右极限均不存在, 但 f 在 x 处依旧满足 Dini 条件: 令

$$f(x):=\begin{cases}|x|, & x\in[-\frac12,\frac12]\backslash\{\pm\frac1n:n\in\mathbb{N}\}\\ \frac12, & x\in[-\frac12,\frac12]\cap\{\pm\frac1n:n\in\mathbb{N}\}\end{cases}$$

对 f 作周期为 1 的延拓, 显见 $f\in L^1(\mathbb{T})$, 且 f 在 0 处的左右极限均不存在. 同时因为在 $[-\frac12,\frac12]$ 上几乎处处有 $f(t)=|t|$, 故

$$\int_{|t|<\frac12}\left|\frac{f(t)-f(0)}{t}\right|dt=\int_{|t|<\frac12}\frac{|f(t)|}{|t|}dt=\int_{|t|<\frac12}\frac{|t|}{|t|}dt=1<\infty$$

于是 f 在 0 点满足 Dini 条件. 另外, 将全变差的分割点取为 $\pm\frac1n$ 显见 f 并不是 $[-\frac12,\frac12]$ 上的有界变差函数, 这说明 f 不满足 Jordan 审敛法的条件.

(b) 存在 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 与 $x\in\mathbb{T}$ 使得 f 在 x 的某邻域内是有界变差函数, 但 f 在 x 处并不满足 Dini 条件: 令

$$f(x):=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\in[-\frac12,0)\cup(0,\frac12]\end{cases}$$

对 f 作周期为 1 的延拓, 显见 $f\in L^1(\mathbb{T})$, $\bigvee_{-\frac12}^{\frac12}(f)=2$, 故 f 是 $[-\frac12,\frac12]$ 上的有界变差函数. 另一方面对任意 $\delta>0$ 有:

$$\int_{|t|<\delta}\left|\frac{f(0+t)-f(0)}{t}\right|dt=\int_{|t|<\delta}\frac{1}{|t|}dt=\infty$$

于是 f 在 0 点不满足 Dini 条件.

注 为使结构更为清晰, 在此单开一注继续课堂笔记. 关于 Fourier 级数点态收敛的第一个正面结果是由 P. G. Dirichlet 于 1829 年取得的:

定理 2.3 (Dirichlet 审敛法)

若 f 是 $\mathbb{T}$ 上的一个有界, 分段连续且只有有限个极大值点与极小值点的函数, 则对任意 $x\in\mathbb{T}$, $\lim\limits_{N\to\infty}S_Nf(x)$

均存在, 且

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

可以证明 Dirichlet 审敛法2.3是 Jordan 审敛法2.2的一个推论, 为此只需证明若 f 满足 Dirichlet 审敛法的条件, 那么 f 是有界变差函数即可. 这里先回忆分段连续函数的定义:

定义 2.2 (分段连续函数[Zo])

实值或复值函数 f 称为闭区间 $[a,b]$ 上的分段连续函数, 如果在该区间上存在有限的一组点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得函数 f 在每一个开区间 $(x_{j-1},x_j)(j=1,\cdots,n)$ 上有定义, 连续, 并且在它的两个端点有单侧极限.

要说明 Jordan 审敛法蕴含 Dirichlet 审敛法, 就是证明下述命题:

命题 2.1

若 f 是 $[0,1]$ 上的有界, 分段连续且只有有限个极大值点与极小值点的函数, 则 f 必为 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

证明 因为 f 是有界函数, 故存在常数 $M>0$ 使得对任意 $x\in[0,1]$ 均有 $|f(x)|\le M$. 又因为 f 是分段连续函数, 不妨设 f 的间断点为 $\{a_k\}_{k=1}^n$, 其中

$$0\le a_1<a_2<\cdots<a_n\le 1$$

不妨记 $a_0:=0, a_{n+1}:=1$, 则由实变函数的结论知

$$\bigvee_0^1(f)=\sum_{i=0}^n\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(f).$$

下证对任意 $i\in\{0,\cdots,n\}$ 有 $\bigvee\limits_{a_i}^{a_{i+1}}(f)<\infty$, 为此令

$$\widetilde{f_i}(x):=\begin{cases} f(a_i+0), & x=a_i\\ f(x), & x\in(a_i,a_{i+1})\\ f(a_{i+1}-0), & x=a_{i+1}\end{cases}$$

则 $\widetilde{f_i}$ 是 $[a_i,a_{i+1}]$ 上的连续函数. 再令

$$g_i(x):=\begin{cases} f(a_i)-f(a_i+0), & x=a_i\\ 0, & x\in(a_i,a_{i+1})\\ f(a_{i+1})-f(a_{i+1}-0), & x=a_{i+1}\end{cases}$$

则在 $[a_i,a_{i+1}]$ 上有 $f=\widetilde{f_i}+g_i$, 根据全变差的定义显见

$$\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(f)\le\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(\widetilde{f_i})+\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(g_i).$$

又知

$$\begin{aligned}\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(g_i)&=|g_i(a_i)|+|g_i(a_{i+1})|\\ &=|f(a_i)-f(a_i+0)|+|f(a_{i+1})-f(a_{i+1}-0)|\\ &\le 4M<\infty\end{aligned}$$

现要说明 f 是有界变差函数, 就只需说明对任意 $i\in\{0,\cdots,n\}$ 有 $\bigvee\limits_{a_i}^{a_{i+1}}(\widetilde{f_i})<\infty$. 因为 f 只有有限个极值点, 故 $\widetilde{f_i}$

也只有有限个极值点. 设 $\widetilde{f_i}$ 在 (a_i,a_{i+1}) 有 m_i 个极值点, 记作 $\{b_j^{(i)}\}_{j=1}^{m_i}$, 且 $a_i<b_1^{(i)}<\cdots<b_{m_i}^{(i)}<a_{i+1}$. 现记 $b_0^{(i)}:=a_i, b_{m_i+1}^{(i)}:=a_{i+1}$, 则对给定的 $i\in\{0,\cdots,n\}$ 与 $j\in\{0,\cdots,m_i\}$ 知 $\widetilde{f_i}$ 必在 $(b_j^{(i)},b_{j+1}^{(i)})$ 上单调, 这是因为若 $\widetilde{f_i}$ 在 $(b_j^{(i)},b_{j+1}^{(i)})$ 上不单调, 则必存在 $b_j^{(i)}<x_1<x_2<x_3<b_{j+1}^{(i)}$ 使得 $\widetilde{f_i}(x_1)<\widetilde{f_i}(x_2)>\widetilde{f_i}(x_3)$ 或 $\widetilde{f_i}(x_1)>\widetilde{f_i}(x_2)<\widetilde{f_i}(x_3)$, 于是 $\widetilde{f_i}$ 必在 $(x_1,x_3)\subset(b_j^{(i)},b_{j+1}^{(i)})$ 上有新的极值点, 这与假设矛盾! 因此 $\widetilde{f_i}$ 必在 $(b_j^{(i)},b_{j+1}^{(i)})$ 上单调, 从而根据全变差的性质[1]知

$$\bigvee_{b_j^{(i)}}^{b_{j+1}^{(i)}}(\widetilde{f_i})=|\widetilde{f_i}(b_{j+1}^{(i)})-\widetilde{f_i}(b_j^{(i)})|<\infty$$

于是

$$\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(\widetilde{f_i})=\sum_{j=0}^{m_i}\bigvee_{b_j^{(i)}}^{b_{j+1}^{(i)}}(\widetilde{f_i})=\sum_{j=0}^{m_i}|\widetilde{f_i}(b_{j+1}^{(i)})-\widetilde{f_i}(b_j^{(i)})|<\infty$$

因此 $\sum_{i=0}^{n}\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(\widetilde{f_i})<\infty$, 故

$$\bigvee_0^1(f)=\sum_{i=0}^{n}\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(f)\le\sum_{i=0}^{n}\left[\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(\widetilde{f_i})+\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}(g_i)\right]<\infty.$$

于是 f 是 $[0,1]$ 上的有界变差函数. □

这两个审敛法乍一看会很出乎意料, 因为它们的结果是局部的, 但同时如果对函数作轻微改动, f 的 Fourier 系数全都会变, 这似乎在暗示 $S_Nf(x)$ 的收敛性应该是函数的整体性质. 事实上, Fourier 级数的收敛性确实是一个局部性质, 而且如果函数的改动是在 x 的某邻域之外的, 那么 x 处 Fourier 级数的收敛性就不会变[2]. 下述定理精确地描述了这个事实:

定理 2.4 (Riemann 局部化原理)

若 f 在 x 的某邻域内恒为零, 则

$$\lim_{N\to\infty}S_Nf(x)=0.$$

Riemann 局部化原理的等价表述是说: 如果两个函数在 x 的某邻域相等, 那么它们在 x 处的 Fourier 级数就应该相等. 具体来说, 设 $f_1,f_2\in L^1(\mathbb{T})$ 在 x 的一个邻域内相等, 则若令 $g:=f_1-f_2$, 知 g 在 x 的一个邻域内为 0, 从而 $\lim_{N\to\infty}S_Ng(x)=0$. 又因为 $S_Ng(x)=S_Nf_1(x)-S_Nf_2(x)$, 故

$$\lim_{N\to\infty}S_Nf_1(x)-\lim_{N\to\infty}S_Nf_2(x)=\lim_{N\to\infty}S_Ng(x)=0$$

因此 $\lim_{N\to\infty}S_Nf_1(x)=\lim_{N\to\infty}S_Nf_2(x)$, 即 f_1,f_2 的 Fourier 级数在 x 处表现相同.

根据 Fourier 系数的定义(2.5)立即可得

$$|\widehat{f}(k)|=\left|\int_0^1 f(x)e^{-i2\pi kx}dx\right|\le\int_0^1|f(x)|dx=\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

但事实上有下述更强的估计, 该估计会用于证明前面的结论:

引理 2.2 (Riemann-Lebesgue)

若 $f\in L^1(\mathbb{T})$, 则

$$\lim_{|k|\to\infty}\widehat{f}(k)=0.$$

注

- 根据 Riemann-Lebesgue 引理2.2可推知 $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 有界, 但单靠该引理没法保证其界为 $\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$.

[1]若 f 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $\bigvee_a^b(f)=|f(a)-f(b)|$,

[2]这样的" 出乎意料" 在恒等逼近定理中会系统讨论. 尽管 Dirichlet 核本身并非好核, 但 Dini 条件所附加的对 f 性质的改良抵消了这一点.

- 为证 Riemann-Lebesgue 引理2.2, 需要下述引理作为铺垫:

引理 2.3

对任意 $f \in L^1[0,1]$ 与任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个具有紧支集的连续函数 g, 使得 $\operatorname{supp} g \subset (0,1)$ 且 $\|f - g\|_{L^1[0,1]} < \varepsilon$. 其中 $\operatorname{supp} g := \overline{\{x : g(x) \neq 0\}}$.

证明 在实变函数中已知: 对 $f \in L^1[0,1]$ 而言, 存在简单函数列[3]$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得对任意 $x \in [0,1]$ 均有

$$|\varphi_k(x)| \le |f(x)| \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x).$$

由此及 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - f\|_{L^1[0,1]} = 0.$$

根据极限定义知对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|\varphi_{k_0} - f\|_{L^1[0,1]} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

显见 E 上的简单函数 φ_{k_0} 必有界, 不妨设其界为 M, 因而 φ_{k_0} 至少是处处有限的. 又因为 $[0,1]$ 是有界可测集, 根据 **[ZMQ]** 中 Lusin 定理的推论及其证明知存在 $\mathbb{R}$ 上具有紧支集的连续函数 $\widetilde{h}$ 使得对任意 $x \in \mathbb{R}$ 均有 $|\widetilde{g}(x)| \le M$, 且

$$|\{x \in [0,1] : \varphi_{k_0}(x) \neq \widetilde{h}(x)\}| < \frac{\varepsilon}{6M}.$$

下面将 $\widetilde{h}$ 的支集限定在 $(0,1)$ 中, 令 $h := \widetilde{h}\chi_{[\frac{\varepsilon}{12M}, 1-\frac{\varepsilon}{12M}]}$, 则对任意 $x \in [0,1]$ 均有 $|h(x)| \le M$, 且

$$\operatorname{supp} h = \operatorname{supp} \widetilde{h} \cap [\frac{\varepsilon}{12M}, 1 - \frac{\varepsilon}{12M}] \subset (0,1).$$

现将 h 作连续延拓, 定义为 $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{24M}{\varepsilon}(x - \frac{24M}{\varepsilon})h(\frac{\varepsilon}{12M}), & x \in [\frac{\varepsilon}{24M}, \frac{\varepsilon}{12M}) \\ h(x), & x \in [\frac{\varepsilon}{12M}, 1 - \frac{\varepsilon}{12M}] \\ -\frac{24M}{\varepsilon}(x - 1 + \frac{\varepsilon}{24M})h(1 - \frac{\varepsilon}{24M}), & x \in (1 - \frac{\varepsilon}{12M}, 1 - \frac{\varepsilon}{24M}] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则对任意 $x \in \mathbb{R}$ 均有 $|g(x)| \le M$, 且 $\operatorname{supp} g \subset [\frac{\varepsilon}{24M}, 1 - \frac{\varepsilon}{24M}] \subset (0,1)$, g 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k_0} - g\|_{L^1[0,1]} &\le \|\varphi_{k_0} - \widetilde{h}\|_{L^1[0,1]} + \|\widetilde{h} - g\|_{L^1[0,1]} \\ &\le 2M|\{x \in [0,1] : \varphi_{k_0}(x) \neq \widetilde{h}(x)\}| + 2M|\{x \in [0,1] : \widetilde{h}(x) \neq g(x)\}| \\ &< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{12M} \cdot 2 = \frac{2}{3}\varepsilon \end{aligned}$$

于是

$$\|f - g\|_{L^1[0,1]} \le \|f - \varphi_{k_0}\|_{L^1[0,1]} + \|\varphi_{k_0} - g\|_{L^1[0,1]} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

引理至此得证. □

下面证明 Riemann-Lebesgue 引理2.2.

证明 注意到

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \int_0^1 f(x)e^{-i2\pi kx}dx = -\int_0^1 f(x)e^{-i2\pi kx}e^{-\pi i}dx \\ &= -\int_0^1 f(x)e^{-i2\pi k(x+\frac{1}{2k})}dx = -\int_0^1 f(t - \frac{1}{2k})e^{-i2\pi kt}d(t - \frac{1}{2k}) \\ &= -\int_{\frac{1}{2k}}^{1+\frac{1}{2k}} f(t - \frac{1}{2k})e^{-i2\pi kt}dt \overset{(A)}{=} -\int_0^1 f(x - \frac{1}{2k})e^{-i2\pi kx}dx \end{aligned}$$

[3]这里简单函数指有限个特征函数的线性组合.

其中 (A) 是因为 $e^{i2\pi x}$ 的周期为 1. 故

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)e^{-i2\pi kx}dx - \int_0^1 f(x)e^{-i2\pi kx}e^{-\pi i}dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f(x) - f(x-\frac{1}{2k})\right]e^{-i2\pi kx}dx.\end{aligned}$$

若 f 连续, 则显见 $f(x-\frac{1}{2k}) \to f(x)(|k| \to \infty)$, 因而根据 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2}\int_0^1 \lim_{|k|\to\infty}[f(x) - f(x-\frac{1}{2k})]e^{-i2\pi kx}dx = 0.$$

现对任意 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 与任意 $\varepsilon > 0$, 由引理2.3知存在 $\mathbb{T}$ 上具紧支集的连续函数 g 使得 $\|f-g\|_{L^1(\mathbb{T})} < \frac{\varepsilon}{2}$, 又根据上述讨论知 $\lim\limits_{|k|\to\infty} \widehat{g}(k) = 0$, 故对前述 $\varepsilon > 0$ 知存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|k| > k_0 \Rightarrow |\widehat{g}(k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此与引理2.3知 $|k| > k_0$ 时有

$$|\widehat{f}(k)| \le |(f-g)^\wedge(k)| + |\widehat{g}(k)| \le \|f-g\|_{L^1(\mathbb{T})} + |\widehat{g}(k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$, Riemann-Lebesgue2.2证毕. □

下面证明 Riemann 局部化原理2.4.

证明 设在 $(x-\delta, x+\delta)$ 上有 $f(t) = 0$, 往证 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N f(x) = 0$. 知

$$\begin{aligned}S_N f(x) &= \int_0^1 f(x-t)\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}dt \overset{(A)}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t)\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}dt\\ &\overset{(B)}{=} \int_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}} f(x-t)\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}dt\\ &\overset{(C)}{=} \int_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}} \frac{f(x-t)}{\sin(\pi t)}\frac{e^{i\pi(2N+1)t} - e^{-i\pi(2N+1)t}}{2i}dt\\ &= \int_0^1 \frac{f(x-t)\chi_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}}(t)}{2i\sin(\pi t)}e^{i\pi t}e^{-i\pi 2(-N)t}dt - \int_0^1 \frac{f(x-t)\chi_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}}(t)}{2i\sin(\pi t)}e^{-i\pi t}e^{-i\pi 2Nt}dt\\ &= (g(\circledast)e^{i\pi\circledast})^\wedge(-N) - (g(\circledast)e^{-i\pi\circledast})^\wedge(N)\end{aligned}$$

其中 (A) 是因为 $f(x-t)\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}$ 是关于 t 的周期为 1 的函数, (B) 是因为在 $(x-\delta, x+\delta)$ 上 $f(t) = 0$, (C) 是 Euler 公式, 最后

$$g(t) = \frac{f(x-t)\chi_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}}(t)}{2i\sin(\pi t)}$$

现在只要 f 满足 $\int_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}} |f(x-t)|dt < \infty$, 就有

$$\int_0^1 |g(t)|dt \le \frac{1}{\sin(\pi\delta)}\int_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}} |f(x-t)|dt < \infty$$

于是 $g \in L^1(\mathbb{T})$, 进而 $g(\circledast)e^{i\pi\circledast} \in L^1(\mathbb{T})$, 因而由 Riemann-Lebesgue 引理知 $\lim\limits_{N\to\infty}(g(\circledast)e^{i\pi\circledast})^\wedge(-N) = 0$, 同理 $\lim\limits_{N\to\infty}(g(\circledast)e^{-i\pi\circledast})^\wedge(N) = 0$, 于是

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \lim_{N\to\infty}(g(\circledast)e^{i\pi\circledast})^\wedge(-N) - \lim_{N\to\infty}(g(\circledast)e^{-i\pi\circledast})^\wedge(N) = 0$$

□

最后来证明两个审敛法, 首先证明 Dini 审敛法2.1:

证明 已知对给定的 x, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{|t|<\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt < \infty$$

往证 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N f(x)=f(x)$. 设 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$ 待定, 令

$$g_1(t):=\frac{f(x-t)-f(x)}{2i\sin(\pi t)}\chi_{\{|t|<\delta\}}(t)$$
$$g_2(t):=\frac{f(x-t)-f(x)}{2i\sin(\pi t)}\chi_{\{\delta\le|t|<\frac{1}{2}\}}(t)$$

类似于 Riemann 局部化原理2.4的证明, 利用 $\int_0^1 D_N(t)dt=1$ 与引理2.1知

$$\begin{aligned}S_Nf(x)-f(x)&=\int_0^1(f(x-t)-f(x))D_N(t)dt\\&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(f(x-t)-f(x))D_N(t)dt\\&=\int_{|t|<\delta}(f(x-t)-f(x))D_N(t)dt+\int_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}}(f(x-t)-f(x))D_N(t)dt\\&=:I_1+I_2.\end{aligned}$$

再利用(2.8)式与 Euler 公式可得:

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{|t|<\delta}(f(x-t)-f(x))\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}dt\\&=\int_{|t|<\delta}(f(x-t)-f(x))\frac{e^{i\pi(2N+1)t}-e^{-i\pi(2N+1)t}}{2i\sin(\pi t)}dt\\&=\int_{|t|<\delta}(f(x-t)-f(x))\frac{e^{i\pi t}}{2i\sin(\pi t)}e^{i2\pi Nt}dt-\int_{|t|<\delta}(f(x-t)-f(x))\frac{e^{-i\pi t}}{2i\sin(\pi t)}e^{-i2\pi Nt}dt\\&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g_1(t)e^{i\pi t}e^{i2\pi Nt}dt-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g_1(t)e^{-i\pi t}e^{-i2\pi Nt}dt\\&=(g_1e^{i\pi\circledast})^\wedge(-N)-(g_1e^{-i\pi\circledast})^\wedge(N)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}}(f(x-t)-f(x))\frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}dt\\&=\int_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}}(f(x-t)-f(x))\frac{e^{i\pi(2N+1)t}-e^{-i\pi(2N+1)t}}{2i\sin(\pi t)}dt\\&=(g_2e^{i\pi\circledast})^\wedge(-N)-(g_2e^{-i\pi\circledast})^\wedge(N).\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}=1$, 故存在 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$ 充分小, 使得当 $|t|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}-1\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}<\frac{3}{2}$$

于是当 $|t|<\delta$ 时[4] $|\sin(\pi t)|\sim\pi|t|$, 由此及 Dini 条件可知[5]

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|g_1(t)|dt&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{|f(x-t)-f(x)|}{2|\sin(\pi t)|}\chi_{\{|t|<\delta\}}(t)dt\\&\sim\int_{|t|<\delta}\frac{|f(x-t)-f(x)|}{|t|}dt<\infty\end{aligned}$$

又由函数 $x\mapsto\sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单增性与引理2.1知

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|g_2(t)|dt&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{|f(x-t)-f(x)|}{2|\sin(\pi t)|}\chi_{\{\delta\le|t|<\frac{1}{2}\}}(t)dt\\&=\int_{\delta\le|t|<\frac{1}{2}}\frac{|f(x-t)-f(x)|}{2\sin(\pi|t|)}dt\end{aligned}$$

[4] $f\sim g$ 表示存在正常数 $C\in[1,\infty)$ 使得 $\frac{1}{c}g\le f\le cg$.

[5] 由这部分推导可以看出, Dini 审敛法2.1中的 Dini 条件 $\int_{|t|<\delta}|\frac{f(x-t)-f(x)}{t}|dt<\infty$ 完全等价于条件 $\int_{|t|<\delta}|\frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(\pi t)}|dt<\infty$.

$$\leq \int_{\delta\leq|t|<\frac{1}{2}} \frac{|f(x-t)-f(x)|}{2\sin(\pi\delta)}dt$$

$$\leq \frac{1}{2\sin(\pi\delta)}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)|dt + |f(x)|\right) < \infty.$$

又显见 $\{g_k(\circledast)e^{\pm i\pi\circledast}\}_{k=1}^2$ 均可延拓为周期为 1 的函数[6], 故 $\{g_k(\circledast)e^{\pm i\pi\circledast}\}_{k=1}^2 \subset L^1(\mathbb{T})$, 于是根据 Riemann-Lebesgue 引理2.2知

$$\lim_{N\to\infty}(S_N f(x)-f(x)) = \sum_{k=1}^{2} \lim_{N\to\infty}((g_k e^{i\pi\circledast})^\wedge(-N) - (g_k e^{-i\pi\circledast})^\wedge(N)) = 0$$

因此 $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$, 至此 Dini 审敛法2.1证毕. □

为证明 Jordan 审敛法2.2, 需要引入下述两条引理:

引理 2.4 (有界变差函数的 Jordan 分解)

$f \in BV[a,b]$ 当且仅当 $f = g-h$, 其中 g,h 是 $[a,b]$ 上的单调上升 (实值) 函数. ♡

引理 2.5 (积分第二中值定理)

设 $\phi \in C[a,b]$, h 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $c \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b h(x)\phi(x)dx = h(b-0)\int_c^b \phi(x)dx + h(a+0)\int_a^c \phi(x)dx.$$

♡

课堂笔记 (2024.3.11)

中值定理2.5实际上并非标准的积分第二中值定理, 标准定理中两个单侧极限本应是两个单点值. 事实上, 中值定理一方面可以从 **[TMA]** 中记录的一个定理直接推知: 设 $g \in C[a,b]$, f 在 $[a,b]$ 上单调上升, 且 $A, B \in \mathbb{R}$ 满足 $A \leq f(a+0), B \geq f(b-0)$, 则存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = A\int_a^{x_0} g(x)dx + B\int_{x_0}^b g(x)dx.$$

特别地, 若 $f(x) \geq 0$ 对全体 $x \in [a,b]$ 均成立, 则有[a]

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = B\int_{x_0}^b g(x)dx, \quad x_0 \in [a,b].$$

另一方面, 回忆标准的积分第二中值定理: 对 $g \in R[a,b]$ 与在 $[a,b]$ 上单调的 f, 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx$$

设

$$\widetilde{h}(x) := \begin{cases} h(a+0), & x = a \\ h(x), & x \in (a,b) \\ h(b-0), & x = b \end{cases}$$

则 $\widetilde{h}$ 依旧是单调函数, 且因为 Riemann 积分不因有限个点的改变而改变, 知

$$\int_a^b \widetilde{h}(x)\phi(x)dx = \int_a^b \widetilde{h}(x)\phi(x)dx$$

现根据标准的积分第二中值定理知存在 $c \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b h(x)\phi(x)dx = \int_a^b \widetilde{h}(x)\phi(x)dx = \widetilde{h}(a)\int_a^c \phi(x)dx + \widetilde{h}(b)\int_c^b \phi(x)dx = h(a+0)\int_a^c \phi(x)dx + h(b-0)\int_c^b \phi(x)dx.$$

[6]这个延拓未必连续, 但连续性在这里无关紧要, 我们只关注 Riemann-Lebesgue 引理2.2在这里能不能用, 也就是只关注延拓得到的函数在一个周期上可不可积.

[a]这一断言又称为 Bonnet 定理.

下面证明 Jordan 审敛法2.2:

证明 已知 f 在 x 的某邻域内 (不妨设为 $[x-\delta, x+\delta]$, 其中 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$) 是有界变差函数, 往证

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

根据 Jordan 分解2.4, 不妨设 f 在 $[x-\delta, x+\delta]$ 内是单调的. 设 $\widetilde{f}(x-t) := f(x-t)\chi_{[-\delta,\delta]}(t)$, 则因为 $\widetilde{f}(t) \neq 0 \Rightarrow x-t \in [-\delta, \delta] \Leftrightarrow t \in [x-\delta, x+\delta]$ 且 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, 可知 $|x+\delta-(x-\delta)| = 2\delta < 1$, 于是 $\operatorname{supp} \widetilde{f} \subset [x-\delta, x+\delta]$. 注意到 $[x-\delta, x+\delta]$ 的区间长度严格小于 1, 且当 $t \in [x-\delta, x+\delta]$ 时显见 $\widetilde{f}(t) = f(t)$, 故由 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 知 $\widetilde{f}$ 可以延拓成为直线上周期为 1 的 Lebesgue 可积函数, 亦即 $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$, 另由 f 的单调性知 $\widetilde{f}$ 在 $[x-\delta, x+\delta]$ 上单调. 现因为 $\widetilde{f} = f$ 在 $[x-\delta, x+\delta]$ 上成立, 由 Riemann 局部化原理2.4知

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f-\widetilde{f})(x) = 0$$

亦即 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N f(x) = \lim\limits_{N\to\infty} S_N \widetilde{f}(x)$. 至此为证 Jordan 审敛法2.2, 只需证

$$\lim_{n\to\infty} S_N \widetilde{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]. \tag{2.10}$$

为此, 由(2.8)式知 $D_N(x)$ 为偶函数, 据此与引理2.1知

$$\begin{aligned} S_N\widetilde{f}(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{f}(x-t)D_N(t)dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t)\chi_{[-\delta,\delta]}(t)D_N(t)dt \\ &= \int_0^{\delta} f(x-t)D_N(t)dt + \int_{-\delta}^{0} f(x-t)D_N(t)dt \\ &= \int_0^{\delta} f(x-t)D_N(t)dt - \int_{\delta}^{0} f(x+t)D_N(t)dt \\ &= \int_0^{\delta} [f(x-t)+f(x+t)]D_N(t)dt \end{aligned} \tag{2.11}$$

令 $g_{\pm}(t) := f(x\pm t)\chi_{[0,\delta]}(t)$, 则 $g_{\pm} \in L^1(\mathbb{T})$, $g_{\pm}$ 在 $[0,\delta]$ 上单调, 且 $g_{\pm}(0+0) = f(x\pm 0)$. 现在要证明结论, 只需证明对任意 $g \in L^1(\mathbb{T})$, 只要 g 在 $[0,\delta]$ 上单调, 就有

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)D_N(t)dt = \frac{1}{2}g(0+0). \tag{2.12}$$

不妨设 g 在 $[0,\delta]$ 上单增, 否则考虑 $-g$ 即可. 另外可设 $g(0+0) = 0$, 这是因为由 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t)dt = 1$ 与 $D_N(t)$ 作为偶函数可知 $\int_0^{\frac{1}{2}} D_N(t)dt = \frac{1}{2}$, 于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)D_N(t)dt - \frac{1}{2}g(0+0) = \int_0^{\frac{1}{2}} [g(t)-g(0+0)]D_N(t)dt. \tag{2.13}$$

现取 $\widetilde{g}(t) := g(t) - g(0+0)$ 即知 $\widetilde{g} \in L^1(\mathbb{T})$, $\widetilde{g}$ 在 $[0,\delta]$ 上单增且 $\widetilde{g}(0+0) = 0$, 故若(2.12)式对 $\widetilde{g}$ 成立, 则由(2.13)式知(2.12)式对 g 也应成立. 因此, 现在只需证(2.12)式对于在 $L^1(\mathbb{T})$ 中, 满足在 $[0,\delta]$ 上单增且在 0 的右极限为 0 这样的 g 成立即可.

现对任意 $\varepsilon > 0$, 因为 g 单增且 $g(0+0) = 0$, 故可取 $\widetilde{\delta} \in (0,\delta]$ 充分小, 使得 g 在 $[0,\widetilde{\delta}]$ 内单增, 且对任意 $t \in (0,\widetilde{\delta}]$ 均有 $0 = g(0+0) < g(t) < \frac{\varepsilon}{2C}$, 从而 $g(\widetilde{\delta}-0) \le \frac{\varepsilon}{2C}$, 其中 C 为不依赖于 $\varepsilon, \widetilde{\delta}, \delta$ 的待定正常数. 对该 $\widetilde{\delta}$ 有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)D_N(t)dt = \int_0^{\widetilde{\delta}} g(t)D_N(t)dt + \int_{\widetilde{\delta}}^{\frac{1}{2}} g(t)D_N(t)dt =: I_1 + I_2$$

往证 $\lim\limits_{N\to\infty}(I_1+I_2) = 0$, 首先证明

$$\lim_{N\to\infty} I_2 = 0 \tag{2.14}$$

事实上, 完全类似于 Riemann 局部化原理2.4的证明, 利用 Euler 公式与引理2.1知

$$I_2 = (\widetilde{g}e^{i\pi\circledast})^\wedge(-N) - (\widetilde{g}e^{-i\pi\circledast})^\wedge(N)$$

其中

$$\widetilde{g}(t) := \frac{g(t)}{2i\sin(\pi t)}\chi_{\{\widetilde{\delta}<t<\frac{1}{2}\}}(t)$$

事实上, $\widetilde{g}e^{\pm i\pi t}$ 可以延拓成周期为 1 的可积函数, 这是因为由 $\sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的单增性, 有:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\widetilde{g}(t)|dt = \int_{\widetilde{\delta}}^{\frac{1}{2}} \frac{|g(t)|}{2\sin(\pi t)}dt \le \frac{1}{2\sin\left(\pi\widetilde{\delta}\right)}\int_{\widetilde{\delta}}^{\frac{1}{2}} |g(t)|dt \le \frac{1}{2\sin\left(\pi\widetilde{\delta}\right)}\|g\|_{L^1(\mathbb{T})} < \infty.$$

现由 Riemann-Lebesgue 引理2.2知

$$\lim_{N\to\infty} I_2 = \lim_{N\to\infty}((\widetilde{g}e^{i\pi\circledast})^\wedge(-N) - (\widetilde{g}e^{-i\pi\circledast})^\wedge(N)) = 0$$

至此(2.14)式得证.

再估计 I_1, 因为 g 在 $[0, \widetilde{\delta}]$ 上单调, 且 $g(0+0) = 0$, 故由积分第二中值定理2.5知存在 $v \in [0, \widetilde{\delta}]$ 使得

$$I_1 = g(\widetilde{\delta} - 0)\int_v^{\widetilde{\delta}} D_N(t)dt.$$

下面估计 $\int_v^{\widetilde{\delta}} D_N(t)dt$, 由(2.8)式知

$$\begin{aligned}
\left|\int_v^{\widetilde{\delta}} D_N(t)dt\right| &= \left|\int_v^{\widetilde{\delta}} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}dt\right| \\
&\le \left|\int_v^{\widetilde{\delta}} \sin(\pi(2N+1)t)\left(\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}\right)dt\right| + \left|\int_v^{\widetilde{\delta}} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\pi t}dt\right| \\
&\le \int_v^{\widetilde{\delta}} \left|\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}\right| dt + \left|\int_0^{\widetilde{\delta}} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\pi t}dt - \int_0^{v} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\pi t}dt\right| \\
&\le \int_v^{\widetilde{\delta}} \left|\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}\right| dt + 2\sup_{M>0}\left|\int_0^M \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt\right| =: I_{1,1} + I_{1,2}
\end{aligned}$$

往证 $\lim\limits_{N\to\infty}(I_{1,1} + I_{1,2}) = 0$. 为了估计 $I_{1,1}$, 注意到

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{\pi t - \sin(\pi t)}{\pi t\sin(\pi t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi - \pi\cos(\pi t)}{\pi\sin(\pi t) + \pi^2 t\cos(\pi t)} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\pi^2\sin(\pi t)}{\pi^2\cos(\pi t) + \pi^2\cos(\pi t) - \pi^3 t\sin(\pi t)} = 0
\end{aligned}$$

故根据极限定义知存在 $\delta_1 > 0$ 使得当 $t \in (0, \delta_1]$ 时有

$$\left|\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}\right| < 1 \tag{2.15}$$

若 $\delta_1 \ge \widetilde{\delta}$, 则

$$I_{1,1} \le \int_0^{\delta_1}\left|\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}\right| dt < \delta_1$$

若 $\delta_1 < \widetilde{\delta}$, 则由 $\sin x$ 在 $x \in [0, \frac{1}{2}]$ 上的单增性知

$$I_{1,1} \le \int_0^{\delta_1}\left|\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}\right| dt + \int_{\delta_1}^{\widetilde{\delta}}\left|\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}\right|dt < \delta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin(\pi\delta_1)} + \frac{1}{\pi\delta_1}\right).$$

对于 $I_{1,2}$, 因为

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt + \int_1^\infty \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt$$

而 $|\sin(\pi t)| \le |\pi t|$, 故

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt\right| \le 1$$

又因为 $\frac{1}{\pi t}$ 在 $[1,\infty)$ 上随着 $t\to\infty$ 而单调趋零, 且

$$\int_1^M \sin(\pi t)dt = -\frac{1}{\pi}(1+\cos(M\pi))$$

在 $M\in[1,\infty)$ 时有界, 故由 Dirichlet 审敛法[7]知 $\int_1^\infty \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt$ 收敛, 于是

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt\right| < \infty \tag{2.16}$$

现由(2.16)式知

$$\infty > \left|\int_0^\infty \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt\right| = \left|\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt\right|$$

故根据极限定义知存在 $M_1\in(0,\infty)$ 使得当 $M>M_1$ 时有

$$\left|\int_0^M \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt\right| \le 1+\left|\int_0^\infty \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt\right|$$

而当 $M\in(0,M_1]$ 时, 由 $|\sin x|\le x$ 知

$$\left|\int_0^M \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt\right| \le \int_0^{M_1}\left|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right|dt \le M_1$$

于是

$$I_{1,2} \le 2\max\left\{M_1, 1+\left|\int_0^\infty \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}dt\right|\right\} =: \widetilde{c}$$

综上可知

$$\left|\int_v^{\widetilde{\delta}} D_N(x)dx\right| \le \delta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin(\pi\delta_1)}+\frac{1}{\pi\delta_1}\right)+\widetilde{c} =: c$$

显见 c 是一个不依赖于 $\varepsilon,\widetilde{\delta}$ 和 δ 的正常数, 从而

$$|I_1| \le cg(\widetilde{\delta}-0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

又由(2.14)式知对上述给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$ 使得当 $N>N_0$ 时有

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)D_N(t)dt\right| < |I_1|+|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

于是

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)D_N(t)dt = 0 = g(0+0)$$

至此(2.12)式得证, 定理因而得证. □

注 Jordan 审敛法2.2的结论是有意义的, 即在保持有界变差性不变的前提下, 改变 f 在 $[x-\delta,x+\delta]$ 中一个零测集上的值 (包括 f 在 x 点的值), 均不会改变 $f(x+0)$ 和 $f(x-0)$. 这是因为记改变值后的函数为 $\widetilde{f}$, 因为 $f,\widetilde{f}$ 都是 $[x-\delta,x+\delta]$ 上的有界变差函数, 故 $f(x\pm0)$ 和 $\widetilde{f}(x\pm0)$ 均存在. 又因为 $\widetilde{f}$ 和 f 本身只相差一个零测集, 故对任意 $\delta<\frac{1}{n}$, 总存在 $x_n^-\in[x-\delta,x]$ 和 $x_n^+\in[x,x+\delta]$ 使得

$$f(x_n^-) = \widetilde{f}(x_n^-),\ f(x_n^+) = \widetilde{f}(x_n^+)$$

注意当 $n\to\infty$ 时有 $x_n^-\to x-0, x_n^+\to x+0$, 于是

$$f(x\pm0) = \widetilde{f}(x\pm0)$$

此即欲证.

[7]设函数 f,g 在 $[a,\omega)$ 上有定义, 若 $f(x)$ 随着 $x\to\omega^-$ 单调趋零, 且 $G(x) := \int_a^x g(t)dt$ 在 $x\in[a,\omega)$ 上有界, 那么广义积分 $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ 收敛.

2.3 连续函数的 Fourier 级数

如果 f 在 x 的某邻域内满足 Lipschitz 型条件, 亦即存在 $a>0,\delta>0$ 使得 $|t|<\delta$ 时有 $|f(x+t)-f(x)|\le C|t|^a$, 则 f 必在 x 的同一个邻域内满足 Dini 审敛法2.1的 Dini 条件, 这是因为

$$\int_{|t|<\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt\lesssim\int_{|t|<\delta}|t|^{a-1}dt\sim\int_0^\delta t^{a-1}dt\sim\delta^a<\infty.$$

然而, 在 x 的一个邻域里的连续函数未必满足在 x 点的一个邻域里的 Dini 条件. 例如取 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, 并令

$$f(x):=\begin{cases}\frac{1}{\log|x-\frac{1}{2}|}, & x\in(\delta,1-\delta),\\ 0, & x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

则

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{\log|x-\frac{1}{2}|}=0=f(\frac{1}{2})$$

故 f 在 $x=\frac{1}{2}$ 的邻域 $(\delta,1-\delta)$ 内连续, 由此及 $|t|<\frac{1}{2}-\delta\Leftrightarrow\frac{1}{2}+t\in(\delta,1-\delta)$ 进一步知

$$\begin{aligned}\int_{|t|<\frac{1}{2}-\delta}\left|\frac{f(\frac{1}{2}+t)-f(\frac{1}{2})}{t}\right|dt&=\int_{|t|<\frac{1}{2}-\delta}\frac{1}{|t\log|t||}dt=-2\int_0^{\frac{1}{2}-\delta}\frac{1}{t\log t}dt\\&=-2\int_0^{\frac{1}{2}-\delta}\frac{d\log t}{\log t}=-2\log\log t|_{t=0}^{t=\frac{1}{2}-\delta}=\infty\end{aligned}$$

故 f 在 $x=\frac{1}{2}$ 的邻域 $(\delta,1-\delta)$ 内不满足 Dini 条件.

另外, 前面已经说明过就算 f 在 x 点的一个邻域内满足 Dini 条件, f 也未必在 x 点连续, 所以 f 在 x 点连续与 f 在 x 点的一个邻域里满足 Dini 条件这两件事没有包含关系.

同样地, 显见有界变差函数未必连续[8], 而连续函数也未必是有界变差函数[9], 下面的定理与 Jordan 审敛法2.2联合起来也可以说明这一点.

定理 2.5 (P. du Bois-Reymond)

存在某连续函数, 其 Fourier 级数在某点发散.

Bois-Reymond 直接构造了满足该性质的一个函数, 不过下面我们用另一种方式断言这个连续函数的存在性, 即采用一致有界原理 (共鸣定理).

引理 2.6 (一致有界原理)

设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范线性空间, $\{T_a\}_{a\in A}$ 是一族从 X 到 Y 的有界线性算子, 则要么

$$\sup_{a\in A}\|T_a\|_{X\to Y}<\infty$$

要么存在 $x\in X$ 使得

$$\sup_{a\in A}\|T_ax\|_Y=\infty.$$

回忆算子范数定义为 $\|T_a\|_{X\to Y}=\sup_{\|x\|_X\le1}\|T_ax\|_Y$, 上述引理的证明在诸多泛函分析教科书中都能找到, 这里就不证明了. 下面开始证明 Bois Reymond 的结果2.5:

证明 设 $X=(C(\mathbb{T}),\|\circledast\|_{L^\infty})$, $Y=\mathbb{C}$. 定义

$$T_N:X\to Y,\quad f\mapsto T_Nf=S_Nf(0)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)D_N(t)dt.$$

[8] 但由有界变差函数的 Jordan 分解2.4知有界变差函数有至多可列个不连续点, 且由命题2.1知若 f 为有界, 分段连续且只有有限个极值点, 则其为有界变差函数.

[9] 参见 [WL].

定义 Lebesgue 数 L_N 为

$$L_N = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)|dt$$

则对任意 $f \in X$ 均有

$$|T_N f| = \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_N(t)dt\right| \le \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)||D_N(t)|dt \le \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)|dt\right] \|f\|_X = L_N\|f\|_X.$$

因此

$$\|T_N\|_{X\to Y} \le L_N \tag{2.17}$$

为证不等式(2.17)的反向不等式, 就需要对任意 $\varepsilon > 0$ 构造某个特定的 f 使得 $|T_N f| \ge L_N\|f\|_X - \varepsilon$. 观察到

$$D_N(t) = 0 \Leftrightarrow \pi(2N+1)t = k\pi(k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}) \Leftrightarrow t = \frac{k}{2N+1}(k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$$

因此

$$t = \frac{k}{2N+1} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{k}{2N+1} \le \frac{1}{2}(k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}) \Leftrightarrow k \in \{-N, \cdots, -1, 1, \cdots, N\}$$

这说明对每个给定的 $N \in \mathbb{N}$ 而言, $D_N(t)$ 只有 $2N$ 个零点, 将其重记为 $\{t_i\}_{i=1}^{2N}$. 观察到 $\operatorname{sgn} D_N(t)$ 只在 $D_N(t)$ 的零点处不连续, 故为将其连续化, 取 $\delta > 0$ 充分小, 使得 $\{(t_k-\delta, t_k+\delta)\}_{k=1}^{2N}$ 互不相交且均含于 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 中, 在 $t_k - \delta$ 和 $t_k + \delta$ 处用直线将 $\operatorname{sgn} D_N(t)$ 连接, 记依此构造的新函数为 f(见图2.1), 则显见 f 连续且 $\|f\|_X = 1$.

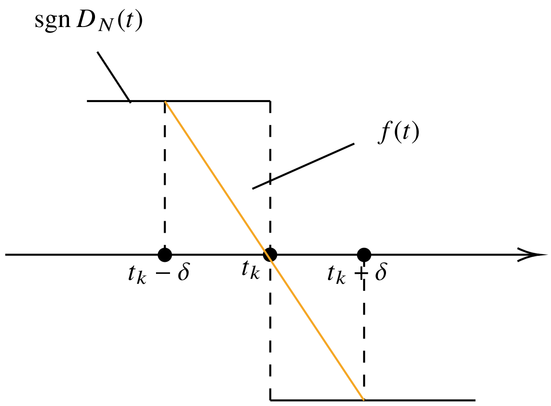

图 2.1: $f(t)$ 示意图

进一步有

$$\begin{aligned}
|T_N f| &= \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_N(t)dt\right| \\
&= \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\operatorname{sgn} D_N(t)]D_N(t)dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(t) - \operatorname{sgn} D_N(t)]D_N(t)dt\right| \\
&\ge \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)|dt - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t) - \operatorname{sgn} D_N(t)||D_N(t)|dt \\
&= L_N - \sum_{k=1}^{2N} \int_{t_k-\delta}^{t_k+\delta} |f(t) - \operatorname{sgn} D_N(t)||D_N(t)|dt \\
&\ge L_N - 4\delta MN
\end{aligned} \tag{2.18}$$

其中 $M > 0$ 是 $|D_N(t)|$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上的最大值, 其依赖于[10] N. 因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{4MN})$ 即可由(2.18)式得

$$\|T_N\|_{X\to Y} \ge |T_N f| \ge L_N - 4\delta MN > L_N - \varepsilon$$

[10]这个最大值是肯定存在的, 因为对每个固定的 N 而言, $D_N(t)$ 都是 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上的连续函数

再由 ε 的任意性知

$$\|T_N\|_{X\to Y} \geq L_N$$

由此及(2.17)式知 $\|T_N\|_{X\to Y} = L_N$. 因此只要能证明 $L_N \to \infty (N \to \infty)$, 就有

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|T_N\|_{X\to Y} = \infty$$

于是由一致有界原理2.6知存在 $f \in X$ 使得

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |T_N f| = \sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N f(0)| = \infty$$

从而存在 $\mathbb{N}$ 中的序列 $\{N_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 使得当 $j \to \infty$ 时 $N_j \to \infty$, 且

$$\lim_{j\to\infty} |S_{N_j} f(0)| = \infty$$

由此及上极限的性质可知

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} |S_N f(0)| = \infty$$

因此 f 在 0 点的 Fourier 级数必发散. 现在只需证明下述引理即可:

引理 2.7

对任意 $N \in \mathbb{N}$ 均有 $L_N = \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1)$, 这里 $O(1)$ 表示存在一个与 N 无关的正常数 C 使得 $|O(1)| \leq C$. ♡

这是因为本身有

$$\begin{aligned} L_N &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)| dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} \right| dt \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} \right| dt \end{aligned}$$

又由(2.15)式知存在 $\delta_1 > 0$ 使得当 $t \in (0, \delta_1]$ 时有

$$\left| \frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t} \right| < 1$$

若 $\delta_1 \geq \frac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} \right| dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\pi t} \right| dt \right| \\ \leq &\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \sin(\pi(2N+1)t) \left[\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t} \right] \right| dt \\ \leq &\int_0^{\delta_1} \left| \frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t} \right| dt < \delta_1 \end{aligned}$$

若 $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$, 则利用 $\sin x$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的单增性, 也有

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} \right| dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\pi t} \right| dt \right| \\ \leq &\int_0^{\delta_1} \left| \frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t} \right| dt + \int_{\delta_1}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sin(\pi t)} + \frac{1}{\pi t} \right] dt \\ < &\ \delta_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin(\pi \delta_1)} + \frac{1}{\pi \delta_1} \right] \end{aligned}$$

因此

$$L_N = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\pi t} \right| dt + O(1)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^{N+\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right| dt + O(1) \\
&= 2\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1} \left|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right| dt + 2\int_N^{N+\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right| dt + O(1)
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\int_N^{N+\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right| dt \le \int_N^{N+\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}
$$

故

$$
\begin{aligned}
L_N &= 2\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1} \left|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right| dt + O(1) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 \frac{|\sin(\pi t)|}{t+k} dt + O(1) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 |\sin(\pi t)| \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{t+k} dt + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{|\sin(\pi t)|}{t} dt + O(1)
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\int_0^1 \frac{|\sin(\pi t)|}{\pi t} dt \le \int_0^1 dt = 1
$$

故

$$
L_N = \frac{2}{\pi}\int_0^1 |\sin(\pi t)| \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{t+k} dt + O(1)
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1 |\sin(\pi t)|\frac{1}{t+k} dt - \sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1 |\sin(\pi t)|\frac{1}{k+1} dt\right| \\
\le &\sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1 \left|\frac{1}{t+k} - \frac{1}{k+1}\right| dt = \sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1 \frac{1-t}{(t+k)(k+1)} dt \\
\le &\sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1 \frac{1}{(t+k)^2} dt = \sum_{k=1}^{N-1}\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \\
= &\int_1^N \frac{dt}{t^2} \le \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
L_N &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 |\sin(\pi t)| \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1} dt + O(1) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1}\int_0^1 \sin(\pi t) dt + O(1) \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1} + O(1)
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1} - \log N\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1} - \int_1^N \frac{dx}{x}\right| = \left|\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{N-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1 \frac{dx}{x+k}\right| \le \sum_{k=1}^{N-1}\int_0^1 \left|\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right| dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^1 \frac{1-x}{(k+1)(x+k)} dx \le \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^1 \frac{dx}{(x+k)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} = \int_1^N \frac{dx}{x^2} \le \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1
\end{aligned}
$$

故

$$
L_N = \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1)
$$

引理2.7至此得证. □

2.4 依范数收敛

测度论和 L^p 空间理论的发展让收敛问题有了全新的解决方案. 现在我们希望回答下面两个问题:

(1) 给定 $p \in [1, \infty]$, 问对任意 $f \in L^p(\mathbb{T})$, 是否有 $\lim\limits_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0$?

(2) 给定 $p \in [1, \infty]$, 问对任意 $f \in L^p(\mathbb{T})$, 是否有 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$ a.e.?

问题 (1) 需要下述引理作为铺垫.

引理 2.8

$S_N f$ 依 $L^p(\mathbb{T})(1 \le p < \infty)$ 范数收敛到 f, 当且仅当存在与 N 无关的常数 C_p 使得

$$
\|S_N f\|_{L^p(\mathbb{T})} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T}). \tag{2.19}
$$

♡

注 引理2.8说的实际上是依范数收敛和一致有界的等价性: 算子 S_N 具有依 L^p 范数收敛的性质当且仅当其在 $L^p \to L^p$ 的算子空间中有界, 亦即其关于输入元 f 一致有界.

证明 若 $S_N f$ 依 $L^p(1 \le p < \infty)$ 范数收敛到 f, 则将 $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 视作算子族, 根据一致有界原理有

$$
\lim_{N\to\infty} \|S_N f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \Rightarrow \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\| < \infty \Rightarrow \exists C_p \left(\sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{\|S_N f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}} \le C_p \right)
$$

此即(2.19)式.

另一方面, 若(2.19)式成立, 首先需要证明若 g 是三角多项式, 且其次数为 $\deg g$, 则当 $N \ge \deg g$ 时有 $S_N g = g$. 现设 g 是 N_1 次三角多项式且[11]$\deg g = N_1 \le N$, 则

$$
\begin{aligned}
S_N g(x) &= \sum_{m=-N}^{N} \widehat{g}(m) e^{i\pi mx} \\
&= \sum_{m=-N}^{N} \left(\int_0^1 \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_k e^{i2\pi kt} e^{i2\pi mt} dt \right) e^{i2\pi mx} \\
&= \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_k \sum_{m=-N}^{N} \left(\int_0^1 e^{i2\pi(k-m)t} dt \right) e^{i2\pi mx} \\
&\overset{(A)}{=} \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_k e^{i2\pi kx} = g(x), \ \forall x \in \mathbb{T}
\end{aligned}
$$

其中 (A) 是因为 $k \ne m$ 时 $\int_0^1 e^{i2\pi(k-m)t} dt = 0$, 故所证断言成立. 又因为三角多项式在 $L^p(\mathbb{T})(1 \le p < \infty)$ 中稠密 (见推论2.1), 故任取 $f \in L^p(\mathbb{T})$ 与 $\varepsilon > 0$ 总能找到三角多项式 g 使得 $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} < \frac{\varepsilon}{C_p+1}$, 现当 $N \ge \deg g =: N_0$ 时有:

$$
\begin{aligned}
\|S_N f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \|S_N(f-g) + S_N g - g + g - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
&= \|S_N(f-g) + g - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
&\le \|S_N(f-g)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \le (C_p+1)\|g - f\|_{L^p(\mathbb{T})} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

[11]即 $g(x) = \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_k e^{i\pi kx}$, 其中 c_{N_1} 或 c_{-N_1} 不为零.

因此 $\|S_N f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \to 0 (N \to \infty)$, 命题即证. □

之后会说明只要 $1 < p < \infty$, 则不等式(2.19)始终成立. 然而不等式(2.19)在 $p = 1$ 或 $p = \infty$ 时并不成立, 下面阐明理由.

当 $p = 1$ 时, 往证 $\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} = L_N$, 因为一旦此断言成立, 知对任意 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 均有 $\|S_N f - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \to 0 (N \to \infty)$, 于是由引理2.8知 $L_N = \|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} \le c_1$, 其中 c_1 是与 N 无关的正常数, 因而由 $L_N \to \infty (N \to \infty)$ 导出矛盾.

下证 $\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} = L_N$, 先证 $\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} \le L_N$. 为此, 对任意 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 与任意 $x \in \mathbb{T}$, 由定义知 $S_N f(x) = \int_0^1 f(x-t) D_N(t) dt$, 故由 Tonelli 定理有

$$
\begin{aligned}
\|S_N f\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \int_0^1 \int_0^1 |f(x-t) D_N(t)| dt dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x-t)| dx \right) |D_N(t)| dt \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \int_0^1 |D_N(t)| dt \\
&= L_N \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}
\end{aligned}
$$

因此 $\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} \le L_N$.

再说明 $\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} \ge L_N$. 回忆 Hahn-Banach 定理的推论:

引理 2.9

设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, 则对任意 $x_0 \in \mathscr{X} \backslash \{\theta\}$(其中 θ 表示 $\mathscr{X}$ 中的零元), 必存在 $f \in \mathscr{X}^*$ 使得 $f(x_0) = \|x_0\|_{\mathscr{X}}$ 且 $\|f\|_{\mathscr{X}^*} = 1$. ♡

注意到

$$
\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} = \sup_{\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}\le 1} \|S_N f\|_{L^1(\mathbb{T})} \overset{(A)}{=} \sup_{\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}\le 1} \sup_{\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\le 1} |\langle S_N f, g\rangle|
$$

其中 (A) 是在引理2.9中代入 $\mathscr{X} = L^1(\mathbb{T})$. 现对任意满足 $\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \le 1$ 的 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 与满足 $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le 1$ 的 $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ 有:

$$
\begin{aligned}
\langle S_N f, g\rangle &:= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_N f(x) \overline{g(x)} dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(x-t) f(t) dt \right) \overline{g(x)} dx \\
&\overset{(B)}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(x-t) \overline{g(x)} dx \right) f(t) dt \\
&\overset{(C)}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \overline{\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t-x) g(x) dx \right)} f(t) dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \overline{S_N g(t)} dt = \langle f, S_N g\rangle
\end{aligned}
$$

其中 (B) 是 Fubini 定理, 可积性基于下式:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(x-t) f(t) \overline{g(x)}| dt dx &\le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(x-t) f(t)| dt dx \\
&= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(x-t)| dx \right) |f(t)| dt \\
&= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} < \infty
\end{aligned}
$$

而 (C) 是因为 D_N 是偶函数. 令 $g(x) = \operatorname{sgn} D_N(x)$, 则 $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1$.

下证 $S_N g$ 在 0 点连续. 事实上, 因为 $D_N(t)$ 是 $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ 上的连续函数, 故其在该区间上一致连续, 根据一致连续的定义进而知

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta\in(0,\frac{1}{6})\forall x\in\mathbb{T}\forall t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}](|x|<\delta\Rightarrow|D_N(x-t)-D_N(-t)|<\varepsilon)$$

于是

$$|S_N g(x)-S_N g(0)|=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(t)(D_N(x-t)-D_N(-t))dt\right|<\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\varepsilon=\varepsilon$$

因而 $S_N g$ 在 0 点连续. 又因为 $S_N g$ 是实函数, 且 $S_N g(0)=L_N$, 故由连续的定义知

$$\forall\varepsilon\in(0,L_N)\exists\delta\in(0,\frac{1}{2})\forall x\in\mathbb{T}(|x|<\delta\Rightarrow S_N g(x)>L_N-\varepsilon)$$

令 $f:=\frac{1}{2\delta}\chi_{|x|<\delta}$, 则

$$\begin{aligned}|\langle f,S_N g\rangle|&=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\overline{S_N g(x)}dx\right|\\&=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)S_N g(x)dx\right|\\&=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}S_N g(x)dx>L_N-\varepsilon\end{aligned}$$

注意到 $\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}=1$, 故 $\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})}\geq|\langle f,S_N g\rangle|>L_N-\varepsilon$, 令 $\varepsilon\to0^+$ 即得 $\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})}\geq L_N$, 故 $\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})}=L_N$, 也即 $p=1$ 时不等式(2.19)并不成立, 从而算子 S_N 不是 L^1 有界的.

当 $p=\infty$ 时, 首先说明对任意 $f\in C(\mathbb{T})$ 有 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=\|f\|_{C(\mathbb{T})}$. 回忆

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}:=\inf_{\substack{E\subset\mathbb{T}\\|E|=0}}\sup_{x\in\mathbb{T}\backslash E}|f(x)|,\quad\|f\|_{C(\mathbb{T})}:=\max_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|$$

因为 $f\in C(\mathbb{T})$, 而 $\mathbb{T}$ 是紧集, 故不妨设 $\|f\|_{C(\mathbb{T})}$ 可在 $x_0\in\mathbb{T}$ 达到, 即 $\|f\|_{C(\mathbb{T})}=|f(x_0)|$. 下面说明 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\leq\|f\|_{C(\mathbb{T})}$, 这是因为

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}&=\inf_{\substack{E\subset\mathbb{T}\\|E|=0}}\sup_{x\in\mathbb{T}\backslash E}|f(x)|\\&\leq\inf_{\substack{E\subset\mathbb{T}\\|E|=0}}\max_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|\\&=\max_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|=\|f\|_{C(\mathbb{T})}\end{aligned}\tag{2.20}$$

再说明 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\geq\|f\|_{C(\mathbb{T})}$. 任取 $E\subset\mathbb{T}$ 满足 $|E|=0$, 知对任意 $n\in\mathbb{N}$ 必有 $((x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n})\cap\mathbb{T})\backslash E\neq\varnothing$, 否则 $E\supset((x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n})\cap\mathbb{T})$, 因而 $|E|>\min\{1,\frac{1}{n}\}>0$, 这与 $|E|=0$ 矛盾! 因而必存在 $x_n\in((x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n})\cap\mathbb{T})\backslash E$. 知当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to x_0$, 由此及 f 的连续性进一步有 $f(x_n)\to f(x_0)(n\to\infty)$, 因此

$$\sup_{x\in\mathbb{T}\backslash E}|f(x)|\geq\max_{n\in\mathbb{N}}|f(x_n)|\geq|f(x_0)|=\|f\|_{C(\mathbb{T})}$$

故

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=\inf_{\substack{E\subset\mathbb{T}\\|E|=0}}\sup_{x\in\mathbb{T}\backslash E}|f(x)|\geq\|f\|_{C(\mathbb{T})}\tag{2.21}$$

结合(2.20),(2.21)两式即得 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=\|f\|_{C(\mathbb{T})}$.

现在考虑反证法, 设问题 (1) 在 $f\in L^\infty(\mathbb{T})$ 时有肯定答案 (即 $\forall f\in L^\infty(\mathbb{T})(\lim\limits_{N\to\infty}\|S_N f-f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=0)$), 则由 $\{S_N f\}_{N\in\mathbb{N}}\subset L^\infty(\mathbb{T})$ 收敛知其为 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中的基本列. 又因为 $\{S_N f\}_{N\in\mathbb{N}}$ 中的每个元素都是三角函数和, 故 $\{S_N f\}_{N\in\mathbb{N}}\subset C(\mathbb{T})$, 从而由上述断言知 $\{S_N f\}_{N\in\mathbb{N}}$ 是 $C(\mathbb{T})$ 中的基本列. 由 $C(\mathbb{T})$ 的完备性知

$$\exists g\in C(\mathbb{T})(\lim_{n\to\infty}\|S_N f-g\|_{C(\mathbb{T})}=0)$$

从而

$$\begin{aligned}\|f-g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}&\leq\|f-S_N f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}+\|S_N f-g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\\&=\|f-S_N f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}+\|S_N f-g\|_{C(\mathbb{T})}\to0,\quad N\to\infty\end{aligned}$$

故 $\|f-g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=0$. 回忆对任意 $h\in L^\infty$, 总存在 $E_h\subset\mathbb{T}$ 满足 $|E_h|=0$, 使得 $\|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=\sup\limits_{x\in\mathbb{T}\setminus E_h}|h(x)|$. 因此, 若 $\|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=0$, 则 $\sup\limits_{x\in\mathbb{T}\setminus E_h}|h(x)|=0$, 从而 $h(x)=0$ 对几乎处处 $x\in\mathbb{T}$ 均成立. 回到原命题, 这意味着对任意 $f\in L^\infty(\mathbb{T})$, 总存在 $g\in C(\mathbb{T})$ 使得 $f(x)=g(x)$ 对几乎处处 $x\in\mathbb{T}$ 均成立, 但这不可能! 譬如令

$$f(x)=\begin{cases}1, & \forall t\in[0,\frac{1}{3}]\cup(\frac{2}{3},1]\\ -1, & \forall t\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\end{cases}$$

若存在 $g\in C(\mathbb{T})$ 使得 $f(x)=g(x)$ 对几乎处处 $x\in\mathbb{T}$ 成立, 则由 g 的连续性可知 $f(x)=g(x)$ 在 $\mathbb{T}$ 上点态成立, 但这意味着 g 在 $x=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 处不连续, 矛盾. 因此问题 (1) 对一般的 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 不一定成立.

注 事实上, 就算把问题 (1) 的条件加强为 $f\in L^\infty(\mathbb{T})\cap C(\mathbb{T})$, 也不一定有 $\lim\limits_{N\to\infty}\|S_Nf-f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=0$. 这是因为如若结论成立, 则 $\lim\limits_{N\to\infty}\|S_Nf-f\|_{C(\mathbb{T})}=0$, 从而由 $C(\mathbb{T})$ 范数的定义知对任意 $t\in\mathbb{T}$ 均有 $\lim\limits_{N\to\infty}S_Nf(t)=f(t)$, 但这与 Bois-Reymond 的结果2.5矛盾! 故所证断言成立.

当 $p=2$ 时, 特别有下述 Parseval 恒等式成立:

定理 2.6 (Parseval 恒等式)

映射 $f\mapsto\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 到 $l^2(\mathbb{T})$ 的等距映射, 亦即

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2.$$

证明 回忆 **[ZGQ]** 中给出的正交系完备化条件:

补充定理 2.1 (正交系完备化条件)

设 X 是 Hilbert 空间, 若 $S=\{e_\alpha:\alpha\in A\}$ 是 X 中的正交规范集, 则下述三个命题等价:

(i) S 是封闭的, 亦即对任意 $x\in X$ 均有展开式:

$$x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha.$$

(ii) S 是完备的, 亦即 $S^\perp=\{\theta\}$.

(iii) Parseval 等式:

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2.$$

因为三角多项式在 L^2 中稠密, 故函数族 $\{e^{i2\pi kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 作为正交规范集满足正交系完备化条件2.1(ii), 另有:

$$(f,e^{i2\pi k\circledast})=\int_{\mathbb{T}}f(t)\overline{e^{i2\pi kt}}dt=\int_{\mathbb{T}}f(t)e^{-i2\pi kt}dt=\widehat{f}(k)$$

故由正交系完备化条件2.1(i),(iii) 知对任意 $f\in L^2(\mathbb{T})$, 在 $L^2(\mathbb{T})$ 中均有

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)e^{i2\pi kx},$$

且

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|^2.$$

由此进一步知 $f\mapsto\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为单射. 事实上, 若存在 $f,g\in L^2(\mathbb{T})$ 满足对任意 $k\in\mathbb{Z}$ 均有 $\widehat{f}(k)=\widehat{g}(k)$, 则知 $\forall k\in\mathbb{Z}((f-g)^\wedge(k)=0)$, 从而

$$\|f-g\|^2_{L^2(\mathbb{T})}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|(f-g)^\wedge(k)|^2=0$$

故 $\|f-g\|_{L^2(\mathbb{T})}=0$, 亦即 $f=g$ 几乎处处成立, 故 $f\mapsto\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为单射.

下面说明 $f\mapsto\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是满射. 任取 $a=\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l^2(\mathbb{C})$, 由 $\{e^{i2\pi kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的正交性与 $a\in l^2(\mathbb{C})$ 易知

$\{\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{i2\pi kx}\}_{N\in\mathbb{N}}$ 为 $L^2(\mathbb{T})$ 中的基本列, 故由 $L^2(\mathbb{T})$ 的完备性知存在 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 使得

$$\left\| f - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{i2\pi k\circledast} \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \to 0, \quad N \to \infty.$$

故 $f(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{i2\pi kx}$ 在 $L^2(\mathbb{T})$ 中成立. 由内积的连续性与 $\{e^{i2\pi kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的正交性进一步知对任意 $m \in \mathbb{Z}$ 均有

$$(f, e^{i2\pi m\circledast}) = \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{i2\pi k\circledast}, e^{i2\pi m\circledast} \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} a_k (e^{i2\pi k\circledast}, e^{i2\pi m\circledast}) = a_m$$

故 $a_m = \widehat{f}(m)$, 因此 $f \mapsto \{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = a$ 为满射, 因此 $f \mapsto \{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为 $L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{C})$ 的等距同构映射, 定理证毕. □

从 Parseval 恒等式2.6出发可得下述命题:

命题 2.2 (Fourier 级数的 L^2 收敛性)

若 $f \in L^2(\mathbb{T})$, 则 $\|S_N f - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \to 0 (N \to \infty)$.

证明 方法一: 设 $f \in L^2(\mathbb{T})$, 对任意 $N \in \mathbb{N}$, 由 Minkowski 不等式1.7知

$$\begin{aligned}\|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})} &= \left\| \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{i2\pi k\circledast} \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \le \left(\sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} < \infty\end{aligned}$$

故 $S_N f \in L^2(\mathbb{T})$, 于是 $f - S_N f \in L^2(\mathbb{T})$. 又对任意 $N \in \mathbb{N}$ 有

$$(f - S_N f)^\wedge(k) = \begin{cases} 0, & |k| \le N, \\ \widehat{f}(k), & |k| > N \end{cases}$$

另注意到

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 < \infty \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|>N} |\widehat{f}(k)|^2 = 0$$

于是

$$\|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{|k|>N} |\widehat{f}(k)|^2 \to 0, \quad N \to \infty$$

此即欲证. □

方法二: 回忆对任意 $N \in \mathbb{N}$, 任意 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 与任意 $x \in \mathbb{T}$ 均有

$$S_N f(x) := \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{i2\pi kx}.$$

由此及 $\{e^{i2\pi kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的正交性与 Parseval 恒等式2.6知

$$\|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = (S_N f, S_N f) = \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2 \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

即 $\|S_N f\|_{L^2(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$, 故由引理2.8可知

$$\|S_N f - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \to 0, \quad N \to \infty$$

此即欲证. □

相较于问题 (1), 问题 (2) 要复杂得多. 1926 年, A. Kolmogorov 给出了一个周期为 1 的可积函数, 其 Fourier 级数在每一点均发散, 即 $p = 1$ 时问题 (2) 不成立. 1965 年, L. Carleson 证明了对任意 $f \in L^2(\mathbb{T})$, f 的 Fourier 级数几乎处处收敛; 1967 年, R. Hunt 证明了对任意 $p \in (1, \infty]$ 与任意 $f \in L^p(\mathbb{T})$, f 的 Fourier 级数几乎处处收敛.

注 上述结果暗示 $\bigcup_{p\in(1,\infty]} L^p(\mathbb{T}) \subsetneq L^1(\mathbb{T})$, 否则 Kolmogorov 的结果与 Carleson 等人的结果就矛盾了. 下一补充节将专门介绍这方面的内容.

2.5 补充: L^p 空间的进一步讨论

2.5.1 L^p 空间之间的包含关系

命题 2.3

$\bigcup_{p\in(1,\infty]} L^p(\mathbb{T}) \subsetneq L^1(\mathbb{T})$.

证明 首先说明 $\bigcup_{p\in(1,\infty]} L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. 当 $p=\infty$ 时, 任取 $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ 知

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_0^1 |f(x)|dx \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < \infty \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{T})$$

故 $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. 而当 $p \in (1,\infty)$ 时, 任取 $f \in L^p(\mathbb{T})$, 由 Hölder 不等式知

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_0^1 |f(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \cdot \mu(\mathbb{T})^{1-\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} < \infty$$

故 $f \in L^1(\mathbb{T})$, 亦即 $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})(1<p<\infty)$, 至此即得 $\bigcup_{p\in(1,\infty]} L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$.

下面说明存在 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 使得对任意 $p \in (1,\infty]$ 均有 $f \notin L^p(\mathbb{T})$. 事实上, 对任意 $x \in [0,1]$, 令

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x(1-\log x)^2}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

首先, f 确在 $L^1(\mathbb{T})$ 内, 这是因为

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_0^1 \frac{dx}{x(1-\log x)^2} = \int_0^1 \frac{d\log x}{(1-\log x)^2} = 1 < \infty$$

其次, 任取 $p \in (1,\infty)$ 有

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p = \int_0^1 \frac{dx}{x^p(1-\log x)^{2p}} = \frac{1}{p-1}\int_1^\infty \frac{du}{(1+\frac{1}{p-1}\log u)^{2p}} \geq \infty$$

其中最后一步是因为在 u 充分大时 $u^{\frac{1}{2p}} \geq \log u$. 因此 $f \notin \bigcup_{p\in(1,\infty)} L^p(\mathbb{T})$.

最后, 当 $p=\infty$ 时, 显见 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, 故 $f \notin L^\infty(\mathbb{T})$. 因此 $f \notin \bigcup_{p\in(1,\infty]} L^p(\mathbb{T})$. □

注 上述证明中 $f(x)$ 的构造其实有迹可循, 其思路与后文补充的 Orlicz 空间的构造是类似的: 需要说明函数具有 L^1 的可积性, 但不能有 $L^{1+\varepsilon}(\varepsilon>0)$ 的可积性, 而 Orlicz 空间 $L\log L$ 正是一种介于这两个可积性之间的空间[12].

具体来说, 因为现在研究的背景空间是 $\mathbb{T}$, 在该背景下一个常见的用于构造 L^p 空间之间嵌入关系反例的函数正是 $f_1(x) = \frac{1}{x}$. 为了让函数能够周期延拓, 注意到 $f_1(1)=1$, 故在爆破点 $x=0$ 处同样可设 $f_1(0)=1$. 显见 f_1 并不在 L^1 内, 其根本原因是 $\frac{1}{x}$ 的分母对应的指标 1 太大: 如果考察函数 $f_2(x) = \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}(\varepsilon>0)$, 很容易可以得到 $f_2 \in L^1(\mathbb{T})$. 但另一方面, 只要确定了这个 $\varepsilon>0$, 当然能够找到 $\varepsilon'>1$ 使得 $\varepsilon'(1-\varepsilon)<1$, 于是 $f_2 \in L^{\varepsilon'}(\mathbb{T})$, 依旧不符合反例的需要. 这说明如果我们想在 f_1 的分母上做文章, 首先需要找到一个 $x\to 0$ 时趋向无穷的因子 $g(x)$(例如 f_2 中 $g(x)=x^{-\varepsilon}$), 其次 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时趋向无穷的速度应该比任何形如 $x^{-\alpha}(\alpha>0)$ 的函数都要慢 (也就是说对任意 $\alpha>0$ 都应该有 $x^\alpha g(x)\to 0(x\to 0)$), 这种函数的一个经典例子便是 $\log x$, 于是我们接下来尝试 $f_3(x) = \frac{1}{x\log x}$.

可惜的是, 这样构造的 f_3 新增了 $x=1$ 这一爆破点. 为了消除这一爆破点, 我们转而考虑 $f_4(x) = \frac{1}{x(C+\log x)}(C<0)$, 其中 $C<0$ 是因为我们不希望 $C+\log x$ 在 $(0,1]$ 上有零点. 为了套用先前周期延拓的条件, 考虑 $f_4(1)=1$, 但显然 $f_4(1)<0$, 而这个符号的冲突仅仅是因为 $\log x$ 前面的符号为正, 所以可以把 f_4 修改为 $f_5(x) = \frac{1}{x(C-\log x)}(C>0)$, 通过令 $f_5(1)=1$ 即得 $C=1$, 从而有 $f_5(x) = \frac{1}{x(1-\log x)}$. 现在检查 f_5 是否在 L^1 内, 可以发现

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1-\log x)} = \int_0^1 \frac{d\log x}{1-\log x} = \infty$$

[12] 当然, Orlicz 空间中的元素并不能作为这里的反例, 因为它的特点是不满足 L^1 可积性, 但满足 $L^{1+\varepsilon}(\varepsilon>0)$ 可积性 (例如 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,\infty)$ 上的表现).

所以 f_5 依旧不在 L^1 中, 其原因在于 $(1-\log x)$ 的次数过小了. 现在把次数抬高, 考虑 $f_6(x)=\frac{1}{x(1-\log x)^{1+\varepsilon}}(\varepsilon>0)$, 可知

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1-\log x)^{1+\varepsilon}}=\int_0^1 \frac{d\log x}{(1-\log x)^{1+\varepsilon}}=\frac{1}{\varepsilon}<\infty$$

于是 $f_6\in L^1(\mathbb{T})$. 现在只剩下说明 $f_6\notin\bigcup_{p\in(1,\infty]}L^p(\mathbb{T})$ 了.

$f_6\notin L^\infty(\mathbb{T})$ 是显然的. 对于 $p\in(1,\infty)$, 希望说明

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p(1-\log x)^{p(1+\varepsilon)}}=\infty.$$

通过令 $u=\frac{1}{x^p}\Rightarrow x=u^{-\frac{1}{p}}$ 可知

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p(1-\log x)^{p(1+\varepsilon)}}=-\frac{1}{p}\int_\infty^1 u\frac{u^{-\frac{1}{p}-1}du}{(1+\frac{1}{p}\log u)^{p(1+\varepsilon)}}=\frac{1}{p}\int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{1}{p}}(1+\frac{1}{p}\log u)^{p(1+\varepsilon)}}$$

为了达到目标, 就需要说明 $u^{\frac{1}{p}}(1+\frac{1}{p}\log u)^{p(1+\varepsilon)}$ 在 $u\to\infty$ 时是比 $u^{1-\varepsilon'}$ 低阶的无穷大, 其中 $\varepsilon'>0$ 是一个足够小的常数 (这样一来, 前述积分就不小于 $\int_1^\infty\frac{du}{u^{1-\varepsilon'}}=\infty$, 反例构造就结束了). 因为 $u\to\infty$ 时, $\log u$ 趋向无穷的速度比任意形如 $u^\alpha(\alpha>0)$ 的函数都要慢 (对 $(\log u)^\beta(\beta>0)$ 也有类似结论), 所以总可以找到一个足够小的 $\alpha>0$, 使得 $\frac{1}{p}+\alpha<1$, 于是

$$u^{\frac{1}{p}}\left(1+\frac{1}{p}\log u\right)^{p(1+\varepsilon)}\lesssim u^{\frac{1}{p}+\alpha},\quad u\to\infty$$

至此即得前述积分为 ∞, 也就是 $f_6\notin\bigcup_{p\in(1,\infty)}L^p(\mathbb{T})$. 命题2.3的证明过程所考虑的正是 $\varepsilon=1$ 这一特殊情况.

命题2.3的结论可以拓展到任意指标:

命题 2.4

对任意 $p_0\in(0,\infty)$, 均有 $\bigcup_{p\in(p_0,\infty]}L^p(\mathbb{T})\subsetneq L^{p_0}(\mathbb{T})$.

证明 令 f 是命题2.3证明中构造的函数, 则由命题2.3可知 $f^{\frac{1}{p_0}}\in L^{p_0}(\mathbb{T})$, 且 $f^{\frac{1}{p_0}}\notin L^p(\mathbb{T})(p\in(p_0,\infty])$. □

但在背景空间为 $\mathbb{R}$ 时, 因为 $\mu(\mathbb{R})=\infty$, 便没有相互包含的结论了:

命题 2.5

$\bigcup_{p\in(1,\infty]}L^p(\mathbb{R})$ 与 $L^1(\mathbb{R})$ 互不包含.

证明 首先说明 $L^1(\mathbb{R})\not\subset\bigcup_{p\in(1,\infty]}L^p(\mathbb{R})$. 设 f 是命题2.3中构造的函数在 $\mathbb{R}$ 上的周期延拓, 定义

$$g(x):=f(x)\chi_{[0,1]}(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

则由命题2.3知 $g\in L^1(\mathbb{R})$, 且 $g\notin L^p(\mathbb{R})(p\in(1,\infty])$, 故 $L^1(\mathbb{R})\not\subset\bigcup_{p\in(1,\infty]}L^p(\mathbb{R})$.

再说明 $\bigcup_{p\in(1,\infty]}L^p(\mathbb{R})\not\subset L^1(\mathbb{R})$. 令

$$h(x):=\frac{\chi_{(1,\infty)}}{x},\quad x\in\mathbb{R}$$

则显见 $h\notin L^1(\mathbb{R})$, 但 $h\in L^p(\mathbb{R})(p\in(1,\infty])$, 故 $\bigcup_{p\in(1,\infty]}L^p(\mathbb{R})\not\subset L^1(\mathbb{R})$. □

关于 L^p 空间之间的包含关系与背景空间的联系, **[FL]** 给出了一个有趣的命题:

命题 2.6

设 (X,Σ,μ) 是测度空间, $0<p<q<\infty$, 则

(i) $L^p(X)\not\subset L^q(X)$ 当且仅当 X 包含任意小的正测度集;

(ii) $L^q(X)\not\subset L^p(X)$ 当且仅当 X 包含任意大的有限测度集.

证明 (i) 若 X 包含任意小的正测度集, 则存在集族 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\Sigma$ 使得 $\mu(E_n)=2^{-2n}(\forall n\in\mathbb{N})$. 记

$$F_n:=E_n\backslash\bigcup_{i=n+1}^\infty E_i,\quad n\in\mathbb{N}$$

则 F_n 互不相交, 且对任意 $n\in\mathbb{N}$ 均有 $0<\mu(F_n)<2^{-n}$. 令

$$f(x):=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(F_n)^{-\frac{1}{q}}\chi_{F_n}(x)$$

则根据 F_n 的不交性可知

$$\|f\|_{L^p(X)}^p=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(F_n)^{-\frac{p}{q}}\mu(F_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(F_n)^{1-\frac{p}{q}}<\infty$$

且

$$\|f\|_{L^q(X)}^q=\sum_{n\in\mathbb{N}}1=\infty$$

这说明 $f\in L^p(X), f\notin L^q(X)$, 亦即 $L^p(X)\not\subset L^q(X)$.

若 $L^p(X)\not\subset L^q(X)$, 往证 X 包含任意小的正测度集. 用反证法, 设 X 子集测度不能任意小, 亦即

$$\exists\alpha>0\forall E\in\Sigma(\mu(E)=0\vee\mu(E)\geq\alpha). \tag{2.23}$$

下面说明在(2.23)式成立时有

$$\forall f\in L^p(X)\exists N\in\mathbb{N}(\mu(\{x\in X:|f(x)|\geq N\})=0) \tag{2.24}$$

这是因为如若不然, 则

$$\exists f\in L^p(X)\forall n\in\mathbb{N}(\mu(\{x\in X:|f(x)|\geq n\})>0)$$

根据(2.23)式可知 $\mu(\{x\in X:|f(x)|\geq n\})\geq\alpha$, 于是

$$\begin{aligned}\alpha n^p&\leq\mu(\{x\in X:|f(x)|\geq n\})n^p\leq\int_{\{|f(x)|\geq n\}}n^p\,d\mu\\&\leq\int_{\{|f(x)|\geq n\}}|f(x)|^p\,d\mu\leq\int_X|f(x)|^p\,d\mu<\infty\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 即得矛盾, 故(2.24)式成立, 因此任取 $f\in L^p(X)$ 可得

$$\begin{aligned}\int_X|f(x)|^q\,d\mu&=\int_{\{|f(x)|<1\}}|f(x)|^q\,d\mu+\int_{\{1\leq|f(x)|<N\}}|f(x)|^q\,d\mu+\int_{\{|f(x)|\geq N\}}|f(x)|^q\,d\mu\\&=\int_{\{|f(x)|<1\}}|f(x)|^q\,d\mu+\int_{\{1\leq|f(x)|<N\}}|f(x)|^q\,d\mu\\&\leq\int_{\{|f(x)|<1\}}|f(x)|^q\,d\mu+N^{q-p}\int_{\{1\leq|f(x)|<N\}}|f(x)|^p\,d\mu<\infty\end{aligned}$$

这说明 $f\in L^q(X)$, 从而 $L^p(X)\subset L^q(X)$, 矛盾! 命题因而得证.

(ii) 若 X 包含任意大的有限测度集, 则存在集族 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\Sigma$ 使得 $\mu(E_n)=2^n(\forall n\in\mathbb{N})$. 记

$$F_n:=E_n\backslash\bigcup_{i=0}^{n-1}E_i,\quad n\in\mathbb{N}$$

其中 $E_0:=\varnothing$. 显见 F_n 互不相交, 且对任意给定的 $n\in\mathbb{N}$ 至少有[13] $\mu(F_n)\subset(1,\infty)$. 令

$$f(x):=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(F_n)^{-\frac{1}{q}}n^{-\frac{1}{q}}\chi_{F_n}(x)$$

则根据 F_n 的不交性可知

$$\|f\|_{L^q(X)}^q=\sum_{n\in\mathbb{N}}n^{-\frac{q}{p}}<\infty$$

且

$$\|f\|_{L^p(X)}^p=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(F_n)^{1-\frac{p}{q}}n^{-1}>\sum_{n\in\mathbb{N}}n^{-1}=\infty$$

故 $L^q(X)\not\subset L^p(X)$.

[13] 这是因为 $\mu(F_n)\geq\mu(E_n)-\sum_{k=0}^{n-1}E_i>2^n-(2^n-1)=1$.

若 $L^q(X)\not\subset L^p(X)$, 往证 X 包含任意大的有限测度集. 用反证法, 设 X 子集测度不能任意大, 亦即

$$\exists A\in(0,\infty)\forall E\in\Sigma(\mu(E)\le A\vee\mu(E)=\infty). \tag{2.25}$$

下面说明在(2.25)式成立时有

$$\forall f\in L^q(X)\forall n\in\mathbb{N}(\mu(\{x\in X:|f(x)|\ge\frac{1}{n}\})\le A) \tag{2.26}$$

这是因为如若不然, 则

$$\exists f_0\in L^q(X)\exists n_0\in\mathbb{N}(\mu(\{x\in X:|f_0(x)|\ge\frac{1}{n_0}\})>A)$$

根据(2.25)式可知 $\mu(\{x\in X:|f_0(x)|\ge\frac{1}{n_0}\})=\infty$, 于是

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{L^q(X)}^q&=\int_X|f_0(x)|^q\,d\mu\ge\int_{\{|f_0(x)|\ge\frac{1}{n_0}\}}|f_0(x)|^q\,d\mu\\&\ge\int_{\{|f_0(x)|\ge\frac{1}{n_0}\}}\frac{d\mu}{n_0^q}=\frac{1}{n_0^q}\mu(\{x\in X:|f_0(x)|\ge\frac{1}{n_0}\})=\infty\end{aligned}$$

这与 $f_0\in L^q(X)$ 矛盾! 故(2.26)式成立, 结合(2.26)式与单调收敛定理可知对任意 $f\in L^q(X)$ 有

$$\begin{aligned}\mu(\{x\in X:|f(x)|>0\})&=\mu(\lim_{n\to\infty}\{x\in X:|f(x)|\ge\frac{1}{n}\})\\&=\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in X:|f(x)|\ge\frac{1}{n}\})\le A\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_X|f(x)|^p\,d\mu&=\int_{\{|f(x)|\ge1\}}|f(x)|^p\,d\mu+\int_{\{0<|f(x)|<1\}}|f(x)|^p\,d\mu\\&\le\int_{\{|f(x)|\ge1\}}|f(x)|^p\,d\mu+A\le\|f\|_{L^q(X)}^q+A<\infty\end{aligned}$$

这说明 $f\in L^p(X)$, 亦即 $L^q(X)\subset L^p(X)$, 矛盾! 命题因而得证. □

注 Terence Tao 在其讲义Introduction, estimates, L^p theory, interpolation中提到" 在指标 p 变大时, 空间 L^p 中的函数渐渐地不再具有高且窄的尖点, 而在指标 p 变小时, 空间 L^p 中的函数渐渐地不再具有矮且宽的尾[14]." 一般可以用 $x^{-\alpha}$ 型函数理解这一几何直观, 而命题2.6提供了处理函数所要求的精细度与广度这一理解方式: L^p 空间中的函数均由示性函数的可数线性组合构成, 而在表示高且窄的尖点时, 所需的示性函数对应集合测度将越来越小, 这便对背景空间的精细度提出了要求. 当背景空间 X 的精细度不够 (无法包含任意小的正测度集), 在 $L^p(X)$ 中就无法构造这种具有尖点的函数 (亦即(2.24)式成立). 同理, 在表示矮且宽的远点时, 所需的示性函数对应集合测度将越来越大, 如果背景空间 X 的广度不够 (无法包含任意大的有限测度集), 在 $L^p(X)$ 中就无法构造这种在远处具有大支集的函数 (亦即(2.26)式成立).

2.5.2 L^p 范数极限

本小节着重讨论 L^p 空间在指标 p 具有某种趋向时, 其中的范数具有的表现.

命题 2.7 (L^p 指标在无穷大的极限表现)

设 (X,Σ,μ) 为测度空间, 若存在 $p\in(0,\infty)$ 使得 $f\in L^p(X)$, 则 $\|f\|_{L^\infty(X)}=\lim\limits_{q\to\infty}\|f\|_{L^q(X)}$(尽管它们未必有限), 其中约定序列 $\{\infty\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限为 ∞.

证明 首先说明 $\varlimsup\limits_{q\to\infty}\|f\|_{L^q(X)}\le\|f\|_{L^\infty(X)}$. 若 $\|f\|_{L^\infty(X)}=0$ 或 ∞, 则该式显然成立, 下设 $\|f\|_{L^\infty(X)}\in(0,\infty)$. 此时对任意 $q\in(p,\infty)$ 有:

$$\|f\|_{L^q(X)}^q\le\int_X|f(x)|^{q-p}|f(x)|^p\,d\mu\le\|f\|_{L^\infty(X)}^{q-p}\|f\|_{L^p(X)}^p$$

[14] 原文为 short broad tails, 可以联想正态分布中大幅偏离中心, 取值小的那些点构成的集合.

故[15]$\|f\|_{L^q(X)}^{q-p} \leq \|f\|_{L^\infty(X)}^{q-p}$, 亦即[16]$\|f\|_{L^q(X)} \leq \|f\|_{L^\infty(X)}$, 从而 $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}} \|f\|_{L^q(X)} \leq \|f\|_{L^\infty(X)}$.

再说明 $\|f\|_{L^\infty(X)} \leq \underline{\lim\limits_{q\to\infty}} \|f\|_{L^q(X)}$. 若 $\|f\|_{L^\infty(X)} = 0$, 则该式显然成立. 若 $\|f\|_{L^\infty(X)} \in (0,\infty)$, 则对任意 $\gamma \in (0,1)$ 定义

$$E_\gamma := \{x \in X : |f(x)| > \gamma \|f\|_{L^\infty(X)}\}$$

则 $\mu(E_\gamma) \in (0, \mu(X)]$, 这是因为如若 $\mu(E_\gamma) = 0$, 则 $\|f\|_{L^\infty(X)} \leq \gamma \|f\|_{L^\infty(X)} \Rightarrow \gamma \geq 1$, 这与 γ 的设置矛盾! 因此

$$\|f\|_{L^p(E_\gamma)} = \left(\int_{E_\gamma} |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{E_\gamma} \gamma^p \|f\|_{L^\infty(X)}^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \gamma \mu(E_\gamma)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(X)} > 0$$

现对任意 $q \in (p,\infty)$ 知

$$\|f\|_{L^q(X)}^q \geq \int_{E_\gamma} |f(x)|^{q-p} |f(x)|^p d\mu \geq \gamma^{q-p} \|f\|_{L^\infty(X)}^{q-p} \int_{E_\gamma} |f(x)|^p d\mu = \gamma^{q-p} \|f\|_{L^\infty(X)}^{q-p} \|f\|_{L^p(E_\gamma)}^p$$

又因为 $f \in L^p(X)$, 故 $\|f\|_{L^p(E_\gamma)} < \infty$, 从而

$$\|f\|_{L^q(X)} \geq (\gamma \|f\|_{L^\infty(X)})^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_{L^p(E_\gamma)}^{\frac{p}{q}}$$

因此

$$\underline{\lim_{q\to\infty}} \|f\|_{L^q(X)} \geq \gamma \|f\|_{L^\infty(X)}.$$

由 γ 的任意性即得

$$\underline{\lim_{q\to\infty}} \|f\|_{L^q(X)} \geq \|f\|_{L^\infty(X)}.$$

最后, 若 $\|f\|_{L^\infty(X)} = \infty$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 记 $G_n := \{x \in X : |f(x)| > n\}$, 下面分两种情况讨论:

若存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\mu(G_{n_0}) = \infty$, 则对任意 $q \in (0,\infty)$ 有

$$\|f\|_{L^q(X)} \geq \|f\|_{L^q(G_{n_0})} \geq n_0 \mu(G_{n_0})^{\frac{1}{q}} = \infty$$

但 $f \in L^p(X)$, 取 $q = p$ 即得矛盾.

若对任意 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $\mu(G_n) < \infty$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 与 $q \in (0,\infty)$ 均有

$$\|f\|_{L^q(X)} \geq \|f\|_{L^q(G_n)} \geq n\mu(G_n)^{\frac{1}{q}}$$

因此 $\underline{\lim\limits_{q\to\infty}} \|f\|_{L^q(X)} \geq n$, 由 n 的任意性即得 $\underline{\lim\limits_{q\to\infty}} \|f\|_{L^q(X)} \geq \infty = \|f\|_{L^\infty(X)}$. 命题至此得证. □

命题 2.8 (L^p 指标在 1 的极限表现)

设 (X,Σ,μ) 为 σ 有限测度空间, f 是 μ 可测函数, 且 $\overline{\lim\limits_{p\to1^+}} \|f\|_{L^p(X)} < \infty$, 则 $\|f\|_{L^1(X)} = \lim\limits_{p\to1^+} \|f\|_{L^p(X)}$.

证明 先设 $\overline{\lim\limits_{p\to1^+}} \|f\|_{L^p(X)} \in (0,\infty)$, 此时对任意 $\theta \in (0,1)$, 取 $p_0 \in (1,\infty)$ 满足

$$\frac{1}{p_0} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p}$$

显见 $p_0 \in (1,p)$, 由 Hölder 不等式知

$$\|f\|_{L^{p_0}(X)} \leq \|f\|_{L^1(X)}^\theta \|f\|_{L^p(X)}^{1-\theta}$$

令 $p \to 1^+$, 由 $p_0 \in (1,p)$ 知 $p_0 \to 1^+$, 故

$$\overline{\lim_{p\to1^+}} \|f\|_{L^p(X)} \leq \|f\|_{L^1(X)}^\theta \overline{\lim_{p\to1^+}} \|f\|_{L^p(X)}^{1-\theta}$$

又因为 $\overline{\lim\limits_{p\to1^+}} \|f\|_{L^p(X)} < \infty$, 故 $\overline{\lim\limits_{p\to1^+}} \|f\|_{L^p(X)} \leq \|f\|_{L^1(X)}$. 而当 $\overline{\lim\limits_{p\to1^+}} \|f\|_{L^p(X)} = 0$, 显见同样有 $\overline{\lim\limits_{p\to1^+}} \|f\|_{L^p(X)} \leq \|f\|_{L^1(X)}$.

[15]特意排除 $\|f\|_{L^\infty(X)} = 0$ 正是为了这一步可以正常进行: 保证除数非 0.

[16]特意排除 $\|f\|_{L^\infty(X)} = \infty$ 正是为了这一步可以正常进行: 保证乘方正常进行.

下证 $\|f\|_{L^1(X)} \leq \varliminf\limits_{p\to 1^+} \|f\|_{L^p(X)}$. 因为 X 是 σ 有限测度空间, 根据定义知存在 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $\mu(E_n) < \infty$, 且 $\chi_{E_n} \uparrow \mu(X)(n \to \infty)$. 由此, Fatou 引理与 Hölder 不等式知:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1(X)} &= \|f \lim_{n\to\infty} \chi_{E_N}\|_{L^1(X)} \leq \varliminf_{N\to\infty} \|f\chi_{E_N}\|_{L^1(X)} \\ &\leq \varliminf_{N\to\infty} \big(\varliminf_{p\to 1^+} \|f\|_{L^p(X)} \mu(E_N)^{1-\frac{1}{p}} \big) \\ &= \varliminf_{N\to\infty} \varliminf_{p\to 1^+} \|f\|_{L^p(X)} = \varliminf_{p\to 1^+} \|f\|_{L^p(X)}.\end{aligned}$$

从而

$$\varlimsup_{p\to 1^+} \|f\|_{L^p(X)} \leq \|f\|_{L^1(X)} \leq \varliminf_{p\to 1^+} \|f\|_{L^p(X)}$$

因此 $\lim\limits_{p\to 1^+} \|f\|_{L^p(X)} = \|f\|_{L^1(X)}$, 命题至此得证. □

注 命题2.8中条件 $\varlimsup\limits_{p\to 1^+} \|f\|_{L^p(X)} < \infty$ 是必要的, 这是因为记 $X = [0, 1]$, f 是命题2.3中构造的函数, 则

$$\varlimsup_{p\to 1^+} \|f\|_{L^p(X)} = \infty, \ \|f\|_{L^1(X)} = 1 < \infty$$

故 $\|f\|_{L^1(X)} \neq \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(X)}$.

命题2.8的结论可以拓展到任意指标:

命题 2.9 (L^p 指标在正值的极限表现)

设 (X, Σ, μ) 为 σ 有限测度空间, $p \in (0, \infty)$, f 是 μ 可测函数, 且

$$\varlimsup_{q\to p^+} \|f\|_{L^q(X)} < \infty$$

则 $\|f\|_{L^p(X)} = \lim\limits_{q\to p^+} \|f\|_{L^q(X)}$.

证明 注意到

$$\varlimsup_{q\to p^+} \|f\|_{L^p(X)} < \infty \Leftrightarrow \varlimsup_{s\to 1^+} \|f\|_{L^{sp}(X)} < \infty \Leftrightarrow \varlimsup_{s\to 1^+} \||f|^p\|_{L^s(X)} < \infty$$

由此及命题2.8知

$$\|f\|_{L^p(X)} = \||f|^p\|_{L^1(X)}^{\frac{1}{p}} = \lim_{s\to 1^+} \||f|^p\|_{L^s(X)}^{\frac{1}{p}} = \lim_{s\to 1^+} \|f\|_{L^{sp}(X)} = \lim_{q\to p^+} \|f\|_{L^q(X)}.$$

□

命题 2.10 (L^p 指标在 0 的极限表现)

设 $\mu(X) = 1, p \in (0, \infty), f \in L^p(X)$, 则对任意 $q \in (0, p)$ 均有 $f \in L^q(X)$, 且

$$\lim_{q\to 0^+} \|f\|_{L^q(X)} = e^{\int_X \log|f(x)| d\mu}.$$

证明 由 Jensen 不等式知, 对任意 $g \in L^1(X)$ 均有

$$\int_X \log|g(x)| d\mu \leq \log\Big(\int_X |g(x)| d\mu\Big)$$

令 $g(x) = |f(x)|^p$ 可得

$$\begin{aligned}&\int_X \log|f(x)|^p d\mu \leq \log\Big(\int_X |f(x)|^p d\mu\Big) \\ \Leftrightarrow & p\int_X \log|f(x)| d\mu \leq \log\Big(\int_X |f(x)|^p d\mu\Big) \\ \Leftrightarrow & \int_X \log|f(x)| d\mu \leq \log\|f\|_{L^p(X)} \\ \Leftrightarrow & e^{\int_X \log|f(x)| d\mu} \leq \|f\|_{L^p(X)}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

另一方面, 取 $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,p)$ 满足 $q_n\downarrow 0(n\to\infty)$, 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 与 $x\in X$, 记

$$h_n(x):=\frac{1}{p}(|f(x)|^p-1)-\frac{1}{q_n}(|f(x)|^{q_n}-1),$$
$$h(x):=\frac{1}{p}(|f(x)|^p-1)-\log|f(x)|.$$

易知

$$\lim_{q\to 0^+}\frac{1}{q}(t^q-1)=\log t$$

进一步有 $\frac{1}{q}(t^q-1)\downarrow\log t(q\downarrow 0)$, 这是因为对任意 $x\in(0,\infty)$ 有

$$(\frac{t^x-1}{x})'=\frac{(t^x\log t)x-t^x+1}{x^2}\geq 0.$$

由此可知 $0\leq h_n\uparrow h$, 进而由 Beppo Levi 引理知在 $n\to\infty$ 时有

$$\int_X h_n(x)d\mu\uparrow\int_X h(x)d\mu,$$

进而当 $n\to\infty$ 时有

$$\int_X\frac{1}{q_n}(|f(x)|^{q_n}-1)d\mu\downarrow\int_X\log|f(x)|d\mu \tag{2.28}$$

结合(2.27),(2.28)两式可知

$$e^{\int_X\log|f(x)|d\mu}\leq\left[\int_X|f(x)|^{q_n}d\mu\right]^{\frac{1}{q_n}}=e^{\log\|f\|_{L^{q_n}(X)}}$$
$$\leq e^{\frac{1}{q_n}(\int_X|f(x)|^{q_n}d\mu-1)}\overset{(A)}{=}e^{\frac{1}{q_n}(\int_X[|f(x)|^{q_n}-1]d\mu)}$$

其中 (A) 出于 $\mu(X)=1$. 在上诸式中令 $n\to\infty$ 可知

$$e^{\int_X\log|f(x)|d\mu}\leq\lim_{p\to 0^+}\|f\|_{L^p(X)}\leq e^{\int_X\log|f(x)|d\mu}$$

此即欲证. □

注 命题2.10中 $\mu(X)=1$ 是必要的[17]. 这是因为考虑 $X:=(1,\infty)$, 对任意 $x\in X$ 记 $f(x)=\frac{1}{x}$. 知 $p\in(1,\infty)$ 时, $f\in L^p(X)$; $p\in(0,1]$ 时, $f\notin L^p(X)$, 故 $\lim\limits_{p\to 0^+}\|f\|_{L^p(X)}=\infty$. 另一方面, 对任意 $x\in X$ 知 $\log|f(x)|=-\log x$, 故

$$\int_X\log|f(x)|dx=-\int_1^\infty\log x dx=-\infty,$$

因此 $e^{\int_X\log|f(x)|dx}=e^{-\infty}=0$, 此即 $\lim\limits_{p\to 0^+}\|f\|_{L^p(X)}\neq e^{\int_X\log|f(x)|dx}$.

2.6 求和法

在上一节对问题 (1) 的讨论中, 已经知道了在 $f\in L^1(\mathbb{T})$ 时未必有 $\lim\limits_{N\to\infty}\|S_Nf-f\|_{L^1(\mathbb{T})}=0$. 现在为了从 Fourier 系数中还原出函数 f, 我们便需要对序列 S_Nf 作一定处理, 以期获得更好的收敛性. 在数学分析中, 我们曾接触过下述命题:

定理 2.7

若 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k$ 存在, 则算术平均极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}$ 存在, 且极限值恰为 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k$. ♡

证明 设 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=A$, 则根据极限定义知

$$\forall\varepsilon>0\exists N_1\in\mathbb{N}\forall k>N_1(|a_k-A|<\frac{\varepsilon}{2})$$

[17] 这里 $\mu(X)=1$ 和 $\mu(X)=A<\infty$ 作为条件而言是等价的, 因为总可以令 $\mu':E\mapsto\frac{\mu(E)}{A}$ 使得 $\mu'(X)=1$.

故 $k > N_1$ 时:

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}-A\right| = \left|\frac{(a_1-A)+\cdots+(a_{N_1}-A)+\cdots+(a_k-A)}{k}\right|$$
$$\leq \frac{1}{k}(|a_1-A|+\cdots+|a_{N_1}-A|)+\frac{k-N_1}{k}\frac{\varepsilon}{2}$$

对上述取定的 N_1, 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}(|a_1-A|+\cdots+|a_{N_1}-A|)=0$, 根据极限定义知

$$\exists N_2\in\mathbb{N}\forall k>N_2(N_2>N_1\wedge\frac{1}{k}(|a_1-A|+\cdots+|a_k-A|)<\frac{\varepsilon}{2})$$

因此 $k > N_2$ 时:

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}-A\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{k-N_1}{k}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}=A=\lim\limits_{k\to\infty}a_k$. □

反之, 若对 $k\in\mathbb{N}$ 令 $a_k=(-1)^k$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}=0$, 而 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k$ 不存在. 这说明序列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的算术平均序列具有比序列本身更好的性质, 亦即在离散情形下我们可以利用序列对应的算术平均列改良对应性质. 在连续情形下, 这意味着球平均 $\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}f(y)dy$ 具有比函数 f 更好的性质.

现在回到 Fourier 级数收敛性的问题, 基于上述启发, 我们定义 Cesaro 求和如下:

$$\sigma_N f(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}S_kf(x)=\int_0^1 f(t)\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}D_k(x-t)dt=\int_0^1 f(t)F_N(x-t)dt$$

其中 $F_N(t)=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}D_k(t)$ 称为 Fejér 核. 进一步, 因为

$$\sum_{k=0}^{N}D_k(t)=\sum_{k=0}^{N}\frac{\sin(\pi(2k+1)t)}{\sin(\pi t)}=\sum_{k=0}^{N}\frac{\sin(\pi(2k+1)t)\sin(\pi t)}{(\sin(\pi t))^2}$$
$$=\frac{1}{(\sin(\pi t))^2}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(\cos(2k\pi t)-\cos(2(k+1)\pi t))=\frac{[\sin(\pi(N+1)t)]^2}{(\sin(\pi t))^2}$$

因此

$$F_N(t)=\frac{1}{N+1}\left[\frac{\sin(\pi(N+1)t)}{\sin(\pi t)}\right]^2$$

F_N 具有下述性质:

(i) $F_N(t)\geq 0$,

(ii) $\|F_N\|_{L^1(\mathbb{T})}=\int_0^1 F_N(t)dt=1$;

(iii) 若 $\delta>0$, 则 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}}F_N(t)dt=0$.

其中 (i) 是显见的, (ii) 是因为注意到 $\int_0^1 D_N(t)dt=1$, 可知

$$\int_0^1 F_N(t)dt=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\int_0^1 D_k(t)dt=1$$

而 (iii) 是因为对任意给定的 $\delta>0$ 都有

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}}F_N(t)dt\leq\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)}=0$$

F_N 与 D_N 的本质区别就在于上述性质 (i): F_N 具有非负性, 而 D_N 不具有该性质, 进而 F_N 具有更好的衰减性. 这同样可由 Bois Reymond 的反例看出: 因为 D_N 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上的积分并不绝对收敛, 故可以通过连续化 $\operatorname{sgn} D_N$ 构造不收敛的反例; 而 F_N 具有非负性, 故至少这样的反例构造方法是行不通的. 事实上, Fourier 级数的 L^1 收敛性问题在 Fejér 核的背景下得到了解决:

定理 2.8 (Fejér 核的恒等逼近定理)

若下述两种情况有其一成立:

(i) $f\in L^p(\mathbb{T})(1\leq p<\infty)$;

(ii) f 是周期为 1 的连续函数, $p=\infty$,

则
$$\lim_{N\to\infty}\|\sigma_N f-f\|_{L^p(\mathbb{T})}=0.$$

证明 因为 $\int_0^1 F_N(t)dt=1$, 由 Minkowski 积分不等式与 Lebesgue 积分的平移不变性知

$$\begin{aligned}\|\sigma_N f-f\|_{L^p(\mathbb{T})}&=\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[f(x-t)-f(x)]F_N(t)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|f(x-t)-f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}|F_N(t)|dt\\&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}F_N(t)dt\\&=\int_{|t|\le\delta}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}F_N(t)dt+\int_{\delta<|t|\le\frac{1}{2}}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}F_N(t)dt\\&\le\int_{|t|\le\delta}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}F_N(t)dt+2\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\int_{\delta<|t|\le\frac{1}{2}}|F_N(t)|dt,\end{aligned}$$

其中 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$ 待定.

当 $p\in[1,\infty)$ 时, 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 记 $g(x):=f(x)\chi_{[-1,1]}(x)$, 则 $g\in L^p(\mathbb{R})$. 根据 Lebesgue 积分的平均连续性[18]知

$$\lim_{t\to0}\|g(\circledast-t)-g(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{R})}=0.$$

又当 $t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 时有

$$0\le\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}=\|g(\circledast-t)-g(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}\le\|g(\circledast-t)-g(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

故

$$\lim_{t\to0}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}=0. \tag{2.29}$$

类似地, 当 $p=\infty$ 时, 因为 $\sigma_N f$ 与 f 此时都是连续函数, 回忆上一节在讨论问题 (1) 中 $p=\infty$ 的情况时提到过连续函数的一致范数与 L^∞ 范数相等, 因此

$$\begin{aligned}\|\sigma_N f-f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=\max_{x\in\mathbb{T}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[f(x-t)-f(x)]F_N(t)dt\right|&\le\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}F_N(t)dt\\&=\int_{|t|\le\delta}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}F_N(t)dt+\int_{\delta<|t|\le\frac{1}{2}}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}F_N(t)dt\\&\le\int_{|t|\le\delta}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}F_N(t)dt+2\|f\|_{C(\mathbb{T})}\int_{\delta<|t|\le\frac{1}{2}}F_N(t)dt.\end{aligned}$$

因为 $f\in C(\mathbb{T})$, 且 $[-1,1]$ 是紧集, 故 f 在 $[-1,1]$ 上一致连续, 根据一致连续的定义知:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta\in(0,\frac{1}{2})\forall t\in[-\delta,\delta]\forall x\in\mathbb{T}(|f(x-t)-f(t)|<\varepsilon).$$

这说明 $\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}<\varepsilon$, 即(2.29)式在 $p=\infty$ 时依旧成立.

现在由(2.29)式知

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall t\in[-\delta,\delta](\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}<\frac{\varepsilon}{2}).$$

对现在取定的 ε,δ 而言, 由 F_N 的性质 (iii) 知存在 $M\in\mathbb{N}$ 使得 $N>M$ 时有

$$\int_{\delta<|t|\le\frac{1}{2}}F_N(t)dt<\frac{\varepsilon}{4[\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}+1]},$$

[18]Lebesgue 积分的平均连续性本身谈论的是 $\mathbb{R}$ 上的事, 但这里我们只知道 f 在 $\mathbb{T}$ 上的性质, 因此需要用函数 g 过渡到 $\mathbb{R}$ 上.

故

$$\|\sigma_N f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} < \frac{\varepsilon}{2}\int_{|t|<\delta} F_N(t)dt + 2\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\frac{\varepsilon}{4[\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}+1]} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{N\to\infty}\|\sigma_N f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0$, 定理证毕. □

Fejér 核的恒等逼近定理2.8有下述重要推论.

推论 2.1

(1) 三角多项式在 $L^p(\mathbb{T})(1\le p<\infty)$ 中稠密.

(2) 若 $f\in L^1(\mathbb{T})$, 且对任意 $k\in\mathbb{Z}$ 均有 $\widehat{f}(k)=0$, 则 f 几乎处处为零. 若 $f\in C(\mathbb{T})$, 且对任意 $k\in\mathbb{Z}$ 均有 $\widehat{f}(k)=0$, 则 $f(x)\equiv 0$.

(3) 若 $f\in C(\mathbb{T})$, 则 f 可由三角多项式一致逼近.

证明 (1) 利用 Fejér 核的恒等逼近定理2.8并注意到 $\sigma_N f$ 是三角多项式即可.

(2) 对前一命题应用 Fejér 核的恒等逼近定理2.8在 $p=1$ 的情形, 后一命题应用 $p=\infty$ 的情形即可.

(3) 利用 Fejér 核的恒等逼近定理2.8并注意到 $\sigma_N f$ 是三角多项式即可. □

除前述考察算术平均的方法之外, 还有一种求和法是把 Fourier 级数写成 (复平面中) 单位圆上的形式极限, 定义:

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1}\widehat{f}(k)\bar{z}^{|k|}, \quad z = re^{i2\pi\theta} \tag{2.30}$$

在 $f\in L^p(\mathbb{T})(1\le p\le\infty)$ 时, 对任意 $k\in\mathbb{Z}$ 均有

$$|\widehat{f}(k)| = \left|\int_{-\frac12}^{\frac12} f(x)e^{-i2\pi kx}dx\right| \le \int_{-\frac12}^{\frac12}|f(x)|dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} < \infty$$

因此 $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 关于 k 一致有界, 由此可知函数 $u(z)$ 在 $|z|<1$(亦即 $r<1$) 时绝对收敛, 进而 $u(z)$ 良定义. 在 $r<1$ 时, 将 $z=re^{i2\pi\theta}$ 代入(2.30)式有

$$\begin{aligned}
u(re^{i2\pi\theta}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)r^k e^{i2\pi k\theta} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\widehat{f}(k)r^{|k|}e^{-i2\pi|k|\theta}\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)r^{|k|}e^{i2\pi k\theta}\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\frac12}^{\frac12} f(t)e^{-i2\pi kt}dt\right)r^{|k|}e^{-i2\pi k\theta}\\
&= \int_{-\frac12}^{\frac12} f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}e^{i2\pi k(\theta-t)}dt\\
&=: \int_{-\frac12}^{\frac12} f(t)P_r(\theta-t)dt
\end{aligned}$$

其中

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{i2\pi kt}, \quad \forall t\in[-\frac12,\frac12]$$

称为 $\mathbb{T}$ 上的 Poisson 核. 进一步有:

$$\begin{aligned}
P_r(t) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} r^{-k}e^{i2\pi kt} + \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{i2\pi kt}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-i2\pi kt} + \frac{1}{1-re^{i2\pi t}}\\
&= \frac{re^{-i2\pi t}}{1-re^{-i2\pi t}} + \frac{1}{1-re^{i2\pi t}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-r^2}{1-re^{i2\langle t|t\rangle}-re^{-i2\pi t}+r^2} \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi t)+r^2}.
\end{aligned}
$$

Poisson 核也有和 Fejér 核类似的性质:

(i) $P_r(t) \geq 0$;

(ii) $\int_0^1 P_r(t)dt = 1$;

(iii) 若 $\delta > 0$, 则 $\lim\limits_{r\to 1^-} \int_{\delta<t<\frac{1}{2}} P_r(t)dt = 0$.

其中 (i) 是因为 $0 < r < 1$, 同时 $1-2r\cos(2\pi t)+r^2 \geq 1-2r+r^2 = (1-r)^2 \geq 0$; (ii) 是因为由 $r \in (0,1)$ 知级数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{i2\pi kt}$ 关于 $t \in [0,1]$ 一致收敛, 于是

$$
\int_0^1 P_r(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 r^{|k|}e^{i2\pi kt}dt = 1
$$

而 (iii) 是因为

$$
\lim_{r\to 1^-} \int_{\delta<|t|\leq\frac{1}{2}} P_r(t)dt = \lim_{r\to 1^-} \frac{1-r^2}{1+r^2} \int_{\delta<|t|\leq\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-\frac{2r}{1+r^2}\cos(2\pi t)} \tag{2.31}
$$

又当 $\delta < |t| \leq \frac{1}{2}$ 时有 $-1 \leq \cos(2\pi t) < \cos(2\pi\delta)$, 故

$$
\frac{1}{1+\frac{2r}{1+r^2}} \leq \frac{1}{1-\frac{2r}{1+r^2}\cos(2\pi t)} < \frac{1}{1-\frac{2r}{1+r^2}\cos(2\pi\delta)}
$$

将上式代入(2.31)式即得欲证极限.

据此可以推知 Poisson 核的恒等逼近定理:

定理 2.9 (Poisson 核的恒等逼近定理)

若下述两种情况有其一成立:

(i) $f \in L^p(\mathbb{T})(1 \leq p < \infty)$;

(ii) f 是周期为 1 的连续函数, $p = \infty$,

则

$$
\lim_{r\to 1^-} \|P_r * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0
$$

证明 因为 $\int_0^1 P_r(t)dt = 1$, 由 Minkowski 积分不等式与 Lebesgue 积分的平移不变性知

$$
\begin{aligned}
\|P_r * f - f\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x-t)-f(x)]P_r(t)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x-t)-f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} |P_r(t)|dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|f(\circledast - t) - f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(t)dt \\
&= \int_{|t|\leq\delta} \|f(\circledast - t) - f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(t)dt + \int_{\delta<|t|\leq\frac{1}{2}} \|f(\circledast - t) - f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(t)dt \\
&\leq \int_{|t|\leq\delta} \|f(\circledast - t) - f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(t)dt + 2\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \int_{\delta<|t|\leq\frac{1}{2}} |P_r(t)|dt,
\end{aligned}
$$

其中 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ 待定.

当 $p \in [1,\infty)$ 时, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 记 $g(x) := f(x)\chi_{[-1,1]}(x)$, 则 $g \in L^p(\mathbb{R})$. 根据 Lebesgue 积分的平均连续性知

$$
\lim_{t\to 0} \|g(\circledast - t) - g(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.
$$

又当 $t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 时有

$$0\le\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}=\|g(\circledast-t)-g(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}\le\|g(\circledast-t)-g(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

故

$$\lim_{t\to0}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}=0. \tag{2.32}$$

类似地, 当 $p=\infty$ 时, 因为 P_r*f 和 f 此时都是连续函数, 故它们的 L^∞ 范数正是一致范数, 因此

$$\begin{aligned}\|P_r*f-f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}&=\max_{x\in\mathbb{T}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[f(x-t)-f(x)]P_r(t)dt\right|\le\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}P_r(t)dt\\&=\int_{|t|\le\delta}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}P_r(t)dt+\int_{\delta<|t|\le\frac{1}{2}}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}P_r(t)dt\\&\le\int_{|t|\le\delta}\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}P_r(t)dt+2\|f\|_{C(\mathbb{T})}\int_{\delta<|t|\le\frac{1}{2}}P_r(t)dt.\end{aligned}$$

因为 $f\in C(\mathbb{T})$, 且 $[-1,1]$ 是紧集, 故 f 在 $[-1,1]$ 上一致连续, 根据一致连续的定义知

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta\in(0,\frac{1}{2})\forall t\in[-\delta,\delta]\forall x\in\mathbb{T}(|f(x-t)-f(t)|<\varepsilon).$$

这说明 $\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{C(\mathbb{T})}<\varepsilon$, 亦即(2.32)式在 $p=\infty$ 时依旧成立.

现在由(2.32)式知

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall t\in[-\delta,\delta](\|f(\circledast-t)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{T})}<\frac{\varepsilon}{2}).$$

对现在取定的 ε,δ 而言, 由 P_r 的性质 (iii) 知存在 $\delta'>0$ 使得 $1-\delta'<r<1$ 时有

$$\int_{\delta<|t|\le\frac{1}{2}}P_r(t)dt<\frac{\varepsilon}{4[\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}+1]},$$

故

$$\|P_r*f-f\|_{L^p(\mathbb{T})}<\frac{\varepsilon}{2}\int_{|t|<\delta}P_r(t)dt+2\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\frac{\varepsilon}{4[\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}+1]}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{r\to1^-}\|P_r*f-f\|_{L^p(\mathbb{T})}=0$, 定理证毕. □

实际上, 前面提到的

$$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)z^k+\sum_{k=-\infty}^{-1}\widehat{f}(k)\overline{z}^{|k|}$$

在 $|z|<1$ 上是调和函数, 也就是说 $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})u(x,y)=0(z=x+iy)$. 从形式上来看, 首先需要证明

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}=4\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

这是因为

$$\begin{cases}z=x+iy\\\overline{z}=x-iy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}(z+\overline{z})\\y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})\\\frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})\end{cases}$$

于是根据 u 在 $|z|<1$ 上的一致收敛性 (进而可以交换求和与求导) 可得

$$\Delta u(z)=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)z^k\right)+4\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}\widehat{f}(k)\overline{z}^{|k|}\right)=0$$

因此, 根据 Poisson 核的恒等逼近定理2.9可知(2.30)式所定义的 u 是下述 Dirichlet 问题的解

$$\begin{cases}\Delta u=0,&|z|<1\\u=f,&|z|=1\end{cases}$$

其中 $f\in L^p(\mathbb{T})\wedge p\in[1,\infty)$ 或 $f\in C(\mathbb{T})\wedge p=\infty$. 这一 Dirhchlet 问题中 $u=f$ 指的是 $\lim\limits_{r\to1^-}\|u-f\|_{L^p(\mathbb{T})}=0$.

注 尽管这件事在复变函数的课程中可能已经提过了, 但我们还是要强调: 对于一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的函数 $f(x,y)$, 利用变换 $x=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ 和 $y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$ 将其变成 $z,\overline{z}$ 的函数, 并把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量进行微分, 依此判断 f 是否解析

的这一套方法是不严格的. L.Ahlfors 在 **[LVA]** 中指出: 对于 $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$, 没有方便的极限定义形式, 只能把它们视作关于 z 和 $\bar{z}$ 的符号导数来定义[19]. 因此, 不能严格地把 z 和 $\bar{z}$ 看成独立变量来求微分, 这种方式只能作为理解参考. 复变函数断言 f 解析当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 是在形式上说明了解析函数不依赖于 $\bar{z}$, 而只是 z 的一个函数. 这个形式也说明解析函数真正是一个复变量的函数, 而不仅仅是两个变量的复值函数.

2.7 补充: 高维 Fourier 级数

本节选自 **[LG1]**. 前文讨论的基本都是 $\mathbb{T}$ 上的 Fourier 级数, 亦即一维情况的 Fourier 级数, 本节则讨论 $\mathbb{T}^n$ 上的 Fourier 级数.

类似于一维 Fourier 级数的讨论中引入了一维环 $\mathbb{T}$, 在高维 Fourier 级数的讨论中也需要引入 n 维环 $\mathbb{T}^n$. 从直观的角度来讲, n 维环 $\mathbb{T}^n$ 是对边相等的方体 $[0,1]^n$, 也就是说对于点 $(x_1,\cdots,0,\cdots,x_n),(x_1,\cdots,0,\cdots,x_n)$ 而言, 只要 0 和 1 同为第 k 个坐标, 那么这两个点就是一样的. 更精确的来说, 称 $x,y \in \mathbb{R}^n$ 等价 (记作 $x \equiv y$) 当且仅当 $x-y \in \mathbb{Z}^n$, 其中 $\mathbb{Z}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中全体整数点形成的加群. 显见 $\equiv$ 是一个等价关系, 于是它可以把 $\mathbb{R}^n$ 划分成诸多等价类, n 维环 $\mathbb{T}^n$ 就依照这些等价类定义为 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. 根据抽象代数的知识可知 n 维环依旧是加群, 且其加法单位元为 0. 但因为 0 和 1 在 n 维环中地位是相等的, 为了避免同一个单位元出现两次, 一般都设 n 维环为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n$.

n 维环 $\mathbb{T}^n$ 同样可看作 $\mathbb{C}^n$ 的子集:

$$\{(e^{i2\pi x_1},\cdots,e^{i2\pi x_n}) \in \mathbb{C}^n : (x_1,\cdots,x_n) \in [0,1]^n\}. \tag{2.33}$$

$\mathbb{T}^n$ 上的函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $f(x+m) = f(x)(x \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{Z}^n)$, 这样的函数称为在每个坐标中周期为 1. $\mathbb{T}^n$ 上用于积分的测度是 n 维 Lebesgue 测度在 $\mathbb{T}^n = [0,1]^n$ 上的限制, 这个测度依旧记为 dx, 集合 $A \subset \mathbb{T}^n$ 的测度记为 $|A|$. 根据 Lebesgue 测度的平移不变性与 $\mathbb{T}^n$ 中函数的周期性可知, 对 $\mathbb{T}^n$ 上的全体可积函数 f 都有:

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx = \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} f(x)dx = \int_{[a_1,1+a_1]\times\cdots\times[a_n,1+a_n]} f(x)dx \tag{2.34}$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是任意实数. 从周期性的视角来看, 环上的分部积分不会产生边界项 (也就是形如 $uv|_{x=0}^1$ 的项), 于是对 $\mathbb{T}^n$ 上的任意连续可微函数 f,g 都有:

$$\int_{\mathbb{T}^n} D^\alpha f(x)g(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{T}^n} D^\alpha g(x)f(x)dx.$$

特别注意 $\mathbb{T}^n$ 上的内积与距离和 $\mathbb{R}^n$ 保持一致. 结合这些性质, 下面给出高维 Fourier 系数的定义:

定义 2.3 (高维 Fourier 系数)

对复值函数 $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ 与整数点 $m \in \mathbb{Z}^n$ 而言, 定义

$$\widehat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-i2\pi m\cdot x}dx. \tag{2.35}$$

称 $\widehat{f}(m)$ 为 f 的第 m 个 Fourier 系数. 另外, 对 $\mathbb{T}^n$ 上的有限 Borel 测度 μ 与 $m \in \mathbb{Z}^n$ 而言, μ 的第 m 个 Fourier 系数定义为:

$$\widehat{\mu}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi m\cdot x}d\mu. \tag{2.36}$$

♣

特别注意对 $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\mathbb{Z}^n$ 而言 $\widehat{f}(\xi)$ 无定义, 这是因为函数 $x \mapsto e^{-i2\pi\xi\cdot x}$ 并非周期为 1 的函数, 因此它在 $\mathbb{T}^n$ 上不是良定义的. f 在 $x \in \mathbb{T}^n$ 的高维 Fourier 级数为:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m)e^{i2\pi m\cdot x} \tag{2.37}$$

若设 $(\tau^y f)(x) = f(x-y), \widetilde{f}(x) = f(-x)$, 则容易证明高维 Fourier 系数具有下述性质:

[19] 原文为 These expressions have no convenient definition as limits, but we can nevertheless introduce them as symbolic derivatives with respect to z and $\bar{z}$.

命题 2.11 (高维 Fourier 系数的性质)

设 $f,g \in L^1(\mathbb{T}^n)$, 记 $\widetilde{f}(x) = f(-x), \tau^y f(x) = f(x+y)$, 则对任意 $m,k \in \mathbb{Z}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{T}^n$ 与任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 均有:

(i) 线性性: $(\alpha f + \beta g)^\wedge(m) = \alpha \widehat{f}(m) + \beta \widehat{g}(m)$;

(ii) 与共轭的交换: $\widehat{\overline{f}}(m) = \overline{\widehat{f}(-m)}$;

(iii) 与反射的交换: $\widehat{\widetilde{f}}(m) = \widehat{f}(-m)$;

(iv) 平移性质: $\widehat{\tau^y f}(m) = \widehat{f}(m)e^{-i2\pi m\cdot y}, (e^{i2\pi k\cdot ⊛} f)^\wedge(m) = \widehat{f}(m-k)$;

(v) $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx$;

(vi) $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$;

(vii) 卷积公式: $(f*g)^\wedge(m) = \widehat{f}(m)\widehat{g}(m)$;

(viii) 只要 $f \in C^\alpha(\mathbb{T}^n)$, 就有 $(\partial^\alpha f)^\wedge(m) = (i2\pi m)^\alpha \widehat{f}(m)$.

上述诸性质可以完全套用到一维情形.

注 与一维情况不同的是, 高维 Fourier 系数还有下述张量性质: 对 $\mathbb{T}^{n_1}$ 上的函数 f_1 与 $\mathbb{T}^{n_2}$ 上的函数 f_2 而言, 张量函数

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

是 $\mathbb{T}^{n_1+n_2}$ 上的周期函数, 其 Fourier 系数为

$$\widehat{f_1 \otimes f_2}(m_1,m_2) = \widehat{f_1}(m_1)\widehat{f_2}(m_2), \quad \forall m_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}, m_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}.$$

定义 2.4 (高维三角多项式)

$\mathbb{T}^n$ 上的三角多项式是形如下式的函数:

$$P(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{i2\pi m\cdot x}, \tag{2.38}$$

其中 $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 上的紧支序列. P 的阶数 $\deg P$ 定义为:

$$\deg P = \max_{\substack{q=(q_1,\cdots,q_n)\\ a_q\neq 0}} (|q_1|+\cdots+|q_n|)$$

根据正交性可以说明 $\widehat{P}(m) = a_m$, 由此可以定义 n 维的 Dirichlet 核与 Fejer 核:

$$D_N(x) := \sum_{|m|\leq N} e^{i2\pi m\cdot x},$$

$$F_N^n(x) := \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^N D_k(x_j)\right).$$

仿照一维情况, 可以证明 n 维 Fejer 核的恒等逼近定理:

命题 2.12 (n 维 Fejer 的恒等逼近定理)

若下述情况有其一成立:

(i) $f \in L^p(\mathbb{T}^n)(1 \leq p < \infty)$;

(ii) f 是周期为 1 的连续函数, $p = \infty$,

则

$$\lim_{N\to\infty} \|F_N^n * f - f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} = 0.$$

接下来需要强调 n 维 Fourier 系数的诸恒等式, 这些恒等式在后文将要讲述的 Fourier 变换中均有对应形式:

命题 2.13

设 $f,g\in L^2(\mathbb{T}^n)$, 则有下述命题成立:

(i) Plancherel 恒等式:
$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|\widehat{f}(m)|^2.$$

(ii) Parseval 等式:
$$\int_{\mathbb{T}^n}f(t)\overline{g(t)}dt=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(m)\overline{\widehat{g}(m)}.$$

(iii) 乘积公式: 对任意 $k\in\mathbb{Z}^n$ 均有
$$\widehat{fg}(k)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(m)\widehat{g}(k-m)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(k-m)\widehat{g}(m).$$

证明 (i),(ii) 仿照一维情形即可证明, 下面重点说明 (iii). 因为 $g\in L^2(\mathbb{T}^n)$, 故 $e^{-i2\pi k\cdot x}g(x)\in L^2(\mathbb{T}^n)$, 因此
$$\begin{aligned}\widehat{fg}(k)&=\int_{\mathbb{T}^n}e^{-i2\pi k\cdot x}f(x)g(x)dx=\int_{\mathbb{T}^n}f(x)\overline{e^{i2\pi k\cdot x}\overline{g(x)}}dx\\&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(m)\overline{(e^{i2\pi k\cdot\circledast}\overline{g})^\wedge(m)}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(m)\overline{\widehat{\overline{g}}(m-k)}\\&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(m)\widehat{g}(k-m)\end{aligned}$$
此即 (iii). □

2.8 L^1 函数的 Fourier 变换

定义 2.5 (L^1 函数的 Fourier 变换与逆变换)

给定函数 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 其 Fourier 变换定义为:
$$\mathcal{F}[f](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx \tag{2.39}$$
其 Fourier 逆变换定义为:
$$\mathcal{F}^{-1}[f](x)=\check{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi \tag{2.40}$$
其中 $x\cdot\xi=x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n$.

下面列举 Fourier 变换的一些性质, 其中设 $(\tau^h f)(x)=f(x-h)$:

命题 2.14 (L^1 函数 Fourier 变换的性质)

若 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则:

(i) 线性性: $(\alpha f+\beta g)^\wedge=\alpha\widehat{f}+\beta\widehat{g}$;

(ii) $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, 且 $\widehat{f}$ 连续;

(iii) Riemann-Lebesgue 引理: $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi)=0$;

(iv) 卷积公式: $(f*g)^\wedge=\widehat{f}\cdot\widehat{g}$;

(v) 平移性质: $(\tau_h f)^\wedge(\xi)=\widehat{f}(\xi)e^{-i2\pi h\cdot\xi}$, 且 $(fe^{i2\pi h\cdot\circledast})^\wedge=(\tau^h f)^\wedge(\xi)=\widehat{f}(\xi-h)$;

(vi) 若 $\rho\in O_n$ 是正交变换, 则 $(f(\rho\circledast))^\wedge(\xi)=\widehat{f}(\rho\xi)$;

(vii) 若 $\lambda\in(0,\infty)$, $g(x)=\lambda^{-n}f(\lambda^{-1}x)$, 则 $\widehat{g}(\xi)=\widehat{f}(\lambda\xi)$;

(viii) 若 $\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $(\frac{\partial f}{\partial x_j})^\wedge(\xi)=i2\pi\xi_j\widehat{f}(\xi)$;

(ix) 若 $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $(-i2\pi \circledast_j f)^\wedge(\xi) = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$.

证明 (i)

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)^\wedge &= \int_{\mathbb{R}^n}(\alpha f(x)+\beta g(x))e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\\ &= \alpha\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx+\beta\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\\ &= \alpha\widehat{f}+\beta\widehat{g}.\end{aligned}$$

(ii) 对任意 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 与任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 显见

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i2\pi\xi\cdot x}dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

由此进一步有

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

再证明 $\widehat{f}$ 连续, 对任意 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ 有:

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi+\eta)-\widehat{f}(\xi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)[e^{-i2\pi(\xi+\eta)\cdot x}-e^{-i2\pi x\cdot\xi}]dx\right|\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)||e^{-i2\pi x\cdot\xi}e^{-i\pi x\cdot\eta}||e^{-i\pi x\cdot\eta}-e^{i\pi x\cdot\eta}|dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)||2\sin(\pi x\cdot\eta)|dx\end{aligned}$$

由此及 $2f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 与 Fatou 引理有:

$$\overline{\lim_{\eta\to 0}}|\widehat{f}(\xi+\eta)-\widehat{f}(\xi)| \le 2\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\overline{\lim_{\eta\to 0}}|\sin(\pi x\cdot\eta)|dx = 0$$

又显见 $\underline{\lim}_{\eta\to 0}|\widehat{f}(\xi+\eta)-\widehat{f}(\xi)|\ge 0$, 故 $\lim_{\eta\to 0}|\widehat{f}(\xi+\eta)-\widehat{f}(\xi)| = 0$, 从而 $\lim_{\eta\to 0}\widehat{f}(\xi+\eta)=\widehat{f}(\xi)$, 因此 $\widehat{f}$ 连续.

(iii) 对任意 $\xi\neq 0$, 记 $h=\frac{\xi}{2|\xi|^2}$, 则有

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+h)e^{-i2\pi(x+h)\cdot\xi}dx$$

注意到

$$e^{-i2\pi(x+h)\cdot\xi} = e^{-i2\pi x\cdot\xi}e^{-i2\pi h\cdot\xi} = -e^{-i2\pi x\cdot\xi},$$

因此

$$\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x+h)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx.$$

又因为 $|\xi|\to\infty$ 时有 $|h|\to 0$, 故由积分的平均连续性进一步可得

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)| &= \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}[f(x)-f(x+h)]e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\right|\\ &\le \frac{1}{2}\|f(\circledast)-f(\circledast+h)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\to 0,\quad |h|\to 0\end{aligned}$$

故 $\lim_{|\xi|\to 0}\widehat{f}(\xi)=0$.

(iv) 先证明 $f*g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 在实变函数中已知推论:

推论 2.2

若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则 $f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

因此 $f(x-y)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上可测, 由 Tonelli 定理知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\right|dx &\le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)||g(y)|dydx\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|dx\right]|g(y)|dy\\ &=\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}<\infty.\end{aligned}$$

故 $f*g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且 $f(x-y)g(y)\in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, 从而对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 由 Fubini 定理和积分的平移不变性有

$$\begin{aligned}(f*g)^\wedge(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\right)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)e^{-i2\pi(x-y)\cdot\xi}dx\right)g(y)e^{-i2\pi y\cdot\xi}dy\\ &=\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

(v) 显见 $\tau_h f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 故对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}(\tau_h f)^\wedge(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-h)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i2\pi(x+h)\cdot\xi}dx=e^{-i2\pi h\cdot\xi}\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

又显见 $fe^{i2\pi h\cdot\circledast}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 故对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 有

$$(fe^{i2\pi h\cdot\circledast})^\wedge(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i2\pi(\xi-h)\cdot x}dx=\widehat{f}(\xi-h)$$

此即欲证.

(vi) 回顾: 称 ρ 是正交变换, 如果它是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子, 且对 $\mathbb{R}^n$ 中的一切 x,y 均有 $\rho x\cdot\rho y=x\cdot y$. 若 $\det\rho=1$, 则称 ρ 是一个旋转. 因此正交变换未必是旋转, 因为其行列式可能为-1.

首先证明一个断言: 若 T 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可逆线性变换 (即它所对应的矩阵 T 可逆), 则对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 均有

$$[f(T\circledast)]^\wedge(\xi)=\frac{1}{|\det T|}\widehat{f}(T^{-t}\xi)$$

其中 $T^{-t}:=(T^{-1})^t$. 这是因为在实变函数中有定理

定理 2.10 (重积分换元公式)

若 U,V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 变换 φ 满足:

(i) φ 是一一变换;

(ii) φ 是 C^1 变换;

(iii) φ 的 Jacobi 行列式 $J_\varphi(t)\neq 0(\forall t\in U)$,

且 φ 的逆映射 φ^{-1} 同样满足 (i)-(iii), $f(x)$ 是 V 上的可测函数, 则:

(i) $f[\varphi(t)]$ 是 U 上的可测函数;

(ii) $f\in L^1(V)$ 当且仅当 $f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|$ 在 U 上可积;

(iii) 若 $f\in L^1(V)$ 或 $f(x)\ge 0$, 则

$$\int_V f(x)dx=\int_U f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|dt.$$

♡

故对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 有:

$$\begin{aligned}(f(T\circledast))^\wedge(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^n}f(Tx)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\\ &\overset{(A)}{=}\frac{1}{|\det T|}\int_{\mathbb{R}^n}f(u)e^{-i2\pi(T^{-1}u)\cdot\xi}du\\ &\overset{(B)}{=}\frac{1}{|\det T|}\int_{\mathbb{R}^n}f(u)e^{-i2\pi u\cdot T^{-t}\xi}du\end{aligned}$$

其中 (A) 是换元 $u = Tx$; (B) 是因为若记

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$T^{-t} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

因此对任意 $u = (u_1, \cdots, u_n), \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ 有

$$(T^{-1}u) \cdot \xi = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} t_{ki} u_i \Big) \xi_k = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} t_[ki] \xi_k \Big) u_i = u \cdot (T^{-t}\xi),$$

故所证断言成立.

现在任取 $\rho \in O_n$, 知 $\rho^t \rho = I_n$, 因此 $|\det \rho| = 1, \rho^{-t} = \rho$, 在上述断言中代入 $T = \rho$ 即得欲证.

(vii) 取 $T := \lambda I_n (\lambda \neq 0)$, 则 $|\det T| = \lambda^n, T^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n$, 从而 $T^{-t} = (T^{-1})^t = \frac{1}{\lambda} I_n$, 故由上述断言知对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 有

$$(f(T\circledast))^\wedge(\xi) = \frac{1}{\lambda^n} \widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda}).$$

此即欲证.

在继续证明 (viii),(ix) 之前, 需要先行回忆一下关于绝对连续函数的概念与细节.

定义 2.6 (绝对连续)

设 f 是 $[a,b]$ 上的实值函数. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ 满足 $\sum_{i=1}^m (y_i - x_i) < \delta$ 时, 有 $\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ 成立, 则称 f 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. $[a,b]$ 上全体绝对连续函数构成的空间记作 $AC[a,b]$.

注

- 根据上述定义可见绝对连续函数必一致连续, 一致连续与绝对连续两个定义的差别就在于一个区间与任意有限个区间之间的差别. 一个自然的问题是: 若在绝对连续函数的定义中将有限个区间换成至多可列个区间, 这两个定义是否一致呢? 现在暂时分别用 $AC_{\text{fin}}[a,b]$ 与 $AC_{\text{infin}}[a,b]$ 来表示这两类函数, 事实上有

$$f \in AC_{\text{fin}}[a,b] \Leftrightarrow f \in AC_{\text{infin}}[a,b].$$

一方面, 任取 $f \in AC_{\text{fin}}[a,b]$, 根据定义知对任意 $\varepsilon > 0$ 均存在 $\delta > 0$, 使得对 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的区间 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ 而言, 若 $\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现取 $[a,b]$ 中任意至多可列个互不相交的区间 $\{(x_i, y_i)\}_{i \in I} (I = \{1, \cdots, n\} \text{或} I = \mathbb{N})$ 满足

$$\sum_{i \in I} (y_i - x_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i) < \delta,$$

其中 $I = \{1, \cdots, n\}$ 时 $m = n$, $I = \mathbb{N}$ 时 m 是任意正整数. 于是由 $f \in AC_{\text{fin}}[a,b]$ 知

$$\sum_{i=1}^{m} |f(y_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

若 $I = \{1, \cdots, n\}$, 此时取 $m = n$ 即为欲证. 若 $I = \mathbb{N}$, 则在上式中令 $m \to \infty$ 可知

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(y_i) - f(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

故 $f \in AC_{\text{infin}}[a,b]$. 另一方面, 若 $f \in AC_{\text{infin}}[a,b]$, 则显见 $f \in AC_{\text{fin}}[a,b]$, 故前述等价性成立.

- 在上述证明中稍作修改即可说明: 在 $AC[a,b]$ 的定义中将有限个区间换为可列个区间时, 得到的定义与原定义是等价的. 也就是说, 如果暂时将更换定义后得到的集合记为 $AC_\infty[a,b]$, 则有
$$f \in AC_{\text{fin}}[a,b] \Leftrightarrow f \in AC_{\text{infin}}[a,b] \Leftrightarrow f \in AC_\infty[a,b].$$
事实上, 显然有 $f \in AC_{\text{infin}}[a,b] \Rightarrow f \in AC_\infty[a,b]$. 而若 $f \in AC_\infty[a,b]$, 则根据定义知
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \{(x_i,y_i)\}_{i=1}^\infty \subset [a,b]\left((x_i,y_i)(i=1,2,\cdots)\text{互不相交且}\sum_{i=1}^\infty (y_i-x_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^\infty |f(y_i)-f(x_i)| < \varepsilon\right)$$
现在任取 $[a,b]$ 中有限个互不相交的区间 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$, 若 $\sum_{i=1}^n (y_i-x_i) < \delta$, 则因为 $\delta - \sum_{i=1}^n (y_i-x_i) > 0$, 故必定能找到无穷多个互不相交的区间 $\{(x_i,y_i)\}_{i=n+1}^\infty$ 使得
$$\left[\bigcup_{i=n+1}^\infty (x_i,y_i)\right] \cap \left[\bigcup_{i=1}^n (x_i,y_i)\right] = \varnothing,$$
且
$$\sum_{i=n+1}^\infty (y_i-x_i) < \delta - \sum_{i=1}^n (y_i-x_i)$$
从而 $\sum_{i=1}^\infty (y_i-x_i) < \delta$, 故
$$\sum_{i=1}^n |f(y_i)-f(x_i)| < \sum_{i=1}^\infty |f(y_i)-f(x_i)| < \varepsilon.$$
因此 $f \in AC_{\text{fin}}[a,b]$, 故所证等价性成立.
- 在绝对连续函数的定义中, 不能将"任意有限个互不相交的开区间"替换为"两个互不相交的开区间"或"n 个互不相交的开区间 ($n \in \mathbb{N}$)", 后两者明显等价于函数的一致连续性. 反例如 $[0,1]$ 上的函数
$$f(x) := \begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
可以说明 f 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数, 因此 f 必定不是绝对连续函数, 这是因为闭区间上的绝对连续函数必为有界变差函数[20]. 另一方面, 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{\pi}{x} = 0 = f(0)$, 故 f 在 $[0,1]$ 上连续, 从而它在 $[0,1]$ 上一致连续. 因此 f 满足: 对每个固定的 $n \in \mathbb{N}$ 与任意 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$ 使得对 $[0,1]$ 中的任意 n 个互不相交的开区间 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$ 而言, 只要 $\sum_{i=1}^n (y_i-x_i) < \delta$, 就有 $\sum_{i=1}^n |f(y_i)-f(x_i)| < \varepsilon$. 这说明前述后者的更改与原先的定义是不相容的.
- 下面说明上述蓝色断言. 记 $[a,b]$ 上一致连续函数的全体为 $UC[a,b]$, 并记将绝对连续函数定义中区间的个数改为 2 后得到的集合为 $AC_2[a,b]$, 往证
$$f \in UC[a,b] \Leftrightarrow f \in AC_2[a,b].$$
一方面, 若 $f \in UC[a,b]$, 根据定义知
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x,y) \subset [a,b](y-x < \delta \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2})$$
因此对任意 $(x_1,y_1)\cup(x_2,y_2) \subset [a,b]$, 只要 $(x_1,y_1)\cap(x_2,y_2) = \varnothing$ 且 $y_1-x_1+y_2-x_2 < \delta$, 就有
$$|f(y_1)-f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 且 } |f(y_2)-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
从而
$$|f(y_1)-f(x_1)| + |f(y_2)-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
即 $f \in AC_2[a,b]$.
另一方面, 若 $f \in AC_2[a,b]$, 根据定义知
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x_1,y_1)\cup(x_2,y_2) \subset [a,b]\left((x_1,y_1)\cap(x_2,y_2) = \varnothing \wedge \sum_{i=1}^2 (y_i-x_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^2 |f(y_i)-f(x_i)| < \varepsilon\right)$$

[20]不过有界变差函数未必是绝对连续函数, 它甚至未必是连续函数. 例如单调函数都是有界变差函数, 但单调函数未必连续.

现在对任意 $(x,y)\subset[a,b]$ 且 $y-x<\frac{\delta}{2}$, 因为 $[a,b]\backslash(x,y)\neq\oslash$, 故总存在 $(x_1,y_1)\subset\{[a,b]\backslash(x,y)\}$ 满足 $y_1-x_1<\frac{\delta}{2}$, 于是

$$(x,y)\cup(x_1,y_1)\subset[a,b],\ (x,y)\cap(x_1,y_1)=\oslash \text{ 且 } y-x+y_1-x_1<\delta$$

故根据定义知

$$|f(y)-f(x)|+|f(y_1)-f(x_1)|<\varepsilon,$$

从而

$$|f(y)-f(x)|\leq|f(y)-f(x)|+|f(y_1)-f(x_1)|<\varepsilon,$$

亦即 $f\in AC[a,b]$, 至此即得欲证.

下面回到 (viii),(ix) 的证明.

证明 (viii) 这一命题围绕 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 在何种意义下存在的话题, 可以分为下述两种情形进行讨论:

情形一: $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 是在绝对值意义下定义的. 此时命题为: $f,\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且对 a.e. 给定的 $(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, f 作为 x_j 的函数在 $\mathbb{R}$ 的任意闭区间上绝对连续, 则

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi)=i2\pi\xi_j\widehat{f}(\xi),\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{2.41}$$

特别地, 若 $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $f,\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则(2.41)式成立.

在该情形下, 为了证明结论, 首先需要证明 $\lim\limits_{x_j\to\pm\infty}f(x)=0$. 由于 $\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 记 $x:=(x_1,\cdots,x_n)$, 由 Fubini 定理知对 a.e. 取定的 $x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n$ 而言, 作为 x_j 的函数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R})$. 又由假设知 f 作为 x_j 的函数在 $\mathbb{R}$ 的任一闭区间上绝对连续, 故由微积分基本定理知对任意 $x_j',x_j''\in\mathbb{R}$, 若 $x_j'<x_j''$, 记

$$\begin{aligned}x'&:=(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j',x_{j+1},\cdots,x_n)\\x''&:=(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j'',x_{j+1},\cdots,x_n)\end{aligned}$$

则

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\int_{x_j'}^{x_j''}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx_j\right|\leq\int_{x_j'}^{x_j''}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|dx_j$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R})$, 故 $M\to\infty$ 时有 $\int_{|x_j|>M}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|dx_j\to0$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M_{\varepsilon>0}$ 使得当 $|x_j'|,|x_j''|>M_\varepsilon$ 时有

$$|f(x')-f(x'')|\leq\int_{x_j'}^{x_j''}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|dx_j\leq\int_{|x_j|>M_\varepsilon}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|dx_j<\varepsilon.$$

故由 Cauchy 准则知 $\lim\limits_{x_j\to\pm\infty}$ 存在, 不妨记 $\lim\limits_{x_j\to\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x_j\to-\infty}f(x)=\widetilde{A}$. 现若 $A\neq0$, 则存在 $\widetilde{M}>0$ 使得对任意 $x_j>\widetilde{M}$ 有

$$|f(x)|>\frac{|A|}{2}>0$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx_j\geq\int_{|x_j|>\widetilde{M}}|f(x)|dx_j=\infty$$

但由 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 与 Fubini 定理可知, 对 a.e. 给定的 $(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, 有 $f(x_1,\cdots,x_{j-1},\circledast,x_{j+1},\cdots,x_n)\in L^1(\mathbb{R})$, 矛盾! 故 $A=0$. 同理可证 $\widetilde{A}=0$, 因此 $\lim\limits_{x_j\to\pm\infty}f(x)=0$.

现在对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\\&=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\exp\Big(-i2\pi\sum_{k\neq j}x_k\xi_k\Big)\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-i2\pi x_j\xi_j}dx_j\right)\prod_{k\neq j}dx_k.\end{aligned} \tag{2.42}$$

对于内层积分, 在 $[-k,k](k\in\mathbb{N})$ 上应用分部积分公式, 并令 $k\to\infty$ 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-i2\pi x_j\xi_j}dx_j&=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)(\cos(2\pi x_j\xi_j)-i\sin(2\pi x_j\xi_j))dx_j\\&=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\cos(2\pi x_j\xi_j)dx_j-i\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\sin(2\pi x_j\xi_j)dx_j\\&=\cos(2\pi x_j\xi_j)f(x)|_{x_j=-\infty}^{\infty}+(2\pi\xi_j)\int_{\mathbb{R}}f(x)\sin(2\pi x_j\xi_j)dx_j\\&\quad-i\sin(2\pi x_j\xi_j)f(x)|_{x_j=-\infty}^{\infty}+i(2\pi\xi_j)\int_{\mathbb{R}}f(x)\cos(2\pi x_j\xi_j)dx_j\\&=(i2\pi\xi_j)\int_{\mathbb{R}}f(x)(\cos(2\pi x_j\xi_j)-i\sin(2\pi x_j\xi_j))dx_j\\&=(i2\pi\xi_j)\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-i2\pi x_j\xi_j}dx_j.\end{aligned}$$

将上式代入(2.42)式有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^{\wedge}(\xi)=i2\pi\xi_j\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx=i2\pi\xi_j\widehat{f}(\xi).$$

至此即得(2.41)式, 情形一至此得证.

情形二: $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 是在 L^1 范数意义下定义的. 确切来说, 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 对 a.e. $x\in\mathbb{R}^n$ 记 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x):=g(x)$, 其中 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\lim_{h_j\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h_j}-g(x)\right|dx=0,$$

这里 $h:=(0,\cdots,0,h_j,0,\cdots,0)$. 此时称 f 在 L^1 范数意义下关于变量 x_j 可微, 往证这种情况下依旧有(2.41)式成立. 事实上, 由 L^1 函数 Fourier 变换性质 (v) 知对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 有

$$(f(\circledast+h)-f(\circledast))^{\wedge}(\xi)=(e^{i2\pi h\cdot\xi}-1)\widehat{f}(\xi).$$

由此知

$$\begin{aligned}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\widehat{g}(\xi)-\frac{e^{i2\pi h\cdot\xi}-1}{h_j}\widehat{f}(\xi)\right|&=\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left[g(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h_j}e^{-i2\pi x\cdot\xi}\right]dx\right|\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left|g(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h_j}\right|dx\to 0,\quad h_j\to 0.\end{aligned}$$

故

$$\widehat{g}(\xi)=\lim_{h_j\to 0}\frac{e^{i2\pi h\cdot\xi}-1}{h_j}\widehat{f}(\xi)=i2\pi\xi_j\widehat{f}(\xi).$$

此即(2.41)式. 至此 (viii) 得证.

(ix) 令 $h:=(0,\cdots,0,h_j,0,\cdots,0)$, 对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\frac{1}{h_j}[\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)]=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}\frac{e^{-i2\pi x\cdot h}-1}{h_j}dx.$$

注意到

$$|e^{-i2\pi x\cdot h}-1|=|e^{-i\pi x\cdot h}-e^{i\pi x\cdot h}|=|2\sin(\pi x_jh_j)|\le 2\pi|x_jh_j|,$$

从而

$$\left|f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}\frac{e^{-i2\pi x\cdot h}-1}{h_j}\right|\le 2\pi|x_jf(x)|.$$

又因为 $x_jf\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 故由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{f}}{\partial x_j}(\xi)=\lim_{h_j\to 0}\frac{\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)}{h_j}&=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}\lim_{h_j\to 0}\frac{e^{-i2\pi x\cdot h}-1}{h_j}dx\\&=\int_{\mathbb{R}^n}(-i2\pi x_j)f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx=(-i2\pi\circledast_j f)^{\wedge}(\xi).\end{aligned}$$

(ix) 至此得证. □

另外, 利用数学归纳法可以将 (viii),(ix) 强化为:

命题 2.15 (L^1 函数 Fourier 变换与多重偏导的关系)

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

(viii)′ 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ 是多重指标, $|\alpha| = k \in \mathbb{N}$. 若在 $|\beta| \le |\alpha|$ 时总有 $D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = (i2\pi\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$;

(ix)′ 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ 是多重指标, $|\alpha| = k \in \mathbb{N}$. 若在 $|\beta| \le |\alpha|$ 时总有 $x^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $((-i2\pi \circledast)^\alpha f)^\wedge(\xi) = (D^\alpha \widehat{f})(\xi)$.

前文讨论 Fourier 级数时, 我们曾多次用到了 $L^p(\mathbb{T})$ 的下述包含关系, 但在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的背景下这一包含关系不再成立:

命题 2.16

对任意 $p \in (1, \infty]$ 均有 $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, 但 $L^p(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

证明 显见 $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. 对任意 $p \in (1, \infty]$, 任取 $f \in L^p(\mathbb{T})$, 有:

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} := \int_{\mathbb{T}} |f(x)| dx \le \left[\int_{\mathbb{T}} dx\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} = (2\pi)^{\frac{1}{p'}} \|f_{L^p(\mathbb{T})} < \infty,$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 因此 $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$.

对于 $L^p(\mathbb{R}^n)$, 令

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^n}, & |x| > 1 \\ 0, & 0 \le |x| \le 1 \end{cases}$$

当 $p \in (1, \infty)$ 时, 有

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{np}} dx = \nu_{n-1} \int_1^\infty r^{n(1-p)-1} dr = \frac{\nu_{n-1}}{n(p-1)} < \infty$$

其中 ν_{n-1} 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的测度, 从而 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

当 $p = \infty$ 时, $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1$, 故 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 而

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^n} = \nu_{n-1} \int_1^\infty \frac{dr}{r} = \infty$$

故 $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. 因此 $L^p(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

注 事实上, 就算 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f}$ 也未必是 L^1 函数. 例如对任意 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$f(x) := \begin{cases} e^{-2\pi x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

则

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_0^\infty e^{-2\pi x} dx = -\frac{1}{2\pi} e^{-2\pi x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}.$$

故 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 但对任意 $\xi \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx = \int_0^\infty e^{-2\pi x} e^{-i2\pi x \xi} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-2\pi x} \cos(2\pi x \xi) dx - i \int_0^\infty e^{-2\pi x} \sin(2\pi x \xi) dx \\ &\overset{(A)}{=} \frac{1}{2\pi(1+\xi^2)} - i \frac{\xi}{2\pi(1+\xi^2)} = \frac{1}{2\pi(1+i\xi)} \end{aligned}$$

其中 (A) 是因为对 $\xi \in \mathbb{R}$, 知

$$
\begin{aligned}
I(\xi) := \int_0^\infty e^{-2\pi x}\cos(2\pi x\xi)dx &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \cos(2\pi x\xi)de^{-2\pi x} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x\xi)e^{-2\pi x}|_{x=0}^\infty - \int_0^\infty e^{-2\pi x}\xi\sin(2\pi x\xi)dx \\
&= \frac{1}{2\pi} + \frac{\xi}{2\pi}\int_0^\infty \sin(2\pi x\xi)de^{-2\pi x} \\
&= \frac{1}{2\pi} + \frac{\xi}{2\pi}e^{-2\pi x}\sin(2\pi x\xi)|_{x=0}^\infty - \xi^2\int_0^\infty e^{-2\pi x}\cos(2\pi x\xi)dx \\
&= \frac{1}{2\pi} - \xi^2 I(\xi)
\end{aligned}
$$

故 $I(\xi) = \frac{1}{2\pi(1+\xi^2)}$, 类似可证 $\int_0^\infty e^{-2\pi x}\sin(2\pi x\xi)dx = \frac{\xi}{2\pi(1+\xi^2)}$. 至此即得

$$
|\widehat{f}(\xi)| = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\xi^2}} \notin L^1(\mathbb{R}).
$$

综合上述讨论, 可以发现(2.39)式实际上并没有给出 $L^p(\mathbb{R}^n)(p > 1)$ 中函数 Fourier 变换的定义, 因为给出 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的定义并不意味着 $L^p(p > 1)$ 函数的 Fourier 变换在该定义下依旧合法. 同理, Fourier 反演

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi
$$

在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上也不是良定义的, 因为 L^1 函数 Fourier 变换的性质2.14(ii), (iii) 就是我们知道的所有关于 $\widehat{f}$ 的信息了, 而它们并不能推出 $\widehat{f}$ 可积 (事实上 $\widehat{f}$ 一般不可积). 不过, 一旦知道了 $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 就能得到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 反演定理:

命题 2.17 ($L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 反演)

若 $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx, \tag{2.43}
$$

且

$$
f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n.
$$

这一命题的证明可逐字逐句地参考 Schwartz 空间中 Fourier 反演2.14相关部分的证明, 这里就省略了. □

另外, 围绕 $\widehat{f}$ 的可积性问题, 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中还有下述命题:

命题 2.18 (L^1 函数 Fourier 变换的可积性)

若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $x = 0$ 连续且 $\widehat{f} \geq 0$, 则 $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且 $f(0) = \|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

证明 根据(2.43)式与引理2.12, 代入 $g(x) = e^{-\pi|\varepsilon x|^2}$ 并利用恒等逼近定理3.1可得

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{-\pi|\varepsilon x|^2}dx = f(0)
$$

现由 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 知 $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 因此由 Lebesgue 控制收敛定理即得

$$
f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) = \|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
$$

□

在可积性之外, 利用 (iii),(viii)' 可以得到函数光滑性与其 Fourier 变换衰减性的关系:

推论 2.3 (函数光滑性与其 Fourier 变换衰减性的联系)

若 $f \in C^k(\mathbb{R}^n)(k \in \mathbb{N})$, 且 $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)(0 \leq |\alpha| \leq k)$, 则 $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = o(|\xi|^{-k})$, 亦即 $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} |\xi|^k\widehat{f}(\xi) = 0$.

证明 由 L^1 函数 Fourier 变换的性质2.14(iii),(viii)' 知

$$\lim_{|\xi|\to\infty}(D^\alpha f)^\wedge(\xi)=\lim_{|\xi|\to\infty}(i2\pi\xi)^\alpha\widehat{f}(\xi)=0\Rightarrow\lim_{|\xi|\to\infty}\xi^\alpha\widehat{f}(\xi)=0,\quad 0\le|\alpha|\le k$$

由(2.48)式进而可得

$$\lim_{|\xi|\to\infty}|\xi|^k\widehat{f}(\xi)=0$$

推论即证. □

相反地, 利用 (ix)' 可以直接得到下述函数衰减性与其 Fourier 变换光滑性的联系:

推论 2.4 (函数衰减性与其 Fourier 变换光滑性的联系)

若 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 且 $\circledast^\alpha f\in L^1(\mathbb{R}^n)(0\le|\alpha|\le k,k\in\mathbb{N})$, 则 $\widehat{f}\in C^k(\mathbb{R}^n)$.

结合推论2.3,2.4便可以得到下文将要介绍的 Schwartz 空间的引入动机: 如果希望函数的 Fourier 变换足够衰减 (进而可积性足够强), 就需要函数本身足够光滑, 因此我们自然希望考虑 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$(或其子空间) 上的函数. 又因为我们想要让 Fourier 变换也变得光滑, 故需要在 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上加上某种衰减性, 这便是 Schwartz 空间.

2.9 Schwartz 空间

2.9.1 Schwartz 空间的定义与其上的拓扑

从前文的讨论中可以发现 Fourier 变换和 Fourier 逆变换的定义并不能很好地从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 延拓到 $L^p(\mathbb{R}^n)(p>1)$ 上去, 这便启发我们需要找到一个空间, 使得这个空间上的 Fourier 变换定义可以延拓到 $L^p(\mathbb{R}^n)(p>1)$ 空间中. Schwartz 空间正是这样的空间.

定义 2.7 (Schwartz 空间)

称函数 f 是 Schwartz 函数, 记作 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 如果它无穷可微, 且它的任意阶导数在无穷远处都是速降的, 也就是说对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta f(x)|=\rho_{\alpha,\beta}(f)<\infty.$$

其中 $\{\rho_{\alpha,\beta}(f)\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ 称为 f 的 Schwartz 半范族.

注 从定义出发可以直接验证下面几个命题:

命题 2.19 (Schwartz 函数背景空间的乘积性质)

若 $f_1\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, 则 $m+n$ 元函数 $f_1(x_1,\cdots,x_n)f_2(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ 中.

证明 根据定义知

$$\forall\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{N}^n(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^{\alpha_1}D^{\beta_1}f_1(x)|<\infty)$$

$$\forall\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{N}^m(\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|x^{\alpha_2}D^{\beta_2}f_2(x)|<\infty)$$

现任取 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{n+m}$, 知必存在 $\alpha_1=(\alpha_1^1,\cdots,\alpha_1^n),\beta_1=(\beta_1^1,\cdots,\beta_1^n)\in\mathbb{N}^n,\alpha_2=(\alpha_2^1,\cdots,\alpha_2^m),\beta_2=(\beta_2^1,\cdots,\beta_2^m)\in\mathbb{N}^m$ 使得 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\beta=(\beta_1,\beta_2)$, 于是:

$$\begin{aligned}&|x^\alpha D^\beta f_1(x_1,\cdots,x_n)f_2(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})|\\=&|x_1^{\alpha_1^1}\cdots x_n^{\alpha_1^n}x_{n+1}^{\alpha_2^1}\cdots x_{n+m}^{\alpha_2^m}\partial_{x_1}^{\beta_1^1}\cdots\partial_{x_n}^{\beta_1^n}\partial_{x_{n+1}}^{\beta_2^1}\cdots\partial_{x_{n+m}}^{\beta_2^m}f_1(x_1,\cdots,x_n)f_2(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})|\\=&|(x_1^{\alpha_1^1}\cdots x_n^{\alpha_1^n}\partial_{x_1}^{\beta_1^1}\cdots\partial_{x_n}^{\beta_1^n}f_1(x_1,\cdots,x_n))(x_{n+1}^{\alpha_2^1}\cdots x_{n+m}^{\alpha_2^m}\partial_{x_{n+1}}^{\beta_2^1}\cdots\partial_{x_{n+m}}^{\beta_2^m}f_2(x_{n+1},\cdots,x_{n+m}))|\\=&\rho_{\alpha_1,\beta_1}(f_1)\rho_{\alpha_2,\beta_2}(f_2)<\infty\end{aligned}$$

故 $f_1(x_1,\cdots,x_n)f_2(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, 命题得证. □

Terence Tao 的讲义Introduction, estimates, L^p theory, interpolation中提到了乘积性质2.19的一个应用: 张量幂技巧[21], 但因为讲义本身没有对该技巧作深入介绍, 这里也就点到为止.

命题 2.20 (Schwartz 空间对多项式乘积的封闭性)

若 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $P(x)$ 是 n 元多项式, 则 $P(x)f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

这由 Leibniz 法则即证. □

命题 2.21 (Schwartz 空间对求导运算的封闭性)

若 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 是多重指标, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $D^\alpha f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

这由定义立得. □

命题 2.22 (Schwartz 函数的等价刻画)

$f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 Schwartz 函数当且仅当对任意正整数 N 与任意多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 均有

$$|(D^\alpha f)(x)|\lesssim_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N}$$

其中 $X\lesssim_{\alpha,N}Y$ 表示存在仅依赖于 α,N 的常数 $C_{\alpha,N}$ 使得 $X\le C_{\alpha,N}Y$. 对 $(1+|x|)^N|D^\alpha f(x)|$ 考虑二项式定理与 Schwartz 函数的定义即证命题. □

特别注意无穷可微紧支函数空间[22]$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subsetneq\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 这是因为一方面对任意 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 根据定义知存在 $R>0$ 使得 $\operatorname{supp}f\subset\overline{B(0,R)}$. 又对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, $x^\alpha D^\beta f(x)$ 依旧是支在 $\overline{B(0,R)}$ 中的紧支无穷可微函数, 故存在 $x_0\in\overline{B(0,R)}$ 使得

$$\rho_{\alpha,\beta}(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta f(x)|=\sup_{x\in\overline{B(0,R)}}|x^\alpha D^\beta f(x)|=|x_0^\alpha D^\beta f(x_0)|<\infty$$

其中最后一步是因为紧集上的连续函数必能取到最值. 因此 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 另一方面, 对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 若令 $f(x):=e^{-|x|^2}$, 则 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 无紧支集, 因此 $f\notin C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 下证 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 注意到对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有

$$e^{-|x|^2}=e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$$

现对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, 易知 $x^\alpha D^\beta e^{-|x|^2}$ 可写成形如

$$Cx_1^{\alpha_1+\widetilde{\beta}_1}\cdots x_n^{\alpha_n+\widetilde{\beta}_n}e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}=C\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i+\widetilde{\beta}_i}e^{-x_i^2}$$

的有限项之和, 其中 C 为常数, $\widetilde{\beta}_i\in\{0,\cdots,\beta_i\}(i=1,\cdots,n)$. 因为 $\lim\limits_{|x_i|\to\infty}x_i^{\alpha_i+\beta_i}e^{-x_i^2}=0$, 故

$$\sup_{x_i\in\mathbb{R}}|x_i^{\alpha_i+\beta_i}e^{-x_i^2}|<\infty$$

从而 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta(e^{-|x|^2})|<\infty$, 因此 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

下面说明 Schwartz 空间定义2.7中给出的 $\{\rho_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ 确为半范族, 更进一步可以证明它在 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中实际上是范数族:

命题 2.23 (Schwartz 半范是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的范数)

序列 $\{\rho_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ 构成 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的可数范数族.

证明 显见 $\{\rho_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ 是可数的, 下面验证对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 而言, $\rho_{\alpha,\beta}$ 都是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的范数. 注意非负性, 齐次性和三角不等式都是显见的, 于是只需证明 $\rho_{\alpha,\beta}(f)=0\Rightarrow f=0$. 为此分两种情况:

[21] 原文为 tensor power trick.

[22] $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 当然是非空的, 例如取函数 $f(x)=\chi_{|x|<1}e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}$, 则 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

若 $|\beta|=0$, 此时令

$$E=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n: x_1\neq 0,\cdots,x_n\neq 0\},$$
$$F=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\exists k\in\{1,\cdots,n\}(x_k=0)\}.$$

显见 $\overline{E}=\mathbb{R}^n, E\cap F=\varnothing$, 且 $E\cup F=\mathbb{R}^n$. 此时由 $\rho_{\alpha,\mathbf{0}}(f)=0$ 知对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有 $|x^\alpha||f(x)|=0$, 从而对任意 $x\in E$ 有 $f(x)=0$. 由这一事实, $\overline{E}=\mathbb{R}^n$ 与 f 的连续性知对任意 $x\in F$ 有 $f(x)=0$, 因此 $f=\theta$. 故在此情形下结论成立.

若 $|\beta|\neq 0$, 此时令 $g:=D^\beta f$, 则 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 且 $\rho_{\alpha,\beta}(f)=\rho_{\alpha,\mathbf{0}}(g)$. 根据前述讨论可知 $g=\theta$, 下证 $f=\theta$. 为此只需证明下述断言: 若 $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 且存在 $j_0\in\{1,\cdots,n\}$ 使得 $\frac{\partial h}{\partial x_j}=\theta$, 则 $h=\theta$.

为证断言, 不妨设 $j_0=1$, 则对任意 $x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$ 均存在常数 $C_{(x_2,\cdots,x_n)}$ 使得对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $h(x_1,\cdots,x_n)=C_{(x_2,\cdots,x_n)}$. 又因为 $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故

$$|C_{(x_2,\cdots,x_n)}|=|h(x_1,\cdots,x_n)|=\frac{|x_1||h(x_1,\cdots,x_n)|}{|x_1|}\leq\frac{\rho_{(1,0,\cdots,0),\mathbf{0}}(h)}{|x_1|}\to 0,\quad |x_1|\to\infty$$

于是 $C(x_2,\cdots,x_n)=0$, 因此 $h=\theta$, 断言成立. 由此可知在这一情形下也有 $f=\theta$.

结合上述两种情况即得 $\rho_{\alpha,\beta}$ 是范数. □

注 这里可能会产生一些疑惑: 诸如 **[LG1]**, **[HJR]** 等教科书均把 $\rho_{\alpha,\beta}$ 称为 Schwartz 半范, 根据这里的结论为什么不把它们叫做 Schwartz 范数? 这个问题实际上在网站MathStackExchange上出现过[23], 回答者提到" 把它称为半范数的原因可能是因为局部凸空间的一般理论就是建立在半范数之上的."

从 Schwartz 可数范数族出发, 可以诱导 Schwartz 空间上的拓扑, 使其成为局部凸拓扑空间. 事实上, 我们不仅仅可以说明 Schwartz 范数族诱导的拓扑可以定义 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的收敛, 还能更进一步: 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上可以定义使其完备的度量!

命题 2.24 ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛)

范数族 $\{\rho_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ 可诱导 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量 d, 使得 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),d)$ 完备, 且若 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\phi_k\xrightarrow{d}0(k\to\infty)\Leftrightarrow\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n(\rho_{\alpha,\beta}(\phi_k)\to 0(k\to\infty)).$$

证明 任取 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, 对任意 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义 $d_{\alpha,\beta}(f,g)=\rho_{\alpha,\beta}(f-g)$, 则显见 $d_{\alpha,\beta}$ 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量. 现在将 $\{d_{\alpha,\beta}:\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n\}$ 按合适方式排列, 记作 $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 对任意 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 令

$$d(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}$$

下面说明 d 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量:

若 $d(f,g)=0\Rightarrow\rho_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(f,g)=0\Rightarrow f=g$. 而若 $f=g$, 则因为 $\rho_{\alpha,\beta}$ 是范数, 故 $d(f,g)=0$. 显见 $d(f,g)\geq 0$ 且 $d(f,g)=d(g,f)$, 至此正定性和对称性得证.

对于三角不等式, 任取 $f,g,h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 因为对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 来说 $\rho_{\alpha,\beta}$ 均为范数, 故对任意 $n\in\mathbb{N}$ 来说 d_n 均满足三角不等式. 又因为函数 $\frac{x}{1+x}$ 在 $[0,\infty)$ 上递增, 故

$$\begin{aligned}
d(f,g)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}\\
&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,h)+d_n(h,g)}{1+d_n(f,h)+d_n(h,g)}\\
&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,h)}{1+d_n(f,h)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(h,g)}{1+d_n(h,g)}\\
&=d(f,h)+d(h,g)
\end{aligned}$$

至此即得 d 满足三角不等式, 因而 d 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的度量.

现在断言: 对任意 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 当 $k\to\infty$ 时, $d(f_k,g)\to 0\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}(d_n(f_k,g)\to 0)$.

[23] https://math.stackexchange.com/questions/709200/why-the-following-is-a-seminorm-rather-than-a-norm

事实上, 若 $d(f_k,g)\to 0(k\to\infty)$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$\frac{d_n(f_k,g)}{1+d_n(f_k,g)}\to 0,\quad k\to\infty.$$

从而

$$1-\frac{1}{1+d_n(f_k,g)}\to 0(k\to\infty)\Leftrightarrow d_n(f_k,g)\to 0(k\to\infty)$$

反之, $\forall n\in\mathbb{N}(d_n(f_k,g)\to 0(k\to\infty))$, 根据 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的收敛性可知

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}\right)\tag{2.44}$$

又因为对任意 $n\in\{1,\cdots,N\}$, 当 $k\to\infty$ 时均有 $d_n(f_k,g)\to 0$, 故

$$\exists k_0\in\mathbb{N}(k>k_0\Rightarrow d_n(f_k,g)<\varepsilon)\tag{2.45}$$

结合(2.44),(2.44)两式知对任意 $k>k_0$, 有:

$$d(f_k,g)\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}d_n(f_k,g)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\varepsilon\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}+\varepsilon<2\varepsilon.$$

故所证断言成立. 由此断言进一步知

$$d(f_k,g)\to 0(k\to\infty)\Leftrightarrow\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n(\rho_{\alpha,\beta}(f_k-g)\to 0(k\to\infty)).$$

下证 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),d)$ 完备. 设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),d)$ 中的基本列, 则由前述断言知对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 而言, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 关于 $\rho_{\alpha,\beta}$ 也是基本列, 即

$$\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f_j)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha(D^\beta f_k(x)-D^\beta f_j(x))|\to 0,\quad k,j\to\infty.\tag{2.46}$$

特别地, 首先说明若 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset C(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_k(x)-f_j(x)|\to 0,\quad k,j\to\infty,\tag{2.47}$$

则存在 $f\in C(\mathbb{R}^n)$ 使得 $f_k\rightrightarrows f(k\to\infty)$. 这是因为由(2.47)式可知对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有 $|f_k(x)-f_j(x)|\to 0(k,j\to\infty)$, 因此 $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的基本列, 根据 $\mathbb{C}$ 的完备性可知 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$ 存在. 现对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 定义 $f(x):=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$, 往证

(i) $f_k\rightrightarrows f(k\to\infty)$;

(ii) f 连续.

对于 (i), 由(2.47)式知

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall k,j>N(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_k(x)-f_j(x)|<\varepsilon).$$

于是对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有

$$|f_k(x)-f_j(x)|<\varepsilon,$$

在上式中令 $k\to\infty$ 可得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$|f(x)-f_j(x)|\le\varepsilon.$$

由此进一步知

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall j<N(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)-f_j(x)|\le\varepsilon)$$

此即 $f_k\rightrightarrows f(k\to\infty)$, (i) 得证.

对于 (ii), 因为 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset C(\mathbb{R}^n)$, 而连续函数列的一致收敛极限必为连续函数, 故 $f\in C(\mathbb{R}^n)$, (ii) 得证. 至此即知断言成立.

在(2.46)式中取 $\alpha=\mathbf{0}$ 或 $\beta=\mathbf{0}$ 可知 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 与 $\{D^\beta f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 都在 $\mathbb{R}^n$ 中一致收敛, 因此由上述断言可知存在 $f\in C(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 一致收敛到 f. 下面说明 $\{D^\beta f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 $D^\beta f$.

事实上, 当 $\beta=\mathbf{0}$ 时, 欲证显然成立. 现设 $|\beta|=m$ 时 $D^\beta f_k\rightrightarrows D^\beta f(k\to\infty)$, 下证 $|\beta|=m+1$ 时仍有

$D^\beta f_k \rightrightarrows D^\beta f(k\to\infty)$. 此时存在 $\alpha,\gamma\in\mathbb{N}^n$ 使得 $|\alpha|=m,|\gamma|=1$ 且 $\beta=\alpha+\gamma$, 于是 $D^\beta f_k=D^\gamma D^\alpha f_k$, 由归纳假设知

$$D^\alpha f_k \rightrightarrows D^\alpha f,\quad k\to\infty.$$

记 $D^\beta f_k \rightrightarrows g(k\to\infty)$, 下证 $f=D^\beta f$. 不失一般性, 设 $\gamma:=(1,0,\cdots,0)$, 因为 $D^\alpha f_k\in C(\mathbb{R}^n)$, 故对任意 $x_1\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1} D^\beta f_k(t,x_2,\cdots,x_n)dt &= \int_0^{x_1} D^\gamma D^\alpha f_k(t,x_2,\cdots,x_n)dt\\ &= D^\alpha f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)-D^\alpha f_k(0,x_2,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

在上式两端令 $k\to\infty$, 由 $D^\beta f_k\rightrightarrows g$ 与 $D^\alpha f_k\rightrightarrows D^\alpha f$ 可知对任意 $x_1\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_0^{x_1} g(t,x_2,\cdots,x_n)dt = D^\alpha f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-D^\alpha f(0,x_2,\cdots,x_n).$$

显见 $g\in C(\mathbb{R}^n)$, 故 $D^\gamma D^\alpha f$ 存在, 因而在上式两端同时关于 x_1 求偏导得

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=D^\gamma D^\alpha f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=D^\beta f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

故 $g=D^\beta f$. 因此当 $|\beta|=m+1$ 时仍有 $D^\beta f_k\rightrightarrows D^\beta f(k\to\infty)$, 故对任意 $\beta\in\mathbb{N}^n$ 均有 $D^\beta f_k\rightrightarrows D^\beta f(k\to\infty)$. 这说明对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, 由 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为基本列知

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall k,j>N(\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f_j)<\varepsilon).$$

从而当 $k>N$ 时有

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha[D^\beta f_k(x)-D^\beta f(x)]|\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\lim_{\substack{j\to\infty\\ j\ge N}}|x^\alpha[D^\beta f_k(x)-D^\beta f_j(x)]|\\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\lim_{\substack{j\to\infty\\ j\ge N}}\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f_j)=\lim_{\substack{j\to\infty\\ j\ge N}}\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f_j)\le\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f)=0$$

再由 α,β 的任意性可知 $\lim\limits_{k\to\infty}d(f_k,f)=0$, 故 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),d)$ 完备.

注 命题2.24实际上定义了 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 收敛的等价表述: 设 $f_k,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(k=1,2,\cdots)$, 则在谈及"$f_k$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到 f"(记作 $f_k\to f(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$) 时, 可以同时指代下述两个等价命题:

- $\lim\limits_{k\to\infty}d(f_k,f)=0$, 其中 d 是命题2.24中诱导得到的度量;
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n(\lim\limits_{k\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f)=0)$.

另外, **[LG1]** 中给出了 Schwartz 空间中的收敛与 L^p 中的收敛之间的比较. 在介绍这个命题之前, 首先需要给出一个事实:

$$\forall k\in\mathbb{N}\forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\left(|x|^k\le C_{n,k}\sum_{|\beta|=k}|x^\beta|\right)\tag{2.48}$$

其中 $C_{n,k}$ 是仅依赖于 n,k 的常数. (2.48)式成立是因为若设 $|x|=1$, 则考虑 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)=\sum_{|\beta|=k}|x^\beta|$. 显见 f 连续且在 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上非零, 故其在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上有非零最小值, 取该最小值为 $\frac{1}{C_{n,k}}$ 即可. 对 $|x|\ne1$ 的情况, 把 x 换成 $\frac{x}{|x|}$ 即得结果.

下述命题表明 Schwartz 空间中的收敛比任何 $L^p(0<p\le\infty)$ 中的收敛都要强.

补充命题 2.1

设 $f_k,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(k=1,2,\cdots)$, 若 $f_k\to f(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 则对任意 $0<p\le\infty$ 均有 $f_k\to f(L^p(\mathbb{R}^n))$. 另存在 $C_{p,n}>0$ 满足

$$\forall\beta\in\mathbb{N}^n\left(\|D^\beta f\|_{L^p}\le C_{p,n}\sum_{|\alpha|\le[\frac{n+1}{p}]+1}\rho_{\alpha,\beta}(f)\right)\tag{2.49}$$

其中 f 保证右式收敛.

证明 记 v_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积, 知当 $p<\infty$ 时有:

$$\begin{aligned}
\|D^\beta f\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|D^\beta f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \left[\int_{|x|\le 1}|D^\beta f(x)|^p dx+\int_{|x|>1}|x|^{n+1}|D^\beta f(x)|^p\cdot\frac{1}{|x|^{n+1}}dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\le \left[v_n\|D^\beta f\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\left(\sup_{|x|>1}|x|^{n+1}|D^\beta f(x)|^p\right)\int_{|x|>1}|x|^{-(n+1)}dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\le C_{p,n}\left(\|D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\sup_{|x|>1}(|x|^{[\frac{n+1}{p}]+1}|D^\beta f(x)|)\right).
\end{aligned}$$

$p=\infty$ 时上式的推导基于三角不等式, 从而上式结论依旧成立. 现由(2.48)式知

$$\sup_{|x|>1}(|x|^{[\frac{n+1}{p}]+1}|D^\beta f(x)|)\lesssim\sum_{|\alpha|=[\frac{n+1}{p}]+1}\sup_{|x|>1}(|x^\alpha D^\beta f(x)|)\le\sum_{|\alpha|\le[\frac{n+1}{p}]+1}\rho_{\alpha,\beta}(f)$$

其中 $X\lesssim Y$ 表示存在与 X,Y 无关的常数 C 使得 $X\le CY$. 至此即得(2.49)式, 因而 $\mathcal{S}$ 中的收敛强于 L^p 中的收敛. □

在实践中, 特别会用到下面几条 Schwartz 意义下收敛的例子:

例 2.1(差分到导数的收敛性) 若 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e_j 表示第 j 个元素为 1, 其余元素为 0 的单位向量, 则

$$\frac{1}{h}(f(x+he_j)-f(x))\to\partial_j f(x)(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),\quad h\to 0.$$

这是因为对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 有:

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{h}(f(\circledast+he_j)-f(\circledast))-\partial_j f\right)&=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta\left(\frac{1}{h}(f(x+he_j)-f(x))-\partial_j f(x)\right)\right|\\
&=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta(\partial_j(\xi)-\partial_j(x))|\le\rho_{\alpha,\beta+e_j}(f)|h|\to 0,\quad h\to 0.
\end{aligned}$$

□

例 2.2(函数的光滑截断到函数的收敛性) 若 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足在原点的某邻域附近恒有 $\varphi(x)=1$, 记 $\varphi_k(x)=\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$, 则

$$\varphi_k f\to f(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),\quad k\to\infty.$$

这是因为不妨记 $\operatorname{supp}\varphi\subset B$, $kB=\{kx:x\in B\}$, 则对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 有:

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k f-f)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^\alpha D^\beta((\varphi_k(x)-1)f(x))|=\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus kB}|x^\alpha D^\beta f(x)|\to 0,\quad k\to\infty.$$

□

例 2.3 若 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足在原点的某邻域附近恒有 $\varphi(x)=1$, 记 $\varphi_k(x)=\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$, 则

$$\varphi_k(\varphi_k f)^\wedge\to\widehat{f}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),\quad k\to\infty.$$

这是因为已知函数的光滑截断在 Schwartz 意义下收敛到函数本身 (例2.2), 故 $\varphi_k f\to f(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 由 Fourier 变换的自同胚性**??**可知 $(\varphi_k f)^\wedge\to\widehat{f}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 因此

$$\varphi_k(\varphi_k f)^\wedge\to\varphi_k\widehat{f}\to\widehat{f}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),\quad k\to\infty.$$

□

不同于命题2.24, **[ST4]** 中给出了 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 拓扑的另一种定义方法: 任取 $N\in\mathbb{N}$, 对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 令

$$\rho_N(\varphi):=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|\alpha|,|\beta|\le N}}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|,$$

对于 $\varphi_k,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(k\in\mathbb{N})$, 称 $\varphi_k\to\varphi(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 如果对任意 $n\in\mathbb{N}$ 均有 $\rho_n(\varphi_k-\varphi)\to 0(k\to\infty)$. 这一拓扑实际上与先前定义的拓扑是等价的, 此即下述命题:

命题 2.25

对任意 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 而言有:

$$\forall N\in\mathbb{N}(\rho_N(\varphi_k)\to 0(k\to\infty))\Leftrightarrow\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n(\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k)\to 0(k\to\infty)). \tag{2.50}$$

证明 当 $\forall N\in\mathbb{N}(\rho_N(\varphi_k)\to 0(k\to\infty))$ 时, 任取 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, 若 $\alpha=\mathbf{0}=\beta$, 则令 $N=1$, 否则令 $N:=\max(|\alpha|,|\beta|)$, 显见 $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k)\le\rho_N(\varphi_k)$, 因此 $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k)\to 0(k\to\infty)$.

当 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n(\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k)\to 0(k\to\infty))$ 时, 任取 $N\in\mathbb{N}$, 显见

$$\rho_N(\varphi_k)=\max\{\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k):|\alpha|\le N,|\beta|\le N\}$$

注意到上右式至多有 $(N+1)^{2n}$ 项, 因此 $\rho_N(\varphi_k)\to 0(k\to\infty)$. 至此即得欲证. □

注 容易证明 $\{\rho_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 同样是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的可数范数族.

可惜的是, 虽然我们已经说明了 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上用于诱导拓扑的 Schwartz 半范族实际上是范数族, 且确实存在度量 d 使得 d 诱导的拓扑与 Schwartz 半范族诱导的拓扑相容, 但 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上并不存在某个范数 $\|\circledast\|$, 使得该范数诱导的拓扑与 Schwartz 半范族诱导的拓扑相容. 此即下述定理:

定理 2.11

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是不可赋范的.

证明 往证不存在范数 $\|\circledast\|$ 使得

$$\forall\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\|\varphi_k\|\to 0(k\to\infty))\Leftrightarrow\forall N\in\mathbb{N}(\rho_N(\varphi_k)\to 0(k\to\infty)).$$

考虑反证法, 若存在这样的范数 $\|\circledast\|$, 则下述两条断言成立:

(i) 存在 $M\in\mathbb{N}$ 及常数 $C_M\in(0,\infty)$ 使得对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有 $\|\varphi\|\le C_M\rho_M(\varphi)$.

(ii) 对任意 $N\in\mathbb{N}$, 存在常数 $C_N\in(0,\infty)$ 使得对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有 $\rho_N(\varphi)\le C_N\|\varphi\|$.

对于断言 (i), 若该断言不成立, 则对任意 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $\varphi_k\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|\varphi_k\|>k\rho_k(\varphi_k)$, 因此 $\varphi_k\not\equiv 0$(否则 $\|\varphi_k\|=0\le k\rho_k(\varphi_k)$, 矛盾). 令 $\widetilde{\varphi}_k:=\frac{\varphi_k}{\rho_k(\varphi_k)}$, 则 $\|\widetilde{\varphi}_k\|>k$ 且 $\rho_k(\widetilde{\varphi}_k)=1$.

现对任意 $k\in\mathbb{N}$, 令 $\psi_k:=\frac{\widetilde{\varphi}_k}{\sqrt{k}}$, 则 $\|\psi_k\|>\sqrt{k}$ 且 $\rho_k(\psi_k)=\frac{1}{\sqrt{k}}$. 因为 $\|\circledast\|_k$ 关于 $k\in\mathbb{N}$ 递增, 故对任意 $N\in\mathbb{N}$, 当 $k\ge N$ 时有

$$\rho_N(\psi_k)\le\rho_k(\psi_k)=\frac{1}{\sqrt{k}}$$

令 $k\to\infty$ 即得 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_N(\psi_k)=0$, 由此与先前的假设可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\psi_k\|=0$, 但由 $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的选取可知 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\psi_k\|=\infty$, 矛盾! 由此可知断言 (i) 成立.

对于断言 (ii), 若该断言不成立, 则存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $\varphi_k\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\rho_N(\varphi_k)>k\|\varphi_k\|$, 因此 $\varphi_k\not\equiv 0$. 现对任意 $k\in\mathbb{N}$, 令 $\widetilde{\varphi}_k:=\frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}$, 则 $\rho_N(\widetilde{\varphi}_k)>k$ 且 $\|\widetilde{\varphi}_k\|=1$. 再对任意 $k\in\mathbb{N}$ 令 $\psi_k:=\frac{\widetilde{\varphi}_k}{\sqrt{k}}$, $\rho_N(\psi_k)>\sqrt{k}$ 且 $\|\psi_k\|=\frac{1}{\sqrt{k}}$. 因此 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\psi_k\|=0$, 由此及假设知 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_N(\psi_k)=0$, 但由 $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的选取有 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_N(\psi_k)=\infty$, 矛盾! 因此断言 (ii) 成立.

回到原来的证明, 令 $M\in\mathbb{N}$ 是断言 (i) 中声明存在的数, 对任意 $N\in\mathbb{N}$, 设 $N\ge M$, 若记 $C_{(M)}$ 与 $C_{(N)}$ 分别是断言 (i) 与断言 (ii) 中提到的常数, 由 $\{\rho_N(\circledast)\}_{N\in\mathbb{N}}$ 关于 N 单增知, 对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\rho_M(\varphi)\le\rho_N(\varphi)\le C_{(N)}\|\varphi\|\le C_NC_M\rho_M(\varphi).$$

因此 ρ_N 与 ρ_M 等价.

下面说明范数 $\rho_M(\circledast)$ 和 $\rho_{M+1}(\circledast)$ 不等价. 对任意取定的 $N\in\mathbb{N}$ 及任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 令

$$\varphi_N(x):=\frac{1}{N^{M+1}}e^{-|x|^2}\sin(Nx_1).$$

下证 $\lim\limits_{N\to\infty}\rho_M(\varphi_N)=0$, 为此对任意 $\alpha,\beta:=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{N}^n, |\alpha|,|\beta|\le M$, 由 Leibniz 公式与 $|\beta|\le M$ 知

$$\begin{aligned}|x^\alpha(D^\beta\varphi_N)(x)|&=\frac{1}{N^{M+1}}\left|x^\alpha\sum_{i=0}^{\beta_1}C_{\beta_1}^i(D^{(i,\beta_2,\cdots,\beta_n)}e^{-|\circledast|^2})(x)\cdot N^{\beta_1-i}\sin\left(Nx_1+(\beta_1-i)\frac{\pi}{2}\right)\right|\\&\le\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{\beta_1}C_{\beta_1}^i|x^\alpha(D^{(i,\beta_2,\cdots,\beta_n)}e^{-|\circledast|^2})(x)|.\end{aligned}$$

由此可知存在正常数 $C_{(M)}$ 使得 $\rho_M(\varphi_N)\le\frac{C_{(M)}}{N}$. 令 $N\to\infty$ 即得 $\lim\limits_{N\to\infty}\rho_M(\varphi_N)=0$.

再证明 $\underline{\lim}_{N\to\infty}\rho_{M+1}(\varphi_N)>0$. 为此令 $\alpha=\mathbf{0},\beta:=(M+1,0,\cdots,0)$, 则

$$\begin{aligned}|x^\alpha(D^\beta\varphi_N)(x)|&=\frac{1}{N^{M+1}}\left|\sum_{i=0}^{M+1}C_{M+1}^i(\partial_{x_1}^ie^{-|\circledast|^2})(x)\cdot N^{M+1-i}\sin\left(Nx_1+(M+1-i)\frac{\pi}{2}\right)\right|\\&\ge e^{-|x|^2}\left|\sin\left(Nx_1+(M+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|-\frac{1}{N^{M+1}}\left|\sum_{i=1}^{M+1}C_{M+1}^i(\partial_{x_1}^ie^{-|\circledast|^2})(x)\cdot N^{M+1-i}\sin\left(Nx_1+(M+1-i)\frac{\pi}{2}\right)\right|\\&\ge e^{-|x|^2}\left|\sin\left(Nx_1+(M+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M+1}C_{M+1}^i|(\partial_{x_1}^ie^{-|\circledast|^2})(x)|\\&\ge e^{-|x|^2}\left|\sin\left(Nx_1+(M+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|-\frac{1}{N}\widetilde{C_{(M)}},\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{C_{(M)}}:=\sum_{i=1}^{M+1}C_{M+1}^i\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|(\partial_{x_1}^ie^{-|\circledast|^2})(x)|>0,$$

因此

$$\rho_{M+1}(\varphi_N)\ge\sup_{x\in\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2}\left|\sin\left(Nx_1+(M+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|-\frac{1}{N}\widetilde{C}_{(M)},$$

特别令 $\widetilde{x}:=(\frac{1}{N},0,\cdots,0)$ 可得

$$\rho_{M+1}(\varphi_N)\ge e^{-1}\left|\sin\left(1+(M+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|-\frac{1}{N}\widetilde{C_{(M)}}.$$

由此进一步有

$$\underline{\lim}_{N\to\infty}\rho_{M+1}(\varphi_N)\ge e^{-1}\left|\sin\left(1+(M+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|>0,$$

由该估计及 $\lim\limits_{N\to\infty}\rho_M(\varphi_N)=0$ 可知 ρ_M 与 ρ_{M+1} 不等价, 但这与前述等价断言矛盾! 故 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 不可赋范. □

2.9.2 Schwartz 空间在 Lebesgue 空间中的稠密性

Schwartz 空间对 Fourier 分析的贡献主要基于它在 Lebesgue 空间中的稠密性, 为此首先需要说明 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 Lebesgue 空间中的稠密性.

命题 2.26 ($C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 L^p 空间中的稠密性)

对任意 $p\in(0,\infty)$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

为证明命题2.26, 需要预备下述两条引理:

引理 2.10

设 $p\in(0,\infty)$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在[a] $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-g(x)|^p\,dx<\varepsilon.$$

[a] 这里 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 表示紧支连续函数.

引理 2.11

设 $p \in (0,\infty)$, $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)|^p\,dx < \varepsilon.$$

下面证明命题2.26.

证明 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 由引理2.10知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)|^p\,dx < \varepsilon.$$
由此及引理2.11知存在 $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得
$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)-h(x)|^p\,dx < \varepsilon.$$

当 $p \in (0,1]$ 时, 因为对任意正数列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 均有[24]
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^p \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p, \tag{2.51}$$
故
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-h(x)|^p\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} [|f(x)-g(x)|^p + |g(x)-h(x)|^p]dx < 2\varepsilon.$$

当 $p \in (1,\infty)$ 时, 由 Jensen 不等式知
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-h(x)|^p\,dx \le 2^{p-1}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)-h(x)|^p\,dx\right] < 2^p\varepsilon$$
由此及 ε 的任意性与 $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 即知 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. □

下面证明引理2.10.

证明 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 根据积分的存在性知 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上 a.e. 有限. 现对任意 $m \in \mathbb{N}$ 与任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 令
$$f_m(x) := f(x)\chi_{\{|f(x)|<m\}}(x)\chi_{\{|x|<m\}}(x).$$
显见 $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上 a.e. 成立, 由该极限式, $|f_m| \le |f| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 与 Lebesgue 控制收敛定理知
$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x)-f(x)|^p\,dx = 0$$
亦即
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x)-f(x)|^p\,dx < \varepsilon\right). \tag{2.52}$$
注意到 f_N 是 $B(0,N)$ 上的有界可测函数, 故由 Lusin 定理知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset B(0,N)$ 使得 $|B(0,N)\backslash F| < (\frac{1}{2N})^p\varepsilon$, 且 f_N 在 F 上连续. 因此, f_N 在 $F \cup (\mathbb{R}^n\backslash B(0,N))$ 上连续, 由此及闭集连续延拓定理知存在 $g \in C(\mathbb{R})$ 使得

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n(|g(x)| \le N)$;

(ii) $\forall x \in F \cup (\mathbb{R}^n\backslash B(0,N))(g(x) = f_N(x))$.

由此进一步知 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 且
$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)-f_N(x)|^p\,dx = \int_{B(0,N)\backslash F} |g(x)-f_N(x)|^p\,dx \le |B(0,N)\backslash F|(2N)^p < \varepsilon. \tag{2.53}$$

现当 $p \in (0,1]$ 时, 由(2.52),(2.53)两式知
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)|^p\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-f_N(x)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x)-g(x)|^p\,dx < 2\varepsilon.$$
当 $p \in (1,\infty)$ 时, 同样由(2.52),(2.53)两式知
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-g(x)|^p\,dx \le 2^{p-1}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-f_N(x)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x)-g(x)|^p\,dx\right] < 2^p\varepsilon.$$

[24]这是因为由 $\frac{a_j}{\sum_{k=1}^{\infty} a_k} \le 1$ 知 $(\frac{a_j}{\sum_{k=1}^{\infty} a_k})^p \ge \frac{a_j}{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$, 两边对 j 求和即得 $\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{a_j}{\sum_{k=1}^{\infty} a_k})^p \ge 1$, 整理即得(2.51)式.

至此引理2.10得证. □

下面证明引理2.11.

证明 取 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,1), \varphi \geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. 设 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 不妨取 $L \in (0,\infty)$ 使得 $\operatorname{supp} f \subset B(0,L)$. 对任意 $t \in (0,1)$, 定义 $\varphi_t(x) := \frac{1}{t^n}\varphi(\frac{x}{t})$. 现对任意 $t \in (0,1)$, 因为 $|x-y| < L, |y| < t \leq 1 \Rightarrow |x| < |x-y|+|y| \leq L+1$, 故 $\operatorname{supp}(\varphi_t * f) \subset B(0,L+1)$. 由此可知 $t \in (0,1)$ 时有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * f)(x) - f(x)|^p dx = \int_{B(0,L+1)} |(\varphi_t * f)(x) - f(x)|^p dx \leq |B(0,L+1)| \|\varphi_t * f - f\|_{L^\infty(B(0,L+1))}^p. \tag{2.54}$$

下面断言对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_\varepsilon \in (0,1)$ 使得

$$\|\varphi_{t_\varepsilon} * f - f\|_{L^\infty(B(0,L+1))} < \left[\frac{\varepsilon}{|B(0,L+1)|}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

事实上, 由 $f \in C(\overline{B(0,L+2)})$ 和 $\overline{B(0,L+2)}$ 是紧集知 f 在 $\overline{B(0,L+2)}$ 上一致连续, 即

$$\forall \varepsilon 0 \exists \delta_\varepsilon \in (0,1) \forall x,y \in \overline{B(0,L+2)} \left(|x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \left[\frac{\varepsilon}{|B(0,L+1)|}\right]^{\frac{1}{p}} \right).$$

由此可知若取 $t_\varepsilon \in (0,\delta_\varepsilon)$, 则对任意 $x \in B(0,L+1)$ 均有

$$\begin{aligned}
|(\varphi_{t_\varepsilon} * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{t_\varepsilon}(y) f(x-y) dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{B(0,1)} \varphi(y)[f(x - t_\varepsilon y) - f(x)] dy \right| < \left[\frac{\varepsilon}{|B(0,L+1)|}\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

因此所证断言成立.

由(2.54)式与上述断言进一步可知

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_{t_\varepsilon} * f)(x) - f(x)|^p dx < |B(0,L+1)| \frac{\varepsilon}{|B(0,L+1)|} = \varepsilon$$

由此及 $\varphi_{t_\varepsilon} * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 知引理2.11成立. □

下面给出本小节的主要结果.

命题 2.27

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ 中稠密.

证明 由命题2.26已知 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ 中稠密, 又因为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故只需证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ 即可. 现设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ν_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积, 则

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{|x|\leq 1} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>1} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{|x|\leq 1} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>1} \left(\frac{|x|^{2n}|\varphi(x)|}{|x|^{2n}} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \nu_n^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (|x|^{2n}|\varphi(x)|) \cdot \left(\int_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^{2np}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^n |\varphi(x)| \\
&\overset{(A)}{\sim} \rho_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\varphi) + \sum_{|\alpha|=2n} \rho_{\alpha,\mathbf{0}}(\varphi) < \infty
\end{aligned}$$

其中 (A) 是因为根据(2.48)式有:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^{2n}|\varphi(x)| \lesssim \sum_{|\alpha|=2n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \varphi(x)| = \sum_{|\alpha|=2n} \rho_{\alpha,\mathbf{0}}(\varphi).$$

故 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 因此 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. 欲证因而成立. □

注 实际上, 对 $p \in (0,\infty)$ 而言, 均有 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 在 $p \in (0,1)$ 时, 同样只需证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. 任取 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 知

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_{|x|\le 1} |\varphi(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_{|x|>1} |\varphi(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le 2^{\frac{1}{p}-1} v_n^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_{|x|<1} \left(\frac{|x|^{2([\frac{n}{p}]+1)}|\varphi(x)|}{|x|^{2([\frac{n}{p}]+1)}}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^{2([\frac{n}{p}]+1)}|\varphi(x)| \\
&\sim \rho_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\varphi) + \sum_{|\alpha|=2([\frac{n}{p}]+1)} \rho_{\alpha,\mathbf{0}}(\varphi) < \infty
\end{aligned}
$$

故 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 因此 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, 此即欲证.

2.9.3 Schwartz 函数的 Fourier 变换

上一小节证明了 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 而(2.39)式本身是 L^1 函数 Fourier 变换的定义, 故该式同样是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中函数 Fourier 变换的定义. Schwartz 函数的 Fourier 变换继承了 L^1 函数 Fourier 变换的所有性质, 本节着重探讨 Schwartz 空间中 Fourier 变换将有哪些更好的性质. 为此首先需要证明下述引理:

引理 2.12

若 $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, 则 $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.

证明 这件事本身直接在 $\mathbb{C}$ 上积分, 利用留数定理就能证明, 但这里给出一个不同的方法. 事实上, 如果能说明对任意 $x \in \mathbb{R}$ 定义的函数 $f_1(x) := e^{-\pi x^2}$ 有

$$
\widehat{f_1}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}
$$

则对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 定义的函数 $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ 与任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 有:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-i2\pi x\cdot\xi}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)} e^{-i2\pi(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}\, dx_1\cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{-\pi x_j^2} e^{-i2\pi x_j\xi_j}\, dx_1\cdots dx_n \\
&= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_j^2} e^{-i2\pi x_j\xi_j}\, dx_j \\
&= \prod_{j=1}^n e^{-\pi\xi_j^2} = e^{-\pi|\xi|^2}.
\end{aligned}
$$

下面证明 $n=1$ 的情况成立. 首先说明函数 $f(x) = e^{-\pi x^2}$ 对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 而言都是方程

$$
\begin{cases}
u' + 2\pi x u = 0 \\
u(0) = 1
\end{cases}
$$

的解. 这是因为由上述方程知

$$
\frac{du}{u} = -2\pi x dx \Rightarrow \int_0^x \frac{du}{u} = -\int_0^x 2\pi y dy \Rightarrow \log\frac{u(x)}{u(0)} = -\pi x^2
$$

代入 $u(0) = 1$ 即得 $u(x) = u(0)e^{-\pi x^2} = e^{-\pi x^2}$. 现在在 $u' + 2\pi x u = 0$ 两边取 Fourier 变换, 由 Fourier 变换的性

质2.14(viii),(ix) 知

$$(u')^\wedge+(2\pi xu)^\wedge=0\Rightarrow i2\pi x\widehat{u}-\frac{1}{i}(\widehat{u})'=0\Rightarrow(\widehat{u})'+2\pi x\widehat{u}=0.$$

此外

$$\begin{aligned}\widehat{u}(0)&=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}dx=\left[\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\pi(x^2+y^2)}dxdy\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\left[\int_0^\infty e^{-\pi r^2}rdr\int_{\mathbb{S}^1}d\sigma\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\int_0^\infty e^{-\pi r^2}2\pi rdr\right]^{\frac{1}{2}}\\&=[(-e^{-\pi r^2})|_0^\infty]^{\frac{1}{2}}=1\end{aligned}$$

因此, $\widehat{u}$ 满足同一个微分方程:

$$\begin{cases}(\widehat{u})'+2\pi x\widehat{u}=0\\ \widehat{u}(0)=1\end{cases}$$

又因为若 u_1,u_2 均满足上述微分方程, 则

$$\begin{cases}(u_1-u_2)'+2\pi x(u_1-u_2)=0\\ (u_1-u_2)(0)=0\end{cases}\quad\Rightarrow u_1-u_2=0\Rightarrow u_1=u_2$$

故该微分方程有唯一解, 因此 $\widehat{u}(x)=e^{-\pi x^2}=u(x)$. □

Fourier 变换在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的一个重要性质在于它是保 Schwartz 函数的连续变换, 此即下述定理:

定理 2.12 (Fourier 变换在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性)

Fourier 变换是从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的连续映射. ♡

证明 首先说明 Fourier 变换把 Schwartz 函数映成 Schwartz 函数. 事实上, 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, 任取 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\xi\in\mathbb{R}^n$, 由 Fourier 变换的性质2.14(viii),(ix) 知

$$\begin{aligned}\xi^\alpha[D^\beta\widehat{f}(\xi)]&=\xi^\alpha[(-i2\pi x)^\beta f]^\wedge(\xi)\\&=\frac{1}{(i2\pi)^{|\alpha|}}(i2\pi\xi)^\alpha[(-i2\pi x)^\beta f]^\wedge(\xi)\\&=\frac{1}{(i2\pi)^{|\alpha|}}[D^\alpha((i2\pi x)^\beta f)]^\wedge(\xi)\qquad=C_1(D^\alpha(x^\beta f))^\wedge(\xi),\end{aligned}$$

其中 $C_1:=(i2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}$. 从而由 Fourier 变换的性质2.14(ii) 知

$$\begin{aligned}|\xi^\alpha D^\beta\widehat{f}(\xi)|&\le|C_1|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}(1+|x|^2)^n|D^\alpha(x^\beta f)(x)|dx\\&\lesssim|C_1|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}\sum_{\substack{|\widetilde{\alpha}|\le2n+|\beta|\\|\widetilde{\beta}|\le|\alpha|}}\rho_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(f)dx\\&\sim|C_1|\sum_{\substack{|\widetilde{\alpha}|\le2n+|\beta|\\|\widetilde{\beta}|\le|\alpha|}}\rho_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(f)<\infty\end{aligned}\tag{2.55}$$

这表明 $\widehat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 亦即 Fourier 变换把 Schwartz 函数映成 Schwartz 函数. 对于连续性, 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $n\to\infty$ 时 $f_n\to\theta(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 则对任意 $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in\mathbb{N}^n$ 有 $\rho_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(f_n)\to0(n\to\infty)$. 由此及(2.55)式知

$$0\le\rho_{\alpha,\beta}(\widehat{f_n})\lesssim|C_1|\sum_{\substack{|\widetilde{\alpha}|\le2n+|\beta|\\|\widetilde{\beta}|\le\alpha}}\rho_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(f_n)\to0,\quad n\to\infty.$$

因此 $\rho_{\alpha,\beta}(\widehat{f_n})\to0(n\to\infty)$, 故 $n\to\infty$ 时有 $\widehat{f_n}\to\theta(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 因此 Fourier 变换是从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的连续变换.□

因为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 同样在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 故对于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换, 也可以谈论它的 L^2 性质. 这其中最重要的一条便是下述乘法公式:

定理 2.13 (Fourier 变换的乘法公式)

对任意 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)g(x)dx. \tag{2.56}$$

证明 因为 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故 $f(x)g(y)e^{-i2\pi x\cdot y}$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 因而其为可测函数, 又由 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)$ 与 Tonelli 定理知

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|f(x)g(y)e^{-i2\pi x\cdot y}|dxdy=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|dy<\infty.$$

故 $f(x)g(y)e^{-i2\pi x\cdot y}\in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. 从而由 Fubini 定理知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx&=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi\right]dx\\&=\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\right]d\xi=\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

乘法公式至此得证. □

利用乘法公式(2.56)可得 Fourier 变换的反演公式:

定理 2.14 (Fourier 变换的反演公式)

对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi. \tag{2.57}$$

证明 任取 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 由 Fourier 变换的性质 (vii) 与乘法公式(2.56)知

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(\lambda x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)\lambda^{-n}g(\lambda^{-1}x)dx.$$

在上左式中换元 $\lambda x=y$ 得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda^{-1}x)\widehat{g}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)g(\lambda^{-1}x)dx;$$

因为 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 由 Fourier 变换把 Schwartz 函数映成 Schwartz 函数知 $\widehat{f},\widehat{g}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故 $f(\lambda^{-1}x)\widehat{g}(x)$, $\widehat{f}(x)g(\lambda^{-1}x)$ 均可被某可积函数关于 λ 一致控制. 现在在上式两端同时令 $\lambda\to\infty$, 由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$f(0)\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x)dx=g(0)\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)dx.$$

令 $g(x)=e^{-\pi|x|^2}$, 由引理2.12知

$$f(0)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)d\xi$$

这正是(2.57)式在 $x=0$ 的情况. 现在把 f 换成 $\tau_{-x}f$, 根据 Fourier 变换的性质 (v) 有

$$f(x)=(\tau_{-x}f)(0)=\int_{\mathbb{R}^n}(\tau_{-x}f)^\wedge(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi$$

此即欲证. □

Fourier 变换的反演公式有下述直接推论:

推论 2.5 (Fourier 变换的复合)

任取 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 有 $(\widehat{f})^\wedge=\widetilde{f}$, 故 Fourier 变换的周期为 4(也就是说它的四阶复合为恒同算子).

证明 由反演公式(2.57)知对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 与任意 $\mathbb{R}^n$ 有

$$f(-x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi$$

即 $\widetilde{f}=(\widehat{f})^\wedge$, 从而 $f^{\wedge\wedge\wedge\wedge}=(\widetilde{f})^\sim=f$, 从而 Fourier 变换的周期为 4, 推论得证. □

注 对于 Schwartz 函数而言, 同样可以依照(2.40)式定义其 Fourier 逆变换 $f^\vee$. 从定义中可知对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$f^{\vee}(x)=\widehat{f}(-x)$. 现由推论2.5知对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有:

$$f(-x)=\widetilde{f}(x)=(\widehat{f})^{\wedge}(x)=f^{\wedge\wedge}(x)$$

由此及 $f^{\vee}$ 的定义知

$$(f^{\vee})^{\wedge}=(\widetilde{\widehat{f}})^{\wedge}=(f^{\wedge\wedge\wedge})^{\wedge}=f^{\wedge\wedge\wedge\wedge}=f$$

因此, Fourier 变换与 Fourier 逆变换互为逆算子. 同时由 $f^{\vee}=f^{\wedge\wedge\wedge}$ 及 Fourier 变换在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性2.12知 Fourier 逆变换同样是从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的连续映射.

2.10 缓增分布空间

2.10.1 缓增分布空间的定义

定义 2.8 (缓增分布空间)

称 $T:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ 是缓增分布, 如果 T 是线性泛函, 且

$$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\wedge\lim_{k\to\infty}\varphi_k=0(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\langle T,\varphi_k\rangle=0.$$

亦即 T 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函. 称全体缓增分布构成的空间为缓增分布空间, 记作 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

从连续性出发可以得到缓增分布的下述等价刻画:

命题 2.28 (缓增分布的等价刻画)

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函 L 是连续的当且仅当存在常数 $C>0$ 与非负整数 k,m 使得对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$|\langle L,\varphi\rangle|\le C\sum_{\substack{|\alpha|\le k\\|\beta|\le m}}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi).\tag{2.58}$$

证明 若 L 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上满足(2.58)式的一个线性泛函, 往证 L 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上连续. 进一步由 L 的线性性知只需证明 L 在 θ 点连续. 为此任取 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\lim_{k\to\infty}\varphi_k=0(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 由 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中收敛的等价刻画2.24可知对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 均有 $\lim_{k\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k)=0$. 由此及(2.58)式知

$$0\le\varlimsup_{k\to\infty}|\langle L,\varphi_k\rangle|\le C\sum_{\substack{|\alpha|\le k\\|\beta|\le m}}\varlimsup_{k\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k)=0.$$

故 $\lim_{k\to\infty}\langle L,\varphi_k\rangle=0$, 从而 L 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上连续, 即 $L\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

另一方面, 任取 $L\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 往证 L 满足(2.58)式. 首先由 L 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上连续的定义知

$$\exists\varepsilon_0\in(0,1]\forall\varphi\in B_d(\theta,\varepsilon_0)(|\langle L,\varphi\rangle|<1)\tag{2.59}$$

其中 d 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中收敛等价刻画2.24中定义的度量. (2.59)式的成立是因为若不然, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$, 总存在 $\varphi_n\in B_d(\theta,\frac{1}{n})$ 使得 $|\langle L,\varphi_n\rangle|\ge1$, 从而一方面 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=0(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 另一方面 $\langle L,\varphi_n\rangle$ 不收敛到 0, 这与 L 的连续性相矛盾! 因此(2.59)式成立.

下证断言: 存在非负整数 k,m 使得

$$A:=\left\{\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\sum_{\substack{|\alpha|\le k\\|\beta|\le m}}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)<\frac{\varepsilon_0}{2}\right\}\subset B_d(\theta,\varepsilon_0)$$

首先确定 k,m. 为此注意到存在 $N_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon_0}{2}$. 由 $d(\varphi,\theta)$ 的定义可知 $\{d_n(\varphi,\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\{\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ 的一个重排, 记 I_1,I_2 分别为该重排中的前 N_0 项 $\{d_n(\varphi,\theta)\}_{n=1}^{N_0}$ 中所有 α 和 β 所组成的集合, 记

$$k:=\max\{|\alpha|:\alpha\in I_1\},\quad m=\max\{|\beta|:\beta\in I_2\}.$$

注意到对任意 $n \in \{1, \cdots, N_0\}$, 总存在 $\alpha \in I_1, \beta \in I_2$ 使得

$$d_n(\varphi, \theta) = \rho_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

从而若 $\varphi \in A$, 则对任意 $n \in \{1, \cdots, N_0\}$ 有

$$d_n(\varphi, \theta) = \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

由此进一步有

$$\begin{aligned} d(\varphi, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(\varphi, \theta)}{1 + d_n(\varphi, \theta)} \\ &\le \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{2^n} d_n(\varphi, \theta) + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon_0}{2} \le \varepsilon_0 \end{aligned}$$

从而 $\varphi \in B_d(\theta, \varepsilon_0)$, 故由 φ 的任意性知 $A \subset B_d(\theta, \varepsilon_0)$, 亦即所证断言成立.

下面再证明(2.58)式成立, 为此任取 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 若 $\varphi = \theta$, 则(2.58)式显然成立. 若 $\varphi \ne \theta$, 令

$$\|\varphi\| := \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ |\beta| \le m}} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi),$$

则 $\|\varphi\| > 0$. 取 $\eta \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$, 令 $\psi := \eta \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$, 由此及 $\rho_{\alpha,\beta}$ 的齐次性可知

$$\|\psi\| = \eta < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

亦即 $\psi \in A$. 从而由所证断言知 $|\langle L, \psi \rangle| \le 1$, 再由 L 的线性性知

$$|\langle L, \varphi \rangle| \le \frac{1}{\eta} \|\varphi\| = \frac{1}{\eta} \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ |\beta| \le m}} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

此即(2.58)式, 命题即证. □

回忆在研究 Schwartz 空间时引入过 **[ST4]** 所介绍的由 ρ_N 诱导的拓扑, 并给出了 ρ_N 与 $\rho_{\alpha,\beta}$ 两个范数族诱导拓扑的等价性2.25. 因为泛函的连续性依赖于拓扑定义, 故由该等价性可知

$$\begin{aligned} L \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow \text{对}\forall \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \text{若对}\forall N \in \mathbb{N}\text{有}\rho_N(\varphi_k) \to 0 (k \to \infty), \text{则}\langle L, \varphi_k \rangle \to 0 (k \to \infty). \\ &\Leftrightarrow \text{对}\forall \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \text{若对}\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\text{有}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k) \to 0 (k \to \infty), \text{则}\langle L, \varphi_k \rangle \to 0 (k \to \infty). \end{aligned}$$

仿照缓增分布的等价刻画2.28, 如果在 ρ_N 诱导的拓扑下考虑, 可以得到下述命题:

命题 2.29 (缓增分布的等价刻画)

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函 L 是连续的当且仅当存在 $N \in \mathbb{N}$ 及常数 $C > 0$ 使得对任意 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$|\langle L, \varphi \rangle| \le C \rho_N(\varphi). \tag{2.60}$$

证明 若 L 满足(2.60)式, 则对任意 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 若 $k \to \infty$ 时 φ_k 在(2.50)左式的意义下收敛到 θ, 则显见 $|\langle L, \varphi_k \rangle| \to 0 (k \to \infty)$, 故 $L \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

反之, 若 $L \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且 L 不满足(2.50)式, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$ 均存在 $\widetilde{\psi}_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $|\langle L, \widetilde{\psi}_k \rangle| > k \rho_k(\widetilde{\psi}_k)$, 从而 $\widetilde{\psi}_k \not\equiv 0$(否则将出现 $0 > 0$ 的矛盾), 因此至少有 $\rho_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\widetilde{\psi}_k) > 0$, 故 $\rho_k(\widetilde{\psi}_k) > 0$. 令 $\psi_k := \frac{\widetilde{\psi}_k}{\rho_k(\widetilde{\psi}_k)}$, 则 $\rho_k(\psi_k) = 1$ 且 $|\langle L, \psi_k \rangle| > k$. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 再令 $\varphi_k := \frac{\psi_k}{k^{\frac{1}{2}}}$, 则由于对任意 $N \in \mathbb{N}$ 与任意 $k > N$ 有 $\rho_N(\varphi_k) \le \rho_k(\varphi_k)$, 因此 $\rho_N(\varphi_k) \le k^{-\frac{1}{2}} \to 0 (k \to \infty)$. 但同时 $|\langle L, \varphi_k \rangle| > k^{\frac{1}{2}} \to \infty (k \to \infty)$, 这与 $L \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 矛盾! 故(2.60)式成立, 命题证毕. □

注 称定义在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函 L 是有界的, 若 L 满足(2.58)式 (或等价地满足(2.60)式). 故由上述讨论知 L 有界当且仅当 L 连续.

根据泛函分析中共轭空间中收敛的定义, 可以得到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的收敛:

定义 2.9 ($\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的收敛)

称 $T_k \to T(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))(k \to \infty)$, 如果 $T_k, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)(k = 1, 2, \cdots)$, 且

$$\langle T_k, f \rangle \to \langle T, f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

♣

2.10.2 缓增分布空间上的 Fourier 变换与其它线性算子

定义 2.10 (缓增分布的 Fourier 变换与 Fourier 逆变换)

缓增分布 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换记作 $\widehat{T}$ 或 $\mathcal{F}[T]$, 定义为

$$\langle \widehat{T}, f \rangle := \langle T, \widehat{f} \rangle, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

其 Fourier 逆变换记作 $T^\vee$ 或 $\mathcal{F}^{-1}[T]$, 定义为

$$\langle T^\vee, f \rangle := \langle T, f^\vee \rangle, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

♣

类似于 Schwartz 空间的情况, Fourier 变换在缓增分布空间中同样有连续性:

定理 2.15 (Fourier 变换在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性)

Fourier 变换是从 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的连续双射, 且其逆变换也连续.

♡

证明 首先说明 Fourier 变换 $\mathcal{F}$ 把缓增分布映成缓增分布. 任取 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 由 Fourier 变换在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性2.12知 $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{\varphi_k} = 0(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. 从而由 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 可得

$$\lim_{k\to\infty} \langle \widehat{T}, \varphi_k \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle T, \widehat{\varphi_k} \rangle = \langle T, \lim_{k\to\infty} \widehat{\varphi_k} \rangle = 0.$$

故 $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 依照完全相同的步骤可以说明 Fourier 逆变换 $\mathcal{F}^{-1}$ 同样把缓增分布映成缓增分布.

为了证明 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续, 需要回忆 $L : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 连续的定义:

$$\forall \{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)(\lim_{k\to\infty} T_k = T(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} L(T_k) = L(T)(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))).$$

现设 $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = T(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 则对任意 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\langle \widehat{T_k}, \varphi \rangle = \langle T_k, \widehat{\varphi} \rangle \to \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{T}, \varphi \rangle, \quad k \to \infty.$$

因此 $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{T_k} = T_k(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 故 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续.

下面证明 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的双射, 为此只需证明在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上有 $\mathcal{F}^4 = I$, 其中 I 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的恒同算子. 事实上, 对任意 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 与 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\langle \mathcal{F}^4[T], f \rangle = \langle T, \mathcal{F}^4[f] \rangle = \langle T, f \rangle,$$

因此在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上有 $\mathcal{F}^4 = I$, 故 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的双射.

下面证明 $\mathcal{F}^{-1}$ 也在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续. 事实上, 由于在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上有 $\mathcal{F}^4 = I$, 故在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上 $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$, 又已经证明了 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续, 故 $\mathcal{F}^{-1}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续, 定理证毕. □

缓增分布空间囊括了诸多我们所熟识的空间. 在这些不同的空间中, 缓增分布在函数上的作用可能表现为不同形式, 为此需要阐明缓增分布何时与一个函数重合:

定义 2.11 (缓增分布与函数的重合)

对于 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 称 T 在分布意义下与函数 h 重合, 如果对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$\langle T, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) f(x) dx.$$

♣

命题 2.30

若 $T \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\widehat{T}$ 与函数

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}^n} T(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

重合.

证明 对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 由 $T \in L^1(\mathbb{R}^n)$, Tonelli 定理与 Fubini 定理知:

$$\begin{aligned}\langle \widehat{T}, f\rangle = \langle T, \widehat{f}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} T(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} T(\xi)\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi\right]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)f(x)dx\end{aligned}$$

命题因而成立. □

缓增分布同样可以具有测度的形式, 为此我们先介绍复值测度:

定义 2.12 (复测度)

设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 代数, 称 $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ 是 $\mathcal{B}$ 上的复测度, 如果

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) μ 满足可列可加性, 即若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ 满足 E_j 两两不交, 则 $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

复测度的模同样是测度, 此即下述命题:

命题 2.31

若 μ 是 $\mathcal{B}$ 上的复测度, 对任意 $E \in \mathcal{B}$ 令

$$|\mu|(E) := \sup_{\substack{E=\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \forall j\in\mathbb{N}(E_j\in\mathcal{B}) \\ \forall j\neq k(E_j\cap E_k=\varnothing)}} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)|$$

则

(i) $|\mu|$ 是 $\mathcal{B}$ 上的有限测度, 即 $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$, 从而 μ 是有限 Borel 测度.

(ii) $|\mu|$ 是正则的, 即 $|\mu|$ 满足内正则和外正则条件, 亦即对任意 $E \in \mathcal{B}$ 有

$$\text{内正则性}: |\mu|(E) = \inf\{|\mu|(U) : U \supset E \text{为开集}\},$$

$$\text{外正则性}: |\mu|(E) = \sup\{|\mu|(K) : K \subset E \text{为紧集}\}.$$

另若 $|\mu|$ 正则, 则称 μ 正则, 故 $\mathbb{R}^n$ 上的复测度均正则.

现记 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上全体复 Borel 测度构成的空间, 赋以范数 $\|\mu\|_{\mathcal{M}} = |\mu|(\mathbb{R}^n)$. 另设 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 是衰减连续函数空间, 则有下述结论:

定理 2.16

$(C_0(\mathbb{R}^n))^* = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

为了继续研究缓增分布与测度的关系, 还需要下述 Radon-Nikodym 定理:

定理 2.17 (Radon-Nikodym)

设 $(X, \mathcal{M})$ 是测度空间, μ 是其上的复测度, 则存在 X 上的可测函数 h 使得对任意 $x \in X$ 均有 $|h(x)| = 1$, 且 $d\mu = hd|\mu|$.

复 Borel 测度与缓增分布的关系如下:

命题 2.32

对任意 $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, 均有 $\mu\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

证明 任取 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=0(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 则显见

$$0\leq\|\varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}=\rho_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\varphi_k)\longrightarrow 0,\quad k\longrightarrow\infty$$

又由 Radon-Nikodym 定理2.17知存在可测函数 h 使得 $\forall x\in\mathbb{R}^n(|h(x)|=1)$, 且

$$\begin{aligned}|\langle\mu,\varphi_k\rangle|&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(x)d\mu(x)\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(x)h(x)d|\mu|(x)\right|\\&\leq\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_k(x)|d|\mu|(x)\\&\leq\|\varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|\mu|(\mathbb{R}^n)\longrightarrow 0,\quad k\longrightarrow\infty\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{k\to\infty}\langle\mu,\varphi_k\rangle=0$, 故 $\mu\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

现若缓增分布表现为复 Borel 测度, 则其 Fourier 变换有下述表现:

命题 2.33

对任意 $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\mu}$ 都是有界连续函数, 且

$$\widehat{u}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\mu(x).$$

证明 首先由 Radon-Nikodym 定理2.17知存在可测函数 h 使得 $\forall x\in\mathbb{R}^n(|h(x)|=1)$, 且 $d\mu=hd|\mu|$. 由此及缓增分布 Fourier 变换的定义知

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\mu},f\rangle=\langle\mu,\widehat{f}\rangle&=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)d\mu(x)\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi d\mu(x)\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi h(x)d|\mu|(x).\end{aligned}$$

又由 Tonelli 定理知

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|f(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}h(x)|d\xi d|\mu|(x)=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|f(\xi)|d\xi d|\mu|(x)=\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}|\mu|(\mathbb{R}^n)<\infty,$$

由此及 Fubini 定理进一步有

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\mu},f\rangle&=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}h(x)d|\mu(x)\right]f(\xi)d\xi\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\mu(x)\right]f(\xi)d\xi\end{aligned}$$

故在分布意义下有

$$\widehat{\mu}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\mu(x).\tag{2.61}$$

现在由 Radon-Nikodym 定理2.17与(2.61)式知对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|\widehat{\mu}(\xi)|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}h(x)d|\mu|(x)\right|\leq\int_{\mathbb{R}^n}d|\mu|(x)\leq|\mu|(\mathbb{R}^n)<\infty$$

故 $\widehat{\mu}$ 是有界函数. 另对任意 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$, 由 Radon-Nikodym 定理2.17与 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\begin{aligned}|\widehat{\mu}(\xi+\eta)-\widehat{\mu}(\xi)|&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}[e^{-i2\pi\eta\cdot x}-1]d\mu(x)\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\pi x\cdot(2\xi+\eta)}[e^{-i\pi\eta\cdot x}-e^{i\pi\eta\cdot x}]d\mu(x)\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\pi x\cdot(2\xi+\eta)} 2i \sin(\pi\eta\cdot x) h(x) d|\mu|(x) \right| \\
&\le 2\int_{\mathbb{R}^n} |\sin(\pi\eta\cdot x)| d|\mu|(x) \to 0, \quad \eta \to 0
\end{aligned}
$$

因此 $\widehat{\mu}$ 是连续函数, 命题至此即证. □

另外, Dirac 测度同样是缓增分布. 设 δ 是定义在原点的 Dirac 测度, 则对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$
\langle \delta, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(x)d\delta(x) + \int_{\{0\}} f(x)d\delta(x) = 0 + f(0) = f(0).
$$

下面说明 $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 事实上, 任取 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 则

$$
0 \le |\varphi_k(0)| \le \rho_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\varphi_k) \to 0, \quad k \to \infty.
$$

由此知 $\langle \delta, \varphi_k\rangle = \varphi_k(0) \to 0 (k\to\infty)$, 故 $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Dirac 测度的 Fourier 变换有下述表现:

命题 2.34

$\widehat{\delta} = 1$.

证明 对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 知

$$
\langle \widehat{\delta}, f\rangle = \langle \delta, \widehat{f}\rangle = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)d\xi.
$$

这说明 $\langle \widehat{\delta}, f\rangle = \langle 1, f\rangle$, 故在分布意义下有 $\widehat{\delta} = 1$. □

类似于 Fourier 变换在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续性2.12, 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中有下述命题:

定理 2.18

Fourier 变换 $\mathcal{F}$ 是从 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的连续双射, 且其逆变换也是连续的.

证明 为证明 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续, 回忆 $L : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 连续指的是

$$
\forall \{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) (\lim_{k\to\infty} T_k = T(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} LT_k = LT(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))).
$$

现设 $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = T(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 则由此知对任意 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$
\langle \widehat{T_k}, \varphi\rangle = \langle T_k, \widehat{\varphi}\rangle \to \langle T, \widehat{\varphi}\rangle = \langle \widehat{T}, \varphi\rangle, \quad k \to \infty.
$$

因此 $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{T_k} = \widehat{T}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 故 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续.

下面证明 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的双射, 为此只需证明在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上有 $\mathcal{F}^4 = I$, 其中 I 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的恒同算子. 事实上, 对任意 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 与任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有:

$$
\langle \mathcal{F}^4[T], f\rangle = \langle T, \mathcal{F}^4[f]\rangle = \langle T, f\rangle
$$

因此 $F^4 = I(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 故 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的双射.

最后说明 $\mathcal{F}^{-1}$ 同样在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续. 事实上, 因为 $\mathcal{F}^4 = I(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 故 $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 又已经证明了 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续, 故 $\mathcal{F}^{-1}$ 也在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续, 命题证毕. □

若对任意 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 与任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 定义 T 的反射变换为 $\langle \widetilde{T}, f\rangle := \langle T, \widetilde{f}\rangle$(其中 $\widetilde{f}(x) := f(-x)$), 因为对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 与任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ 均有 $\rho_{\alpha,\beta}(\widetilde{f}) = \rho_{\alpha,\beta}(f)$, 故 $\widetilde{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 缓增分布的反射变换与函数的反射变换在定义上是相容的, 即:

命题 2.35

若 $T \in \bigcup_{p\in[1,\infty]} L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $\widetilde{T}(\circledast) = T(-\circledast)$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上成立.

证明 任取 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 知

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{T}, f\rangle = \langle T, \widetilde{f}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} T(x)f(-x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} T(-x)f(x)dx = \langle T(-\circledast), f\rangle.\end{aligned}$$

故 $\widetilde{T}(\circledast) = T(-\circledast)(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. □

类似于 Schwartz 空间中 Fourier 变换的复合2.5, 对缓增分布而言有下述命题成立:

命题 2.36 (缓增分布的 Fourier 变换复合)

若 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\widetilde{T} = (\widehat{T})^\wedge(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 且 $(\widetilde{\widetilde{T}})^\wedge = T(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.

证明 由 Fourier 变换的复合2.5知对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有:

$$\langle (\widehat{T})^\wedge, f\rangle = \langle T, (\widehat{f})^\wedge\rangle = \langle T, \widetilde{f}\rangle = \langle \widetilde{T}, f\rangle,$$

此即 $(\widehat{T})^\wedge = \widetilde{T}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. 由此进一步知

$$(\widetilde{\widetilde{T}})^\wedge = (T^{\wedge\wedge\wedge})^\wedge = \mathcal{F}^4[T] = T$$

故 $(\widetilde{\widetilde{T}})^\wedge = T(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. □

另外, 缓增分布空间中也有下述 Fourier 反演公式:

命题 2.37 (缓增分布的 Fourier 反演公式)

若 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且 $\widehat{T} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 而言, 下式在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中成立:

$$T(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{T}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi.$$

证明 首先证明断言: 当 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 时, 缓增分布意义下的 Fourier 变换定义与函数意义下的 Fourier 变换定义在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的意义下是一致的. 事实上, 由两者的定义与 Fubini 定理知, 对任意 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\begin{aligned}\langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widehat{\varphi}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi\right]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\right]\varphi(x)d\xi \\ &= \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\circledast}dx, \varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

因此断言成立. 由上述断言知当 $\widehat{T} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 时, 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}T(x) = (\widetilde{\widetilde{T}})^\wedge(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{T}(-\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{T}(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi\end{aligned}$$

在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的意义下成立, 命题进而得证. □

由上述命题可知, 若 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且 $\widehat{T} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 T 在分布意义下等同于一个有界连续且衰减的函数, 其中有界性是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的定义, 连续性显见, 衰减性是 Riemann-Lebesgue 引理.

上面这种定义缓增分布空间中算子的方式并非偶然. **[HJR]** 指出这正是 Schwartz 用来定义缓增分布空间中算子的一般方法, 该方法基于下述命题:

补充命题 2.2 (缓增分布空间中的线性算子)

设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 是线性映射, 且

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \exists p, q \in \mathbb{N} \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \left(\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) \lesssim \sum_{\substack{|\gamma| \le p \\ |\delta| \le q}} \rho_{\gamma,\delta}(\varphi) \right),$$

则式子

$$\langle A^t u, \phi \rangle := \langle u, A\phi \rangle$$

定义了一个缓增分布 $A^t u$, 且若 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 满足 $u_n \to u(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 那么 $A^t u_n \to A^t u(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$.

证明 根据 u, A 的线性性立得 $A^t u$ 的线性性. 根据缓增分布的等价刻画2.28知存在 $p, q \in \mathbb{N}^n$ 使得

$$|\langle u, \theta \rangle| \lesssim \sum_{\substack{|\alpha| \le p \\ |\beta| \le q}} \rho_{\alpha,\beta}(\theta), \quad \forall \theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

根据 $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 满足的条件知对每个 α, β 都存在 $l_\alpha, r_\beta \in \mathbb{N}$ 使得

$$\rho_{\alpha,\beta}(A\phi) \lesssim \sum_{\substack{|\gamma| \le l \\ |\delta| \le r}} \rho_{\gamma,\delta}(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

现令 $\theta = A\phi$ 可知

$$|\langle A^t u, \phi \rangle| = |\langle u, A\phi \rangle| \lesssim \sum_{\substack{|\alpha| \le p \\ |\beta| \le q}} \sum_{\substack{|\gamma| \le l_\alpha \\ |\delta| \le r_\beta}} \rho_{\gamma,\delta}(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

这便导出了 $A^t u$ 的连续性, 因而 $A^t u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 另外若 $u_k \to u(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 根据定义知

$$\langle A^t u_k, \phi \rangle = \langle u_k, A\phi \rangle \to \langle u, A\phi \rangle = \langle A^t u, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

亦即 $A^t u_k \to A^t u(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. □

下面给出一些利用补充命题2.2导出的缓增分布空间中的算子.

例 2.4(求导与多项式乘积算子) $A = (-D)^\gamma (\gamma \in \mathbb{N}^n)$ 满足补充命题2.2的条件, 这是因为任取 $\phi \in \mathcal{S}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ 都有

$$\rho_{\alpha,\beta}((-D)^\alpha \phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{|x^\alpha D^\beta (-D^\gamma \phi)|\} \le \rho_{\alpha,\beta+\gamma}(\phi)$$

于是只要 $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap C^{|\gamma|}(\mathbb{R}^n)$[25], 那么

$$\langle ((-D)^\gamma)^t u, \phi \rangle := \langle u, (-D)^\gamma \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)(-D)^\gamma \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (D^\gamma u(x)) \phi(x) dx = \langle D^\gamma u, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

这说明 $((-D)^\gamma)^t u = D^\gamma u$, 也即 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的算子 $(-D)^\gamma$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中对偶地成为 D^γ.

$A : x^\gamma \mapsto x^\gamma \phi (\gamma \in \mathbb{N}^n)$ 也满足补充命题2.2的条件, 这是因为任取 $\phi \in \mathcal{S}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ 都有

$$\rho_{\alpha,\beta}(x^\gamma \phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{|x^\alpha D^\beta (x^\gamma \phi(x))|\} \lesssim \sum_{|\delta|+|\tau| \le |\alpha|+|\beta|+|\gamma|} \rho_{\delta,\tau}(\phi)$$

于是只要 $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 就有

$$\langle (x^\gamma)^t u, \phi \rangle := \langle u, x^\gamma \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) x^\gamma \phi(x) dx = \langle x^\gamma u, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

这说明 $(x^\gamma)^t u = x^\gamma u$, 也即 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的算子 $x^\gamma \mapsto x^\gamma \phi$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中对偶地成为 $x^\gamma \mapsto x^\gamma u$.

注 求导算子对补充部分所提到的分布也是可以定义的.

例 2.5(线性自同构算子) 设 L 是 $\mathbb{R}^d$ 上的线性自同构, 定义

$$A_L \phi := \frac{1}{|\det L|} \phi \circ L^{-1}$$

显见 A_L 满足补充命题2.2的条件. 于是只要 $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 就有

$$\langle A_L^t u, \phi \rangle := \frac{1}{|\det L|} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \phi(L^{-1} x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(Ly) \phi(y) dy = \langle u(L\circledast), \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

[25]其中 $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 保证了 $\langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\phi(x) dx$, 而 $C^{|\gamma|}(\mathbb{R}^n)$ 保证了 $(-D)^\gamma u$ 的合法性.

这说明 $A_L^t u(x)=u(Lx)$, 也即 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的算子 A_L 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中对偶地成为 $u\mapsto u(L\circledast)$.

例 2.6(函数与缓增分布的卷积) 设 $\theta\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\theta}(x)=\theta(-x)$, $A_\theta\phi=\widetilde{\theta}*\phi$, 则 A_θ 满足补充命题2.2的条件, 这是因为任取 $\phi\in\mathcal{S},\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 都有

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha,\beta}(A_\theta\phi)&=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|x^\alpha D^\beta\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\theta}(y)\phi(x-y)dy\right|\right\}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\theta}(y)(x^\alpha D_x^\beta\phi(x-y))dy\right|\right\}\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}|\widetilde{\theta}|\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{|x^\alpha D_x^\beta\phi(x-y)|\}dy\lesssim\rho_{\alpha,\beta}(\phi)\end{aligned}$$

于是只要 $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 就有

$$\begin{aligned}\langle A_\theta^t u,\phi\rangle&:=\int_{\mathbb{R}^n}u(x)(\widetilde{\theta}*\phi)(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\theta}(x-y)\phi(y)dydx\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\theta(y-x)\phi(y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^n}(u*\theta)(y)\phi(y)dy=\langle u*\theta,y\rangle\end{aligned}$$

这说明在 $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 时 $A_\theta^t u=u*\theta$, 它与 **[LG1]** 中给出的函数与缓增分布的卷积定义是重合的:

定义 2.13 (函数与缓增分布的卷积)

设 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则卷积 $h*u$ 定义为

$$\langle h*u,\phi\rangle=\langle u,\widetilde{h}*\phi\rangle,\quad \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

♣

例 2.7(函数与缓增分布的乘积) 若记

$$\Theta_M:=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n):\forall\alpha\in\mathbb{N}^n\exists N\in\mathbb{N}(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^{-N}|D^\alpha f(x)|\}<\infty)\}$$

亦即对任意 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 均存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得[26] $|D^\alpha f(x)|\lesssim(1+|x|)^N$. 记 $A_f\phi=f(x)\phi(x)(f\in\Theta_M)$, 则 A_f 满足补充命题2.2的条件. 这是因为任取 $\phi\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ 与 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 都有

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha,\beta}(A_f\phi)&=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{|x^\alpha D^\beta(f(x)\phi(x))|\}\\&\lesssim\sum_{|\gamma|+|\delta|\le|\beta|}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{|x^\alpha D^\gamma f(x)D^\delta\phi(x)|\}\\&\lesssim\sum_{|\gamma|+|\delta|\le|\beta|}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{|x^\alpha(1+|x|)^{N_\gamma}D^\delta\phi(x)|\}\\&\lesssim\sum_{\substack{|\tau|\le|\alpha|+\max\limits_{|\gamma|\le|\beta|}N_\gamma\\|\delta|\le|\beta|}}\rho_{\tau,\beta}(\phi)\end{aligned}$$

于是只要 $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 就有

$$\langle A_f^t u,\phi\rangle:=\int_{\mathbb{R}^n}u(x)f(x)\phi(x)dx=\langle fu,\phi\rangle,\quad\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

这说明在 $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 时 $A_f^t u=fu$, 它与 **[LG1]** 中给出的函数与缓增分布的乘积定义是重合的:

定义 2.14 (函数与缓增分布的乘积)

设 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),h\in\Theta_M$, 则定义 h,u 的乘积为:

$$\langle hu,\phi\rangle=\langle u,h\phi\rangle,\quad\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

♣

缓增分布的 Fourier 变换自然也可以用补充命题2.2来刻画, 只需注意(**??**)式即可. 类似于 L^1 函数 Fourier 变换的性质, 缓增分布的 Fourier 变换满足下述命题:

[26] 这个空间的设置目的在于使后面的乘积运算有意义, 注意并不是全体 C^∞ 函数与缓增分布的乘积都有意义.

补充命题 2.3 (缓增分布 Fourier 变换的性质)

给定 $u_j, u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)(j=1,2,\cdots), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), y \in \mathbb{R}^n, a, b \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{N}^n, c\lambda > 0$, 则

(i) 线性性: $(au+bv)^\wedge = a\widehat{u} + b\widehat{v}$;

(ii) 连续性: 若 $u_j \to u(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 则 $\widehat{u_j} \to \widehat{u}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$;

(iii) 与反射的可换性: $\widehat{\widetilde{u}} = \widetilde{\widehat{u}}$;

(iv) 平移性质: 若 $\tau_y u(x) = u(x-y)$, 则 $(\tau_y u)^\wedge(\xi) = e^{-i2\pi h\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)$, 且 $(e^{i2\pi y\cdot \circledast}u)^\wedge = \widehat{u}(\xi - y) = (\tau^y u)^\wedge(\xi)$;

(v) 若 $v(x) = \lambda^{-n}u(\lambda^{-1}x)$, 则 $\widehat{v}(\xi) = \widehat{u}(\lambda\xi)$;

(vi) $(D^\alpha u)^\wedge(\xi) = (i2\pi\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$;

(vii) $(-i2\pi \circledast^\alpha f)^\wedge(\xi) = D^\alpha \widehat{f}(\xi)$;

(viii) 卷积公式: $(u * v)^\wedge = \widehat{u}\cdot\widehat{v}$.

上述所有性质的证明均类似于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的证明, 此处略过. 另外, Schwartz 函数与缓增分布的卷积还有下述刻画:

定理 2.19 (Schwartz 函数与缓增分布卷积的刻画)

若 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $\varphi * u$ 是 C^∞ 函数, 且对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 均有

$$(\varphi * u)(x) = \langle u, \tau^x \widetilde{\varphi}\rangle$$

其中 $(\tau^x f)(y) = f(y-x)$. 另外, 存在正常数 m 使得对任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 均有常数 $C_\alpha > 0$ 满足

$$|D^\alpha(\varphi * u)(x)| \le C_\alpha(1+|x|)^m. \tag{2.62}$$

另外, 若 u 紧支, 则 $\varphi * u$ 是 Schwartz 函数.

证明 设 $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\begin{aligned}
\langle \varphi * u, \Psi\rangle &= \langle u, \widetilde{\varphi} * \Psi\rangle \\
&= \left\langle u, \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(\circledast - y)\Psi(y)dy \right\rangle \\
&= \left\langle u, \int_{\mathbb{R}^n} (\tau^y\widetilde{\varphi})(\circledast)\Psi(y)dy \right\rangle \\
&\overset{(A)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, \tau^y\widetilde{\varphi}\rangle \Psi(y)dy
\end{aligned} \tag{2.63}$$

其中 (A) 的成立需要说明 u 作为算子是连续的, 且积分 $\int_{\mathbb{R}^n}(\tau^y\widetilde{\varphi})(\circledast)\Psi(y)dy$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的意义下收敛[27]. 前者已经由 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 显见, 后者在后文会加以说明. 现在在(2.63)式成立的情况下即得

$$(\varphi * u)(x) = \langle u, \tau^x\widetilde{\varphi}\rangle.$$

下面说明 $(\varphi * u)(x)$ 是 C^∞ 函数. 设 $e_j = (0,\cdots,1,\cdots,0)$ 是第 j 个元素为 1, 其余全为 0 的向量, 则

$$\frac{\tau^{-he_j}(\varphi * u)(x) - (\varphi * u)(x)}{h} = \left\langle u, \frac{\tau^{-he_j}(\tau^x\widetilde{\varphi}) - \tau^x\widetilde{\varphi}}{h}\right\rangle \overset{(B)}{\to} \langle u, -\partial_j\tau^x\widetilde{\varphi}\rangle, \quad h \to 0$$

其中 (B) 的成立要求 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且 $\frac{\tau^{-he_j}(\tau^x\widetilde{\varphi}) - \tau^x\widetilde{\varphi}}{h} \to -\partial_j\tau^x\widetilde{\varphi}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 下面说明后者. 任取 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, 知

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|y^\alpha D^\beta\left(\frac{\phi(y-he_j)-\phi(y)}{h} + \partial_j\phi(y)\right)\right|\right\} &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|y^\alpha\left(\frac{1}{h}(D^\beta\phi(y-he_j) - D^\beta\phi(y)) + \partial_j D^\beta\phi(y)\right)\right|\right\} \\
&\lesssim \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{|y^\alpha h^2\partial_j^2 D^\beta\phi(y)|\} \to 0, \quad h \to 0
\end{aligned}$$

因而 (B) 成立. 对更高阶的情况归纳即知 $\varphi * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且对任意多重指标 $\gamma \in \mathbb{N}^n$ 均有 $D^\gamma(\varphi * u) = (D^\gamma\varphi) * u$.

[27] 联想连续函数的性质: $f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(g(x))$, (i) 前式相当于 $f(\lim_{x\to x_0} g(x))$, 后式相当于 $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$.

再来证明(2.62)式. 对 u 考虑缓增分布的等价刻画2.28知存在 $m,k\in\mathbb{N}$ 使得

$$\begin{aligned}|(D^\alpha(\varphi*u))(x)| &= |((D^\alpha\varphi)*u)(x)| = |\langle u,\tau^x\widetilde{D^\alpha\varphi}\rangle|\\ &\lesssim \sum_{\substack{|\gamma|\le m\\|\beta|\le k}}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{|y^\gamma\tau^x(D^{\alpha+\beta}\widetilde{\varphi})(y)|\}\\ &\overset{(A)}{=} \sum_{\substack{|\gamma|\le m\\|\beta|\le k}}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{|(x+y)^\gamma(D^{\alpha+\beta}\widetilde{\varphi})(y)|\}\\ &\lesssim_m \sum_{|\beta|\le k}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|^m)(1+|y|^m)(D^{\alpha+\beta}\widetilde{\varphi})(y)\}\end{aligned} \tag{2.64}$$

其中 (A) 是将 y 换成 $x+y$. 根据 $D^{\alpha+\beta}\widetilde{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 知 $D^\alpha(\varphi*u)$ 在无穷远处至多以多项式速度增长, 亦即(2.62)式成立.

再设 u 紧支, 往证 $\varphi*u$ 是 Schwartz 函数. 根据 u 的紧支性知存在 $m,N>0$ 使得对任意多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 均有:

$$|\langle u,\varphi(x-\circledast)\rangle| = |(\varphi*u)(x)| \lesssim \sum_{|\alpha|\le m}\sup_{|y|\le N}|D_y^\alpha\varphi(x-y)|$$

又因为 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故根据 Schwartz 函数的等价刻画2.22知对任意 $M>0$, 当 $|x|\ge 2N$ 时均有

$$|D_y^\alpha\varphi(x-y)| \lesssim_{\alpha,M} (1+|x-y|)^{-M} \lesssim_{\alpha,M,N} (1+|x|)^{-M}$$

进而 $\varphi*u$ 在无穷远处是速降的. 因为 $D^\gamma(\varphi*u)=(D^\gamma\varphi)*u$, 故仿照上述过程可知 $\varphi*u$ 的各阶导数在无穷远处均速降, 因而 $\varphi*u$ 是 Schwartz 函数. 另外, 上面的证明过程还说明了 $\varphi*u$ 的任意 Schwartz 半范都可以被 φ 的 Schwartz 半范有限和控制.

最后回过头来证明(2.63)(i) 中积分在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 意义下的收敛性, 亦即对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有

$$\int_{[-N,N]^n}\widetilde{\varphi}(x-y)\Psi(y)dy \to \int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\varphi}(x-y)\Psi(y)dy(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

从 Riemann 积分的定义入手, 对每个 $N=1,2,\cdots$ 将 $[-N,N]^n$ 划分成 $(2N^2)^n$ 个边长为 $\frac{1}{N}$ 的方体 Q_m, 设每个方体 Q_m 的中心为 y_m. 对任意多重指标 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, 往证

$$D_N(x) = \sum_{m=1}^{(2N^2)^n} x^\alpha D_x^\beta\widetilde{\varphi}(x-y_m)\Psi(y_m)|Q_m| - \int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha D_x^\beta\widetilde{\varphi}(x-y)\Psi(y)dy \to 0(L^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

根据微分中值定理知

$$x^\alpha D_x^\beta\widetilde{\varphi}(x-y_m)\Psi(y_m)|Q_m| - \int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha D_x^\beta\widetilde{\varphi}(x-y)\Psi(y)dy = \int_{Q_m}x^\alpha(y-y_m)\cdot\nabla(D_x^\beta\widetilde{\varphi}(x-\circledast)\Psi)(\xi)dy$$

其中 $\xi=y+\theta(y_m-y),\theta\in[0,1]$. 注意在 Q_m 中 $|y-y_m|\le\frac{\sqrt{n}}{2N}$, 于是将上右式被积函数中的梯度打开并代入 Schwartz 函数的等价刻画2.22可知

$$|x^\alpha(y-y_m)\cdot\nabla(D_x^\beta\widetilde{\varphi}(x-\circledast)\Psi)(\xi)| \lesssim |x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\frac{1}{(1+|x-\xi|)^{\frac{M}{2}}}\frac{1}{(2+|\xi|)^M}$$

其中 $M>2\max\{|\alpha|,n\}$ 足够大. 又因为 $N\ge\sqrt{n}$ 时 $|y|\le|\xi|+\theta|y-y_m|\le|\xi|+\frac{\sqrt{n}}{N}\le|\xi|+1$, 故

$$|x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\frac{1}{(1+|x|)^{\frac{M}{2}}}\frac{1}{(2+|\xi|)^{\frac{M}{2}}} \lesssim |x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\frac{1}{(1+|x|)^{\frac{M}{2}}}\frac{1}{(1+|y|)^{\frac{M}{2}}}.$$

将最后得到的估计代回 $D_N(x)$ 可知

$$|D_N(x)| \lesssim \frac{|x|^{|\alpha|}}{N(1+|x|)^{\frac{M}{2}}}\int_{[-N,N]^n}\frac{dy}{(1+|y|)^{\frac{M}{2}}} + \int_{([-N,N]^n)^c}|x^\alpha D_x^\beta\widetilde{\varphi}(x-y)\Psi(y)|dy$$

再次利用 Schwartz 函数的等价刻画2.22, 对上式第二项有

$$\int_{([-N,N]^n)^c}|x^\alpha D_x^\beta\widetilde{\varphi}(x-y)\Psi(y)|dy \lesssim \int_{([-N,N]^n)^c}\frac{|x|^{|\alpha|}}{(1+|x-y|)^{\frac{M}{2}}}\frac{dy}{(1+|y|)^M} \lesssim \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^{\frac{M}{2}}}\int_{([-N,N]^n)^c}\frac{dy}{(1+|y|)^{\frac{M}{2}}}.$$

至此即知 $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|D_N(x)|=0$, 命题得证. □

注 Schwartz 函数与缓增分布卷积的刻画2.19表明 Schwartz 函数与缓增分布的卷积不仅仅是缓增分布, 而是光滑

函数.

2.11 补充: 分布与紧支分布

本节选自 [**LG1**], 旨在补充分布与紧支分布的一些必要知识.

回忆 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支光滑函数空间, 而 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数空间, 结合先前提到的 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的定义, 容易得到下述关系:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.65}$$

下面分别定义 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 与 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的收敛性:

定义 2.15 ($C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 与 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的收敛)

称 $f_k \to f(C^\infty(\mathbb{R}^n))$, 若 $f_k, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且对任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 与 $N = 1, 2, \cdots$ 均有

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|x|\le N} |D^\alpha(f_k - f)(x)| = 0.$$

称 $f_k \to f(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$, 若存在紧集 B 使得 $f_k, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足对任意 $k \in \mathbb{N}$ 均有 $\operatorname{supp}(f_k) \subset B$, 且对任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 均有

$$\lim_{k\to\infty} \|D^\alpha(f_k - f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

♣

根据紧支性可以说明 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛强于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛, 而根据定义亦知 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛强于 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛. 下面的例子表明这三种收敛性互不等价:

例 2.8(光滑鼓包函数) 设 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 是非零函数, 定义序列 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 $\varphi_k(x) = \frac{\varphi(x-k)}{k}$, 称 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是光滑鼓包函数列.

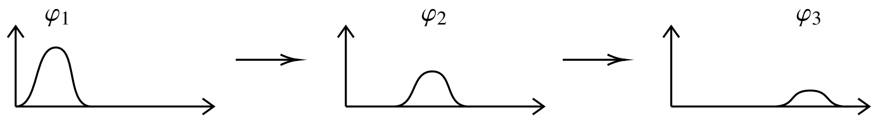

图 2.2: $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 示意图

首先, $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上是收敛到零的, 这是因为对取定的 $\alpha \in \mathbb{N}^n, N \in \mathbb{N}$ 有:

$$\sup_{|x|\le N} |D^\alpha \varphi_k(x)| \le \frac{\|D^\alpha \varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

其次, $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上不收敛, 这是因为显见 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中收敛到 0, 故从 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的收敛性比 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的收敛性更强可知, 就算 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上收敛, 它也只能收敛到零. 如若该断言成立, 则根据定义知对任意指标 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ 均有

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k) \to 0, \quad k \to \infty$$

特别令 $\alpha = 2, \beta = 0$ 知

$$\rho_{2,0}(\varphi_k) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^2 \varphi_k(x)| \to 0, \quad k \to \infty$$

但若设 $\varphi(0) = 1$, 则

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^2 \varphi_k(x)| \ge k^2 \varphi_k(k) = k\varphi(0) \to \infty, \quad k \to \infty$$

矛盾! 故 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上不收敛.

最后, 我们没有办法谈 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的收敛性, 这是因为并不存在紧集 B 使得 $\forall k \in \mathbb{N}(\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset B)$.

□

根据定义2.15, 空间 $C^\infty(\mathbb{R})$ 装备有半范族

$$\widetilde{\rho}_{\alpha,N}(f)=\sup_{|x|\le N}|(D^\alpha f)(x)|,\quad \alpha\in\mathbb{N}^n, N\in\mathbb{N}. \tag{2.66}$$

可以证明 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在上述可数半范族下完备, 亦即其为 Fréchet 空间. 但我们并不能用同样的半范族生成在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上符合定义2.15的拓扑, 这是因为取 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是例2.8中定义的光滑鼓包函数列, 则显见 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在半范族(2.66)诱导的拓扑下收敛到 0, 但它依照定义2.15在 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 中不收敛.

其实, 我们并不能找到某个半范族, 使得它在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上生成的拓扑满足定义2.15, 且这个拓扑还能令 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 完备. 定义2.15所诱导的 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的拓扑实际上是一个归纳极限拓扑, 且在该拓扑下 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是完备的. 也就是说, 我们需要首先取 $C_0^\infty(B(0,k))$ 是全体支在 $B(0,k)$ 中的光滑函数构成的空间, 对每个固定的 k 而言, 空间 $C_0^\infty(B(0,k))$ 关于(2.66)式定义的半范族 $\widetilde{\rho}_{\alpha,N}$ 所生成的拓扑完备, 又因为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)=\bigcup_{k=1}^\infty C_0^\infty(B(0,k))$, 所以 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在这种归纳的意义下完备. 不过就算进行这样的修改, 我们还是需要遗憾地承认: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是不可度量化的. 关于这些空间拓扑性质的进一步讨论可见 **[FL]** 与 **[SW]**.

下面来讨论 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 与 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的共轭空间. 记 $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'=\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),(C^\infty(\mathbb{R}^n))'=\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 其中的收敛性定义为:

$$T_k\to T(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))\Leftrightarrow T_k,T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\wedge\forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)(T_k(f)\to T(f)(C_0^\infty(\mathbb{R}^n)))$$

$$T_k\to T(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))\Leftrightarrow T_k,T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\wedge\forall f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)(T_k(f)\to T(f)(C^\infty(\mathbb{R}^n)))$$

依照(2.65)式可知

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

定义 2.16 (分布, 紧支分布)

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为分布, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为紧支分布.

类似于缓增分布的等价刻画2.28, 可以证明分布与紧支分布也有下述等价刻画:

命题 2.38 (分布与紧支分布的等价刻画)

(i) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函 u 是分布当且仅当对任意紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$, 存在整数 m 使得

$$|\langle u,f\rangle|\lesssim\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha f\|_{L^\infty},\quad \forall f\in C^\infty,\operatorname{supp}(f)\subset K \tag{2.67}$$

(ii) $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函 u 是紧支分布当且仅当存在整数 N,m 使得

$$|\langle u,f\rangle|\lesssim\sum_{|\alpha|\le m}\widetilde{\rho}_{\alpha,N}(f),\quad \forall f\in C^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{2.68}$$

其中

$$\rho_{\alpha,\beta}(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta f(x)|,\quad \widetilde{\rho}_{\alpha,N}(f)=\sup_{|x|\le N}|(D^\alpha f)(x)|.$$

下面讨论分布的支集与紧支分布一词的含义.

定义 2.17 (分布的支集)

设 $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 闭集 K 满足对 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\operatorname{supp}\varphi\subset\mathbb{R}^n\backslash K\Rightarrow\langle u,\varphi\rangle=0$$

则 $\operatorname{supp}u$ 定义为全体具有上述性质的闭集 K 的交.

从定义出发可以得到下述命题:

命题 2.39

对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 若 $\operatorname{supp}\varphi\cap\operatorname{supp}u=\varnothing$, 则 $\langle u,\varphi\rangle=0$.

为了证明命题2.39, 首先 (不加证明地) 介绍单位分解定理:

定理 2.20 (单位分解)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, O 是 $\mathbb{R}^n$ 某个覆盖 E 的开集族 (亦即 $E \subset \bigcup_{U \in O} U$), 则存在 C_0^∞ 函数构成的函数族 Ψ 使得:

(i) 对任意 $\psi \in \Psi$ 与任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 均有 $0 \leq \psi(x) \leq 1$;

(ii) 若 $K \subset \overline{K} \subset E$(即 K 紧包含于 E), 则只有有限个 $\psi \in \Psi$ 在 K 上不为零;

(iii) 对任意 $\psi \in \Psi$ 均存在 $U \in O$ 使得 $\operatorname{supp} \psi \subset U$;

(iv) 对任意 $x \in E$ 均有 $\sum_{\psi \in \Psi} \psi(x) = 1$.

函数族 Ψ 称为 E 从属于 O 的 C^∞ 单位分解.

♡

下面证明命题2.39.

证明 设 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} u = \varnothing$. 根据 $\operatorname{supp} u$ 的定义知 $(\operatorname{supp} u)^c = (\bigcap K)^c = \bigcup K^c$, 其中每个闭集 K 均满足

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \wedge \operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^n \backslash K \Rightarrow \langle u, \varphi \rangle = 0$$

进而由 $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} u = \varnothing$ 知 $\operatorname{supp} \varphi \subset (\operatorname{supp} u)^c = \bigcup K^c$, 亦即 $\bigcup K^c$ 是紧集 $\operatorname{supp} \varphi$ 的一个开覆盖, 故存在有限多个 $K_j^c (j = 1, \cdots, m)$ 使得

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \bigcup_{j=1}^m K_j^c.$$

在 $\bigcup_{j=1}^m K_j^c$ 上作单位分解, 可得 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数 $\psi_j (j = 1, \cdots, m)$ 满足:

(i) $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$;

(ii) $\operatorname{supp} \psi_j \subset K_j^c$;

(iii) $\sum_{j=1}^m \psi_j = 1$.

因此

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \sum_{j=1}^m \varphi \psi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^m \langle u, \varphi \psi_j \rangle = 0.$$

□

紧支分布恰为定义2.17中支集为紧集的分布. 为了说明这一断言, 首先说明紧支分布的支集确为紧集. 从定义2.16中的紧支分布 u 出发. 根据紧支分布的等价刻画2.38知存在 $N, m > 0$ 使得

$$|\langle u, f \rangle| \lesssim \sum_{|\alpha| \leq m} \widetilde{\rho}_{\alpha, N}(f), \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

现对支在 $B(0, N)^c$ 中的 C^∞ 函数 f 知上右式为零, 因而只能有 $\langle u, f \rangle = 0$. 这说明 $\operatorname{supp} u \subset \overline{B}(0, N)$, 于是 $\operatorname{supp} u$ 至少有界. 又因为根据定义, $\operatorname{supp} u$ 为一系列闭集的交, 故它同样是闭集, 因而它是紧集.

再说明支集为紧集的分布为紧支分布. 若定义2.17中的 $\operatorname{supp} u$ 是紧集, 则存在 $N > 0$ 使得 $\operatorname{supp} u \subset B(0, N)$. 取光滑函数 η 在 $B(0, N)$ 上恒等于 1, 在 $B(0, N+1)$ 外恒等于零, 则对 $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 而言 $\operatorname{supp}(h(1-\eta)) \cap \operatorname{supp} u = \varnothing$, 因此根据命题2.39知 $\langle u, h(1-\eta) \rangle = 0$, 于是

$$\langle u, h \rangle = \langle u, h\eta \rangle + \langle u, h(1-\eta) \rangle = \langle u, h\eta \rangle.$$

现在 u 可视作按下述定义的 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素[28]:

$$\langle u, f \rangle = \langle u, f\eta \rangle, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

现取定 $K = \overline{B(0, N+1)}$ 并对应选取 m, 根据 Leibniz 公式知 $\|D^\alpha(f\eta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 被半范族 $\widetilde{\rho}_{\alpha, N+1}(f) (|\alpha| \leq m)$ 的有限和控制, 因而(2.68)式成立, 根据紧支分布的等价刻画2.38即知 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

[28]这一新定义是与 η 的选取无关的, 这是因为如果另选在 $B(0, N)$ 上恒等于 1 的光滑函数 ψ, 则有 $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}(\eta - \psi) = \varnothing$, 故 $\langle u, f\eta \rangle = \langle u, f\psi \rangle$.

定义 2.18 (分布与函数重合)

称分布 $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 与函数 h 在开集 Ω 上重合, 如果

$$\langle u,f\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)h(x)dx,\quad \forall f\in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.69}$$

这一定义同时表明分布 $u-h$ 的支集在 Ω^c 内.

例 2.9 当 $a_1,a_2\in\mathbb{R}^n$ 时, 分布 $|x|^2+\delta_{a_1}+\delta_{a_2}$ 在不包含 a_1,a_2 的开集上与函数 $|x|^2$ 重合. 另外, 分布

$$\langle u,\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1}\varphi(x)\frac{dx}{x}$$

在除去 0 的实轴上与函数 $\frac{\chi_{|x|\le 1}}{x}$ 重合.

对于紧支分布而言, 还有下述重要结果[29]:

定理 2.21 (紧支分布 Fourier 变换的性质)

若 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\widehat{u}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实解析函数, 特别知 $\widehat{u}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 另外 $\widehat{u}$ 与其各阶导数均在无穷远处有多项式速度增长, 且 $\widehat{u}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上有解析延拓.

证明 设 u 是紧支分布, $p(\xi)$ 是多项式, 则 u 在 C^∞ 函数 $\xi\mapsto p(\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}$ 上的作用是关于 x 良定义的函数, 记之为 $\langle u,p(\circledast)e^{-i2\pi x\cdot\circledast}\rangle$, 这里 $x\in\mathbb{R}^n$. 可以验证若将 x 换成 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, 则该结论依旧成立, 此时约定 ξ 与 z 的内积为 $\xi\cdot z=\sum_{k=1}^n\xi_k z_k$.

下面说明定义在 $\mathbb{C}^n$ 上关于 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的函数

$$F(z)=\langle u,e^{-i2\pi\circledast\cdot z}\rangle$$

是整函数. 这是因为由 $u,e^{-i2\pi\xi\cdot z}$ 的连续性与 u 的线性性知 F 对每个变量均解析, 另由 $\mathbb{C}\ni h\to 0$ 时 $\frac{1}{h}(e^{-i2\pi\xi_j\cdot h}-1)\to 0(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ 知 F 关于 z_j 的导数为[30]:

$$\langle u,(-i2\pi\circledast_j)e^{-i2\pi\circledast\cdot z}\rangle$$

归纳知对任意多重指标 $\alpha=\in\mathbb{N}^n$ 有

$$D^\alpha F=\partial_{z_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{z_n}^{\alpha_n}F=\langle u,(-i2\pi\circledast)^\alpha e^{-i2\pi\circledast\cdot z}\rangle.$$

因为 F 是整函数, 故其在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制 (亦即 $F(x_1,\cdots,x_n)(x_j=\operatorname{Re}z_j)$) 是实解析函数. 另由紧支分布的等价刻画2.38与 Leibniz 公式知 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制与其各阶导数均在无穷远处有多项式速度增长.

现对 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\langle\widehat{u},f\rangle=\langle u,\widehat{f}\rangle=\left\langle u,\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i2\pi x\cdot\circledast}dx\right\rangle\overset{(A)}{=}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\langle u,e^{-i2\pi x\cdot\circledast}\rangle dx \tag{2.70}$$

其中 (A) 的成立需要说明 $f(x)e^{-i2\pi x\cdot\circledast}$ 关于 x 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Riemann 积分部分和在 C^∞ 的意义下收敛到 $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i2\pi x\cdot\circledast}dx$, 之后根据 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ 所自带的连续性即得等式. 注意到(2.70)右式恰为 $\langle F,f\rangle$, 于是缓增分布 $\widehat{u}$ 与实解析函数 $x\mapsto F(x)$ 实际上是重合的, 因而藉由 F 的诸性质可知 $\widehat{u}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{u}$ 与其各阶导数均在无穷远处有多项式速度增长, $\widehat{u}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上有解析延拓 $F(z)$.

下面来说明前述待证的收敛性, 其证明思路类似于函数与缓增分布卷积刻画定理2.19. 对每个 $N=1,2,\cdots$, 将方体 $[-N,N]^n$ 分割成 $(2N^2)^n$ 个边长为 $\frac{1}{N}$ 的小块 Q_m, 设 y_m 是小块 Q_m 的中心. 取定多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$, 记

$$D_N(\xi)=\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}f(y_m)(-i2\pi y_m)^\alpha e^{-i2\pi y_m\cdot\xi}|Q_m|-\int_{\mathbb{R}^n}f(x)(-i2\pi x)^\alpha e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx$$

[29]这一结果将在偶函数诱导的齐次奇异积分算子 L^p 有界性定理4.7的证明中用到.

[30]仿照(2.64)式可以说明该表达式是良定义的.

往证对任意 $M>0$, 在 $N\to\infty$ 时均有 $\sup\limits_{|\xi|\le M}|D_N(\xi)|\to 0$. 记 $g(x)=f(x)(-i2\pi x)^\alpha$, 知

$$D_N(\xi)=\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}(g(y_m)e^{-i2\pi y_m\cdot\xi}-g(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi})dx-\int_{([-N,N]^n)^c}g(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx$$

对于上右式第二项, 因为 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 因此 $N\to\infty$ 时该项趋零. 对上右式第一项, 根据微分中值定理, 对被积函数有

$$|g(y_m)e^{-i2\pi y_m\cdot\xi}-g(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}|=\frac{\sqrt{n}}{N}(|\nabla g(z_m)|+2\pi|\xi||g(z_m)|)\lesssim_m\frac{\sqrt{n}}{N}\frac{1+|\xi|}{(1+|z_m|)^K}$$

其中 $z_m\in Q_m$. 又因为对 $|\xi|\le M$, 注意到每个 Q_m 的边长均为 $\frac{1}{N}$, 可知:

$$\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}\frac{1+|\xi|}{(1+|z_m|)^K}dx\lesssim 1+M<\infty$$

故 $N\to\infty$ 时 $\sup\limits_{|\xi|\le M}|D_N(\xi)|\to 0$, 命题得证. □

从紧支分布 Fourier 变换的性质2.21可得下述结论:

命题 2.40 ($C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密)

若 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 则存在 C_0^∞ 函数序列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得 $f_k\to u(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. 特别地, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

证明 取定 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足在原点附近有 $\varphi(x)=1$, 记 $\varphi_k(x)=\varphi(\frac{x}{k})$. 因为 $\varphi_k f\to f(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$(见例2.2), 故对任意 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 均有 $\varphi_k u\to u(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. 因为 Fourier 变换与逆变换在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的拓扑下是连续的, 故映射 $u\mapsto(\varphi_k\widehat{u})^\vee$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中连续. 因为本身根据 φ_k 的紧支性有 $\varphi_k\widehat{u}\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 故由紧支分布 Fourier 变换的性质2.21可知 $(\varphi_k\widehat{u})^\vee\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 进而 $\varphi_k(\varphi_k\widehat{u})^\vee\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. 由例2.3即知 $\varphi_k(\varphi_k\widehat{u})^\vee\to u(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. □

2.12 补充: 一些特殊的分布

本节选自 **[LG1]**, 旨在探讨分布与 Fourier 变换的更多性质, 并将它们与 PDE 理论联系起来.

2.12.1 支在一点的分布

命题 2.41 (支在一点的缓增分布刻画)

若 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 支在单点集 $\{x_0\}$ 上, 则存在 $k\in\mathbb{N}$ 与 $a_\alpha\in C$ 使得

$$u=\sum_{|\alpha|\le k}a_\alpha D^\alpha\delta_{x_0}.$$

证明 不失一般性可设 $x_0=0$, 根据缓增分布的等价刻画2.28知存在 $m,k\in\mathbb{N}$ 使得

$$|\langle u,f\rangle|\lesssim\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|\le k}}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha(D^\beta f)(x)|,\quad\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

下面证明若 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$(D^\alpha\varphi)(0)=0,\quad\forall|\alpha|\le k\tag{2.71}$$

则 $\langle u,\varphi\rangle=0$. 这是因为取定满足(2.71)的 φ 后, 设 $\zeta(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中在 $|x|\ge 2$ 时恒等于 1, 在 $|x|\le 1$ 时恒等于 0 的光滑函数. 记 $\zeta^\varepsilon(x)=\zeta(\frac{x}{\varepsilon})$, 根据(2.71)式与 φ 在原点的光滑性不难说明对任意 $|\alpha|\le m,|\beta|\le k$ 均有 $\rho_{\alpha,\beta}(\zeta^\varepsilon\varphi-\varphi)\to 0$, 于是

$$|\langle u,\varphi\rangle|\le|\langle u,\zeta^\varepsilon\varphi\rangle|+|\langle u,\zeta^\varepsilon\varphi-\varphi\rangle|\lesssim 0+\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|\le k}}\rho_{\alpha,\beta}(\zeta^\varepsilon\varphi-\varphi)\to 0,\quad\varepsilon\to 0$$

断言因而成立.

现设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 记 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是在原点附近为 1 的函数. 对 f 作 Taylor 展开有:

$$f(x) = \eta(x)\left(\sum_{|\alpha|\leq k} \frac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!} x^\alpha + h(x)\right) + (1-\eta(x))f(x) \tag{2.72}$$

其中 $x \to 0$ 时 $h(x) = O(x^{k+1})$, 故 ηh 满足(2.71)式, 因而 $\langle u, \eta h\rangle = 0$. 另外根据 η 的构造与 $\operatorname{supp} u \subset \{0\}$ 可知

$$\langle u, ((1-\eta)f)\rangle = 0$$

现在在(2.72)式两端同时作用 u 有

$$\langle u, f\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{(D^\alpha(f))(0)}{\alpha!} \langle u, x^\alpha \eta(x)\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha (D^\alpha \delta_0)(f)$$

其中 $a_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\langle u, x^\alpha \eta(x)\rangle$. 最后, 可以说明 a_α 实际上与 η 的取法无关, 命题即证 □

依此立得下述推论

推论 2.6 (支在原点的缓增分布刻画)

设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 若 $\widehat{u}$ 支在单点集 $\{\xi_0\}$ 上, 则 u 必是形如 $(-i2\pi\xi)^\alpha e^{i2\pi\xi\cdot\xi_0}$ 的有限线性组合, 其中 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 是多重指标. 特别地, 如果 $\widehat{u}$ 支在原点, 那么 u 是多项式[a].

[a]将推论中的 $\widehat{u}$ 换成 $u^\vee$ 也可以, 因为 Fourier 变换与逆变换之间只差一个反射.

证明 支在一点的缓增分布刻画2.41已经表明 $\widehat{u}$ 形如 ξ_0 处 Dirac 测度的有限线性组合, 由缓增分布 Fourier 变换的性质2.3(iv) 即得结论. □

注 上述推论在齐次空间理论 (诸如齐次 Sobolev 空间, 齐次 Littlewood-Paley 分解) 中均起重要作用. 后面会介绍空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash P(\mathbb{R}^n)$, 其基本动机正源于此.

2.12.2 Laplace 算子

Laplace 算子 Δ 是应用在 $\mathbb{R}^n$ 中缓增分布上的偏微分算子:

$$\Delta(u) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u.$$

Laplace 方程 $\Delta(u) = 0$ 的解称为调和分布. 特别有下述结论成立:

推论 2.7

若 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\Delta(u) = 0$, 则 u 是多项式.

证明 在方程两边取 Fourier 变换可知 $\widehat{\Delta(u)} = 0$, 因而在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中有

$$-4\pi^2|\xi|^2\widehat{u} = 0$$

这说明 $\widehat{u}$ 支在原点, 因而根据支在原点的缓增分布刻画2.6知 u 是多项式. □

特别地, 如果调和分布在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 它就必是缓增分布, 而上述推论表明它是多项式, 但只有零阶多项式 (即常数) 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 故此时其必为常数, 这便是大名鼎鼎的 Liouville 定理.

下面推导 Laplace 方程在 $\mathbb{R}^n$ 中的基本解. 在 PDE 理论中, 称分布 u 是偏微分算子 L 的基本解, 指的是 $L(u) = \delta_0$. 下面的结果给出了 Laplace 算子的基本解:

命题 2.42 (Laplace 算子的基本解)

对 $n \geq 3$ 有

$$\Delta(|x|^{2-n}) = -(n-2)\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\delta_0, \tag{2.73}$$

对 $n=2$ 有

$$\Delta(\log|x|)=2\pi\delta_0. \tag{2.74}$$

其中原点处的导数是在分布意义下的.

证明 对(2.73)式, 考虑 Green 公式:

$$\int_\Omega (v\Delta(u)-u\Delta(v))dx=\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)ds$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 边界光滑的开集, $\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 表示 v 在单位外法向量方向上的导数. 取 $\Omega=\mathbb{R}^n\backslash\overline{B(0,\varepsilon)}, v=|x|^{2-n}, u=f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 知 $f(r\theta)$ 的法向导数正是其关于径向变量 r 的导数. 观察到 $x\neq 0$ 时 $\Delta(|x|^{2-n})=0$, 于是

$$\int_{|x|>\varepsilon}\Delta(f)(x)|x|^{2-n}dx=-\int_{|\theta|=\varepsilon}\left(\varepsilon^{2-n}\frac{\partial f}{\partial r}-f(\theta)\frac{\partial r^{2-n}}{\partial r}\right)d\theta \tag{2.75}$$

其中 $d\theta$ 表示球面 $|\theta|=\varepsilon$ 上的面测度. 注意到一方面因为 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 故存在关于 f 的常数 C_f 使得

$$\left|\int_{|\theta|=\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial r}d\theta\right|\leq C_f\varepsilon^{n-1}$$

另一方面

$$\int_{|\theta|=\varepsilon}f(r\theta)\varepsilon^{1-n}d\theta\to v_{n-1}f(0),\quad \varepsilon\to 0$$

其中 v_{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的面积. 现在在(2.75)式两端同时令 $\varepsilon\to 0$ 知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\Delta(f)(x)|x|^{2-n}dx=-(n-2)v_{n-1}f(0)$$

代入 $v_{n-1}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ 即得欲证.

(2.74)式的证明与上述证明是完全类似的, 只需注意将(2.75)式中的 $\frac{\partial r^{2-n}}{\partial r}$ 换成 $\frac{\partial \log r}{\partial r}$ 即可. □

2.12.3 齐次分布

Laplace 算子的基本解是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数, 也是 $n\geq 3$ 时的 $2-n$ 阶齐次分布. 齐次分布本身在诸多领域中有十分广泛的应用, 故本小节将研究齐次分布的简单性质与一些例子.

定义 2.19 (齐次分布)

若缓增分布 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 满足对任意 $\lambda>0$ 与任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$\langle u,\varphi(\lambda\circledast)\rangle=\lambda^{-n-\gamma}\langle u,\varphi\rangle$$

就称 u 是 γ 阶齐次分布.

注 当缓增分布 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 可视作函数时, 其作为分布的齐次性和作为函数的齐次性是相容的. 这是因为如果 u 是 γ 阶齐次分布, 任取 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 可得:

$$\begin{aligned}\langle u,\varphi(\lambda\circledast)\rangle&=\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\varphi(\lambda x)dx=\lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}u(\frac{x}{\lambda})\varphi(x)dx\\&=\lambda^{-n-\gamma}\langle u,\varphi\rangle=\lambda^{-n-\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\varphi(x)dx\end{aligned}$$

因而 $\lambda^{-n}u(\frac{x}{\lambda})=\lambda^{-n-\gamma}u(x)$, 亦即 $u(x)=\lambda^{-\gamma}u(\frac{x}{\lambda})$, 这正是 γ 阶齐次函数的定义.

从定义出发可以验证下述性质:

命题 2.43 (齐次分布的简单性质)

(a) δ_0 是 $-n$ 阶齐次分布;

(b) 若 u 是 γ 阶齐次分布, 则 $D^\alpha u$ 是 $\gamma-|\alpha|$ 阶齐次分布;

(c) u 是 γ 阶齐次分布当且仅当 $\widehat{u}$ 是 $-n-\gamma$ 阶齐次分布.

证明 (a) 任取 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\langle\delta_0,\varphi(\lambda\circledast)\rangle=\varphi(0)=\lambda^{-n-(-n)}\varphi(0)=\lambda^{-n-(-n)}\langle\delta_0,\varphi\rangle.$$

根据定义即得结论.

(b) 当 u 是 γ 阶齐次分布, 任取 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 与 $\lambda>0$ 知

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha u,\varphi(\lambda\circledast)\rangle&=\langle u,(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\varphi(\lambda\circledast))\rangle=\langle u,(-1)^{|\alpha|}\lambda^{|\alpha|}(D^\alpha\varphi)(\lambda\circledast)\rangle\\&=\lambda^{-n-\gamma+\alpha}\langle u,(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi\rangle=\lambda^{-n-(\gamma-|\alpha|)}\langle D^\alpha u,\varphi\rangle\end{aligned}$$

根据定义即得结论.

(c) 当 u 是 γ 阶齐次分布, 任取 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 与 $\lambda>0$ 知

$$\begin{aligned}\langle\widehat{u},\varphi(\lambda\circledast)\rangle&=\langle u,\widehat{\varphi(\lambda\circledast)}\rangle=\langle u,\frac{1}{\lambda^n}\widehat{\varphi}(\frac{\xi}{\lambda})\rangle\\&=\lambda^{-n}\langle u,\widehat{\varphi}(\lambda^{-1}\xi)\rangle=\lambda^{-n}\lambda^{n+\gamma}\langle u,\widehat{\varphi}\rangle\\&=\lambda^{-n-(-n-\gamma)}\langle\widehat{u},\varphi\rangle\end{aligned}$$

根据定义即得结论. □

上面的命题特别说明了 $\mathbb{R}^n$ 上的 Dirac 测度是 $-n$ 阶齐次分布, 下面讨论另一种 $-n$ 阶齐次分布 W_Ω, 它将在奇异积分算子中起到至关重要的作用:

$$\langle W_\Omega,f\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}f(x)dx \tag{2.76}$$

其中 Ω 是球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上积分为零的可积函数. 下面验证 $W_\Omega\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是良定义的. 事实上, 因为 $\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}$ 在任意中心在原点的环[31]上积分均为零, 知

$$\begin{aligned}|\langle W_\Omega,\varphi\rangle|&=\left|\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}(\varphi(x)-\varphi(0))dx+\int_{|x|\geq1}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\varphi(x)dx\right|\\&\leq\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{|x|\leq1}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^{n-1}}dx+(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x||\varphi(x)|)\int_{|x|\geq1}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^{n+1}}dx\\&\lesssim\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}+\sum_{|\alpha|\leq1}\|x^\alpha\varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}.\end{aligned}$$

因此 $W_\Omega\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 类似于在原点的 Dirac 测度, 容易观察知 W_Ω 也是 $-n$ 阶齐次分布. 事实上只要 $\mathbb{R}^n$ 上的某 $-n$ 阶齐次分布在原点之外与某光滑函数重合, 它就具有 W_Ω 的形式, 此即下述结果:

命题 2.44 (零阶齐次函数的刻画)

若 $m\in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 是零阶齐次函数, 则存在标量 b 与 $\Omega\in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx=0$, 且

$$m^\vee=b\delta_0+W_\Omega \tag{2.77}$$

其中 W_Ω 是按(2.76)式定义的分布[a].

[a]因为零次齐次的连续函数一定有界, 故 m 首先是一个缓增分布, 因而上述 Fourier 逆变换是缓增分布意义下的.

要证明上述命题, 我们需要下面的命题作为铺垫:

[31]$\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心, r,R 分别为内圈, 外圈半径的环定义为 $\{\xi\in\mathbb{R}^n:0<r\leq|x-\xi|\leq R\}$.

命题 2.45 (z 阶齐次分布的性质)

若 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上的 C^∞ 函数, 且其是 $z(z \in \mathbb{C})$ 阶齐次的, 则 $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

在承认命题2.45的前提下, 下面来证明零阶齐次函数的刻画2.44.

证明 设 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} m(x)dx = a$, 因为 m 本身是零阶齐次函数 (即 $m(x) = m(\lambda x)(\forall \lambda \in \mathbb{C})$), 故 $m(x) - a = m(\lambda x) - a(\forall \lambda \in \mathbb{C})$, 因而函数 $m - a$ 也是零阶齐次函数. 因为 m 至少在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上可积, 根据其零阶齐次性知 $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 从而 $m - a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. 因为 $m - a \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 其自然能被视作缓增分布, 设 $m - a = \widehat{u}$, 其中 u 是缓增分布. 因为 $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, 故由命题2.45知同样有 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$[32]. 设 Ω 是 u 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的限制, 则显见 $\Omega \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 是良定义的. 因为 $\widehat{u}$ 是零阶齐次函数, 故在 $\widehat{u}(\lambda\xi) = \widehat{u}(\xi)$ 两边同时作 Fourier 逆变换可知 u 是 $-n$ 阶齐次函数, 又注意到 u 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上与 Ω 重合, 故对 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 有 $u(x) = \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}$.

下面说明 Ω 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上积分为零. 取 $\mathbb{R}^n$ 中非负径向光滑的非零函数 ψ, 设其支在环 $1 < |x| < 2$ 内, 考虑极坐标换元有:

$$\langle u, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n} \psi(x)dx = c_\psi \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)d\theta,$$

$$\langle u, \psi \rangle = \langle \widehat{u}, \psi^\vee \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (m(\xi) - a)\psi^\vee(\xi)d\xi = c'_\psi \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (m(\theta) - a)d\theta = 0$$

于是因为 $c_\psi \neq 0$, 只能有 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)d\theta = 0$.

现在按照(2.76)式定义分布 W_Ω, 知其在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上与函数 $\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}$ 重合. 与此同时分布 u 在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上也与该函数重合, 这说明 $u - W_\Omega$ 支在原点. 支在原点的缓增分布刻画2.6表明 $u - W_\Omega$ 是 Dirac 测度一系列导数的有限和. 又因为 $u - W_\Omega$ 是 $-n$ 阶齐次分布, 而 $D^\alpha \delta_0$ 仅在 $\alpha = 0$ 时成为 $-n$ 阶齐次分布, 故

$$u - W_\Omega = c\delta_0.$$

又根据 u 的构造知 $u = (m - a)^\vee = m^\vee - a\delta_0$, 故 $m^\vee = (c + a)\delta_0 + W_\Omega$, 命题即证. □

下面证明 z 阶齐次分布的性质2.45.

证明 设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是 z 阶齐次函数, 且在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上光滑, 往证 $\widehat{u}$ 在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上也光滑, 这便需要说明 $\widehat{u} \in C^M(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ 对任意 $M \in \mathbb{N}$ 均成立. 取定 $M \in \mathbb{N}$, 设 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 满足

$$|\alpha| > n + M + \operatorname{Re} z. \tag{2.78}$$

设 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $|x| \geq 2$ 时恒为 1, 而在 $|x| \leq 1$ 时恒为零, 记 $u_0 = (1 - \varphi)u, u_\infty = \varphi u$, 则

$$D^\alpha u = D^\alpha u_0 + D^\alpha u_\infty,$$

于是

$$\widehat{D^\alpha u} = \widehat{D^\alpha u_0} + \widehat{D^\alpha u_\infty}.$$

其中各算子的作用是在分布的意义下进行的. 因为 u_0 是紧支函数, 故根据紧支分布 Fourier 变换的性质2.21知 $\widehat{D^\alpha u_0} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. 现根据 Leibniz 公式有

$$D^\alpha u_\infty = v + \varphi D^\alpha u$$

其中 v 是支在环 $1 \leq |x| \leq 2$ 上的光滑函数, 这是因为 v 本质上是应用 Leibniz 公式后全体对 φ 求过偏导的部分的求和. 因为 φ 在 $|x| \leq 1$ 和 $|x| \geq 2$ 上均为常数, 因此 φ 的各阶偏导是支在 $1 \leq |x| \leq 2$ 上的光滑函数, 又因为 u 在原点之外也是光滑函数, 故 v 只能支在 $1 \leq |x| \leq 2$ 上. 现知 $\widehat{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, 于是只需说明 $\widehat{\varphi D^\alpha u} \in C^M(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ 即可. 显见 $\varphi D^\alpha u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 同时根据 u 是 z 阶齐次函数容易证明 $D^\alpha u$ 是 $z - |\alpha|$ 阶齐次函数, 于是类似于零阶齐次函数刻画2.44证明中的蓝色部分, 可得 $(D^\alpha u)(x) = |x|^{-|\alpha|+z}(D^\alpha u)(\frac{x}{|x|})$. 因为 φ 支在原点之外, 故存在 $C_\alpha > 0$ 使得

$$|\varphi(x)(D^\alpha u)(x)| \leq \frac{C_\alpha}{(1 + |x|)^{|\alpha| - \operatorname{Re} z}}. \tag{2.79}$$

为了藉由(2.79)式阐明 $\widehat{u}$ 的光滑性, 需要引入下述引理:

[32]因为 $\widehat{\widehat{u}} = u(-\circledast)$, 故命题2.45同样可由 $\widehat{u}$ 的性质推得 u 的性质.

引理 2.13

若函数 f 满足估计

$$|f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^N},$$

其中 $C>0, N>n+1$, 则对任意满足 $1\le M<N-n$ 的 $M\in\mathbb{N}$ 均有 $\widehat{f}\in C^M(\mathbb{R}^n)$.

这是因为对任意 $\xi_0\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)-\widehat{f}(\xi_0)| &\le \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\cdot|e^{-i2\pi x\cdot\xi}-e^{-i2\pi x\cdot\xi_0}|dx\\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}|2\pi x f(x)|\cdot|\xi-\xi_0|dx\\ &\lesssim |\xi-\xi_0|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x|}{(1+|x|)^N}dx\end{aligned}$$

于是首先有 $\widehat{f}\in C^1(\mathbb{R}^n)$. 对一般的 $1\le M<N-n$, 注意 $D^\alpha\widehat{f}=((-i2\pi x)^\alpha f)^\wedge$ 同样可证 $\widehat{f}\in C^M(\mathbb{R}^n)$, 引理得证.

回到原命题, 根据引理可知只要 $|\alpha|>n+M+\operatorname{Re}z$, 就有 $\widehat{\varphi D^\alpha u}\in C^M(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, 因而 $\widehat{D^\alpha u_\infty}\in C^M(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, 这便说明 $\widehat{D^\alpha u}\in C^M(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. 下面从 $\widehat{D^\alpha u}(\xi)=(i2\pi\xi)^\alpha\widehat{u}(\xi)$ 出发来推导 $\widehat{u}\in C^M(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. 设 $\xi\ne 0$, 取 ξ 的某邻域 V 满足对 V 内任意一点 η 均存在 $j\in\{1,\cdots,n\}$ 使得 $\eta_j\ne 0$. 考虑多重指标 $(0,\cdots,|\alpha|,\cdots,0)$(其中 $|\alpha|$ 在第 j 位, 其余位均为 0), 知 $(i2\pi\eta_j)^{|\alpha|}\widehat{u}(\eta)$ 是 V 上的 C^M 函数, 两边同除 $\eta_j^{|\alpha|}$ 即知 $\widehat{u}(\eta)$ 也是 V 上的 C^M 函数, 因此 $\widehat{u}\in C^M(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. 又因为前面选取的 M 是任意的, 结论因而成立. □

本小节末我们再给出一个齐次分布的例子, 即 $\mathbb{R}^n$ 上的幂函数 $|t|^z$ 诱导的分布 (其中 $\operatorname{Re}z\le -n$). 若 $n=1$, 则缓增分布

$$\langle w_z,\varphi\rangle := \int_{-1}^{1}|t|^z\varphi(t)dt$$

在 $\operatorname{Re}z>-1$ 时是良定义的, 这是因为

$$|\langle w_z,\varphi\rangle| \le \|\varphi\|_{L^\infty[-1,1]}\int_{-1}^{1}|t|^{\operatorname{Re}z}dt \lesssim \rho_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\varphi)$$

故 w_z 确为缓增分布. 我们还可以将这一定义延拓到 $\operatorname{Re}z>-3$ 且 $z\ne -1$ 的情况, 延拓方法为将上式重写为

$$\langle w_z,\varphi\rangle = \int_{-1}^{1}|t|^z(\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0))dt+\frac{2}{z+1}\varphi(0) \tag{2.80}$$

且由 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 与微分中值定理可知

$$|\langle w_z,\varphi\rangle| \le \frac{1}{|\operatorname{Re}z+3|}\|\varphi''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\frac{2}{|z+1|}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

因此 $w_z\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, 这样的延拓进而是合理的. 另外若采用 φ 在 0 处的三阶而非一阶 Taylor 多项式, 通过类似(2.80)式的形式可以进一步将 w_z 的定义延拓至 $\operatorname{Re}z>-5, \operatorname{Re}z\notin\{-1,-3\}$ 的情况. 随着 Taylor 多项式的阶数越来越高, w_z 的定义可以延拓到 $z\in\mathbb{C}$ 不为负奇数的情况. 为将 $z=-1,-3,\cdots$, 这些点也囊入 w_z 的定义, 我们就需要给 w_z 乘上某个整函数, 这个整函数需要在全体负奇数处为零, 如此才能消掉这些一阶极点. $\Gamma(\frac{z+1}{2})^{-1}$ 就是满足该要求的一个整函数[33]. 上述讨论在 $\mathbb{R}^n$ 中对应着下述定义[34]:

定义 2.20

对 $z\in\mathbb{C}$, 可定义分布 u_z 为:

$$\langle u_z,f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}|x|^z f(x)dx. \tag{2.81}$$

显见 u_z 在 $\operatorname{Re}z>-n$ 时与局部可积函数 $x\mapsto\pi^{\frac{z+n}{2}}\Gamma(\frac{z+n}{2})^{-1}|x|^z$ 重合, u_z 自身也只在 $\operatorname{Re}z>-n$ 时良定义. 由定义立得 u_z 是 z 阶齐次分布. 下面将 u_z 的定义延拓到 $z\in\mathbb{C}$ 的情况. 先设 $\operatorname{Re}z>-n$, 取定正整数 N. 对 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

[33] 回忆 Γ 函数的所有极点为负整数.

[34] 前面所谈的定义方式问题在于, 从 $\operatorname{Re}z>-n$ 的定义不能直接推到 $\operatorname{Re}z>-n-1$ 的定义, 中间会出现 $\operatorname{Re}z=-n$ 这一未定义点. 因此为了得到归纳定义 (亦即从 $\operatorname{Re}z>-n$ 可归纳得 $\operatorname{Re}z>-n-1$, 而无需强调未定义点) 而重新规定 u_z 的定义为下述新定义.

将积分(2.81)重写为:

$$\begin{aligned}&\int_{|x|<1}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}\left(f(x)-\sum_{|\alpha|\le N}\frac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!}x^\alpha\right)|x|^z dx+\int_{|x|>1}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}f(x)|x|^z dx\\&+\int_{|x|<1}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}\sum_{|\alpha|\le N}\frac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!}x^\alpha|x|^z dx.\end{aligned}$$

对上式最后一项用极坐标换元知上式即

$$\begin{aligned}&\int_{|x|<1}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}\left(f(x)-\sum_{|\alpha|\le N}\frac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!}x^\alpha\right)|x|^z dx+\int_{|x|>1}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}f(x)|x|^z dx\\&+\sum_{|\alpha|\le N}\frac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}\int_0^1 dr\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(r\theta)^\alpha r^{z+n-1}d\theta.\end{aligned}$$

现在对于上最后一项, 令

$$\begin{aligned}b(n,\alpha,z)&=\frac{1}{\alpha!}\frac{\pi^{\frac{z+\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)}\int_0^1 dr\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(r\theta)^\alpha r^{z+n-1}d\theta\\&=\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}\frac{1}{\alpha!}\left(\int_{S^{n-1}}\theta^\alpha d\theta\right)\int_0^1 r^{|\alpha|+n+z-1}dr\\&=\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}\frac{\frac{1}{\alpha!}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\theta^\alpha d\theta}{|\alpha|+z+n},\end{aligned}$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是多重指标. 因为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 关于原点对称, 故根据奇函数在原点对称集上积分的消失性知, 只要有某个 α_j 是奇数, 就有 $b(n,\alpha,z)=0$. 于是不妨设全体 α_j 均为偶数, 因此 $|\alpha|$ 也是偶数. 回忆复变函数的结论, 知点 $z=-n,z=-(n+2),z=-(n+4),\cdots$ 均为函数 $\Gamma(\frac{z+n}{2})$ 的一阶极点, 这些极点恰好抵消了函数 $z\mapsto(|\alpha|+z+n)^{-1}$ 在 $z=-n-|\alpha|$($|\alpha|$ 是 $[0,N]$ 中的偶数) 处的极点. 因此

$$\begin{aligned}\langle u_z,f\rangle=&\int_{|x|\ge 1}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}f(x)|x|^z dx+\sum_{|\alpha|\le N}b(n,\alpha,z)(-1)^{|\alpha|}\langle D^\alpha\delta_0,f\rangle\\&+\int_{|x|<1}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}\left(f(x)-\sum_{|\alpha|\le N}\frac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!}x^\alpha\right)|x|^z dx.\end{aligned}\tag{2.82}$$

上式中出现的两个积分在 $\operatorname{Re}z>-N-n-1$ 时均绝对收敛, 这是因为第一个积分中 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故被积函数在 x 足够大时是足够衰减的; 第二个积分中根据中值定理可知 $f(x)-\sum_{|\alpha|\le N}\frac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!}x^\alpha$ 能被 $|x|^{N+1}$ 的常数倍控制, 代入该控制后得到的函数在 $x=0$ 附近形如 $|x|^{N+1+z}$, 又因为 $\operatorname{Re}z>-N-n-1$, 故 $N+1+\operatorname{Re}z>-1$, 这说明被积函数在 $x=0$ 附近可积. 因此, (2.82)式所定义的关于 z 的函数在 $\operatorname{Re}z>-N-n-1$ 时是良定义的解析函数.

因为 N 是任意整数, 故 $\langle u_z,f\rangle$ 在 $\mathbb{C}$ 上有解析延拓. 因此, u_z 是关于 z 的分布值整函数, 亦即对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 而言, 函数 $z\mapsto\langle u_z,\varphi\rangle$ 都是整函数. 另外对每个给定的 $z\in\mathbb{C}$ 而言, u_z 都是缓增分布, 因为在(2.82)右式第一项中, 将被积函数记为 $C|x|^{\operatorname{Re}z+n+1}f(x)\cdot|x|^{-n-1}$, 利用 Hölder 不等式即知该项可被 f 的 Schwartz 半范控制; 第二项是 Dirac 测度及其偏导在 f 上的作用, 由 Dirac 测度是缓增分布即知该项可被 f 的 Schwartz 半范控制; 第三项中的被积函数依照中值定理能被 $\|D^{N+1}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|x|^{N+1+\operatorname{Re}z}$ 控制, 因此第三项也可被 f 的 Schwartz 半范控制. 至此即知对每个 $z\in\mathbb{C}$ 而言均有 $u_z\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

在阐明 u_z 是缓增分布后, 便可以对其作用 Fourier 变换了. 根据齐次分布的简单性质2.43(c) 知 $\widehat{u_z}$ 是 $-n-z$ 次齐次分布, 进一步有下述结果:

定理 2.22

对任意 $z\in\mathbb{C}$ 均有 $\widehat{u_z}=u_{-n-z}$.

证明 证明的思路是很直接的: 先证明对某一范围的 z 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^z\widehat{\varphi}(\xi)d\xi=C(n,z)\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n-z}\varphi(x)dx,\tag{2.83}$$

其中 $C(n,z)$ 是常数, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 任取; 然后取一个特定的 φ 来估计常数 $C(n,z)$; 最后根据解析函数没有孤立零点将(2.83)式推广到整个复平面上. 在(2.83)式中考虑极坐标换元 (这里可以暂时设 $-n<\operatorname{Re}z<0$ 以保证式子两端积分均有意义), 记 $\xi=\rho\phi, x=r\theta$, 有:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^z\widehat{\varphi}(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^z\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\right)d\xi\\
&= \int_0^\infty\rho^z\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(r\theta)e^{-i2\pi r\rho\phi\cdot\theta}d\theta\cdot r^{n-1}dr\cdot d\phi\cdot\rho^{n-1}d\rho\\
&\overset{(A)}{=} \int_0^\infty r^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(r\theta)\int_0^\infty\rho^{z+n-1}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}e^{-i2\pi r\rho(\phi\cdot\theta)}d\phi\right)d\rho d\theta dr\\
&= \int_0^\infty r^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(r\theta)\left(\int_0^\infty\rho^{z+n-1}\sigma_n(r\rho)d\rho\right)d\theta dr\\
&\overset{(B)}{=} C(n,z)\int_0^\infty r^{-z-n}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(r\theta)d\theta\right)r^{n-1}dr\\
&= C(n,z)\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n-z}\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

其中

$$\sigma_n(t)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}e^{-i2\pi t(\theta\cdot\varphi)}d\varphi=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}e^{-i2\pi t\varphi_1}d\varphi, \tag{2.84}$$

$$C(n,z)=\int_0^\infty\sigma_n(t)t^{z+n-1}dt, \tag{2.85}$$

上述推导中 (A) 需要特别强调积分顺序的调换: 这里因为 $\int_0^\infty\rho^{z+n-1}d\rho$ 可能为 ∞, 故我们并不能随意调换与之相关的换元 (即 $d\rho, d\phi$) 对应的积分顺序. 出于相同原因, (A) 所蕴含的将 $d\phi d\rho$ 与 $d\theta dr$ 整体调换的合法性是之后要说明的, 出现在此只为叙述需要. (B) 中 r 的指数是在 (B) 左式括号中凑微分计算得到的. (2.84)式中第二个等号是对 φ 作对应正交变换得到的. 下面要说明 (A) 的操作合法, 就是要说明(2.85)右式积分对某个范围内的 z 均收敛.

若 $n=1$, 则

$$\sigma_1(t)=\int_{\mathbb{S}^0}e^{-i2\pi t\varphi}d\varphi=e^{-i2\pi t}+e^{i2\pi t}=2\cos(2\pi t)$$

此时可说明(2.85)右式积分在 $-1<\operatorname{Re}z<0$ 时条件收敛.

现设 $n\geq 2$. 因为 $|\sigma_n(t)|\leq\nu_{n-1}=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}d\varphi$, 故在 $\operatorname{Re}z>-n$ 时, (2.85)右式积分在 t 很小时绝对收敛. 下面考察 $\sigma_n(t)$ 在 t 很大时的表现. 由引理4.2与 Bessel 函数的定义

$$J_\nu(t)=\frac{(t/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{-1}^1 e^{its}(1-s^2)^\nu\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

可知

$$\sigma_n(t)=\nu_{n-2}\int_{-1}^1 e^{i2\pi ts}(\sqrt{1-s^2})^{n-2}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}=c_nt^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi t)$$

其中 c_n 是某常数. 因为 $n\geq 2\Rightarrow\frac{n-2}{2}>-\frac{1}{2}$, 故由 Bessel 函数的渐进性质[35]知对任意 $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$ 与 $r\geq 1$ 有:

$$|J_\nu(r)|\leq C_1(\operatorname{Re}\nu)e^{\left(\max\left((\operatorname{Re}\nu+\frac{1}{2})^{-2},(\operatorname{Re}\nu+\frac{1}{2})^{-1}\right)+\frac{\pi}{2}\right)|\operatorname{Im}\nu|^2}r^{-\frac{1}{2}}$$

因此对任意 $t\geq 1$ 均有 $|\sigma_n(t)|\leq ct^{-\frac{n-1}{2}}$. 现在将(2.85)右式积分分为 $t\leq 1$ 和 $t>1$ 两部分, 利用该估计即知 $\operatorname{Re}z>-n$ 时 $t\leq 1$ 的部分绝对收敛, $\operatorname{Re}z<-\frac{n+1}{2}$ 时 $t\geq 1$ 的部分绝对收敛.

现在已经知道了在 $-n<\operatorname{Re}z<-\frac{n+1}{2}\wedge n\geq 2$ 或 $-1<\operatorname{Re}z<0\wedge n=1$ 时, (A) 的操作是合法的, 进而根据缓增分布的 Fourier 变换定义知存在常数 $C(n,z)$ 使得

$$\frac{\Gamma(\frac{z+n}{2})}{\pi^{\frac{z+n}{2}}}\widehat{u_z}=C(n,z)\frac{\Gamma(-\frac{z}{2})}{\pi^{\frac{z}{2}}}u_{-n-z}.$$

下面通过取特殊函数来计算 $C(n,z)$. 在(2.83)式中取 $\varphi(x)=e^{-\pi|x|^2}$. 已知该函数满足 $\widehat{\varphi}=\varphi$, 现将其代入(2.83)式并

[35]参见 **[LG1]**Appendix B.7, 这里可以只关注结论.

考虑极坐标换元可得

$$v_{n-1}\int_0^\infty r^{z+n-1}e^{-\pi r^2}dr = C(n,z)v_{n-1}\int_0^\infty r^{-z-n+n-1}e^{-\pi r^2}dr.$$

换元 $s=\pi r^2$ 并利用 Gamma 函数的定义即得

$$C(n,z)=\frac{\Gamma(\frac{z+n}{2})}{\Gamma(-\frac{z}{2})}\frac{\pi^{-\frac{z+n}{2}}}{\pi^{\frac{z}{2}}}.$$

至此即得 $\widehat{u_z}=u_{-n-z}$.

注意到对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 函数 $z\mapsto\langle\widehat{u_z}-u_{-n-z},f\rangle$ 都是整函数, 且在 $-n<\operatorname{Re}z<-n+\frac{1}{2}$ 时均为零. 因为非零解析函数没有孤立零点, 故该函数在整个复平面上均为零, 定理即证. □

2.13 $L^p(1<p\le 2)$ 上的 Fourier 变换

引进 Schwartz 函数空间的目的就在于把 L^1 上的 Fourier 变换延拓到 $L^p(1<p\le\infty)$ 上. 注意 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 作为一个" 大" 空间, 其上的 Fourier 变换已经在上一节具有良定义了, 所以要给出 $L^p(\mathbb{R}^n)(1<p\le\infty)$ 上 Fourier 变换的定义, 就可以考虑说明 $L^p(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)(1<p\le\infty)$, 再套用 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中 Fourier 变换的定义即可. 此即下述命题:

命题 2.46

若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1\le p\le\infty)$, 则 f 唯一对应一个缓增分布. ♠

证明 任取 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 令

$$\langle T_f,\varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,$$

首先由 Hölder 不等式即知 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$ 有限, 下证 $T_f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 事实上, 对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 由 Hölder 不等式知

$$|\langle T_f,\varphi\rangle|\le\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

又由补充命题2.1知 $\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$ 能被函数 $x^\alpha\varphi(x)$ 的 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 范数的有限线性组合所控制, 故其能被 φ 的有限 Schwartz 半范和控制, 进而 $T_f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

根据命题2.46, 只要 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1\le p\le\infty)$, 就可以在缓增分布的意义下按照补充命题2.2去定义 f 的 Fourier 变换, 根据这个思路可以得到下述 Plancherel 定理:

定理 2.23 (Plancherel)

Fourier 变换是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的等距映射. 即对任意 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 均有 $\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$(其中 $\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 意为存在 $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\widehat{f}=T_g(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 且 $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$), 且 $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. 另有

$$\widehat{f}(\xi)=\lim_{R\to\infty}\int_{|x|<R} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n \tag{2.86}$$

$$f(x)=\lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|<R}\widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n \tag{2.87}$$

并且上述两个极限均在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 意义下成立. ♡

证明 首先证明 Plancherel 恒等式在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中成立. 设 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 令 $g:=\overline{\widehat{f}}$, 则 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 且对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 由 Fourier 反演公式2.14知

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\widehat{f}}(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\\&=\overline{\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)e^{i2\pi x\cdot\xi}dx}=\overline{f(\xi)}\end{aligned}$$

故由乘法公式2.13知

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{f}(x)}dx = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.\end{aligned}$$

故 Plancherel 恒等式对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均成立.

下面证明 Plancherel 恒等式对任意 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 也成立. 因为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 故存在 $\{f_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=0$, 故 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Cauchy 列. 现由 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Plancherel 恒等式知 $\{\widehat{f_k}\}_{k=1}^\infty$ 同样是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的基本列, 故由 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的完备性进一步知存在 $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\widehat{f_k}-g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=0$. 由此并再次应用 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Plancherel 恒等式知

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\lim_{k\to\infty}\|\widehat{f_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\lim_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

现在证明 $\widehat{f}=T_g(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. 事实上, 对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 由 Hölder 不等式与 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\begin{aligned}\langle\widehat{f},\varphi\rangle=\langle f,\widehat{\varphi}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_k}(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx=\langle T_g,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

故 $\widehat{f}=T_g(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. 因此 $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, 即 Plancherel 恒等式在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上成立.

下面证明(2.86),(2.87)式成立, 为此任取 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 对任意 $R\in(0,\infty)$ 定义 $f_R:=f\chi_{B(0,R)}$, 显见 $f_R\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 且 $\lim\limits_{R\to\infty}f_R=f(L^2(\mathbb{R}^n))$. 故由 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Plancherel 恒等式知对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi)=\lim_{R\to\infty}\widehat{f_k}(\xi) &= \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_R(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{|x|<R} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx\end{aligned}$$

在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的意义下成立, 由此对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 进一步有

$$\begin{aligned}(\widetilde{\widehat{f}})^\wedge(x) &= \lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|<R}\widehat{f}(-\xi)e^{-i2\pi x\cdot\xi}d\xi \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|<R}\widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}\end{aligned}\tag{2.88}$$

在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的意义下成立. 又任取 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\|f-f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\to 0(k\to\infty)$, 由 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Plancherel 恒等式知

$$\|(\widetilde{\widehat{f}})^\wedge-(\widetilde{\widehat{f_k}})^\wedge\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|\widetilde{\widehat{f}}-\widetilde{\widehat{f_k}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|\widehat{f}-\widehat{f_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|f-f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\to 0,\quad k\to\infty$$

由此及 Fourier 反演公式知

$$(\widetilde{\widehat{f}})^\wedge=\lim_{k\to\infty}(\widetilde{\widehat{f_k}})^\wedge=\lim_{k\to\infty}f_k=f(L^2(\mathbb{R}^n))$$

再由此与(2.88)式知对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$f(x)=\lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|<R}\widetilde{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi(L^2(\mathbb{R}^n))$$

至此定理证毕. □

实际上, 依照这一套方法定义的 Fourier 变换的收敛性非常弱 (因为它考虑的收敛性是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的). 如果从函数而非分布的意义下考虑 Fourier 变换的延拓, 就需要 **[ST4]** 中给出的一个命题:

补充命题 2.4 (线性算子延拓定理)

设 $(X, \|\circledast\|_X), (Y, \|\circledast\|_Y)$ 是 Banach 空间, $S \subset X$ 是 X 的一个稠密线性子空间. 若 $T_0 : S \to Y$ 满足

$$\|T_0 f\|_Y \lesssim \|f\|_X, \quad \forall f \in S,$$

则 T_0 在 X 上有唯一的延拓 T, 且

$$\|Tf\|_Y \lesssim \|f\|_X, \quad \forall f \in X.$$

进一步, $\|T\|_{X\to Y} = \|T_0\|_{S\to Y}$, 亦即 T 是 T_0 的保范延拓.

证明 任取 $f \in X$, 因为 S 在 X 中稠密, 故存在 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ 使得 $\|f_n - f\|_X \to 0(n \to \infty)$. 显见 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的基本列, 根据 T_0 满足的条件知

$$\|T_0(f_n - f_m)\|_Y \lesssim \|f_n - f_m\|_X \to 0, \quad m, n \to \infty$$

于是 $\{T_0 f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中的基本列, 根据 Y 的完备性知其在 Y 中具有极限 y, 现构造算子

$$T : X \to Y, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f \mapsto Tf := \lim_{n\to\infty} T_0 f_n$$

根据极限唯一性可见 Tf 并不依赖于 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的选取, 因而 $T : X \to Y$ 即为欲求. 下面证明 T 的保范性, 注意

$$\|T\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X\le 1} \|Tf\|_Y \ge \sup_{\substack{\|f\|_X\le 1\\ f\in S}} \|Tf\|_Y = \|T_0\|_{S\to Y}$$

故只需说明 $\|T\|_{X\to Y} \le \|T_0\|_{S\to Y}$. 若 $\|T\|_{X\to Y} > \|T_0\|_{S\to Y}$, 根据算子范数的定义知

$$\exists f \in X(\|f\|_X \le 1 \wedge \|Tf\|_Y > \|T_0\|_{S\to Y})$$

根据 S 在 X 中的稠密性, 可设 $S \ni f_k \to f(k \to \infty)$, 且 $\|f_k\|_X \le 1(k = 1, 2, \cdots)$. 于是必存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得 $\|Tf_K\|_X = \|T_0 f_K\|_X > \|T_0\|_{S\to Y}$, 矛盾! 命题即证. □

延拓定理2.4对于 Plancherel 定理的优化在于它允许我们不再用 T_g 定义 $\widehat{f}$, 而是直接把 L^2 函数 g 定义成 $\widehat{f}$, 且这一定义不会改变 Plancherel 恒等式. 由此可知 L^2 函数的 Fourier 变换实际上还是 L^2 函数.

注 Plancherel 定理2.23给出了 Fourier 变换对 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 代数结构的作用, 事实上 Fourier 变换对 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的几何结构 (也即内积) 也有作用. **[DY]** 介绍了下述 Parseval 恒等式:

补充定理 2.2 (Fourier 变换的 Parseval 恒等式)

对任意 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 均有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(-x)}dx.$$

在泛函分析的课程中曾学习过范数与内积的相容性条件: 平行四边形等式. 事实上 Plancherel 定理介绍的是关于范数的等式, 而 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 作为内积空间, 范数和内积是可以互相诱导的, 故 Parseval 恒等式是 Plancherel 定理与平行四边形等式的直接推论.

在给出 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 这两个" 端点空间" 中的 Fourier 变换后, 下面可以研究 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < 2)$ 上的 Fourier 变换了. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < 2)$, 在实变函数的课程中有结论: f 可以分解成 $f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$(例如令 $f_1 = f\chi_{\{x:|f(x)|>1\}}$, $f_2 = f - f_1$, 参见加和空间插值1.14). 进而 $\widehat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. 为了进一步研究 $\widehat{f}$ 所处的空间, 需要下面的插值定理:

定理 2.24 (Riesz-Thorin 插值定理)

设 $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$, 对 $0 < \theta < 1$ 定义 p, q 为:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

现若 $T: L^{p_0}(\mathbb{R}^n)+L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\to L^{q_0}(\mathbb{R}^n)+L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ 是线性算子, 且其满足

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n)} &\le M_0\|f\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\\ \|Tf\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} &\le M_1\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f\in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\end{aligned} \tag{2.89}$$

则

$$\|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f\in L^p(\mathbb{R}^n)$$

证明 若 $p=\infty$ 或 $q'=\infty$, 则命题无所可证. 下设 $p,q'<\infty$, 设

$$f(x)=\sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k}\chi_{A_k}(x)$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限简单函数, 其中 $a_k>0$, α_k 是实数, A_k 是 $\mathbb{R}^n$ 中有限测度的不交子集列. 注意 $L^q(\mathbb{R}^n)=(L^{q'}(\mathbb{R}^n))^*$, 于是 $\|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ 可以视作 $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ 上的算子范数, 即:

$$\|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}=\sup_g\left|\int_{\mathbb{R}^n}Tf(y)g(y)dy\right|$$

其中上确界在 $L^{q'}$ 范数小于等于 1 的全体有限简单函数 g 中取. 记

$$g(x)=\sum_{j=1}^n b_j e^{i\beta_j}\chi_{B_j}(x)$$

其中 $b_j>0,\beta_j$ 是实数, B_j 是 $\mathbb{R}^n$ 中有限测度的不交子集列. 记

$$P(z)=\frac{p}{p_0}(1-z)+\frac{p}{p_1}z, \quad Q(z)=\frac{q'}{q_0'}(1-z)+\frac{q'}{q_1'}z \tag{2.90}$$

对于闭带 $\overline{S}=\{z\in\mathbb{C}:0\le\operatorname{Re}z\le 1\}$ 中的 z, 定义

$$f_z(y)=\sum_{k=1}^m a_k^{P(z)}e^{i\alpha_k}\chi_{A_k}(y), \quad g_z(y)=\sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)}e^{i\beta_j}\chi_{B_j}(y) \tag{2.91}$$

且记

$$F(z)=\int_{\mathbb{R}^n}Tf_z(y)g_z(y)dy$$

注意 $P(\theta)=Q(\theta)=1\Rightarrow f_\theta(y)=f(y),g_\theta(y)=g(y)$, 根据积分的线性性知:

$$F(z)=\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n a_k^{P(z)}b_j^{Q(z)}\int_{\mathbb{R}^n}T(\chi_{A_k})(y)\chi_{B_j}(y)dy$$

因为 $a_k,b_j>0$, 故 F 对 z 是解析的. 同时利用指标为 q_0,q_0' 的 Hölder 不等式与条件(2.89)可知

$$\int_{\mathbb{R}^n}T(\chi_{A_k})(y)\chi_{B_j}(y)dy\le\|T\chi_{A_k}\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{q_0'}(\mathbb{R}^n)}<\infty$$

因而 $\int_{\mathbb{R}^n}T(\chi_{A_k})(y)\chi_{B_j}(y)dy$ 绝对收敛, 其为有限常数, 故 F 对 f_z,g_z 是良定义且关于 z 解析的函数.

根据 A_k 的不交性与 $|a_k^{P(it)}|=a_k^{\frac{p}{p_0}}$ 可知:

$$\begin{aligned}\|f_{it}\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{k=1}^m a_k^{P(it)}e^{i\alpha_k}\chi_{A_k}(y)\right|^{p_0}dy\right)^{\frac{1}{p_0}}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^m a_k^p\chi_{A_k}(y)dy\right)^{\frac{1}{p_0}}\\ &=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k}\chi_{A_k}(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p_0}}=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p_0}}\end{aligned}$$

同理根据 B_j 的不交性与 $|b_j^{Q(it)}|=b_j^{\frac{q'}{q_0'}}$ 可知:

$$\|g_{it}\|_{L^{q_0'}(\mathbb{R}^n)}=\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q'}{q_0'}}$$

故根据指标为 q_0, q_0' 的 Hölder 不等式与条件(2.89)知:

$$|F(it)| \le \|T(f_{it})\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g_{it}\|_{L^{q_0'}(\mathbb{R}^n)} \le M_0\|f_{it}\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g_{it}\|_{L^{q_0'}(\mathbb{R}^n)} = M_0\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p_0}} \cdot \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q'}{q_0'}} \tag{2.92}$$

同理有

$$\|f_{1+it}\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p_1}}, \quad \|g_{1+it}\|_{L^{q_1'}(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q'}{q_1'}}$$

从而可得

$$|F(1+it)| \le M_1\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p_1}} \cdot \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q'}{q_1'}} \tag{2.93}$$

最后要完成证明, 需要引入 Hadamard 三线引理:

引理 2.14 (Hadamard 三线引理)

设 F 是开带 $S=\{z\in\mathbb{C}: 0<\operatorname{Re} z<1\}$ 上的解析函数, 且在 $\overline{S}$ 上有界连续, 亦即存在 $0<B_0,B_1<\infty$ 使得 $\operatorname{Re} z=0$ 时 $|F(z)|\le B_0$, $\operatorname{Re} z=1$ 时 $|F(z)|\le B_1$. 则对任意的 $0\le\theta\le1$, 在 $\operatorname{Re} z=\theta$ 时有 $|F(z)|\le B_0^{1-\theta}B_1^{\theta}$.

要证明这个引理, 可定义解析函数:

$$G(z)=F(z)(B_0^{1-z}B_1^{z})^{-1}, \quad G_n(z)=G(z)e^{\frac{z^2-1}{n}}$$

其中 z 在单位带 S 上, $n=1,2,\cdots$. 既然 F 在 $\overline{S}$ 上有界, 且

$$|B_0^{1-z}B_1^{z}| \ge \min(1,B_0)\min(1,B_1)>0$$

对任意 $z\in\overline{S}$ 均成立, 可知 G 在 $\overline{S}$ 上以某常数 M 为界. 因为

$$|G_n(x+iy)| \le Me^{-\frac{y^2}{n}}e^{\frac{x^2-1}{n}} \le Me^{-\frac{y^2}{n}}$$

可知 $G_n(x+iy)$ 在 $|y|\to\infty$ 时关于 $0\le x\le1$ 一致趋零. 取用 $y(n)>0$ 满足对任意 $|y|\ge y(n)$, 都有 $|G_n(x+iy)|\le 1(\forall x\in[0,1])$. 同时, 对 F 的假设表明 G 在构成 $\overline{S}$ 边界的两条直线上以 1 为界. 从而根据极值原理可知对任意 $z\in[0,1]\times[-y(n),y(n)]$ 均有 $|G_n(z)|\le1$. 因为 $|G_n(z)|\le1$ 对闭带中的任意 z 均成立, 令 $n\to\infty$ 即得 $|G(z)|\le1$ 在闭带上成立. 取 $z=\theta+it$ 可得

$$|F(\theta+it)| \le |B_0^{1-\theta-it}B_1^{\theta+it}| = B_0^{1-\theta}B_1^{\theta}$$

其中 t 是实数, 引理得证. □

最后回到证明, 观察到 F 在开带 S 上解析, 在 $\overline{S}$ 上连续. 同时 F 在单位带上有界 (界依赖于 f,g). 因此根据(2.92),(2.93)式与三线引理知:

$$|F(z)| \le (M_0\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p_0}}\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q'}{q_0'}})^{1-\theta}(M_1\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p_1}}\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q'}{q_1'}})^{\theta} = M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$$

其中 $\operatorname{Re} z=\theta$. 观察到 $P(\theta)=Q(\theta)=1$, 因此

$$F(\theta)=\int_{\mathbb{R}^n} Tf(y)g(y)dy$$

现对全体 $L^{q'}$ 范数小于等于 1 的有限简单函数 g 取上确界即得欲证. □

$L^p(1\le p\le2)$ 函数的 Fourier 变换所在空间由下述定理给出:

推论 2.8 (Hausdorff-Young 不等式)

若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1\le p\le2)$, 则 $\widehat{f}\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

证明 因为已经知道 $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ 与 $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, 故由 Riesz-Thorin 插值定理2.24, 取 $T=\mathcal{F}$, 只

要 $0 < \theta < 1$, 且

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

亦即 $q = p'$, 则

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le 1^{1-\theta}1^{\theta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

至此我们讨论的都是延拓定理2.4中 $X = L^p(\mathbb{R}^n), Y = L^{p'}(\mathbb{R}^n)(1 \le p \le 2)$ 的情况. 一个自然的问题是 Fourier 变换的延拓是否对任意的 $X = L^p(\mathbb{R}^n), Y = L^q(\mathbb{R}^n)(1 \le p, q \le \infty)$ 均成立? 要想套用延拓定理2.4, 就必须讨论不等式

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.94}$$

在什么情况下成立 (或可能成立). 从 scaling 的角度来看, 如果把 $f(x)$ 换成 $g(x) = f(\lambda x)(\lambda > 0)$, 上述不等式应该依旧成立. 此时

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

可以计算得到 $\widehat{g}(\xi) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x)$, 于是

$$\|\widehat{g}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-n+\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

因为 g 也应该满足不等式(2.94), 故

$$\lambda^{-n+\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \lambda^{n(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

式子应与 λ 无关, 故只能有 $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, 亦即 $q = p'$. 所以在谈论 Lebesgue 空间上的 Fourier 变换时, 它只可能是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的算子.

另一个问题在于可否令 $p > 2$? 要想通过延拓定理2.4来解决这个问题, 就是在问当 $p > 2$ 时是否有 Hausdorff-Young 型不等式:

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

遗憾的是, Terence Tao 的讲义Interpolation, Schur's test, Young's inequality, Hausdorff-Young, Christ-Kiselev中指出 $p > 2$ 时上述不等式并不成立. 讲义中的论述如下: 设 N 是足够大的整数, $v \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|v|$ 足够大, 考虑函数

$$f(x) := \sum_{k=1}^{N} e^{i2\pi x\cdot kv} g(x - kv)$$

其中 $g(x) := e^{-\pi|x|^2}$, 则根据引理2.12与 Fourier 变换的性质2.14(v) 知

$$\widehat{f}(\xi) := \sum_{k=1}^{N} e^{-i2\pi\xi\cdot kv} g(\xi - kv) = \overline{f(\xi)} \tag{2.95}$$

下面证明对任意 $1 \le p \le \infty$ 有

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim_p N^{\frac{1}{p}}$$

其中 $X \sim_p Y$ 表示 $X \lesssim_p Y$ 且 $Y \lesssim_p X$. 这是因为一方面当 $p = 1$ 时知

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{k=1}^{N} e^{i2\pi x\cdot kv} g(x - kv)\right| dx \le \sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^n} |g(x - kv)| dx \lesssim N$$

而当 $p = \infty$ 时知

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{ess\ sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|\sum_{k=1}^{N} e^{i2\pi x\cdot kv} g(x - kv)\right|\right\} \lesssim 1$$

于是根据 L^p 范数的对数凸性1.13, 对任意 $1<p<\infty$ 有

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \lesssim_p N^{\frac{1}{p}}$$

另一方面, 考虑 $|v|$ 足够大, 以至于存在足够小的 $\varepsilon>0$ 使得 $g(0)=1>\frac{N}{\varepsilon}g(v)$, 则对 $x\in B(v,r)$(以 v 为球心, $r>0$ 为半径的球). 根据 g 的连续性可知对这一给定的 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得

$$x\in B(0,\delta)\Rightarrow |g(x)|>|g(0)|-\varepsilon=1-\varepsilon$$

设 $r=\delta$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{B(v,r)}|f(x)|^p dx &\ge \int_{B(v,r)}\left(|e^{i2\pi x\cdot v}g(x-v)|-\left|\sum_{k=2}^N e^{i2\pi x\cdot kv}g(x-kv)\right|\right)^p dx\\
&\ge \int_{B(v,r)}\left(|g(x-v)|-\sum_{k=2}^N g(x-kv)\right)^p dx\\
&\ge \int_{B(v,r)}(|g(x-v)|-\varepsilon)^p dx\\
&\ge \int_{B(v,r)}\varepsilon'|g(x-v)|^p dx
\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon'=\varepsilon'(\varepsilon)>0$. 同理, 对 $x\in B(2v,r)$ 考虑 $|f(x)|\ge|g(x-2v)|-|\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\neq 2}}e^{i2\pi x\cdot kv}g(x-kv)|$ 亦得

$$\int_{B(2v,r)}|f(x)|^P dx\ge\int_{B(2v,r)}\varepsilon'|g(x-2v)|^p dx$$

依此类推, 于是

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ge\left(\sum_{k=1}^N\|f\|_{L^p(B(kv,r))}^p\right)^{\frac{1}{p}}\gtrsim_p N^{\frac{1}{p}}$$

至此便有

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\sim_p N^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p\le\infty. \tag{2.96}$$

于是根据(2.95),(2.96)式有

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=\frac{\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\sim_p N^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

当 $p>2$ 时, $\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}>0$, 于是可令 $N\to\infty$ 推知此时并无 Hausdorff-Young 型不等式成立. 所以通过延拓定理2.4与 Hausdorff-Young 不等式达成的 Fourier 变换延拓的最优结果只能是 $1\le p\le 2$.

Riesz-Thorin 插值定理的应用极其广泛. 不仅仅是上面提到的 Hausdorff-Young 不等式可以用该定理证明, 实际上前面提到的关于卷积的 Young 不等式也可以用它来证明:

推论 2.9 (Young 不等式)

若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n), g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则 $f*g\in L^r(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, 且

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\le\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

证明 若固定 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则首先有

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\right|^p dx\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|dy\right)^p dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^{\frac{1}{p'}}\cdot|f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}dy\right)^p dx\\
&\overset{(A)}{\le}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p dx\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|dy\right)^{\frac{p}{p'}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|dydx
\end{aligned}$$

$$= \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^p$$

其中 (A) 是 Hölder 不等式, 于是 $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. 另外有

$$|f * g| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

于是

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

根据 Riesz-Thorin 插值定理2.24, 把 $f * g$ 看成作用在 g 上的算子, 只要 $0 < \theta < 1$ 满足

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{\infty}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p'}$$

亦即

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \theta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) - 1 + \theta = \frac{1}{p} - 1 \Rightarrow \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

就有

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\theta} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

□

2.14 Fourier 积分的收敛性与求和法

前面在 Fourier 级数的部分中讨论过如何从 Fourier 系数还原得到原来函数, 这里同样可以讨论如何从 Fourier 变换还原得到原来的函数. 这个问题就是在问式子

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \widehat{f}(\xi) e^{i2\pi x\cdot\xi} d\xi = f(x), \quad B \text{ 是原点的一个开凸邻域}, B_R = \{Rx : x \in R\}$$

是否成立, 何时成立, 极限是在 L^p 意义下成立还是在几乎处处意义下成立. 如果我们定义部分和算子 S_R 为

$$(S_R f)^\wedge(\xi) = \chi_{B_R}(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

则这个问题就等价于验证 L^p 意义与几乎处处意义下的极限式:

$$\lim_{R\to\infty} S_R f = f.$$

对 L^p 意义下的收敛性, 类似于引理2.8, 可以给出下述引理:

引理 2.15

$S_R f$ 依 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p < \infty)$[a]范数收敛到 f, 当且仅当存在与 R 无关的常数 C_p 使得

$$\|S_R f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \tag{2.97}$$

[a]问: 对 $p > 2$ 而言 Fourier 变换还有定义吗?

证明 若 $S_R f$ 依 $L^p(1 \le p < \infty)$ 范数收敛到 f, 则将 $\{S_R\}_{R>0}$ 视作算子族, 根据一致有界原理有

$$\lim_{N\to\infty} \|S_R f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \sup_{R>0} \|S_R\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty \Rightarrow \exists C_p \left(\sup_{R>0} \|S_R\| = \sup_{R>0} \frac{\|S_R f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \le C_p \right)$$

此即(2.97)式.

当(2.97)式成立时, 先考虑 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的情况, 此时[36]

之后的章节中会证明 $n = 1$ 时(2.97)式对任意 $p \ge 1$ 均成立, 但 $n > 1$ 时只要 $p \neq 2$, 就不存在 $S_R f$ 的依 L^p 范

[36]疑惑: 此时 $S_R f$ 依旧是 Schwartz 函数吗?

数收敛性.

类似于 Fourier 级数中的 Dirichlet 核, 我们也可以定义 Fourier 变换中的 Dirichlet 核: 当 $n=1$, 若 $B=(-1,1)$, 则

$$S_R f(x)=(D_R * f)(x)$$

其中 D_R 称为 Dirichlet 核:

$$D_R(x)=\int_{-R}^{R} e^{i2\pi x\xi}d\xi=\frac{\sin(2\pi Rx)}{\pi x}$$

显见 $D_R(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上并不可积, 但有 $D_R\in L^q(\mathbb{R})(q>1)$, 故若 $f\in L^p(\mathbb{R})(1<p<\infty)$, 那么根据 Hölder 不等式即知 $D_R * f$ 良定义.

对于几乎处处意义下的收敛性, 其证明主要依赖于下述确界估计:

$$\|\sup_{R>0}|S_R f|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.98}$$

根据 Carleson-Hunt 定理, (2.98)式对 $1<p<\infty$ 成立, 不过这个定理的证明极其冗杂, 这里就先不提了.

对于 Fourier 变换而言, Fourier 级数中的 Cesaro 求和法变为取部分和算子的积分平均:

$$\sigma_R f(x):=\frac{1}{R}\int_0^R S_t f(x)dt$$

而 Cesaro 求和法的任务就是讨论在什么意义下成立极限 $\lim\limits_{R\to\infty}\sigma_R f(x)=f(x)$. 在 $n=1, B=(-1,1)$ 时, σ_R 可以化简为:

$$\sigma_R f(x)=(F_R * f)(x)$$

其中 F_R 称为 Fejér 核:

$$F_R(x)=\frac{1}{R}\int_0^R D_t(x)dt=\frac{\sin^2(\pi Rx)}{R(\pi x)^2}. \tag{2.99}$$

不同于 Dirichlet 核, Fejér 核在 $\mathbb{R}$ 上是可积的. 类似于 Fourier 级数版本的 Fejér 核, 可以证明上述 Fejér 核同样有下述性质[37]:

(i) $F_R(x)\ge 0$;

(ii) $\|F_R\|_{L^1(\mathbb{R})}=\int_{-\infty}^{\infty}F_R(x)dx=1$;

(iii) 若 $\delta>0$, 则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\delta<|x|}F_R(x)dx=0$.

下一章中将会证明用于推导依 L^p 范数收敛与几乎处处收敛的一般准则, 即恒等逼近定理. 该定理所需要的条件恰是上面给出的三条性质.

Abel-Poisson 求和法说的是在 Fourier 反演的定义中加入因子 $e^{-2\pi t|\xi|}$, 得到函数

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi t|\xi|}\widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi \tag{2.100}$$

注意只要 $t>0$, 上述积分均收敛, 进一步可以令 $t\to 0$. 如果把因子 $e^{-2\pi t|\xi|}$ 换成 $e^{-\pi t^2|\xi|^2}$, 我们就得到了 Gauss-Weierstrass 求和法, 此时研究的函数是

$$w(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi t^2|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi \tag{2.101}$$

这两个求和法的目标在于讨论极限

$$\lim_{t\to 0^+}u(x,t)=f(x) \tag{2.102}$$

与

$$\lim_{t\to 0^+}w(x,t)=f(x) \tag{2.103}$$

在 L^p 意义下是否成立, 在几乎处处意义下是否成立. 答案是肯定的, 不过具体论证还是等到下一章的恒等逼近定理之后再进行.

[37] 补充证明.

可以说明 $u(x,t)$ 在半空间 $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ 上是调和函数: 注意到

$$\Delta_x u(x,t) = -4\pi^2|\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi t|\xi|}\widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi$$

$$u_{tt}(x,t) = 4\pi^2|\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi t|\xi|}\widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi$$

于是 $(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta_x)u = 0$. 在 $n=1$ 时, (2.100)式可被写成:

$$u(z) = \int_0^\infty \widehat{f}(\xi)e^{i2\pi z\xi}d\xi + \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi)e^{i2\pi\bar{z}\xi}d\xi, \quad z = x+it \tag{2.104}$$

进一步, 极限(2.102)可以被视作下述 Dirichlet 问题的相容性条件:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{在 } \mathbb{R}^{n+1}_+ \text{ 上} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

根据 Fourier 反演定理与卷积公式, 由(2.100)式可知

$$u(x,t) = (P_t * f)(x)$$

其中 $\widehat{P_t}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$. 下面求解 $P_t(\xi)$, 这件事可以分为下面三步进行:

1. 对任意 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 均有

$$\int_{-\infty}^\infty f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_{-\infty}^\infty f(u)du. \tag{2.105}$$

这是因为当 $x<0$ 时换元 $u = x-\frac{1}{x}$(即 $x = \frac{1}{2}(u-\sqrt{4+u^2})$), 而在 $x>0$ 时换元 $u = x-\frac{1}{x}$(即 $x=\frac{1}{2}(u+\sqrt{4+u^2})$) 可得

$$\int_{-\infty}^\infty f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{f(u)}{2}\left(1-\frac{u}{\sqrt{4+u^2}}\right)+\frac{f(u)}{2}\left(1+\frac{u}{\sqrt{4+u^2}}\right)\right)du = \int_{-\infty}^\infty f(u)du$$

2. 在(2.105)式中代入 $f(x) = e^{-tx^2}(t>0)$ 知

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t(x-\frac{1}{x})^2}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-tu^2}du \tag{2.106}$$

对(2.106)左式知

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{-t(x-\frac{1}{x})^2}dx &= \int_{-\infty}^\infty e^{-t(x^2+\frac{1}{x^2}-2)}dx = e^{2t}\int_{-\infty}^\infty e^{-t(x^2+\frac{1}{x^2})}dx \\ &= 2e^{2t}\int_0^\infty e^{-y-\frac{t^2}{y}}d\sqrt{\frac{y}{t}} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-y-\frac{t^2}{y}}\frac{dy}{\sqrt{y}}\end{aligned}$$

对(2.106)右式知

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-tu^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

比对即得

$$e^{-2t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y-\frac{t^2}{y}}\frac{dy}{\sqrt{y}} \tag{2.107}$$

3. 在(2.107)式中代入 $t=\pi|x|$, 并在两边同时关于 $e^{i2\pi\xi\cdot x}dx$ 积分有[38]:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|x|}e^{i2\pi\xi\cdot x}dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{i2\pi\xi\cdot x}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-y-\frac{\pi^2x^2}{y}}\frac{dy}{\sqrt{y}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi^2x^2}{y}+i2\pi\xi\cdot x-y}\frac{1}{\sqrt{y}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}}dy\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi^2t^2+i2\pi\xi\cdot\sqrt{y}t-y}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}}dy\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\pi t-i\xi\sqrt{y})^2}e^{-(\xi^2+1)y}dt\end{aligned}$$

[38] **[LG1]** 对应部分 (pg.118 2.2.11(b)) 疑似有勘误网未登出的错误: integrate with respect to $e^{-2\pi i\xi\cdot x}$ 得到的结果对应的 $(e^{-2\pi|x|})^\wedge$ 并不是希望求的东西, 要求的应该是 $(e^{-2\pi|x|})^\vee$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_{k=1}^{n} \int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-(\xi^2+1)y} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\pi t_k - i\xi_k\sqrt{y})^2} dt_k \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\xi^2+1}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} d\frac{t}{\xi^2+1} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
P_1(x) = (e^{-2\pi|\circledast|})^\vee(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}
$$

至此即得

$$
P_t(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{2.108}
$$

P_t 称为 Poisson 核[39].

对于 Gauss-Weierstrass 求和法, 可以说明函数 $\widetilde{w}(x,t) = w(x, \sqrt{4\pi t})$ 是下述热方程的解:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} - \Delta \widetilde{w} = 0, & \text{在 } \mathbb{R}_+^{n+1} \text{ 上} \\
\widetilde{w}(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n
\end{cases}
$$

极限(2.103)可以视作上述 Dirichlet 问题的相容性条件, 同样有

$$
w(x,t) = (W_t * f)(x)
$$

其中 W_t 是 Gauss-Weierstrass 核:

$$
W_t(x) = t^{-n} e^{-\frac{\pi|x|^2}{t^2}}. \tag{2.109}
$$

2.15 补充: L^p 上的卷积算子与乘子

下面默认 $(\tau^y f)(x) = f(x-y)$.

2.15.1 平移可换算子

定义 2.21 (对平移封闭, 平移可换算子)

$\mathbb{R}^n$ 上的可测函数构成的某向量空间 X 称为对平移封闭的空间, 如果对任意 $f \in X$ 与任意 $z \in \mathbb{R}^n$ 均有 $\tau^z(f) \in X$. 再设 X, Y 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数构成的某对平移封闭的向量空间, 设 T 是 X 到 Y 的算子, 称 T 是平移可换算子, 如果对任意 $f \in X$ 与 $y \in \mathbb{R}^n$ 均有

$$
T(\tau^y(f)) = \tau^y(T(f)).
$$

♣

显见卷积算子是平移可换的, 亦即只要卷积有定义, 那么 $\tau^y(f*g) = (\tau^y f)*g$. 这是因为

$$
(\tau^y(f*g))(x) = \tau^y\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\circledast - t)g(t)dt\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-t)g(t)dt = ((\tau^y f)*g)(x).
$$

本节将会证明该命题的逆命题: 全体平移可换的有界线性算子都具有卷积形式, 亦即

定理 2.25 (平移可换有界线性算子的刻画)

设 $1 \le p,q \le \infty$, $T: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ 是平移可换有界线性算子, 则存在唯一的缓增分布 w 使得对任意

[39]补充证明, 半空间 Green 函数.

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 都有

$$T(f) = f * w, \text{ a.e.} \tag{2.110}$$

特别注意若 $p = \infty$, 则 T 在 $\mathcal{S}$ 上的限制并不唯一确定 T 在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上表现, 这是因为对 $1 \le p < \infty$ 而言 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中均稠密, 而这种稠密性在 $p = \infty$ 时是不成立的. 上述定理是下面两条引理的推论:

引理 2.16

在定理2.25的条件下, 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $T(f)$ 的弱导数是 L^q 函数, 且其满足对任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 均有:

$$D^\alpha(T(f)) = T(D^\alpha f). \tag{2.111}$$

引理 2.17

设 $1 \le q \le \infty, h \in L^q(\mathbb{R}^n)$. 若 h 的全体弱导数 $D^\alpha h$ 均为 L^q 函数, 则 h 几乎处处等于一个连续函数 H, 且存在仅关于 n, q 的常数 $C_{n,q}$ 使得

$$|H(0)| \le C_{n,q} \sum_{|\alpha| \le n+1} \|D^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.112}$$

在承认引理2.16,2.17的情况下, 下面着手证明平移可换有界线性算子的刻画定理2.25.

证明 取定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ 是平移可换有界线性算子. 根据引理2.16知 $T(f)$ 满足引理2.17的条件, 于是存在连续函数 H 使得 $T(f) = H$ a.e., 且

$$|H(0)| \le C_{n,q} \sum_{|\alpha| \le n+1} \|D^\alpha T(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

现定义 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函 u 为:

$$\langle u, f \rangle := H(0)$$

知 u 是良定义的, 这是因为若还存在另一连续函数 G 使得 $G = T(f)$ a.e., 则 $G = H$ a.e., 又因为 G, H 都是连续函数, 故 $H = G$ 点态成立, 因而 $H(0) = G(0)$.

现在根据(2.111),(2.112)式与 T 的有界性知

$$\begin{aligned}
|\langle u, f\rangle| &\le C_{n,q} \sum_{|\alpha| \le n+1} \|D^\alpha T(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_{n,q} \sum_{|\alpha| \le n+1} \|T(D^\alpha f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_{n,q} \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)} \sum_{|\alpha| \le n+1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{(A)}{\le} C'_{n,q} \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)} \sum_{\substack{|\gamma| \le [\frac{n+1}{p}]+1 \\ |\alpha| \le n+1}} \rho_{\gamma,\alpha}(f)
\end{aligned}$$

其中 (A) 是补充命题2.1, 故 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 现设 $w = \widetilde{u} = u(-x)$, 先承认对全体 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有

$$\langle u, \tau^{-x} f \rangle = H(x) \tag{2.113}$$

根据(2.113)式即知对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 都有 $T(f) = f * w$, 这是因为根据函数与缓增分布卷积的刻画定理2.19与 T 的平移可换性, 对取定的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$(f * w)(x) = (f * \widetilde{u})(x) = \langle \widetilde{u}, \tau^x \widetilde{f} \rangle = \langle u, \tau^{-x} f \rangle = H(x) \overset{(B)}{=} T(f)(x)$$

其中 (B) 对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ 成立, 因而 $f * w = T(f)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上 a.e. 成立. w 的唯一性是因为若 $f * w = f * w'$ 对全体 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $w = w'$, 至此(2.110)式得证.

下面证明(2.113)式. 取定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$, 基于引理2.17取 H_x 是满足 $H_x = T(\tau^{-x} f)$ 几乎处处成立的连续

函数, 下证 $H_x(0)=H(x)$. 知

$$H_x(y)=T(\tau^{-x}f)(y)=\tau^{-x}T(f)(y)=T(f)(x+y)\overset{(C)}{=}H(x+y)=\tau^{-x}H(y)$$

其中 (C) 对 a.e. $y\in\mathbb{R}^n$ 成立, 因此连续函数 H_x 与 $\tau^{-x}H$ 几乎处处相等, 根据连续性即知在点态意义下有 $H_x(y)=H(x+y)$. 特别令 $y=0$ 知 $H_x(0)=H(x)$, 此即(2.113)式. □

下面再来证明引理2.16,2.17. 首先证明引理2.16:

证明 已知 $1\le p,q\le\infty, T:L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)$ 是平移可换有界线性算子, 往证对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 在分布意义下对任意多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 均有 $D^\alpha(T(f))=T(D^\alpha f)$. 对多重指标 α 考虑归纳法, 设 $\alpha=(0,\cdots,1,\cdots,0)$, 其中 1 在第 j 位. 记 $e_j=(0,\cdots,1,\cdots,0)$ 是第 j 个单位向量, 通过换元与 T 的平移可换性知

$$\int_{\mathbb{R}^n}T(f)(y)\frac{\varphi(y+he_j)-\varphi(y)}{h}dy=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)T\left(\frac{\tau^{-he_j}(f)-f}{h}\right)(y)dy \tag{2.114}$$

下面研究(2.114)式两边在 $h\to 0$ 时的情况. 首先知

$$\frac{\varphi(y+he_j)-\varphi(y)}{h}=\int_0^1\partial_j\varphi(y+hte_j)dt$$

又因为 $\partial_j\varphi(y+hte_j)$ 关于 t 是 Schwartz 函数, 根据 Schwartz 函数的等价刻画2.22知在 $|h|<\frac{1}{2}$ 时有

$$\left|\frac{\varphi(y+he_j)-\varphi(y)}{h}\right|\lesssim\int_0^1\frac{dt}{(1+|y+hte_j|)^M}\le\int_0^1\frac{dt}{(1+|y|-\frac{1}{2})^M}\lesssim\frac{1}{(1+|y|)^M}.$$

于是(2.114)左式的被积函数被可积函数 $|T(f)(y)|(1+|y|)^{-M}$ 控制, 且其在 $h\to 0$ 时 a.e. 收敛到 $T(f)(y)\partial_j\varphi(y)$, 故由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}T(f)(y)\frac{\varphi(y+he_j)-\varphi(y)}{h}dy=\int_{\mathbb{R}^n}T(f)(y)\partial_j\varphi(y)dy=-\int_{\mathbb{R}^n}\partial_j(T(f))(y)\varphi(y)dy. \tag{2.115}$$

下面再讨论(2.114)右式, 为了说明 $T(\frac{\tau^{-he_j}(f)-f}{h})\to -T(\partial_j f)$ 在 L^q 意义下成立, 就需要说明 $\frac{\tau^{-he_j}(f)-f}{h}\to-\partial_j f$ 在 L^p 意义下成立. 对 Schwartz 函数 f 有[40]

$$\frac{\tau^{-he_j}(f)(y)-f(y)}{h}=-\int_{-1}^0\partial_j f(y+hte_j)dt=-\int_0^1\partial_j f(y-hte_j)dt$$

根据连续性知 $-\int_0^1\partial_j f(y-hte_j)dt$ 在 $h\to 0$ 时点态收敛到 $-\partial_j f(y)$, 同时类似于前面对 φ 的操作可知 $|h|<\frac{1}{2}$ 时其被 $(1+|y|)^{-M}$ 控制, 于是由 Lebesgue 控制收敛定理即知

$$\frac{\tau^{-he_j}(f)-f}{h}\to-\partial_j f(L^p(\mathbb{R}^n)) \tag{2.116}$$

再根据 T 的连续性可得

$$T\left(\frac{\tau^{-he_j}(f)-f}{h}\right)\to -T(\partial_j f)(L^q(\mathbb{R}^n)) \tag{2.117}$$

又因为 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^{q'}(\mathbb{R}^n)$, 故根据 Hölder 不等式知(2.114)右式在 $h\to 0$ 时收敛到 $-\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)T(\partial_j f)(y)dy$. 因而

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\partial_j T(f)(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)T(\partial_j f)(y)dy,\quad\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

对 $|\alpha|$ 归纳即得欲证. □

再证明引理2.17.

证明 已知 $1\le q\le\infty, h\in L^q(\mathbb{R}^n)$, 且 $D^\alpha h\in L^q(\mathbb{R}^n)$ 对任意多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 均成立, 往证存在连续函数 H 使得 $h=H$ 几乎处处成立, 且 H 满足(2.112)式. 设 $R\ge 1$, 取定 $\varphi_R\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $|x|\le R$ 内恒为 1, 而在 $|x|\ge 2R$ 内恒为 0. 因为 $h\in L^q(\mathbb{R}^n)$, 由 Hölder 不等式知 $\varphi_R h\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 下面说明 $\widehat{\varphi_R h}\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 首先考虑不等式

$$1\le C_n(1+|x|)^{-(n+1)}\sum_{|\alpha|\le n+1}|(-i2\pi x)^\alpha| \tag{2.118}$$

40[**LG1**] 此处 (pg.148(2.5.6)) 存在勘误网上未出现的错误, 符号有误, 此处已改正.

这是因为对任意 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 与任意 $k \in \mathbb{N}$, 根据(2.48)式已经有

$$|x|^k \le C_{n,k} \sum_{|\beta|=k} |x^\beta|$$

若 $|x| \ge 1$, 则将 $(1+|x|)^{n+1}$ 按二项式定理展开并代入上式即得(2.118)式. 而若 $|x|<1$, 知和式 $\sum_{|\alpha|\le n+1} |(-i2\pi x)^\alpha|$ 至少是 1, 取 $C_n = 2^{n+1}$ 即得(2.118)式. 现在在(2.118)式两端同乘 $|\widehat{\varphi_R h}(x)|$ 可得

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi_R h}(x)| &\le C_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} |(-i2\pi x)^\alpha \widehat{\varphi_R h}(x)| \\
&\le C_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|(D^\alpha(\varphi_R h))^\wedge\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha(\varphi_R h)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{(A)}{\le} C_n(2^n R^n v_n)^{\frac{1}{q'}}(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha(\varphi_R h)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{(B)}{\le} C_{n,R}(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

其中 (A) 是对 $D^\alpha(\varphi_R h)\chi_{2R}$ 应用 Hölder 不等式, (B) 是基于 φ_R 各阶导数的有界性与 Leibniz 公式. 对上述不等式两端关于 x 积分得

$$\|\widehat{\varphi_R h}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,R} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty \tag{2.119}$$

因此 $\varphi_R h$ 满足 Fourier 反演的条件, 利用 Fourier 反演知存在连续函数 $(\widehat{\varphi_R h})^\vee$ 几乎处处等于 $\varphi_R h$. 因为在球 $B(0,R)$ 上 $\varphi_R \equiv 1$, 故 h 在球 $B(0,R)$ 上几乎处处等于该连续函数. 又因为 $R>0$ 是任意的, 故 h 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处等于某连续函数, 记作 H. 最后, 在(2.119)式中令 $R=1$, 由 $|H(0)| \le \|\widehat{\varphi_1 h}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ 即得(2.112)式. □

2.15.2 线性算子的转置和伴随

本小节简要讨论线性算子的转置与伴随这两个概念. 首先回忆实与复的内积: 设 f,g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 记

$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

(在积分绝对收敛时) 为它们的复内积, 另记

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$$

为它们在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的实内积. 前文已经多次表明, 记号 $\langle\,,\,\rangle$ 也用来表示缓增分布 f 在测试函数 g 上的作用. 在缓增分布 f 能用某函数表示时, $\langle \circledast, \circledast\rangle$ 的这两种意义是一样的.

设 $1 \le p,q \le \infty$, 对有界线性算子 $T: L^p(X,\mu) \to L^q(Y,\nu)$, 记其伴随算子 T^* 为:

$$\langle T(f)|g\rangle = \int_Y T(f)(y)\overline{g(y)}d\nu = \int_X f(x)\overline{T^*(g)(x)}d\mu = \langle f|T^*(g)\rangle, \quad \forall f \in L^p(X,\mu), g \in L^{q'}(Y,\nu). \tag{2.120}$$

另定义 T 的转置 T^t 为:

$$\langle T(f),g\rangle = \int_Y T(f)(y)g(y)d\nu = \int_X f(x)T^t(g)(x)d\mu = \langle f,T^t(g)\rangle, \quad \forall f \in L^p(X,\mu), g \in L^{q'}(Y,\nu). \tag{2.121}$$

若 T 是形如下式的积分算子

$$T(f)(x) = \int_X K(x,y)f(y)d\mu(y)$$

则 T^*, T^t 分别是具有积分核 $K^*(x,y) = \overline{K}(y,x)$ 与 $K^t(x,y) = K(y,x)$ 的积分算子. 这是因为

$$\begin{aligned}
\langle Tf|g\rangle &= \int_Y T(f)(x)\overline{g(x)}d\nu(x) \\
&= \int_Y \left(\int_X K(x,y)f(y)d\mu(y)\right)\overline{g(x)}d\nu(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_X \left(\int_Y K(x,y)\overline{g(x)} d\nu(x) \right) f(y) d\mu(y) \\
&= \int_X \overline{\left(\int_Y \overline{K(x,y)} g(x) d\nu(x) \right)} f(y) d\mu(y) = \langle f | T^* g \rangle
\end{aligned}
$$

因此 $T^*(g)(y) = \int_Y \overline{K}(x,y) g(x) d\nu(x)$, 从而 $T^*(g)(x) = \int_Y \overline{K}(y,x) g(y) d\nu(y)$, 亦即 $K^*(x,y) = \overline{K}(y,x)$. 而

$$
\begin{aligned}
\langle Tf, g \rangle &= \int_Y T(f)(x) g(x) d\nu(x) \\
&= \int_Y \left(\int_X K(x,y) f(y) d\mu(y) \right) g(x) d\nu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y K(x,y) g(x) d\nu(x) \right) f(x) d\mu(y) = \langle f, T^t g \rangle
\end{aligned}
$$

因此 $T^t(g)(y) = \int_Y K(x,y) g(x) d\nu(x)$, 从而 $T^t(g)(x) = \int_Y K(y,x) g(y) d\nu(y)$, 亦即 $K^t(x,y) = K(y,x)$.

另外, 若 T 形如 $T(f)(x) = (\widehat{f}m)^\vee(x)$, 则 $T^*(f)(x) = (\widehat{f}\overline{m})^\vee(x)$, 这是因为对任意 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{T^*(g)(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} T(f)(x) \overline{g(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{T(f)}(\xi) \overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) m(\xi) \overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \overline{\overline{m(\xi)} \widehat{g}(\xi)} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{(\overline{m} \widehat{g})^\vee}(x) dx.
\end{aligned}
$$

同理可证 $T^t(f)(x) = (\widehat{f} \cdot m(-\circledast))^\vee(x)$. 因为复值函数 $\overline{m(\xi)}$ 与 $m(-\xi)$ 一般不同, 故 T^* 与 T^t 一般也是不同的. 另外, 若 $m(\xi)$ 是实值函数, 亦即 $m(\xi) = \overline{m(\xi)}$, 则此时 $T = T^*$, 称 T 为自伴随算子. 若 m 是偶函数, 亦即 $m(\xi) = m(-\xi)$, 则此时 $T = T^t$, 称 T 为自转置算子.

2.15.3 平移可换有界线性算子空间 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

定义 2.22 (平移可换有界线性算子空间)

给定 $1 \le p, q \le \infty$, 记 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的全体平移可换有界线性算子构成的空间为 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. ♣

根据平移可换有界线性算子的刻画定理2.25, 任意 $T \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 均能表为与某缓增分布的卷积. $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 上的范数取为

$$
\|T\|_{\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)}
$$

亦即 T 在 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 中的范数等于其作为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的算子的范数. 根据 $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$[41] 的完备性易证 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 在该范数下是 Banach 空间.

下面说明当 $p > q$ 时 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 只包含一个元素, 亦即零算子 $T = 0$, 因而只有 $p \le q$ 的情况具有研究价值.

定理 2.26

若 $1 \le q < p < \infty$, 则 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. ♡

证明 设 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是非零函数, $h \in \mathbb{R}^n$, 任取 $T \in \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$
\|\tau^h(T(f)) + T(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|T(\tau^h(f) + f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)} \|\tau^h(f) + f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.122}
$$

下证 $|h| \to \infty$ 时 $\|\tau^h(f) + f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to 2^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. 设 $\operatorname{supp} f \subset K$ 是紧集, 取 $|h|$ 足够大使得 $K \cap K + h = \varnothing$, 则此时

$$
\begin{aligned}
\|\tau^h(f) + f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_K |f(x)|^q dx + \int_{K+h} |f(x-h)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

[41] 即 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ 的全体有界线性算子构成的空间.

这便有 $\|\tau^h(f)+f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to 2^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}(|h|\to\infty)$. 现在在(2.122)式两端令 $|h|\to\infty$, 利用上述结果可得

$$2^{\frac{1}{q}}\|T(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)} 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

在 $q<p$ 时, 除非 $T=0$, 否则上式不成立. □

下面考察 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 的共轭空间.

定理 2.27 ($\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 的共轭空间刻画)

若 $1<p\leq q<\infty, T\in\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, 则 T 在 $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ 上有定义, 且该定义与其原先在 $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^{q'}(\mathbb{R}^n)\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的定义等价. 进一步, T 是 $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的算子, 且其算子范数为

$$\|T\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)} \tag{2.123}$$

亦即下述等距同构成立:

$$\mathcal{M}^{q',p'}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

证明 首先因为 $T\in\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, 故由平移可换有界线性算子的刻画2.25知存在 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 使得 $T: L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n), f\mapsto u*f$, 进而其伴随算子为 $T^*: L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n), f\mapsto \overline{\widetilde{u}}*f$, 这是因为对任意 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有[42]

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{T^*(g)(x)}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} T(f)(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n}(f*u)(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \langle f*u,\overline{g}\rangle = \langle u,\widetilde{f}*\overline{g}\rangle = \langle u,(f*\widetilde{\overline{g}})^{\sim}\rangle \\
&= \langle \widetilde{u}, f*\widetilde{\overline{g}}\rangle = \langle \widetilde{u},\overline{\overline{f}*\widetilde{g}}\rangle = \overline{\langle \overline{\widetilde{u}},\overline{f}*\widetilde{g}\rangle} \\
&= \overline{\langle \overline{\widetilde{u}}*g,\overline{f}\rangle} = \langle \overline{\overline{\widetilde{u}}*g}, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{(\overline{\widetilde{u}}*g)(x)}dx.
\end{aligned}$$

因此 $T^*: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), g\mapsto \overline{\widetilde{u}}*g$. 下面说明

$$\overline{f*\overline{\widetilde{u}}} = (\overline{\widetilde{f}}*u)^{\sim}, \quad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.124}$$

这是因为对任意 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\begin{aligned}
\overline{\langle f*\overline{\widetilde{u}}, g\rangle} &= \overline{\langle f*\overline{\widetilde{u}},\overline{g}\rangle} = \overline{\langle \overline{\widetilde{u}},\widetilde{f}*\overline{g}\rangle} \\
&= \langle \widetilde{u},\overline{\widetilde{f}}*g\rangle = \langle u,(\overline{\widetilde{f}}*g)^{\sim}\rangle \\
&= \langle u,\overline{f}*\widetilde{g}\rangle = \langle u*\widetilde{\overline{f}},\widetilde{g}\rangle \\
&= \langle (u*\widetilde{\overline{f}})^{\sim}, g\rangle.
\end{aligned}$$

现在只需说明 $T: f\mapsto u*f$ 和 $T^*: f\mapsto \overline{\widetilde{u}}*f$ 在作为 $L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的算子时范数是相等的. 由(2.124)式知对任意非零 Schwartz 函数 f 均有:

$$\frac{\|f*\overline{\widetilde{u}}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}} = \frac{\|\overline{\widetilde{f}}*u\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}}{\|\overline{\widetilde{f}}\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}}.$$

于是

$$\|T^*\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \|T\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

下面说明

$$\|T^*\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)}$$

这是因为一方面

$$\|T^*f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n} T^*(f)(x)\overline{g(x)}dx\right|$$

[42]下面的过程中多次运用了 $(\widetilde{f}*\overline{g})^{\sim} = f*\widetilde{\overline{g}}, \langle \overline{u}, f\rangle = \overline{\langle u,\overline{f}\rangle}$. 这两件事是根据定义即可说明的.

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{T(g)(x)}dx \right| \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=1} \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \|T(g)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=1} \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

因此 $\|T^*\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)\to L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \leq \|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)}$, 另一方面

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} T(f)(x)\overline{g(x)}dx \right| \\
&= \sup_{\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{T^*(g)(x)}dx \right| \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}=1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|T^*(g)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}=1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|T^*\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|T^*\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

因此 $\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|T^*\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)\to L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$, 故 $\|T^*\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)\to L^{q'}(\mathbb{R}^n)} = \|T^*\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)\to L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$, 至此即得

$$
\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)} = \|T\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)}
$$

命题即证. □

注 初见上述定理时可能会感到疑惑: 既然函数与缓增分布的卷积是缓增分布, 上述证明过程就相当于是将条件中的 $T: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ 增强为 $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 得到 $T^*: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 后根据 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ 中稠与 $L^{p'}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 得到 $T^*: L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 最后用 $\|T^*\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$ 来控制 $\|T\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$. 这一过程并没有给出 $T(f)$ 在 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 上的刻画, 从而我们是否应该在研究 $T(f)$ 在 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 中的表现时用缓增分布的那套方法 (也就是研究它在任意 Schwartz 函数上的作用, 而非研究它本身)? 换句话说, 我们是否应该将 $T: L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 视为函数到分布 (而非函数到函数) 的算子? 事实并非如此. 上述定理中" 该定义与原先在 $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^{q'}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的定义等价" 一句暗示了在 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 中的元素 $T(f)$ 是函数 (而不仅仅是分布). 更细致地来说, Schwartz 函数与缓增分布卷积的刻画2.19表明 T 实际上是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的, 因此在提到 $T^*: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 时, 我们需要铭记此时 T^* 的输出就是函数, 而不会成为非函数的分布, 这也就说明了证明最初 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{T^*(g)(x)}dx$ 这一写法的合法性.

之后我们重点关注 $p=q$ 时的 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 空间, 这类空间包含了后面章节将要介绍的奇异积分算子.

2.15.4 $\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画

平移可换有界线性算子的刻画定理2.25指出 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 中的元素均有卷积形式, 我们自然希望知道对 $\mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$ 而言其卷积形式能否更具体一些 (例如它代表与什么函数作卷积). 可惜的是, 目前为止这方面的进展尚未明了 (还不知道可不可以作一般的讨论), 我们只知道几种特殊情况. $\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 就是两种特殊情况.

定理 2.28 ($\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画)

算子 $T \in \mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当它能表为 $f \mapsto f * \mu$, 其中 μ 是有限 Borel(复值) 测度. 此时 T 的算子函数恰是 μ 的全变差.

证明 当存在有限 Borel 测度 μ 使得 $T: f \mapsto f * \mu$, 则

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|f * \mu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\mu(y) \right| dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx d|\mu(y)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\mu\|_{\mathcal{M}}\end{aligned}$$

其中 $\|\mu\|_{\mathcal{M}}$ 是 μ 的全变差. 因此 T 以至多为 $\|\mu\|_{\mathcal{M}}$ 的范数将 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 映入 $L^1(\mathbb{R}^n)$.

下面验证 T 的平移可换性. 已知

$$T(f)(x) = (f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) d\mu(t)$$

故

$$\tau^y T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-t) d\mu(t) = T(\tau^y f)(x).$$

当 $T \in \mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, 由平移可换有界线性算子的刻画2.25知存在唯一的缓增分布 u 使得对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$T(f)(x) = (f * u)(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n$$

现取 $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} e^{-\pi|x/\varepsilon|^2}$, 知

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} e^{-\pi|x/\varepsilon|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi u^2} du = 1$$

故 $\{f_\varepsilon\}_\varepsilon$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中一致有界, 因此

$$\|f_\varepsilon * u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|T(f_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)} \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

这说明 $\{f_\varepsilon * u\}_\varepsilon$ 同样在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中有界. 因为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 自然嵌入到有限 Borel 测度空间 $(C_0(\mathbb{R}^n))^*$ 中[43], 故 $\{f_\varepsilon * u\}_\varepsilon$ 作为 $(C_0(\mathbb{R}^n))^*$ 中的有界集, 可被 $(C_0(\mathbb{R}^n))^*$ 中单位球的某常数倍包含, 因此根据 Banach-Alaoglu 定理知 $\{f_\varepsilon * u\}_\varepsilon$ 是弱 * 紧集, 从而存在 $\{f_\varepsilon * u\}_\varepsilon$ 的某子列在弱 * 拓扑意义下收敛到某测度 μ, 即存在 $\varepsilon_k \to 0$ 使得对任意 $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)(f_{\varepsilon_k} * u)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu(x). \tag{2.125}$$

下面说明 $u = \mu$, 为此取定 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 由(2.125)式知

$$\langle u, \widetilde{f_{\varepsilon_k}} * g \rangle = \langle u, f_{\varepsilon_k} * g \rangle \to \langle \mu, g \rangle, \quad k \to \infty.$$

另外可证 $g * f_{\varepsilon_k}$ 在 Schwartz 意义下收敛到 g, 因此

$$\langle u, f_{\varepsilon_k} * g \rangle \to \langle u, g \rangle.$$

于是由(2.125)式知 $\langle u, g \rangle = \langle \mu, g \rangle$, 又因为 g 是任意的, 故 $u = \mu$.

最后说明 $\|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mu\|_{\mathcal{M}}$. 由(2.125)式知对任意 $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu(x) \right| = \left| \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)(f_{\varepsilon_k} * u)(x) dx \right| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_{\varepsilon_k} * u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.126}$$

但 Riesz 表示定理表明 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 上的泛函 $g \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu(x)$ 的范数恰为 $\|\mu\|_{\mathcal{M}}$, 于是由(2.126)式知 $\|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)} \ge \|\mu\|_{\mathcal{M}}$. 又显见 $\|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|\mu\|_{\mathcal{M}}$, 故 $\|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mu\|_{\mathcal{M}}$. □

设 μ 是有限 Borel 测度, 显见对任意 $1 \le p \le \infty$, 算子 $h \mapsto h * \mu$ 都是 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 的, 因此 $\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 可以看成是 $\mathcal{M}^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的某个子空间. 但另一方面, 存在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性算子 Φ 满足平移可换性, 但不存在有限 Borel 测度 μ 使得 $\Phi(h) = h * \mu$ 对任意 $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 成立. 参见下述反例:

例 2.10 设

$$(X, \|\circledast\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) := \left\{ \mathbb{R}\text{ 上的复值函数} f : \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty, \Phi(f) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(t) dt \text{存在} \right\}.$$

显见 Φ 是 X 上的线性泛函, 又因为

$$|\Phi(f)| \le \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(t)| dt \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

[43] 其中 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 是衰减连续函数空间, 有限 Borel 测度空间为 $(C_0(\mathbb{R}^n))^*$ 这一断言是泛函分析的结论.

故 Φ 是 X 上的有界线性泛函, 且可以进一步说明 $\|\Phi\|_{X^*}=1$, 从而由 Hahn-Banach 定理可知 Φ 在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上有范数为 1 的有界延拓 $\widetilde{\Phi}$. 现在将 $\widetilde{\Phi}$ 视作 $L^\infty(\mathbb{R})$ 到常值函数空间的有界线性算子. 又因为对任意 $f\in L^\infty(\mathbb{R})$ 与任意 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$\widetilde{\Phi}(\tau^x(f))-\tau^x(\widetilde{\Phi}(f))=\widetilde{\Phi}(\tau^x(f))-\widetilde{\Phi}(f)=\widetilde{\Phi}(\tau^x(f)-f)=\Phi(\tau^x(f)-f)\overset{(A)}{=}0,$$

其中 (A) 是因为对任意 $R>0$ 有

$$\left|\frac{1}{R}\int_0^R(f(t-x)-f(t))dx\right|=\left|\frac{1}{R}\int_{-x}^{R-x}f(u)du-\frac{1}{R}\int_0^R f(t)dt\right|\le\frac{2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{R}$$

令 $R\to\infty$ 即得 (A). 故 $\widetilde{\Phi}$ 是平移可换有界线性算子, 于是根据平移可换有界线性算子的刻画2.25知存在唯一的缓增分布 u 使得对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 均有 $\widetilde{\Phi}(\varphi)=\varphi*u$. 因为

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(t)dt=0,\quad\forall f\in\mathbb{S}(\mathbb{R})$$

故 $\Phi(f)\equiv 0, f\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 再根据 u 的唯一性可知 $u=0$. 因此, 若存在有限 Borel 测度 μ 使得对任意 $h\in L^\infty(\mathbb{R})$ 均有 $\widetilde{\Phi}(h)=h*\mu$, 则在 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 时总有 $0=\Phi(\varphi)=\varphi*\mu$, 因此 μ 只能是零测度. 然而 Φ 并非 X 上的零算子, 矛盾! 故并不存在这样的有限 Borel 测度 μ. □

下面研究 $p=2$ 的情况.

定理 2.29 ($\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画)

算子 $T\in\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当存在 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 使得 $T:f\mapsto f*u$, 且 u 满足 $\widehat{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 另有

$$\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}=\|\widehat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\tag{2.127}$$

♡

证明 若 $T(f)=f*u$, 其中 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\widehat{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则根据 Plancherel 定理有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|(f*u)(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(\xi)\widehat{u}(\xi)|^2dx\le\|\widehat{u}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

因此 $\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}\le\|\widehat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, 故 $T\in\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$[44].

若 $T\in\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$, 根据平移可换有界线性算子的刻画定理2.25知其能被表成与某缓增分布 u 的卷积, 下面证明 $\widehat{u}$ 有界. 设 $R>0,\varphi_R\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是在球 $B(0,R)$ 内恒为 1 且支在球 $B(0,2R)$ 内的函数. 知 φ_R 与分布 $\widehat{u}$ 的乘积为 $\varphi_R\widehat{u}=((\varphi_R)^\vee*u)^\wedge=T(\varphi_R^\vee)^\wedge$, 其为 L^2 函数. 又因为 L^2 函数 $\varphi_R\widehat{u}$ 与分布 $\widehat{u}$ 在 $B(0,R)$ 上重合, 故对任意 $R>0$ 总有 $\widehat{u}\in L^2(B(0,R))$, 因而 $\widehat{u}\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. 另设 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 紧支, 则 $f\widehat{u}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 因而根据 Plancherel 定理与 T 的有界性知

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)\widehat{u}(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}^n}|T(f^\vee)(x)|^2dx\le\|T\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx.$$

因此对全体有界紧支函数 f 均有

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\|T\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}-|\widehat{u}(x)|^2)|f(x)|^2dx\ge 0$$

取 $f(x_1,\cdots,x_n)=(2r)^{-\frac{n}{2}}\prod_{j=1}^n\chi_{[-r,r]}(x_j)(r>0)$, 根据 Lebesgue 微分定理3.5知对几乎处处 x 均有 $\|T\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}-|\widehat{u}(x)|^2\ge 0$, 因此 $\|\widehat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}$, 即 $\widehat{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 又因为在 $\widehat{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时已经有 $\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}\le\|\widehat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, 故 $\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}=\|\widehat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, 命题得证. □

2.15.5 Fourier 乘子空间 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$

定理2.29已经刻画了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的全体卷积算子, 现设 $T\in\mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n)(1<p<2)$, 根据 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 的共轭空间刻画定理2.27, T 也是 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的算子. 因为 $p<2<p'$, 根据 Riesz-Thorin 插值定理2.24, T 依旧将 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 映到 $L^2(\mathbb{R}^n)$, 于是 T 还是可以表为与某缓增分布 u 的卷积, 其中 $\widehat{u}$ 有界.

[44]这里需要补充平移可换性的证明, 提示: 利用稠密性.

定义 2.23 (L^p 的 Fourier 乘子空间)

给定 $1 \leq p < \infty$, 若 m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界函数, 且其使得算子

$$T_m(f) = (\widehat{f}m)^\vee, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界 (或在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的某稠密子空间内有定义, 且在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有有界延拓), 则称 m 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的一个 Fourier 乘子 (或简称为 L^p 乘子). 全体 L^p 乘子构成的空间记作 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 中的范数定义为

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|T_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.128}$$

♣

上述定义表明 $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $T_m \in \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$, 这是因为显见 $T_m \in \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 而当 $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 则 T_m 是 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子, 于是只需说明 T_m 是平移可换算子即可. 知

$$\tau^x T_m(f) = \tau^x((\widehat{f}m)^\vee) = (\widehat{f}me^{-i2\pi x\cdot \circledast})^\vee = ((\tau^x f)^\wedge m)^\vee = T_m(\tau^x f).$$

特别地, 当 $p = 2$ 时, $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画定理2.29可知 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 这是因为

$$\begin{aligned} m \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow T_m \in \mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n) \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\left(\widehat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \wedge T_m(f) = f * u = f * m^\vee\right) \\ &\Leftrightarrow m = \widehat{u}. \end{aligned}$$

当 $p = 1$ 时, 根据 $\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画定理2.28可知 $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ 正是有限 Borel 测度 Fourier 变换的集合 (记为 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$). 这是因为

$$\begin{aligned} m \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow T_m \in \mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n) \\ &\Leftrightarrow \exists \text{有限 Borel 测度}\mu\text{使得}T_m(f) = f * \mu = (\widehat{f}m)^\vee = f * m^\vee \\ &\Leftrightarrow m = \widehat{\mu}. \end{aligned}$$

同时, 根据 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 共轭空间的刻画定理2.27可知有界函数 m 为 L^p 乘子当且仅当其为 $L^{p'}$ 乘子, 且此时

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|m\|_{\mathcal{M}_{p'}(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 < p < \infty.$$

根据 Riesz-Thorin 插值定理2.24可得赋范空间 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 之间的嵌套关系:

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_q(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq p \leq q \leq 2$$

这是因为取定 $1 \leq p < 2$, 根据定义知 $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 必定是 L^∞ 函数, 因而 $m \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n)$, 根据 Riesz-Thorin 插值定理即知对任意 $q \in [p, 2]$ 均有 $m \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}^n)$.

另外, 若 $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2 \leq p'$, 则根据 Riesz-Thorin 插值定理2.24知

$$\|T_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|T_m\|^{\frac{1}{2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \|T_m\|^{\frac{1}{2}}_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \overset{(A)}{=} \|T_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.129}$$

其中 (A) 基于 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 共轭空间的刻画定理2.27. 最后, 根据 Riesz-Thorin 插值定理2.24知在 $1 \leq p \leq q \leq 2$ 时有

$$\|T_m\|_{L^q(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|T_m\|^{1-\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \|T_m\|^{\theta}_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = \|T_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}$$

因此

$$\|m\|_{\mathcal{M}_q(\mathbb{R}^n)} \leq \|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 \leq p \leq q \leq 2$$

从而当 p 从 1 增长到 2 时, 空间族 $\{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)\}_p$ 是在嵌入意义下的递增族.

例 2.11 对任意 $b \in \mathbb{R}^n$ 而言, 函数 $m(\xi) = e^{i2\pi\xi\cdot b}$ 是 L^p 乘子. 这是因为它所对应的算子为

$$T_m(f)(x) = (\widehat{f}m)^\vee(x) = (\widehat{f}e^{i2\pi\xi\cdot b})^\vee(x) = f(x + b), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

因此 T_m 是 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子, 且显见 $\|T_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$, 因此 $\|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = 1$.

命题 2.47 ($\mathcal{M}_p$ 的完备性)

若 $1 \le p < \infty$, 则赋范空间 $(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n), \|\circledast\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)})$ 是 Banach 空间, 且 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 对点态乘积封闭, 因而其为 Banach 代数.

证明 根据 $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 共轭空间的刻画定理2.27, 只需证明 $1 \le p \le 2$ 的情况. 显见只要 $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n), b \in \mathbb{C}$, 则 $m_1 + m_2, bm_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. 对 m_1m_2 而言, 知它是对应于算子 $T_{m_1}T_{m_2} = T_{m_1m_2}$ 的乘子, 因而

$$\|m_1m_2\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|T_{m_1}T_{m_2}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|m_1\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}\|m_2\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}$$

这表明 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 是代数. 为了说明 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 是完备赋范空间, 设 $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 中的基本列. 因为 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 故 $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 同样是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的基本列, 根据 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的完备性可知 $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 在 L^∞ 意义下存在极限 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 另从 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 本身的定义知 $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 关于 j 几乎处处一致有界, 不妨设 $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\|m_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = C$. 现在希望说明 $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 固定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$T_{m_j}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)m_j(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi \overset{(A)}{\to} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)m(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi = T_m(f)(x), \text{ a.e.}$$

其中 (A) 左式的被积函数被可积函数 $C|\widehat{f}|$ 控制, (i) 的成立基于 Lebesgue 控制收敛定理. 因为 $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 中的基本列, 其在 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 中有界, 因此 $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\|m_j\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty$. 由 Fatou 引理知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |T_m(f)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \varliminf_{j\to\infty} |T_{m_j}(f)|^p dx \\ &\le \varliminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |T_{m_j}(f)|^p dx \\ &\le \varliminf_{j\to\infty} \|m_j\|^p_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

这说明 $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. 至此已经说明了只要 $m_j \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 且 m_j 一致收敛到 m, 则 $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} \le \varliminf_{j\to\infty} \|m_j\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}$$

现将上述不等式中的 m_j 换成 $m_k - m_j$, m 换成 $m_k - m$, 其中 k 取定, 则

$$\|m_k - m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} \le \varliminf_{j\to\infty} \|m_k - m_j\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.130}$$

根据基本列的 Cauchy 准则知 $\|m_k - m_j\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} \to 0(k, j \to \infty)$, 因此 $\|m_k - m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} \to 0(k \to \infty)$, 故 $m_k \to m(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n))$, 因而 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 是 Banach 空间. □

下面的命题列举了一些乘子的简单性质[45].

命题 2.48

对任意 $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)(1 \le p < \infty), x \in \mathbb{R}^n, h > 0$ 有

(i) $\|\tau^x(m)\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}$;

(ii) $\|m(h\circledast)\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}$;

(iii) $\|\widetilde{m}\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}$;

(iv) $\|e^{i2\pi x\cdot\circledast}m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}$;

(v) $\|m \circ A\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)}$, 其中 A 是正交阵.

证明 (i) 知

$$T_{\tau^x m}(f)(t) = (\widehat{f}\tau^x m)^\vee(t) = e^{i2\pi t\cdot x}(\tau^{-x}\widehat{f}m)^\vee(t) = e^{i2\pi t\cdot x}T_m(\tau^{-x}\widehat{f})^\vee(t)$$

因此

$$\|T_m(\tau^{-x}\widehat{f})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|T_m(e^{-i2\pi t\cdot x}f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

---

[45]补充证明: (i) 被绕晕了.

2.16 补充: 振荡积分

振荡积分在调和分析发展之初就扮演着非常重要的角色. Fourier 变换是振荡积分的原型, 它给出了非平凡相位的最简单例子, 即关于积分变量的线性函数. 更复杂的相位在各种各样的问题也会自然出现, 例如 Bessel 函数给出了相位为正弦函数时振荡积分的例子.

本节我们会快速浏览一遍振荡积分的内容. 我们主要研究一维情况, 就算是这种最简单的情况也是需要一些具体分析的. 对于高维情况, 我们只会研究一个非常简单的情形.

定义 2.24 (振荡积分)

振荡积分是形如下式的表达式

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)}\psi(x)dx, \tag{2.131}$$

其中 λ 是正实数; φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 称为相位; ψ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的复值光滑可积函数, 一般都设它是紧支函数.

♣

2.16.1 无驻点的相位

我们从最简单的一维情况开始研究. 设 φ, ψ 都是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数, $\operatorname{supp}\psi$ 是闭区间, 且对任意 $x \in \operatorname{supp}\psi$ 都有 $\varphi'(x) \neq 0$. 因为 φ' 非零, 故在 $\operatorname{supp}\psi$ 上 φ' 要么严格正, 要么严格负. 这说明 φ 在 $\operatorname{supp}\psi$ 上必是单调的, 因此在(2.131)式中可以考虑换元

$$u = \varphi(x).$$

知 $dx = (\varphi'(x))^{-1}du = (\varphi^{-1})'(u)du$, 其中 φ^{-1} 是 φ 的反函数. 现在将(2.131)式写成

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda u}\psi(\varphi^{-1}(u))(\varphi^{-1})'(u)du \tag{2.132}$$

注意到函数 $\theta(u) = \psi(\varphi^{-1}(u))(\varphi^{-1})'(u)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑紧支函数, 因此

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda u}\psi(\varphi^{-1}(u))(\varphi^{-1})'(u)du = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda u}\theta(u)du = \widehat{\theta}(\frac{-\lambda}{2\pi})$$

其中 $\widehat{\theta}$ 是 θ 的 Fourier 变换. 因为 θ 是光滑紧支函数, 故由函数光滑性与其 Fourier 变换衰减性的联系2.3知 $\lambda \to \infty$ 时 $\widehat{\theta}$ 是速降的 (亦即对任意 $N > 0$ 均有 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \widehat{\theta}(-\frac{\lambda}{2\pi}) = o(\lambda^{-N})$), 进而(2.132)式中的积分在 $\lambda \to \infty$ 时是速降的.

下面探讨这种情况的高维版本.

定义 2.25 (驻点)

称点 x_0 是相位函数 φ 的驻点, 如果

$$\nabla\varphi(x_0) = (\partial_1\varphi(x_0), \cdots, \partial_n\varphi(x_0)) = 0.$$

♣

例 2.12 设 $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, 则相位函数 $\varphi_1(x) = x \cdot \xi, \varphi_2(x) = e^{x\cdot\xi}$ 无驻点, 而相位函数 $\varphi_3(x) = |x|^2 - x \cdot \xi$ 有一个驻点 $x_0 = \frac{1}{2}\xi$.

下面的结果给出了相位函数无驻点时振荡积分的行为.

命题 2.49 (无驻点相位振荡积分的点态估计)

设 ψ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支光滑函数, φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值 C^∞ 函数, 且在 $\operatorname{supp}\psi$ 上无驻点. 则振荡积分

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)}\psi(x)dx \tag{2.133}$$

对任意 $\lambda \geq 1$ 与任意 $N > 0$ 满足估计 $|I(\lambda)| \leq C_N\lambda^{-N}$, 其中 C_N 是依赖于 N, φ, ψ 的常数.

♠

证明 一维的情况已经在前面讨论过了, 下面着重于 $n \geq 2$ 的情况. 对任意 $y \in \operatorname{supp}\psi$, 总存在单位向量 θ_y 使得

$$\theta_y \cdot \nabla\varphi(y) = |\nabla\varphi(y)|.$$

根据 $\nabla\varphi$ 的连续性知存在 y 的某邻域 $B(y,r_y)$ 使得对任意 $x\in B(y,r_y)$ 均有
$$\theta_y\cdot\nabla\varphi(x)\geq\frac{1}{2}|\nabla\varphi(y)|>0.$$
因为 $\operatorname{supp}\psi$ 是紧集, 故可用有限个球 $B(y_j,r_{y_j})(j=1,\cdots,m)$ 覆盖 $\operatorname{supp}\psi$. 记 $c=\min_{1\leq j\leq m}\frac{1}{2}|\nabla\varphi(y_j)|$, 则
$$\theta_{y_j}\cdot\nabla\varphi(x)\geq c>0 \tag{2.134}$$
对任意 $x\in B(y_j,r_{y_j})$ 与 $j=1,\cdots,m$ 成立.

下面在 $\bigcup_{j=1}^m B(y_j,r_{y_j})$ 上作单位分解. 因为 $\bigcup_{j=1}^m B(y_j,r_{y_j})$ 紧包含于 $\mathbb{R}^n$, 故通过单位分解定理得到的 C_0^∞ 函数族 Ψ 中的每个函数 ψ 要么支在某个球 $B(y_j,r_{y_j})$ 上, 要么支在 $\operatorname{supp}\psi$ 之外 (实际上是支在 $\bigcup_{j=1}^m B(y_j,r_{y_j})$ 之外). 现在根据单位分解定理2.20(ii),(iv) 知存在有限个函数 $\{\zeta_k\}_k\in\Psi$ 使得
$$I(\lambda)=\sum_k\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\lambda\varphi(x)}\psi(x)\zeta_k(x)dx. \tag{2.135}$$
于是只需证明(2.135)右和式中的每个项在 $\lambda\to\infty$ 时均速降即可.

现在固定 k, 取 j 满足 $\operatorname{supp}(\psi\zeta_k)\subset B(y_j,r_{y_j})$, 并取单位向量 $\theta_{y_j,2},\cdots,\theta_{y_j,n}$ 使得向量组 $\{\theta_{y_j},\theta_{y_j,2},\cdots,\theta_{y_j,n}\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上正交. 设 e_j 是 $\mathbb{R}^n$ 上第 j 个元素为 1, 其余元素为 0 的单位 (列) 向量. 现取正交阵 R 使得 $R^te_1=\theta_{y_j}$, 在积分
$$I_k(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\lambda\varphi(x)}\psi(x)\zeta_k(x)dx$$
中考虑换元 $u=y_j+R(x-y_j)$. 映射 $x\mapsto u=(u_1,\cdots,u_n)$ 实际上是旋转, 进而在该映射下球 $B(y_j,r_{y_j})$ 是不变的. 定义 $\varphi(x)=\varphi^o(u),\psi(x)=\psi^o(u),\zeta_k(x)=\zeta_k^o(u)$, 则在新的坐标系中有
$$I_k(\lambda)=\int_K\left\{\int_{\mathbb{R}}e^{i\lambda\varphi^o(u)}\psi^o(u_1,\cdots,u_n)\zeta_k^o(u_1,\cdots,u_n)du_1\right\}du_2\cdots du_n, \tag{2.136}$$
其中 K 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的某紧子集. 因为 R 是正交阵, 故 $R^{-1}=R^t$, 进而 $u=y_j+R(x-y_j)$ 等价于 $x=y_j+R^t(u-y_j)$. 若设
$$R=\begin{pmatrix}R_{11}&\cdots&R_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ R_{n1}&\cdots&R_{nn}\end{pmatrix}$$
则
$$x=y_j+\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n R_{i1}u_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^n R_{in}u_i\end{pmatrix}-R^ty_j$$
因此
$$\frac{\partial x}{\partial u_1}=\begin{pmatrix}R_{11}\\ \vdots\\ R_{1n}\end{pmatrix}=R^te_1=\theta_{y_j}$$
于是对任意 $x\in B(y_j,r_{y_j})$, 由(2.134)式知
$$\frac{\partial\varphi^o(u)}{\partial u_1}=\frac{\partial\varphi(y_j+R^t(u-y_j))}{\partial u_1}=\nabla\varphi(x)\cdot\frac{\partial x}{\partial u_1}=\nabla\varphi(x)\cdot\theta_{y_j}\geq c>0$$
现在将(2.136)式中大括号内的积分视作关于 u_1 的振荡积分, 知 $\psi^o\zeta_k^o$ 是关于 u_1 的光滑函数, 且上式已经说明了关于 u_1 的相位函数 φ^o 无驻点, 因此由前文讨论过的一维情形可知对任意 $N>0$, (2.136)式中大括号内的部分在 $\lambda\to\infty$ 时都表现为 $o(\lambda^{-N})$. 又因为 K 是紧集, 故 $I_k(\lambda)$ 在 $\lambda\to\infty$ 时同样表现为 $o(\lambda^{-N})$, 这便完成了证明. □

2.16.2 下水平集估计与 Van der Corput 引理

下面讨论一维振荡积分的一个最佳衰减估计. 这个估计是通过对函数 u 的下水平集 $\{|u| \le \alpha\}$ 的 Lebesgue 测度作精确的尺寸估计而得到的. 下面记 $u^{(k)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数 $u(t)$ 的 k 阶导数, $C^k(\mathbb{R})$ 是 k 阶连续可微函数空间.

引理 2.18

设 $k \ge 1, a_0, \cdots, a_k$ 是两两不同的实数. 记 $a = \min(a_j), b = \max(a_j)$, f 是 $[a,b]$ 上的实值 C^{k-1} 函数, 且它在 (a,b) 上是 C^k 函数, 则存在 $y \in (a,b)$ 使得

$$\sum_{m=0}^{k} c_m f(a_m) = f^{(k)}(y),$$

其中 $c_m = (-1)^k k! \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq m}}^{k} (a_l - a_m)^{-1}$.

证明 如果可以找到多项式 $p_k(x) = \sum_{j=0}^{k} b_j x^j$ 使得函数

$$\varphi(x) = f(x) - p_k(x) \tag{2.137}$$

满足对任意 $0 \le m \le k$ 均有 $\varphi(a_m) = 0$, 因为 a_j 两两不同, 故对 φ 用 k 次 Rolle 定理可知存在 $y \in (a,b)$ 使得

$$f^{(k)}(y) = k! b_k.$$

(2.137)式中多项式 p_k 的存在性等价于下述矩阵方程解的存在性

$$\begin{pmatrix} a_0^k & a_0^{k-1} & \cdots & a_0 & 1 \\ a_1^k & a_1^{k-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1}^k & a_{k-1}^{k-1} & \cdots & a_{k-1} & 1 \\ a_k^k & a_k^{k-1} & \cdots & a_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ b_{k-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_0) \\ f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_{k-1}) \\ f(a_k) \end{pmatrix}.$$

上左式中矩阵的行列式恰为 Vandermonde 行列式, 知

$$\begin{vmatrix} a_0^k & a_0^{k-1} & \cdots & a_0 & 1 \\ a_1^k & a_1^{k-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1}^k & a_{k-1}^{k-1} & \cdots & a_{k-1} & 1 \\ a_k^k & a_k^{k-1} & \cdots & a_k & 1 \end{vmatrix} = \prod_{l=0}^{k-1} \prod_{j=l+1}^{k} (a_j - a_j).$$

又因为 a_j 互不相同, 故 $\prod_{l=0}^{k-1} \prod_{j=l+1}^{k} (a_j - a_j) \neq 0$, 这说明矩阵方程有唯一解. 根据 Cramer 法则解得

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m f(a_m) \frac{\prod\limits_{\substack{l=0 \\ l\neq m}}^{k-1} \prod\limits_{\substack{j=l+1 \\ j\neq m}}^{k} (a_l - a_j)}{\prod\limits_{l=0}^{k-1} \prod\limits_{j=l+1}^{k} (a_l - a_j)} \\ &= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m f(a_m) \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq m}}^{k} (a_l - a_m)^{-1} (-1)^{k-m} \end{aligned}$$

对应设置 c_m 即可. □

引理 2.19

设 E 是 $\mathbb{R}$ 的可测子集, 且它具有非零的有限 Lebesgue 测度. 若 $k\in\mathbb{N}$, 则存在 $a_0,\cdots,a_k\in E$ 使得对任意 $l=0,1,\cdots,k$ 均有

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{k}|a_j-a_l|\geq\left(\frac{|E|}{2e}\right)^k. \tag{2.138}$$

证明 取定有限测度集 E, 根据实变函数的结论知对任意 $\delta>0$, 存在 E 的紧子集 E' 使得 $|E\backslash E'|<\delta$. 现对 $x\in\mathbb{R}$ 定义 $T(x)=|(-\infty,x)\cap E'|$, 则 T 满足下述" 距离递减性":

$$|T(x)-T(y)|\leq|x-y|,\quad\forall x,y\in E'$$

因此 T 是连续函数, 进而根据连续函数的介值定理知 T 是从 E' 到 $[0,|E'|]$ 的满射. 现设 $a_j\in E'$ 满足 $T(a_j)=\frac{j}{k}|E'|(j=0,1,\cdots,k)$, 若 k 是偶数, 则

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{k}|a_j-a_l|\geq\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{k}\left|\frac{j}{k}|E'|-\frac{l}{k}|E'|\right|\geq\prod_{\substack{j=0\\ j\neq \frac{k}{2}}}^{k}\left|\frac{j}{k}-\frac{1}{2}\right||E'|^k=\prod_{r=0}^{\frac{k}{2}-1}\left(\frac{r-\frac{k}{2}}{k}\right)^2|E'|^k$$

根据 Stirling 公式知存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\left(\frac{k}{2}\right)!=\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{2e}\right)^{\frac{k}{2}}e^{\frac{\theta}{2k}}$$

于是

$$\prod_{r=0}^{\frac{k}{2}-1}\left(\frac{r-\frac{k}{2}}{k}\right)^2=\pi k(2e)^{-k}e^{\frac{\theta}{k}}\geq(2e)^{-k}.$$

若 k 是奇数, $k=1$ 时结论显然成立, 下设 $k>1$, 则

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{k}|a_j-a_l|\geq\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{k}\left|\frac{j}{k}|E'|-\frac{l}{k}|E'|\right|\geq\prod_{\substack{j=0\\ j\neq \frac{k+1}{2}}}^{k}\left|\frac{j}{k}-\frac{k+1}{2k}\right||E'|^k$$

而

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq \frac{k+1}{2}}}^{k}\left|\frac{j}{k}-\frac{k+1}{2k}\right|&\geq\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{2}{k}\cdots\frac{\frac{k-1}{2}}{k}\right)^2\frac{k+1}{2k}\\&\geq k^{1-k}\cdot\pi(k-1)\cdot(k-1)^{k-1}\cdot(2e)^{1-k}\cdot\frac{k+1}{2k}\\&=2e\pi\left(\frac{k-1}{k}\right)^k\frac{k+1}{2}(2e)^{-k}\geq\frac{e\pi}{2}\frac{k+1}{2}(2e)^{-k}\geq(2e)^{-k}.\end{aligned}$$

至此已经证明了(2.138)式中将 E 换成 E' 的情况. 又因为 $|E\backslash E'|<\delta$, 而 δ 可取任意小, 至此即得结论. □

下面阐述本节的主要结论.

命题 2.50 (Van der Corput)

(a) 设 u 是实值 C^k 函数, $k\in\mathbb{N}$ 满足 $u^{(k)}(t)\geq1$ 对任意 $t\in\mathbb{R}$ 成立, 则下述估计对任意 $\alpha>0$ 成立:

$$|\{t\in\mathbb{R}:|u(t)|\leq\alpha\}|\leq(2e)((k+1)!)^{\frac{1}{k}}\alpha^{\frac{1}{k}}. \tag{2.139}$$

(b) 设 $-\infty<a<b<\infty$. 对全体 $k\geq2$, 只要 $\mathbb{R}$ 上的实值 C^k 函数 u 满足 $u^{(k)}(t)\geq1$ 对任意 $t\in[a,b]$ 成立, 则对任意 $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 均有:

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}dt\right|\leq10k|\lambda|^{-\frac{1}{k}}. \tag{2.140}$$

(c) 若 $k=1$, $u'(t)$ 在 (a,b) 上单调, $u'(t)\geq 1$ 对任意 $t\in(a,b)$ 成立, 则对任意非零实数 λ 有

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}dt\right|\leq 4|\lambda|^{-1}. \tag{2.141}$$

证明 (a) 设 $E=\{t\in\mathbb{R}:|u(t)|\leq\alpha\}$. 若 $|E|$ 非零, 则根据引理2.19知存在 $a_0,a_1,\cdots,a_k\in E$ 使得对任意 $l\in\{0,1,\cdots,k\}$ 均有

$$|E|^k\leq(2e)^k\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{k}|a_j-a_l|. \tag{2.142}$$

引理2.18说明存在 $y\in(\min a_j,\max a_j)$ 使得

$$u^{(k)}(y)=(-1)^k k!\sum_{m=0}^{k}u(a_m)\prod_{\substack{l=0\\ l\neq m}}^{k}(a_l-a_m)^{-1}. \tag{2.143}$$

将(2.142)式代入(2.143)右式可得

$$\begin{aligned}\left|(-1)^k k!\sum_{m=0}^{k}u(a_m)\prod_{\substack{l=0\\ l\neq m}}^{k}(a_l-a_m)^{-1}\right|&\leq k!\sum_{m=0}^{k}\max_{0\leq j\leq k}u(a_j)(2e)^k|E|^{-k}\\&\leq(k+1)!\max_{0\leq j\leq k}u(a_j)(2e)^k|E|^{-k}\overset{(A)}{\leq}(k+1)!\alpha(2e)^k|E|^{-k}\end{aligned}$$

其中 (A) 是因为 $a_j\in E$. 现由 $u^{(k)}(t)\geq 1$ 知

$$(k+1)!\alpha(2e)^k|E|^{-k}\geq 1\Rightarrow|E|^k\leq(k+1)!(2e)^k\alpha$$

此即(2.139)式.

(b) 取 $k\geq 2$, 将(2.140)式中提到的区间分为两部分:

$$\begin{aligned}R_1&=\{t\in(a,b):|u'(t)|\leq\beta\},\\R_2&=\{t\in(a,b):|u'(t)|>\beta\},\end{aligned}$$

其中 β 是待定常数. 函数 $v=u'$ 满足 $v^{(k-1)}\geq 1$, 同时 $k-1\geq 1$, 故由 (a) 的结论知

$$\left|\int_{R_1}e^{i\lambda u(t)}dt\right|\leq|R_1|\leq 2e(k!)^{\frac{1}{k-1}}\beta^{\frac{1}{k-1}}\leq 6k\beta^{\frac{1}{k-1}}.$$

[46]为了给出 R_2 的估计, 注意到若 $u^{(k)}\geq 1$, 则集合 $\{|u'|>\beta\}$ 可以写成至多 $k-1$ 个区间的并, 在其中每个区间上 u' 都是单调的. 这是因为 $u^{(k)}\geq 1$ 意味着 $u^{(k-1)}$ 至多有 1 个零点, 进而 $u^{(k-2)}$ 至多有 2 个零点, 重复该过程可知 u'' 至多有 $k-2$ 个零点, 也就是说 u' 的单调区间至多有 $k-1$ 个. 现设 (c,d) 是构成 $\{|u'|>\beta\}$ 的某个单调区间, 则 u' 在 (c,d) 上符号固定, 进而

$$\begin{aligned}\left|\int_c^d e^{i\lambda u(t)}dt\right|&=\left|\int_c^d(e^{i\lambda u(t)})'\frac{1}{\lambda u'(t)}dt\right|\\&\leq\left|\int_c^d e^{i\lambda u(t)}\left(\frac{1}{\lambda u'(t)}\right)'dt\right|+\frac{1}{|\lambda|}\left|\frac{e^{i\lambda u(d)}}{u'(d)}-\frac{e^{i\lambda u(c)}}{u'(c)}\right|\\&\leq\frac{1}{|\lambda|}\int_c^d\left|\left(\frac{1}{u'(t)}\right)'\right|dt+\frac{2}{|\lambda|\beta}\\&\overset{(B)}{=}\frac{1}{|\lambda|}\left|\int_c^d\left(\frac{1}{u'(t)}\right)'dt\right|+\frac{2}{|\lambda|\beta}\\&=\frac{1}{|\lambda|}\left|\frac{1}{u'(d)}-\frac{1}{u'(c)}\right|+\frac{2}{|\lambda|\beta}\leq\frac{4}{|\lambda|\beta},\end{aligned}$$

[46]记得改, 这里有问题, 参照平板 249 此处批注.

其中 (B) 是因为 (c,d) 是 u' 的单调区间, 进而也是 $\frac{1}{u'}$ 的单调区间, 所以 $\left(\frac{1}{u'}\right)'$ 在 (c,d) 上符号固定. 现有

$$\left|\int_{R_2} e^{i\lambda u(t)}dt\right| \le \frac{4(k-1)}{|\lambda|\beta} \le \frac{4k}{|\lambda|\beta}$$

取 $\beta = |\lambda|^{-\frac{k-1}{k}}$ 可得

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}dt\right| &\le \left|\int_{R_1} e^{i\lambda u(t)}dt\right| + \left|\int_{R_2} e^{i\lambda u(t)}dt\right| \\ &\le 6k|\lambda|^{-\frac{1}{k}} + 4k|\lambda|^{-\frac{1}{k}} = 10k|\lambda|^{-\frac{1}{k}}\end{aligned}$$

此即(2.140)式.

(c) 因为 $u'(t) \ge 1$, 故

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}dt\right| &= \left|\int_a^b (e^{i\lambda u(t)})'\frac{1}{\lambda u'(t)}dt\right| \\ &\le \left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}\left(\frac{1}{\lambda u'(t)}\right)'dt\right| + \frac{1}{|\lambda|}\left|\frac{e^{i\lambda u(b)}}{u'(b)} - \frac{e^{i\lambda u(a)}}{u'(a)}\right| \\ &\le \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b \left|\left(\frac{1}{u'(t)}\right)'\right|dt + \frac{2}{|\lambda|} \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\left|\int_a^b \left(\frac{1}{u'(t)}\right)'dt\right| + \frac{2}{|\lambda|} \\ &\le \frac{1}{|\lambda|}\left|\frac{1}{u'(b)} - \frac{1}{u'(a)}\right| + \frac{2}{|\lambda|} \le 4|\lambda|^{-1}\end{aligned}$$

此即(2.141)式. □

推论 2.10

设 $(a,b), u(t), \lambda > 0, k$ 满足 Van der Corput 引理2.50的条件, 则对 (a,b) 上任意具有可积导函数的函数 ψ, 当 $k \ge 2$ 时有

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}\psi(t)dt\right| \le 10\lambda^{-\frac{1}{k}}\left[|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(s)|ds\right].$$

若 $k = 1$ 且 ψ' 在 (a,b) 上单调, 则

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}\psi(t)dt\right| \le 4\lambda^{-1}\left[|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(s)|ds\right].$$

证明 设

$$F(x) = \int_a^x e^{i\lambda u(t)}dt$$

分部积分知

$$\int_a^b e^{i\lambda u(t)}\psi(t)dt = F(b)\psi(b) - \int_a^b F(t)\psi'(t)dt.$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}\psi(t)dt\right| &\le |F(b)\psi(b)| + \int_a^b |F(t)||\psi'(t)|dt \\ &= \left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}dt\right||\psi(b)| + \int_a^b \left|\int_a^t e^{i\lambda u(y)}dy\right||\psi'(t)|dt \\ &\le 10k|\lambda|^{-\frac{1}{k}}|\psi(b)| + 10k|\lambda|^{-\frac{1}{k}}\int_a^b |\psi'(t)|dt \\ &= 10\lambda^{-\frac{1}{k}}\left[|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(s)|ds\right]\end{aligned}$$

另一结论类似可证. □

例 2.13(Bessel 函数) m 阶 Bessel 函数定义为

$$J_m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ir\sin\theta}e^{-im\theta}d\theta,$$

其中 r, m 均为实数, 另设 $m > -\frac{1}{2}$. 下面用推论2.10研究 Bessel 函数在 $r \to \infty$ 时的衰减情况. 设 $\varphi(\theta) = \sin(\theta)$, 注意到在区间 $[0, 2\pi]$ 内, $\varphi'(\theta)$ 只会在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 与 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 这两处为零, 另有 $\varphi''(\frac{\pi}{2}) = 1, \varphi''(\frac{3\pi}{2}) = 1$. 现记 $1 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$, 其中 ψ_1 在 $\frac{\pi}{2}$ 的某个小邻域内光滑紧支, ψ_2 在 $\frac{3\pi}{2}$ 的某个小邻域内光滑紧支. 对 $j = 1, 2$, 推论2.10表明

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{ir\sin(\theta)}(\psi_j(\theta)e^{-im\theta})d\theta\right| \le Cmr^{-\frac{1}{2}}$$

其中 C 是常数. 对于 $j = 3$, 因为此时积分区域不包含 $\sin\theta$ 的驻点, 故根据无驻点相位振荡积分的点态估计2.49知 ψ_3 对应的积分在 $r \to \infty$ 时速降. 因此 J_m 在 $r \to \infty$ 时以 $r^{-\frac{1}{2}}$ 这一速度衰减.

第三章 Hardy-Littlewood 极大函数

3.1 恒等逼近定理

设 ϕ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数, 且其满足 $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx=1$, 对 $t>0$ 定义 $\phi_t(x)=t^{-n}\phi(t^{-1}x)$. 当 $t\to 0$, 知 $\phi_t\to\delta(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, 其中 δ 是在原点的 Dirac 测度. 这是因为首先有

$$\langle\phi_t,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}t^{-n}\phi(t^{-1}x)g(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)g(tx)dx,\quad\forall g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

于是根据控制收敛定理有

$$\langle\lim_{t\to 0}\phi_t,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{t\to 0}\phi(x)g(tx)dx=g(0)=\langle\delta,g\rangle$$

此即 $\phi_t\to\delta(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. 因为 $\delta*g(x)=g(x)$, 故对任意 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 都在点态意义下有

$$\lim_{t\to 0}(\phi_t*g)(x)=g(x).$$

基于上述启发, 可以得到恒等逼近族的定义:

定义 3.1 (恒等逼近族)

设 $\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi_t(x)=\frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t})(t>0)$ 满足:

(i) $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx=1$;

(ii) $\phi_t\to\delta(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$,

那么就称 $\{\phi_t\}_{t>0}$ 是恒等逼近族.

♣

实际上 **[DY]** 中给出了下述更宽泛的恒等逼近族定义:

定义 3.2 (恒等逼近族[DY])

设 ϕ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测, 对任意 $t>0$, 记 $\phi_t(x)=\frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t})$. 若任取 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1\le p\le\infty)$, 在 $t\to 0$ 时都 (在依 L^p 范数或点态意义下) 有 $f*\phi_t\to f$, 则称 ϕ 为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的恒等逼近核, 称 $\{\phi_t\}_{t>0}$ 为恒等逼近族.

♣

在后文中若非特殊说明, 称恒等逼近族时指代的都是定义3.1.

前面的所有求和法中的收敛性结果都是恒等逼近定理的特殊情况: 对 Cesaro 求和法, 可取 $\phi=F_1$, $F_R=\phi_{\frac{1}{R}}$; 对 Abel-Poisson 求和法, 可取 $\phi=P_1$; 对 Gauss-Weierstrass 求和法, 可取 $\phi=W_1$. 下面的恒等逼近定理表明这些求和法最后都能导出依 L^p 范数收敛性.

定理 3.1 (恒等逼近定理)

设 $\{\phi_t\}_{t>0}$ 是恒等逼近族, 则

$$\lim_{t\to 0}\|\phi_t*f-f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=0$$

其中 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1\le p<\infty)$. 特别当 $p=\infty$, 则只要 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$, 上述极限就成立.

♡

证明 因为 $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx=1$, 故

$$(\phi_t*f)(x)-f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)[f(x-ty)-f(x)]dy$$

因为本身有 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 故任取 $\varepsilon>0$, 总存在 (依赖于 f 的)$\delta>0$ 使得对 $|h|<\delta$ 有

$$\|f(\circledast+h)-f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}<\varepsilon$$

对固定的 δ, 又存在足够小的 t 使得

$$\int_{|y|\ge\frac{\delta}{t}}|\phi(y)|dy\le\varepsilon$$

于是根据 Minkowski 不等式有

$$
\begin{aligned}
\|\phi_t * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)[f(\circledast - ty) - f(\circledast)]dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)| \|f(\circledast - ty) - f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} dy \\
&= \int_{|y|<\frac{\delta}{t}} |\phi(y)| \|f(\circledast - ty) - f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} dy \\
&\quad + \int_{|y|\geq\frac{\delta}{t}} |\phi(y)| \|f(\circledast - ty) - f(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} dy \\
&\leq \varepsilon \int_{|y|<\frac{\delta}{t}} |\phi(y)| dy + 2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \varepsilon
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性即得命题. □

作为恒等逼近定理的推论, 回忆依 L^p 范数收敛可以推知依测度收敛, 而 Riesz 定理表明依测度收敛列存在几乎处处收敛子列, 故存在依赖于 f 的序列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得 $t_k \to 0(k \to \infty)$, 且

$$
\lim_{k\to\infty} (\phi_{t_k} * f)(x) = f(x), \quad \text{a.e.}
$$

因此只要极限 $\lim_{t\to 0}(\phi_t * f)(x)$ 存在, 它必几乎处处等于 $f(x)$. 之后的章节中我们会来研究这个极限的存在性.

注 类似于恒等逼近定理的证明, 如果将恒等逼近族定义中的 $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$ 修改为 $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = a \in \mathbb{C}$, 可得下述定理:

补充定理 3.1 (恒等逼近定理的推广)

若 $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t})(t > 0)$ 满足

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = a \in \mathbb{C}$;

(ii) 对任意 $\delta > 0$ 均有 $\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)} \phi_t(x)dx \to 0$

则对任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p \leq \infty)$:

(a) 若 $1 \leq p < \infty$, 则 $\lim_{t\to 0} \|\phi_t * f - af\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$;

(b) 若 $p = \infty$, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 则 $\lim_{t\to 0} \|\phi_t * f - af\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$.

♡

3.2 弱型不等式与几乎处处收敛

设 $(X, \mu), (Y, \nu)$ 是测度空间, T 是从 $L^p(X, \mu)$ 到 Y 上复值可测函数空间的算子.

定义 3.3 (弱 (p, q) 型算子)

称 T 是弱 $(p, q)(q < \infty)$ 型算子, 如果存在常数 C 使得

$$
\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_{L^p(X,\mu)}}{\lambda}\right)^q, \quad \forall \lambda > 0 \tag{3.1}
$$

(3.1)式又称为弱 (p, q) 型不等式. 称 T 是弱 (p, ∞) 型算子, 如果它是从 $L^p(X, \mu)$ 到 $L^\infty(Y, \nu)$ 的有界算子, 亦即

$$
\|T\|_{L^p(X,\mu)\to L^\infty(Y,\nu)} = \sup_{\|f\|_{L^p(X,\mu)}\leq 1} \|Tf\|_{L^\infty(Y,\nu)} < \infty. \tag{3.2}
$$

(3.2)式又称为弱 (p, ∞) 型不等式.

♣

定义 3.4 (强 (p, q) 型算子)

称 T 是强 (p, q) 型算子, 如果它是从 $L^p(X, \mu)$ 到 $L^q(Y, \nu)$ 的有界算子, 亦即

$$
\|T\|_{L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)} = \sup_{\|f\|_{L^p(X,\mu)}\leq 1} \|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} < \infty \tag{3.3}
$$

(3.3)式又称为强 (p,q) 型不等式.

下面说明强 (p,q) 型算子必是弱 (p,q) 型算子: 任取 $\lambda>0$, 设 $E_\lambda=\{y\in Y:|Tf(y)|>\lambda\}$, $\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)}\le C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$, 其中 C 是常数, 则

$$\nu(E_\lambda)=\int_{E_\lambda}d\nu\le\int_{E_\lambda}\left|\frac{Tf(x)}{\lambda}\right|^q d\nu\le\frac{\|Tf\|^q_{L^q(Y,\nu)}}{\lambda^q}\le\left(\frac{C\|f\|_{L^p(X,\mu)}}{\lambda}\right)^q.$$

当 $(X,\mu)=(Y,\nu)$, T 是恒同算子时, T 的弱 (p,p) 型不等式就正是 Chebyshev 不等式.

弱 (p,q) 型不等式与几乎处处收敛的关系由下述定理给出, 其中设 $(X,\mu)=(Y,\nu)$.

定理 3.2 (算子族的点态收敛性)

设 $\{T_t\}_t$ 是 $L^p(X,\mu)$ 上的一族线性算子, 定义

$$T^*f(x)=\sup_t|T_tf(x)|$$

若 T^* 是弱 (p,q) 型算子, 则集合

$$\{f\in L^p(X,\mu):\lim_{t\to t_0}T_tf(x)=f(x)\text{ a.e.}\}$$

在 $L^p(X,\mu)$ 中闭.

证明 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是依 L^p 范数收敛到 f 的函数列, 且其满足 $T_tf_n(x)$ 在 $t\to t_0$ 时几乎处处收敛到 $f_n(x)$. 往证 $\lim\limits_{t\to t_0}T_tf(x)=f(x)$ a.e, 任取 $\lambda>0$ 知:

$$\begin{aligned}\mu(\{x\in X:\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf(x)-f(x)|>\lambda\})&\le\mu(\{x\in X:\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_t(f-f_n)(x)-(f-f_n)(x)|>\lambda\})\\&\overset{(A)}{=}\mu(\{x\in X:\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf(x)-f(x)|-\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf_n(x)-f_n(x)|>\lambda\})\\&\le\mu(\{x\in X:\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_t(f-f_n)(x)-(f-f_n)(x)|>\lambda\})\\&\le\mu(\{x\in X:T^*(f-f_n)(x)>\frac{\lambda}{2}\})+\mu(\{x\in X:|(f-f_n)(x)|>\frac{\lambda}{2}\})\\&\overset{(B)}{\le}\left(\frac{2C}{\lambda}\|f-f_n\|_{L^p(X,\mu)}\right)^q+\left(\frac{2}{\lambda}\|f-f_n\|_{L^p(X,\mu)}\right)^p\end{aligned}$$

其中 (A) 是因为 $\mu(\{x\in X:\overline{\lim\limits_{t\to t_0}}|T_tf_n(x)-f_n(x)|>\lambda\})=0$, (B) 的第一式是 T^* 作为弱 (p,q) 型算子的定义, 第二式是 Chebyshev 不等式. 最后的式子在 $n\to\infty$ 时是趋零的, 故

$$\mu(\{x\in X:\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf(x)-f(x)|>0\})\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu(\{x\in X:\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\})=0$$

于是 $\lim\limits_{t\to t_0}T_tf(x)=f(x)$ a.e., 进而 $f\in\{f\in L^p(X,\mu):\lim\limits_{t\to t_0}T_tf(x)=f(x)\text{ a.e.}\}$, 亦即 $\{f\in L^p(X,\mu):\lim\limits_{t\to t_0}T_tf(x)=f(x)\text{ a.e.}\}$ 是 $L^p(X,\mu)$ 中的闭集. □

注 算子族的点态收敛性定理3.2指出要研究算子族 $\{T_t\}_t$ 的点态收敛性, 只需研究 T^* 的弱型不等式即可. 该定理同时引出了下述定义:

定义 3.5 (算子族的极大算子)

若 $\{T_t\}_t$ 是一族线性算子, 则称算子 $T^*:f\mapsto\sup\limits_t|T_tf|$ 为算子族 $\{T_t\}_t$ 的极大算子.

另外, 在上述定理的证明中如果定义线性算子 $T:f\mapsto\lim\limits_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon(f)$, 将 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 改为依 L^p 范数收敛到 $T(f)$ 的函数列, 则可逐字逐句地重复上述证明得到下述定理:

定理 3.3 (算子族的点态收敛性)

设 $0<p<\infty, 0<q<\infty$, $\{T_\varepsilon\}_\varepsilon$ 是 $L^p(X,\mu)$ 上的一族线性算子, T^* 是 $\{T_\varepsilon\}_\varepsilon$ 的极大算子, D 是 $L^p(X,\mu)$ 的稠密子空间. 若 T^* 是弱 (p,q) 型算子, 且对全体 $f\in D$ 而言

$$T(f):=\lim_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon(f) \tag{3.4}$$

存在且 μ a.e. 有限, 则对任意 $f\in L^p(X,\mu)$ 而言, 极限(3.4)均存在且 a.e. 有限, 且依照极限(3.4)定义的 $L^p(X,\mu)$ 上的线性算子 T 依旧是弱 (p,q) 型算子.

更一般地, 用证明定理3.2的同样技巧可以证明集合

$$\{f\in L^p(X,\mu):\lim_{t\to t_0}T_tf(x)\text{ a.e. 存在}\}$$

在 $L^p(X,\mu)$ 中闭, 亦即下述命题:

命题 3.1

设 $\{T_t\}_t$ 是 $L^p(X,\mu)$ 上的一族线性算子, T^* 是其对应的极大算子. 若 T^* 是弱 (p,q) 型算子, 则集合

$$\{f\in L^p(X,\mu):\lim_{t\to t_0}T_tf(x)\text{ a.e. 存在}\}$$

在 $L^p(X,\mu)$ 中闭.

证明 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是依 L^p 范数收敛到 f 的函数列, 且对任意 $n\in\mathbb{N}$ 而言 $\lim\limits_{t\to t_0}T_tf_n(x)$ 均 a.e. 存在, 往证 $\lim\limits_{t\to t_0}T_tf(x)$ a.e. 存在.

$$\begin{aligned}\mu(\{x\in X:\overline{\lim_{t\to t_0}}T_tf(x)-\underline{\lim_{t\to t_0}}T_tf(x)>\lambda\})&\le\mu(\{x\in X:\overline{\lim_{t\to t_0}}T_t(f-f_n)(x)-\underline{\lim_{t\to t_0}}T_t(f-f_n)(x)>\lambda\})\\&\le\mu(\{x\in X:2T^*(f-f_n)(x)>\lambda\})\le C\left(\frac{\|f-f_n\|_{L^p(X,\mu)}}{\lambda}\right)^q\end{aligned}$$

最后的式子在 $n\to\infty$ 时趋零, 故 $\mu(\{x\in X:\overline{\lim\limits_{t\to t_0}}T_tf(x)-\underline{\lim\limits_{t\to t_0}}T_tf(x)>\lambda\})=0$, 因而 $f\in\{f\in L^p(X,\mu):\lim\limits_{t\to t_0}T_tf(x)\text{ a.e. 存在}\}$, 命题得证. □

回到上一节的主题, 恒等逼近定理已经解决了恒等逼近算子 $T_t:f\to\phi_t*f$($\{\phi_t\}_{t>0}$ 是恒等逼近族) 在 L^p 意义下是否收敛到 f 的问题. 现在希望知道恒等逼近算子族 $\{T_t\}_{t>0}$ 什么时候几乎处处 (或点态) 意义下收敛到 f, 根据算子族的点态收敛定理3.2, 此即讨论极大算子 $f\to\sup\limits_{t>0}|\phi_t*f|$ 什么时候成为弱 (p,q) 型算子. 这件事的解决需要引入下一节介绍的插值定理.

3.3 Marcinkiewicz 插值定理

本节设 (X,μ) 是测度空间.

定义 3.6 (分布函数)

若 $f:X\to\mathbb{C}$ 是可测函数, 则 f 关于 μ 的分布函数 $d_f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ 定义为

$$d_f(\lambda)=\mu(\{x\in X:|f(x)|>\lambda\})$$

首先需要注意 $d_f(t)$ 是关于 t 的递增函数, 这是因为若 $t_1<t_2$, 根据 $d_f(s)$ 的定义注意到

$$\begin{aligned}s_1>s_2&\Rightarrow(|f(x)|>s_1\Rightarrow|f(x)|>s_2)\\&\Rightarrow(\mu(\{x\in X:|f(x)|>s_1\})\ge\mu(\{x\in X:|f(x)|>s_2\}))\\&\Rightarrow d_f(s_1)>d_f(s_2)\end{aligned}$$

此即欲证. **[LG1]** 中另外列举了分布函数的一些性质, 它们的证明或许有助于提前习惯分布函数的语言:

命题 3.2 (分布函数的性质)

若 f, g, f_n 均为 (X, μ) 上的可测函数, 则对任意 $\alpha, \beta > 0$ 有:

(i) 若 $|g(x)| \le |f(x)|$ 是 μ 几乎处处成立的, 则对任意 $\lambda > 0$ 有 $d_g(\lambda) \le d_f(\lambda)$;

(ii) 对任意 $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 有 $d_{cf}(\alpha) = d_f(\frac{\alpha}{|c|})$;

(iii) $d_{f+g}(\alpha+\beta) \le d_f(\alpha) + d_g(\beta)$;

(iv) $d_{fg}(\alpha\beta) \le d_f(\alpha) + d_g(\beta)$;

(v) d_f 在 $[0, \infty)$ 上右连续;

(vi) 若 $|f| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} |f_n|$ 是 μ 几乎处处成立的, 则 $d_f \le \varliminf\limits_{n\to\infty} d_{f_n}$;

(vii) 若 $|f_n| \uparrow |f|$, 则 $d_{f_n} \uparrow d_f$.

证明 (i) 当 $|g(x)| \le |f(x)|$ 是 μ–a.e. 的, 则对任意 $\lambda > 0$ 均有 $|g(x)| > \lambda \Rightarrow |f(x)| > \lambda$, 于是

$$\{x \in X : |g(x)| > \lambda\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \lambda\} \Rightarrow d_g(\lambda) \le d_f(\lambda).$$

(ii) 知

$$d_{cf}(\alpha) = \mu(\{x \in X : |cf(x)| > \alpha\}) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\}) = d_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right).$$

(iii) 注意到 $|f(x)+g(x)| > \alpha+\beta$ 必能导出 $|f(x)| > \alpha$ 或 $|g(x)| > \beta$, 否则若 $|f(x)| \le \alpha$ 且 $|g(x)| \le \beta$, 将有

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \alpha+\beta$$

矛盾! 故

$$\{x \in X : |f(x)+g(x)| > \alpha+\beta\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in X : |g(x)| > \beta\} \Rightarrow d_{f+g}(\alpha+\beta) \le d_f(\alpha) + d_g(\beta).$$

(iv) 注意到 $|f(x)g(x)| > \alpha\beta$ 必能导出 $|f(x)| > \alpha$ 或 $|g(x)| > \beta$, 否则若 $|f(x)| \le \alpha$ 且 $|g(x)| \le \beta$, 将有

$$|f(x)g(x)| \le \alpha\beta$$

矛盾! 故

$$\{x \in X : |f(x)g(x)| > \alpha\beta\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in X : |g(x)| > \beta\} \Rightarrow d_{fg}(\alpha\beta) \le d_f(\alpha) + d_g(\beta).$$

(v) 设 $t_n \downarrow 0$, 根据 $d_f(t)$ 的单增性往证对任意 $\alpha_0 > 0$ 均有 $d_f(\alpha_0 + t_n) \uparrow d_f(\alpha_0)$. 根据定义知

$$\begin{aligned} d_f(\alpha_0) - d_f(\alpha_0+t_n) &= \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha_0\}) - \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha_0 + t_n\}) \\ &\le \mu(\{x \in X : \alpha_0 < |f(x)| \le \alpha_0 + t_n\}) \end{aligned}$$

因为 $\mu(\{x \in X : \alpha_0 < |f(x)| \le \alpha_0 + t_n\})$ 随 t_n 递降而递降, 故根据单调收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : \alpha_0 < |f(x)| \le \alpha_0 + t_n\}) = \mu(\{x \in X : \alpha_0 < |f(x)| \le \alpha_0\}) = 0$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} d_f(\alpha_0) - d_f(\alpha_0 + t_n) = 0$, 此即欲证.

(vi) 任取 $\lambda > 0$, 欲证即

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \le \varliminf_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x)| > \lambda\})$$

因为 $|f| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} |f_n|$ 是 μ 几乎处处成立的, 故这正是 Fatou 引理.

(vii) 当 $|f_n| \uparrow |f|$, 任取 $\lambda > 0$ 知

$$\begin{aligned} d_f(\lambda) &= \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \\ &\le \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > 0\}) + \mu(\{x \in X : |f_n(x)| > \lambda\}) \end{aligned}$$

于是

$$d_f(\lambda) - d_{f_n}(\lambda) \le \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > 0\})$$

根据 $|f_n| \uparrow |f|$ 知 $\mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > 0\}) \to 0$, 命题即证. □

本章末会补充建立在分布函数与弱型不等式之上的 $L^{p,q}$ 空间理论, 它可以视作 L^p 空间的推广. 利用分布函

数可以导出下述重要命题，它是 $L^{p,q}$ 空间与 L^p 空间之间的一条重要纽带.

命题 3.3 (期望公式)

[a]设 (X,μ) 是 σ 有限测度空间, $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 可微, 递增, 且 $\phi(0)=0$, 则

$$\int_X \phi(|f(x)|)d\mu=\int_0^\infty \phi'(\lambda)d_f(\lambda)d\lambda.$$

[a]" 期望公式" 其名是自行加上的, 这个名称的由来源于概率论中该公式可导出一个重要的计算期望的式子.

证明 知

$$\begin{aligned}\int_X \phi(|f(x)|)d\mu&=\int_X\int_0^{|f(x)|}\phi'(\lambda)d\lambda d\mu\overset{(A)}{=}\int_0^\infty\int_{|f(x)|>\lambda}\phi'(\lambda)d\mu d\lambda\\&=\int_0^\infty\phi'(\lambda)\mu(\{x\in X:|f(x)|>\lambda\})d\lambda=\int_0^\infty\phi'(\lambda)d_f(\lambda)d\lambda\end{aligned}$$

其中 (A) 是 Fubini 定理, 它需要 (X,μ) 的 σ 有限性才能成立. □

特别令 $\phi(\lambda)=\lambda^p$ 可得 L^p 范数的等价计算式:

$$\|f\|_{L^p}^p=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}d_f(\lambda)d\lambda. \tag{3.5}$$

因为弱型不等式研究的是分布函数的大小, 所以可以看到等价计算式(3.5)在下面的插值定理中有很好的应用: 它能从弱型不等式中导出 L^p 意义下的有界性. 下面的 Marcinkiewicz 插值定理本身是应用在比线性算子更广的一类算子上的 (注意极大算子本身不是线性算子), 即次线性算子:

定义 3.7 (次线性算子)

称从可测函数空间到可测函数空间的算子 T 是次线性算子, 如果对任意可测函数 f_0,f_1 均有:

$$\begin{cases}|T(f_0+f_1)(x)|\le|Tf_0(x)|+|Tf_1(x)|\\|T(\lambda f)|=|\lambda||Tf|,\quad\lambda\in\mathbb{C}.\end{cases}$$

定理 3.4 (Marcinkiewicz 插值定理)

设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是测度空间, $1\le p_0<p_1\le\infty$, 并设 T 是从 $L^{p_0}(X,\mu)+L^{p_1}(X,\mu)$ 到 Y 上可测函数空间的次线性算子, 且 T 同时是弱 (p_0,p_0) 型算子与弱 (p_1,p_1) 型算子. 那么只要 $p_0<p<p_1$, T 就是强 (p,p) 型算子.

证明 给定 $f\in L^p(X,\mu)$, 任取 $\lambda>0$, 把 f 分解成 f_0+f_1:

$$f_0=f\chi_{\{x\in X:|f(x)|>c\lambda\}},$$
$$f_1=f\chi_{\{x\in X:|f(x)|\le c\lambda\}}$$

其中常数 c 是一个待定系数. 根据插值定理1.14知 $f_0\in L^{p_0}(X,\mu)$, $f_1\in L^{p_1}(X,\mu)$, 进一步根据 T 的次线性性有

$$|Tf(x)|\le|Tf_0(x)|+|Tf_1(x)|$$

于是由分布函数的性质3.2(iii) 知

$$d_{T_f}(\lambda)\le d_{Tf_0}(\frac{\lambda}{2})+d_{Tf_1}(\frac{\lambda}{2})$$

下面开始分类讨论.

- $p_1=\infty$. 取 $c=\frac{1}{2A_1}$, 其中 A_1 满足 $\|Tg\|_{L^\infty(Y,\nu)}\le A_1\|g\|_{L^\infty(X,\mu)}$, 于是

$$\|Tf_1\|_{L^\infty(Y,\nu)}\le A_1\|f_1\|_{L^\infty(X,\mu)}\le A_1c\lambda=\frac{\lambda}{2}$$

进而 $d_{Tf_1}(\frac{\lambda}{2})=0$. 根据 T 的弱 (p_0,p_0) 型不等式有:

$$d_{Tf_0}(\frac{\lambda}{2})\le\left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{L^{p_0}(X,\mu)}\right)^{p_0};$$

于是

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p(X,\mu)}^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}d_{Tf}(\lambda)d\lambda \le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(d_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right)+d_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)d\lambda \\
&= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}d_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda \le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{L^{p_0}(X,\mu)}\right)^{p_0}d\lambda \\
&= p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_X |f_0(x)|^{p_0}d\mu d\lambda \\
&= p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}\int_{\{x\in X:|f(x)|>c\lambda\}}|f(x)|^{p_0}d\mu d\lambda \\
&= p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}}\lambda^{p-1-p_0}d\lambda d\mu \\
&= \frac{p(2A_0)^{p_0}}{p-p_0}(2A_1)^{p-p_0}\int_X |f(x)|^p d\mu = \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_{L^p(X,\mu)}^p
\end{aligned}$$

- $p_1 < \infty$, 根据弱 (p_0,p_0) 型不等式与弱 (p_1,p_1) 型不等式有:

$$d_{Tf_0}(\frac{\lambda}{2}) \le \left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{L^{p_0}(X,\mu)}\right)^{p_0}$$
$$d_{Tf_1}(\frac{\lambda}{2}) \le \left(\frac{2A_1}{\lambda}\|f_1\|_{L^{p_1}(X,\mu)}\right)^{p_1}$$

于是

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p(X,\mu)}^p =& p\int_0^\infty \lambda^{p-1}d_{Tf}(\lambda)d\lambda \le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(d_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right)+d_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)d\lambda \\
\le& p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{L^{p_0}(X,\mu)}\right)^{p_0}d\lambda + p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_1}{\lambda}\|f_1\|_{L^{p_1}(X,\mu)}\right)^{p_1}d\lambda \\
\le& p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}}\lambda^{p-1-p_0}d\mu d\lambda + p(2A_1)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\int_{\frac{|f(x)|}{c}}^\infty \lambda^{p-1-p_1}d\mu d\lambda \qquad (3.6)\\
\le& p\left(\frac{(2A_0)^{p_0}}{(p-p_0)c^{p-p_0}}+\frac{(2A_1)^{p_1}}{(p_1-p)c^{p-p_1}}\right)\int_X |f(x)|^p d\lambda \\
=& \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0}\frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}}+\frac{p2^{p_1}}{p_1-p}\frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}}\right)\|f\|_{L^p(X,\mu)}^p.
\end{aligned}$$

综上即得命题. □

根据(3.6)式, Marcinkiewicz 插值定理3.4中提到的强 (p,p) 型不等式可以进一步写成:

$$\|Tf\|_{L^p(X,\mu)} \le 2p^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p-p_0}+\frac{1}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}}A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}\|f\|_{L^p(X,\mu)} \qquad (3.7)$$

其中

$$\frac{1}{p}=\frac{\theta}{p_1}+\frac{1-\theta}{p_0}, \quad 0<\theta<1.$$

当 $p_1=\infty$ 时这就是上面证明中取用 $c=\frac{1}{2A_1}$ 得到的结果, 而当 $p_1<\infty$ 时取 c 使得 $(2A_0c)^{p_0}=(2A_1c)^{p_1}$ 即可得到该结果.

注 至此调和分析中的两大重要插值定理: Riesz-Thorin 插值定理2.24与 Marcinkiewicz 插值定理3.4就都介绍完毕了. 回忆 Riesz-Thorin 插值定理是强 (p,p) 型算子的插值, Marcinkiewicz 插值定理是将弱 (p,p) 型提升为强 (p,p) 型的插值. 结合这两个插值定理还能说明: 若 Marcinkiewicz 插值定理3.4的条件中有一个端点对应的是强型不等式, 那么当指标趋向该端点时, 插值所得的算子范数并不会爆破.

推论 3.1

设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是 σ 有限测度空间, $1<p<r\le\infty$, T 是从空间 $L^{p_0}(X)+L^{p_1}(X)(0<p_0<p_1\le\infty)$ 到 Y 上可测函数空间的线性算子. 设 T 在作为 $L^1(X)\to L^{1,\infty}(Y)$ 的算子时算子函数为 A_0, 作为 $L^r(X)\to L^r(Y)$ 的

算子时算子范数为 A_1, 则 T 也可作为 $L^p(X) \to L^p(Y)$ 的算子, 且

$$\|T\|_{L^p(X)\to L^p(Y)} \le 8(p-1)^{-\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}} A_1^{\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{r}}}.$$

证明 因为 T 已经可以作为 $L^1(X) \to L^{1,\infty}(Y)$ 和 $L^r(X) \to L^r(Y)$ 的算子了, 故可将其视为从 $L^1(X)+L^r(X)$ 到 Y 上可测函数空间的线性算子. 因为强 (p,p) 型算子一定是弱 (p,p) 型算子, 故 T 同时是弱 $(1,1)$ 型算子与弱 (r,r) 型算子, 由 Marcinkiewicz 插值定理与 $1 < \frac{1+p}{2} < p < r$ 知

$$\begin{aligned}
\|T\|_{L^{\frac{1+p}{2}}(X)\to L^{\frac{1+p}{2}}(Y)} &\le 2\left(\frac{1+p}{2}\right)^{\frac{2}{1+p}}\left(\frac{2}{p-1}+\frac{2}{r-(p+1)}\right)^{\frac{2}{1+p}} A_0^{\frac{\frac{2}{1+p}-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}} A_1^{\frac{1-\frac{2}{1+p}}{1-\frac{1}{r}}} \\
&= 2\left(\frac{p+1}{p-1}+\frac{p+1}{r-(p+1)}\right)^{\frac{2}{1+p}} A_0^{\frac{\frac{2}{1+p}-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}} A_1^{\frac{1-\frac{2}{1+p}}{1-\frac{1}{r}}}.
\end{aligned}$$

再由 Riesz-Thorin 插值定理与 $\frac{1+p}{2} < p < r$ 知

$$\begin{aligned}
\|T\|_{L^p(X)\to L^p(Y)} &\le \left(2\left(\frac{p+1}{p-1}+\frac{p+1}{r-(p+1)}\right)^{\frac{2}{1+p}} A_0^{\frac{\frac{2}{1+p}-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}} A_1^{\frac{1-\frac{2}{1+p}}{1-\frac{1}{r}}}\right)^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{r}}} A_1^{\frac{\frac{2}{1+p}-\frac{1}{p}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{r}}} \\
&= \left(2\left(\frac{\frac{p+1}{2}}{\frac{p+1}{2}-1}+\frac{\frac{p+1}{2}}{r-\frac{p+1}{2}}\right)^{\frac{2}{p+1}}\right)^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{r}}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}} A_1^{\frac{(1-\frac{2}{p+1})(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}{(1-\frac{1}{r})(\frac{2}{p+1}-\frac{1}{r})}+\frac{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{r}}}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

因为

$$\frac{(1-\frac{2}{p+1})(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}{(1-\frac{1}{r})(\frac{2}{p+1}-\frac{1}{r})}+\frac{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{r}} = \frac{-\frac{1}{r}-\frac{2}{p+1}\frac{1}{p}+\frac{2}{p+1}+\frac{1}{r}\frac{1}{p}}{(1-\frac{1}{r})(\frac{2}{p+1}-\frac{1}{r})} = \frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{r}} \tag{3.9}$$

同时

$$\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{r}} \le \frac{\frac{1}{p}}{\frac{2}{p+1}} = \frac{p+1}{2p} \tag{3.10}$$

又因为 $\frac{p+1}{2} < \frac{r+1}{2}$, 故 $r-\frac{p+1}{2} > \frac{p+1}{2}-1$, 因而

$$\frac{\frac{p+1}{2}}{r-\frac{p+1}{2}} < \frac{\frac{p+1}{2}}{\frac{p+1}{2}-1} \tag{3.11}$$

将(3.9)-(3.11)式代入(3.8)式可得

$$\|T\|_{L^p(X)\to L^p(Y)} \le 2^{1+\frac{1}{p}}\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}} A_1^{\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{r}}}$$

最后由 $(p+1)^{\frac{1}{p}} < 2 (p>1)$ 即得

$$\|T\|_{L^p(X)\to L^p(Y)} \le 8(p-1)^{-\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}} A_1^{\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{r}}}$$

□

3.4 Hardy-Littlewood 极大函数

回忆先前的主题, 我们的任务是讨论算子 $T: f \mapsto \sup_{t>0}|\phi_t * f|$ 什么时候成为弱 (p,q) 型算子. 设 $B_r = B(0,r)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中球心在原点, 半径为 r 的球, 若取 $\phi(x) = \frac{1}{|B_1|}\chi_{B_1}(x)$, 并依照定义3.1诱导恒等逼近族 $\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t}) =$

$\frac{1}{|B_t|}\chi_{B_t}(x)$, 则对于非负函数 f 而言知算子 T 此时为:

$$Tf(x)=\sup_{t>0}|\frac{1}{|B_t|}\chi_{B_t}*f|(x)=\sup_{t>0}\frac{1}{|B_t|}\int_{B_t}|f(x-y)|dy$$

这便引入了下述 Hardy-Littlewood 极大函数的定义:

定义 3.8 (Hardy-Littlewood 极大函数)

设 $B_r=B(0,r)$ 表示欧氏空间中球心在原点, 半径为 r 的球. $\mathbb{R}^n$ 上局部可积函数 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数定义为:

$$M(f)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(x-y)|dy \tag{3.12}$$

♣

注意上述定义中 $M(f)(x)$ 取值可以为 $+\infty$. 有时也会用方体而非球去定义极大函数: 设 Q_r 是方体 $[-r,r]^n$, 定义

$$M'(f)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{(2r)^n}\int_{Q_r}|f(x-y)|dy. \tag{3.13}$$

当 $n=1$, 知 M 与 M' 完全相等. 若 $n>1$, 则存在仅依赖于 n 的常数 c_n 与 C_n 满足

$$c_nM'(f)(x)\leq M(f)(x)\leq C_nM'(f)(x). \tag{3.14}$$

这是因为对球 B_r, 总存在方体 $[-r,r]^n$ 与方体 $[-c_nr,c_nr]^n$ 使得

$$[-c_nr,c_nr]^n\subset B_r\subset[-r,r]^n$$

于是

$$\frac{1}{(2r)^n}\int_{[-c_nr,c_nr]^n}|f(x-y)|dy\leq M(f)(x)\leq\frac{1}{(2c_nr)^n}\int_{[-r,r]^n}|f(x-y)|dy$$

此即(3.14)式. 根据该式, 算子 M,M' 本质上是一样的, 从而在实际应用中一般是哪个方便就用哪个. 也可以定义一个一般的极大函数

$$M''(f)(x)=\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(y)|dy \tag{3.15}$$

其中上确界在全体包含 x 的方体中取. 同样可以证明 M'' 与 M 在本质上是一样的. 有时为了区分 M' 和 M'', 把前者叫做有心极大算子, 而把后者叫做无心极大算子. 无心极大算子也可以通过球来定义, 这里就省略了.

定理 3.5 (极大算子的弱 $(1,1)$ 型不等式与强 $(p,p)(1<p\leq\infty)$ 型不等式)

算子 M 是弱 $(1,1)$ 型算子与强 $(p,p)(1<p\leq\infty)$ 型算子.

♡

根据不等式(3.14)可知这个结论对 M' 和 M'' 也是成立的.

根据极大算子的定义知

$$\|M(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leq\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \tag{3.16}$$

这说明 M 是弱 (∞,∞) 型算子, 于是根据 Marcinkiewicz 插值定理, 要证明定理3.5, 只需证明 M 是弱 $(1,1)$ 型算子. 这里我们先证明 $n=1$ 的情况, 一般情况之后再去证明. 一维情况的证明需要下述覆盖引理:

引理 3.1

设 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的区间族, K 是 $\bigcup_{\alpha\in A}I_\alpha$ 中的紧集, 则存在有限子族 $\{I_j\}$ 使得

$$K\subset\bigcup_j I_j,\quad 且\sum_j\chi_{I_j}(x)\leq 2(x\in\mathbb{R}).$$

♡

证明 因为紧集意味着其任意开覆盖都有有限子覆盖, 于是由 $K\subset\bigcup_{\alpha\in A}I_\alpha$ 与 K 的紧性知存在有限子族 $\{I_j\}_{j=1}^N$ 使得 $K\subset\bigcup_{j=1}^N I_j$. 考虑到此时维数为 1, 故若存在 $j_1\neq j_2\neq j_3$ 满足存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $\chi_{I_{j_1}}(x)+\chi_{I_{j_2}}(x)+\chi_{I_{j_2}}(x)=3$, 则 I_{j_1},I_{j_2},I_{j_3} 中必有其一在两者之并中, 不妨设 $I_{j_3}\subset I_{j_1}\cup I_{j_2}$. 现在在 $\{I_j\}_{j=1}^N$ 中剔除所有满足上述性质的 I_{j_3}, 得

到的新子族即为欲求. □

下面证明定理3.5.

证明 当 $n=1$, 任取 $\lambda>0$, 设 $E_\lambda=\{x\in\mathbb{R}:M(f)(x)>\lambda\}$. 若 $|E_\lambda|=\infty$, 则必有 $|E_\alpha|=\infty(\forall\alpha\in(0,\lambda])$, 于是

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}=\int_0^\infty d_f(\alpha)d\alpha\geq\int_0^\lambda d_f(\alpha)d\alpha=\infty$$

于是 $f\notin L^1(\mathbb{R})$, 这与弱 $(1,1)$ 型算子的定义域本身是不符合的, 于是只能有 $\forall\lambda>0(|E_\lambda|<\infty)$. 此时若 $x\in E_\lambda$, 根据极大算子的定义知存在以 x 为中心的区间 I_x 使得

$$\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x}|f(y)|dy>\lambda. \tag{3.17}$$

现设 $K\subset E_\lambda$ 是紧集, 则必有 $K\subset\bigcup_{x\in E_\lambda}I_x$, 根据引理3.1知存在子族 $\{I_j\}$ 使得 $K\subset\bigcup_j I_j$, 且 $\sum_j\chi_{I_j}\leq 2$, 因此

$$|K|\leq\sum_j|I_j|\leq\sum_j\frac{1}{\lambda}\int_{I_j}|f(y)|dy\overset{(A)}{\leq}\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}\sum_j\chi_{I_j}(y)|f(y)|dy\leq\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

其中 (A) 是代入了(3.17)式. 注意上述不等式对全体紧集 $K\subset E_\lambda$ 均成立, 而既然 $|E_\lambda|<\infty$, 知对任意 $\varepsilon>0$ 存在紧集 $K_\varepsilon\subset E_\lambda$ 使得 $|E_\lambda|<|K_\varepsilon|+\varepsilon$, 于是

$$|E_\lambda|\leq|K|+\varepsilon\leq\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},\quad\forall\varepsilon>0$$

亦即 $|E_\lambda|=\mu(\{x\in\mathbb{R}:M(f)(x)>\lambda\})\leq\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$, 故 M 的弱 $(1,1)$ 型不等式成立. 进一步因为已知 M 是弱 (∞,∞) 型算子, 故根据 Marcinkiewicz 插值定理3.4知 M 是强 $(p,p)(1<p<\infty)$ 型算子. □

注

(i) 引理3.1在维数大于 1 时其实是不成立的. 实际上对任意固定的 $p\in(1,\infty)$, 极大算子 M 的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 在 $n\to\infty$ 均趋无穷[1].

(ii) 极大函数 $M(f)$ 关于 f 存在下界估计: 若 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则取 f 在球 $B(x,|x|+R)\supset B(0,R)$ 上的积分平均知

$$M(f)(x)\geq\frac{1}{|B(x,|x|+R)|}\int_{B(x,|x|+R)}|f(x-y)|dy\geq\frac{\int_{B(0,R)}|f(y)|dy}{\nu_n(|x|+R)^n},\quad\forall x\in\mathbb{R}^n \tag{3.18}$$

其中 ν_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体积. 根据(3.18)式可知: 只要在一个正测集上有 $f\neq 0$, 则 $M(f)\notin L^1(\mathbb{R}^n)$. 也就是说, 如果 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $M(f)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $f=0$ a.e. 这是因为对(3.18)式两边关于 x 在 $\mathbb{R}^n$ 上积分可得

$$\|M(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\geq\int_{B(0,R)}|f(y)|dy\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{\nu_n(|x|+R)^n}<\infty$$

但 $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{\nu_n(|x|+R)^n}=\infty$, 这便只能有 $\int_{B(0,R)}|f(y)|dy=0$. 注意上式对任意 $R>0$ 均成立, 故 $f=0$ a.e.

另外, 若存在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 使得 $M(f)(x_0)=0$, 则 $f=0$ a.e. 这是因为在(3.18)式中取 $x=x_0$ 知 $\int_{B(0,R)}|f(y)|dy=0$, 而该式对任意 $R>0$ 均成立, 故 $f=0$ a.e.

为了进一步讨论恒等逼近算子族的点态收敛性质, 需要给出下述命题:

命题 3.4 (正递减可积径向函数生成的恒等逼近族性质)

设 ϕ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的正递减可积径向函数, 则对任意 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$\sup_{t>0}|(\phi_t*f)(x)|\leq\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}M(f)(x).$$

证明 若另设 ϕ 是简单函数, 亦即设

$$\phi(x)=\sum_j a_j\chi_{B_{r_j}}(x)$$

[1] 有时间则补充 [**LG1**]Ex 2.1.8.

其中 $a_j > 0$, 则

$$\begin{aligned}(\phi * f)(x) &= \sum_j a_j |B_{r_j}| \frac{1}{|B_{r_j}|}(\chi_{B_{r_j}} * f)(x) \\ &= \sum_j a_j |B_{r_j}| \cdot \frac{1}{|B_{r_j}|}\int_{B_{r_j}} f(x-y)dy \\ &\overset{(A)}{\leq} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot M(f)(x)\end{aligned}$$

其中 $\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sum\limits_j a_j |B_{r_j}|$, (A) 是指标为 $(1,\infty)$ 的离散 Hölder 不等式.

现在对任意函数 ϕ, 根据命题条件知它总能被一列渐升简单函数列逼近, 而其经尺度变换后的函数 ϕ_t 同样是正递减可积径向函数, 且 $\|\phi_t\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})}$, 于是总有

$$|(\phi_t * f)(x)| = (\phi_t * f)(x) \leq \|\phi_t\|_{L^1(\mathbb{R})} M(f)(x) = \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} M(f)(x)$$

对左式关于 t 取上确界即得

$$\sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)| \leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} M(f)(x).$$

□

结合极大算子有界性3.5与正递减可积径向函数的性质3.4的结果可得下述推论:

推论 3.2

若 $|\phi(x)| \leq \psi(x)$ a.e., 其中 ψ 是正递减可积径向函数, 设 $\{\phi_t\}_{t>0}$ 是 ϕ 诱导的恒等逼近族, 则

$$\sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)| \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} M(f)(x)$$

另外极大函数 $\sup\limits_{t>0} |(\phi_t * f)(x)|$ 是弱 $(1,1)$ 型与强 $(p,p)(1 < p \leq \infty)$ 型算子[a].

[a] 亦即算子 $\sup\limits_{t>0} |(\phi_t * \circledast)|$ 是弱 $(1,1)$ 型和强 (p,p) 型算子.

证明 显见

$$|(\phi_t * f)(x)| \leq \|\phi_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

故

$$\|\sup_{t>0} |\phi_t * f|\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

此即极大函数的弱 (∞,∞) 型不等式, 下面证明极大函数的弱 $(1,1)$ 型不等式. 根据正递减可积径向函数的性质3.4可知

$$\sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)| \leq \sup_{t>0}\{(\psi_t * |f|)(x)\} \leq \|\psi_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} M(f)(x)$$

又根据极大算子的有界性3.5知 $M(f)$ 是弱 $(1,1)$ 型算子, 故 $f \mapsto \sup\limits_{t>0} |\phi_t * f|$ 是弱 $(1,1)$ 型算子. 最后根据 Marcinkiewicz 插值定理3.4知 $f \mapsto \sup\limits_{t>0} |\phi_t * f|$ 是强 $(p,p)(1 < p < \infty)$ 型算子, 命题即证. □

将上述推论与算子族的点态收敛定理3.2结合即得下述推论:

推论 3.3 (恒等逼近族微分定理)

在推论3.2的条件下, 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ 或 $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{t\to 0}(\phi_t * f)(x) = f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx, \quad \text{a.e.}$$

特别地, 第一章提过的求和法 (Cesaro, Abel-Poisson 和 Gauss-Weierstrass 求和法) 中, 只要 f 在上面给出的空间之一内, 那么这些求和法全都几乎处处收敛到 $f(x)$.

证明 已经证明了 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 时这些求和法是几乎处处收敛的, 而 Poisson 核(2.108)与 Gauss-Weierstrass 核(2.109)本

身是正递减可积径向函数生成的恒等逼近族，同时 Fejér 核(2.99)由正递减可积径向函数 $\min(1, \frac{1}{(\pi x)^2})$ 控制，于是根据推论3.2知它们对应的极大函数均为弱 $(p,p)(1 \le p \le \infty)$ 型算子，再根据点态收敛定理3.2与 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p < \infty)$ 或 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性知，几乎处处收敛性对 $f \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p < \infty)$ 或 $f \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = C_0(\mathbb{R}^n)$ 也成立. □

另根据恒等逼近定理的推广3.1，完全仿照恒等逼近族微分定理3.3可得下述推论:

推论 3.4 (恒等逼近族微分定理的推广)

若 $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t})$ 满足

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = a \in \mathbb{C}$;

(ii) 对任意 $\delta > 0$ 均有 $\lim\limits_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \phi_t(x)dx \to 0$;

(iii) $|\phi(x)| \le \psi(x)$ a.e., 其中 ψ 是正递减可积径向函数,

则对任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p < \infty)$ 均有

$$\lim_{t\to 0}(f * \phi_t)(x) = af(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n$$

♡

3.5 二进极大函数

定义 3.9 (二进方体)

在 $\mathbb{R}^n$ 中取单位半开方体 $[0,1)^n$, 并设 Q_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中与 $[0,1)^n$ 全等的方体族，且其中每个方体的顶点都在格点集 $\mathbb{Z}^n$ 上. 把这个集族作因子为 2^{-k} 的尺度变换，亦即取全体右侧开且顶点与格点集 $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$ 重合的方体，得到的方体族记作 $Q_k(k \in \mathbb{Z})$. 若方体在 $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} Q_k$ 中，则称其为二进方体. ♣

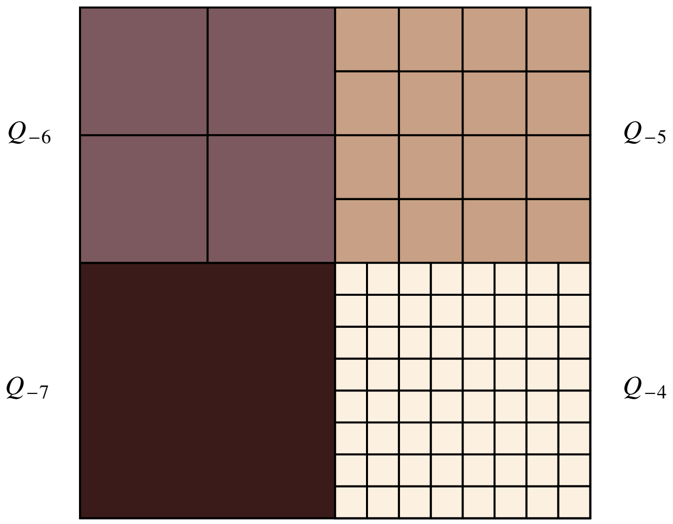

图 3.1: 二进方体示意图

根据这个构造可以立即得到下述性质:

命题 3.5 (二进方体的性质)

(i) 给定 $x \in \mathbb{R}^n$, 在每个族 Q_k 中总有唯一的方体包含 x;

(ii) 对任意两个二进方体，要么它们不交，要么一个完全被另一个包含;

(iii) 对于 Q_k 中的二进方体，在每个族 $Q_j(j < k)$ 中都能找到唯一的方体包含它，同时它包含 Q_{k+1} 中的 2^n 个二进方体.

♠

定义 3.10 (二进恒等逼近族, 二进极大函数)

给定函数 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in Q_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy \right) \chi_Q(x)$$

称 $E_k f$ 为 f 对应的二进恒等逼近族. 另定义

$$M_d f(x) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |E_k f(x)| \tag{3.19}$$

称 $M_d f$ 为 f 对应的二进极大函数.

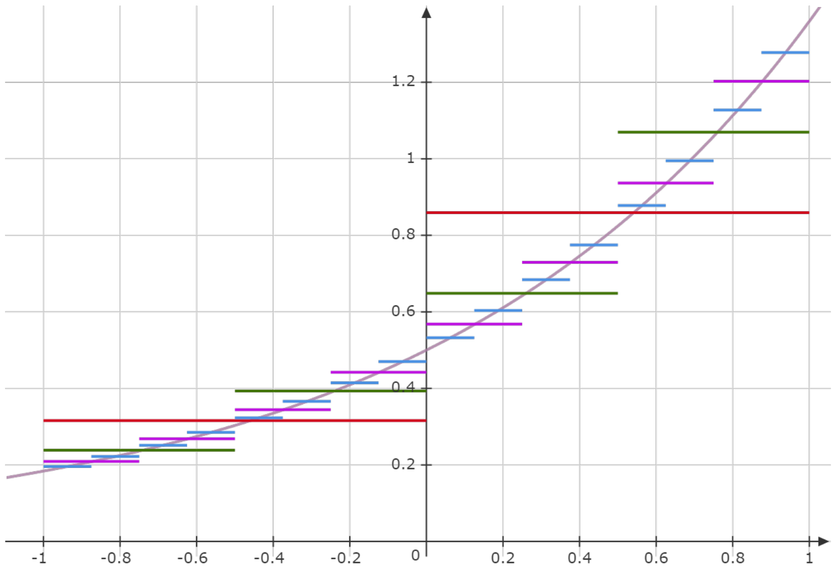

图 3.2: $E_k f(x)$ 示意图

$E_k f$ 是 f 关于 Q_k 生成的 σ 代数的条件期望[2], 它满足下述基本性质:

命题 3.6

若 Ω 是 Q_k 中一些方体的并, 那么

$$\int_\Omega E_k f(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

证明 知

$$\begin{aligned}
\int_\Omega E_k f(x)dx &= \int_\Omega \sum_{Q \in Q_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx \right) \chi_Q(x)dx \\
&= \sum_{Q \in Q_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx \right) \int_\Omega \chi_Q(x)dx \\
&= \sum_{\substack{Q \in Q_k \\ Q \cap \Omega \neq \emptyset}} \int_Q f(x)dx = \int_\Omega f(x)dx
\end{aligned}$$

□

下面的定理说明了二进恒等逼近族有类似于恒等逼近族的性质:

[2]这句话是什么意思?

定理 3.6 (二进极大函数的弱 $(1,1)$ 型不等式与二进恒等逼近族的逼近性质)

(i) 二进极大函数 $M_d f$ 是弱 $(1,1)$ 型函数;

(ii) 若 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} E_k f(x)=f(x)$ a.e.

证明 (i) 固定 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 往证存在 $C>0$ 使得

$$|\{x\in\mathbb{R}^n: M_d f(x)>\lambda\}|\leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{3.20}$$

不妨设 f 非负, 这是因为若 f 是实值函数, 则它可以被分成正负部来分别讨论, 而若 f 是复值函数, 则分别讨论它的实部和虚部.

现设

$$\{x\in\mathbb{R}^n: M_d f(x)>\lambda\}=\bigcup_k \Omega_k$$

其中

$$\Omega_k=\{x\in\mathbb{R}^n: E_k f(x)>\lambda\text{且}\forall j<k(E_j(x)\leq\lambda)\}$$

这是因为对任意 k, 只要存在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 使得 $E_k(x_0)>\lambda$, 且 $\forall j<k(E_j(x_0)\leq\lambda)$, 那么必有 $M_d f(x_0)=\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}|E_k f(x_0)|>\lambda$, 故 $\forall k\in\mathbb{Z}(\Omega_k\subset\{x\in\mathbb{R}^n: M_d f(x)>\lambda\})$. 另一方面, 只要 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 满足 $M_d f(x_0)=\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}|E_k f(x_0)|>\lambda$, 根据上确界的定义与不等号的严格性就必能找到 $k_0\in\mathbb{Z}$ 使得 $|E_{k_0}f(x_0)|=E_{k_0}f(x_0)>\lambda$. 对这个固定的点 x_0, 当 $k\to-\infty$, 知

$$|E_k f(x)|\leq\sum_{Q\in\mathcal{Q}_k}\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{|Q|}\chi_Q(x_0)\sim\frac{1}{|Q_k|}\to 0,\quad x_0\in Q_k$$

于是集合 $\{k\in\mathbb{Z}: E_k f(x_0)>\lambda\}$ 必有下确界, 设其下确界为 k_{x_0}, 即得 $x_0\in\Omega_{k_{x_0}}\subset\bigcup_k\Omega_k$, (3.20)式成立.

显见 Ω_k 彼此不交 (否则与 Ω_k 的定义矛盾), 且每个 Ω_k 都能被写成 $\mathcal{Q}_k$ 中二进方体的并, 这是因为对每个 k 而言, $E_k f(x)$ 本质上是基于 $\mathcal{Q}_k$ 的简单函数. 因而 Ω_k 作为指示 $E_k f(x)$ 大小的集合依旧由 $\mathcal{Q}_k$ 中的某些二进方体构成. 于是

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}^n: M_d f(x)>\lambda\}|&=\sum_k|\Omega_k|\leq\sum_k\int_{\Omega_k}\frac{E_k f(x)}{\lambda}dx\\&\overset{(A)}{=}\frac{1}{\lambda}\sum_k\int_{\Omega_k}f(x)dx\leq\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

其中 (A) 应用了命题3.6, 故 $M_d f(x)$ 是弱 $(1,1)$ 型函数.

(ii) 若 f 连续, 则要求的极限显然成立, 又因为 $M_d f(x)$ 本身是弱 $(1,1)$ 型函数, 故根据算子族的点态收敛定理3.2知

$$\{f\in L^1(\mathbb{R}^n): \lim_{k\to\infty}E_k f(x)=f(x)\text{ a.e.}\}$$

在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中闭, 而 $\overline{C(\mathbb{R}^n)}=L^1(\mathbb{R}^n)$, 故要求的极限对 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 也成立. 现若 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 $Q\in\mathcal{Q}_0$ 都有 $f\chi_Q\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 于是 (ii) 对几乎所有 $x\in Q$ 均成立, 因而对几乎所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 均成立. □

上述证明用到的对 $\mathbb{R}^n$ 的分解是尤其有用的, 它称为 Calderón-Zygmund 分解, 下面我们进一步来介绍这个分解.

定理 3.7 (Calderón-Zygmund)

给定非负可积函数 f 与正数 λ, 必存在不交二进方体列 $\{Q_j\}$ 使得:

(i) 对几乎所有 $x\notin\bigcup_j Q_j$ 有 $f(x)\leq\lambda$;

(ii) $|\bigcup_j Q_j|\leq\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;

(iii) $\forall j(\lambda<\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f(x)dx\leq 2^n\lambda)$.

证明 类似于二进极大函数的弱 (1, 1) 型不等式3.6的证明, 构造

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : E_k f(x) > \lambda \text{且} \forall j < k (E_j(x) \le \lambda)\}$$

知 Ω_k 是 Q_k 中一些二进方体的不交并, 再把 $\bigcup_k \Omega_k$ 中包含的二进方体的全体记作集族 $\{Q_j\}$, 通过合理的选取方式可令 $\{Q_j\}$ 是不交二进方体列.

现在结论 (ii) 正是(3.20)式. 对结论 (i), 若 $x \notin \bigcup_j Q_j = \bigcup_k \Omega_k$, 则根据 Ω_k 的构造知 $\forall k \in \mathbb{Z}(E_k f(x) \le \lambda)$, 于是由二进恒等逼近族的逼近性质3.6(ii) 知 $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} E_k f(x) \le \lambda$ a.e. 最后对结论 (iii), 根据 Ω_k 的定义知 f 在 $Q_j \subset \Omega_k$ 上的积分平均 $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)dx$ 总比 λ 大, 此即欲证式左端. 对右端, 设 $\widetilde{Q}_j$ 是包含 Q_j, 且边长是 Q_j 边长两倍的二进方体, 则

$$\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j} f(x)dx = E_{k-1}(x) \le \lambda, \quad x \in \widetilde{Q}$$

进而

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)dx \le \frac{|\widetilde{Q}_j|}{|Q_j|}\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j} f(x)dx \le 2^n\lambda$$

□

注 [**LG1**] 中也介绍了 Calderón-Zygmund 分解, 不过定理形式略有不同, 它们的本质是一样的:

补充定理 3.2 (Calderón-Zygmund)

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \lambda > 0$, 则存在函数 $g, b \in \mathbb{R}^n$ 与不交二进方体列 $\{Q_j\}$ 使得:

(i) $f(x) = g(x) + b(x)$;

(ii) $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, 且 $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le 2^n\lambda$;

(iii) $b(x) = \sum_j b_j(x)$, 其中 $\operatorname{supp} b_j \subset Q_j$;

(iv) $\int_{Q_j} b_j(x)dx = 0$;

(v) $\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le 2^{n+1}\lambda|Q_j|$;

(vi) $\sum_j |Q_j| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

♡

定理中的 g 称为分解中的好函数, 因为它可积且有界; b 称为坏函数, 因为它包含了 f 的奇异部分, 但这也不是随意选取的, 因为 (iv) 已经说明 b 的积分均值为零. 根据 (i),(ii), 坏函数 b 也是可积的, 且

$$\|b\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

根据 (ii), 好函数 g 是有界可积的, 于是对任意 $1 \le p \le \infty$ 均有 $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 进一步根据 L^p 范数的对数凸性1.13知

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}}\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}}(2^n\lambda)^{1-\frac{1}{p}} = 2^{\frac{n}{p'}}\lambda^{\frac{1}{p'}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}}.$$

上述定理中, 只要令

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy\right)\chi_{Q_j}(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup\limits_j Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)dx, & x \in Q_j \end{cases}$$

即可套用定理3.7来证明.

3.6 极大函数的弱 (1, 1) 型不等式

下面运用二进极大函数的弱 (1, 1) 型不等式3.6来证明极大算子的弱 (1, 1) 型不等式与强 (p, p) 型不等式3.5. 首先需要证明一个引理, 回忆 M' 是由(3.13)定义的在方体上的极大函数.

引理 3.2

若 f 是非负函数, 则

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : M'(f)(x) > 4^n\lambda\}| \le 2^n|\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}|.$$

只要能证明这个引理, 那么根据前面提到的 M_d 的弱 (1, 1) 型不等式, 就有

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : M'(f)(x) > \lambda\}| \le 2^n|\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x) > 4^{-n}\lambda\}| \le 2^n\frac{1}{4^{-n}\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

于是 M' 是弱 (1, 1) 型算子, 进而根据 Marcinqiewicz 插值定理与极大函数的定义就能得到 M' 的强 (p, p) 型不等式. 下面来证明引理3.2.

证明 类似于 Calderón-Zygmund 分解3.7, 设

$$\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_j Q_j.$$

设 $2Q_j$ 是与 Q_j 同心, 边长为其两倍的方体. 于是要证明引理, 就是要证明

$$\{x\in\mathbb{R}^n : M'(f)(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j.$$

固定 $x \notin \bigcup_j 2Q_j$, 往证 $x \notin \{x\in\mathbb{R}^n : M'(f)(x) > 4^n\lambda\}$, 亦即 $M'(f)(x) \le 4^n\lambda$. 设 Q 是任意以 x 为心的方体, 记 $l(Q)$ 为 Q 的边长, 知总可以选到 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $2^{k-1} \le l(Q) < 2^k$. 设 Q 与 Q_k 中的 m 个二进方体交集非空, 并设 $m \le 2^n$, 记这 m 个二进方体分别为 $R_1, R_2, \cdots, R_m$. 注意这些 $R_i(i = 1, \cdots, m)$ 均不可能出现在集族 $\{Q_j\}$ 中, 否则若 $R_{j_0} \in \{Q_j\}$, 则根据 R_{j_0} 的构造方式知 $Q \subset 2R_{j_0}$, 进而必有 $x \in 2R_{j_0} \subset \bigcup_j 2Q_j$, 矛盾. 根据 Q_j 的定义与 $x \notin Q_j$ 可知此时 $M_d f(x) \le \lambda$, 进而 f 在每个 R_i 上的积分平均都至多为 λ, 故

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx = \frac{1}{|Q|}\sum_{i=1}^m\int_{Q\cap R_i} f(x)dx \overset{(A)}{\le} \sum_{i=1}^m \frac{2^{kn}}{|Q|}\frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} f(x)dx \le 2^n m\lambda \le 4^n\lambda$$

其中 (A) 是因为对每个 R_i 而言都有 $|R_i| < 2^{kn}$, 引理至此得证. □

至此即得极大函数的弱 (1, 1) 型不等式与强 (p, p) 型不等式:

定理 3.8 (极大函数的弱 (1, 1) 型不等式与强 (p, p) 型不等式)

若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $M(f)$ 为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数, 则算子 M 是弱 (1, 1) 型与强 $(p, p)(1 < p \le \infty)$ 型算子.

注 [LG1] 中给出了无心极大函数 M'' 的一个确切的算子范数上界:

$$\|M''\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{p3^{\frac{n}{p}}}{p-1} \tag{3.21}$$

这里就不另外说明这个上界是如何得到的了.

现在根据 M 的弱 (1, 1) 型不等式3.8与算子族点态收敛定理3.2可以得到二进恒等逼近族收敛性3.6(ii) 的连续形式:

推论 3.5 (Lebesgue 微分定理)

若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)dy = f(x) \text{ a.e.}$$

证明 不妨设 f 是非负函数, 若 f 连续, 则欲证式显然成立. 根据 Hardy-Littlewood 极大函数的定义知

$$M(f)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)dy$$

而 M 已经是弱 (1, 1) 型算子了, 故根据算子族的点态收敛定理3.2知

$$\left\{f\in L^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)dy = f(x)\ \text{ a.e.}\right\}$$

在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中闭, 而 $\overline{C(\mathbb{R}^n)} = L^1(\mathbb{R}^n)$, 故待证极限对 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 成立. 现若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 B_r 均有 $f\chi_{B_r} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 于是

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)dy = f(x)$$

对几乎所有 $x \in B_r$ 均成立, 因而对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立.

对一般的实值函数 f 而言, 根据算子族的点态收敛定理3.2知

$$\left\{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x-y)|dy = |f(x)| \text{ a.e.}\right\}$$

在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中闭. 注意若对选定的 x, 存在正测集 Q 使得 $x \in Q$ 且 $f(x) < 0$, 则根据 Lebesgue 测度的定义知必存在 B_r 使得 $x - B_r \subset Q$, 于是对该选定的 x 有

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x-y)|dy = |f(x)| \Rightarrow \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)dy = f(x)$$

因而亦有

$$\left\{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)dy = f(x) \text{ a.e.}\right\}$$

在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中闭, 其余过程与非负情况类似. □

特别由此可知 $|f(x)| \le M(f)(x)$ a.e., 根据 M 与 M', M'' 的等价性可知同样有 $|f(x)| \le M'(f)(x)$ a.e., $|f(x)| \le M''(f)(x)$ a.e. Lebesgue 微分定理可以进一步优化为下述推论:

推论 3.6

若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x-y) - f(x)|dy = 0 \text{ a.e.} \tag{3.22}$$

♡

证明 这是因为[3]

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x-y) - f(x)|dy \le M(f)(x) + |f(x)|.$$

上面的这些讨论可以引出 Lebesgue 点的定义:

定义 3.11 (Lebesgue 点)

若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得极限式(3.22)成立, 即

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x_0-y) - f(y)|dy = 0$$

则称 x_0 为 f 的 Lebesgue 点.

♣

Lebesgue 点具有下述平均性质:

命题 3.7 (Lebesgue 点的平均性质)

若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, x 是 f 的 Lebesgue 点, 球套 $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 满足 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ 且 $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j = \{x\}$(注意这列球不一定以 x 为球心), 则

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|B_j|}\int_{B_j} f(x)dx = f(x)$$

♠

证明 注意 $B_j \subset B(x, 2r_j)$, 其中 r_j 是 B_j 的半径, 代入 Lebesgue 点的定义即得命题. □

如果把球换成方体, Lebesgue 点的平均性质同样成立, 这里就不赘述了.

前面我们探讨的是极大函数 $M(f)$ 的弱 (1, 1) 型不等式, 事实上 $M(f)$ 的强 (1, 1) 型不等式并不成立, 这依赖于下述前面已经说明过的命题, 这里给出 **[JD]** 上的版本:

[3]之后是怎么推的? $M(f)(x) + |f(x)|$ 不能导出几乎处处为零吧?

命题 3.8

若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且不几乎处处为零, 那么 $M(f) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

证明 因为 f 不几乎处处为零, 故总存在 $R > 0$ 使得

$$\int_{B_R} |f(x)|dx \geq \varepsilon > 0$$

现若 $|x| > R, B_R \subset B(x, 2|x|)$, 则

$$M(f)(x) \geq \frac{1}{2|x|^n} \int_{B_R} |f(x)|dx \geq \frac{\varepsilon}{2^n|x|^n} \geq \frac{\varepsilon}{2^n|x|^n}$$

而 $\frac{1}{|x|^n} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, 命题即证. □

但对 M 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中的情况成立下述控制:

定理 3.9

若 $B \subset \mathbb{R}^n$ 有界, 则

$$\int_B M(f)(x)dx \leq 2|B| + C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)|dx$$

其中 $\log^+ t = \max(\log t, 0)$.

证明 根据 L^p 范数的等价计算式3.5有

$$\begin{aligned}\int_B M(f)(x)dx &\leq 2\int_0^\infty |\{x \in B : M(f)(x) > 2\lambda\}|d\lambda \\ &\leq 2\int_0^1 |B|d\lambda + 2\int_1^\infty |\{x \in B : M(f)(x) > 2\lambda\}|d\lambda \\ &= 2|B| + 2\int_1^\infty |\{x \in B : M(f)(x) > 2\lambda\}|d\lambda.\end{aligned}$$

将 f 分解为 $f_1 + f_2$, 其中 $f_1 = f\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}, f_2 = f - f_1$, 则因为

$$M(f)(x) \leq M(f)_1(x) + M(f)_2(x) = M(f)_1(x) + \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f_2(x-y)|dy < M(f)_1(x) + \lambda$$

可得

$$(M(f)(x) > 2\lambda \Rightarrow M(f)_1(x) > \lambda) \Rightarrow (\{x \in B : M(f)(x) > 2\lambda\} \subset \{x \in B : M(f)_1(x) > \lambda\})$$

于是

$$\begin{aligned}\int_1^\infty |\{x \in B : M(f)(x) > 2\lambda\}| &\leq \int_1^\infty |\{x \in B : M(f)_1(x) > \lambda\}|d\lambda \overset{(A)}{\leq} \int_1^\infty \frac{C}{\lambda} \int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|dxd\lambda \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_1^{\max\{|f(x)|,1\}} \frac{d\lambda}{\lambda} dx = C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)|dx\end{aligned}$$

其中 (A) 是 M 的弱 $(1,1)$ 型不等式. □

3.7 加权范数不等式

定理 3.10

若 w 是非负可测函数, $1 < p < \infty$, 则存在常数 C_p 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(f)(x)^p w(x)dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mw(x)dx.$$

进一步有

$$\int_{\{x:M(f)(x)>\lambda\}} w(x)dx \leq \frac{C_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|Mw(x)dx. \tag{3.23}$$

证明 如果把 $w(x)dx$ 看成新的测度, 则只要 $\|M(f)\|_{L^\infty(w)} \leq \|f\|_{L^\infty(w)}$ 与测度 $w(x)dx$ 下的弱 $(1,1)$ 型不等式得证, 那么根据 Marcinkiewicz 插值定理即可得到强 (p,p) 型不等式. 如果存在 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $Mw(x)=0$, 则必有 $w(x)=0$ a.e., 这是因为此时

$$Mw(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|w(x-y)|dy$$

于是只能有 $\forall r>0(\int_{B_r}|w(x-y)|dy=0)$, 即 $w(x)=0$, a.e., 进而命题无所可证, 故可设 $\forall x\in\mathbb{R}^n(Mw(x)>0)$. 若 $a > \|f\|_{L^\infty(Mw)}$[4], 则此即

$$a > \int_{\{x:|f(x)|>a\}} Mw(x)dx = 0$$

进而根据 $Mw(x)>0$ 知 $|\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>a\}|=0$, 亦即 $|f(x)|\leq a$ a.e. 故 $M(f)(x)\leq a$ a.e., 进而 $\|M(f)\|_{L^\infty(w)}\leq a$. 这便证明了 $\|M(f)\|_{L^\infty(w)}\leq\|f\|_{L^\infty(Mw)}$.

要证明弱 $(1,1)$ 型不等式, 可设 f 是非负函数, 且 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. (若 $f\in L^1(Mw)$, 则 $f_j = f\chi_{B(0,j)}$ 是点态递增到 f 的可积函数列.)[5] 设 $\{Q_j\}$ 是 f 高度为 λ 的 Calderón-Zygmund 分解, 则类似于引理3.2的证明, 有

$$\{x\in\mathbb{R}^n : M'(f)(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{\{x:M'(f)(x)>4^n\lambda\}} w(x)dx &\leq \sum_j\int_{2Q_j} w(x)dx \\
&= \sum_j 2^n|Q_j|\frac{1}{|2Q_j|}\int_{2Q_j}w(x)dx \\
&\overset{(A)}{\leq} \frac{2^n}{\lambda}\sum_j\int_{Q_j}f(y)(\frac{1}{|2Q_j|}\int_{2Q_j}w(x)dx)dy \\
&\leq \frac{2^nC}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)M''w(y)dy
\end{aligned}$$

其中 (A) 是 Calderón-Zygmund 定理3.7(iii). 又因为 $M''w(y)\leq C_nMw(y)$, 命题即证. □

3.8 补充: 弱 L^p 空间与 Lorentz 空间

3.8.1 弱 L^p 空间

3.8.1.1 弱 L^p 空间的基本介绍

设 $0<p<\infty$, 回忆 $T=id$ 时的弱 $(p,p)(p<\infty)$ 型不等式:

$$\mu(\{x\in X : |f(x)|>\lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_{L^p(X,\mu)}}{\lambda}\right)^p, \quad \forall\lambda>0$$

注意 $d_f(\lambda)=\mu(\{x\in X:|f(x)|>\lambda\})$, 于是上式可以整理为

$$\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)}, \quad \forall\lambda>0$$

为了消除 λ 的影响, 知上式等价于

$$\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

[4] 什么是 $\|\cdot\|_{L^\infty(Mw)}$?

[5] 这个补充的意义是什么?

若 $f\in L^p(X,\mu)$, 自然能导出 $\sup\limits_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}<\infty$. 但就算 $\|f\|_{L^p(X,\mu)}=\infty$, 也未必有 $\sup\limits_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}=\infty$. 这说明如果 $\sup\limits_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}$ 能成为范数 (或拟范数), 它将导出一个比 $L^p(X,\mu)$ 范围更大的空间. 此即下述弱 L^p 空间的定义:

定义 3.12 (弱 $L^p(X,\mu)$)

对 $0<p<\infty$, 弱 $L^p(X,\mu)$(又记为 $L^{p,\infty}(X,\mu)$) 由 X 上满足

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}=\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}(=\inf\{C>0:\forall\alpha>0(d_f(\alpha)\le\frac{C^p}{\alpha^p})\})<\infty$$

的全体可测函数 f 构成. 弱 $L^\infty(X,\mu)$ 空间定义为 $L^\infty(X,\mu)$, $\|\circledast\|_{L^{\infty,\infty}(X,\mu)}:=\|\circledast\|_{L^\infty(X,\mu)}$.

注 $L^{\infty,\infty}(X,\mu)=L^\infty(X,\mu)$ 可以理解为: 当 $p=\infty$ 时, $\sup\limits_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}$ 有意义当且仅当 $d_f(\lambda)<\infty$, 于是

$$\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}=\sup\{\lambda>0:d_f(\lambda)<\infty\}$$

而后式意味着 $\mu(\{x\in X:|f(x)|>\lambda\})<\infty$, 满足该式的 λ 的上确界恰为本性上确界的定义.

容易证明用于定义 $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 的两个式子是相等的, 下面说明 $\|\circledast\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 是拟范数:

命题 3.9 (弱 $L^p(0<p\le\infty)$ 空间的可赋拟范性)

$\|\circledast\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 是弱 $L^p(X,\mu)(0<p\le\infty)$ 上的拟范数.

证明 $p=\infty$ 的情况无所可证. $p<\infty$ 时, 正定性和齐次性显见, 要说明 $\|\circledast\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}=\sup\limits_{\lambda>0}\{\lambda d_\circledast(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}$ 是拟范数, 就是要说明

$$\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_{f+g}(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}\lesssim\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}+\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_g(\lambda)^{\frac{1}{p}}\},\quad\forall f,g\in L^{p,\infty}(X,\mu)$$

注意若 $0<\theta\le1$, 那么对任意 $a,b\ge0$ 均有 $(a+b)^\theta\le a^\theta+b^\theta$, 这是因为只需考虑 $(1+x)^\theta\le1+x^\theta$, 对 $x\ge0$ 求导即证. 现若 $1\le p<\infty$, 则代入 $a=d_f(\lambda),b=d_g(\lambda),\theta=\frac{1}{p}$ 并利用分布函数性质3.2(iii) 有

$$\lambda d_{f+g}(\lambda)^{\frac{1}{p}}\le\lambda\left(d_f\left(\frac{\lambda}{2}\right)+d_g\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\le\lambda\left(d_f\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{p}}+d_g\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

于是

$$\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_{f+g}(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}\le2(\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}+\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_g(\lambda)^{\frac{1}{p}}\})$$

此即欲证.

当 $0<p<1$ 时, 根据(1.9)式知对任意 $a,b\ge0$ 与 $\theta\in[1,\infty)$ 有 $(a+b)^\theta\le2^{\theta-1}(a^\theta+b^\theta)$, 代入 $a=d_f(\lambda),b=d_g(\lambda),\theta=\frac{1}{p}$ 并利用分布函数性质3.2(iii) 有

$$\lambda d_{f+g}(\lambda)^{\frac{1}{p}}\le\lambda\left(d_f\left(\frac{\lambda}{2}\right)+d_g\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\le\lambda2^{\frac{1}{p}-1}\left(d_f\left(\frac{\lambda}{2}\right)+d_g\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)$$

于是

$$\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_{f+g}(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}\le2^{\frac{1}{p}}(\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}+\sup_{\lambda>0}\{\lambda d_g(\lambda)^{\frac{1}{p}}\}).$$

命题即证. □

$L^{p,\infty}(X,\mu)$ 与 $L^p(X,\mu)$ 两个空间之间的关系由下述命题体现:

命题 3.10

对任意 $0<p<\infty$ 与任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\le\|f\|_{L^p(X,\mu)}$$

特别因此有 $L^p(X,\mu) \hookrightarrow L^{p,\infty}(X,\mu)$.

证明 知对任意的 $\alpha > 0$:

$$\alpha^p d_f(\alpha) = \alpha^p \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = \int_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}} \alpha^p d\mu \leq \int_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu$$

故

$$\alpha^p d_f(\alpha) \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)}^p, \quad \forall \alpha > 0$$

从而

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}^p = \sup_{\alpha>0}\{\alpha^p d_f(\alpha)\} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)}^p$$

即得

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)}$$

□

上面的嵌入关系是严格的, **[LG1]** 中给出了一个可说明 $L^p(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的例子:

例 3.1(在 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 中而不在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的函数) 设 $h(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$, 显见积分 $\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^p dx$ 发散, 故 $h \notin L^p(\mathbb{R}^n)$. 但任取 $\lambda > 0$ 知

$$d_h(\lambda) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \lambda\}) = \lambda^{-p} v_n$$

其中 v_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积, 于是

$$\|h\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\lambda>0}\{\lambda d_h(\lambda)^{\frac{1}{p}}\} = v_n^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

3.8.1.2 弱 L^p 空间的收敛性

给出一个空间的范数后, 自然会去研究空间关于该范数的完备性如何, 该范数诱导的收敛强弱如何. $L^{p,\infty}(X,\mu)$ 的完备性这里先按下不表, 下面的命题说明 $L^{p,\infty}$ 意义下的收敛强于依测度收敛, 弱于 L^p 意义下的收敛.

定义 3.13 (依测度收敛)

设 $f, f_n(n = 1, 2, \cdots)$ 是测度空间 (X,μ) 上的可测函数, 称序列 f_n 依测度收敛到 f, 如果

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 (\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon). \tag{3.24}$$

注 上述定义等价于

$$\forall \varepsilon > 0 (\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0). \tag{3.25}$$

(3.25)⇒(3.24)是显然的, 下面说明(3.24)⇒(3.25). 取定 $\varepsilon > 0$ 与 $0 < \delta < \varepsilon$, 根据(3.24)式知存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $n > n_0$ 时

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) < \delta.$$

根据 $\delta < \varepsilon$ 知

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\})$$

于是

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \delta, \quad \forall n > n_0$$

令 $n \to \infty$ 即知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \delta \tag{3.26}$$

又因为(3.26)式对全体 $0 < \delta < \varepsilon$ 均成立, 故令 $\delta \to 0$ 即得(3.25)式.

命题 3.11 ($L^{p,\infty}$ 的收敛强弱比较)

设 $0 < p \le \infty, f, f_k \in L^{p,\infty}(X,\mu)(k = 1,2,\cdots)$, 则

(i) 若 $f, f_k \in L^p(X,\mu)(k = 1,2,\cdots)$, 且 $f_k \to f(L^p(X,\mu))$, 则 $f_k \to f(L^{p,\infty}(X,\mu))$;

(ii) 若 $f_k \to f(L^{p,\infty}(X,\mu))$, 则 f_k 依测度收敛到 f.

证明 $p = \infty$ 时 (i) 无所可证, 而 (ii) 是实变函数的课程中已知的结论[6]. 下设 $0 < p < \infty$, 若 $f, f_k \in L^p(X,\mu)(k = 1,2,\cdots)$, $f_k \to f(L^p(X,\mu))$, 则有

$$\|f_k - f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \le \|f_k - f\|_{L^p(X,\mu)} \Rightarrow \lambda^p\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \lambda\}) \le \int_X |f_k(x) - f(x)|^p d\mu, \quad \forall\lambda > 0$$

于是由 $\int_X |f_k(x) - f(x)|^p d\mu \to 0(k \to \infty)$ 知 $\lambda^p\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \lambda\}) \to 0(k \to \infty)$, 亦即 $f_k \to f(L^{p,\infty}(X,\mu))$.

若 $f_k \to f(L^{p,\infty}(X,\mu))$, 根据定义知

$$\forall\varepsilon > 0\exists K > 0\forall k > K(\|f_k - f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \sup_{\lambda>0}\{\lambda\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}+1}\})$$

令 $\lambda = \varepsilon$ 即知

$$\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

这正是依测度收敛的定义. □

注意 $L^{p,\infty}$ 意义下的收敛是严格强于依测度收敛的, 下例表明存在依测度收敛但不在 $L^{p,\infty}$ 意义下收敛的序列:

例 3.2 取定 $0 < p < \infty$, 在 $[0,1]$ 上定义函数

$$f_{k,j}(x) = k^{\frac{1}{p}}\chi_{(\frac{j-1}{k},\frac{j}{k})}(x), \quad k \ge 1, 1 \le j \le k.$$

现考虑序列 $\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \cdots\}$, 观察到

$$|\{x \in [0,1] : f_{k,j}(x) > 0\}| = \frac{1}{k}$$

于是序列 $\{f_{k,j}\}_{(k,j)}$ 依测度收敛到 0. 同时注意

$$\|f_{k,j}\|_{L^{p,\infty}[0,1]} = \sup_{\alpha>0}\{\alpha|\{x \in [0,1] : f_{k,j}(x) > \alpha\}|^{\frac{1}{p}}\} \ge \sup_{k\ge1}\frac{(k - \frac{1}{k})^{\frac{1}{p}}}{k^{\frac{1}{p}}} = 1$$

这表明序列 $\{f_{k,j}\}_{(k,j)}$ 并不在 $L^{p,\infty}$ 意义下收敛.

3.8.1.3 弱 L^p 空间上的一个初等插值

类似于 L^p 范数的对数凸性1.13, 在 $L^{p,\infty}$ 空间之间也有类似的插值命题:

命题 3.12 ($L^{p,\infty}(X,\mu)$ 的一个初等插值)

设 (X,μ) 是 σ 有限测度空间, $0 < p < q \le \infty, f \in L^{p,\infty}(X,\mu) \cap L^{q,\infty}(X,\mu)$, 则对任意 $r \in (p,q)$ 都有 $f \in L^r(X,\mu)$, 且

$$\|f\|_{L^r(X,\mu)} \le \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}^{\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \|f\|_{L^{q,\infty}(X,\mu)}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}. \tag{3.27}$$

证明 首先设 $q < \infty$, 任取 $\lambda > 0$, 根据 $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 的定义知:

$$\begin{cases} \lambda^p d_f(\lambda) \le \|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}^p \\ \lambda^q d_f(\lambda) \le \|f\|_{L^{q,\infty}(X,\mu)}^q \end{cases}$$

[6] 即一致收敛强于依测度收敛.

得

$$d_f(\lambda) \le \min\left(\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^p}, \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^q}\right) \tag{3.28}$$

为了分开讨论 $\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^p}, \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^q}$, 求解 $\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^p} = \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^q}$ 得 $\lambda = (\frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}}{\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}})^{\frac{1}{q-p}}$, 为简便记

$$B = \left(\frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}}{\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}}\right)^{\frac{1}{q-p}} \tag{3.29}$$

于是

$$d_f(\lambda) \le \begin{cases} \frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^p}, & 0 < \lambda \le B \\ \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^q}, & B < \lambda < \infty \end{cases}$$

下面估计 f 的 L^r 范数, 由(3.28),(3.29)式与等价计算式(3.5)知

$$\begin{aligned}
\|f\|^r_{L^r(X,\mu)} &\overset{(A)}{=} r\int_0^\infty \lambda^{r-1} d_f(\lambda)d\lambda \le r\int_0^\infty \lambda^{r-1}\min\left(\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^p}, \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}}{\lambda^q}\right)d\lambda \\
&= r\int_0^B \lambda^{r-1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}d\lambda + r\int_B^\infty \lambda^{r-1-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}d\lambda \\
&= \frac{r}{r-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}B^{r-p} + \frac{r}{q-r}\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}B^{r-q} \\
&= \frac{r}{r-p}\|f\|^{p-p\frac{r-p}{q-p}}_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\|f\|^{q\frac{r-p}{q-p}}_{L^{q,\infty}(X,\mu)} + \frac{r}{q-r}\|f\|^{q+q\frac{r-q}{q-p}}_{L^{q,\infty}(X,\mu)}\|f\|^{p\frac{r-q}{q-p}}_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \\
&= \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)\|f\|^{\frac{1-\frac{r}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\|f\|^{\frac{\frac{r}{p}-1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}_{L^{q,\infty}(X,\mu)}
\end{aligned}$$

其中 (A) 基于 L^p 范数的等价计算式3.5, 这里便需要 (X,μ) 的 σ 有限性, 另因 $r-p>0, r-q<0$, 故 $\int_0^B \lambda^{r-1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}d\lambda$, $\int_B^\infty \lambda^{r-1-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}(X,\mu)}d\lambda < \infty$. 两边同取 $\frac{1}{r}$ 次幂即得欲证.

再设 $q=\infty$. 因为当 $\lambda > \|f\|_{L^\infty(X,\mu)}$ 时 $d_f(\lambda) = 0$, 故只需考虑 $\lambda \le \|f\|_{L^\infty(X,\mu)}$ 的情况, 此时 $d_f(\lambda) \le \lambda^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$, 进而

$$\|f\|^r_{L^r(X,\mu)} \le \frac{r}{r-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\|f\|^{r-p}_{L^\infty(X,\mu)}$$

这正是 $q=\infty$ 时的命题. □

3.8.1.4 弱 $L^p(p>1)$ 空间的可赋范性

本节选自 **[LG1]** 的习题, 列于此处旨在为线性算子的 l^2 值延拓定理4.14的证明作准备.

前面我们讨论了弱 $L^p(0<p\le\infty)$ 空间的可赋拟范性3.9, 事实上弱 L^p 空间上也可能赋范数. 为介绍这一结果, 首先需要下述引理:

引理 3.3

设 (X,μ) 是测度空间, $E\subset X$ 满足 $\mu(E)<\infty$, 函数 $f\in L^{p,\infty}(X,\mu)(0<p<\infty)$. 若 $0<q<p$, 则

$$\int_E |f(x)|^q d\mu(x) \le \frac{p}{p-q}\mu(E)^{1-\frac{q}{p}}\|f\|^q_{L^{p,\infty}(X,\mu)}.$$

证明 根据 $\|\circledast\|_{L^{p,\infty}(E,\mu)}$ 的定义易知对任意 $\lambda>0$ 均有 $\mu(E\cap\{|f|>\lambda\}) \le \min(\mu(E), \lambda^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}(X,\mu)})$, 进而由 L^p

范数的等价计算式(3.5)知:

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^q d\mu(x) &= q\int_0^\infty \lambda^{q-1}\mu(\{x\in E:|f(x)|>\lambda\})d\lambda\\ &= q\int_0^\infty \lambda^{q-1}\mu(E\cap\{|f|>\lambda\})^{1-\frac{q}{p}}\mu(E\cap\{|f|>\lambda\})^{\frac{q}{p}}d\lambda\\ &\le q\int_0^\infty \lambda^{q-1}\mu(E)^{1-\frac{q}{p}}\lambda^{-q}\|f\|^q_{L^{p,\infty}(X,\mu)}d\lambda\\ &= \frac{p}{p-q}\mu(E)^{1-\frac{q}{p}}\|f\|^q_{L^{p,\infty}(X,\mu)}.\end{aligned}$$

引理即证. □

现取 (X,μ) 是 σ 有限测度空间, $0<p<\infty$, 取定 $0<r<p$ 并定义

$$|||f|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}\left(\int_E |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{3.30}$$

其中上确界在 X 的全体有限测度子集 E 中取. 下面说明 $\|\circledast\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 与 $|||\circledast|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 是等价的: 在引理3.3中代入 $q=r$, 并在式子两端取 $\frac{1}{q}$ 次幂可知

$$\mu(E)^{-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}\left(\int_E |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$$

在上式两端对 E 取上确界即得

$$|||f|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \le \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}, \quad \forall f\in L^{p,\infty}(X,\mu).$$

另一方面, 因为 (X,μ) 是 σ 有限的[7], 故可记 $X=\bigcup_{k=1}^\infty X_k$, 其中 $\mu(X_k)<\infty(k=1,2,\cdots)$, 且 $X_1\subset\cdots\subset X_k\subset\cdots$. 于是在(3.30)式中取 $E=E_{\lambda,k}:=\{x\in X_k:|f(x)|>\lambda\}$ 有:

$$\begin{aligned}|||f|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)} &= \sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}\left(\int_E |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\ge \mu(E_{\lambda,k})^{-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}\left(\int_{E_{\lambda,k}} |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\ge \mu(E_{\lambda,k})^{-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}\left(\int_{E_{\lambda,k}} \lambda^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} = \lambda\mu(E_{\lambda,k})^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

在上式两端令 $k\to\infty$ 即得

$$|||f|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \ge \lambda\mu(\{x\in X:|f(x)|>\lambda\})^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\lambda>0,$$

在上式两端对 $\lambda>0$ 取上确界即得

$$|||f|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \ge \|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}.$$

至此可得不等式

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \le |||f|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \le \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}, \quad \forall f\in L^{p,\infty}(X,\mu). \tag{3.31}$$

下面我们用 $|||\circledast|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 构造 $L^{p,\infty}(X,\mu)(0<p<\infty)$ 上的度量:

定理 3.11 ($L^{p,\infty}(0<p<\infty)$ 空间的度量化)

设 (X,μ) 是 σ 有限测度空间, $0<p<\infty$, 则在 $L^{p,\infty}(X,\mu)$ 上可赋度量. ♡

证明 取 $0<\varepsilon<p, r=\min(p-\varepsilon,1)$, 记

$$d(f,g) = |||f-g|||^r_{L^{p,\infty}(X,\mu)}, \quad f,g\in L^{p,\infty}(X,\mu).$$

[7] (X,μ) 的 σ 有限性实际上是必要的条件, 这是因为如果空间不具有 σ 有限性, 可取 $X=\{1,2\}, \mu(\{1\})=1, \mu(\{2\})=\infty$, 此时 (X,μ) 显然不是 σ 有限的. 取 $f(x)=1$ 可知 $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}=\infty$, 于是 $f\notin L^{p,\infty}(X,\mu)$, 但 $|||f|||_{L^{p,\infty}(X,\mu)}=1$.

下面说明 d 是 $L^{p,\infty}(X,\mu)$ 上的度量. 其对称性与非负性是显见的; 若 $d(f,g)=0$, 由(3.31)式知 $\|f-g\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}=0$, 由 $\|\circledast\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 的正定性知 $f=g$, 因此 d 是正定的. 下面证明 d 的三角不等式: 任取 $f,g,h\in L^{p,\infty}(X,\mu)$, 有

$$\begin{aligned}
d(f,g) &= \sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{r}{p}-1}\int_E|f(x)-g(x)|^r\,d\mu(x)\\
&= \sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{r}{p}-1}\int_E|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|^r\,d\mu(x)\\
&\le \sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{r}{p}-1}\int_E(|f(x)-h(x)|^r+|h(x)-g(x)|^r)d\mu(x)\\
&\le \sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{r}{p}-1}\int_E|f(x)-h(x)|^r\,d\mu(x)+\sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{r}{p}-1}\int_E|h(x)-g(x)|^r\,d\mu(x)\\
&= d(f,h)+d(h,g),
\end{aligned}$$

因此 d 是 $L^{p,\infty}(X,\mu)$ 上的度量. □

另外, 由(3.31)式可知度量 d 诱导的拓扑与拟范数 $\|\circledast\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 诱导的拓扑是等价的. 如果记 $n(f)=d(f,0)$, 则容易验证 $r=1$ 时 $n(f)$ 称为 $L^{p,\infty}(X,\mu)$ 上的范数.

最后, 根据上述结果, 还可以得到空间 $L^{p,\infty}(X,\mu)(0<p<\infty)$ 中的 Fatou 引理:

定理 3.12 ($L^{p,\infty}(X,\mu)(0<p<\infty)$ 中的 Fatou 引理)

设 (X,μ) 是 σ 有限测度空间, $0<p<\infty$, 则对 X 上的任意可测函数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 均有

$$\|\varliminf_{n\to\infty}|g_n|\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\le C_p\varliminf_{n\to\infty}\|g_n\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)},$$

其中 C_p 是只依赖于 p 的常数.

♡

证明 知

$$\begin{aligned}
\|\varliminf_{n\to\infty}|g_n|\|^r_{L^{p,\infty}(X,\mu)} &\overset{\text{(A)}}{\le} \|\,|\varliminf_{n\to\infty}|g_n|\,|\|^r_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\\
&= \sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{r}{p}-1}\int_E\varliminf_{n\to\infty}|g_n(x)|^r\,d\mu(x)\\
&\overset{\text{(B)}}{\le} \sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{r}{p}-1}\varliminf_{n\to\infty}\int_E|g_n(x)|^r\,d\mu(x)\\
&\le \varliminf_{n\to\infty}\sup_{0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{r}{p}-1}\int_E|g_n(x)|^r\,d\mu(x)\\
&\overset{\text{(C)}}{\le} \frac{p}{p-r}\varliminf_{n\to\infty}\|g_n\|^r_{L^{p,\infty}(X,\mu)}
\end{aligned}$$

其中 (A),(C) 是(3.31)式; (B) 是经典的 Fatou 引理. 取定 r 并在上式两端取 $\frac{1}{r}$ 次幂即得欲证. □

3.8.2 Lorentz 空间

3.8.2.1 递降重排

[CR] 中给出了递降重排的引入动机: 对非负有限序列 $\{a_i\}_{i=1}^n,\{b_i\}_{i=1}^n$ 而言, 在代数上称 $\{b_i\}$ 是 $\{a_i\}$ 的重排, 就是说 $b_i=a_{\sigma(i)}(i=1,2,\cdots,n)$, 其中 σ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某个排列. 在更一般的测度空间中, 排列的概念可以换成保测变换. 于是在这个意义下, 对非负可测函数 f,g 而言, 称 g 是 f 的重排, 就是说 $g=f\circ\sigma$, 其中 σ 是某个保测变换. 这个概念的拓展虽说是良定义的, 但还不够宽泛, 没法满足我们的一些研究要求. 例如上述重排意义下, 对称性没法得到保证, 即 g 可能是 f 的重排, 而 f 不是 g 的重排.

另一种理解保测变换的角度是从分布函数入手, 在这个意义下称非负函数 f,g 互为重排 (或者在更精确的术语下称为等测), 指的是它们的分布函数相同. 这个概念拓展显然是对称的, 它也可以用来研究不同测度空间上函数的等测性. 特别来说, 对每个可测函数 f 而言, 在上述重排意义下都可以定义这么一个特殊的重排: 它在 $[0,\infty)$

上递降且与 f 等测. 这个重排记作 f^*, 它就称为 f 的递降重排, 递降重排对应的离散情况便是序列从大到小排列.

下面开始严格的叙述. 设 f 是测度空间 (X,μ) 上的可测函数, 其递降重排定义如下:

定义 3.14 (递降重排)

若 f 是定义在 X 上的复值函数, 则 f 的递降重排 f^* 是定义在 $[0,\infty)$ 上的函数:

$$f^*(t)=\inf\{s>0:d_f(s)\le t\}=\inf\{s\ge 0:d_f(s)\le t\}. \tag{3.32}$$

其中 $\inf\varnothing=\infty$.

根据定义显见若 $\forall\alpha\ge 0(d_f(\alpha)>t)$, 则 $f^*(t)=\infty$. 另外 $f^*(t)$ 是关于 t 的递减函数, 这是因为若 $t_1<t_2$, 根据 $d_f(s)$ 的递增性知若 s_0 满足 $d_f(s_0)\le t_2$, 则对任意 $0<s<s_0$ 均有 $d_f(s)\le t_2$. 现已知

$$d_f(s)\le t_1\Rightarrow d_f(s)\le t_2$$

故

$$\{s>0:d_f(s)\le t_1\}\subset\{s>0:d_f(s)\le t_2\}$$

于是

$$\inf\{s>0:d_f(s)\le t_2\}\le\inf\{s>0:d_f(s)\le t_1\}$$

至此即得 $f^*(t_2)\le f^*(t_1)$, 亦即 $f^*(t)$ 是关于 t 的递减函数. 同时, 因为 $d_f(s)\le\mu(X)$ 对任意 $s>0$ 均成立, 故 $t>\mu(X)$ 时 $f^*(t)=0$, 亦即 $\operatorname{supp}f^*\subset[0,\mu(X)]$.

下面系统说明 f^* 的诸性质:

命题 3.13 (递降重排的性质)

若 f,g,f_n 是 μ 可测函数, $k\in\mathbb{C}, 0\le t,s,t_1,t_2<\infty$, 则:

(i) 当 $\alpha>0$ 时 $f^*(d_f(\alpha))\le\alpha$;

(ii) $d_f(f^*(t))\le t$;

(iii) $f^*(t)>s$ 当且仅当 $t<d_f(s)$, 亦即 $\{t\ge 0:f^*(t)>s\}=[0,d_f(s))$;

(iv) 若 $|g|\le|f|$ 是 μ 几乎处处成立的, 则 $g^*\le f^*$, 且 $|f|^*=f^*$;

(v) $(kf)^*=|k|f^*$;

(vi) $(f+g)^*(t_1+t_2)\le f^*(t_1)+g^*(t_2)$;

(vii) $(fg)^*(t_1+t_2)\le f^*(t_1)g^*(t_2)$;

(viii) 若 $|f_n|\uparrow|f|$ 是 μ 几乎处处成立的, 则 $f_n^*\uparrow f^*$;

(ix) 若 $|f|\le\varliminf\limits_{n\to\infty}|f_n|$ 是 μ 几乎处处成立的, 则 $f^*\le\varliminf\limits_{n\to\infty}f_n^*$;

(x) f^* 在 $[0,\infty)$ 上右连续;

(xi) 若 $f^*(t)<\infty, c>0, \mu(\{x\in X:|f(x)|\ge f^*(t)-c\})<\infty$, 则 $t\le\mu(\{x\in X:|f(x)|\ge f^*(t)\})$;

(xii) $d_f=d_{f^*}$;

(xiii) 当 $0<p<\infty$ 时 $(|f|^p)^*=(f^*)^p$;

(xiv) 当 $0<p<\infty$ 时 $\int_X|f(x)|^p\,d\mu=\int_0^\infty f^*(t)^p\,dt$;

(xv) $\|f\|_{L^\infty(X)}=f^*(0)$;

(xvi) 当 $0<q<\infty$ 时 $\sup\limits_{t>0}t^qf^*(t)=\sup\limits_{\alpha>0}\alpha(d_f(\alpha))^q$.

证明 (i) 根据定义知

$$f^*(d_f(\alpha))=\inf\{s>0:d_f(s)\le d_f(\alpha)\}$$

前面已经说过 $d_f(s)$ 是关于 s 的递增函数, 故 $d_f(s)\le d_f(\alpha)\Rightarrow s\le\alpha$, 进而 $f^*(d_f(\alpha))\le\alpha$.

(ii) 根据定义知

$$d_f(f^*(t))=d_f(\inf\{s>0:d_f(s)\le t\})\le t.$$

(iii) $f^*(t) > s$ 等价于

$$f^*(t) = \inf\{r > 0 : d_f(r) \le t\} > s$$

这又等价于 $s \notin \{r > 0 : d_f(r) \le t\}$, 亦即 $d_f(s) > t$.

(iv) 当 $|g| \le |f|$ 是 μ 几乎处处成立的, 则根据分布函数的性质3.2(i) 知

$$\forall \lambda > 0(d_g(\lambda) \le d_f(\lambda))$$

这说明

$$d_f(\lambda) \le t \Rightarrow d_g(\lambda) \le t$$

亦即

$$\{\lambda > 0 : d_f(\lambda) \le t\} \subset \{\lambda > 0 : d_g(\lambda) \le t\}$$

于是

$$\inf\{\lambda > 0 : d_g(\lambda) \le t\} \le \inf\{\lambda > 0 : d_f(\lambda) \le t\}$$

此即 $g^* \le f^*$. 因为 d_f 本身只关于 $|f|$, 故 f 与 $|f|$ 在作用 d_f 后是等价的, 亦即 $|f|^* = f^*$.

(v) 当 $k = 0$ 时命题是显然的. 当 $k \ne 0$ 时任取 $t \ge 0$, 知

$$(kf)^*(t) = \inf\{s > 0 : d_{kf}(s) \le t\}$$

根据分布函数的性质3.2(ii) 知 $d_{kf}(s) = d_f(\frac{s}{|k|})$, 于是

$$(kf)^*(t) = \inf\{|k|s > 0 : d_f(s) \le t\} = |k| \int \{s > 0 : d_f(s) \le t\} = |k| f^*(t).$$

(vi) 设 $A = \{s_1 > 0 : d_f(s_1) \le t_1\}, B = \{s_2 > 0 : d_g(s_2) \le t_2\}, S = \{s > 0 : d_{f+g}(s) \le t_1 + t_2\}$, 则对任意 $s_1 \in A, s_2 \in B$, 根据分布函数的性质3.2(iii) 有

$$d_{f+g}(s_1 + s_2) \le d_f(s_1) + d_g(s_2) \le t_1 + t_2 \Rightarrow s_1 + s_2 \in S$$

这说明 $A + B \subset S$, 因而 $\inf S \le \inf(A + B) = \inf A + \inf B$, 此即 $(f + g)^*(t_1 + t_2) \le f^*(t_1) + f^*(t_2)$.

(vii) 设 $A = \{s_1 > 0 : d_f(s_1) \le t_1\}, B = \{s_2 > 0 : d_g(s_2) \le t_2\}, P = \{s > 0 : d_{fg}(s) \le t_1 + t_2\}$, 则对任意 $s_1 \in A, s_2 \in B$, 根据分布函数的性质3.2(iv) 有

$$d_{fg}(s_1 s_2) \le d_f(s_1) + d_g(s_2) \le t_1 + t_2 \Rightarrow s_1 s_2 \in P$$

这说明 $A \cdot B \subset P$, 因而 $\inf P \le \inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$, 此即 $(fg)^*(t_1 + t_2) \le f^*(t_1) g^*(t_2)$.

(viii) 当 $|f_n| \uparrow |f|$ 是 μ 几乎处处成立的, 根据分布函数的性质3.2知 $d_{f_n} \uparrow d_f$, 于是对任意 $s, t > 0$ 有

$$d_f(s) \le t \Rightarrow d_{f_n}(s) \le t$$

亦即

$$\{s > 0 : d_f(s) \le t\} \subset \{s > 0 : d_{f_n}(s) \le t\}$$

于是

$$\inf\{s > 0 : d_{f_n}(s) \le t\} \le \inf\{s > 0 : d_f(s) \le t\}$$

另根据单调收敛定理与 $d_{f_n} \uparrow d_f$ 知 $\inf\{s > 0 : d_{f_n}(s) \le t\} \to \inf\{s > 0 : d_f(s) \le t\}$, 此即 $f_n^* \uparrow f^*$.

(ix) 设 $F_n = \inf\limits_{m \ge n} |f_m|, h = \varliminf\limits_{n \to \infty} |f_n| = \sup\limits_{n \ge 1} F_n$. 因为 $F_n \uparrow h$, 故由 (viii) 知 $F_n^* \uparrow h^*$. 由 $|f| \le \varliminf\limits_{n \to \infty} |f_n|$ 知 $|f| \le h$, 进而由 (iv) 知 $f^* \le h^* = \sup\limits_{n \ge 1} F_n^*$. 因为 $m \ge n$ 时 $F_n \le |f_m|$, 由 (iv) 知 $F_n^* \le f_m^*$, 因而 $F_n^* \le \inf\limits_{m \ge n} f_m^*$. 综上即得

$$f^* \le h^* = \sup_{n \ge 1} F_n^* \le \sup_{n \ge 1} \inf_{m \ge n} f_m^* = \varliminf_{n \to \infty} f_n^*.$$

(x) 若 $f^*(t_0) = 0$, 则根据 f^* 的递减性知对任意 $t > t_0$ 总有 $f^*(t) = 0$, 因而 f^* 在 t_0 处右连续. 现设 $f^*(t_0) > 0$, 取 α 满足 $0 < \alpha < f^*(t_0)$, 另取 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ 是递降到零的正数列, 则因为 $f^*(t_0) > f^*(t_0) - \alpha$, 根据 (iii) 知 $d_f(f^*(t_0) - \alpha) > t_0$. 因为 $t_n \downarrow 0$, 故存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $n \ge n_0$ 均有 $d_f(f^*(t_0) - \alpha) > t_0 + t_n$. 由 (iii) 知 $f^*(t_0) - \alpha < f^*(t_0 + t_n)$, 又根

据 f^* 的递减性知 $f^*(t_0+t_n)\le f^*(t_0)$, 夹逼即得 $\lim\limits_{n\to\infty} f^*(t_0+t_n)=f^*(t_0)$.

(xi) 取定 $c>0, n\in\mathbb{N}$ 可知 $f^*(t)>f^*(t)-\frac{c}{n}$, 另由 $\mu(\{x\in X:|f(x)|\ge f^*(t)-c\})<\infty$ 知对任意 $n\in\mathbb{N}$ 均有 $\mu(\{x\in X:|f(x)|>f^*(t)-\frac{c}{n}\})<\infty$, 于是由 (iii) 知

$$t<d_f(f^*(t)-\frac{c}{n})=\mu(\{x\in X:|f(x)|>f^*(t)-\frac{c}{n}\})$$

根据单调收敛定理, 在上式两端令 $n\to\infty$ 即得

$$t\le\mu(\{x\in X:|f(x)|\ge f^*(t)\}).$$

(xii) 由 (iii) 知对任意 $s\ge 0$ 有

$$d_{f^*}(s)=\mu(\{t>0:f^*(t)>s\})=\mu([0,d_f(s)))=d_f(s).$$

(xiii) 任取 $s\ge 0$ 知

$$d_{|f|^p}(s)=\mu(\{x\in X:|f(x)|^p>s\})=\mu(\{x\in X:|f(x)|>s^{\frac{1}{p}}\})=d_f(s^{\frac{1}{p}})$$

于是对任意 $t\ge 0$ 有

$$(|f|^p)^*(t)=\inf\{s>0:d_{|f|^p}(s)\le t\}=\inf\{s>0:d_f(s^{\frac{1}{p}})\le t\}=(\inf\{s>0:d_f(s)\le t\})^p=(f^*)^p(t).$$

(xiv) 知

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^p d\mu &\overset{(A)}{=} p\int_0^\infty \lambda^{p-1}d_f(\lambda)d\lambda\\ &\overset{(B)}{=} p\int_0^\infty \lambda^{p-1}d_{f^*}(\lambda)d\lambda\\ &\overset{(C)}{=} \int_0^\infty |f^*(t)|^p dt\end{aligned}$$

其中 (A),(C) 是 L^p 范数的等价计算式3.5, (B) 是性质 (xii).

(xv) 根据定义知

$$f^*(0)=\inf\{s>0:d_f(s)\le 0\}$$

而

$$d_f(s)<0\Rightarrow\mu(\{x\in X:|f(x)|>s\})\le 0\Rightarrow\mu(\{x\in X:|f(x)|>s\})=0$$

另一方面 $\|f\|_{L^\infty(X)}$ 的定义正是

$$\|f\|_{L^\infty(X)}:=\inf\{s:\mu(\{x\in X:|f(x)|>s\})=0\},$$

此即欲证.

(xvi) 任取 $\alpha>0$, 不失一般性可设 $d_f(\alpha)>0$, 设 ε 满足 $0<\varepsilon<d_f(\alpha)$, 则因为 $d_f(\alpha)>d_f(\alpha)-\varepsilon$, 由 (iii) 知 $f^*(d_f(\alpha)-\varepsilon)>\alpha$, 于是

$$\sup_{t>0} t^q f^*(t)\ge(d_f(\alpha)-\varepsilon)^q f^*(d_f(\alpha)-\varepsilon)>(d_f(\alpha)-\varepsilon)^q\alpha.$$

两边令 $\varepsilon\to 0$ 并对 $\alpha>0$ 取上确界即得 $\sup\limits_{t>0} t^q f^*(t)\ge\sup\limits_{\alpha>0}\alpha(d_f(\alpha))^q$. 另一方面, 取 $t>0$ 并不失一般性设 $f^*(t)>0$, 取 ε 满足 $0<\varepsilon<f^*(t)$, 则因为 $f^*(t)>f^*(t)-\varepsilon$, 由 (iii) 知 $d_f(f^*(t)-\varepsilon)>t$, 于是

$$\sup_{\alpha>0}\alpha(d_f(\alpha))^q\ge(f^*(t)-\varepsilon)(d_f(f^*(t)-\varepsilon))^q>(f^*(t)-\varepsilon)t^q.$$

两边令 $\varepsilon\to 0$ 并对 $t>0$ 取上确界即得 $\sup\limits_{t>0} t^q f^*(t)\le\sup\limits_{\alpha>0}\alpha(d_f(\alpha))^q$, 欲证因而成立. □

3.8.2.2 Lorentz 空间的定义与性质

在了解递降重排的诸性质后, 下面可以给出 Lorentz 空间的定义了:

定义 3.15 (Lorentz 空间)

设 f 是测度空间 (X,μ) 上的可测函数, $0<p,q\le\infty$, 定义

$$\|f\|_{L^{p,q}}=\begin{cases}\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & q<\infty\\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}}f^*(t), & q=\infty\end{cases}$$

则记满足 $\|f\|_{L^{p,q}}<\infty$ 的全体 f 构成的空间为 $L^{p,q}(X,\mu)$, 称之为指标为 p,q 的 Lorentz 空间.

♣

类似于 L^p 空间与弱 L^p 空间, $L^{p,q}(X,\mu)$ 中的两个函数相等指的是它们 μ 几乎处处相等. 由递降重排的性质3.13(xvi) 知 $L^{p,\infty}$ 正是弱 L^p 空间, 又因为弱 L^∞ 空间正是 L^∞, 故 $L^{\infty,\infty}=L^\infty$. 另外由 $d_f=d_{f^*}$ 与 L^p 范数的等价计算式知 $L^{p,p}=L^p$.

注 容易验证对任意 $0<p,r<\infty$ 与 $0<q\le\infty$ 有

$$\||g|^r\|_{L^{p,q}}=\|g\|^r_{L^{pr,qr}} \tag{3.33}$$

若在 $\mathbb{R}^n$ 上设伸缩算子为 $\delta^\varepsilon(f)(x)=f(\varepsilon x),\varepsilon>0$, 则从定义出发可说明 $d_{\delta^\varepsilon(f)}(\alpha)=\varepsilon^{-n}d_f(\alpha),(\delta^\varepsilon(f))^*(t)=f^*(\varepsilon^n t)$, 于是结合 Lorentz 范数的定义知

$$\|\delta^\varepsilon(f)\|_{L^{p,q}}=\varepsilon^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,q}}. \tag{3.34}$$

例 3.3(简单函数的 Lorentz 范数) 下面示范性地计算简单函数的 Lorentz 范数. 设 $f(x)=\sum_{j=1}^N a_j\chi_{E_j}(x)$, 其中 $\{E_j\}_{j=1}^N$ 是两两不交的集列, $a_1>\cdots>a_N>0$.

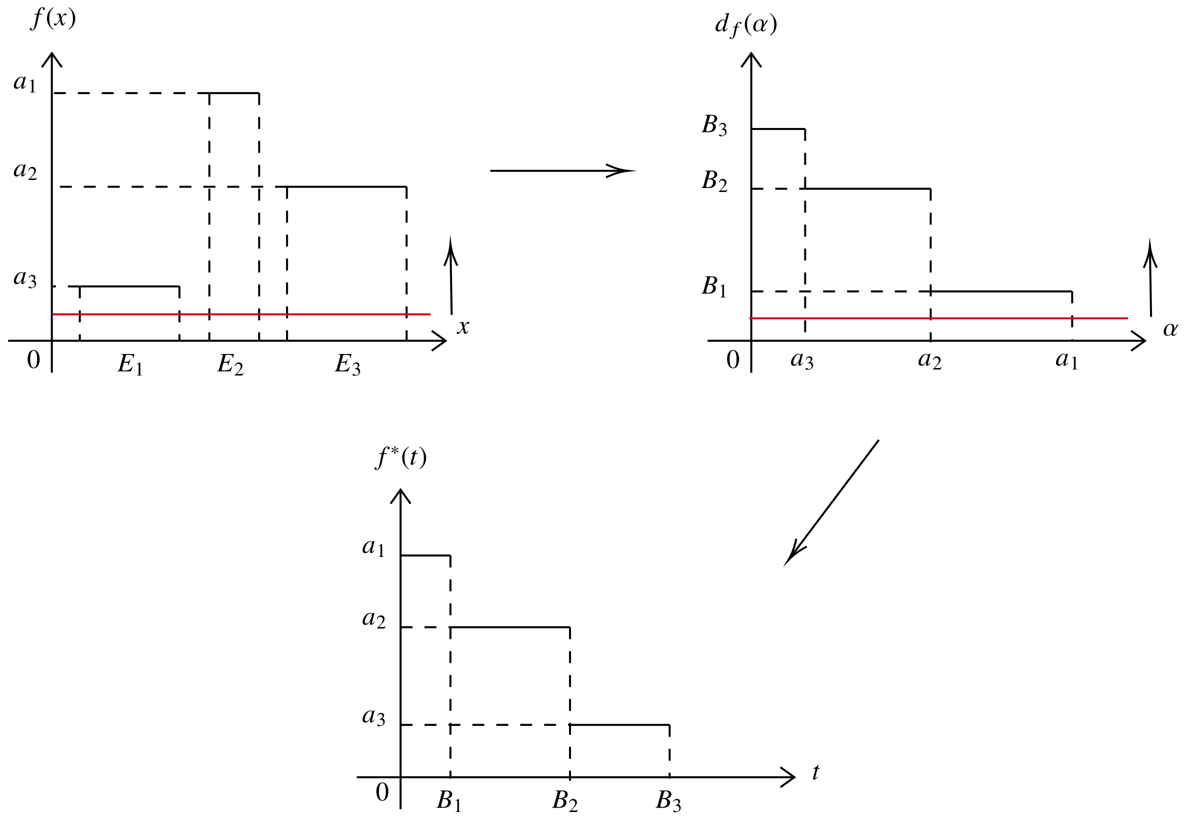

图 3.3: 简单函数计算示意, 其中 d_f 的几何直观是在 f 的图像中令红线上移, 观察 $f(x)$ 在红线之下部分的测度; f^* 的几何直观是在 d_f 的图像中令红线上移, 观察令 d_f 到达红线之下的首个元素.

从定义出发显见

$$d_f(\alpha)=\sum_{j=0}^N B_j\chi_{[a_{j+1},a_j)}(\alpha)$$

其中

$$B_j=\sum_{i=1}^{j}\mu(E_i),\ a_{N+1}=B_0=0,\ a_0=\infty.$$

知当 $B_0\le t<B_1$ 时, 使得 $d_f(s)\le t$ 的最小的 $s>0$ 为 a_1, 类似当 $B_1\le t<B_2$ 时, 使得 $d_f(s)\le t$ 的最小的 $s>0$ 为 a_2. 以此类推可知

$$f^*(t)=\sum_{j=1}^{N}a_j\chi_{[B_{j-1},B_j)}(t).$$

于是在 $0<p,q<\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,q}}&=\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{B_{j-1}}^{B_j}a_j^q t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{N}a_j^q(B_j-B_{j-1})^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}(a_1^qB_1^{\frac{q}{p}}+a_2^q(B_2^{\frac{q}{p}}-B_1^{\frac{q}{p}})+\cdots+a_N^q(B_N^{\frac{q}{p}}-B_{N-1}^{\frac{q}{p}}))^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

另有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}=\sup_{1\le j\le N}a_jB_j^{\frac{1}{p}}.$$

下面计算 $\|f\|_{L^{\infty,q}}$. 当 $q<\infty$ 时知

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{\infty,q}}&=\left(\int_0^\infty (f^*(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{B_{j-1}}^{B_j}a_j^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{N}a_j^q\log\frac{B_j}{B_{j-1}}\right)^{\frac{1}{q}}=\infty\end{aligned}$$

最后等于 ∞ 是因为 $B_0=0$, 这说明能使得 $\|\circledast\|_{L^{\infty,q}}<\infty$ 的简单函数只能是零函数. 现当 $0<q<\infty$ 时, 对于一般的非零函数 $g\in L^{\infty,q}(X,\mu)$ 知总存在非零简单函数 s 使得 $0\le s\le g$, 又因为 $\|s\|_{L^{\infty,q}}=\infty$, 故 $\|g\|_{L^{\infty,q}}=\infty$. 于是 $0<q<\infty$ 时必有 $L^{\infty,q}(X,\mu)=\{0\}$.

命题 3.14 ($L^{p,q}$ 范数的等价计算式)

若 $0<p<\infty, 0<q\le\infty$, 则

$$\|f\|_{L^{p,q}}=\begin{cases}p^{\frac{1}{q}}(\int_0^\infty(d_f(s)^{\frac{1}{p}}s)^q\frac{ds}{s})^{\frac{1}{q}}, & q<\infty\\ \sup\limits_{s>0}sd_f(s)^{\frac{1}{p}}, & q=\infty\end{cases}\tag{3.35}$$

证明 $q=\infty$ 时欲证即为递降重排的性质3.13(xvi), 下设 $q<\infty$. 若 f 为例3.3中给出的简单函数, 则已知

$$d_f(s)=\sum_{j=1}^{N}B_j\chi_{[a_{j+1},a_j)}(s)$$

其中 $a_{N+1}=0$. 现在一方面例3.3已经表明

$$\|f\|_{L^{p,q}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}(a_1^qB_1^{\frac{q}{p}}+a_2^q(B_2^{\frac{q}{p}}-B_1^{\frac{q}{p}})+\cdots+a_N^q(B_N^{\frac{q}{p}}-B_{N-1}^{\frac{q}{p}}))^{\frac{1}{q}},$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty (d_f(s)^{\frac{1}{p}}s)^q\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} &= p^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^N\int_{a_{j+1}}^{a_j} B_j^{\frac{1}{p}}s^{q-1}ds\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= p^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{q}\sum_{j=1}^N B_j^{\frac{1}{p}}(a_j^q-a_{j+1}^q)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}(a_1^qB_1^{\frac{q}{p}}+a_2^q(B_2^{\frac{q}{p}}-B_1^{\frac{q}{p}})+\cdots+a_N^q(B_N^{\frac{q}{p}}-B_{N-1}^{\frac{q}{p}}))^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

对于一般情况, 给定可测函数 f, 根据实变函数的结论知总能找到非负简单函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $f_n\uparrow|f|$ 是 μ 几乎处处成立的. 根据分布函数的性质3.2(vii) 与递降重排的性质3.13(viii) 知 $d_{f_n}\uparrow d_f, f_n^*\uparrow f^*$, 进而由单调收敛定理知:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,q}} &= \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^{p,q}}\\
&= \lim_{n\to\infty}p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty (d_{f_n}(s)^{\frac{1}{p}}s)^q\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty (d_f(s)^{\frac{1}{p}}s)^q\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

此即欲证. □

现在已经知道了 $L^{p,p}=L^p\subset L^{p,\infty}$, 一个自然的问题是一般的 Lorentz 空间有怎样的包含关系? 下面的结果表明对任意固定的 p, Lorentz 空间 $L^{p,q}$ 都关于指标 q 的递增而扩大.

命题 3.15 ($L^{p,q}$ 关于 q 的递增性)

若 $0<p\le\infty, 0<q<r\le\infty$, 则存在仅关于 p,q,r 的常数 $c_{p,q,r}$ 使得

$$\|f\|_{L^{p,r}}\le c_{p,q,r}\|f\|_{L^{p,q}}. \tag{3.36}$$

也就是说 $L^{p,q}$ 是 $L^{p,r}$ 的子空间.

证明 当 $p=\infty$ 时总有 $L^{\infty,q}=\{0\}$, 命题显然成立, 下设 $p<\infty$. 知

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{1}{p}}f^*(t) &= \left(\frac{q}{p}\int_0^t (s^{\frac{1}{p}}f^*(t))^q\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\overset{(A)}{\le} \left(\frac{q}{p}\int_0^t (s^{\frac{1}{p}}f^*(s))^q\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{p,q}}
\end{aligned}
$$

其中 (A) 是因为 f^* 递减. 现在在上式两端对 $t>0$ 取上确界知

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}\le\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{p,q}}. \tag{3.37}$$

这便证明了(3.36)式在 $r=\infty$ 时的情况. 当 $r<\infty$ 时, 知

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,r}} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^{r-q+q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\le \left((\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^{r-q}\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (3.38)\\
&= \|f\|_{L^{p,\infty}}^{\frac{r-q}{r}}\|f\|_{L^{p,q}}^{\frac{q}{r}}.
\end{aligned}
$$

将(3.37)式代入(3.38)式, 取 $c_{p,q,r}=(\frac{q}{p})^{\frac{r-q}{rq}}$ 即得欲证. □

不幸的是, 泛函 $\|\circledast\|_{L^{p,q}}$ 并不满足三角不等式. 这是因为考虑定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(t)=t, g(t)=1-t$, 知

$$d_f(s)=\mu(\{x\in[0,1]:|f(x)|>s\})=\begin{cases}1-s, & 0\le s\le 1\\ 0, & s>1\end{cases}$$

$$d_g(s)=\mu(\{x\in[0,1]:|g(x)|>s\})=\begin{cases}1-s, & 0\le s\le 1\\ 0, & s>1\end{cases}$$

于是

$$f^*(\alpha)=\inf\{s>0:d_f(s)\le\alpha\}=(1-\alpha)\chi_{[0,1]}(\alpha)$$
$$g^*(\alpha)=\inf\{s>0:d_g(s)\le\alpha\}=(1-\alpha)\chi_{[0,1]}(\alpha)$$

另一方面由 $(f+g)(t)=\chi_{[0,1]}(t)$ 知 $d_{f+g}(s)=\chi_{[0,1]}(s), (f+g)^*(\alpha)=\chi_{[0,1]}(\alpha)$. 现根据定义知当 $0<p,q<\infty$ 时:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^{p,q}}&=\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f+g)^*(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,q}}+\|g\|_{L^{p,q}}&=2\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(1-t)\chi_{[0,1]}(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=2\left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}(1-t)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=2(B(\frac{q}{p},q+1))\end{aligned}$$

在数学分析中有结论

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

于是 $\|f+g\|_{L^{p,q}}\le\|f\|_{L^{p,q}}+\|g\|_{L^{p,q}}$ 等价于

$$\frac{p}{q}\le 2^q\frac{\Gamma(q+1)\Gamma(\frac{q}{p})}{\Gamma(q+1+\frac{q}{p})}$$

取 $p=q=1$ 便足以说明上式不成立了. 然而, 因为对任意 $t>0$, 根据递降重排的性质3.13(vi) 知

$$(f+g)^*(t)\le f^*(\frac{t}{2})+g^*(\frac{t}{2})$$

故

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^{p,q}}&\le\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f^*(\frac{t}{2})+g^*(\frac{t}{2})))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f^*(t)+g^*(t)))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\overset{(B)}{\le}2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}}c_q(f^*(t)^q+g^*(t)^q)\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\overset{(B)}{\le}2^{\frac{1}{p}}c_q'(\|f\|_{L^{p,q}}+\|g\|_{L^{p,q}})\end{aligned}$$

其中 $c_q'=\max(1,2^{\frac{1-q}{q}})$, (B),(C) 的放缩依照 q 取值的不同基于(1.8),(1.9)两式. 另若 $\|f\|_{L^{p,q}}=0$, 则 $f^*(t)$ 必 μ 几乎处处为零, 因而 $f=0$ 是 μ 几乎处处成立的. 这说明 $L^{p,q}(X,\mu)$ 对全体 $0<p,q\le\infty$ 均构成拟赋范线性空间 ($p=\infty$ 或 $q=\infty$ 的情况显见), 下面研究该空间的完备性.

定理 3.13 (Lorentz 空间的完备性)

若 (X,μ) 是测度空间, 则对任意 $0<p,q\le\infty$ 而言, $L^{p,q}(X,\mu)$ 均关于其对应的拟范数 $\|\circledast\|_{L^{p,q}}$ 完备, 因而其为拟 Banach 空间.

证明 若 $p=\infty$, 则 $L^{p,q}(X,\mu)=\{0\}$ 或 $L^\infty(X,\mu)$, 此时结论显然成立, 下设 $p<\infty$, 首先证明一个引理:

引理 3.4 (依 $L^{p,q}$ 收敛与依测度收敛的关系)

设 $0<p,q\le\infty$, $f,f_k\in L^{p,q}(X,\mu)(k=1,2,\cdots)$, 若 $f_k\to f(L^{p,q})$, 则 f_k 依测度收敛到 f.

当 $q=\infty$ 时, 这正是命题3.11(ii). 下设 $q<\infty$, 由递降重排的性质3.13(xvi) 与(3.37)式知

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)=\sup_{\alpha>0}\alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\le\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{p,q}},\quad \forall f\in L^{p,q}(X,\mu)$$

这说明 $f_k\to f(L^{p,q})\Rightarrow f_k\to f(L^{p,\infty})$, 因而 f_k 依测度收敛到 f.

回到原命题, 设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $L^{p,q}(X,\mu)$ 中的基本列, 则 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 同样是依测度基本列, 因而根据 Riesz 引理知存在子列 $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 在 μ 几乎处处的意义下收敛到某个 f. 现固定 j_0, 根据递降重排的性质3.13(ix), 因为 $|f-f_{k_{j_0}}|=\varliminf_{j\to\infty}|f_{k_j}-f_{k_{j_0}}|$, 故

$$(f-f_{k_{j_0}})^*(t)\le\varliminf_{j\to\infty}(f_{k_j}-f_{k_{j_0}})^*(t).\tag{3.39}$$

于是

$$t^{\frac{q}{p}}((f-f_{k_{j_0}})^*(t))^q\le t^{\frac{q}{p}}(\varliminf_{j\to\infty}(f_{k_j}-f_{k_{j_0}})^*(t))^q$$

因而

$$\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f-f_{k_{j_0}})^*(t))^q\frac{dt}{t}\le\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}\varliminf_{j\to\infty}(f_{k_j}-f_{k_{j_0}})^*(t))^q\frac{dt}{t}$$

由 Fatou 引理知

$$\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}\varliminf_{j\to\infty}(f_{k_j}-f_{k_{j_0}})^*(t))^q\frac{dt}{t}\le\varliminf_{j\to\infty}\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f_{k_j}-f_{k_{j_0}})^*(t))^q\frac{dt}{t}$$

于是

$$\|f-f_{k_{j_0}}\|_{L^{p,q}}^q\le\varliminf_{j\to\infty}\|f_{k_j}-f_{k_{j_0}}\|_{L^{p,q}}^q\tag{3.40}$$

现在在(3.40)式中令 $j_0\to\infty$, 因为 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 本身是基本列, 故 $\varliminf_{j\to\infty}\|f_{k_j}-f_{k_{j_0}}\|_{L^{p,q}}^q\to 0$, 这说明 f_{k_j} 依 $L^{p,q}$ 收敛到 $f\in L^{p,q}$. 又因为

$$\|f-f_k\|_{L^{p,q}}\lesssim\|f-f_{k_j}\|_{L^{p,q}}+\|f_{k_j}-f_k\|_{L^{p,q}}$$

在上式两端令 $k\to\infty, j\to\infty$ 即知 f_k 依 $L^{p,q}$ 收敛到 f, 命题得证. □

注 [CY] 中提到了下述 Aoki-Rolewicz 定理:

定理 3.14 (Aoki-Rolewicz)

若 X 是拟 Banach 空间, 则存在 $0<p<1$ 与 X 上的某等价范数 $\blacksquare\circledast\blacksquare$ 使得对任意 $x,y\in X$ 均有

$$\blacksquare x+y\blacksquare^p\le\blacksquare x\blacksquare^p+\blacksquare y\blacksquare^p.$$

依照该定理可说明 $p,q\ge 1$ 时 $L^{p,q}$ 是可赋范的, 进而此时 $L^{p,q}$ 就是 Banach 空间.

在实变函数中已经知道对任意测度空间 (X,μ) 与 $0<p<\infty$ 而言, 简单函数空间均在 $L^p(X,\mu)$ 中稠密, 一个自然的问题是 Lorentz 空间是否也有这样的性质. 下面的结果表明 $q\ne\infty$ 时该命题依旧成立:

定理 3.15

若 $0<q<\infty$, 则 (X,μ) 上的简单函数构成的空间在 $L^{p,q}(X,\mu)$ 中稠密.

证明 $p=\infty$ 时 $L^{p,q}(X,\mu)=\{0\}$, 结论显见, 下设 $p<\infty$. 取 $f\in L^{p,q}(X,\mu)$, 不失一般性可设 $f\ge 0$. 因为 $f\in L^{p,q}(X,\mu)\subset L^{p,\infty}(X,\mu)$, 故

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}=\sup_{\varepsilon>0}\varepsilon d_f(\varepsilon)^{\frac{1}{p}}\lesssim\|f\|_{L^{p,q}}<\infty$$

于是对任意 $\varepsilon > 0$ 均有

$$\varepsilon\mu(\{x \in X : f(x) > \varepsilon\})^{\frac{1}{p}} \lesssim \|f\|_{L^{p,q}} < \infty$$

考虑 $\varepsilon \to 0$ 即知对任意 $A > 0$, $\mu(\{x \in X : f(x) > A\})$ 均有限, 且 $\lim\limits_{A\to\infty} \mu(\{x \in X : f(x) > A\}) = 0$, 根据极限的定义知对 $n = 1, 2, \cdots$ 对应存在 $A_n > 0$ 使得 $\mu(\{x \in X : f(x) > A_n\}) < \frac{1}{2^n}$.

现对固定的 n 定义函数

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{1+2^n A_n} \frac{k}{2^n} \chi_{\{\frac{k}{2^n} < f \le \frac{k+1}{2^n}\}}(x) \chi_{\{\frac{1}{2^n} < f \le A_n\}}(x).$$

知 $\operatorname{supp} \varphi_n \subset \{x \in X : \frac{1}{2^n} < f(x) \le A_n\}$, 而 $\mu(\{x \in X : f(x) > \frac{1}{2^n}\}) < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in X : \frac{1}{2^n} < f(x) \le A_n\}) < \infty$, 于是 φ_n 必是有限简单函数, 且对任意 $x \in \{x \in X : \frac{1}{2^n} < f(x) \le A_n\}$ 均有

$$f(x) - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(x) \le f(x)$$

于是

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - \varphi_n(x)| > \frac{1}{2^n}\}) < \frac{1}{2^n}$$

根据递降重排的性质3.13(iii) 知 $t \ge \frac{1}{2^n}$ 时 $(f - \varphi_n)^*(t) \le \frac{1}{2^n}$, 因而

$$(f - \varphi_n)^*(t) \to 0 (n \to \infty)$$

且对任意 $t > 0$ 均有 $\varphi_n^*(t) \le f^*(t)$. 根据递降重排的性质3.13(iv) 知 $f - \varphi_n \le f \Rightarrow (f - \varphi_n)^*(t) \le f^*(t)$, 于是由 Lebesgue 控制收敛定理知 $\|\varphi_n - f\|_{L^{p,q}} \to 0$, 命题即证. □

注 上面讨论的都是 $q < \infty$ 的情况, 对于 $L^{p,\infty}$ 而言, 这个结论对任意 $0 < p \le \infty$ 都是不成立的. 但可以证明有限测度集示性函数的可数线性组合构成的函数空间在 $L^{p,\infty}(X, \mu)$, 该空间称为可数简单函数空间.

3.8.2.3 Lorentz 空间的共轭空间

对于拟 Banach 空间 $(Z, \| \circledast \|_Z)$, 其共轭空间 Z^* 定义为 Z 上全体连续线性泛函 T 构成的空间, 其上赋范

$$\|T\|_{Z^*} = \sup_{\|x\|_Z = 1} |T(x)|.$$

泛函分析中有下述结论:

定理 3.16

若 X 是赋范线性空间, Y 是 Banach 空间, $\mathbb{K}$ 是背景数域, $L(X, Y)$ 表示由 X 到 Y 的连续线性算子的全体构成的空间, 在其上规定线性运算:

$$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x) = \alpha_1 T_1(x) + \alpha_2 T_2(x), \quad \forall x \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, T_1, T_2 \in L(X, Y).$$

另规定

$$\|T\|_{X\to Y} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

则 $(L(X, Y), \| \circledast \|_{X\to Y})$ 是 Banach 空间.

♡

类似于该定理的证明, 可以说明当 X 是拟赋范线性空间时上述结论依旧成立. 特别地, 拟 Banach 空间的共轭空间依旧是 Banach 空间.

针对 Lorentz 空间, 我们希望知道 $L^{p,q}$ 的共轭空间 $(L^{p,q})^*$ 是怎样的? 对建立在一般测度空间上的 Lorentz 空间而言, 要得到这个问题的答案需要克服诸多技术上的困难, 因此我们把讨论的测度空间限制在 σ 有限非原子测度空间上, 这会使得后面的证明更为简单.

定义 3.16 (原子, 非原子测度空间)

测度空间 (X,μ) 中的一个可测子集 A 称为一个原子, 若 $\mu(A)>0$, 且对任意可测集 $B\subset A$ 而言, 要么 $\mu(B)=0$, 要么 $\mu(B)=\mu(A)$. 测度空间 (X,μ) 称为非原子的, 如果其不包含原子. 也就是说, X 非原子当且仅当对任意 $A\subset X$, 只要 $\mu(A)>0$, 就总能找到 $B\subsetneq A$ 使得 $\mu(B)>0$ 且 $\mu(A\backslash B)>0$.

赋 Lebesgue 测度的 $\mathbb{R}$ 就是非原子测度空间, 而任何赋计数测度的测度空间都是原子测度空间. 利用 Zorn 引理可以证明非原子空间的下述性质:

命题 3.16

若 (X,μ) 是非原子测度空间, $A\subset X$ 可测, 且 $\mu(A)>0$, 则任取 $0<\alpha<\mu(A)$, 总能找到可测集 $B\subset A$ 使得 $\mu(B)=\alpha$.

下面讨论 $L^{p,q}$ 的共轭空间, 为了后面叙述方便, 首先介绍几个引理:

引理 3.5 (Hardy-Littlewood 不等式)

若 f,g 是 σ 有限测度空间 (X,μ) 上的可测函数, 则

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x)\le\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt.$$

证明 为此先说明对测度空间 (X,μ) 上的非负可积函数 g 与可测子集 A 而言, 总有

$$\int_A g(x)d\mu(x)\le\int_0^{\mu(A)} g^*(t)dt. \tag{3.41}$$

这是因为先设 $g(x)=\sum_{j=1}^N a_j\chi_{E_j}(x)$ 是非负有限简单函数, 其中 $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是不交列, $a_1>\cdots>a_N>0$. 知一方面

$$\int_A g(x)d\mu(x)=\sum_{j=1}^N a_j\mu(A\cap E_j)$$

另一方面

$$g^*(t)=\sum_{j=1}^N a_j\chi_{[B_{j-1},B_j)}(t)$$

其中 $B_j=\sum_{i=1}^j\mu(E_i)$, $B_0=0$. 现若 $\mu(A)\ge B_N$, 则

$$\int_0^{\mu(A)} g^*(t)dt=\sum_{j=1}^N a_j\mu(E_j)\ge\sum_{j=1}^N a_j\mu(A\cap E_j)=\int_A g(x)d\mu(x)$$

而若 $\mu(A)<B_N$, 设 $\mu(A)\in[B_{k-1},B_k)$, 这意味着 $\mu(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i)\le\mu(A)<\mu(\bigcup_{i=1}^k E_i)$, 现有

$$\int_0^{\mu(A)} g^*(t)=\sum_{j=1}^{k-1}a_j\mu(E_j)+a_k(\mu(A)-B_{k-1})$$

根据可测集的性质知

$$\sum_{j=1}^{k-1}a_j\mu(E_j)=\sum_{j=1}^{k-1}a_j(\mu(A\cap E_j)+\mu(E_j\backslash A))$$

于是欲证可转化为

$$\sum_{j=1}^{k-1}a_j\mu(E_j\backslash A)+a_k\left(\mu(A)-\sum_{j=1}^{k-1}\mu(E_j)\right)\ge\sum_{j=k}^N a_j\mu(A\cap E_j)$$

因为

$$\sum_{j=1}^{k-1} a_j\mu(E_j\backslash A)+a_k\left(\mu(A)-\sum_{j=1}^{k-1}\mu(E_j)\right)\geq a_k\left(\sum_{j=1}^{k-1}\mu(E_j\backslash A)+\mu(A)-\sum_{j=1}^{k-1}\mu(E_j)\right)$$

$$\sum_{j=k}^{N} a_j\mu(A\cap E_j)\leq a_k\sum_{j=k}^{N}\mu(A\cap E_j)$$

故只需证

$$\sum_{j=1}^{k-1}\mu(E_j\backslash A)+\mu(A)-\sum_{j=1}^{k-1}\mu(E_j)\geq\sum_{j=k}^{N}\mu(A\cap E_j)$$

根据 $\{E_j\}_{j=1}^N$ 的不交性知 $\sum_{j=1}^{k-1}\mu(E_j\backslash A)+\mu(A)=\mu(A\cup(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i))$, 于是

$$\sum_{j=1}^{k-1}\mu(E_j\backslash A)+\mu(A)-\sum_{j=1}^{k-1}\mu(E_j)=\mu((A\cup(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i))\backslash(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i))$$

同样因为 $\{E_j\}_{j=1}^N$ 互不相交, 知

$$(A\cup(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i))\backslash(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i)\supset\bigcup_{j=k}^{N}(A\cap E_j)$$

于是

$$\mu((A\cup(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i))\backslash(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i))\geq\sum_{j=k}^{N}\mu(A\cap E_j)$$

g 为有限简单函数的情况至此即证, 又因为非负可积函数可由有限简单函数单调逼近, 故由单调收敛定理即得(3.41)式, 命题得证. □

引理 3.6 (非原子测度空间的性质)

设 (X,μ) 是非原子测度空间.

(i) 若 $A_0\subset A_1\subset X, 0<\mu(A_1)<\infty, \mu(A_0)\leq t\leq\mu(A_1)$, 则存在 $E_t\subset A_1$ 使得 $\mu(E_t)=t$.

(ii) 若 φ 是 $[0,\infty)$ 上的非负连续递减函数, 且 $t\geq\mu(X)$ 时 $\varphi(t)=0$, 则存在 X 上的可测函数 f 使得 $t>0$ 时 $f^*(t)=\varphi(t)$.

(iii) 对 $A\subset X$ 与 X 上的可积函数 g, 若 $0<\mu(A)<\infty$, 则存在 $\widetilde{A}\subset X$ 使得 $\mu(\widetilde{A})=\mu(A)$, 且

$$\int_{\widetilde{A}}|g(x)|d\mu(x)=\int_0^{\mu(A)}g^*(s)ds.$$

(iv) 若 X 是 σ 有限的, $f\in L^\infty(X,\mu), g\in L^1(X,\mu)$, 则

$$\sup_{h:d_h=d_f}\left|\int_X h(x)g(x)d\mu(x)\right|=\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds,$$

其中上确界在全体与 f 分布函数相等的函数 h 中取.

♡

证明 (i) 首先设 $A_0=\varnothing$. 因为 X 是非原子的, 故下面可分两种情况进行讨论:

若对任意 $A\subset X$, 总存在[8]$B\subset A_1$ 使得 $\frac{1}{10}\mu(A)\leq\mu(B)\leq\frac{9}{10}\mu(A)$, 则 $0\leq t\leq\mu(A_1)$ 总共只能有下述两种情况:

- $t=0$ 或 $t=\mu(A_1)$, 此时命题显然成立.
- $0<t<\mu(A_1)$. 此时对 A_1 应用假设条件得到 $B_1\subset A_1$ 满足 $\frac{1}{10}\mu(A_1)\leq\mu(B_1)\leq\frac{9}{10}\mu(A_1)$. 若 $t=\mu(B_1)$, 结论已经证毕. 若 $t>\mu(B_1)$, 则对 $A_1\backslash B_1$ 再应用假设条件, 得到 $B_2^+\subset A_1\backslash B_1$ 满足 $\frac{1}{10}\mu(A_1\backslash B_1)\leq\mu(B_2^+)\leq\frac{9}{10}\mu(A_1\backslash B_1)$; 若 $t<\mu(B_1)$, 则对 B_1 再应用假设条件, 得到 $B_2^-\subset B_1$ 满足 $\frac{1}{10}\mu(B_1)\leq\mu(B_2^-)\leq\frac{9}{10}\mu(B_1)$. 在第一种情况下, 将 t 与 $\mu(B_1)+\mu(B_2^+)$ 再进行比较, 回到讨论伊始; 在第二种情况下, 将 t 与 $\mu(B_2^-)$ 再进行比较, 回到讨论伊始. 根据闭区间套原理, 该迭代程序必定会生成一个趋向于 t 的由不交集合的测度构成的序列, 取

[8] [LG1] 对应部分 (pg.75 Ex.1.4.5 Hint) 中原意为 $B\subset X$, 但结合其后文的相反情况与实际证明, 这里可能需要 $B\subset A_1$, 勘误网上并未提及这一点.

该测度列对应的集列的极限即得欲求.

若存在 $A_1 \subset X$ 使得对任意 $B \subset A_1$ 而言, 要么 $\mu(B) < \frac{1}{10}\mu(A_1)$, 要么 $\mu(B) > \frac{9}{10}\mu(A_1)$, 不失一般性可将 μ 规范化, 令 $\mu(A_1) = 1$, 下面证明这种情况实际上是不存在的. 设 $\mu_1 = \sup\{\mu(C) : C \subset A_1, \mu(C) < \frac{1}{10}\}$, 根据上确界的定义知存在 $B_1 \subset A_1$ 使得 $\frac{1}{2}\mu_1 \le \mu(B) \le \mu_1$. 再设 $A_2 = A_1 \backslash B_1$, 取 $\mu_2 = \sup\{\mu(C) : C \subset A_2, \mu(C) < \frac{1}{10}\}$, 类似设置 B_2 等. 依此可定义集列 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ 与实数 $\frac{1}{10} \ge \mu_1 \ge \mu_2 \ge \mu_3 \ge \cdots$. 取 $C \subset A_{n+1}$ 满足 $\mu(C) < \frac{1}{10}$, 则根据 A_{n+1} 的定义知 $C \cup B_n \subset A_n$, 且 $\mu(C \cup B_n) < \mu(C) + \mu(B_n) = \frac{1}{5} < \frac{9}{10}$. 但因为 A_1 的全体子集 B 要么满足 $\mu(B) < \frac{1}{10}\mu(A_1) = \frac{1}{10}$, 要么满足 $\mu(B) > \frac{9}{10}\mu(A_1) = \frac{9}{10}$, 故 $C \cup B_n$ 作为 A_1 的子集, 只能有 $\mu(C \cup B_n) < \frac{1}{10}$, 这说明 $C \cup B_n$ 能被囊入 μ_n 的计算中, 于是

$$\mu_n \ge \mu(C \cup B_n) \overset{(A)}{=} \mu(C) + \mu(B_n) \ge \mu(C) + \frac{1}{2}\mu_n$$

其中 (A) 是因为 C 与 B_n 本身不交. 这说明 $\mu_{n+1} \le \frac{1}{2}\mu_n$, 因而 $\mu(A_n) \ge \frac{4}{5}$ 对全体 $n = 1, 2, \cdots$ 均成立. 现考虑 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 由单调收敛定理知 $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \ge \frac{4}{5} > 0$, 进而由假设条件可推知它是一个原子, 这与 X 的非原子性相矛盾! 命题即证.

(ii) 首先设 φ 是在 $[0, \infty)$ 上右连续递减的简单函数, 且满足命题要求的其余条件. 设 $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{[b_{k-1}, b_k)}(x)$, 其中 $a_1 > a_2 > \cdots > a_K, \mu(X) \ge b_K > b_{K-1} > \cdots > b_0 = 0$. 取两两不交的集列 $\{E_k\}_{k=1}^{K}$ 满足 $\mu(E_k) = b_k - b_{k-1}$, 设 $f(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{E_k}(x)$, 则 f 即为欲求.

现对于一般的非负连续递减函数 φ, 根据实变函数的结论知总能找到非负简单函数列 φ_n 在几乎处处的意义下收敛到 φ. 对每个 φ_n 按照上述方法取 f_n, 且通过适当调整 $\{E_k\}_{k=1}^{K}$ 使得 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有 μ 几乎处处意义下的极限, 记该极限为 f, 知 f 即为欲求.

(iii) 设 $t = \mu(A), A_1 = \{x \in X : |g(x)| > g^*(t)\}, A_2 = \{x \in X : |g(x)| \ge g^*(t)\}$, 显见 $A_1 \subset A_2$. 另一方面根据递降重排的性质3.13(ii),(xi) 知 $\mu(A_1) \le t \le \mu(A_2)$, 进而由 (i) 知可选取 $\widetilde{A}$ 使得 $A_1 \subset \widetilde{A} \subset A_2$ 且 $\mu(\widetilde{A}) = t = \mu(A)$, 于是

$$\int_{\widetilde{A}} g(x) d\mu(x) = \int_X g(x)\chi_{\widetilde{A}}(x) d\mu(x) \overset{(B)}{=} \int_0^{\infty} (g\chi_{\widetilde{A}})^*(s) ds \overset{(C)}{=} \int_0^{\mu(\widetilde{A})} g^*(s) ds.$$

其中 (B) 基于递降重排的性质3.13(xiv), (C) 是因为 $\operatorname{supp}(g\chi_{\widetilde{A}}) \subset \widetilde{A}$, 故 $s > \mu(\widetilde{A})$ 时必有 $(g\chi_{\widetilde{A}})^*(s) = 0$.

(iv) 不失一般性, 设 $f, g \ge 0$. 先设 f 是有限简单函数, 记 $f(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}(x)$, 其中 $a_1 > a_2 > \cdots > a_N > 0, A_j$ 两两不交. 将 f 另写为 $\sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{B_j}$, 其中 $b_j = a_j - a_{j+1}, B_j = \bigcup_{k=1}^{j} A_k$. 显见 $\{B_j\}_{j=1}^{N}$ 是递增列, 对每个 B_j 仿照 (iii) 的证明过程对应选取 $\widetilde{B}_j$, 则 $\widetilde{B}_1 \subset \cdots \subset \widetilde{B}_N$, 且函数 $f_1 = \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{\widetilde{B}_j}$ 的分布函数与 f 相等, 进而 $f_1^* = f^*$. 现由 (iii) 知

$$\begin{aligned}
\int_X f_1(x) g(x) d\mu(x) &= \sum_{j=1}^{N} b_j \int_X g(x)\chi_{\widetilde{B}_j}(x) d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{N} b_j \int_0^{\mu(\widetilde{B}_j)} g^*(s) ds \\
&= \int_0^{\infty} g^*(s) \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{[0, \mu(\widetilde{B}_j))}(s) ds \\
&= \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s) ds
\end{aligned}$$

对一般情况, 因为 $f \in L^{\infty}(X, \mu)$ 总能被有限简单函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 递增逼近, 依照单调收敛定理即得命题. □

引理 3.7 (Hardy 不等式)

若 $0 < b < \infty, 1 \le p < \infty$, 则

$$\left(\int_0^{\infty} \left(\int_0^x |f(t)| dt\right)^p x^{-b-1} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{b} \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p t^{p-b-1} dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} |f(t)| dt\right)^p x^{b-1} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{b} \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p t^{p+b-1} dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

♡

证明 对第一式, 在乘法群 $(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t})$ 上设 $g(x)=|f(x)|x^{1-\frac{b}{p}}, h(x)=x^{-\frac{b}{p}}\chi_{[1,\infty)}(x)$, 知:

$$\begin{aligned}(g*h)(x)&=\int_0^\infty t^{-\frac{b}{p}}\chi_{[1,\infty)}(t)\left|f\left(\frac{x}{t}\right)\right|\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\frac{b}{p}}\frac{dt}{t}\\&=x^{1-\frac{b}{p}}\int_1^\infty t^{-2}\left|f\left(\frac{x}{t}\right)\right|dt=x^{-\frac{b}{p}}\int_0^x|f(t)|dt\end{aligned}$$

另有

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}&=\left(\int_0^\infty(|f(x)|x^{1-\frac{b}{p}})^p\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_0^\infty|f(x)|^px^{p-b-1}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}&=\int_0^\infty x^{-\frac{b}{p}}\chi_{[1,\infty)}(x)\frac{dx}{x}=\frac{p}{b}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x|f(t)|dt\right)^px^{-b-1}dx\right)^{\frac{1}{p}}&=\left(\int_0^\infty\left(x^{-\frac{b}{p}}\int_0^x|f(t)|dt\right)^p\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|g*h\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}\\&\overset{(A)}{\leq}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}\\&=\frac{p}{b}\left(\int_0^\infty|f(x)|^px^{p-b-1}dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

对第二式, 在乘法群 $(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t})$ 上设 $g(x)=|f(x)|x^{1+\frac{b}{p}}, h(x)=x^{\frac{b}{p}}\chi_{(0,1]}(x)$, 知:

$$\begin{aligned}(g*h)(x)&=\int_0^\infty t^{\frac{b}{p}}\chi_{(0,1]}(t)\left|f\left(\frac{x}{t}\right)\right|\left(\frac{x}{t}\right)^{1+\frac{b}{p}}\frac{dt}{t}\\&=x^{1+\frac{b}{p}}\int_0^1 t^{-2}\left|f\left(\frac{x}{t}\right)\right|dt=x^{\frac{b}{p}}\int_x^\infty|f(t)|dt\end{aligned}$$

另有

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}&=\left(\int_0^\infty(|f(x)|x^{1+\frac{b}{p}})^p\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_0^\infty|f(x)|^px^{p+b-1}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}&=\int_0^1 x^{\frac{b}{p}}\chi_{(0,1]}(x)\frac{dx}{x}=\frac{p}{b}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty\left(\int_x^\infty|f(t)|dt\right)^px^{b-1}dx\right)^{\frac{1}{p}}&=\left(\int_0^\infty\left(\int_x^\infty x^{\frac{b}{p}}|f(t)|dt\right)^p\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|g*h\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}\\&\overset{(B)}{\leq}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})}\\&=\frac{p}{b}\left(\int_0^\infty|f(t)|^pt^{p+b-1}dt\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

其中 (A),(B) 均为局部紧群上关于卷积的 Minkowski 不等式1.10. □

定理 3.17 ($L^{p,q}$ 的共轭空间)

若 (X,μ) 是非原子 σ 有限测度空间, 则

(i) 当 $0<p<1, 0<q\leq\infty$ 时 $(L^{p,q}(X,\mu))^*=\{0\}$;

(ii) 当 $p=1, 0<q\leq 1$ 时 $(L^{p,q}(X,\mu))^*=L^\infty(X,\mu)$;

(iii) 当 $p=1, 1<q<\infty$ 时 $(L^{p,q}(X,\mu))^*=\{0\}$;

(iv) 当 $p=1, q=\infty$ 时 $(L^{p,q}(X,\mu))^*\neq\{0\}$;

(v) 当 $1<p<\infty, 0<q\leq 1$ 时 $(L^{p,q}(X,\mu))^*=L^{p',\infty}(X,\mu)$;

(vi) 当 $1<p<\infty, 1<q<\infty$ 时 $(L^{p,q}(X,\mu))^*=L^{p',q'}(X,\mu)$;

(vii) 当 $1<p<\infty, q=\infty$ 时 $(L^{p,q}(X,\mu))^*\neq\{0\}$;

(viii) 当 $p=q=\infty$ 时 $(L^{p,q}(X,\mu))^*\neq\{0\}$.

证明 为了方便研究 $(L^{p,q}(X,\mu))^*$ 的形式, 首先考虑刻画 $(L^{p,q}(X,\mu))^*$ 中的元素. 因为 X 是 σ 有限的, 故可记 $X=\bigcup_{N=1}^\infty K_N$, 其中 $\{K_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 是递增集列, 且对任意 $N\in\mathbb{N}$ 均有 $\mu(K_N)<\infty$. 设 $\mathscr{A}$ 是定义 μ 的 σ 代数, 记 $\mathscr{A}_N=\{A\cap K_N : A\in\mathscr{A}\}$. 取定 $T\in(L^{p,q}(X,\mu))^*(0<p,q<\infty)$, 对每个 $N=1,2,\cdots$ 考虑 $\mathscr{A}_N$ 上定义的测度 $\sigma_N(E)=T(\chi_E)$, 知

$$|\sigma_N(E)|=|T(\chi_E)|\leq\|T\|_{(L^{p,q})^*}\|\chi_E\|_{L^{p,q}}\lesssim\|T\|_{(L^{p,q})^*}\mu(E)^{\frac{1}{p}}$$

这说明 σ_N 关于 μ 在 $\mathscr{A}_N$ 上的限制绝对连续, 因而根据 Radon-Nikodym 定理知存在唯一[9]复值可测函数 g_N 满足 $\int_{K_N}|g_N(x)|d\mu<\infty$, 且

$$\int_{K_N}f(x)d\sigma_N=\int_{K_N}g_N(x)f(x)d\mu,\quad\forall f\in L^1(K_N,\mathcal{A}_N,\sigma_N). \tag{3.42}$$

因为 $\{K_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 是递增列, 故 $\mathscr{A}_N\subset\mathscr{A}_{N+1}$, 因而在 $\mathscr{A}_N$ 上 $\sigma_N=\sigma_{N+1}$, 于是在 K_N 上 $g_N=g_{N+1}$ 是 μ 几乎处处成立的, 这说明在 X 上存在一个良定义的可测函数 g 使得其在诸 K_N 上的限制恰为 g_N. 但另一方面, 线性泛函 $f\mapsto T(f)$ 与 $f\mapsto\int_{K_N}fd\sigma_N$ 在 f 为支在 K_N 上的简单函数时是相等的, 进而根据简单函数空间在 $L^1(K_N,\mathscr{A}_N,\sigma_N)\cap L^{p,q}(X,\mu)$ 中的稠密性知它们在 $L^1(K_N,\mathscr{A}_N,\sigma_N)\cap L^{p,q}(X,\mu)$ 中也应相等, 故(3.42)式在 $f\in L^1(K_N,\mathscr{A}_N,\sigma_N)\cap L^{p,q}(X,\mu)$ 时也应等于 $T(f)$.

根据 $\mu(K_N)<\infty$ 知若 $f\in L^\infty(K_N,\mu)$, 则 $f\in L^{p,q}(K_N,\mu)\cap L^\infty(K_N,\sigma_N)$, 而 $L^\infty(K_N,\sigma_N)\subset L^1(K_N,\mathscr{A}_N,\sigma_N)$, 故由(3.42)式与前述讨论知

$$T(f)=\int_X g(x)f(x)d\mu,\quad\forall f\in L^\infty(K_N). \tag{3.43}$$

至此即知对 $L^{p,q}(X,\mu)(0<p,q<\infty)$ 上的任意线性泛函 T, 总存在函数 g 使得对任意 $N=1,2,\cdots$ 均有 $\int_{K_N}|g(x)|d\mu<\infty$, 且(3.43)式对任意 $f\in L^\infty(K_N)$ 成立. 下面分别验证 (i)-(viii).

(i) 当 $0<p<1$ 时, 往证 $(L^{p,q}(X,\mu))^*=\{0\}$. 设 $f=\sum_n a_n\chi_{E_n}$ 是 X 上的有限简单函数 (在 $q=\infty$ 时设之为可数简单函数). 因为 X 是非原子的, 故可将每个 E_n 拆分为集列 $\{E_{j,n}\}_{j=1}^m$ 的不交并, 且 $\mu(E_{j,n})=\frac{1}{m}\mu(E_n)(j=1,\cdots,m)$. 记 $f_j=\sum_n a_n\chi_{E_{j,n}}$, 计算可知 $\|f_j\|_{L^{p,q}}=m^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p,q}}$. 现若 $T\in(L^{p,q}(X,\mu))^*$, 则

$$|T(f)|\leq\sum_{j=1}^m|T(f_j)|\leq\|T\|_{(L^{p,q})^*}\sum_{j=1}^m\|f_j\|_{L^{p,q}}=\|T\|_{(L^{p,q})^*}m^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p,q}}.$$

令 $m\to\infty$, 注意到 $p<1$, 知 $|T(f)|\leq 0$, 于是只能有 $T=0$. 根据简单函数空间 (或可数函数空间) 在 $L^{p,q}(X,\mu)$(或 $L^{p,\infty}(X,\mu)$) 中的稠密性即知 T 总将 f 映为 0, 此即 $(L^{p,q}(X,\mu))^*=\{0\}$.

(ii) 当 $p=1, 0<q\leq 1$ 时, 往证 $(L^{p,q}(X,\mu))^*=L^\infty(X,\mu)$. 任取 $h\in L^\infty(X,\mu)$, 知对任意 $f\in L^{1,q}(X,\mu)$ 均有

$$\left|\int_X f(x)h(x)d\mu\right|\leq\|h\|_{L^\infty(X,\mu)}\|f\|_{L^1(X,\mu)}\lesssim\|h\|_{L^\infty(X,\mu)}\|f\|_{L^{1,q}}$$

于是 h 确实对应 $L^{1,q}(X,\mu)$ 上的一个线性泛函. 反之, 若 $T\in(L^{1,q}(X,\mu))^*(q\leq 1)$, 则在(3.43)式中令 $f=\chi_E, K\subset K_N$ 知应有

$$\left|\int_E g(x)d\mu\right|=|T(\chi_E)|\leq\|T\|_{(L^{1,q})^*}\|\chi_E\|_{L^{1,q}}\|T\|_{(L^{1,q})^*}q^{-\frac{1}{q}}\mu(E)$$

根据 E 的任意性知只能有 $|g(x)|\leq q^{-\frac{1}{q}}\|T\|_{(L^{1,q})^*}$ 在每个 K_N 上 μ 几乎处处成立, 于是 $\|g\|_{L^\infty}\leq q^{-\frac{1}{q}}\|T\|_{(L^{1,q})^*}<\infty$,

[9] 在相差一个 μ 零测集的意义下.

因而 $g \in L^\infty(X,\mu)$. 综上即得 $(L^{1,q}(X,\mu))^* = L^\infty(X,\mu)$.

(iii) 当 $p=1, 1<q<\infty$ 时, 往证 $(L^{p,q}(X,\mu))^* = \{0\}$. 设 $T \in (L^{1,q}(X,\mu))^*$, 根据(3.43)式知

$$|T(f)| = \left|\int_X f(x)g(x)d\mu\right| \le \|T\|_{(L^{1,q})^*}\|f\|_{L^{1,q}}, \quad \forall f \in L^\infty(K_N). \tag{3.44}$$

往证 $g=0$ 是 μ 几乎处处成立的. 用反证法, 设存在 E_0 使得 $\mu(E_0)>0$, 且在 E_0 上 $|g(x)| \ge \delta$, 则根据 X 的非原子性知存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\mu(E_0 \cap K_N) > 0$. 取 $f(x) = \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|^2}\chi_{E_0\cap K_N}(x)h(x)\chi_{h\le M}(x)$, 其中 h 是一个非负函数, 则(3.44)式表明对任意 $h \ge 0$ 均有

$$\|h\chi_{h\le M}\|_{L^1(E_0\cap K_N)} \le \|T\|_{(L^{1,q})^*}\left\|\frac{1}{|g|}h\chi_{h\le M}\right\|_{L^{1,q}(E_0\cap K_N)} \le \frac{1}{\delta}\|T\|_{(L^{1,q})^*}\|h\chi_{h\le M}\|_{L^{1,q}(E_0\cap K_N)}.$$

现令 $M \to \infty$ 知对任意 $h \ge 0$ 均有 $\|h\|_{L^1(E_0\cap K_N)} \lesssim \|h\|_{L^{1,q}(E_0\cap K_N)}$, 于是 $L^{1,q}(E_0\cap K_N) \subset L^1(E_0 \cap K_N)$. 又因为本身有 $L^1(E_0\cap K_N) \subset L^{1,q}(E_0\cap K_N)$, 故只能有 $L^1(E_0\cap K_N) = L^{1,q}(E_0\cap K_N)$, 但可以证明这在 X 是非原子空间时是不成立的[10], 故只能有 $g=0$ 在 μ 几乎处处的意义下成立, 因而 $T=0$, 此即欲证.

(iv) $p=1, q=\infty$ 的情况是很特殊的. 根据 $L^{p,q}$ 关于 q 的递增性3.15知 $L^{1,\infty}$ 上的每个连续线性泛函在 $L^{1,q}(1<q<\infty)$ 上的限制均为连续线性泛函, 而根据 (iii) 知 $(L^{1,q}(X,\mu))^* = \{0\}(1<q<\infty)$, 故至少在输入简单函数时, 该线性泛函只能输出 0. 然而, $(L^{1,\infty}(X,\mu))^*$ 确实包含非平凡线性泛函, 参见 **[LG1]** 在此处给出的文献.

(v) 当 $1<p<\infty, 0<q\le 1$, 往证 $(L^{p,q}(X,\mu))^* = L^{p',\infty}(X,\mu)$. 根据 Hardy-Littlewood 不等式3.5知

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \le \int_0^{\mu(X)} (|fg|)^*(t)dt \overset{(A)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\mu(X)}(|fg|)^*(u)du$$

其中 (A) 是令 $u=2t$. 根据递降重排的性质3.13(iv),(vii) 知

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2\mu(X)}(|fg|)^*(u)du &\le \frac{1}{2}\int_0^{2\mu(X)}|f|^*(\frac{u}{2})|g|^*(\frac{u}{2})du = \int_0^{\mu(X)}|f|^*(t)|g|^*(t)dt\\ &= \int_0^{\mu(X)} f^*(t)g^*(t)dt \le \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt\end{aligned}$$

至此引理即证.

回到原命题, 根据引理3.5与 $L^{p,q}$ 关于 q 的递增性3.15知在 $f \in L^{p,q}(X,\mu), h \in L^{p',\infty}(X,\mu)$ 时有:

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)h(x)|d\mu(x) &\le \int_0^\infty f^*(t)h^*(t)dt = \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}f^*(t)t^{\frac{1}{p'}}h^*(t)\frac{dt}{t}\\ &\le \|f\|_{L^{p,1}}\|h\|_{L^{p',\infty}} \le C_{p,q}\|f\|_{L^{p,q}}\|h\|_{L^{p',\infty}}\end{aligned}$$

因此每个 $h \in L^{p',\infty}(X,\mu)$ 都能诱导 $L^{p,q}(X,\mu)$ 上的一个有界线性泛函 $f \mapsto \int_X hfd\mu$, 且其算子范数至多为 $C_{p,q}\|h\|_{L^{p',\infty}}$. 相反地, 设 $T \in (L^{p,q}(X,\mu))^*(1<p<\infty, 0<q\le 1)$, 并设 g 对全体 $f \in L^\infty(K_N)$ 均满足(3.43)式. 取 $f(x) = \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|}\chi_{K_N\cap\{x\in X:|g(x)|>\alpha\}}(x)(\alpha>0)$, 根据 T 的有界性知

$$\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right| \le \|T\|_{(L^{p,q})^*}\|f\|_{L^{p,q}}$$

代入前述 f 知

$$\begin{aligned}\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right| &= \left|\int_{K_N\cap\{x\in X:|g(x)|>\alpha\}}\frac{|g(x)|^2}{|g(x)|}d\mu(x)\right|\\ &\ge \alpha\mu(K_N\cap\{x\in X:|g(x)|>\alpha\})\\ \|f\|_{L^{p,q}} = \||f|\|_{L^{p,q}} &= \|\chi_{K_N\cap\{x\in X:|g(x)|>\alpha\}}\|_{L^{p,q}}\\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\mu(K_N\cap\{x\in X:|g(x)|>\alpha\})^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

于是

$$\alpha\mu(K_N\cap\{x\in X:|g(x)|>\alpha\}) \le \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\|T\|_{(L^{p,q})^*}\mu(K_N\cap\{x\in X:|g(x)|>\alpha\})^{\frac{1}{p}}$$

[10] 有空则补充证明.

两边同乘 $\mu(K_N\cap\{x\in X:|g(x)|>\alpha\})^{-\frac{1}{p}}$, 令 $N\to\infty$ 并在两端对 $\alpha>0$ 取上确界即得 $\|g\|_{L^{p',\infty}}\le(\frac{p}{q})^{\frac{1}{q}}\|T\|_{(L^{p,q})^*}<\infty$, 这说明 $g\in L^{p',\infty}(X,\mu)$, 命题即证.

(vi) 若 $1<p<\infty, 1<q<\infty$, 往证 $(L^{p,q}(X,\mu))^*=L^{p',q'}(X,\mu)$. 根据 Hardy-Littlewood 不等式3.5与 Hölder 不等式知

$$\left|\int_X f(f)\varphi(x)d\mu(x)\right|\le\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}f^*(t)t^{\frac{1}{p'}}\varphi^*(t)\frac{dt}{t}\le\|f\|_{L^{p,q}}\|\varphi\|_{L^{p',q'}}$$

于是每个 $\varphi\in L^{p',q'}(X,\mu)$ 均能确定 $L^{p,q}(X,\mu)$ 上的一个有界线性泛函, 且其算子范数至多为 $\|\varphi\|_{L^{p',q'}}$. 相反地, 设 $T\in(L^{p,q}(X,\mu))^*$, 由(3.43)式知 T 由与某个局部可积函数 g 相乘再积分来确定, 故只需证明 $g\in L^{p',q'}(X,\mu)$. 设 $g_{N,M}(x)=g(x)\chi_{K_N}(x)\chi_{\{x\in X:|g(x)|\le M\}}(x)$, 则对任意 $M,N=1,2,\cdots$ 均有 $(g_{N,M})^*\le g^*$, 进而由递降重排的性质3.13(iv),(viii) 知 $M,N\to\infty$ 时 $(g_{N,M})^*\uparrow g^*$.

现任取 $f\in L^{p,q}(X,\mu)$ 是有界函数, 知

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^*(t)(g_{N,M})^*(t)dt &\overset{(B)}{=}\sup_{h:d_h=d_f}\left|\int_X h(x)g_{N,M}(x)d\mu(x)\right|\\ &=\sup_{h:d_h=d_f}\left|\int_{K_N}h(x)\chi_{\{x\in X:|g(x)|\le M\}}(x)g(x)d\mu(x)\right|\\ &=\sup_{h:d_h=d_f}|T(h\chi_{K_N}\chi_{\{x\in X:|g(x)|\le M\}})|\\ &\le\sup_{h:d_h=d_f}\|T\|_{(L^{p,q})^*}\|h\chi_{K_N}\chi_{\{x\in X:|g(x)|\le M\}}\|_{L^{p,q}}\\ &\le\sup_{h:d_h=d_f}\|T\|_{(L^{p,q})^*}\|h\|_{L^{p,q}}\\ &\overset{(C)}{=}\|T\|_{(L^{p,q})^*}\|f\|_{L^{p,q}}\end{aligned}\tag{3.45}$$

其中 (B) 基于非原子测度空间的性质3.6(iv), (C) 基于 $L^{p,q}$ 范数的等价计算式3.14. 为了说明 $\|g\|_{L^{p',q'}}<\infty$, 现需在(3.45)式中代入特定的 f 进行估计. 根据非原子测度空间的性质3.6(ii) 知可选取 X 上的函数 f 使得

$$f^*(t)=\int_{\frac{t}{2}}^\infty s^{\frac{q'}{p'}-1}(g_{N,M})^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\tag{3.46}$$

根据 $g_{N,M}$ 的构造可知 $(g_{N,M})^*(s)\le M\chi_{[0,\mu(K_N)]}(s)$, 于是(3.46)右式的积分至少是收敛的, 进而有 $f^*\le c_{p,q}M^{q'-1}$, 这说明 f 本身有界, 且 $t>2\mu(K_N)$ 时 $f^*(t)=0$. 故 f 支在一个测度至多为 $2\mu(K_N)$ 的集合上, 因而依照(3.46)式定义的 f 有界且在 $L^{p,q}(X,\mu)$ 中.

现在计算 f 的 $L^{p,q}$ 范数知

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,q}}&=\left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}}\left(\int_{\frac{t}{2}}^\infty s^{\frac{q'}{p'}-1}(g_{N,M})^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\overset{(D)}{\le}C_1(p,q)\left(\int_0^\infty(t^{\frac{1}{p'}}(g_{N,M})^*(t))^{q'}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &=C_1(p,q)\|g_{N,M}\|_{L^{p',q'}}^{\frac{q'}{q}}<\infty\end{aligned}\tag{3.47}$$

其中 (D) 是 Hardy 不等式3.7中 $b=\frac{q}{p}$ 的情况. 现由(3.45),(3.47)两式知

$$\int_0^\infty f^*(t)(g_{N,M})^*(t)dt\le\|T\|_{(L^{p,q})^*}\|f\|_{L^{p,q}}\le C_1(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})^*}\|g_{N,M}\|_{L^{p',q'}}^{q'-1}.\tag{3.48}$$

另一方面由

$$f^*(t)=\int_{\frac{t}{2}}^\infty s^{\frac{q'}{p'}-1}(g_{N,M})^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\ge\int_{\frac{t}{2}}^t s^{\frac{q'}{p'}-1}(g_{N,M})^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}$$

知

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^*(t)(g_{N,M})^*(t)dt &\geq \int_0^\infty \left(\int_{\frac{t}{2}}^t s^{\frac{q'}{p'}-1}(g_{N,M})^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right)(g_{N,M})^*(t)dt \\ &\overset{(E)}{\geq} \int_0^\infty (g_{N,M})^*(t)^{q'}\left(\int_{\frac{t}{2}}^t s^{\frac{q'}{p'}-1}\frac{ds}{s}\right)dt \\ &= C_2(p,q)\|g_{N,M}\|_{L^{p',q'}}^{q'}\end{aligned} \tag{3.49}$$

结合(3.48),(3.49)两式, 根据 $\|g_{N,M}\|_{L^{p',q'}} < \infty$ 知 $\|g_{N,M}\|_{L^{p',q'}} \leq C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})^*}$, 令 $N, M \to \infty$ 即知 $\|g\|_{L^{p',q'}} \leq C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})^*} < \infty$, 这便说明了 $g \in L^{p',q'}(X,\mu)$, 命题得证.

(vii) $1 < p < \infty, q = \infty$ 时, $L^{p,q}$ 的共轭空间研究实际上就是弱 L^p 的共轭空间研究, 具体讨论参见 **[LG1]** 于此处给出的文献.

(viii) $p = q = \infty$ 时, $L^{p,q}$ 的共轭空间研究实际上就是 L^∞ 的共轭空间研究, 它实际上是全体有界有限可加集函数构成的空间, 这在 **[KY]** 中有所介绍. □

注 $L^{p,q}$ 的共轭空间3.17中有些结论在 X 为原子空间时不再成立. 例如 $l^\infty(\mathbb{Z}) \subset (l^p(\mathbb{Z}))^*(0 < p < 1)$, 因而 $(l^p(\mathbb{Z}))^* \neq \{0\}$.

Terence Tao 的讲义Introduction, estimates, L^p theory, interpolation中介绍了刻画 $L^{p,q}(X,\mu)$ 的另一种办法: 将 f 分解成次阶梯函数或拟阶梯函数之和. 下面简要介绍相关内容:

定义 3.17 (次阶梯函数, 拟阶梯函数)

- 称 f 为高度为 H, 宽度为 W 的次阶梯函数, 如果 $\operatorname{supp} f \subset E, |f(x)| \leq H$ 几乎处处成立, 且 $\mu(E) \leq W$.
- 称 f 为高度为 H, 宽度为 W 的拟阶梯函数, 如果 $\operatorname{supp} f \subset E, |f(x)| \sim H$ 在 E 上几乎处处成立, 且 $\mu(E) \sim W$.

♣

注 从单位区间 $[0,1)$ 的二进延拓可知高度为 1, 宽度为 W 的非负次阶梯函数 f 总是可以被分解成 $\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} f_k$, 其中 f_k 是高度为 1, 宽度至多为 W 的标准阶梯函数. 根据齐次性可知对其它高度有类似的结果, 于是与阶梯函数相关的估计可以自然地过渡到次阶梯函数上去 (进而过渡到拟阶梯函数上).

定理 3.18 ($L^{p,q}$ 的刻画)

设 f 是函数, $0 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty, 0 < A < \infty$, 则下述命题在相差一个常数的意义下等价:

(i) $\|f\|_{L^{p,q}} \lesssim_{p,q} A$.

(ii) 存在分解 $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m$, 其中每个 f_m 都是高度为 2^m, 宽度为 $0 < W_m < \infty$ 的拟阶梯函数, $\{f_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 的支集两两不交, 且

$$\|2^m W_m^{\frac{1}{p}}\|_{l_m^q(\mathbb{Z})} \lesssim_{p,q} A$$

其中 l_m^q 表示 l^q 范数是对变量 m 取的.

(iii) 存在点态上界 $|f| \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^m \chi_{E_m}$, 其中

$$\|2^m \mu(E_m)^{\frac{1}{p}}\|_{l_m^q(\mathbb{Z})} \lesssim_{p,q} A.$$

(iv) 存在分解 $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$, 其中每个 f_n 都是宽度为 2^n, 高度为 $0 < H_n < \infty$ 的次阶梯函数, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的支集两两不交, H_n 关于 n 的递增而不增, 在 f_n 的支集上有界 $H_{n+1} \leq |f_n| \leq H_n$, 且

$$\|H_n 2^{\frac{n}{p}}\|_{l_n^q(\mathbb{Z})} \lesssim_{p,q} A. \tag{3.50}$$

(v) 存在点态上界 $|f| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n \chi_{E_n}$, 其中 $\mu(E_n) \lesssim_{p,q} A$, 且(3.50)式成立.

♡

3.8.2.4 某些重要结果在 Lorentz 空间上的推广

回忆 Marcinkiewicz 插值定理3.4, 该定理讨论的是算子同时满足弱 (p_0,p_0) 不等式与弱 (p_1,p_1) 不等式时是否能成为强 (p,p) 型算子. 实际上, 对指标 (p,p) 的讨论可以拓展到一般的 (p,q) 型算子上, 与之相关的定理拓展称

为非对角型 Marcinkiewicz 插值定理. 为介绍该定理, 首先需要引入一些定义.

对测度空间 (X,μ), 设 $S(X)$ 为 X 上的全体有限简单函数构成的空间, $S_0^+(X)$ 为 $S(X)$ 中全体形如 $\sum_{i=m}^n 2^{-i}\chi_{A_i}$(其中 $m<n$ 是正整数, A_i 是 X 的有限测度子集) 的函数所构成的集合, 其中 A_i 不需要互异或不交. 通过定义显见 $S_0^+(X)$ 中两个元素的和依旧在 $S_0^+(X)$ 中. 另定义 $S_0^{real}(X)=S_0^+(X)-S_0^+(X)$ 为全体形如 $f_1-f_2(f_1,f_2\in S_0^+(X))$ 的函数所构成的空间, $S_0(X)$ 为全体形如 $h_1+ih_2(h_1,h_2\in S_0^{real}(X))$ 的函数所构成的空间.

定义 3.18 (拟线性算子, 次线性算子)

定义在 $S_0(X)$ 上的算子 T 称为拟线性算子, 如果存在 $K\geq 1$ 使得

$$|T(\lambda f)|=|\lambda||T(f)| \text{ 且 } |T(f+g)|\leq K(|T(f)|+|T(g)|)$$

对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$ 与任意 $f,g\in S_0(X)$ 均成立. 当 $K=1$ 时, 称 T 为次线性算子.

♣

定义 3.19 (受限的弱 (p,q) 型算子)

设 (X,μ) 是测度空间, T 是定义在有限简单函数空间 $S(X)$ 上的线性算子, $0<p,q\leq\infty$. 称 T 是受限的弱 (p,q) 型算子, 如果

$$\|T(\chi_A)\|_{L^{q,\infty}}\leq C\mu(A)^{\frac{1}{p}} \tag{3.51}$$

对 X 的全体有限测度子集 A 均成立. 估计式(3.51)同时称为受限的弱型估计[a].

[a]受限的弱型估计与标准的弱型估计区别在于受限的弱型估计仅仅是对有限简单函数做的, 而标准的弱型估计针对的是一般可测函数, 它未必能表成有限简单函数.

♣

将上述定义与 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 上的初等插值3.12结合可得下述宝宝实插值定理[11]:

定理 3.19 (宝宝实插值)

若算子 T 既是受限的弱 (p_0,q_0) 型算子, 又是受限的 (p_1,q_1) 型算子, 那它也是受限的弱 (p,q) 型算子, 其中 p,q 是由某个 $\theta\in(0,1)$ 经由关系式

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},$$
$$\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$$

所确定的.

♡

证明 不妨设 $q_0<q_1$. 从定义出发, 对 $T:S(X)\to S(X)$ 而言, 任取 X 上的某有限测度子集 A 有:

$$\begin{aligned}\|T(\chi_A)\|_{L^{q_0,\infty}}&\lesssim_{p_0,q_0}\mu(A)^{\frac{1}{p_0}}\\ \|T(\chi_A)\|_{L^{q_1,\infty}}&\lesssim_{p_1,q_1}\mu(A)^{\frac{1}{p_1}}\end{aligned} \tag{3.52}$$

显见 $T(\chi_A)\in L^{q_0,\infty}(X,\mu)\cap L^{q_1,\infty}(X,\mu)$, 故由 $L^{p,\infty}(X,\mu)$ 上的初等插值3.12知对任意的 $q\in(q_0,q_1)$ 而言均有 $T(\chi_A)\in L^q(X,\mu)$, 且

$$\|T(\chi_A)\|_{L^q(X,\mu)}\lesssim_{q,q_0,q_1}\|T(\chi_A)\|_{L^{q_0,\infty}}^{\frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}}{\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}}}\|T(\chi_A)\|_{L^{q_1,\infty}}^{\frac{\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}}}$$

显见存在 $\theta\in(0,1)$ 使得 $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$, 于是 $\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}=\theta(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_0})$, $\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}=(1-\theta)(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1})$, 代入上式可得

$$\|T(\chi_A)\|_{L^q(X,\mu)}\lesssim_{q,q_0,q_1}\|T(\chi_A)\|_{L^{q_0,\infty}}^{1-\theta}\|T(\chi_A)\|_{L^{q_1,\infty}}^{\theta}. \tag{3.53}$$

又因为 $L^q(X,\mu)\hookrightarrow L^{q,\infty}(X,\mu)$, 故

$$\|T(\chi_A)\|_{L^{q,\infty}(X,\mu)}\lesssim_q\|T(\chi_A)\|_{L^q(X,\mu)} \tag{3.54}$$

[11]名字源于 Terence Tao 的讲义Introduction, estimates, L^p theory, interpolation.

结合(3.52)-(3.54)式得

$$\begin{aligned}\|T(\chi_A)\|_{L^{q,\infty}(X,\mu)} &\lesssim_{q,q_0,q_1} \|T(\chi_A)\|_{L^{q_0,\infty}}^{1-\theta}\|T(\chi_A)\|_{L^{q_1,\infty}}^{\theta} \\ &\lesssim_{q,q_0,q_1,p_0,p_1} \mu(A)^{\frac{1-\theta}{p_0}}\mu(A)^{\frac{\theta}{p_1}} = \mu(A)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

此即欲证. □

现在希望把宝宝实插值3.19的结果推广到 $S_0(X)$ 上, 此即下述定理:

定理 3.20 (非对角的 Marcinkiewicz 插值定理)

设 $0<r\le\infty, 0<p_0\ne p_1\le\infty, 0<q_0\ne q_1\le\infty, (X,\mu),(Y,\nu)$ 是 σ 有限测度空间. 设 T 是输入 X 上的简单函数, 输出 Y 上的可测函数的拟线性算子. 若存在 $M_0,M_1<\infty$ 使得下述受限的弱型估计对 X 中的任意有限测度子集 A 成立:

$$\|T(\chi_A)\|_{L^{q_0,\infty}(Y,\nu)} \le M_0\mu(A)^{\frac{1}{p_0}}, \tag{3.55}$$

$$\|T(\chi_A)\|_{L^{q_1,\infty}(Y,\nu)} \le M_1\mu(A)^{\frac{1}{p_1}}, \tag{3.56}$$

则只要 $0<\theta<1$ 且

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1} \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}\end{aligned} \tag{3.57}$$

就存在常数 $C_*(p_0,q_0,p_1,q_1,K,r,\theta)<\infty$ 使得对任意 $f\in S_0(X)$ 均有

$$\|T(f)\|_{L^{q,r}(Y,\nu)} \le C_*(p_0,q_0,p_1,q_1,K,r,\theta)M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{L^{p,r}(X,\mu)}. \tag{3.58}$$

另外, 若 $0<p,r<\infty$, 且 T 是线性 (或以非负函数为输出的次线性) 算子, 则它可以唯一延拓成从 $L^{p,r}(X,\mu)$ 到 $L^{q,r}(Y,\nu)$ 中的算子, 且该延拓能使得(3.58)式对全体 $f\in L^{p,r}(X,\mu)$ 均成立. ♡

这个定理的证明实在太过冗杂且并非必要, 这里就省略了. 非对角的 Marcinkiewicz 插值定理3.20中最后的延拓依赖于下述类似于 Lebesgue 空间理论中简单函数逼近定理的命题:

命题 3.17 (Lorentz 空间中的简单函数逼近)

对任意 $0<p,r<\infty$, 空间 $S_0(X)$ 均在 $L^{p,r}(X,\mu)$ 中稠密. ♠

证明 取 $f\in L^{p,r}(X,\mu)$, 设 $f\ge 0$. 根据 $L^{p,q}$ 范数的等价计算式3.14与 d_f 在 $[0,\infty)$ 上递减的事实, 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,r}(X,\mu)}^r &= p\int_0^\infty (sd_f(s)^{\frac{1}{p}})^r\frac{ds}{s} \\ &\ge p\int_0^{2^{-n}} s^{r-1}(d_f(s))^{\frac{r}{p}}ds \\ &\ge p\int_0^{2^{-n}} s^{r-1}(d_f(2^{-n}))^{\frac{r}{p}}ds \\ &= \frac{p2^{-nr}}{r}(d_f(2^{-n}))^{\frac{r}{p}}\end{aligned}$$

这说明 $d_f(2^{-n})<\infty$. 类似可知

$$\|f\|_{L^{p,r}(X,\mu)}^r \ge p\int_0^{2^n}(d_f(s))^{\frac{r}{p}}s^{r-1}ds = \frac{p2^{nr}}{r}(d_f(2^n))^{\frac{r}{p}}$$

令 $n\to\infty$, 为了让 $\frac{p2^{nr}}{r}(d_f(2^n))^{\frac{r}{p}} = \|f\|_{L^{p,r}(X,\mu)}^r<\infty$, 只能有 $d_f(2^n)\to 0$, 于是从极限定义出发知对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $k_n\in\mathbb{N}$ 使得

$$d_f(2^{k_n}) = \mu(\{x\in X: f(x)>2^{k_n}\})<2^{-n}$$

现设 $E_n=\{x\in X: 2^{-n}<f(x)\le 2^{k_n}\}$, 显见对每个 $n\in\mathbb{N}$ 均有 $\mu(E_n)\le d_f(2^{-n})<\infty$. 现将 $f\chi_{E_n}$ 依照二进制展开,

亦即 $f\chi_{E_n}(x)=\sum_{j=-k_n}^{\infty}d_j(x)2^{-j}$, 其中 $d_j(x)$ 为 0 或 1. 取 $B_j=\{x\in E_n:d_j(x)=1\}$, 则 $\mu(B_j)\le\mu(E_n)$, 且 $f\chi_{E_n}$ 可表为 $f\chi_{E_n}(x)=\sum_{j=-k_n}^{\infty}2^{-j}\chi_{B_j}(x)$.

记 $f_n(x)=\sum_{j=-k_n}^{n}2^{-j}\chi_{B_j}(x)$, 显见 $f_n\in S_0^+(X)$, 且 $f_n\le f\chi_{E_n}\le f$. 另知当 $x\in E_n$ 时有

$$f(x)-f_n(x)=\sum_{j=n+1}^{\infty}2^{-j}\chi_{B_j}(x)\le 2^{-n},$$

而当 $x\notin E_n$, 知此时 $f_n(x)=0$, 且要么 $f(x)>2^{k_n}$, 要么 $f(x)\le 2^{-n}$, 进而

$$d_{f-f_n}(2^{-n})=\mu(E_n\cap\{f-f_n>2^{-n}\})+\mu(E_n^c\cap\{f-f_n>2^{-n}\})<2^{-n}$$

于是对 $2^{-n}\le t<\infty$ 有

$$(f-f_n)^*(t)\le(f-f_n)^*(2^{-n})=\inf\{s>0:d_{f-f_n}(s)\le 2^{-n}\}\le 2^{-n}.$$

因为 n 是任取的, 故对全体 $t\in(0,\infty)$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f-f_n)^*(t)=0$. 现由递降重排的性质3.13(iv)-(vi) 知对任意 $t\in(0,\infty)$ 有

$$(f-f_n)^*(t)\le f^*\left(\frac{t}{2}\right)+f_n^*\left(\frac{t}{2}\right)\le 2f^*\left(\frac{t}{2}\right).$$

现因 $f\in L^{p,r}(X,\mu)$, 故由 Lebesgue 控制收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^{p,r}(X,\mu)}=0$, 而 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset S_0(X)$, 这便对非负的 f 证明了命题.

现对复值函数 $f\in L^{p,r}(X,\mu)$, 记 $f=(f_1-f_2)+i(f_3-f_4)$, 其中 $f_j(j=1,2,3,4)$ 是 $L^{p,r}(X,\mu)$ 上的非负函数. 由前述结论知存在序列 $\{f_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}\subset S_0^+(X)(j=1,2,3,4)$ 使得 $f_n^j\to f_j(L^{p,r}(X,\mu))$. 记 $f_n=f_n^1-f_n^2+i(f_n^3-f_n^4)$, 由 $\|\circledast\|_{L^{p,r}(X,\mu)}$ 是拟范数知

$$\|f-f_n\|_{L^{p,r}(X,\mu)}\lesssim_{p,r}\sum_{j=1}^{4}\|f_j-f_n^j\|_{L^{p,r}(X,\mu)}\to 0,\quad n\to\infty$$

命题即证. □

先前非对角的 Marcinkiewicz 插值定理3.20意义在于由两个受限的弱型估计导出一个标准的弱型估计, 下面说明在一定条件下两个受限的弱型估计还能导出一个强 (p,q) 型估计:

推论 3.7

设 T 是非对角的 Marcinkiewicz 插值定理3.20中的拟线性算子, $0<p_0\ne p_1\le\infty, 0<q_0\ne q_1\le\infty$. 若 T 关于常数 M_0 有受限的弱 (p_0,q_0) 型估计, 关于常数 M_1 有受限的弱 (p_1,q_1) 型估计, 且存在 $0<\theta<1$ 使得

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},$$
$$\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1},$$

另外 $p\le q$, 则 T 对全体 $f\in S_0(X)$ 而言均满足下述强 (p,q) 型估计:

$$\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)}\lesssim_{p_0,q_0,p_1,q_1,\theta}M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{L^p(X,\mu)}.\tag{3.59}$$

另外, 若 T 是线性 (或以非负函数为输出的次线性) 算子, 则它可以唯一延拓成从 $L^p(X,\mu)$ 到 $L^q(Y,\nu)$ 中的算子, 且该延拓能使得(3.59)式对全体 $f\in L^p(X,\mu)$ 均成立. ♡

证明 因为 $\theta\in(0,1)$, 故必有 $p,q<\infty$. 设 $r=q$, 根据 $L^{p,q}$ 关于 q 的递增性3.15与 $p\le q=r$ 知 $L^p=L^{p,p}\hookrightarrow L^{p,q}=L^{p,r}$, 于是 $\|f\|_{L^{p,r}(X,\mu)}\lesssim\|f\|_{L^p(X,\mu)}$. 于是根据非对角的 Marcinkiewicz 插值定理3.20可知

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_{L^{q,r}(Y,\nu)}=\|T(f)\|_{L^{q,q}(Y,\nu)}&=\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)}\\&\lesssim_{p_0,q_0,p_1,q_1,\theta}M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{L^{p,r}(X,\mu)}\\&\lesssim_{p_0,q_0,p_1,q_1,\theta}M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{L^p(X,\mu)}.\end{aligned}$$

□[12]

[12] 延拓存在唯一性的证明这里先省略了, 有时间的话回来补充.

3.9 补充: Orlicz 空间

本小节选自 Terence Tao 的讲义Introduction, estimates, L^p theory, interpolation. Orlicz 空间在奇异积分理论中有重要作用, 同时它的一个特殊形式 $L\log L$ 可以提供某种更精细的可积性: 在 PDE 理论中有时会出现一个结论对 L^1 不成立, 但对任意 $\varepsilon > 0$ 而言该结论对 $L^{1+\varepsilon}$ 均成立, 这就需要一个届于 L^1 与 $L^{1+\varepsilon}$ 之间的可积性来精细化这一结论成立的条件, $L\log L$ 便扮演这样的角色.

不同于 L^p-弱 L^p-Lorentz 空间在指标上作的推广, Orlicz 空间的推广动机基于当 $1 \le p < \infty$ 时有

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} \le 1 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \le 1$$

设 $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是函数, 现在问是否存在某个范数 $\|f\|_{\Phi(L)}$ 使得

$$\|f\|_{\Phi(L)} \le 1 \Leftrightarrow \int_X \Phi(|f(x)|)d\mu(x) \le 1. \tag{3.60}$$

因为范数本身需要齐次, 故对任意 $A > 0$ 有

$$\|f\|_{\Phi(L)} \le A \Leftrightarrow \int_X \Phi\left(\frac{|f(x)|}{A}\right) d\mu(x) \le 1$$

特别若 $A < A'$, 则应有

$$\int_X \Phi\left(\frac{|f(x)|}{A}\right) d\mu(x) \le 1 \Rightarrow \int_X \Phi\left(\frac{|f(x)|}{A'}\right) d\mu(x) \le 1$$

为保证这一性质, 一个自然的要求就是令 Φ 递增. 为满足零范数的情况, 另要求 $\Phi(0) = 0$.

另外, 为了让 $\|\circledast\|_{\Phi(L)}$ 成为范数, 单位球 $\{f : \|f\|_{\Phi(L)} \le 1\}$ 还需为凸集. 由(3.60)式可知这便要求 Φ 本身是凸函数. 至此即可将所有条件整合在一起, 得到若 $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是递增的凸函数, 且 $\Phi(0) = 0$, 则

$$\|f\|_{\Phi(L)} := \inf\left\{A > 0 : \int_X \Phi\left(\frac{|f(x)|}{A}\right) d\mu(x) \le 1\right\}$$

正是空间 $\Phi(L) := \{f : \|f\|_{\Phi(L)}\} < \infty$ 上的范数[13].

若令 $\Phi(x) := x^p$, 则 $\Phi(L)$ 此时就是经典的 $L^p(1 \le p < \infty)$ 空间. L^∞ 并非 Orlicz 空间, 但可以把它看做 $\Phi(x)$ 在 $x > 1$ 时为 ∞, 在 $x \le 1$ 时为零的极限情况 (或更不严谨的说是 $\Phi(x) = x^{+\infty}$). 在 L^p 空间之外, 还可以定义下述常见的 Orlicz 空间:

- $L\log L$, 其中 $\Phi(x) := x\log(2+x)$;
- e^L, 其中 $\Phi(x) := e^x - 1$;
- e^{L^2}, 其中 $\Phi(x) := e^{x^2} - 1$.

$\Phi(x)$ 中常数 (比如 2 和 1) 的选取并不重要. 注意若函数 $\Phi, \widetilde{\Phi}$ 是可比较的, 那么它们所诱导的 Orlicz 范数也可比较, 亦即若 $\Phi \lesssim \widetilde{\Phi}$, 则 $\|f\|_{\Phi(L)} \lesssim \|f\|_{\widetilde{\Phi}(L)}$[14]. 这方面与极大算子理论结合的一个经典结果由 **[ST6]** 给出:

定理 3.21

若 f 是支在紧集 B 上的可积函数, 则 $Mf \in L^1(B)$ 当且仅当 $f\log^+ f \in L^1(B)$. ♡

3.10 一个外插值定理

本节选自 **[LG1]** 的习题, 列于此处旨在为偶函数诱导的奇异积分算子 L^p 有界性定理4.7的证明作准备.

前面所提及的 Riesz-Thorin 插值定理与 Marcinkiewicz 插值定理都是内插值的相关定理, 事实上还有" 外插值" 这一说法:

[13]这种范数定义称为 Luxenburg 范数

[14]问: $x\log^+ x$ 与 $x\log(2+x)$ 可比吗?

定理 3.22 (外插值)

设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是测度空间, $\mu(X)<\infty, \nu(Y)<\infty$. 若对每个 $1<p\le 2$ 而言, T 都是 $L^p(X)\to L^p(Y)$ 的可数次可加算子, 且其算子范数 $\|T\|_{L^p(X)\to L^p(Y)}\le A(p-1)^{-\alpha}$, 其中 $A,\alpha>0$ 是固定的常数[a], 则对 X 上的任意可测函数 f 均有

$$\int_Y |T(f)|d\nu \le 6A(1+\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\left[\int_X |f|(\log_2^+|f|)^\alpha d\mu + C_\alpha + \mu(X)^{\frac{1}{2}}\right]$$

其中 $C_\alpha=\sum_{k=1}^\infty k^\alpha(\frac{2}{3})^k$.

[a] 可数次可加意为对任意 $f_j\in L^p(X)$, 只要 $\sum_j f_j\in L^p(X)$, 就有 $|T(\sum_j f_j)|\le\sum_j|T(f_j)|$.

证明 任取 X 上的可测函数 f, 根据可测性知它可以写成

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty f(x)\chi_{S_k}(x)$$

其中 $S_k=\{x\in X: 2^k\le|f(x)|<2^{k+1}\}(k\ge1)$, $S_0=\{x\in X:|f(x)|<2\}$. 当 $k\ge1$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
\int_Y |T(f\chi_{S_k})|d\nu &= \int_Y |T(f\chi_{S_k})|\cdot 1 d\nu \\
&\overset{(A)}{\le} \left(\int_Y |T(f\chi_{S_k})|^{\frac{k+1}{k}}d\nu\right)^{\frac{k}{k+1}}\left(\int_Y d\nu\right)^{\frac{1}{k+1}} \\
&\overset{(B)}{\le} A\left(\frac{k+1}{k}-1\right)^{-\alpha}\left(\int_X |f\chi_{S_k}|^{\frac{k+1}{k}}d\mu\right)^{\frac{k}{k+1}}\nu(Y)^{\frac{1}{k+1}} \\
&= Ak^\alpha\nu(Y)^{\frac{1}{k+1}}\left(\int_{S_k}|f|^{\frac{k+1}{k}}d\mu\right)^{\frac{k}{k+1}} \\
&\overset{(C)}{\le} Ak^\alpha\nu(Y)^{\frac{1}{k+1}}\left(\int_{S_k}2^{(k+1)\frac{k+1}{k}}d\mu\right)^{\frac{k}{k+1}} \\
&= 2A\nu(Y)^{\frac{1}{k+1}}2^k k^\alpha\mu(S_k)^{\frac{k}{k+1}}
\end{aligned}$$

其中 (A) 是 Hölder 不等式, (B) 利用了 T 的算子范数, (C) 基于 S_k 的构造. 注意对 $k\ge1$ 还有 $\nu(Y)^{\frac{1}{k+1}}\le\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}$, 现对 $k\ge1$ 将上式关于 k 求和:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^\infty\int_Y|T(f\chi_{S_k})|d\nu &\le \sum_{k=1}^\infty 2A\nu(Y)^{\frac{1}{k+1}}2^k k^\alpha\mu(S_k)^{\frac{k}{k+1}} \\
&\le 2A\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^\infty 2^k k^\alpha\mu(S_k)^{\frac{k}{k+1}} \\
&= 2A\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \mu(S_k)\ge3^{-k-1}}}2^k k^\alpha\mu(S_k)^{\frac{k}{k+1}}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \mu(S_k)\le3^{-k-1}}}2^k k^\alpha\mu(S_k)^{\frac{k}{k+1}}\right) \\
&\le 2A\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \mu(S_k)\ge3^{-k-1}}}2^k k^\alpha\mu(S_k)^{\frac{k}{k+1}}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \mu(S_k)\le3^{-k-1}}}(\frac{2}{3})^k k^\alpha\right) \\
&= 2A\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 3^{k+1}\mu(S_k)\ge1}}(\frac{2}{3})^k k^\alpha(3^{k+1}\mu(S_k))^{\frac{k}{k+1}}+C_\alpha\right) \\
&= 2A\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 3^{k+1}\mu(S_k)\ge1}}(\frac{2}{3})^k k^\alpha 3^{k+1}\mu(S_k)+C_\alpha\right) \\
&\le 2A\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\left(3\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 3^{k+1}\mu(S_k)\ge1}}2^k k^\alpha\mu(S_k)+C_\alpha\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2A\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\left(3\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 3^{k+1}\mu(S_k)\geq 1}}\int_{S_k}2^k k^\alpha d\mu + C_\alpha\right)\\
&\leq 2A\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\left(3\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 3^{k+1}\mu(S_k)\geq 1}}\int_{S_k}|f|(\log_2^+|f|)^\alpha d\mu + C_\alpha\right)\\
&\leq 2A\max(1,\nu(Y))^{\frac{1}{2}}\left(3\int_X|f|(\log_2^+|f|)^\alpha d\mu + C_\alpha\right)
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

而当 $k=0$ 时有

$$
\begin{aligned}
\int_Y|T(f\chi_{S_0})|d\nu &\leq \int_Y|T(f\chi_{S_0})|\cdot 1d\nu \leq \left(\int_Y|T(f\chi_{S_0})|^2d\nu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Y d\nu\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \nu(Y)^{\frac{1}{2}}A\left(\int_X|f\chi_{S_0}|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = A\nu(Y)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{S_0}|f|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq A\nu(Y)^{\frac{1}{2}}4\left(\int_{S_0}d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leq A\nu(Y)^{\frac{1}{2}}4\mu(X)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

结合(3.61),(3.62)两式, 由 T 的可数次可加性即得欲证. □

注 可以看出外插值定理3.22描述的是由 T 在小范围内的性质可以推得 T 在大范围内的性质, 这与内插值所对应的" 先看端点情况, 再看中值情况" 在某种意义上是相反的.

第四章 卷积型奇异积分算子

从本章起往后的章节主要参考 **[LG1]**.

奇异积分的研究动机主要来源于它与调和分析中一些最重要的问题的联系, 例如 Fourier 级数的收敛性. Hilbert 变换则是所有奇异积分的原型, 它是 Fourier 级数 L^p 收敛性研究的一大抓手. 在数学史上, Hilbert 变换理论脱胎于复分析的技巧. 随着 Calderón-Zygmund 学派的发展与一维理论在高维的拓展, 实分析方法渐渐取代了原先的复分析方法. 高维理论的框架已经得到了一次次验证, 它为奇异积分打开了通往数学其它领域的大门. 现如今, 奇异积分已经深深地和 PDE, 算子理论, 多复值函数等等领域结合在了一起. 本章研究通过与缓增分布的卷积定义的奇异积分, 这类奇异积分称为卷积型奇异积分算子.

4.1 Hilbert 变换与 Riesz 变换

研究奇异积分算子之前, 首先需要仔细研究 Hilbert 变换, 它是奇异积分理论后续发展的源泉所在.

4.1.1 Hilbert 变换的定义和基本性质

Hilbert 变换的引入有几种等价的方法, 这里我们先把它定义为一个主值分布, 后面会讨论其它的等价定义.

设缓增分布 $W_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 定义为:

$$\langle W_0, \varphi\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \frac{1}{\pi}\int_{|x|\ge 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx, \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{4.1}$$

下面说明 W_0 确实是缓增分布. 因为函数 $\frac{1}{x}$ 在 $[-1,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,1]$ 上的积分为 0, 故(4.1)右式第一项中的 $\varphi(x)$ 可以换成 $\varphi(x)-\varphi(0)$. 根据微分中值定理有

$$\left|\int_{\varepsilon\le|x|\le 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\right| \le \int_{|x|<1}\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}dx \le C\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{4.2}$$

又因为 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故(4.1)右式至少是有意义的[1]. 另一方面知

$$\left|\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right| \le \int_{|x|>1}\|x\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\frac{1}{x^2}dx \le C\|x\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{4.3}$$

于是结合(4.2),(4.3)两式可知

$$|\langle W_0,\varphi\rangle| \le C(\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|x\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}).$$

根据缓增分布的等价刻画2.28知 W_0 确为缓增分布.

定义 4.1 (截断 Hilbert 变换, Hilbert 变换)

函数 $f\in L^p(\mathbb{R})(1\le p<\infty)$(高度为 ε) 的截断 Hilbert 变换定义为

$$H^{(\varepsilon)}(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|y|\ge\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy = \frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\ge\varepsilon}\frac{f(y)}{x-y}dy. \tag{4.4}$$

$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的 Hilbert 变换定义为

$$H(\varphi)(x) = (W_0 * \varphi)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}H^{(\varepsilon)}(\varphi)(x). \tag{4.5}$$

♣

根据 Hölder 不等式显见 $H^{(\varepsilon)}(f)$ 对全体 $f\in L^p(\mathbb{R})(1\le p<\infty)$ 都是良定义的[2]. 但对 Schwartz 函数 φ 而言, 积

[1] 考虑 Schwartz 函数的等价刻画2.22, 此时可取 $|\varphi(x)|\le\frac{C}{1+|x|}$, 于是 $\int_{|x|\ge 1}\frac{|\varphi(x)|}{x}dx \le \int_{|x|\ge 1}\frac{Cdx}{x(1+|x|)} \le 2\int_1^\infty\frac{Cdx}{x^2} < \infty$.

[2] 对 $f\in L^p(\mathbb{R})$, 在 $p>1$ 时 $\int_{|x-y|\ge\varepsilon}\frac{f(y)}{x-y}dy = \int_{\mathbb{R}}f(y)\frac{\chi_{|x-y|\ge\varepsilon}(y)}{x-y}dy \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\cdot(\int_{|x-y|\ge\varepsilon}\frac{dy}{|x-y|^{p'}})^{\frac{1}{p'}} < \infty$, 而 $p=1$ 时 $\int_{|x-y|\ge\varepsilon}\frac{|f(y)|}{|x-y|}dy \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{|x-y|\ge\varepsilon}|f(y)|dy \le \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty$.

分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x-y)}{y}dy$ 并不一定对全体 $x\in\mathbb{R}$ 都绝对收敛[3]. 不过这个积分可以定义为绝对收敛积分族 $\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x-y)}{y}dy$ 在 $\varepsilon\to 0$ 时的极限[4]. 这样的极限称为主值积分, 记作 p.v. 于是根据这个记号, Schwartz 函数 φ 的 Hilbert 变换可以写成:

$$H(\varphi)(x)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x-y)}{y}dy=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{x-y}dy. \tag{4.6}$$

注 前面我们是对 Schwartz 函数定义的 Hilbert 变换, 实际上 Hilbert 变换本身可以作用在更广的一类函数上. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数, 且在每个 $x\in\mathbb{R}$ 附近满足 Hölder 条件, 亦即

$$\forall x\in\mathbb{R}\exists\varepsilon_x>0\exists C_x>0\exists\delta_x>0(|x-y|<\delta_x\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq C_x|x-y|^{\varepsilon_x}).$$

则

$$\begin{aligned}H^{(\varepsilon)}(f)(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_x<|x-y|<\delta_x}\frac{f(y)}{x-y}dy+\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq\delta_x}\frac{f(y)}{x-y}dy\\&=\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_x<|x-y|<\delta_x}\frac{f(y)-f(x)}{x-y}dy+\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq\delta_x}\frac{f(y)}{x-y}dy.\end{aligned}$$

显见上右式两个积分均收敛[5], 于是 $H^{(\varepsilon)}(f)(x)$ 在 $\varepsilon\to 0$ 时存在极限.

例 4.1 对区间 $[a,b]$ 的示性函数 $\chi_{[a,b]}$ 而言有

$$H(\chi_{[a,b]})(x)=\frac{1}{\pi}\log\frac{|x-a|}{|x-b|} \tag{4.7}$$

这是因为对固定的 x, 选取 $\varepsilon<\min(|x-a|,|x-b|)$. 当 $b<x$ 时知

$$\begin{aligned}H^{(\varepsilon)}(\chi_{[a,b]})(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq\varepsilon}\frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y}dy\\&=\frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y}dy+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y}dy\\&=0+\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{dy}{x-y}=\frac{1}{\pi}(\log|x-a|-\log|x-b|)=\frac{1}{\pi}\log\frac{x-a}{x-b}.\end{aligned}$$

当 $x<a$ 时知

$$\begin{aligned}H^{(\varepsilon)}(\chi_{[a,b]})(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq\varepsilon}\frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y}dy\\&=\frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y}dy+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y}dy\\&=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{dy}{x-y}+0=\frac{1}{\pi}(\log|x-a|-\log|x-b|)=\frac{1}{\pi}\log\frac{|x-a|}{|x-b|}\end{aligned}$$

当 $x\in(a,b)$ 时知

$$\begin{aligned}H^{\varepsilon}(\chi_{[a,b]})(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq\varepsilon}\frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y}dy\\&=\frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y}dy+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y}dy\\&=\frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{b}\frac{dy}{x-y}+\frac{1}{\pi}\int_{a}^{x-\varepsilon}\frac{dy}{x-y}\\&=\frac{1}{\pi}\left(\log\frac{|x-a|}{\varepsilon}+\log\frac{\varepsilon}{|x-b|}\right)=\frac{1}{\pi}\log\frac{|x-a|}{|x-b|}\end{aligned} \tag{4.8}$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即可. 注意到(4.8)式中 ε 的消去本质上是因为 $\frac{1}{x}$ 在对称区间 $\varepsilon<|x|<c$ 上积分为零. 另若 x 靠近 a 或 b,

---

[3] 例如取 $\varphi_0(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为 1, 在 $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ 上为 0, 再对 φ_0 磨光化得到 φ, 显见 $\varphi(0)=1$, 而 $\int_{-\infty}^{\infty}|\frac{\varphi(x-y)}{y}|dy\geq\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{|y|}$ 不绝对收敛.

[4] 极限的存在性就是缓增分布 W_0 的良定义性.

[5] 第一个等号到第二个等号是因为 $\int_{\varepsilon_x<|x-y|<\delta_x}\frac{dy}{x-y}=0$, 第二个等号后第一项有控制 $\int_{\varepsilon_x<|x-y|<\delta_x}|\frac{f(y)-f(x)}{x-y}|dy\leq\int_{\varepsilon_x<|x-y|<\delta_x}|x-y|^{\varepsilon_x-1}dy<\infty$, 第二项有 $\int_{|x-y|\geq\delta_x}|\frac{f(y)}{x-y}|dy\leq\frac{2}{\delta_x}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}<\infty$, 其中最后一个不等式基于 f 的可积性.

则 $H(\chi_{[a,b]})(x)$ 会以对数速度爆破, 而若 $x \to \infty$, 则 $H(\chi_{[a,b]})(x)$ 会以 $\frac{1}{|x|}$ 的速度衰减[6].

例 4.2 设 $\log^+ x$ 在 $x \geq 1$ 时等于 $\log x$, 其余情况等于 0[7]. 上例的情况实际上可以更精确地写成

$$H^{(\varepsilon)}(\chi_{[a,b]})(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\log^+ \frac{|x-a|}{\max(\varepsilon,|x-b|)}, & x > b \\ -\frac{1}{\pi}\log^+ \frac{|x-b|}{\max(\varepsilon,|x-a|)}, & x < a \\ \frac{1}{\pi}\log^+ \frac{|x-a|}{\varepsilon} - \frac{1}{\pi}\log^+ \frac{|x-b|}{\varepsilon}, & a < x < b. \end{cases}$$

下面利用 Fourier 变换给出 Hilbert 变换的另一种刻画, 为此我们需要计算(4.1)式中定义的缓增分布 W_0 的 Fourier 变换. 固定 $\mathbb{R}$ 上的 Schwartz 函数, 有:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{W_0}, \varphi\rangle &= \langle W_0, \widehat{\varphi}\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|\geq\varepsilon}\widehat{\varphi}(\xi)\frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{-i2\pi x\xi}dx\frac{d\xi}{\xi} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)(\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq\varepsilon}e^{-i2\pi x\xi}\frac{d\xi}{\xi})dx \\ &\overset{(A)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\left(\frac{-i}{\pi}\int_{\frac{1}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq\varepsilon}\sin(2\pi x\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right)dx \\ &\overset{(B)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\left((\frac{-i}{\pi}\operatorname{sgn}x)\int_{\frac{2\pi}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq 2\pi\varepsilon}\sin(|x|\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right)dx. \end{aligned} \tag{4.9}$$

其中 (A) 是因为代入 $e^{-i2\pi x\xi} = \cos(2\pi x\xi) - i\sin(2\pi x\xi)$ 后, $\frac{\cos(2\pi x\xi)}{\xi}$ 关于 ξ 是奇函数, 在对称区间上积分为零. (B) 是将 $2\pi\xi$ 看成了新的 ξ, 并代入了 $\sin(x\xi) = \operatorname{sgn}(x)\sin(|x|\xi)$. 要使得(4.9)最后的式子有意义, 就希望控制 $\int_{\frac{2\pi}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq 2\pi\varepsilon}\sin(|x|\xi)\frac{d\xi}{\xi}$. 事实上, 存在常数 $M > 0$ 使得对任意 $0 < a < b < \infty$ 总有 $|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx| \leq M$, 这是因为只需讨论 $a < \pi < b$ 的情况[8], 此时

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| &\leq \left|\int_a^\pi \frac{\sin x}{x}dx\right| + \left|\int_\pi^b \frac{\sin x}{x}dx\right| \\ &\leq \int_0^\pi dx + \left|\frac{\cos b}{b} + \frac{1}{\pi} + \int_\pi^b \frac{\cos x}{x^2}dx\right| \\ &\leq \pi + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \int_\pi^\infty \frac{dx}{x^2} = M \end{aligned} \tag{4.10}$$

进一步, 在数学分析的课程中已经知道[9] $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, 于是

$$\int_{\frac{2\pi}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq 2\pi\varepsilon}\frac{\sin(|x|\xi)}{\xi}d\xi \to \pi, \quad \varepsilon \to 0.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理即得

$$\langle \widehat{W_0}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)(-i\operatorname{sgn}x)dx. \tag{4.11}$$

这说明在缓增分布的意义下有

$$\widehat{W_0}(\xi) = -i\operatorname{sgn}\xi. \tag{4.12}$$

---

[6]精确来讲此时衰减速度等同于 $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 在 $x \to \infty$ 时的速度.

[7]该函数在偶函数核的奇异积分算子部分会再次接触.

[8]$0 < a < b < \pi$ 时是显然的, $\pi < a < b < \infty$ 时在 $(\pi, 2\pi)$ 上知 $|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx| = -\int_a^b \frac{\sin x}{x} \leq -\frac{1}{\pi}\int_a^b \sin x dx \leq M$, 之后的每一段类似如此.

[9]Dirichlet 积分的结论.

特别地, (4.12)式表明 $\widehat{W}_0$ 是 (有界) 函数. 利用(4.12)式与 Fourier 反演定理知[10]

$$H(f)(x) = (\widehat{f}(\xi)(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi))^{\vee}(x). \tag{4.13}$$

该式子给出了 Hilbert 变换的另一种定义[11]. 由(4.13)式与 Plancherel 定理立得[12]

$$\|H(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{4.14}$$

也就是说 H 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的等距变换.

另外, 注意到 $(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi)^2 = -1$, 故 H 还满足[13]

$$H^2 = HH = -I \tag{4.15}$$

其中 I 是恒同算子. H 的伴随算子通过下式唯一定义[14]:

$$\langle f, H(g)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{H(g)(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} H^*(f)(x)\overline{g(x)}dx = \langle H^*(f), g\rangle.$$

显见 H^* 对应的 Fourier 乘子为[15] $\overline{-i\,\mathrm{sgn}\,\xi} = i\,\mathrm{sgn}\,\xi$, 于是 $H^* = -H$. 同理对 H^t 有 $H^t = -H$.

4.1.2 Hilbert 变换与解析函数的联系

下面研究 Hilbert 变换与 Poisson 核的关系. 回忆 Poisson 核在函数上的作用, 知对实值函数 $f \in L^p(\mathbb{R})(1 \le p < \infty)$ 有

$$(P_y * f)(x) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2}dt \tag{4.16}$$

因为函数 $t \mapsto ((x-t)^2 + y^2)^{-1}$ 在 $y > 0$ 时是 $L^{p'}$ 函数, 故由 Hölder 不等式知积分(4.16)绝对收敛.

现设 $\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z$ 分别代表复数 z 的实部和虚部, 观察到[16]

$$(P_y * f)(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t+iy}dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{z-t}dt\right)$$

其中 $z = x + iy$. 现在对于定义在 $\mathbb{R}^2_+ = \{z = x + iy : y > 0\}$ 上的函数

$$F_f(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{z-t}dt$$

显见 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}F_f(z) = 0$, 故其在 $\mathbb{R}^2_+$ 上解析[17]. 根据前面的讨论已经知道 $F_f(x+iy)$ 的实部为 $(P_y * f)(x)$, 而其虚部为:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t+iy}dt\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(x-t)}{(x-t)^2 + y^2}dt =: (f * Q_y)(x)$$

其中 Q_y 称为共轭 Poisson 核:

$$Q_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}. \tag{4.17}$$

现记 $u_f(x+iy) = (f * P_y)(x), v_f(x+iy) = (f * Q_y)(x)$, 因为 $F_f = u_f + iv_f$ 是解析函数, 故 u_f, v_f 互为共轭调和函数[18]. 前面在 Poisson 的恒等逼近定理2.9中已经说明了在 $y \to 0$ 时有 $P_y * f \to f(L^p(\mathbb{R}))$, 现在自然希望知道 $f * Q_y$ 在 $y \to 0$ 时有怎样的极限, 此即下述定理:

---

[10] 因为 $H(f)$ 作为 Schwartz 函数和缓增分布的卷积是 C^∞ 函数, 故可以应用 Fourier 反演定理. 回忆 $H(f)(x) = (W_0 * f)(x)$, 两边同时应用 Fourier 变换与逆变换, 左式不变, 右式为 $(\widehat{W_0 * f})^{\vee} = (\widehat{W_0}\widehat{f})^{\vee} = (\widehat{f}(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi))^{\vee}$.

[11] 注意至此为止 Hilbert 变换都是对 Schwartz 函数作的, **[JD]** 表明这个定义方式可以把 Hilbert 变换的定义进一步延拓到 L^2 上.

[12] 这是因为 $\|H(f)\|_{L^2} = \|\widehat{H(f)}\|_{L^2} = \|\widehat{f}(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi)\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$, 最后一个等号把范数写开即得.

[13] $H^2(f) = H((\widehat{f}(\xi)(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi)^{\vee})) = (\widehat{f}(\xi)(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi)(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi))^{\vee} = f$.

[14] 唯一性是因为若 $(H^*)'$ 也满足该式子, 则 $\int_{\mathbb{R}}(H^*(f) - (H^*)'(f))\overline{g}dx = 0$, 根据 g 的任意性只能有 $H^*(f) = (H^*)'(f)$ 几乎处处成立.

[15] 参见 **[LG1]**pg.151: 若 $T = (\widehat{f}m)^{\vee}$, 则 $T^* = (\widehat{f}\overline{m})^{\vee}, T^t = (\widehat{f}\widetilde{m})^{\vee}$.

[16] $\frac{i}{x-t+iy} = \frac{i(x-t)+y}{(x-t)^2+y^2}$.

[17] $F_f(z)$ 的良定义性是因为设 $z = x_z + iy_z(x_z \in \mathbb{R}, y_z > 0)$, 当 $y_z \ne 0$ 时 $F_f(z)$ 显然是良定义的. 对于其解析性, 从 **[Zo]** 的观点出发可以验证求导与积分在这里是可换的, 于是只需要看 $\frac{1}{z-t}$ 在 $z \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}, t \in \mathbb{R}$ 时是否解析即可, 而这是显然的.

[18] 解析函数的实部和虚部均为调和函数, 这两个函数互为共轭调和函数.

定理 4.1 (共轭 Poisson 核的逼近定理)

设 $1 \le p < \infty$, 则对任意 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 而言, $\varepsilon \to 0$ 时

$$f * Q_\varepsilon - H^{(\varepsilon)}(f) \to 0 \tag{4.18}$$

同时在 L^p 和 a.e. 的意义下成立. 另外对 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 与 a.e. $x \in \mathbb{R}$ 均有

$$F_\varphi(x+iy) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{x+iy-t}dt \to \varphi(x) + iH(\varphi)(x), \quad y \to 0^+. \tag{4.19}$$

♡

证明 在待证的(4.18)式中, 对每个 ε 有

$$\begin{aligned}(Q_\varepsilon * f)(x) - \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}dt &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2+\varepsilon^2} f(x-t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\varepsilon}\frac{f(x-t)}{t}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{t}{t^2+\varepsilon^2} - \frac{\chi_{|t|\ge\varepsilon}(t)}{t}\right) f(x-t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}(f * \psi_\varepsilon)(x)\end{aligned}$$

其中 $\psi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\psi(\frac{x}{\varepsilon})$, 且

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t}, & |t| \ge 1 \\ \frac{t}{t^2+1}, & |t| < 1 \end{cases} \tag{4.20}$$

显见 ψ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 且 $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$. 另外, 可积函数

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2+1}, & |t| \ge 1 \\ 1, & |t| < 1 \end{cases} \tag{4.21}$$

是 ψ 的正递减控制径向函数 (径向递减主部), 亦即其作为偶函数在 $[0, \infty)$ 上递减, 且满足 $|\psi| \le \Psi$. 根据恒等逼近定理的推广3.1[19], 代入 $a = 0$ 知 $f * \psi_\varepsilon \to 0(L^p(\mathbb{R}^n))$. 另由恒等逼近族微分定理的推广3.4[20], 代入 $a = 0$ 知 $f * \psi_\varepsilon \to 0$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时 a.e. 成立. 至此即得(4.18)式.

(4.19)式是(4.18)式的一个推论, 因为

$$F_\varphi(x+iy) = (\varphi * P_y)(x) + i(\varphi * Q_y)(x) \overset{(A)}{\to} \varphi(x) + iH^{(y)}(\varphi)(x) \overset{(B)}{\to} \varphi(x) + iH(\varphi)(x), \quad y \to 0^+$$

其中 (A) 基于 Poisson 核的恒等逼近定理与(4.18)式; (B) 是 Hilbert 变换 (通过截断 Hilbert 变换逼近) 的定义. □

注 之后会说明对 $f \in L^p(\mathbb{R})(1 \le p < \infty)$ 而言, $H^{(\varepsilon)}(f)$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时都将在 a.e.(且当 $p > 1$ 时同样在 L^p) 意义下收敛到某函数 $\widetilde{H}(f)$. 通过这种方式定义的线性算子 $\widetilde{H}$ 是对 Schwartz 函数定义的 Hilbert 变换 H 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上的延拓, 同样将其记为 H. 因此对 $f \in L^p(\mathbb{R})(1 \le p < \infty)$ 总有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f * Q_\varepsilon)(x) = H(f)(x), \text{ a.e.}$$

而在 L^p 意义下, 基于共轭 Poisson 核的逼近定理4.1知上述收敛性依旧成立.

4.1.3 Hilbert 变换的 L^p 有界性

Hilbert 变换 L^p 有界性的证明有多种方法. Stein 和 Weiss 在 [**STW**] 中证明了下述引理

---

[19] 定理3.1本身需要的条件有三条: 存在常数 $c > 0$ 使得 $\|\psi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} \le c$ 对任意 ε 成立, $\int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x)dx = a$ 对任意 ε 成立, 对任意 $\delta > 0$ 均有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\delta} |\psi_\varepsilon(x)|dx = 0$. 其中第一条就是引入 Ψ 的原因, 第二条是 $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$ 中将 t 换成 $\frac{t}{\varepsilon}$ 得到的, 第三条基于 ψ 本身到无穷远处积分的收敛性.

[20] 见 [**LG1**]pg.97 Cor.2.1.19, 直接套用即可.

引理 4.1

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是测度有限的可测集, 则

$$d_{H(\chi_E)}(\alpha) = \frac{4|E|}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}, \ \alpha > 0.$$

又注意到 $x \geq 0$ 时总有 $x \leq \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, 于是对实轴上的全体有限测度集 E 均有

$$d_{H(\chi_E)}(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R} : |H(\chi_E)(x)| > \alpha\}| = \frac{4|E|}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \leq \frac{4|E|}{2\pi\alpha} = \frac{2}{\pi}\frac{|E|}{\alpha}, \quad \alpha > 0 \tag{4.22}$$

这说明 H 满足受限的弱 $(1,1)$ 型估计. 另一方面, H 的 L^2 等距性(4.14)表明 H 满足强 $(2,2)$ 型估计, 进而它必满足受限的弱 $(2,2)$ 型估计. 现在在非对角的 Marcinkiewicz 插值定理3.20中令 $p_0 = q_0 = 1, p_1 = q_1 = 2$, 记 $p = q = r \in (p_0, p_1) = (1,2)$, 则由 H 的线性性知对任意 $f \in L^{p,r}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$ 均有

$$\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|H(f)\|_{L^{q,r}(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^{p,r}(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

于是 H 作为 $L^p(\mathbb{R})(1 < p < 2)$ 上的算子均有界. 当 $2 < p < \infty$, 根据 $H^* = -H$ 与 L^p 作为 $L^{p'}$ 的共轭空间这一事实可知:

$$\begin{aligned}
\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} H(f)(x) \cdot g(x) dx \right| = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot H^*(g)(x) dx \right| \\
&= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot (-H(g)(x)) dx \right| = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot H(g)(x) dx \right| \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq 1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|H(g)\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} = C_{p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

这便说明了 H 作为 $L^p(\mathbb{R})(2 < p < \infty)$ 上的算子的有界性[21].

下面介绍 Riesz 的证明方法, 这套方法的优势在于可以给出 $p = 2^k$ 时 Hilbert 变换的 L^p 范数.

定理 4.2 (Riesz)

任取 $1 < p < \infty$, 均存在正常数 C_p 使得

$$\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

另外, 若 $2 \leq p < \infty$, 则 $C_p \leq 2p$; 若 $1 < p \leq 2$, 则 $C_p \leq \frac{2p}{p-1}$, 因此 Hilbert 变换 H 在 $L^p(\mathbb{R})(1 < p < \infty)$ 上有有界延拓.

证明 第一部分: 我们首先证明对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 均有

$$(H(f))^2 = f^2 + 2H(fH(f)) \tag{4.23}$$

a.e. 成立. (4.23)式有两种证明方法, 下面逐一介绍.

第一种方法: 考虑定义在上半平面的解析函数[22]

$$F_f(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{z - t} dt$$

[21] 这一套思路跟 **[JD]** 的思路 (后面会提到) 是差不多的, 难点也是此消彼长: **[JD]** 上的证明花了很大笔墨去说明 H 不仅仅满足受限的弱型估计, 实际上它满足标准的弱型估计, 方法就是 Calderón-Zygmund 分解, 之后就不需要再用非对角的 Marcinkiewicz 插值定理, 而是直接用经典的 Marcinkiewicz 插值定理得到结果; **[LG1]** 上的这一证明并不需要 H 是标准的弱型估计, 从而标准的 Marcinkiewicz 插值定理在这里没法套用, 因而必须考虑非对角的 Marcinkiewicz 插值定理.

[22] 这个函数已经在前面共轭 Poisson 核的逼近定理4.1处引入过了.

下面计算其平方. 固定 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $\operatorname{Im} z > 0$ 与 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则对任意固定的 $\varepsilon > 0$ 均有:

$$\begin{aligned}
F_f(z)^2 &= \left(\frac{i}{\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)f(s)}{(z-t)(z-s)} dtds \\
&= \left(\frac{i}{\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|t-s|>\varepsilon} + \int_{|t-s|\le\varepsilon} \right) \frac{f(t)f(s)}{(z-t)(z-s)} dsdt \\
&= \left(\frac{i}{\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{f(t)f(s)}{t-s} \left(\frac{1}{z-t} - \frac{1}{z-s} \right) dtds - \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{|t-s|\le\varepsilon} \frac{f(t)f(s)}{(z-t)(z-s)} dtds \\
&= \left(\frac{i}{\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{f(s)}{t-s} ds \frac{dt}{z-t} - \left(\frac{i}{\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} f(s) \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{f(t)}{t-s} dt \frac{ds}{z-s} - \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{|t-s|\le\varepsilon} \frac{f(t)f(s)}{(z-t)(z-s)} dtds
\end{aligned}$$

因为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 根据 Schwartz 函数的等价刻画2.22可以说明上式诸被积函数均被 L^1 函数控制. 现在根据截断 Hilbert 变换的定义知

$$F_f(z)^2 = \left(\frac{i}{\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} f(t) H^{(\varepsilon)}(f)(t) \frac{dt}{z-t} + \left(\frac{i}{\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} f(s) H^{(\varepsilon)}(f)(s) \frac{ds}{z-s} - \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{|t-s|\le\varepsilon} \frac{f(t)f(s)}{(z-t)(z-s)} dtds$$

在上式两端令 $\varepsilon \to 0$ 并由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$F_f(z)^2 = i\frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2f(t)H(f)(t)}{z-t} dt. \tag{4.24}$$

现在在(4.24)式中令 $z = x + iy$ 并让 $y \to 0^+$, 在共轭 Poisson 核的逼近定理4.1的结论(4.19)式中考虑 $F_{2fH(f)}$ 可知在 a.e. 意义下有[23]

$$F_f(z)^2 \to i(2fH(f)(x) + iH(2fH(f))(x)),$$

另一方面, 因为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 故 $F_f(z) \to f(x)+iH(f)(x)(y \to 0^+)$a.e. 成立, 于是 $F_f(z)^2 \to (f(x)+iH(f)(x))^2(y \to 0^+)$a.e. 成立, 根据极限的唯一性知

$$(f + iH(f))^2 = f^2 - H(f)^2 + i2fH(f) = i(2fH(f) + iH(2f(H(f))))$$

a.e. 成立, 比较两边实部即得 $f^2 - H^2(f) = -H(2fH(f))$, 此即欲证.

第二种方法: 记 $m(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)$, 对(4.23)右式作用 Fourier 变换知

$$\begin{aligned}
\widehat{f^2}(\xi) + 2[H(fH(f))]^\wedge(\xi) &= (\widehat{f} * \widehat{f})(\xi) + 2m(\xi)(\widehat{f} * \widehat{H(f)})(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta)\widehat{f}(\xi-\eta)d\eta + 2m(\xi) \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta)\widehat{f}(\xi-\eta)m(\eta)d\eta \qquad (4.25) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta)\widehat{f}(\xi-\eta)d\eta + 2m(\xi) \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta)\widehat{f}(\xi-\eta)m(\xi-\eta)d\eta \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

对(4.25),(4.26)两式取平均可得

$$\widehat{f^2}(\xi) + 2[H(fH(f))]^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta)\widehat{f}(\xi-\eta)[1 + m(\xi)(m(\eta) + m(\xi-\eta))]d\eta.$$

又因为 $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}$ 时根据 $m(\xi)$ 的定义有:

$$1 + m(\xi)m(\eta) + m(\xi)m(\xi-\eta) = m(\eta)m(\xi-\eta)$$

故

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta)\widehat{f}(\xi-\eta)[1 + m(\xi)(m(\eta) + m(\xi-\eta))]d\eta \\
= &\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\eta)\widehat{f}(\xi-\eta)m(\eta)m(\xi-\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}} \widehat{H(f)}(\eta)\widehat{H(f)}(\xi-\eta)d\eta = (\widehat{H(f)} * \widehat{H(f)})(\xi).
\end{aligned}$$

至此即得

$$\widehat{f^2}(\xi) + 2[H(fH(f))]^\wedge(\xi) = (\widehat{H(f)} * \widehat{H(f)})(\xi)$$

两边作 Fourier 逆变换并利用 Fourier 反演定理即得(4.23)式.

[23]因为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 而 $H(f)$ 本质上是 Schwartz 函数与缓增分布的卷积, 故由 Schwartz 函数与缓增分布卷积的刻画2.19知 $H(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$, 且根据 L^2 保距性可知 $H(f)$ 在远处不会爆破, 因此 $2fH(f)$ 依旧是 Schwartz 函数.

第二部分: 在证明(4.23)式后, 下面研究 $p=2^k$ 时 H 的 L^p 估计. 根据 Hilbert 变换的 L^2 等距性(4.14)知 H 在 $p=2^k, k=1$ 时 L^p 算子范数为 1, 下面考虑归纳法: 设 $p=2^k$ 时 H 满足 $\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}\le c_p$, 则对非零实值函数[24] $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 有

$$\begin{aligned}\|H(f)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}&=\|(H(f))^2\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac12}=\|f^2+2H(fH(f))\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac12}\\&\le(\|f^2\|_{L^p(\mathbb{R})}+2\|H(fH(f))\|_{L^p(\mathbb{R})})^{\frac12}\\&\le(\|f\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^2+2c_p\|fH(f)\|_{L^p(\mathbb{R})})^{\frac12}\\&\overset{(A)}{\le}(\|f\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^2+2c_p\|f\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\|H(f)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})})^{\frac12}\end{aligned}\tag{4.27}$$

其中 (A) 是 Hölder 不等式. 据此可知 $\|H(f)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}<\infty$, 由归纳原理即知 $p=2^k(k\in\mathbb{N})$ 时总有 $\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}<\infty$. 另外根据(4.27)式可知当 $\|f\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\ne 0$ 时有[25]

$$\left(\frac{\|H(f)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}}\right)^2-2c_p\frac{\|H(f)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}}-1\le 0,\quad p=2^k$$

解得

$$\frac{\|H(f)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}}\le c_p+\sqrt{c_p^2+1}$$

因此 H 在 $L^{2p}(\mathbb{R})$ 上的算子范数不大于

$$c_{2p}\le c_p+\sqrt{c_p^2+1}.\tag{4.28}$$

至此我们已经说明了在 $p=2^k(k=1,2,\cdots)$ 时 H 是 $L^p(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子, 根据 Riesz-Thorin 插值定理2.24知对全体 $p\ge 2$ 而言, H 都是 $L^p(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子[26]. 又因为 H 是反自伴算子 (即 $H^*=-H$), 根据对偶性即知 H 也是 $L^p(\mathbb{R})(1<p\le 2)$ 上的有界线性算子[27].

第三部分: 下面给出 H 具体的算子范数上界. 回忆三角恒等式

$$\cot\frac{x}{2}=\cot x+\sqrt{1+\cot^2 x},\quad 0<x\le\frac{\pi}{2}$$

而函数 $x\mapsto x+\sqrt{1+x^2}$ 本身是单增的, 故若 $c_p\le\cot\frac{\pi}{2p}$, (4.28)式就表明

$$c_{2p}\le c_p+\sqrt{c_p^2+1}\le\cot\frac{\pi}{2p}+\sqrt{1+\cot^2\frac{\pi}{2p}}=\cot\frac{\pi}{2\cdot 2p}$$

因为 $1=\cot\frac{\pi}{4}=\cot\frac{\pi}{2\cdot 2}$, 归纳可知 $\cot\frac{\pi}{2p}$ 确为 $p=2^k(k=1,2,\cdots)$ 时 H 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上的一个算子范数上界. 根据对偶性知 $\cot\frac{\pi}{2p'}=\tan\frac{\pi}{2p}$ 即为 $p=\frac{2^k}{2^k-1}(k=1,2,\cdots)$ 时 H 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上的一个算子范数上界[28]. 此时这两种上界已经可以刻画 $p\to 1$ 与 $p\to\infty$ 时算子范数 $\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}$ 的表现了. 事实上, 因为 $p\ge 2$ 时 $\cot\frac{\pi}{2p}\le p$, 故由 Riesz-Thorin 插值定理知 $2\le p<\infty$ 时有[29] $\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}\le 2p$, 根据对偶性即知 $1<p\le 2$ 时 $\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}\le\frac{2p}{p-1}$, 定理至此即证. □

注 事实上可以证明 Hilbert 变换 H 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上的算子范数当 $2\le p<\infty$ 时就是 $\cot\frac{\pi}{2p}$, 而当 $1<p\le 2$ 时就是 $\tan\frac{\pi}{2p}$.

---

[24] 因为 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中稠密, 故只需要对 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 中的函数说明结论, 之后取极限即可.

[25] $\|f\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}=0$ 不用讨论了: 此时 f 必为 0, 而命题对 0 显然成立.

[26] 例如当 $k=1,2$, 则已知 H 同时是 $L^2(\mathbb{R})$ 与 $L^4(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子, 从线性性可知它当然是 $L^2(\mathbb{R})+L^4(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})+L^4(\mathbb{R})$ 的有界线性算子, 套用 Riesz-Thorin 插值定理即得只要 $\frac1p\in(\frac14,\frac12)\Rightarrow p\in(2,4)$, 总能得到 H 是 $L^p(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子.

[27] 仿照前面 [**JD**] 的 Riesz-Kolmogorov 定理证法即得.

[28] 当 $p=\frac{2^k}{2^k-1}$ 时, 知 $p'=2^k$, 于是

$$\|H(f)\|_{L^p}=\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}}H(f)(x)g(x)dx\right|=\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)H(g)(x)dx\right|\le\|f\|_{L^p}\|H\|_{L^{p'}\to L^{p'}}\le c_{p'}\|f\|_{L^p}$$

[29] 如果记 $k_p=\inf\{k\in\mathbb{N}:p\le 2^k\}$, $p^*=2^{k_p}$, 则显见 $\frac{p^*}{2}\le p\le p^*\le 2p$. 现在已知 $c_2=1$, 对固定的 $p\ge 2$, 已知 $1\le c_{p^*}\le\cot\frac{\pi}{2p^*}$, 于是对 $p\in(1,p^*)$ 作 Riesz-Thorin 插值, 取 $\theta\in(0,1)$ 满足 $\frac1p=\frac{1-\theta}{1}+\frac{\theta}{p^*}$, 知 $\|H\|_{L^p\to L^p}\le c_{p^*}^\theta=(\cot\frac{\pi}{2p^*})^\theta\le\cot\frac{\pi}{2p^*}\le p^*\le 2p$. 这便是 $2p$ 的由来. $1<p\le 2$ 的情形完全类似于上一注的说明.

注 我们或许会好奇 $p=1$ 或 $p=\infty$ 时 Hilbert 变换的 L^p 有界性是怎样的. 例4.1中计算的 $\chi_{[a,b]}$ 的 Hilbert 变换显然是无界且不可积的 (其中不可积是因为它在 $x\to\infty$ 时行为类似于 $\frac{1}{|x|}$). 在无穷远附近的这一行为暗示了 Hilbert 变换可能将 $L^1(\mathbb{R})$ 映入 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$(因为 $\frac{1}{|x|}$ 正是在 $L^{1,\infty}$ 中而不在 L^1 中的函数). 事实也正是如此, 该命题称为 Kolmogorov 定理.

注 **[JD]** 中也给出了 Hilbert 变换 L^p 有界性的一种经典证明方法, 这种方法需要用到 Calderóm-Zygmund 分解:

定理 4.3 (Riesz-Kolmogorov)

对 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则有下述两个断言成立:

(i) (Kolmogorov) H 是弱 $(1,1)$ 型算子:

$$|\{x\in\mathbb{R}:|H(f)(x)|>\lambda\}|\le\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

(ii) (M. Riesz) H 是强 (p,p) 型算子:

$$\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\le C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

♡

证明 (i) 固定 $\lambda>0$, 设 f 非负. 根据 Calderón-Zygmund 分解定理3.2, 知存在函数 $g,b\in\mathbb{R}$ 与不交区间列 $\{I_j\}$ 使得

(a) $f(x)=g(x)+b(x)$;

(b) $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$, 且 $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le 2\lambda$;

(c) $b(x)=\sum_j b_j(x)$, 其中 $\operatorname{supp} b_j\subset I_j$;

(d) $\int_{I_j} b_j(x)dx=0$;

(e) $\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\le 2\lambda|I_j|$;

(f) $|\Omega|\le\sum_j|I_j|\le\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

其中 $\Omega=\bigcup_j I_j$. 现根据 (a) 与 Hilbert 变换的线性性知 $H(f)=H(g)+H(b)$, 故

$$|\{x\in\mathbb{R}:|H(f)(x)|>\lambda\}|\le|\{x\in\mathbb{R}:|H(g)(x)|>\frac{\lambda}{2}\}|+|\{x\in\mathbb{R}:|H(b)(x)|>\frac{\lambda}{2}\}|.$$

现在要证明 H 是弱 $(1,1)$ 型算子, 就是分别要证明

$$\begin{cases}|\{x\in\mathbb{R}:|H(g)(x)|>\frac{\lambda}{2}\}|\lesssim\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\lambda}\\ |\{x\in\mathbb{R}:|H(b)(x)|>\frac{\lambda}{2}\}|\lesssim\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\lambda}\end{cases}$$

对第一项, 应用 Hilbert 变换的 L^2 等距性(4.14)有:

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}:|H(g)(x)|>\frac{\lambda}{2}\}|&=\int_{\{x:|H(g)(x)|>\frac{\lambda}{2}\}}1dx=\int_{\{x:\frac{2}{\lambda}|H(g)(x)|>1\}}1dx\\&\le\int_{\{x:\frac{2}{\lambda}|H(g)(x)|>1\}}\left(\frac{2}{\lambda}|H(g)(x)|\right)^2dx\le\frac{4}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}}|H(g)(x)|^2dx\\&=\frac{4}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2dx\overset{(A)}{\le}\frac{8}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|g(x)|dx\overset{(B)}{\le}\frac{8}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx\end{aligned}$$

其中 (A),(B) 均基于 Calderón-Zygmund 分解的结论 (b).

对第二项, 设 $2I_j$ 是与 I_j 同心, 长度增倍的区间, 并设 $\Omega^*=\bigcup_j 2I_j$, 则 $|\Omega^*|\le 2|\Omega|$, 且

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}:|H(b)(x)|>\frac{\lambda}{2}\}|&\le|\Omega^*|+|\{x\notin\Omega^*:|H(b)(x)|>\frac{\lambda}{2}\}|\\&\le 2|\Omega|+\int_{\mathbb{R}}\frac{2}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\chi_{x\notin\Omega^*:|H(b)(x)|>\frac{\lambda}{2}}(x)dx\\&\overset{(C)}{\le}2\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\lambda}+\frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}|H(b)(x)|dx\end{aligned}$$

其中 (C) 基于 Calderón-Zygmund 分解的结论 (f). 至此只需要证明 $\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}|H(b)(x)|dx\lesssim\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ 即可, 为此注意到

$$|H(b)(x)|=|H(\sum_j b_j)(x)|\le\sum_j|H(b_j)(x)|,\ \text{a.e. } x\in\mathbb{R}$$

在 $\sum_j b_j$ 是有限和时, 上式是显然的. 而当 $\sum_j b_j$ 是无限和时, 根据 Calderón-Zygmund 分解的结论 (c) 知 $\sum_j b_j$

在 L^2 意义下收敛到 b, 故根据 Hilbert 变换的 L^2 等距性知 $H(\sum_{j=1}^J b_j) = \sum_{j=1}^J Hb_j =: \{S_J\}_J$ 也在 L^2 意义下收敛到 Hb. 又因为 L^p 意义下的收敛能导出依测度收敛, 故 $\{S_J\}_J$ 依测度收敛到 Hb, 再由依测度收敛的 Riesz 定理知存在子列 $\{S_{J_k}\}_k$ 几乎处处收敛到 Hb, 上述不等式进而依旧成立. 于是要说明 $\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |H(b)(x)|dx \lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$, 只需说明

$$\sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} |Hb_j(x)|dx \lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

因为 $\operatorname{supp} b_j \subset I_j$, 故当 $x \notin 2I_j$ 时, 式子

$$H(b_j)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y}dy$$

依旧有意义. 记 I_j 的心为 c_j, 根据 Calderón-Zygmund 分解的性质 (d) 知

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} |H(b_j)(x)|dx &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \left|\int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y}dy\right| dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \left|\int_{I_j} b_j(y)\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j}\right)dy\right| dx \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{I_j} |b_j(y)|\left(\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \frac{|y-c_j|}{|x-y||x-c_j|}dx\right)dy \\
&\overset{(D)}{\le} \frac{1}{\pi}\int_{I_j} |b_j(y)|\left(\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}dx\right)dy
\end{aligned}$$

其中 (D) 是因为 $|y-c_j| < \frac{I_j}{2}, |x-y| > \frac{x-c_j}{2}$(见图4.1).

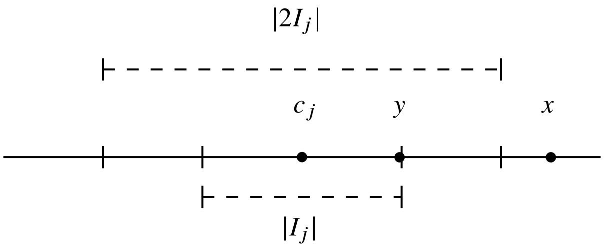

图 4.1: c_j, y, x 示意图

现在计算 (D) 右式的内层积分, 不妨设 $I_j = (-a, a), c_j = 0$, 有

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}dx = \left(\int_{-\infty}^{-2a} + \int_{2a}^{\infty}\right)\frac{2a}{|x|^2}dx = 4a\left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{2a}\right) = 2$$

故

$$\begin{aligned}
\sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} |H(b_j)(x)|dx &\le \frac{2}{\pi}\sum_j \int_{I_j} |b_j(y)|dy = \frac{2}{\pi}\sum_j \int_{I_j} \left|f(y) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(x)dx\right| dy \\
&\le \frac{2}{\pi}\sum_j \left(\int_{I_j} |f(x)|dx + \int_{I_j} |f(x)|dx\right) \le \frac{4}{\pi}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

至此, f 非负时的 Kolmogorov 定理得证, 又因为 Calderón-Zygmund 分解定理3.2实际上对任意复值函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 均成立, 故上述方法可以完全套用到一般复值函数 f 上, Kolmogorov 定理得证.

(ii) 根据 Kolmogorov 定理知 H 是弱 $(1,1)$ 型算子, 又根据 Hilbert 变换的 L^2 等距性(4.14)知 H 是强 $(2,2)$ 型算子, 故根据 Marcinkiewicz 插值定理3.4可知 H 是强 $(p,p)(1 < p < 2)$ 型算子. 若 $p > 2$, 则根据 Hilbert 变换的反自

伴性 (即 $H^* = -H$) 与 $p < 2$ 时的结论知

$$\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}} H(f)(x)\overline{g(x)}dx\right| = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot\overline{H^*(g)(x)}dx\right|$$

$$= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot\overline{H(g)(x)}dx\right| \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le 1}\|H(g)\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} = C_{p'}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

□

为了进一步研究 Hilbert 变换在 $L^p(\mathbb{R})$ 上的延拓, 就需要研究用于定义 Hilbert 变换的截断 Hilbert 变换的收敛性, 而收敛性的研究就离不开极大函数, 这引出了下述定义:

定义 4.2 (极大 Hilbert 变换)

极大 Hilbert 变换定义为下述算子:

$$H^{(*)}(f)(x) = \sup_{\varepsilon>0}|H^{(\varepsilon)}(f)(x)|, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R})(1 \le p < \infty). \tag{4.29}$$

♣

根据 Hölder 不等式, $H^{(\varepsilon)}(f)$ 对全体 $f \in L^p(\mathbb{R})(1 \le p < \infty)$ 均为收敛积分, 因而 $H^{(*)}(f)$ 对 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 良定义, 但也存在一些特殊的 x 使得 $H^{(*)}(f)(x) = \infty$:

例 4.3 回忆对示性函数 $\chi_{[a,b]}$ 作的 Hilbert 变换, 知 $H(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi}\log\frac{|x-a|}{|x-b|}$, 于是可以验证

$$H^{(*)}(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi}\left|\log\frac{|x-a|}{|x-b|}\right|$$

但一般来说 $H^{(*)}(f)(x) \neq |H(f)(x)|$(比如把 f 取成两不交闭区间的示性函数).

根据 Hilbert 变换 H 的定义可知当 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 时 $H^{(\varepsilon)}(f)$ 点态收敛到 $H(f)$, 这是出于 $\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)}{y}dy$ 点态有意义与 f 的连续性. 现在如果对 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 成立估计 $\|H^{(*)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$, 根据算子族的点态收敛定理3.2与 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中的稠密性即知对 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 同样有 $H^{(\varepsilon)}(f) \to H(f)$ 几乎处处成立, 据此即可给出 $L^p(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换定义. 这个延拓相较于 Riesz 定理4.2要更详细一些, 因为 Riesz 定理只断言存在有界延拓, 却没有给出刻画它的方法. 下面的定理就总结了这些想法:

定理 4.4 (极大 Hilbert 变换的 L^p 有界性)

若 $1 < p < \infty$, 则

$$\|H^{(*)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\max\{p, (p-1)^{-1}\}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{4.30}$$

另外对全体 $f \in L^p(\mathbb{R})$, $H^{(\varepsilon)}(f)$ 都在 L^p 与几乎处处的意义下收敛到 $H(f)$.

♡

证明 **[LG2]** 中具体给出了 $\max\{p, (p-1)^{-1}\}$ 这一上界[30], 下面只证明 $\|H^{(*)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ 这一结论.

回忆 Poisson 核 P_ε 与共轭 Poisson 核 Q_ε 的定义(4.16),(4.17). 现在取定 $1 < p < \infty$, 先断言下式在 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 时成立:

$$f * Q_\varepsilon = H(f) * P_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{4.31}$$

于是有等式

$$H^{(\varepsilon)}(f) = H^{(\varepsilon)}(f) - f * Q_\varepsilon + H(f) * P_\varepsilon \tag{4.32}$$

回忆(4.20)式中定义的 ψ, 可知

$$H^{(\varepsilon)}(f)(x) - (f * Q_\varepsilon)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy \tag{4.33}$$

又因为 ψ 能被依(4.21)式定义的 Ψ 控制, 故由推论3.2知

$$\sup_{\varepsilon>0}|H^{(\varepsilon)}(f)(x) - (f * Q_\varepsilon)(x)| \le \frac{1}{\pi}\|\Psi\|_{L^1(\mathbb{R})}M(f)(x) \tag{4.34}$$

[30] 根据 **[LG2]**pg.229Thm4.2.4(4.2.4) 式, 原本有 $\|T^{(*)}(f)\|_{L^p}\| \le C_n(A+B)\max(p, (p-1)^{-1})\|f\|_{L^p}$(且无勘误), 但这里勘误网将结论修改为 $\max(p, (p-1)^{-2})$, 不知这里以哪个结论为准?

其中 M 是 Hardy-Littlewood 极大函数. 又因为 P_1 也是正递减可积径向函数, 故根据正递减可积径向函数生成的恒等逼近族性质3.4知

$$\sup_{\varepsilon>0}|(H(f)*P_\varepsilon)(x)|\le\|P_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}M(H(f))(x)=M(H(f))\tag{4.35}$$

现由(4.32),(4.34),(4.35)三式知对任意 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 有

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0}|H^{(\varepsilon)}(f)(x)|&\le\sup_{\varepsilon>0}|H^{(\varepsilon)}(f)(x)-(f*Q_\varepsilon)(x)|+\sup_{\varepsilon>0}|(H(f)*P_\varepsilon)(x)|\\&\le\frac{1}{\pi}\|\Psi\|_{L^1(\mathbb{R})}M(f)(x)+M(H(f))\end{aligned}$$

这便得到了 Cotlar 不等式

$$|H^{(*)}(f)(x)|\le\frac{1}{\pi}\|\Psi\|_{L^1(\mathbb{R})}M(f)(x)+M(H(f))\tag{4.36}$$

回忆 Hardy-Littlewood 极大函数的强 (p,p) 型不等式3.8知 $\|M(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\lesssim_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})},\|M(H(f))\|_{L^p(\mathbb{R})}\lesssim_p\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}$, 又根据 Riesz 定理4.2知 $\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\lesssim_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$, 故 $\|H^{(*)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\lesssim_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$, 这便说明了 $H^{(*)}$ 的 L^p 有界性.

下面证明最开始的断言(4.31)式. 只需证明 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的情况即可, 这是因为对任意 $1<p<\infty$, 已经有[31] $P_\varepsilon,Q_\varepsilon\in L^{p'}(\mathbb{R})$, 而根据 $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}=L^p(\mathbb{R})$ 知对任意 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 均存在序列 $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得 $\|f-\phi_j\|_{L^p(\mathbb{R})}\to0$, 所以在 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的情况成立后, 对 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 的情况利用 Lebesgue 控制收敛定理把极限拿进卷积产生的积分号内就完成证明了. 现在当 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 时, 对(4.31)式两边作 Fourier 变换知只需证明

$$\widehat{f}\cdot\widehat{Q_\varepsilon}=\widehat{H(f)}\cdot\widehat{P_\varepsilon}$$

又因为 $\widehat{P_\varepsilon}(\xi)=e^{-2\pi\varepsilon|\xi|},\widehat{H(f)}(\xi)=\widehat{f}(\xi)(-i\operatorname{sgn}\xi)$, 故只需证明

$$\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{Q_\varepsilon}(\xi)=\widehat{f}(\xi)(-i\operatorname{sgn}\xi)\cdot e^{-2\pi\varepsilon|\xi|}$$

亦即只需证

$$((-i\operatorname{sgn}\xi)\cdot e^{-2\pi|\xi|})^\vee(x)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+1}.\tag{4.37}$$

而

$$\begin{aligned}((-i\operatorname{sgn}\xi)e^{-2\pi|\xi|})^\vee(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi|\xi|}(-i\operatorname{sgn}\xi)e^{i2\pi x\xi}d\xi\\&=2\int_0^\infty e^{-2\pi\xi}\sin(2\pi x\xi)d\xi\\&\overset{(A)}{=}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi}\sin(x\xi)d\xi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(e^{-\xi})''\sin(x\xi)d\xi\\&=-\frac{x}{\pi}\int_0^\infty(e^{-\xi})'\cos(x\xi)d\xi\\&\overset{(B)}{=}-\frac{x}{\pi}\left(-1+x\int_0^\infty e^{-\xi}\sin(x\xi)d\xi\right)\end{aligned}$$

由 (A)=(B) 即得(4.37)式.

到此为止, 因为 $H^{(*)}$ 是强 (p,p) 型算子, 故其必为弱 (p,p) 型算子, 于是由算子族的点态收敛性3.3, $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}=L^p(\mathbb{R})$ 与 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\Rightarrow H^{(\varepsilon)}(f)\to H(f)$ a.e. 知函数族 $\{H^{(\varepsilon)}(f)\}_{\varepsilon>0}$ 在 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 时 a.e. 收敛到 $H(f)$. 对于 L^p 收敛性, 因为 $\|H^{(\varepsilon)}(f)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\|H^{(\varepsilon)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}<\infty$, 根据 Lebesgue 控制收敛定理即得结论. □

4.1.4 Riesz 变换

本节默认 $n\ge2$. 回忆前文研究 Hilbert 变换时对象都是一维函数 $f\in L^p(\mathbb{R})$, 下面研究 Hilbert 变换的 n 维情况, 此时需要的 n 个算子来描述类似于 $\mathbb{R}$ 上 Hilbert 变换所做的事, 这些算子称为 Riesz 变换.

[31] 所以接下来谈的卷积总有意义.

在定义 Hilbert 变换时曾引入了缓增分布 W_0, 现在同样引入 $\mathbb{R}^n$ 上的缓增分布 $W_j(1 \leq j \leq n)$: 对 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$\langle W_j, \varphi\rangle = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\varphi(y)dy$$

下面验证 W_j 确为缓增分布, 重写上式有

$$\langle W_j, \varphi\rangle = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1>|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\varphi(y)dy + \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{|y|\geq 1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\varphi(y)dy$$

设 $y^* = (y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, y = (y_j, y^*)$, 因为 $\int_{1>|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}dy = 0$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 与任意 $1 \leq j \leq n$ 均成立, 故

$$\begin{aligned}
\left|\int_{1>|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\varphi(y)dy\right| &= \left|\int_D \int_{1>|y_j|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}(\varphi(y_j, y^*) - \varphi(0, y^*))dy_jdy^*\right| \\
&\leq \int_D \int_{1>|y_j|\geq\varepsilon} \frac{y_j^2}{|y|^n}|\partial_j\varphi(\xi_{y_j}, y^*)|dy_jdy^* \\
&\leq \int_D \int_{1>|y_j|\geq\varepsilon} |\partial_j\varphi(\xi_{y_j}, y^*)|dy_jdy^* \\
&\lesssim \|\partial_j\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

另一方面

$$\left|\int_{|y|\geq 1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\varphi(y)dy\right| \leq \int_{|y|\geq 1} \|y_j\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{dy}{|y|^{n+1}} \lesssim \|y_j\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

于是 $\langle W_j, \varphi\rangle \lesssim \|\partial_j\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|y_j\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, 因而 $W_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 特别注意 W_j 的系数 $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ 恰是 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 上的 Poisson 核所对应的系数.

定义 4.3 (Riesz 变换)

对 $1 \leq j \leq n$ 与 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 而言, f 的第 j 个 Riesz 变换定义为与 W_j 的卷积, 即:

$$R_j(f)(x) = (f * W_j)(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y)dy. \tag{4.38}$$

♣

上述定义中主值积分的意义与 Hilbert 变换的情形(4.6)是相同的. 实际上只要可积函数 f 满足 Hölder 条件, 亦即

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \exists C_x > 0 \exists \varepsilon_x > 0 \exists \delta_x > 0 \forall y \in \mathbb{R}^n (|y - x| < \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C_x|x - y|^{\varepsilon_x}).$$

则 Riesz 变换的定义依旧成立.

下面利用 Fourier 变换给出 Riesz 变换 R_j 的等价刻画, 为此需要计算 W_j 的 Fourier 变换.

命题 4.1 (Riesz 变换的 Fourier 变换刻画)

第 j 个 Riesz 变换 R_j 的 Fourier 变换对应与函数 $-\frac{i\xi_j}{|\xi|}$ 相乘的算子, 亦即对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$R_j(f)(x) = (-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi))^\vee(x). \tag{4.39}$$

♠

证明 该命题的证明本质上就是重写一遍 Hilbert 变换对应命题的证明, 不过其中多了一些技术上的困难. 取定 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), 1 \leq j \leq n$, 知:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{W_j}, \varphi\rangle &= \langle W_j, \widehat{\varphi}\rangle \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|\xi|\geq\varepsilon} \widehat{\varphi}(\xi)\frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}}d\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx \frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}}d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\frac{1}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq\varepsilon} e^{-i2\pi x\cdot\xi} \frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}}d\xi \right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\varepsilon\leq r\leq\frac{1}{\varepsilon}} e^{-i2\pi r x\cdot\theta} \frac{r}{r^{n+1}} r^{n-1} dr\theta_j d\theta \right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(-i\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\varepsilon\leq r\leq\frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi r x\cdot\theta) \frac{dr}{r}\theta_j d\theta \right) dx \\
&\overset{(A)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-i\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\infty} \sin(2\pi r x\cdot\theta) \frac{dr}{r}\theta_j d\theta \right) dx \\
&\overset{(B)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(-i\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(x\cdot\theta)\theta_j d\theta \right) dx \\
&\overset{(C)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-i\varphi(x)\frac{x_j}{|x|} \right) dx
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

其中 (A) 是将 $\int_{\varepsilon\leq r\leq\frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi r x\cdot\theta)\frac{dr}{r}$ 视作关于 θ 的被积函数, 类似于(4.10)式可证 $|\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi r x\cdot\theta)\frac{dr}{r}|$ 被某个一致的常数控制, 于是根据 Lebesgue 控制收敛定理可对前述被积函数取 $\varepsilon\to 0$; (B) 是恒等式 $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$; 而 (C) 的成立基于恒等式

$$
-i\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(x\cdot\theta)\theta_j d\theta = -i\frac{x_j}{|x|} \tag{4.41}
$$

为此需要证明对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 均有

$$
\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(\xi\cdot\theta)\theta_j d\theta = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\frac{\xi_j}{|\xi|}. \tag{4.42}
$$

首先注意到

$$
\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(\theta_k)\theta_j d\theta = \begin{cases} 0, & k\neq j \\ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\theta_j| d\theta, & k = j \end{cases} \tag{4.43}
$$

其中 $k=j$ 的情况无所可证, 而 $k\neq j$ 的情况是因为此时 $\operatorname{sgn}(\theta_k)$ 是固定常数, 而 $\mathbb{S}^{n-1}$ 与 θ_j 均关于原点对称.

显见只需对单位向量 $\xi\in\mathbb{S}^{n-1}$ 证明(4.42)式即可, 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是满足 $Ae_j=\xi$ 的正交阵, 解得 $a_{kj}=\xi_k(k=1,\cdots,n)$, 于是

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(\xi\cdot\theta)\theta_j d\theta &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(Ae_j\cdot\theta)\theta_j d\theta \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(e_j\cdot A^t\theta)(AA^t\theta)_j d\theta \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(e_j\cdot\theta)(A\theta)_j d\theta \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(\theta_j)(a_{j1}\theta_1+\cdots+\xi_j\theta_j+\cdots+a_{jn}\theta_n) d\theta \\
&= \xi_j \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sgn}(\theta_j)\theta_j d\theta \\
&= \frac{\xi_j}{|\xi|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\theta_j| d\theta.
\end{aligned}
$$

下面计算 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\theta_j|d\theta$, 因为 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 地位是等同的, 故只需计算 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\theta_1|d\theta$ 即可, 为此需要特别推导下述换元公式:

引理 4.2

若 $n \geq 2, f$ 是定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数, 则

$$\int_{R\mathbb{S}^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \int_{-R}^{R} \int_{\sqrt{R^2-s^2}\mathbb{S}^{n-2}} f(s,\theta)d\theta \frac{Rds}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

其中 $R\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$,.

这是因为考虑球极坐标换元:

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos\varphi_1 \\
x_2 &= R\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= R\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\
x_n &= R\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

并设 $x(\varphi) = (x_1(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}),\cdots,x_n(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})), J(n,R,\varphi)$ 是球极坐标变换对应的 Jacobi 行列式, 则

$$\int_{R\mathbb{S}^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \int_0^\pi d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} f(x(\varphi))J(n,R,\varphi)d\varphi_{n-1}$$

再设

$$\begin{aligned}
\varphi' &= (\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}) \\
x' &= x'(\varphi') = (\cos\varphi_2, \sin\varphi_2\cos\varphi_3,\cdots,\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1})
\end{aligned}$$

可得

$$\int_{R\mathbb{S}^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \int_0^\pi \frac{Rd\varphi_1}{(R\sin\varphi_1)^{2-n}} \int_0^\pi \cdots \int_0^{2\pi} f(R\cos\varphi_1, R\sin\varphi_1 x'(\varphi'))J(n-1,1,\varphi')d\varphi'$$

而

$$\int_0^\pi \cdots \int_0^{2\pi} f(R\cos\varphi_1, R\sin\varphi_1 x'(\varphi'))J(n-1,1,\varphi')d\varphi' = \int_{\mathbb{S}^{n-2}} f(R\cos\varphi_1, R\sin\varphi_1 x')d\sigma(x')$$

故

$$\int_{R\mathbb{S}^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \int_0^\pi R^{n-1}(\sin\varphi_1)^{n-2}d\varphi_1 \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(R\cos\varphi_1, R\sin\varphi_1 x')d\sigma(x')$$

考虑换元

$$\begin{cases} s = R\cos\varphi_1 \\ ds = -R\sin\varphi_1 d\varphi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 \in (0,\pi) \\ \sqrt{R^2-s^2} = R\sin\varphi_1 \end{cases}$$

可得

$$\int_{R\mathbb{S}^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \int_{-R}^{R} (\int_{\mathbb{S}^{n-2}} f(s,\sqrt{R^2-s^2}\theta)d\theta)(\sqrt{R^2-s^2})^{n-2}\frac{Rds}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

对内部积分换元即得引理.

回到定理的证明, 知:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\theta_1|d\theta &\overset{(D)}{=} \int_{-1}^{1} |s| \int_{\sqrt{1-s^2}\mathbb{S}^{n-2}} d\varphi \frac{ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}} = v_{n-2}\int_{-1}^{1} |s|(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}ds \\
&= 2v_{n-2}\int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}ds = -v_{n-2}\int_0^1 (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}d(1-s^2) \\
&= v_{n-2}\int_0^1 u^{\frac{n-3}{2}}du = \frac{2v_{n-2}}{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}
\end{aligned}$$

其中 (D) 是因为在上面介绍的换元公式中 s 正是 x 在 x_1 所对应的坐标轴上的投影, 现在 $|\theta_1|$ 表示单位向量 $\theta = (\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 的第一个分量的绝对值, 它与 s 的含义是一样的; v_{n-2} 是 $\mathbb{S}^{n-2}$ 的面积. 至此(4.42)式得证, 命题进而得

证. □

利用 Riesz 变换的 Fourier 变换刻画4.1, 可以证明下面两个在 PDE 中有重要应用的命题:

命题 4.2 (Riesz 变换的平方和)

设 I 是恒同算子, 则在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有

$$-I = \sum_{j=1}^{n} R_j^2. \tag{4.44}$$

证明 由 Riesz 变换的 Fourier 变换刻画4.1知对任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\begin{aligned}
R_j^2(f)(x) &= R_j\left(\left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)\right)^{\vee}\right)(x) \\
&= \left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)\right)\right)^{\vee}(x) \\
&= \left(-\frac{\xi_j^2}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)\right)^{\vee}(x)
\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n} R_j^2(f)(x) = \left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j^2}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)\right)^{\vee}(x) = -f(x).$$

□

注 [UN],[JD] 中均指出 Riesz 变换的平方和4.2对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 均成立. 这是因为显见(4.44)式对 $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 均成立, 而 $\overline{C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$, 故由后文将证明的 Riesz 变换的 L^p 有界性可得(4.44)式对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ 均成立.

命题 4.3 (二阶导数的 Riesz 变换表示)

若 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), 1 \le j,k \le n$, 则

$$\partial_j\partial_k\varphi(x) = -R_jR_k\Delta\varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

证明 对欲证式左式取 Fourier 变换可得:

$$\begin{aligned}
(\partial_j\partial_k\varphi)^{\wedge}(\xi) &= (i2\pi\xi_j)(i2\pi\xi_k)\widehat{\varphi}(\xi) \\
&= -\left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)\left(-\frac{i\xi_k}{|\xi|}\right)(-4\pi^2|\xi|^2)\widehat{\varphi}(\xi) \\
&= -(R_jR_k\Delta\varphi)^{\wedge}(\xi)
\end{aligned}$$

两边同取 Fourier 逆变换即得欲证. □

现在如果能给出 R_j 在某种意义下 (诸如 L^p 或几乎处处等) 作为算子的有界性, 则命题4.3表明对二阶 PDEs 而言, 交叉项 $\partial_j\partial_k u$ 可以被对角项 Δu 在这种意义下控制, 这便可能将一般的二阶线性 PDEs 转化成本科阶段学习过的 Laplace 方程, 热方程与波方程, 进而推导出某些相似的性质. 下面给出一例 Riesz 变换在 PDE 中的应用:

例 4.4 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 是给定的函数, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 满足 Laplace 方程

$$\Delta u = f. \tag{4.45}$$

下面尝试将 u 的全体二阶导数用 f 的各 Riesz 变换来表示. 注意如果 $(\partial_j\partial_k u + R_jR_k(f))^{\wedge}$ 的支集在 $\{0\}$ 中, 则由支在原点的缓增分布刻画2.6知 $(\partial_j\partial_k u + R_jR_k(f))^{\wedge}$ 是多项式, 亦即存在依赖于 j,k 的 n 元多项式 P 使得

$$\partial_j\partial_k u = -R_jR_k(f) + P.$$

这便将 u 的任意二阶导数用 f 的 Riesz 变换表示了出来. 现在验证确实有 $\operatorname{supp}(\partial_j\partial_k u + R_jR_k(f))^{\wedge} \subset \{0\}$, 为此选定 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\psi(0) = 0$(亦即 $0 \notin \operatorname{supp}\psi$), 则因为 $\operatorname{supp}\psi$ 至少是闭集, 知存在 0 的某邻域 U_0 使得 ψ 在其中均

为 0, 于是可以选取一个 C^∞ 函数 η 使得其在 0 的某邻域 $U_1 \subset U_0$ 中为 0, 而在 $\operatorname{supp}\psi$ 中为 1. 定义

$$\zeta(\xi) = -\eta(\xi)\left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)\left(-\frac{i\xi_k}{|\xi|}\right)$$

因为已经通过 η 去除了 ζ 在 0 点处可能的奇异性, 故可以验证 ζ 及其各阶导数均为有界的 C^∞ 函数, 且

$$\eta(\xi)(i2\pi\xi_j)(i2\pi\xi_k) = \zeta(\xi)(-4\pi^2|\xi|^2)$$

现在在方程(4.45)两端同取 Fourier 变换得到

$$(-4\pi^2|\xi|^2)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

在上式两端同乘 ζ(因为 ζ 的任意阶导数均在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中, 故两端同乘 ζ 之后得到的式子不会改变原有式子的有界性, 可微性与可积性, 因而这个操作是合法的) 可得

$$\zeta(\xi)(-4\pi^2|\xi|^2)\widehat{u} = \zeta(\xi)\widehat{\Delta u} = \zeta(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

现对任意 $1 \le j,k \le n$ 有:

$$\begin{aligned}
\langle(\partial_j\partial_k u)^\wedge, \psi\rangle &= \langle(i2\pi\xi_j)(i2\pi\xi_k)\widehat{u}, \psi\rangle \\
&= \langle(i2\pi\xi_j)(i2\pi\xi_k)\widehat{u}, \eta\psi\rangle \\
&= \langle\eta(\xi)(i2\pi\xi_j)(i2\pi\xi_k)\widehat{u}, \psi\rangle \\
&= \langle\zeta(\xi)(-4\pi^2|\xi|^2)\widehat{u}, \psi\rangle \\
&= \langle\zeta(\xi)\widehat{f}(\xi), \psi\rangle \\
&= \left\langle-\eta(\xi)\left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)\left(-\frac{i\xi_k}{|\xi|}\right)\widehat{f}(\xi), \psi\right\rangle \\
&= \langle-\eta(\xi)(R_jR_k(f))^\wedge(\xi), \psi\rangle \\
&= -\langle(R_jR_k(f))^\wedge, \eta\psi\rangle \\
&= -\langle(R_jR_k(f))^\wedge, \psi\rangle
\end{aligned}$$

亦即 $\langle(\partial_j\partial_k u + R_jR_k(f))^\wedge, \psi\rangle = 0$ 对任意支集不包含 0 的 Schwartz 函数 ψ 成立, 由缓增分布支集的定义即知 $(\partial_j\partial_k u + R_jR_k(f))^\wedge$ 支在 $\{0\}$ 上.

4.2 齐次奇异积分与旋转法

到目前为止我们已经学习了 Hilbert 变换和 Riesz 变换, 并特别讨论了 Hilbert 变换的 L^p 有界性. 本节将给出 Riesz 变换的 L^p 性质.

4.2.1 齐次奇异积分与极大奇异积分

$\mathbb{R}^n$ 上的奇异积分算子可以看成 $\mathbb{R}^n$ 上 Riesz 变换的某种一般化. 现取定 $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx = 0$, 观察到积分核

$$K_\Omega(x) = \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}, \quad x \ne 0 \tag{4.46}$$

是阶为 $-n$ 的齐次函数, 它的性质类似于函数 $\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$. 因为 K_Ω 可能在 0 点处有奇异性, 故如果要和 K_Ω 作卷积, 被积函数总可能出现某个奇异点, 所以依旧需要仿照引入 Hilbert 变换与 Riesz 变换的方法来首先引入缓增分布 W_Ω:

$$\langle W_\Omega, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|\ge\varepsilon}K_\Omega(x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon\le|x|\le\frac{1}{\varepsilon}}K_\Omega(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{4.47}$$

根据 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx=0$ 可以说明 W_Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上良定义的缓增分布,这是因为此时 K_Ω 在以原点为中心的全体环上积分均为 0, 于是

$$
\begin{aligned}
|\langle W_\Omega,\varphi\rangle| &= \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}(\varphi(x)-\varphi(0))dx+\int_{|x|\ge 1}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\varphi(x)dx\right| \\
&\le \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{|x|\le 1}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^{n-1}}dx+\sup_{y\in\mathbb{R}^n}|y||\varphi(y)|\int_{|x|\ge 1}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^{n+1}}dx \\
&= \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{|x|\le 1}|x|\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n}dx+\sup_{y\in\mathbb{R}^n}|y||\varphi(y)|\int_{|x|\ge 1}\frac{1}{|x|}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n}dx \\
&\le \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{|x|\le 1}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n}dx+\sup_{y\in\mathbb{R}^n}|y||\varphi(y)|\int_{|x|\ge 1}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n}dx \\
&\lesssim \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}+\sum_{|\alpha|\le 1}\|x^\alpha\varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}
\end{aligned}
$$

至此即证 $W_\Omega\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 显见在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上分布 W_Ω 与函数 K_Ω 是重合的.

Hilbert 变换与 Riesz 变换对应的积分核都是 K_Ω 的特殊情况. 例如定义在单位球面 $\mathbb{S}^0=\{-1,1\}\subset\mathbb{R}$ 上的函数 $\Omega(\theta)=\frac{\theta}{\pi|\theta|}=\frac{1}{\pi}\operatorname{sgn}\theta$ 给出了 Hilbert 变换, 而定义在 $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数 $\Omega(\theta)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{\theta_j}{|\theta|}$ 给出了第 j 个 Riesz 变换.

定义 4.4 (截断奇异积分)

设 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx=0$, 对 $0<\varepsilon<N$, $f\in\bigcup_{1\le p<\infty}L^p(\mathbb{R}^n)$ 定义截断奇异积分为:

$$
T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)(x)=\int_{\varepsilon\le|y|\le N}f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy. \tag{4.48}
$$

根据 Young 不等式, 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 有

$$
\begin{aligned}
\|T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} &\le \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\left\|f*\frac{1}{|\circledast|^n}\right\|_{L^p(\{x\in\mathbb{R}^n:\varepsilon\le|x|\le N\})} \\
&\le \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\cdot\int_{\varepsilon\le|y|\le N}\frac{dy}{|y|^n}\cdot\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim_{\varepsilon,N}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

故对每个给定的 ε 与 N, (4.48)式均对 x 几乎处处有限, 因而截断奇异积分是良定义的. 记 T_Ω 是以分布 W_Ω 为积分核的奇异积分算子, 即:

$$
T_\Omega(f)(x)=(f*W_\Omega)(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)(x),\quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).
$$

这一算子的良定义性同样是由 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx=0$ 而来的, 事实上 **[JD]** 给出了下述命题:

命题 4.4

只要定义在单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数 Ω 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx=0$, 那么极限 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)(x)$ 对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均存在, 其中 $T_\Omega^{\varepsilon,N}$ 按(4.48)式定义.

证明 知

$$
\begin{aligned}
|\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)| &= \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|<1} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy + \lim_{N\to\infty}\int_{1\le|y|\le N} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy\right| \\
&\le \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|<1}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}(f(x-y)-f(x))dy\right| + \left|\lim_{N\to\infty}\int_{1\le|y|\le N}|y|f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^{n+1}}dy\right| \\
&\lesssim \lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{\varepsilon\le|y|\le 1}\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n-1}}dy + \sup_{\tau\in\mathbb{R}^n}|\tau f(\tau)|\lim_{N\to\infty}\int_{1\le|y|\le N}\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n+1}}dy \\
&= \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{|y|\le 1}\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n}dy + \sup_{\tau\in\mathbb{R}^n}|\tau f(\tau)|\lim_{N\to\infty}\int_{1\le|y|\le N}\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n}dy \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}(\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{\tau\in\mathbb{R}^n}|\tau f(\tau)|) < \infty.
\end{aligned}
$$

□

算子族 $\{T_\Omega^{(\varepsilon,N)}\}_{0<\varepsilon<N<\infty}$ 诱导的极大奇异积分定义为

$$
T_\Omega^{(**)}(f) = \sup_{0<N<\infty}\sup_{0<\varepsilon<N}|T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)|. \tag{4.49}
$$

注意到若 $\Omega\in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$, 则 $\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}$ 在 $|y|\to\infty$ 时形同 $\frac{1}{|y|^n}$, 此时其为 $\mathbb{R}^n\backslash B(0,\varepsilon)$ 上的可积函数, 故(4.48)式中的上截断界 N 此时不再需要了. 这种情况下极大奇异积分可以定义为

$$
T_\Omega^{(*)}(f) = \sup_{\varepsilon>0}|T_\Omega^{(\varepsilon)}(f)|, \tag{4.50}
$$

其中对 $f\in\bigcup_{1\le p<\infty}L^p(\mathbb{R}), \varepsilon>0, x\in\mathbb{R}^n$ 而言, $T_\Omega^{(\varepsilon)}(f)(x)$ 定义为绝对收敛积分:

$$
T_\Omega^{(\varepsilon)}(f)(x) = \int_{|y|\ge\varepsilon} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{y^n}dy.
$$

下面研究 $\Omega\in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 时 $T_\Omega^{(*)}$ 与 $T_\Omega^{(**)}$ 的关系, 注意到

$$
\left|\int_{\varepsilon\le|y|\le N} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy\right| \le \sup_{0<N<\infty}|T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)(x)| \tag{4.51}
$$

现对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1\le p<\infty)$ 在(4.51)左式中令 $N\to\infty$, 知极限在积分绝对收敛的意义下存在, 于是由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$
\left|\int_{|y|\ge\varepsilon} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy\right| \le \sup_{0<N<\infty}|T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)(x)|
$$

再在上式两端同时对 $\varepsilon>0$ 取上确界即知 $T_\Omega^{(*)}$ 被 $T_\Omega^{(**)}$ 点态控制. 根据定义知 $T_\Omega^{(\varepsilon,N)} = T_\Omega^{(\varepsilon)} - T_\Omega^{(N)}$, 两边同对 ε, N 取上确界可得 $T_\Omega^{(**)}\le 2T_\Omega^{(*)}$, 故当 $\Omega\in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 时 $T_\Omega^{(*)}$ 与 $T_\Omega^{(**)}$ 是点态等价的. 特别对 Hilbert 变换与 Riesz 变换而言, 上面的论述表明 $H^{(**)}$ 与 $H^{(*)}$ 等价, $R_j^{(**)}$ 与 $R_j^{(*)}$ 等价.

有一族乘子可以由上面所讨论的奇异积分算子来表示. 回忆零阶齐次函数的刻画2.44, 只要 m 是零阶齐次函数, 且其在球面上无穷可微, 那么 $m^\vee$ 可表为

$$
m^\vee = c\delta_0 + W_\Omega
$$

其中 $c\in\mathbb{C}$ 是常数, Ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上积分为零的光滑函数. 因此只要一个卷积算子对应的乘子是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的零阶齐次光滑函数, 它就形如 $cI+T_\Omega$, 其中 c 是常数, I 是恒同算子.

例 4.5 设 $P(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha\xi^\alpha$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 k 阶齐次多项式, 且其仅在 0 点处为 0, α 是 k 阶多重指标, 则函数

$$
m(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{P(\xi)} \tag{4.52}
$$

在球面上无穷可微, 且其为零阶齐次函数. 现在算子 $f\mapsto(m\widehat{f})^\vee$ 就可以表为 $f\mapsto cf + W_\Omega * f$, 其中 $\Omega\in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx = 0$. 本节就会讨论当 Ω 在球面上具有某种光滑性时其所对应的奇异积分算子的 L^p 有界性. 特别地, 可以据此说明由(4.52)式定义的 $m(\xi)\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$.

4.2.2 齐次奇异积分的 L^2 有界性

下面计算 W_Ω 的 Fourier 变换, 它有助于判断算子 $f \mapsto K_\Omega * f$ 是否是 L^2 有界的. 我们给出下述结果:

命题 4.5 (W_Ω 的 Fourier 变换)

若 $n \ge 2, \Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x)dx = 0$, 则 W_Ω 的 Fourier 变换是由下式定义的 (几乎处处有限的) 函数:

$$\widehat{W_\Omega}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\left(\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi\cdot\theta)\right)d\theta. \tag{4.53}$$

注 在着手证明命题4.5前, 需要说明下述几件事情:

首先, (4.53)右式对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 均有定义且有限, 根据 $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 知只需说明 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}d\theta < \infty$. 现记 $\xi = |\xi|\xi', \xi' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 知

$$\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|} = \log\frac{1}{|\xi|} + \log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}.$$

因为 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)d\theta = 0$, 故 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\log\frac{1}{|\xi|}d\theta = 0$, 于是只需验证对几乎处处的 $\xi' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 有

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|\log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}d\theta < \infty \tag{4.54}$$

即可. 在(4.54)左式关于 $\xi' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 积分有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}d\xi' d\theta &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log\frac{1}{|\xi_1|}d\xi d\theta \\ &\overset{(A)}{=} \nu_{n-2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)| \int_{-1}^{1}\left(\log\frac{1}{|s|}\right)(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}ds d\theta \\ &= C_n\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} < \infty\end{aligned}$$

其中 (A) 基于引理4.2与 $n \ge 2$. 现若在某个正测集 $D \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 上有 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|\log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}d\theta = \infty$, 则必有

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}d\xi' d\theta \ge \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)| \int_{D} \log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}d\xi' d\theta = \infty$$

矛盾! 因此(4.54)式对几乎处处的 $\xi' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 成立.

另外, 因为(4.53)右式是关于 ξ 的零阶齐次函数, 故其为 $\mathbb{R}^n$ 上的关于 ξ 的局部可积函数.

在正式证明 W_Ω 的 Fourier 变换4.5前, 还需要下述引理:

引理 4.3

若 a 是非零实数, 则存在常数 M 使得对 $0 < \varepsilon < N < \infty$ 有

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\N\to\infty}}\int_\varepsilon^N \frac{\cos(ra)-\cos(r)}{r}dr = \log\frac{1}{|a|}, \tag{4.55}$$

$$\forall N > \varepsilon > 0\left(\left|\int_\varepsilon^N \frac{\cos(ra)-\cos(r)}{r}dr\right| \le 2\left|\log\frac{1}{|a|}\right|\right), \tag{4.56}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\N\to\infty}}\int_\varepsilon^N \frac{e^{-ira}-\cos(r)}{r}dr = \log\frac{1}{|a|} - i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a, \tag{4.57}$$

$$\forall N > \varepsilon > 0\left(\left|\int_\varepsilon^N \frac{e^{-ira}-\cos(r)}{r}dr\right| \le 2\left|\log\frac{1}{|a|}\right| + M\right). \tag{4.58}$$

证明 首先证明(4.55),(4.56)式. 根据 Newton-Leibniz 公式知

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{N}\frac{\cos(ra)-\cos(r)}{r}dr &= \int_{\varepsilon}^{N}\frac{\cos(r|a|)-\cos(r)}{r}dr\\ &= -\int_{\varepsilon}^{N}\int_{1}^{|a|}\sin(tr)dtdr\\ &= -\int_{1}^{|a|}\int_{\varepsilon}^{N}\sin(tr)drdt\\ &= -\int_{1}^{|a|}\frac{\cos(\varepsilon t)}{t}dt+\int_{N}^{N|a|}\frac{\cos(t)}{t}dt\end{aligned}$$

依此可得

$$\left|\int_{\varepsilon}^{N}\frac{\cos(ra)-\cos(r)}{r}dr\right| \le \int_{1}^{|a|}\frac{dt}{t}+\int_{N}^{N|a|}\frac{dt}{t} = 2\left|\log\left|\frac{1}{|a|}\right|\right|.$$

另外注意到 $\varepsilon\to 0$ 时 $-\int_1^{|a|}\frac{\cos(\varepsilon t)}{t}dt\to -\log|a|$, 而 $N\to\infty$ 时 $\int_N^{N|a|}\frac{\cos(t)}{t}dt\to 0$, (4.55)式进而得证.

再证明(4.57),(4.58)式, 注意

$$\left|\int_{\varepsilon}^{N}\frac{\sin(ra)}{r}dr\right| = \left|\int_{\varepsilon|a|}^{N|a|}\frac{\sin(r)}{r}dr\right| \tag{4.59}$$

在 $\varepsilon\to 0, N\to\infty$ 时趋向 $\frac{\pi}{2}$, 且依照(4.10)式知存在 $M>0$ 使得对任意 $N,\varepsilon>0$ 均有 $|\int_{\varepsilon}^{N}\frac{\sin(ra)}{r}dr|\le M$. 现由 Euler 恒等式与(4.55),(4.56)式即得结果. □

下面证明 W_Ω 的 Fourier 变换4.5:

证明 设 $\xi'=\frac{\xi}{|\xi|}$, 则

$$\begin{aligned}\langle\widehat{W_\Omega},\varphi\rangle &= \langle W_\Omega,\widehat{\varphi}\rangle\\ &= \lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|\ge\varepsilon}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\widehat{\varphi}(x)dx\\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\N\to\infty}}\int_{\varepsilon\le|x|\le N}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\widehat{\varphi}(x)dx\\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\N\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\int_{\varepsilon\le|x|\le N}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}dxd\xi\\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\N\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\int_{\varepsilon\le r\le N}e^{-i2\pi r\theta\cdot\xi}\frac{dr}{r}d\theta d\xi\\ &\overset{(A)}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\N\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\int_{\varepsilon\le r\le N}(e^{-i2\pi r|\xi|\theta\cdot\xi'}-\cos(2\pi r|\xi|))\frac{dr}{r}d\theta d\xi\\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\N\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\int_{\frac{\varepsilon}{2\pi|\xi|}\le r\le\frac{N}{2\pi|\xi|}}\frac{e^{-ir\theta\cdot\xi'}-\cos(r)}{r}drd\theta d\xi\\ &\overset{(B)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)(\log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi\cdot\theta))d\theta d\xi,\end{aligned}$$

其中 (A) 是因为 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)d\theta=0$, 而 $\cos(2\pi r|\xi|)$ 本质上与 θ 无关; (B) 能将积分与极限号交换是基于(4.58)式与 Lebesgue 控制收敛定理. 命题至此即证. □

推论 4.1

若 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx=0$, 则对几乎处处 $\xi'\in\mathbb{S}^{n-1}$ 而言, 积分

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}d\theta \tag{4.60}$$

均绝对收敛. 另外, 算子 $T_\Omega: f\mapsto f*W_\Omega$ 将 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 映到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\operatorname*{ess\ sup}_{\xi'\in\mathbb{S}^{n-1}}\left|\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}d\theta\right|<\infty. \tag{4.61}$$

♡

证明 为说明(4.60)式的绝对收敛性, 考虑将其关于 ξ' 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上积分, 类似于(4.54)式有界性的证明即得结论. 另外, 由 W_Ω 的 Fourier 变换4.5知(4.61)式成立当且仅当 $\widehat{W_\Omega} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 根据 $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画2.29又知后者等价于 T_Ω 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的, 命题即证. □

特别强调(4.61)式的成立是因为存在 $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 使得 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x)dx = 0$ 的同时 $\operatorname{ess}\sup_{\xi'\in\mathbb{S}^{n-1}} |\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}d\theta| = \infty$, 因此并非所有 Ω 均能诱导出 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子. 然而, 只要 Ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的奇函数 (即 $\Omega(-\theta) = -\Omega(\theta)$ 对任意 $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ 成立), 则(4.61)式必成立, 这是因为 $\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}$ 关于 θ 是偶函数, 因而其与关于 θ 的奇函数的乘积在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的积分必为零. 因此, 只要 Ω 是奇函数, 其诱导的奇异积分 T_Ω 就必是 L^2 有界的.

4.2.3 旋转法

在讨论完 Ω 为奇函数时形如 T_Ω 的奇异积分算子的 L^2 有界性后, 下面来研究它们的 L^p 有界性. 当 Ω 为奇函数时, 一般通过旋转法这一步骤来研究算子 T_Ω. 这个方法基于有向 Hilbert 变换:

定义 4.5 (有向 Hilbert 变换)

取定单位向量 $\theta \in \mathbb{R}^n$, 对 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义 f 方向为 θ 的有向 Hilbert 变换为:

$$\mathcal{H}_\theta(f)(x) = \frac{1}{\pi}\,\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t\theta)\frac{dt}{t}. \tag{4.62}$$

♣

(4.62)式是良定义的, 因为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 表明 $\frac{f(x-t\theta)}{t}$ 在无穷远处衰减足够快, 而在 0 附近通过加减 $f(x)$ 可知积分同样收敛.

类似于前面极大Hilbert变换与极大Riesz变换的定义, 这里也可以定义有向极大Hilbert变换. 对 $f \in \bigcup_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ 与 $0<\varepsilon<N<\infty$ 有

$$\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon\le|t|\le N} f(x-t\theta)\frac{dt}{t},$$
$$\mathcal{H}_\theta^{(**)}(f)(x) = \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}(f)(x)|$$

对任意固定的 $0<\varepsilon<N<\infty$ 与 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}(f)$ 都是几乎处处有定义的. 这是因为根据 Minkowski 积分不等式有:

$$\|\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{2}{\pi}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\log\frac{N}{\varepsilon} < \infty$$

因此 $\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}(f)(x)$ 对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n$ 均有限. 这同时也说明 $\mathcal{H}_\theta^{(**)}(f)$ 对 $f \in \bigcup_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ 也是良定义的.

下面利用旋转法来证明奇函数诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性:

定理 4.5 (奇函数诱导的齐次奇异积分算子与极大奇异积分算子的 L^p 有界性)

若 $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 是奇函数, 则对任意 $1<p<\infty$ 而言, T_Ω 与 $T_\Omega^{(**)}$ 均是 L^p 有界的. 特别地, T_Ω 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的定义在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中有有界延拓 (延拓得到的算子依旧记为 T_Ω).

♡

证明 设 $e_j \in \mathbb{S}^{n-1}$ 是单位向量. 根据有向 Hilbert 变换的定义, 算子 $\mathcal{H}_{e_1}$ 可以视作仅对第一个变量作用 Hilbert 变换, 而对其余变量作用恒同算子. 根据 Riesz 定理4.2, Hilbert 变换本身是 $L^p(\mathbb{R})$ 有界的, 因而 $\mathcal{H}_{e_1}$ 也是 L^p 有界的, 且其范数等同于 Hilbert 变换的 L^p 范数 (即 $\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}$). 对任意 $A \in O(n)$, 因为 $f(x-tAe_1) = f(A(A^{-1}x-te_1))$, 故:

$$\mathcal{H}_{A(e_1)}(f)(x) = \mathcal{H}_{e_1}(f\circ A)(A^{-1}x). \tag{4.63}$$

这说明 $\mathcal{H}_\theta$ 的 L^p 有界性可由 $\mathcal{H}_{e_1}$ 的 L^p 有界性导出. 至此可知对任意 $1<p<\infty$ 与任意 $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ 而言, $\mathcal{H}_\theta$ 均是 L^p 有界的, 且 $\sup_{\theta\in\mathbb{S}^{n-1}} \|\mathcal{H}_\theta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}$.

恒等式(4.63)对 $\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}$ 与 $\mathcal{H}_\theta^{(**)}$ 依旧成立, 于是由极大 Hilbert 变换的 L^p 有界性4.4可得 $\mathcal{H}_\theta^{(**)}$ 的 $L^p(1<p<\infty)$ 有界性.

下面说明奇函数 Ω 诱导的奇异积分 T_Ω 恰为有向 Hilbert 变换 $\mathcal{H}_\theta$ 的某种平均, 这是因为对 $f \in \bigcup_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ 有:

$$\int_{\varepsilon\le|y|\le N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)dy \overset{(A)}{=} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta) \int_\varepsilon^N f(x-r\theta)\frac{dr}{r}d\theta$$
$$\overset{(B)}{=} -\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta) \int_\varepsilon^N f(x+r\theta)\frac{dr}{r}d\theta$$

其中 (A) 是极坐标换元, (B) 基于换元 $\theta\mapsto-\theta$ 与 Ω 是奇函数. 根据上式知

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon\le|y|\le N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} d(x-y)dy &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta) \int_\varepsilon^N \frac{f(x-r\theta)-f(x+r\theta)}{2}\frac{dr}{r}d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\mathcal{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}(f)(x)d\theta.\end{aligned} \tag{4.64}$$

在(4.64)式两端对 $0<\varepsilon<N<\infty$ 取上确界知

$$T_\Omega^{(**)}(f)(x) \le \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|\mathcal{H}_\theta^{(**)}(f)(x)d\theta. \tag{4.65}$$

另在(4.64)式两端令 $\varepsilon\to0, N\to\infty$, 由 Lebesgue 控制收敛定理[32]可知对 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$T_\Omega(f)(x) = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\mathcal{H}_\theta(f)(x)d\theta. \tag{4.66}$$

现在由(4.65),(4.66)式, $\mathcal{H}_\theta$ 与 $\mathcal{H}_\theta^{(**)}$ 的 L^p 有界性及 Minkowski 积分不等式知:

$$\begin{aligned}\|T_\Omega\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le1} \|T_\Omega(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le1} \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\mathcal{H}_\theta(f)(x)d\theta\right|^p dx\right)^{\frac1p} \\ &\le \frac{\pi}{2}\sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\Omega(\theta)\mathcal{H}_\theta(f)(x)|^p dx\right)^{\frac1p} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{H}_\theta(f)(x)|^p dx\right)^{\frac1p}|\Omega(\theta)|d\theta \\ &\le \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(\theta)|\sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le1}\|\mathcal{H}_\theta(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}d\theta \\ &\le \frac{\pi}{2}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\sup_{\theta\in\mathbb{S}^{n-1}}\|\mathcal{H}_\theta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \frac{\pi}{2}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} < \infty\end{aligned}$$

[32]可以用 Lebesgue 控制收敛定理是因为注意到 $\mathbb{S}^{n-1}$ 是测度有限的区域, 所以 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1}) \Rightarrow \Omega\in L^{p'}(\mathbb{S}^{n-1})(p'\in(1,\infty))$, 利用指标为 (p',p) 的 Hölder 不等式即得可积性.

且

$$
\begin{aligned}
\|T_\Omega^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1} \|T_\Omega^{(**)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(\theta)|\mathcal{H}_\theta^{(**)}(f)(x)d\theta\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{\pi}{2}\sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(|\Omega(\theta)|\mathcal{H}_\theta^{(**)}(f)(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}_\theta^{(**)}(f)(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}|\Omega(\theta)|d\theta \\
&\le \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}_\theta^{(**)}(f)(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}|\Omega(\theta)|d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(\theta)|\|\mathcal{H}_\theta^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}d\theta \\
&\le \frac{\pi}{2}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\sup_{\theta\in\mathbb{S}^{n-1}}\|\mathcal{H}_\theta^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \frac{\pi}{2}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\|H^{(*)}\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} < \infty
\end{aligned}
$$

由此即知 Ω 为奇函数时 T_Ω 与 $T_\Omega^{(**)}$ 均是 L^p 有界的. □

推论 4.2 (Riesz 变换与极大 Riesz 变换的 L^p 有界性)

Riesz 变换 R_j 与极大 Riesz 变换 $R_j^{(*)}$ 均是 $L^p(1<p<\infty)$ 有界的.

证明 回忆 Riesz 变换的积分核 $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, 知其为奇函数, 且在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上可积, 故根据奇函数诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性4.5知 R_j 是 $L^p(1<p<\infty)$ 有界的. 因为 R_j 的积分核在无穷远处的衰减近似于 $|x|^{-n}$, 故由卷积的 Young 不等式知 $R_j^{(*)}(f)$ 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 良定义. 注意到 $R_j^{(*)}$ 被 $2R_j^{(**)}$ 点态控制, 而 $R_j^{(**)}$ 已知是 $L^p(1<p<\infty)$ 有界的, 故欲证成立.

注 由奇函数诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性4.5的证明进一步可知, 只要 Ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的奇函数, 就有

$$
\|T_\Omega\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\begin{cases} ap, & p\ge 2 \\ a(p-1)^{-1}, & 1<p\le 2\end{cases}
$$

$$
\|T_\Omega^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\begin{cases} ap, & p\ge 2 \\ a(p-1)^{-1}, & 1<p\le 2\end{cases}
$$

其中 $a>0$ 与 p,n 无关. 特别当 $\Omega(\theta)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{\theta_j}{|\theta|}$ 时, 回忆 Riesz 变换的 Fourier 变换刻画4.1的证明, 知

$$
\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{|\theta_j|}{|\theta|}d\theta = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{2}{\pi}
$$

于是上述结果可以给出 Riesz 变换的一个 L^p 估计:

$$
\|R_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} \le \begin{cases} 2p, & 2\le p<\infty \\ \frac{2p}{p-1}, & 1<p\le 2\end{cases} \tag{4.67}
$$

4.2.4 补充: 任意自一维算子出发的旋转法

本节选自 [**JD**]. 先前的旋转法只介绍了利用有向 Hilbert 变换证明某种 L^p 有界性的方法, 事实上这一套方法对任意一维算子都是成立的. 一般来说, 设 T 是在 $L^p(\mathbb{R})$ 上有界的一维算子, $u\in\mathbb{S}^{n-1}$. 从 T 出发可按下述方法构造一个在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界的算子 T_u: 设 $L_u=\{\lambda u:\lambda\in\mathbb{R}\}$, $L_u^\perp$ 是其在 $\mathbb{R}^n$ 中的正交补, 根据正交分解原理知任意取

定 $x \in \mathbb{R}^n$, 总存在唯一的 $x_1 \in \mathbb{R}$ 与 $\overline{x} \in L_u^{\perp}$ 使得 $x = x_1 u + \overline{x}$. 现在定义 $T_u(f)(x)$ 为

$$T_u(f): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto T_u(f)(x) := T(f(\circledast u + \overline{x}))(x_1)$$

若 $\|T\|_{L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})} = C_p$, 则根据 Fubini 定理知:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)|^p dx &= \int_{L_u^{\perp}} \int_{\mathbb{R}} |T(f(\circledast u + \overline{x}))(x_1)|^p dx_1 d\overline{x} \\ &\le C_p^p \int_{L_u^{\perp}} \int_{\mathbb{R}} |f(\circledast u + \overline{x})(x_1)|^p dx_1 d\overline{x} \\ &= C_p^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\end{aligned}$$

这样得到的算子包括有向 Hardy-Littelwood 极大函数

$$M_u(f)(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x - tu)| dt$$

以及有向 Hilbert 变换

$$\mathcal{H}_u(f)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} f(x - tu) \frac{dt}{t}.$$

因为经由算子 T 诱导得到的算子 T_u 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界, 故它们的任意凸组合依旧是 L^p 有界算子. 另外还有下述结果:

命题 4.6 (一维算子诱导的有向算子的 L^p 有界性)

设 T 是在 $L^p(\mathbb{R})$ 上有界的一维算子, 且其算子范数为 C_p, T_u 是 T 诱导得到的有向算子. 对任意 $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$, 定义 T_Ω 为

$$T_\Omega(f)(x) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(u) T_u(f)(x) d\sigma(u)$$

则算子 T_Ω 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 且其算子范数至多为 $C_p \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}$.

证明 任取 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 知

$$\begin{aligned}\|T_\Omega(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(u) T_u(f)(x) d\sigma(u) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{(A)}{\le} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_u(f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |\Omega(u)| d\sigma(u) \\ &\le \int_{\mathbb{S}^{n-1}} C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |\Omega(u)| d\sigma(u) = C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\end{aligned}$$

其中 (A) 是 Minkowski 不等式, 命题至此即证. □

注 特别对有向 Hardy-Littlewood 极大算子 M_u 而言, 可以仿照上述证明说明对任意 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, M_u 都是 L^p 有界的, 其中 M 的 L^p 有界性在极大算子的强 (p, p) 型不等式3.5中已经说明过了.

4.2.5 具偶积分核的奇异积分

对定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的任意函数 Ω, 显见总能把它写成某个奇函数与某个偶函数的和:

$$\Omega_e(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u) + \Omega(-u)), \ \Omega_o(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u) - \Omega(-u)).$$

上一小节说明了具奇积分核的奇异积分是 L^p 有界的, 现在为了研究具一般核的奇异积分, 就需要研究具偶积分核的奇异积分. 本小节总设 $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 是偶函数, 且 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x) dx = 0$. 根据 Riesz 变换的平方和4.2知在 $L^2(\mathbb{R}^n)$(实际上是在 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$) 中有

$$T_\Omega = -\sum_{j=1}^{n} R_j R_j T_\Omega \tag{4.68}$$

如果 R_jT_Ω 可表为某个奇函数 Ω_j 诱导的形如 T_{Ω_j} 的奇异积分算子, 那么 T_Ω 的 L^p 有界性就可以藉由恒等式(4.68)与 T_{Ω_j} 作为奇函数诱导的齐次奇异积分的有界性4.5得到了. 事实上, R_jT_Ω 确实具有奇积分核, 但这个积分核可能并不在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上可积. 要想得到 R_jT_Ω 的可积性, 就需要 Ω 本身有额外的对数可积性:

$$c_\Omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|\log(1+|\Omega(\theta)|)d\theta < \infty. \tag{4.69}$$

对数可积性(4.69)要强于 L^1 可积性, 这是因为函数 $x \mapsto x(1-\log(1+x))$ 在 $x \geq 0$ 时大于某固定常数 C_0, 于是

$$\begin{aligned}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} &\leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|\log(1+|\Omega(\theta)|)d\theta + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|(1-\log(1+|\Omega(\theta)|))d\theta \\ &\leq c_\Omega + C_0\nu_{n-1} \leq C_n(c_\Omega+1)\end{aligned}$$

这说明 $\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}$ 总会被 $c_\Omega+1$ 的某与 n 相关的常数倍控制. 下面介绍本节主要结果:

定理 4.6 (偶函数诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性)

若 $n \geq 2$, Ω 是在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上满足对数可积性(4.69)的偶函数, 且 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x)dx = 0$, 则 Ω 诱导的奇异积分算子 T_Ω 在 $L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 上有界, 且

$$\|T_\Omega\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \max\{(p-1)^{-2}, p^2\}(c_\Omega+1).$$

♡

注 如果定理4.6中的算子 T_Ω 还是弱 $(1,1)$ 型的, 那么 T_Ω 的 L^p 范数估计还能提升为 $\|T_\Omega\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n(p-1)^{-1}(c_\Omega+1)$.

证明 设 W_Ω 是 T_Ω 对应的分布核. 已知 W_Ω 在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上与函数 $\Omega(x/|x|)|x|^{-n}$ 重合. 根据 W_Ω 的 Fourier 变换4.5与 Ω 是偶函数知

$$\widehat{W_\Omega}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}d\theta, \tag{4.70}$$

这说明 $\widehat{W_\Omega}$ 同样是偶函数. 现根据 Ω 的对数可积性可推知 $\widehat{W_\Omega}$ 有界, 这是因为注意到当 $A \geq 1, B > 0$ 时对 B 求导可证

$$AB \leq A\log(1+A) + e^B$$

于是

$$\left|\Omega(\theta)\log\frac{1}{\xi\cdot\theta}\right| = \left|2\Omega(\theta)\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1}{\xi\cdot\theta}\right| \leq 2|\Omega(\theta)|\log(1+2|\Omega(\theta)|) + \frac{1}{|\xi\cdot\theta|^{\frac{1}{2}}}$$

由 Ω 的对数可积性知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} 2|\Omega(\theta)|\log(1+2|\Omega(\theta)|)d\theta &\leq 2\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|\log(2+2|\Omega(\theta)|)d\theta \\ &= 2\log 2\cdot\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|d\theta + 2\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|\log(1+|\Omega(\theta)|)d\theta \\ &< \infty\end{aligned}$$

另因为 ξ 与 θ 趋近正交时 $|\xi\cdot\theta|$ 趋零的速度近似于 $\cos x$ 在 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时趋零的速度, 故 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{|\xi\cdot\theta|^{\frac{1}{2}}}d\theta < \infty$, 因而 $\widehat{W_\Omega} < \infty$, 从而

$$\|T_\Omega(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\cdot\widehat{W_\Omega}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\widehat{W_\Omega}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{W_\Omega}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

故 T_Ω 是 L^2 有界的.

下面说明 T_Ω 的 L^p 有界性, 回忆在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有 $-I = \sum_{j=1}^n R_j^2$ 知

$$T_\Omega = -\sum_{j=1}^n R_jT_j, \tag{4.71}$$

其中 $T_j = R_jT_\Omega$. 因为 T_Ω 与每个 R_j 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上都是良定义且有界的, 故(4.71)式至少在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中是有意义的算

子恒等式. 现对于 T_j 有:

$$T_j(f)(x) = R_j(T_\Omega(f))(x) = R_j(f * W_\Omega)(x) = \left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}\widehat{f}(\xi)\right)^\vee(x)$$

于是 T_j 对应的积分核是 $(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega})^\vee$, 记之为 K_j. 到目前为止, 我们只知道 K_j 是一个缓增分布, 且 $\widehat{K_j}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)$. 接下来我们首先需要说明 K_j 与在某个环上可积的函数重合, 为此记

$$W_\Omega = W_\Omega^0 + W_\Omega^1 + W_\Omega^\infty$$

其中

$$\begin{aligned}
\langle W_\Omega^0, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|\le\frac{1}{2}}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\varphi(x)dx,\\
W_\Omega^1(x) &= \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\chi_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2}(x),\\
W_\Omega^\infty(x) &= \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\chi_{|x|>2}(x).
\end{aligned}$$

显见 $W_\Omega^1, W_\Omega^\infty$ 都是函数, 而对于 W_Ω^0 来说, 前面已经证明过其为缓增分布. 现固定 $j\in\{1,\cdots,n\}$, 记

$$K_j = K_j^0 + K_j^1 + K_j^\infty$$

其中

$$\begin{aligned}
K_j^0 &= \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^0}(\xi)\right)^\vee,\\
K_j^1 &= \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^1}(\xi)\right)^\vee,\\
K_j^\infty &= \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^\infty}(\xi)\right)^\vee.
\end{aligned}$$

K_j^1, K_j^∞ 显然是良定义的, 因为 $W_\Omega^1, W_\Omega^\infty$ 均为支在原点外的可积函数, 故 $\widehat{W_\Omega^1}, \widehat{W_\Omega^\infty}$ 同样均为支在原点外的可积函数, 这说明 $-i\frac{\xi_i}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^1}, -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^\infty}$ 都可作 Fourier 逆变换. 对于 K_j^0, 因为 W_Ω^0 是紧支分布 ($\operatorname{supp} W_\Omega^0 \subset \overline{B(0,\frac{1}{2})}$), 由紧支分布 Fourier 变换的性质2.21知 $\widehat{W_\Omega^0}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 于是 $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^\infty}$ 至少是缓增分布, 其 Fourier 逆变换自然也是良定义的.

现定义环

$$A = \{x\in\mathbb{R}^n : \frac{2}{3} < |x| < \frac{3}{2}\}.$$

对某个支在 A 上的光滑函数 ϕ, 有

$$\begin{aligned}
\langle K_j^0, \phi\rangle &= \left\langle\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^0}(\xi)\right)^\vee, \phi\right\rangle = \left\langle -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^0}(\xi), \phi^\vee(\xi)\right\rangle = \left\langle \widehat{W_\Omega^0}(\xi), -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\phi^\vee(\xi)\right\rangle\\
&= \left\langle W_\Omega^0, \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\phi^\vee(\xi)\right)^\wedge\right\rangle = \left\langle W_\Omega^0, \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{\phi}(-\xi)\right)^\wedge\right\rangle = \left\langle W_\Omega^0, \left(i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{\phi}(\xi)\right)^\vee\right\rangle\\
&= -\langle W_\Omega^0, R_j(\phi)\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<\frac{1}{2}}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}R_j(\phi)(y)dy\\
&= -\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<\frac{1}{2}}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{y_j-x_j}{|y-x|^{n+1}}\phi(x)dx\right)dy,
\end{aligned}$$

特别注意上最后一式得到的积分 $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{y_j-x_j}{|y-x|^{n+1}}\phi(x)dx$ 在正常意义而非主值意义下存在, 这是因为 $\operatorname{supp}\phi\subset A$ 决定了 $|x|>\frac{2}{3}$, 而外层积分区域决定了 $|y|<\frac{1}{2}$, 这说明 $|y-x|\ge\frac{1}{6}$, 亦即前述积分的被积函数并无奇异性. 这说明至少在 A 内, K_j^0 与函数

$$x\mapsto -\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<\frac{1}{2}}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\frac{y_j-x_j}{|y-x|^{n+1}}dy$$

重合, 下面说明该函数在 A 上有界:

$$\left|\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<\frac{1}{2}}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy\right| \overset{(A)}{=} \left|\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{|y|<\frac{1}{2}}\left(\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy\right|$$

$$\leq \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{|y|<\frac{1}{2}} |g(x-y)-g(x)| \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} dy$$
$$\overset{(B)}{\lesssim_n} \int_{|y|\leq\frac{1}{2}} |y| \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} dy \lesssim_n \int_{|y|\leq\frac{1}{2}} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} dy \lesssim_n \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} < \infty$$

其中 (A) 是因为 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y)dy = 0$, (B) 基于 $g(x) = \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ 的微分中值定理, 其中 $|Dg|$ 有一致上界是因为 $|x-y| \geq \frac{1}{6}, x \in A$. 至此可知 K_j^0 在 A 上是与一个有界函数重合的, 又由 A 的有界性可知 K_j^0 在 A 上可积. 同样在 $x \in A$ 时有

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left| \int_{|y|>2} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy \right| &\leq \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{|y|>2} \frac{|x_j - y_j|}{|x-y|^{n+1}} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} dy \\
&\lesssim_n \int_{|y|>2} \frac{1}{|x-y|^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} dy \\
&\lesssim_n \int_{|y|>2} \frac{1}{(|y|-\frac{3}{2})^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} dy \\
&\lesssim_n \int_{|y|>2} \frac{1}{|y|^{2n}} |\Omega(y/|y|)| dy \\
&\lesssim_n \int_2^\infty \frac{1}{|r|^{2n}} dr \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)| J(r,\theta) d\theta \\
&\lesssim_n \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} \int_2^\infty \frac{dr}{r^{n+1}} < \infty
\end{aligned}$$

这说明至少在环 A 内, K_j^∞ 与有界函数

$$x \mapsto \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{|y|>2} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy$$

重合, 又由 A 的有界性可知 K_j^∞ 在 A 上可积. 最后来讨论 K_j^1 的可积性, 因为 $\{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\} \cap A \neq \emptyset$, 故若依旧仿照对 K_0^j 的讨论, 可以得到

$$\langle K_j^1, \phi \rangle = -\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\frac{1}{2}\leq|y|\leq 2} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j - x_j}{|y-x|^{n+1}} \phi(x) dx \right) dy, \ \operatorname{supp}\phi \subset A$$

此时 $\frac{1}{|y-x|^{n+1}}$ 势必爆破, 所以现在没法再通过有界性说明可积性了. 事实上, 这里需要考虑 W_Ω^1 的对数可积性(4.69):

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq 2} |W_\Omega^1(x)| \log\left(1 + |W_\Omega^1(x)|\right) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n} \log\left(1 + \frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n} \chi_{\frac{1}{2}\leq|x|\leq 2}(x)\right) dx \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\Omega(\theta)|}{r^n} \log\left(1 + \frac{|\Omega(\theta)|}{r^n}\right) d\theta \right) r^{n-1} dr \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log(1 + 2^n |\Omega(\theta)|) d\theta \right) \frac{dr}{r} \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dr}{r} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log(2^n + 2^n |\Omega(\theta)|) d\theta \\
&\leq \log 4 \cdot \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)(n \log 2 + \log(1 + |\Omega(\theta)|)) d\theta \\
&\leq \log 4 \cdot (n \log 2 \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} + c_\Omega) < \infty.
\end{aligned}$$

现在显见 $|A| < \infty$, 由三角不等式知 Riesz 变换 R_j 对每个 $1 < p \leq 2$ 均是 $L^p(A) \to L^p(A)$ 的可数次可加算子, 且由 Riesz 变换的 L^p 估计知 $1 < p \leq 2$ 时其范数至多为 $4\pi(p-1)^{-1}$, 于是由外插值定理3.22可知 $K_j^1 = R_j(W_\Omega^1)$ 是球

$|x| \le \frac{3}{2}$ 上的可积函数, 且

$$\begin{aligned}\int_A |K_j^1(x)|dx &\le C_n\left(\int_{|x|\le 2} |W_\Omega^1(x)| \log_2^+ |W_\Omega^1(x)|dx + 1\right)\\ &\lesssim_n \int_{|x|\le 2} |W_\Omega^1(x)| \log\left(1+|W_\Omega^1(x)|\right)dx + 1\\ &\lesssim_n c_\Omega + 1\end{aligned}$$

至此便说明了 K_j 在 A 上与某个可积函数重合, 从而其在测试函数上的作用可表为积分的形式. 另外, 因为 $\widehat{K_j}$ 是零阶齐次函数[33], 故由齐次分布的简单性质2.43(c) 知 K_j 是 $-n$ 阶齐次分布, 因此根据定义知对全体测试函数 φ 与全体 $\lambda > 0$ 均有

$$\langle K_j, \delta^\lambda(\varphi)\rangle = \langle K_j, \varphi\rangle, \tag{4.72}$$

其中 $\delta^\lambda(\varphi)(x) = \varphi(\lambda x)$. 但对支在环 $\frac{3}{4} < |x| < \frac{4}{3}$ 上的 C_0^∞ 函数 φ 与 $\lambda \in (\frac{8}{9}, \frac{9}{8})$, 知 $\delta^{\lambda^{-1}}(\varphi)$ 支在 A 上, 因而可将(4.72)式写成:

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\varphi(x)dx \overset{(C)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\varphi(\lambda^{-1}x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n K_j(\lambda x)\varphi(x)dx \tag{4.73}$$

其中 (C) 是因为(4.72)式表明 $\langle K_j, \varphi\rangle = \langle K_j, \delta^{\lambda^{-1}}(\varphi)\rangle$, 同时(4.73)式之所以可写成在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分, 是因为前面限定了 $\operatorname{supp}\varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{4} < |x| < \frac{4}{3}\} \subset A$, 因此由 K_j 在 A 上的可积性可得(4.73)式中积分的合法性. 现在很自然地根据 φ 的任意性, 希望 $K_j(x) = \lambda^n K_j(\lambda x)$ 对任意 $\frac{8}{9} < |x| < \frac{9}{8}$ 与 $\frac{8}{9} < \lambda < \frac{9}{8}$ 均成立, 特别是取 $\lambda = |x|^{-1}$ 时成立. 但不幸的是, 我们只能得到对任意 $\lambda \in (\frac{8}{9}, \frac{9}{8})$, $K_j(x) = \lambda^n K_j(\lambda x)$ 在某个挖去依赖于 λ 的零测集的环上成立[34]. 于是要定义 K_j 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的限制, 就需要更精确的结论.

对 $[\frac{8}{9}, \frac{9}{8}]$ 的任意子区间 J, 由(4.73)式知对每个固定的 $\lambda \in (\frac{8}{9}, \frac{9}{8})$, $\lambda^n K_j(\lambda x)$ 总能在挖去某个零测集后视作与 λ 无关的函数 $K_j(x)$, 于是

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\fint_J \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda\right)\varphi(x)dx$$

其中

$$\fint_J \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda = \frac{1}{|J|}\int_J \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda.$$

因为 φ 是支在环 $\frac{3}{4} < |x| < \frac{4}{3}$ 的任意 C_0^∞ 函数, 故对 $[\frac{8}{9}, \frac{9}{8}]$ 的任意子区间 J 而言, 都存在环[35]$A' = \{x : \frac{27}{32} < |x| < \frac{32}{27}\}$ 的零测子集 E_J 使得对任意 $x \in A'\backslash E_J$ 均有

$$K_j(x) = \fint_J \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda. \tag{4.74}$$

现取 $J_0 = [\sqrt{\frac{8}{9}}, \sqrt{\frac{9}{8}}]$, 下面说明存在 A' 的零测子集 E 使得对任意 $x \in A'\backslash E$ 均有

$$\fint_{J_0} \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda = \fint_{rJ_0} \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda \tag{4.75}$$

其中 $r \in J_0$ 是任意的. 事实上, 设 $E = \bigcup_{r\in J_0\cap\mathbb{Q}} E_{rJ_0}$, 其中 E_{rJ_0} 是 $rJ_0 \subset [\frac{8}{9}, \frac{9}{8}]$ 中的某零测子集, 则显见 $E \subset [\frac{8}{9}, \frac{9}{8}]$ 依旧是零测集. 现在从(4.74)式出发, 分别取 $J = J_0$ 和 $J = rJ_0$ 即知(4.75)对任意 $x \in A'\backslash E$ 与任意 $r \in J_0 \cap \mathbb{Q}$ 均成立. 但如果固定 $x \in A'\backslash E$, 不难看出(4.75)右式是关于 r 的函数, 且其在 $J_0 \cap \mathbb{Q}$ 为常数且连续, 因而它必关于全体 $r \in J_0$ 都为常数, 断言因而成立.

---

[33]这是因为 $\widehat{K_j}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)$, 而 $\frac{\xi_j}{|\xi|}$ 和 $\widehat{W_\Omega}(\xi)$ 都是零阶齐次函数.

[34]因为在写下 $\langle K_j, \delta^\lambda(\varphi)\rangle = \langle K_j, \varphi\rangle$ 的这一刻起, x 就已经消失了, 也就是说这个式子最终的结果不应该依赖于 x, 而前面所谈的想法是指对每个 x 都对应取一个 λ, 这与式子本身所谈的" 固定一个 λ 后遍历全体 x" 的想法是不符合的. 所以从(4.73)式中得到的结果只能表述成对每个固定的 λ 的函数等式.

[35]A' 之所以这么写, 是因为希望保证 $\frac{3}{4} < |\lambda x| < \frac{4}{3}$, 结合 $\lambda \in (\frac{8}{9}, \frac{9}{8})$ 即得 $\frac{27}{32} < |x| < \frac{32}{27}$.

记 $x=\delta\theta$, 其中 $\frac{27}{32}<\delta<\frac{32}{27}, \theta\in\mathbb{S}^{n-1}$, 则根据 Fubini 定理[36]知存在 $\delta\in(\frac{27}{32},\frac{32}{27})$ 使得

$$\fint_{J_0}\lambda^n K_j(\lambda\delta\theta)d\lambda=\fint_{rJ_0}\lambda^n K_j(\lambda\delta\theta)d\lambda \tag{4.76}$$

对几乎全体 $\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$ 与全体 $r\in J_0$ 均成立. 现固定这样的 δ 并记之为 δ_0, 再定义 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数 Ω_j 为:

$$\Omega_j(\theta)=\fint_{J_0}\delta_0^n\lambda^n K_j(\lambda\delta_0\theta)d\lambda=\fint_{rJ_0}\delta_0^n\lambda^n K_j(\lambda\delta_0\theta)d\lambda,\ \forall r\in J_0$$

因为 K_j 在环 A 上可积, 故函数 Ω_j 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上几乎处处有定义, 且在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上可积.

记 $e_1=(1,0,\cdots,0)$, 设 $\Psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是非负且非零的径向函数, 其支在环 $\frac{32}{27\sqrt{2}}<|x|<\frac{27\sqrt{2}}{32}$ 上. 注意到对任意 $r\in J_0$ 均有

$$\Omega_j(\theta)=\fint_{r^{-1}J_0}\delta_0^n\lambda^n K_j(\lambda\delta_0\theta)d\lambda=\fint_{J_0}\delta_0^n r^n\lambda^n K_j(r\lambda\delta_0\theta)d\lambda$$

在上式两端同乘 $\Psi(re_1)$, 关于 θ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上积分, 然后关于测度 $\frac{dr}{r}$ 在 $(0,\infty)$ 上积分, 得到:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\Psi(re_1)\frac{dr}{r}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega_j(\theta)d\theta&=\int_0^\infty\Psi(re_1)\frac{dr}{r}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\fint_{J_0}\delta_0^n r^n\lambda^n K_j(r\lambda\delta_0\theta)d\lambda\right)d\theta\\&=\fint_{J_0}\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\delta_0^n\lambda^n K_j(\lambda\delta_0 r\theta)\Psi(re_1)r^n d\theta\frac{dr}{r}d\lambda\\&\overset{(D)}{=}\fint_{J_0}\int_{\mathbb{R}^n}\delta_0^n\lambda^n K_j(\lambda\delta_0 x)\Psi(x)dxd\lambda\\&=\fint_{J_0}\int_{\mathbb{R}^n}K_j(x)\Psi((\lambda\delta_0)^{-1}x)dxd\lambda\\&=\fint_{J_0}\langle K_j,\Psi((\lambda\delta_0)^{-1}\circledast)\rangle d\lambda\\&\overset{(E)}{=}\fint_{J_0}\langle K_j,\Psi\rangle d\lambda=\langle K_j,\Psi\rangle.\end{aligned}$$

其中 (D) 是将极坐标换回欧氏坐标, 并考虑了 Ψ 是径向函数, (E) 是因为 K_j 是 $-n$ 阶齐次分布. 另一方面, 知存在常数 c'_Ψ 使得

$$\begin{aligned}\langle K_j,\Psi\rangle=\langle\widehat{K_j},\widehat{\Psi}\rangle&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{-i\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)\widehat{\Psi}(\xi)d\xi\\&=\int_0^\infty\frac{dr}{r}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{-ir\theta_j}{r|\theta|}\widehat{W_\Omega}(r\theta)\widehat{\Psi}(r\theta)r^n d\theta\\&=\int_0^\infty\frac{dr}{r}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{-ir\theta_j}{r|\theta|}\widehat{W_\Omega}(\theta)\widehat{\Psi}(re_1)r^n d\theta\\&=\int_0^\infty r^{n-1}\widehat{\Psi}(re_1)dr\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{-i\theta_j}{|\theta|}\widehat{W_\Omega}(\theta)d\theta\\&\overset{(F)}{=}c'_\Psi\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{-i\theta_j}{|\theta|}\widehat{W_\Omega}(\theta)d\theta\overset{(G)}{=}0\end{aligned}$$

其中 (F) 是因为 $\Psi\in C^\infty$ 提供了足够的光滑性, 因而 $\widehat{\Psi}$ 在 $r\to\infty$ 时有足够的衰减性, 这便保证了积分的收敛; (G) 是因为 $\frac{-i\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)$ 是奇函数. 这说明 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega_j(\theta)d\theta=0$. 又因为先前已经说明过 $\Omega_j\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$, 故 W_{Ω_j} 良定义, 下面说明

$$K_j=W_{\Omega_j}. \tag{4.77}$$

[36]Fubini 定理是在哪里用的? 个人认为 δ 的存在性 (以及 **[LG1]** 上提到的几乎处处 δ 都满足这个性质) 的原因在于(4.75)式是对 $x\in A'\in E$ 而非全体 $x\in A$ 成立的, 而 $x=\delta\theta$ 是 $x\in A'$ 的一种记法.

要阐明(4.77)式, 首先说明当 φ 支在环 $\frac{8}{9}<|x|<\frac{9}{8}$ 上时有 $\langle K_j,\varphi\rangle=\langle W_{\Omega_j},\varphi\rangle$. 由(4.74)式可知:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}K_j(x)\varphi(x)dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(⨍_{J_0}K_j(\delta_0\lambda x)\delta_0^n\lambda^n d\lambda\right)\varphi(x)dx\\&=\int_0^\infty\frac{dr}{r}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(r\theta)d\theta ⨍_{J_0}K_j(\delta_0\lambda r\theta)\delta_0^n\lambda^n r^n d\lambda\\&=\int_0^\infty\frac{dr}{r}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(r\theta)d\theta ⨍_{rJ_0}K_j(\delta_0\lambda'\theta)\delta_0^n(\lambda')^n d\lambda'\\&=\int_0^\infty\frac{dr}{r}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega_j(\theta)\varphi(r\theta)d\theta\\&=\langle W_{\Omega_j},\varphi\rangle\end{aligned}$$

现在对任意给定的 C_0^∞ 函数 φ, 只要其支在环 $M^{-1}<|x|<M$ 上 (其中 $M>0$), 就可以通过单位分解将 φ 写成光滑函数 φ_k 的有限和, 其中每个 φ_k 都支在形如 $\frac{8s}{9}<|x|<\frac{9s}{8}(s>0)$ 的环上, 而这些环可以通过伸缩变换回到 $\frac{8}{9}<|x|<\frac{9}{8}$ 内. 因为 K_j 和 W_{Ω_j} 都是 $-n$ 阶齐次分布, 故伸缩变换实际上不改变它们的值. 又因为它们在环 $\frac{8}{9}<|x|<\frac{9}{8}$ 上重合, 故对每个 $s>0$, 它们必在环 $\frac{8s}{9}<|x|<\frac{9s}{8}$ 上重合, 因此对全体 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 均有 $\langle K_j,\varphi\rangle=\langle W_{\Omega_j},\varphi\rangle$, 这说明 $K_j-W_{\Omega_j}$ 支在原点. 又注意到 $K_j-W_{\Omega_j}$ 是 $-n$ 阶齐次分布, 故其必为 $b\delta_0$, 亦即 Dirac 测度的常数倍. 因为 $\widehat{K_j}$ 是奇函数, 故 K_j 是奇函数, 从而由前述等式关系知 W_{Ω_j} 也是 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的奇函数, 因此 Ω_j 是奇函数. 现称 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是奇分布, 如果 $\widetilde{u}=-u$, 其中 $\widetilde{u}$ 定义为

$$\langle\widetilde{u},\psi\rangle=\langle u,\widetilde{\psi}\rangle,\ \forall\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\widetilde{\psi}(x)=\psi(-x).$$

可知 $K_j-W_{\Omega_j}$ 是奇分布[37], 因而 $b\delta_0$ 是奇分布. 但如果 $b\delta_0$ 是奇分布, 就必有 $b=0$, 这是因为任取 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\langle\widetilde{b\delta_0},\varphi\rangle=\langle b\delta_0,\widetilde{\varphi}\rangle=b\varphi(0)=\langle b\delta_0,\varphi\rangle\Rightarrow\widetilde{b\delta_0}=b\delta_0.$$

因此, 对每个 j 均存在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的奇函数 Ω_j, 使得 $\|\Omega_j\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}$ 被 c_Ω 的常数倍控制的同时, 还有(4.77)式成立.

现在根据(4.71),(4.77)两式有

$$T_\Omega=-\sum_{j=1}^n R_jT_{\Omega_j}$$

再考虑奇函数诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性4.5与 Riesz 变换的 L^p 有界性4.2即得 T_Ω 的 L^p 有界性. □

实际上, 齐次奇异积分算子的 L^p 有界性4.5,4.6不只对奇函数与偶函数成立. 只要 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 满足对数可积性(4.69), 就可以将其记作 $\Omega=\Omega_e+\Omega_o$, 其中 Ω_e,Ω_o 分别是偶函数与奇函数, 再应用它们诱导的齐次奇异积分算子各自所对应的 L^p 有界性即得 Ω 诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性.

4.2.6 偶积分核的极大奇异积分

对偶函数诱导的极大奇异积分而言, 有类似于奇函数情况4.5的结论:

定理 4.7 (偶函数诱导的极大奇异积分算子的 L^p 有界性)

设 $n\geq 2$, Ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的可积偶函数, 其具有对数可积性(4.69), 并满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx=0$, 则其按(4.49)式所对应的极大奇异积分 $T_\Omega^{(**)}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 上有界, 且后者的算子范数至多为 $\max(p^2,(p-1)^{-2})(c_\Omega+1)$ 的常数倍 (该常数依赖于维数). ♡

证明 对 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 取其方向为 θ 的有向 Hardy-Littlewood 极大函数为

$$M_\theta(f)(x)=\sup_{a>0}\frac{1}{a}\int_0^a|f(x-r\theta)|dr \tag{4.78}$$

回忆一维算子诱导的有向算子的 L^p 有界性4.6的注, 知 M_θ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子, 且回忆(3.21)式可知其算子范数至多为 $Cp(p-1)^{-1}$, 其中 C 是与 p 无关的常数.

[37] 只要奇函数是缓增分布, 那它就必是奇分布, 这是因为设 f 是满足前述条件的函数, 任取 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有 $\langle\widetilde{f},\psi\rangle=\langle f,\widetilde{\psi}\rangle=\langle f,\psi(-\circledast)\rangle=\langle f(-\circledast),\psi\rangle=\langle -f,\psi\rangle$.

现取 Φ 是光滑径向函数，且其满足

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & |x|\le \frac{1}{4}\\ 1, & |x|\ge \frac{3}{4}\end{cases}$$

另外对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有 $0\le\Phi(x)\le 1$. 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 与 $0<\varepsilon<N<\infty$, 引入光滑截断奇异积分[38]

$$\widetilde{T}_{\Omega}^{(\varepsilon,N)}(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\left(\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)-\Phi\left(\frac{y}{N}\right)\right)f(x-y)dy$$

与其对应的极大奇异积分算子

$$\widetilde{T}_{\Omega}^{(**)}(f)=\sup_{0<N<\infty}\sup_{0<\varepsilon<N}|\widetilde{T}_{\Omega}^{(\varepsilon,N)}(f)|. \tag{4.79}$$

下面说明 $\widetilde{T}_{\Omega}^{(**)}$ 与 $T_{\Omega}^{(**)}$ 是" 足够靠近" 的，这样一来要讨论 $T_{\Omega}^{(**)}$ 的 L^p 有界性，只需讨论 $\widetilde{T}_{\Omega}^{(**)}$ 的 L^p 有界性. 任取 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$, 知

$$\begin{aligned}
||\widetilde{T}_{\Omega}^{(\varepsilon,N)}(f)(x)|-|T_{\Omega}^{(\varepsilon,N)}(f)(x)||\le&|\widetilde{T}_{\Omega}^{(\varepsilon,N)}(f)(x)-T_{\Omega}^{(\varepsilon,N)}(f)(x)|\\
=&\left|\left(\int_{|y|\ge\frac{\varepsilon}{4}}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)f(x-y)dy-\int_{|y|\ge\frac{N}{4}}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi\left(\frac{y}{N}\right)f(x-y)dy\right)\right.\\
&\left.-\left(\int_{|y|\ge\varepsilon}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)f(x-y)dy-\int_{|y|\ge N}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi\left(\frac{y}{N}\right)f(x-y)dy\right)\right|\\
\le&\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(\theta)|\left(\frac{4}{\varepsilon}\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^{\varepsilon}|f(x-r\theta)|dr+\frac{4}{N}\int_{\frac{N}{4}}^{N}|f(x-r\theta)|dr\right)d\theta\\
\le&\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(\theta)|\left(4\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}|f(x-r\theta)|dr+4\frac{1}{N}\int_0^{N}|f(x-r\theta)|dr\right)d\theta\\
\le&8\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(\theta)|M_{\theta}(f)(x)d\theta
\end{aligned}$$

在上式两端对 $N>\varepsilon>0$ 取上确界，并由 M_{θ} 的 L^p 有界性可得：

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}_{\Omega}^{(**)}(f)-T_{\Omega}^{(**)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}&\le 8\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(\theta)|M_{\theta}(f)(x)d\theta\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le 8\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}M_{\theta}(f)(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}|\Omega(\theta)|d\theta\\
&\le 8Cp(p-1)^{-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|\Omega(\theta)|d\theta\\
&\le 8C\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\max(1,(p-1)^{-1})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

因此，后面只需证明光滑截断极大奇异积分算子 $\widetilde{T}_{\Omega}^{(**)}$ 的 L^p 有界性即可.

为了证明 $\widetilde{T}_{\Omega}^{(**)}$ 的 L^p 有界性，首先可设命题中的偶函数 Ω 是有界函数. 这是因为如果对全体有界偶函数 Ω 均有

$$\|\widetilde{T}_{\Omega}^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_m\max(p^2,(p-1)^{-2})(c_{\Omega}+1)$$

则对一般偶函数 $\Omega\in L\log L(\mathbb{S}^{n-1})$, 可设 $\Omega^m=\Omega_{\chi_{|\Omega|\le m}}-\kappa^m$, 其中 κ^m 是为了对任意 m, 使得 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega^m d\sigma=0$ 而添

[38] 该算子之所以是截断算子，是因为当 $|y|\le\frac{1}{4}\varepsilon$ 与 $|y|\ge\frac{3}{4}N$ 时均有 $\Phi(\frac{y}{\varepsilon})-\Phi(\frac{y}{N})=0$.

加的. 现在对任意[39]$x\in\mathbb{R}^n$, 在 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时有

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\left(\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)-\Phi\left(\frac{y}{N}\right)\right)f(x-y)dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varliminf\limits_{m\to\infty}\Omega^m(y/|y|)}{|y|^n}\left(\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)-\Phi\left(\frac{y}{N}\right)\right)f(x-y)dy\\&\leq\varliminf_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega^m(y/|y|)}{|y|^n}\left(\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)-\Phi\left(\frac{y}{N}\right)\right)f(x-y)dy\\&=\varliminf_{m\to\infty}\widetilde{T}_{\Omega^m}^{(\varepsilon,N)}(f)(x)\leq\varliminf_{m\to\infty}\widetilde{T}_{\Omega^m}^{(**)}(f)(x)\end{aligned}$$

在上式两端对 $\varepsilon,N>0$ 取上确界, 考虑 Fatou 引理与 $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密的事实可得:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}_\Omega^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}&\leq\|\varliminf_{m\to\infty}\widetilde{T}_{\Omega^m}^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}\\&\leq\varliminf_{m\to\infty}\|\widetilde{T}_{\Omega^m}^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}\\&\leq C_nC(p)\varliminf_{m\to\infty}(c_{\Omega^m}+1)=C_nC(p)(c_\Omega+1)\end{aligned}$$

因此只需验证 Ω 为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)d\theta=0$ 的有界偶函数的情况即可. 和偶函数诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性4.6证明中的处理一样, 设

$$\begin{aligned}T_j&=R_jT_\Omega,\\K_j&=\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}\right)^\vee\\\Omega_j(\theta)&=⨍_{J_0}\delta_0^n\lambda^nK_j(\lambda\delta_0\theta)d\lambda\end{aligned}\tag{4.80}$$

其中 $J_0=[\sqrt{\frac{8}{9}},\sqrt{\frac{9}{8}}]$, 另设

$$F_j=R_j(\Omega(x/|x|)\Phi(x)|x|^{-n})$$

取 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\Omega(\frac{y}{\varepsilon}/|\frac{y}{\varepsilon}|)}{|\frac{y}{\varepsilon}|^n}\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{N^n}\frac{\Omega(\frac{y}{N}/|\frac{y}{N}|)}{|\frac{y}{N}|^n}\Phi\left(\frac{y}{N}\right)\right)f(x-y)dy\\&\overset{(A)}{=}-\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\Omega(\frac{y}{\varepsilon}/|\frac{y}{\varepsilon}|)}{|\frac{y}{\varepsilon}|^n}\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{N^n}\frac{\Omega(\frac{y}{N}/|\frac{y}{N}|)}{|\frac{y}{N}|^n}\Phi\left(\frac{y}{N}\right)\right)\sum_{i=1}^nR_j^2f(x-y)dy\\&\overset{(B)}{=}-\left(\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{\varepsilon^n}F_j\left(\frac{\circledast}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{N^n}F_j\left(\frac{\circledast}{N}\right)\right)*R_j(f)\right)(x)\end{aligned}$$

其中 (A) 源自 Riesz 变换的平方和4.2在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上也成立, 而 (B) 是因为在下诸式有意义的情况下选取 f,g, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)R_j(g)(x-y)dy&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)(W_\Omega*g)(x-y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)(\int_{\mathbb{R}^n}W_\Omega(x-y-z)g(z)dz)dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}f(y)W_\Omega(x-z-y)dy)g(z)dz=\int_{\mathbb{R}^n}R_j(f)(x-z)g(z)dz\end{aligned}$$

于是 (B) 所蕴含的过程为

$$\begin{aligned}&-\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\Omega(\frac{y}{\varepsilon}/|\frac{y}{\varepsilon}|)}{|\frac{y}{\varepsilon}|^n}\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{N^n}\frac{\Omega(\frac{y}{N}/|\frac{y}{N}|)}{|\frac{y}{N}|^n}\Phi\left(\frac{y}{N}\right)\right)\sum_{i=1}^nR_j^2f(x-y)dy\\&=-\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}R_j\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\Omega(\frac{\circledast}{\varepsilon}/|\frac{\circledast}{\varepsilon}|)}{|\frac{\circledast}{\varepsilon}|^n}\Phi\left(\frac{\circledast}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{N^n}\frac{\Omega(\frac{\circledast}{N}/|\frac{\circledast}{N}|)}{|\frac{\circledast}{N}|^n}\Phi\left(\frac{\circledast}{N}\right)\right)(y)R_j(f)(x-y)dy\\&=-\left(\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{\varepsilon^n}F_j\left(\frac{\circledast}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{N^n}F_j\left(\frac{\circledast}{N}\right)\right)*R_j(f)\right)(x)\end{aligned}$$

[39]这是否应该改为几乎处处? 就算将 $\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)}$ 视作 f 与 $\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}(\Phi(\frac{y}{\varepsilon})-\Phi(\frac{y}{N}))$ 的卷积并声称 Φ 是光滑函数, 也会因为 Ω 的可积 (而可能潜藏的不连续) 性导致光滑性的损失吧?

现有

$$
\begin{aligned}
-\widetilde{T}_{\Omega}^{(\varepsilon,N)}(f)(x) &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{N^n}F_j\left(\frac{x-y}{N}\right)\right)R_j(f)(y)dy \\
&= A_1^{(\varepsilon,N)}(f)(x)+A_2^{(\varepsilon,N)}(f)(x)+A_3^{(\varepsilon,N)}(f)(x)
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

其中

$$
A_1^{(\varepsilon,N)}(f)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|x-y|\le\varepsilon}F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)R_j(f)(y)dy-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{N^n}\int_{|x-y|\le N}F_j\left(\frac{x-y}{N}\right)R_j(f)(y)dy,
$$

$$
A_2^{(\varepsilon,N)}(f)(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\chi_{|x-y|>\varepsilon}(y)\left(F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)-K_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)-\frac{1}{N^n}\chi_{|x-y|>N}(y)\left(F_j\left(\frac{x-y}{N}\right)-K_j\left(\frac{x-y}{N}\right)\right)\right)R_j(f)(y)dy,
$$

$$
A_3^{(\varepsilon,N)}(f)(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\chi_{|x-y|>\varepsilon}(y)K_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{N^n}\chi_{|x-y|>N}(y)K_j\left(\frac{x-y}{N}\right)\right)R_j(f)(y)dy.
$$

下面的任务就是分别证明 $\sup\limits_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_1^{(\varepsilon,N)}|$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_2^{(\varepsilon,N)}|$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_3^{(\varepsilon,N)}|$ 的 L^p 有界性了.

对于 $A_2^{(\varepsilon,N)}$, 由 F_j 与 K_j 的定义可知在 $|z|\ge 1$ 时有:

$$
\begin{aligned}
F_j(z)-K_j(z) &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}(\Phi(y)-1)\frac{z_j-y_j}{|z-y|^{n+1}}dy \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{|y|\le\frac{3}{4}}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}(\Phi(y)-1)\left(\frac{z_j-y_j}{|z-y|^{n+1}}-\frac{z_j}{|z|^{n+1}}\right)dy
\end{aligned}
$$

根据微分中值定理, 在 $|z|\ge 1$ 时上式最后一项可由下式控制:

$$
C_n\int_{|y|\le\frac{3}{4}}\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n}\frac{y}{|z|^{n+1}}dy=C_n'\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}|z|^{-(n+1)}
$$

根据这一估计, 对 $A_2^{(\varepsilon,N)}(f)(x)$ 作为和式时的第 j 项有:

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\chi_{|x-y|>\varepsilon}(y)\left(F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)-K_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)-\frac{1}{N^n}\chi_{|x-y|>N}(y)\left(F_j\left(\frac{x-y}{N}\right)-K_j\left(\frac{x-y}{N}\right)\right)\right)R_j(f)(y)dy\right| \\
\le&\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^n}\left|F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)-K_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right||R_j(f)(y)|dy+\int_{|x-y|>N}\frac{1}{N^n}\left|F_j\left(\frac{x-y}{N}\right)-K_j\left(\frac{x-y}{N}\right)\right||R_j(f)(y)|dy \\
\le&C_n\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{|R_j(f)(y)|dy}{(|x-y|/\varepsilon)^{n+1}}+\frac{1}{N^n}\int_{|x-y|>N}\frac{|R_j(f)(y)|dy}{(|x-y|/N)^{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
C_n\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{|R_j(f)(y)|dy}{(|x-y|/\varepsilon)^{n+1}} &= C_n\frac{2^{n+1}\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}}{\varepsilon^n}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{|R_j(f)(y)|dy}{(2|x-y|/\varepsilon)^{n+1}} \\
&\le C_n\frac{2\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}}{2^{-n}\varepsilon^n}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{|R_j(f)(y)|dy}{(1+|x-y|/\varepsilon)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
C_n\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\frac{1}{N^n}\int_{|x-y|>N}\frac{|R_j(f)(y)|dy}{(|x-y|/N)^{n+1}}\le C_n\frac{2\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}}{2^{-n}N^n}\int_{|x-y|>N}\frac{|R_j(f)(y)|dy}{(1+|x-y|/N)^{n+1}}
$$

又因为 $K(x)=\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}$ 时 $\mathbb{R}^n$ 上的正递减可积径向函数, 故由正递减可积径向函数生成的恒等逼近族性质3.4知

$$
\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_2^{(\varepsilon,N)}(f)|\le C_n\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}M(R_j(f))
$$

其中 M 是 Hardy-Littlewood 极大算子. 根据极大函数强 (p,p) 型不等式3.8的注可知 M 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子, 且其算子范数至多为 $C_n\max(1,(p-1)^{-1})$, 其中 C_n 是只关于维数的常数. 又根据 Riesz 变换的 L^p 有界性4.2的注知 $\|R_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}$ 至多为 $C_n'\max(p,(p-1)^{-1})$, 其中 C_n' 是只关于维数的常数, 故

$$
\|\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_2^{(\varepsilon,N)}(f)|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_n\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\max(p,(p-1)^{-2})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.82}
$$

对于 $A_3^{(\varepsilon,N)}$, 回忆偶函数诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性4.6证明中的(4.77)式, 已经说明了若 $\Omega_j\in$

$L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 满足

$$\|\Omega_j\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} \le C_n(c_\Omega + 1) \tag{4.83}$$

就有[40]

$$K_j(x) = \frac{\Omega_j(x/|x|)}{|x|^n}$$

因此对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\begin{aligned}
\sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |A_3^{(\varepsilon,N)}(f)| &= \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} \left| \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\varepsilon^n} \chi_{|x-y|>\varepsilon}(y) K_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{N^n} \chi_{|x-y|>N}(y) K_j\left(\frac{x-y}{N}\right) \right) R_j(f)(y) dy \right| \\
&\le \sum_{j=1}^n \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^n} \varepsilon^n \frac{\Omega_j((x-y)/|x-y|)}{|x-y|^n} R_j(f)(y) dy \right. \\
&\quad \left. - \int_{|x-y|>N} \frac{1}{N^n} N^n \frac{\Omega_j((x-y)/|x-y|)}{|x-y|^n} R_j(f)(y) dy \right| \\
&\le \sum_{j=1}^n \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} \left| \int_{\varepsilon<|x-y|<N} \frac{\Omega_j((x-y)/|x-y|)}{|x-y|^n} R_j(f)(y) dy \right| \\
&\le \sum_{j=1}^n T_{\Omega_j}^{(**)}(R_j(f))
\end{aligned}$$

回忆 Ω_j 的构造(4.80), 在偶函数诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性4.6的证明中已经说明了 K_j 是奇函数, 故 Ω_j 是奇函数, 因而由奇函数诱导的极大奇异积分算子的 L^p 有界性4.5的注知

$$\begin{aligned}
\|T_{\Omega_j}^{(**)}(R_j(f))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le C_n \|\Omega_j\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} \max(p, (p-1)^{-1}) \|R_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_n'(c_\Omega + 1) \max(p, (p-1)^{-1}) \max(p, (p-1)^{-1}) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C_n'(c_\Omega + 1) \max(p^2, (p-1)^{-2}) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

最后讨论 $A_1^{(\varepsilon,N)}(f)$. 要想证明 $\sup\limits_{0<\varepsilon<N<\infty} A_1^{(\varepsilon,N)}$ 的 L^p 有界性, 首先说明存在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负零阶其次函数 G_j 使得

$$|F_j(x)| \le G_j(x), \quad |x| \le 1 \tag{4.85}$$

且

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |G_j(\theta)| d\theta \le C_n c_\Omega. \tag{4.86}$$

为证明(4.85)式, 注意到若 $|x| \le \frac{1}{8}$, 则

$$\begin{aligned}
|F_j(x)| &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \Phi(y) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} dy \right| \\
&\le C_n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \Phi(y) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \right| dy \\
&\le C_n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \right| \cdot \frac{|x_j - y_j|}{|x-y|^{n+1}} dy \\
&\le C_n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \right| \cdot \frac{1}{|x-y|^n} dy \\
&\le C_n' \int_{|y| \ge \frac{1}{4}} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{2n}} dy \\
&\le C_n'' \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}
\end{aligned}$$

[40](4.77)式本身是说明 K_j 和 W_j 作为缓增分布相等, 但偶函数诱导的齐次奇异积分算子的 L^p 有界性4.6的证明中已经指出在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上 K_j 与可积函数重合, 因此可以得到 K_j 和 W_j 作为函数的相等.

现取定 x 满足 $\frac{1}{8} \le |x| \le 1$, 记

$$\begin{aligned}
|F_j(x)| &\le \Phi(x)|K_j(x)| + |F_j(x) - \Phi(x)K_j(x)| \\
&\le |K_j(x)| + \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left| \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} (\Phi(y) - \Phi(x)) \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy \right| \\
&= |K_j(x)| + \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} (P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)),
\end{aligned}$$

其中[41]

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \left| \int_{|y|\le\frac{1}{16}} \left(\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right) (\Phi(y) - \Phi(x)) \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy \right|, \\
P_2(x) &= \left| \int_{\frac{1}{16}\le|y|\le 2} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} (\Phi(y) - \Phi(x)) \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy \right|, \\
P_3(x) &= \left| \int_{|y|\ge 2} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} (\Phi(y) - \Phi(x)) \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy \right|.
\end{aligned}$$

又因为 $\frac{1}{8} \le |x| \le 1$, 对 $x \mapsto \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ 使用微分中值定理, 并由 Φ 的构造知

$$P_1(x) \le C_n \int_{|y|\le\frac{1}{16}} \frac{|y|}{|x|^{n+1}} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy \le C_n' \int_{|y|\le\frac{1}{16}} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} dy \le C_n'' \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}$$

另有

$$P_3(x) \le C_n \int_{|y|\ge 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{2n}} dy \le C_n' \int_{|y|\ge 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} dy \le C_n'' \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}$$

对于 $P_2(x)$, 利用估计[42]$|\Phi(y) - \Phi(x)| \le C|x-y|$ 可知

$$\begin{aligned}
P_2(x) &\le \int_{\frac{1}{16}\le|y|\le 2} \frac{C}{|x-y|^{n-1}} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} dy \\
&\le 4C \int_{\frac{1}{16}\le|y|\le 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-\frac{1}{2}}} dy \\
&\le 4C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-\frac{1}{2}}} dy.
\end{aligned}$$

回忆 $K_j(x) = \frac{\Omega_j(x/|x|)}{|x|^n}$, 现可设

$$G_j(x) = C_n \left(\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} + |\Omega_j(x/|x|)| + |x|^{n-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-\frac{1}{2}}} dy \right) \tag{4.87}$$

下面说明(4.87)式给出的 $G_j(x)$ 正是 $\mathbb{R}^n$ 上满足(4.85),(4.86)式的非负零阶齐次函数. 首先说明 G_j 是零阶齐次函数:

$$\begin{aligned}
G_j(\lambda x) &= C_n \left(\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} + |\Omega_j(x/|x|)| + |\lambda x|^{n-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|\lambda x-y|^{n-1}|y|^{n-\frac{1}{2}}} dy \right) \\
&= C_n \left(\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} + |\Omega_j(x/|x|)| + |\lambda|^{n-\frac{3}{2}}|x|^{n-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\lambda|^{n-1}} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|x-\frac{y}{\lambda}|^{n-1}|y|^{n-\frac{1}{2}}} dy \right) \\
&= C_n \left(\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} + |\Omega_j(x/|x|)| + |\lambda|^{n-\frac{1}{2}}|x|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\lambda|^{n-\frac{1}{2}}} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|x-\frac{y}{\lambda}|^{n-1}|\frac{y}{\lambda}|^{n-\frac{1}{2}}} |\lambda|^n d\frac{y}{|\lambda|} \right) \\
&= G_j(x)
\end{aligned}$$

G_j 的零阶齐次性即证. 再由前述对 P_1, P_2, P_3 的估计知(4.87)式给出的 $G_j(x)$ 满足(4.85)式, 且显见其在环 $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$ 上可积. 最后往证 $G_j(x)$ 满足(4.86)式, 为此将重积分

$$I = \int_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|dy}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-\frac{1}{2}}} dx$$

[41]特别注意 $P_1(x)$ 的构造中, 因为 $\Phi(y)$ 是径向函数 (因而是偶函数), 故 $\int_{|y|\le\frac{1}{16}} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} (\Phi(y) - \Phi(x)) \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy = 0$.

[42]这个估计依旧是对 Φ 应用微分中值定理而得到的.

分为 $\frac{1}{4} \le |y| \le 4, |y| > 4, |y| < \frac{1}{4}$ 三份. 对 $\frac{1}{4} \le |y| \le 4$ 的这一份有:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2}\int_{\frac{1}{4}\le|y|\le 4}\frac{|\Omega(y/|y|)|dy}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-\frac{1}{2}}}dx &\le C_n\int_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2}\int_{\frac{1}{4}\le|y|\le 4}\frac{|\Omega(y/|y|)|dy}{|x-y|^{n-1}}dx\\
&= C_n\int_{\frac{1}{4}\le|y|\le 4}|\Omega(y/|y|)|\int_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2}\frac{dx}{|y-x|^{n-1}}dy\\
&\le C_n\int_{\frac{1}{4}\le|y|\le 4}|\Omega(y/|y|)|\int_{|x-y|\le 6}\frac{dx}{|y-x|^{n-1}}dy\\
&\le C_n'\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}.
\end{aligned}$$

对 $|y| > 4$ 的这一份, 因为先前已经圈定 $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$, 故 $|x-y|^{-n+1} \le (\frac{|y|}{2})^{-n+1}$, 因而有:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2}\int_{|y|>4}\frac{|\Omega(y/|y|)|dy}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-\frac{1}{2}}}dx &\le 2^{n-1}\int_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2}\int_{|y|>4}\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n-\frac{1}{2}+n-1}}dydx\\
&\le C_n\int_{|y|>4}\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{2n-\frac{3}{2}}}dy\\
&\le C_n'\int_{|y|>4}\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n}}dy\\
&\le C_n''\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}
\end{aligned}$$

最后, 对 $|y| < \frac{1}{4}$ 的这一份, 同样因为已经圈定 $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$, 故 $|x-y|^{-n+1} \le (\frac{1}{4})^{-n+1}$, 因而有:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2}\int_{|y|<\frac{1}{4}}\frac{|\Omega(y/|y|)|dy}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-\frac{1}{2}}}dx &\le 4^{n-1}\int_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2}\int_{|y|<\frac{1}{4}}\frac{|\Omega(y/|y|)|dy}{|y|^{n-\frac{1}{2}}}dydx\\
&\le C_n\int_{|y|<\frac{1}{4}}\frac{|\Omega(y/|y|)|dy}{|y|^{n}}dy\\
&\le C_n'\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}
\end{aligned}$$

因而由(4.83),(4.87)两式可得

$$\int_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2}|G_j(x)|dx \le C_n(\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} + \|\Omega_j\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} + \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}) \le C_n c_\omega.$$

根据 G_j 是零阶齐次函数即知(4.86)式成立.

最后回到 $\sup\limits_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_1^{(\varepsilon,N)}(f)|$ 的 L^p 有界性的讨论, 知:

$$\begin{aligned}
\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_1^{(\varepsilon,N)}(f)(x)| &= \sup_{0<\varepsilon<N<\infty}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|x-y|\le\varepsilon}F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)R_j(f)(y)dy - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{N^n}\int_{|x-y|\le N}F_j\left(\frac{x-y}{N}\right)R_j(f)(y)dy\right|\\
&\le \sup_{0<\varepsilon<N<\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\left|\int_{|x-y|\le\varepsilon}F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)R_j(f)(y)dy\right| + \frac{1}{N^n}\left|\int_{|x-y|\le N}F_j\left(\frac{x-y}{N}\right)R_j(f)(y)dy\right|\right)\\
&\le 2\sup_{\varepsilon>0}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|z|\le\varepsilon}\left|F_j\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\right||R_j(f)(x-z)|dz\\
&\le 2\sup_{\varepsilon>0}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^{\varepsilon}r^{n-1}dr\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left|F_j\left(\frac{r\theta}{\varepsilon}\right)\right||R_j(f)(x-r\theta)|d\theta\\
&\le 2\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|G_j(\theta)|\left(\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^{\varepsilon}|R_j(f)(x-r\theta)|r^{n-1}dr\right)d\theta\\
&\le 4\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|G_j(\theta)|M_\theta(R_j(f))(x)d\theta
\end{aligned}$$

结合(4.86)式与有向 Hardy-Littlewood 极大函数的 L^p 有界性可得:

$$
\begin{aligned}
\|\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_1^{(\varepsilon,N)}(f)|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le 4\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|G_j(\theta)|\|M_\theta(R_j(f))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}d\theta \\
&\le 4C_nc_\Omega\sup_{\theta\in\mathbb{S}^{n-1}}\left(\sum_{j=1}^n\|M_\theta(R_j(f))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) \\
&\le C_n'c_\Omega\max(p,(p-1)^{-1})\sum_{j=1}^n\|R_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_n''c_\Omega\max(p,(p-1)^{-1})\max(p,(p-1)^{-1})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_n''c_\Omega\max(p^2,(p-1)^{-2})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
\tag{4.88}
$$

最后, 结合(4.81),(4.82),(4.84),(4.88)四式即得

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{T}_\Omega^{(**)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|\widetilde{T}_\Omega^{\varepsilon,N}(f)|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \|\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_1^{(\varepsilon,N)}|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_2^{(\varepsilon,N)}|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_3^{(\varepsilon,N)}|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim_n \max(p^2,(p-1)^{-2})(c_\Omega\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+(c_\Omega+1)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) \\
&\lesssim_n (c_\Omega+1)\max(p^2,(p-1)^{-2})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

命题即证. □

下面的推论是偶函数诱导的极大奇异积分算子的 L^p 有界性4.7与算子族的点态收敛性3.2结合得到的:

推论 4.3

设 $n\ge 2$, Ω 满足偶函数诱导的极大奇异积分算子的 L^p 有界性4.7中的条件, 则对任意 $1<p<\infty$ 与任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 当 $\varepsilon\to 0, N\to\infty$ 时函数 $T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)$ 在 L^p 和几乎处处的意义下收敛到 $T_\Omega(f)$. ♡

证明 几乎处处收敛性恰是算子族的点态收敛性3.2的直接结论. 对 L^p 收敛性而言, 因为对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 有 $|T_\Omega^{(\varepsilon,N)}(f)|\le T_\Omega^{(**)}(f)$, 而 $T_\Omega^{(**)}(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 故 L^p 收敛性是通过应用 Lebesgue 控制收敛定理得到的. □

4.3 Calderón-Zygmund 分解与奇异积分

奇异积分算子在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的表现相较于 $L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 的情况来说是一个更为复杂的话题, 从例4.1中可见奇异积分并不是从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子. 本节将要说明奇异积分把 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 映入更大的空间 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 这一结果进而加强了它们的 L^p 有界性.

4.3.1 Calderón-Zygmund 分解

远在讨论二进极大函数时, 我们就已经介绍过 Calderón-Zygmund 分解3.7了. 这一分解方法在奇异积分理论的研究中是十分有用的, 因而在这里我们重新提一下它的内容. 当然, 在奇异积分理论之外, Calderón-Zygmund 分解本身作为一个强有力的停时构造也有许多其它有趣的应用.

注 ” 停时” 一词原先是随机过程理论中的内容, 下面是这一概念在随机过程中的定义:

定义 4.6 ($\sigma-$ 代数流 (滤基)[ABAH])

设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间, $T\subset\mathbb{R}$. 称 $\mathbb{F}_T=(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是在 $\mathscr{F}$ 中的某个 $\sigma-$ 代数流 (滤基), 如果对 $s\le t(s,t\in T)$ 有 $\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$, 且对全体 $t\in T$ 有 $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$. ♣

定义 4.7 (停时[ABAH])

映射 $\tau:\Omega\to T\cup\{\infty\}$ 称作相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$ 的停时, 如果对任意 $t\in T$ 都有 $\{\omega:\tau(\omega)\le t\}\in\mathscr{F}_t$. ♣

回忆 $\mathbb{R}^n$ 上的一个二进方体 Q_k 指的是集合

$$[2^k m_1, 2^k(m_1+1)) \times \cdots \times [2^k m_n, 2^k(m_n+1))$$

其中 $k, m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{Z}$. 两个二进方体要么不交, 要么其中一个是另一个的子集.

定理 4.8 (Calderón-Zygmund 分解)

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \alpha > 0$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 g, b 使得:

(i) $f(x) = g(x) + b(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, 且 $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le 2^n\alpha$.

(iii) $b(x) = \sum_j b_j(x)$, 其中每个 b_j 都支在某个二进方体 Q_j 上, 且 $j \neq k$ 时前述二进方体 Q_j, Q_k 是不交的.

(iv) $\int_{Q_j} b_j(x)dx = 0$.

(v) $\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le 2^{n+1}\alpha|Q_j|$.

(vi) $\sum_j |Q_j| \le \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha}$.

♡

注 先前已经提过, Calderón-Zygmund 分解4.8中的 g 称为分解中的好函数, 因为它可积且有界; b 称为坏函数, 因为它包含了 f 的奇异部分, 但这也不是随意选取的, 因为 (iv) 已经说明 b 的积分均值为零. 根据 (i),(ii), 坏函数 b 也是可积的, 且

$$\|b\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

根据 (ii), 好函数 g 是有界可积的, 于是对任意 $1 \le p \le \infty$ 均有 $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 进一步根据 L^p 范数的对数凸性1.13知

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} (2^n\alpha)^{1-\frac{1}{p}} = 2^{\frac{n}{p'}} \alpha^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}}. \tag{4.89}$$

下面 (不辞辛劳地) 再次给出 Calderón-Zygmund 分解的具体证明:

证明 将 $\mathbb{R}^n$ 分割成由相同大小的不交二进方体组成的网格 (即考虑分解 $\mathbb{R}^n = \bigcup_j Q_j$), 同时令该网格内的任一方体 Q 均满足

$$|Q| \ge \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

因为 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty, \alpha > 0$, 故这样的网格是肯定可以构造出来的. 称该网格中的二进方体为第 0 代方体. 现通过边长减半的方式, 将每个第 0 代方体划分成 2^n 个全等的子二进方体, 据此得到的新网格中的每个方体称为第 1 代方体. 现选取全体满足

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx > \alpha \tag{4.90}$$

的第 1 代方体 Q, 记它们所构成的集合为 $S^{(1)}$. 同样通过边长减半的方式, 将每个第 1 代方体划分成 2^n 个全等的子二进方体, 据此得到的新网格中的每个方体称为第 2 代方体. 选取全体满足(4.90)式的第 2 代方体 Q, 并记它们所构成的集合为 $S^{(2)}$.

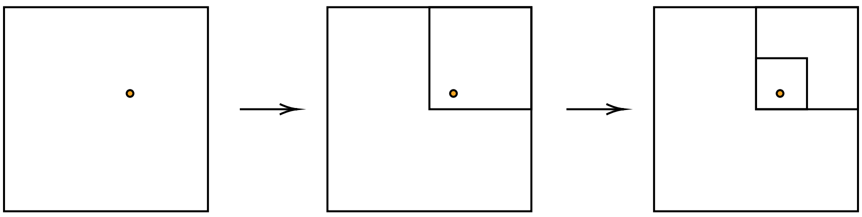

图 4.2: 选取过程示意, 其中黄色点是 f 的一个爆破点

将上述过程一直进行下去, 可以得到被选取的方体族 $\bigcup_{m=1}^\infty S^{(m)}$. 显见 $\bigcup_{m=1}^\infty S^{(m)}$ 是可列集, 且它所包含的二进方体均满足 (vi)[43]. 根据二进方体的性质显见前面所选取的这些二进方体均不交 (否则如果有某两个二进方体

[43]集族 $\bigcup_{m=1}^\infty S^{(m)}$ 是可能为空的, 此时 $b = 0, g = f$.

相交, 其中一个必是另一个的子集, 但根据选取规则它们中便只有一个会被选取), 现定义

$$\begin{cases} b_j(x) = (f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy)\chi_{Q_j}(x), \\ b(x) = \sum_j b_j(x), \\ g(x) = f(x) - b(x). \end{cases}$$

下面说明上面构造的 b_j, b, g 满足要求, 特别只需说明 (ii),(v) 即可. 对某个被选取的方体 Q_j, 根据选取规则知总会存在某个未被选取的二进方体 Q' 包含它, 且 Q' 的边长恰为 Q_j 边长的两倍, 称 Q' 为 Q_j 的父代. 因为 Q_j 的父代 Q' 并未被选取, 根据选取规则知

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|dx \leq \alpha$$

于是

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|dx \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q'} |f(x)|dx = \frac{2^n}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|dx \leq 2^n\alpha \tag{4.91}$$

因而

$$\int_{Q_j} |b_j(x)|dx \leq \int_{Q_j} |f(x)|dx + |Q_j| \left|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)dx\right| \leq 2\int_{Q_j} |f(x)|dx \leq 2^{n+1}\alpha|Q_j|$$

这便说明了 (v).

下面说明 (ii), 显见

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy, & x \in Q_j \end{cases} \tag{4.92}$$

从而由(4.91)式知

$$\|g\|_{L^\infty(Q_j)} = \left|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy\right| \leq 2^n\alpha$$

故只需说明 g 在 $\bigcup_j Q_j$ 之外同样有界即可. 事实上, 任取 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j$, 对每个 $k = 0, 1, 2, \cdots$, 总存在唯一第 k 代未被选取的方体 $Q_x^(k)$ 包含 x, 进而对每个 $k \geq 0$ 根据选取过程均有:

$$\left|\frac{1}{|Q_x^{(k)}|}\int_{Q_x^{(k)}} f(y)dy\right| \leq \frac{1}{|Q_x^{(k)}|}\int_{Q_x^{(k)}} |f(y)|dy \leq \alpha \tag{4.93}$$

再根据闭区间套原理知 $\bigcap_k Q_x^{(k)} = \{x\}$, 另由 Lebesgue 微分定理3.5知对任意 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j$ 均有

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_x^{(k)}|}\int_{Q_x^{(k)}} f(y)dy$$

故由(4.93)式知 $|f(x)| \leq \alpha$ 对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j$ 均成立, 故 $|g(x)| \leq \alpha$ 对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j$ 均成立. 最后, 由选取过程与(4.92)式可知 $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, 这便说明了 (ii), 定理得证. □

类似于极大函数的弱 (1,1) 型不等式3.8的证明, Calderón-Zygmund 分解也可以用于证明一般奇异积分算子的弱 (1, 1) 型不等式.

4.3.2 一般奇异积分

下面我们将要研究的一般奇异积分的积分核是在原点之外与某函数重合的缓增分布, 它通过下述方式构造: 设 K 是定义在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上的可测函数, 且其在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 的任意紧子集上可积, 另有尺寸条件[44]

$$\sup_{R>0} \int_{R\leq|x|\leq 2R} |K(x)|dx = A_1 < \infty. \tag{4.94}$$

注意这一条件比标准的尺寸估计

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^n|K(x)| < \infty \tag{4.95}$$

[44]原文为 size condition.

要弱, 但它已经足以导出 $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 时积分核 $K(x)=\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}$ 的尺寸性质了. 特别还有尺寸条件(4.94)的下述等价提法:

命题 4.7 (一般奇异积分核尺寸条件的等价提法)

若 $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ 可测, 则(4.94)式成立当且仅当

$$\sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{|x|\le R} |K(x)||x|dx < \infty. \tag{4.96}$$

证明 一方面

$$\frac{1}{2R}\int_{|x|\le 2R}|K(x)||x|dx \ge \frac{1}{2R}\int_{R\le|x|\le 2R}|K(x)||x|dx \ge \frac{1}{2}\int_{R\le|x|\le 2R}|K(x)|dx$$

于是

$$\sup_{R>0}\frac{1}{R}\int_{|x|\le R}|K(x)||x|dx = \sup_{R>0}\frac{1}{2R}\int_{|x|\le 2R}|K(x)||x|dx \ge \frac{1}{2}\sup_{R>0}\int_{R\le|x|\le 2R}|K(x)|dx = \frac{A_1}{2}$$

另一方面

$$\frac{1}{R}\int_{|x|\le R}|K(x)||x|dx = \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{-k-1}R\le|x|\le 2^{-k}R}|K(x)||x|dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\int_{2^{-k-1}R\le|x|\le 2^{-k}R}|K(x)|dx$$

于是

$$\sup_{R>0}\frac{1}{R}\int_{|x|\le R}|K(x)||x|dx \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sup_{R>0}\int_{R\le|x|\le 2R}|K(x)|dx = 2A_1$$

故

$$\frac{A_1}{2} \le \sup_{R>0}\frac{1}{R}\int_{|x|\le R}|K(x)||x|dx \le 2A_1$$

亦即(4.94),(4.96)两式等价, 命题因而成立. □

(4.94)式已经足以使 $K(x)$ 在 $|x|>\delta(\delta$ 是任意正数) 时成为缓增分布, 这是因为对任意 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\int_{|x|\ge 1}|K(x)\varphi(x)|dx \le \sum_{m=0}^{\infty}\int_{2^{m+1}\ge|x|\ge 2^m}\frac{|K(x)|(1+|x|)^N|\varphi(x)|}{(1+2^m)^N}dx \le \sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_1}{(1+2^m)^N}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\varphi(x)|$$

上右式被 φ 的某 Schwartz 半范有限和的常数倍所控制, 因而 K 确为 $|x|>\delta$ 上的缓增分布.

现在自然要问, 有没有办法能将函数 K 延拓到 $\mathbb{R}^n$ 上? 设 W 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的缓增分布, 且其为定义在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的函数 K 的延拓, 并设

$$\langle W,\varphi\rangle = \lim_{j\to\infty}\int_{|x|\ge\delta_j}K(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{4.97}$$

其中 $\{\delta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是随 $j\to\infty$ 而递减趋零的序列. 下面的命题说明了缓增分布 W 的合法性的充要条件:

命题 4.8 (一般积分核对应缓增分布的合法性)

若可测函数 $K\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 满足尺寸条件(4.94), 则其能诱导形如(4.97)式的缓增分布 W 当且仅当

$$\lim_{j\to\infty}\int_{1\ge|x|\ge\delta_j}K(x)dx = L < \infty. \tag{4.98}$$

其中 $\delta_j\to 0(j\to\infty)$.

证明 当 K 能使得依(4.97)式定义的缓增分布 W 是合法的, 根据尺寸条件的等价提法4.7知

$$\int_{|x|\le 1}|K(x)||x|dx \le 2A_1 < \infty.$$

下面说明对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 函数 $K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))$ 均在 $|x|\le 1$ 上绝对可积. 事实上由微分中值定理可得估计

$$|K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))| \le |K(x)||x|\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

对不等式两端在 $|x| \le 1$ 上积分得到

$$\int_{|x|\le 1} |K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))|dx \le \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|x|\le 1} |K(x)||x|dx \le 2A_1\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{4.99}$$

现取定 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 并令 $\varphi(0)=1$, 知

$$\int_{\delta_j \le |x| \le 1} K(x)dx = \int_{\delta_j\le|x|\le 1} K(x)\varphi(x)dx - \int_{\delta_j\le|x|\le 1} K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx$$

在等式两端令 $j\to\infty$ 有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\delta_j\le|x|\le 1} K(x)dx = \langle W,\varphi\rangle - \int_{|x|\le 1} K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx < \infty$$

这便是(4.98)式.

相反地, 若(4.98)式成立, 则对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\int_{\delta_j\le|x|\le 1} K(x)\varphi(x)dx = \int_{\delta_j\le|x|\le 1} K(x)\varphi(0)dx + \int_{\delta_j\le|x|\le 1} K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx$$

在等式两端令 $k\to\infty$, 由(4.98),(4.99)式知

$$\begin{aligned}\langle W,\varphi\rangle &= \lim_{j\to\infty}\int_{\delta_j\le|x|\le 1} K(x)\varphi(x)dx \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{\delta_j\le|x|\le 1} K(x)\varphi(0)dx + \lim_{j\to\infty}\int_{\delta_j\le|x|\le 1} K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx < \infty\end{aligned}$$

故 W 的定义是合法的. □

注意就算缓增分布 W 存在, 它也未必唯一, 因为极限 $\lim\limits_{j\to\infty}\int_{|x|\ge\delta_j} K(x)\varphi(x)dx$ 实际上依赖于序列 $\{\delta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的选取. 两个不同的趋零序列可能导出两个不同的形如(4.97)式的缓增分布 W, 且它们同时在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上与 K 重合.

现当 K 满足(4.98)式时, 即可定义

$$\langle W,\varphi\rangle = \lim_{j\to\infty}\int_{j\ge|x|\ge\delta_j} K(x)\varphi(x)dx \tag{4.100}$$

根据一般积分核对应缓增分布的合法性4.8即知极限(4.100)对全体 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均成立, 且其结果为

$$\langle W,\varphi\rangle = \int_{|x|\le 1} K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx + \varphi(0)L + \int_{|x|\ge 1} K(x)\varphi(x)dx.$$

另由前述计算可知 W 确为缓增分布.

下面分别设 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的函数 K 满足特定的光滑性条件. 一般来说我们会讨论三种光滑性条件, 即梯度条件:

$$|\nabla K(x)| \le A_2|x|^{-n-1}, \quad x\ne 0, \tag{4.101}$$

弱 Lipschitz 条件:

$$|K(x-y)-K(x)| \le A_2\frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}, \quad |x|\ge 2|y|, \tag{4.102}$$

以及 Hörmander 条件:

$$\sup_{y\ne 0}\int_{|x|\ge 2|y|} |K(x-y)-K(x)|dx = A_2 \tag{4.103}$$

其中 $A_2<\infty$. 容易验证 Hörmander 条件(4.103)弱于 Lipschitz 条件(4.102), 而 Lipschitz 条件又弱于梯度条件(4.101).

4.3.3 从 L^p 有界性到弱 $(1,1)$ 型有界性

下面的定理给出了 Calderón-Zygmund 分解的最经典的应用.

定理 4.9 (一般奇异积分算子 L^p 有界性的延拓)

若存在 $A_1, A_2 < \infty$ 使得 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的函数 K 满足尺寸条件(4.94)[a] 与 Hörmander 条件(4.103), 设 $W\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是由(4.97)式定义的与 K 相关的缓增分布. 若存在 $1<r\le\infty$ 使得算子 $T:\varphi\mapsto W*\varphi$ 在 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 上具有有

界延拓，且其算子范数至多为 B，则 T 可以延拓为 $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的算子，其算子范数满足

$$\|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le C_n(A_2 + B), \tag{4.104}$$

另外对任意 $1 < p < \infty$，T 也可以延拓为 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ 的算子，其算子范数满足

$$\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n' \max(p, (p-1)^{-1})(A_2 + B), \tag{4.105}$$

其中 C_n, C_n' 是依赖于维数，而与 r, p 无关的常数.

[a]这一条件可以替换为 K 在不包含原点的任意紧集上可积.

证明 首先考虑 $r < \infty$ 的情形. 取定 $\alpha > 0$，考虑支在不交二进方体上的示性函数的有限线性组合构成的阶梯函数 f，这类函数构成的空间显然在全体 L^p 空间中均稠密，于是只要(4.104)式对这些函数成立，通过稠密性即可说明 T 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上有有界延拓，且延拓后的算子依旧满足(4.104)式. 下面说明结论对依前述构造得到的 f 成立.

对 f 应用高度为 $\gamma\alpha$ 的 Calderón-Zygmund 分解 (其中 γ 是待定系数)，可得

$$f(x) = g(x) + b(x) = g(x) + \sum_j b_j(x)$$

其中 g, b 满足 Calderón-Zygmund 分解定理4.8(i)-(vi)(α 替换为 $\gamma\alpha$). 因为 f 本身是支在不交二进方体上的示性函数的有限线性组合，故对 f 作 Calderón-Zygmund 分解只需有限个二进方体 Q_j. 根据 Calderón-Zygmund 分解的过程，每个 b_j 都支在中心为 y_j 的二进方体 Q_j 上，且 Q_j 互不相交. 设 $l(Q)$ 表示方体 Q 的边长，Q_j^* 表示与 Q_j 同心，各边平行且 $l(Q_j^*) = 2\sqrt{n}l(Q_j)$ 的唯一方体. 根据 f 的有界性，知 b_j 是支在 $\overline{Q_j}$ 内的有界函数，因而 $b_j \in L^r(\mathbb{R}^n)$. 又因为算子 T 本身在 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 上有有界延拓，故对每个 j 而言，$T(b_j)$ 都是良定义的 L^r 函数. 现对任意 j 与任意 $x \notin Q_j^*$ 有

$$T(b_j)(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{k \ge |x-y| \ge \delta_k} K(x-y)b_j(y)dy \overset{(A)}{=} \int_{Q_j} K(x-y)b_j(y)dy$$

其中 (A) 是因为由 K 的尺寸条件(4.94)知 K 在不包含原点的任意紧环上可积，而由 $x \notin Q_j^*$ 知 $0 \notin x - Q_j$，于是 $x - Q_j$ 总能囊入某个不包含原点的紧环，进而 K 在 $x - Q_j$ 上可积，另由 b_j 在 Q_j 上有界即知 (A) 右式绝对收敛，从而 (A) 基于 Lebesgue 控制收敛定理而成立.

现由 b_j 的消去律 (即 $\int_{Q_j} b_j(x)dx = 0$) 可得:

$$\begin{aligned}
\int_{(\bigcup_i Q_i^*)^c} \sum_j |T(b_j)(x)|dx &= \int_{(\bigcup_i Q_i^*)^c} \sum_j \left| \int_{Q_j} b_j(y)(K(x-y) - K(x-y_j))dy \right| dx \\
&\le \sum_j \int_{\bigcap_i (Q_i^*)^c} \int_{Q_j} |b_j(y)||K(x-y) - K(x-y_j)|dydx \\
&\le \sum_j \int_{(Q_j^*)^c} \int_{Q_j} |b_j(y)||K(x-y) - K(x-y_j)|dydx \\
&= \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{(Q_j^*)^c} |K(x-y) - K(x-y_j)|dxdy \\
&= \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{-y_j+(Q_j^*)^c} |K(x-(y-y_j)) - K(x)|dxdy \\
&\overset{(B)}{\le} \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{|x|\ge 2|y-y_j|} |K(x-(y-y_j)) - K(x)|dxdy \\
&\overset{(C)}{\le} A_2 \sum_j \|b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \overset{(D)}{\le} A_2 2^{n+1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty
\end{aligned}$$

其中 (B) 是因为当 $x \in -y_j + (Q_j^*)^c$ 时，由 $l(Q_j^*) - |y_j| \ge \frac{1}{2}l(Q_j^*)$ 知 $|x| \ge \frac{1}{2}l(Q_j^*) = \sqrt{n}l(Q_j)$，而由 $y - y_j \in -y_j + Q_j$ 知 $|y - y_j| \le \frac{\sqrt{n}}{2}l(Q_j)$，这便有 $|x| \ge 2|y - y_j|$(如图4.3); (C) 是 Hörmander 条件(4.103), (D) 是 Calderón-Zygmund 分

解定理4.8(v),(vi).

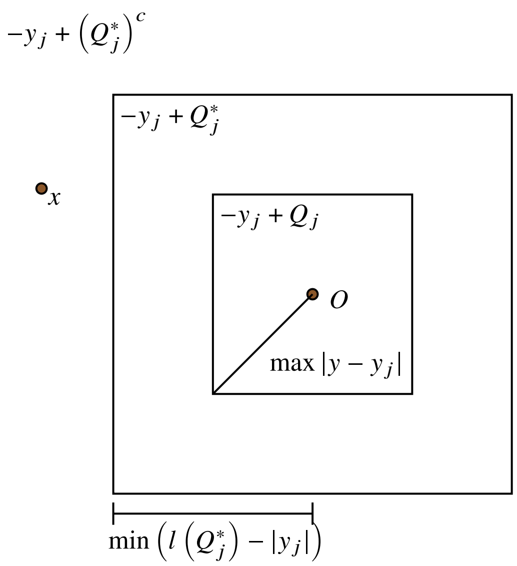

图 4.3: x, y_j, Q_j, Q_j^* 关系示意图

至此即得

$$\int_{(\bigcup_i Q_i^*)^c}\sum_j |T(b_j)(x)|dx \le 2^{n+1}A_2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.106}$$

进而

$$\begin{aligned}
|\{x\in\mathbb{R}^n:|T(f)(x)|>\alpha\}| &\le |\{x\in\mathbb{R}^n:|T(g)(x)|>\frac{\alpha}{2}\}|+|\{x\in\mathbb{R}^n:|T(b)(x)|>\frac{\alpha}{2}\}| \\
&\le \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|T(g)(x)|>\frac{\alpha}{2}\}}\left(\frac{2}{\alpha}|T(g)(x)|\right)^r dx+|\bigcup_i Q_i^*|+|\{x\notin\bigcup_i Q_i^*:|T(\sum_j b_j)(x)|>\frac{\alpha}{2}\}| \\
&\le \frac{2^r}{\alpha^r}\|T(g)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r+|\bigcup_i Q_i^*|+|\{x\notin\bigcup_i Q_i^*:|\sum_j T(b_j)(x)|>\frac{\alpha}{2}\}| \\
&\le \frac{2^r}{\alpha^r}B^r\|g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r+\sum_i|Q_i^*|+\int_{\{x\notin\bigcup_i Q_i^*:|\sum_j T(b_j)(x)|>\frac{\alpha}{2}\}}\frac{2}{\alpha}\sum_j|T(b_j)(x)|dx \\
&\overset{(E)}{\le} \frac{2^r}{\alpha^r}B^r 2^{\frac{nr}{r'}}(\gamma\alpha)^{\frac{r}{r'}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}+(2\sqrt{n})^n\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\gamma\alpha}+\frac{2}{\alpha}2^{n+1}A_2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \left(\frac{(2^{n+1}B\gamma)^r}{2^n\gamma}+\frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma}+2^{n+2}A_2\right)\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha}.
\end{aligned}$$

其中 (E) 基于(4.89)式, Calderón-Zygmund 分解定理4.8(vi) 与(4.106)式. 取 $\gamma=2^{-(n+1)}B^{-1}$ 即得

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|T(f)(x)|>\alpha\}|\le(2B+(2\sqrt{n})^n2^{n+1}B+2^{n+2}A_2)\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha}$$

取 $C_n=2+2^{n+1}(2\sqrt{n})^n+2^{n+2}$ 即得(4.104)式.

现已知 T 是弱 $(1,1)$ 型算子与强 (r,r) 型算子, 故由推论3.1可知 $1<p<r$ 时 T 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有有界延拓, 且

$$\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_n'(A_2+B)(p-1)^{-\frac{1}{p}}.$$

对于 $p>r$ 的场景, 考虑 T 的伴随算子 T^*:

$$\langle T(f),g\rangle=\langle f,T^*(g)\rangle$$

因为 T 本身是线性算子, 故 T^* 的积分核在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上与函数 $K^*(x)=\overline{K(-x)}$ 重合. 由 K 满足尺寸条件(4.94)与 Hörmander 条件(4.103)知 K^* 同样满足尺寸条件(4.94)与 Hörmander 条件(4.103), 进而由 T 可视作 $L^r(\mathbb{R}^n)\to L^r(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子知 $T^*:L^{r'}(\mathbb{R}^n)\to L^{r'}(\mathbb{R}^n)$ 同样是有界线性算子, 且其积分核 K^* 同样满足定理条件. 逐字逐句地

挪用前述证明并注意到 $1 < p' < r'$, 可知 T^* 作为 $L^{p'}(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的算子满足

$$\|T^*\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n'(A_2+B)(p'-1)^{-\frac{1}{p'}}$$

于是 $p > r > 1$ 时有

$$\begin{aligned}
\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1} \|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1} \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\le 1} |\langle T(f), g\rangle| \\
&= \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1} \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\le 1} |\langle f, T^*(g)\rangle| \\
&\le \sup_{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1} \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\le 1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|T^*(g)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\le 1} C_n'(A_2+B)(p'-1)^{-\frac{1}{p'}}\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_n'(A_2+B)(p'-1)^{-\frac{1}{p'}} = C_n'(A_2+B)(p-1)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

综上知 $1 < p < \infty$ 时有

$$\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n'(A_2+B)\max((p-1)^{-\frac{1}{p}}, (p-1)^{1-\frac{1}{p}})$$

又由 $\max((p-1)^{-\frac{1}{p}}, (p-1)^{1-\frac{1}{p}}) \le \max((p-1)^{-1}, p)$ 即得(4.105)式.

对于 $r = \infty$ 的情形, 前面关于稠密性的分析依旧成立 (因为目标空间是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 与 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$, 它们与 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 并没有直接联系), 因此依旧只需对支在不交二进方体上的示性函数的有限线性组合构成的阶梯函数 f 证明结论即可. 同样对这样的 f 应用高度为 $\gamma\alpha$ 的 Calderón-Zygmund 分解 (其中 γ 是待定系数), 并逐字逐句挪用前述设定与论证, 可得

$$\int_{(\bigcup_i Q_i^*)^c} \sum_j |T(b_j)(x)|dx \le 2^{n+1}A_2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

根据 Calderón-Zygmund 分解定理4.8(ii) 知 $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le 2^n\gamma\alpha$, 因而 $\|T(g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le 2^n\gamma\alpha B$. 取 $\gamma = (2^{n+1}B)^{-1}$ 可知 $\|T(g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\alpha}{2}$, 亦即 $|\{x\in\mathbb{R}^n : |T(g)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| = 0$, 于是

$$\begin{aligned}
|\{x\in\mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \alpha\}| &\le |\{x\in\mathbb{R}^n : |T(g)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| + |\{x\in\mathbb{R}^n : |T(b)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| \\
&\le \left(\frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma} + 2^{n+2}A_2\right)\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha} = ((2\sqrt{n})^n 2^{n+1}B + 2^{n+2}A_2)\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha}
\end{aligned}$$

取 $C_n = 2^{n+1}(2\sqrt{n})^n + 2^{n+2}$ 即得(4.104)式.

现已知 T 是弱 $(1,1)$ 型算子与强 (∞,∞) 型算子, 故由推论3.1可知 $1 < p < \infty$ 时 T 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有有界延拓, 且

$$\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n'(A_2+B)(p-1)^{-\frac{1}{p}}.$$

又由 $(p-1)^{-\frac{1}{p}} \le \max((p-1)^{-1}, p)$ 即得(4.105)式. □

4.3.4 对极大奇异积分的讨论

本节讨论极大奇异积分, 并在积分核的特定光滑性条件与相关线性算子的有界性条件下给出它们的有界性.

设 K 是 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的积分核, 且其对 $x \ne 0$ 满足尺寸条件

$$|K(x)| \le A_1|x|^{-n}. \tag{4.107}$$

进而对任意 $1 \le p < \infty$ 与任意 $\varepsilon > 0$, 函数 $K^{(\varepsilon)}(x) = K(x)\chi_{|x|\ge\varepsilon}(x) \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 且根据 L^p 范数的定义容易说明

$$\|K^{(\varepsilon)}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le c_{p,n}A_1\varepsilon^{-\frac{n}{p}}. \tag{4.108}$$

因此, 由 Hölder 不等式可知积分

$$(f * K^{(\varepsilon)})(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)dy$$

对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 与任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ 均绝对收敛.

现设 $f \in \bigcup_{1\leq p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$, 定义积分核 K 诱导的截断奇异积分 $T^{(\varepsilon)}(f)$ 为

$$T^{(\varepsilon)}(f) = f * K^{(\varepsilon)}.$$

同样定义积分核 K 诱导的极大截断奇异积分算子为

$$T^{(*)}(f) = \sup_{\varepsilon>0} |(f * K^{(\varepsilon)})| = \sup_{\varepsilon>0} |T^{(\varepsilon)}(f)|.$$

根据前述绝对收敛性可知算子 $T^{(*)}$ 至少是良定义的, 但它可能在 $\mathbb{R}^n$ 上的某些点处取值为 ∞.

下面考虑积分核 K 在以原点为中心的环上具有可积性的情况, 这一条件实际上比(4.107)式更弱. 准确来说, 设 K 是 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的可测函数, 且其在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 的任意紧子集上可积, 亦即存在常数 $A_1 < \infty$ 使得

$$\sup_{R>0} \int_{R\leq|x|\leq 2R} |K(x)|dx \leq A_1 < \infty. \tag{4.109}$$

当积分核 K 仅仅满足可积性条件(4.109)时, 它在 $|x| \geq \varepsilon$ 上很可能不具有 $p'(p' > 1)$ 阶可积性, 因而我们不能再断言 $T^{(\varepsilon)}$ 一定会输出绝对收敛积分. 为了克服这里定义上的困难, 我们考虑双重截断: 定义双重截断积分核 $K^{(\varepsilon,N)}$ 为

$$K^{(\varepsilon,N)}(x) = K(x)\chi_{\varepsilon\leq|x|\leq N}(x) \tag{4.110}$$

于是由可积性条件(4.109)知

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K^{(\varepsilon,N)}(x)|dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq N} |K(x)|dx \leq A_1\left(\left[\log_2 \frac{N}{\varepsilon}\right] + 1\right)$$

这说明 $K^{(\varepsilon,N)}$ 在以原点为中心的环上具有可积性. 现定义双重截断积分 $T^{(\varepsilon,N)}$ 为

$$T^{(\varepsilon,N)}(f) = f * K^{(\varepsilon,N)},$$

根据 Young 不等式(1.9)知当 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p \leq \infty)$ 时有

$$\|T^{(\varepsilon,N)}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |K^{(\varepsilon,N)}(x)|dx < \infty$$

因此算子 $T^{(\varepsilon,N)}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p \leq \infty)$ 上是良定义的. 这一结果同时说明对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n$ 均有

$$|T^{(\varepsilon,N)}(f)(x)| < \infty.$$

现对 $\bigcup_{1\leq p\leq\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的函数, 定义积分核 K 诱导的双重截断极大奇异积分 $T^{(**)}$ 为

$$T^{(**)}(f) = \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |T^{(\varepsilon,N)}(f)|. \tag{4.111}$$

对 $f \in \bigcup_{1\leq p\leq\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ 与几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n$ 而言, 数值 $T^{(**)}(f)(x)$ 当然是良定义的[45], 但它也有可能取到 ∞.

但这并不意味着在可积性条件(4.109)下没法再去定义极大截断奇异积分算子 $T^{(*)}$ 了. 下面说明输入紧支可积函数 g 时, $T^{(*)}(g)$ 依旧是良定义的. 设 $\operatorname{supp} g \subset B(0,R)$, 取 $x \in B(0,M)$, $N = M + R$, 则

$$|T^{(\varepsilon)}(g)(x)| \leq (|g| * |K^{(\varepsilon,N)}|)(x)$$

因为 $g, K^{(\varepsilon,N)}$ 都是 L^1 函数, 故 $T^{(\varepsilon)}(g)$ 在 $B(0,M)$ 上几乎处处有限, 因此用于定义 $T^{(\varepsilon)}(g)(x)$ 的积分在 $B(0,R)$ 上绝对收敛. 又因为 $R > 0$ 是任意的, 故 $T^{(\varepsilon)}(g)(x)$ 良定义且在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限.

当然, $T^{(*)}$ 与 $T^{(**)}$ 之间也有联系. 若 K 满足尺寸条件(4.107), 则

$$\left|\int_{\varepsilon\leq|y|} f(x-y)K(y)dy\right| \leq \sup_{N>0}\left|\int_{\varepsilon\leq|y|\leq N} f(x-y)K(y)dy\right|,$$

[45] 就算 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\N\to\infty}} |T^{(\varepsilon,N)}(f)(x)| = \infty$, 也不妨碍 $T^{(**)}$ 的良定义性. 极大算子 $T^{(**)}$ 的良定义只需要对每个取定的 ε, N 而言, $T^{(\varepsilon,N)}(f)(x)$ 均有限即可.

因而对全体 $f \in \bigcup_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$T^{(*)}(f) \le T^{(**)}(f).$$

另知 $T^{(\varepsilon,N)}(f) = T^{(\varepsilon)}(f) - T^{(N)}(f)$, 于是

$$T^{(**)}(f) \le 2T^{(*)}(f).$$

这说明只要积分核 K 满足尺寸条件(4.107), 则算子 $T^{(**)}$ 与 $T^{(*)}$ 就是可比的, 它们的有界性进而等价.

定理 4.10 (Cotlar 不等式)

设 $0 < A_1, A_2, A_3 < \infty$, K 定义在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上, 其满足尺寸条件

$$|K(x)| \le A_1|x|^{-n}, \quad x \neq 0, \tag{4.112}$$

光滑性条件

$$|K(x-y) - K(x)| \le A_2|y|^{\delta}|x|^{-n-\delta}, \quad |x| \ge 2|y| > 0 \tag{4.113}$$

与消失性条件

$$\sup_{0<r<R<\infty}\left|\int_{r<|x|<R} K(x)dx\right| \le A_3 \tag{4.114}$$

设 $W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是 K 依照(4.97)诱导的缓增分布, $T: \varphi \mapsto W * \varphi$, 则存在常数 $C_{n,\delta}$ 满足下述不等式:

$$T^{(*)}(f) \le M(T(f)) + C_{n,\delta}(A_1 + A_2 + A_3)M(f), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{4.115}$$

其中 M 是 Hardy-Littlewood 极大算子.

♡

证明 设 φ 是递减径向光滑函数, $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0, \frac{1}{2})$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. 对函数 g 与正数 ε, 记 $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}g(\varepsilon^{-1}x)$. 对分布 W 而言, 类似地定义唯一分布 W_ε 为

$$\langle W_\varepsilon, \psi\rangle := \varepsilon^{-n}\langle W, \psi_{\varepsilon^{-1}}\rangle.$$

显见函数 $K_{\varepsilon^{-1}}(x) = \varepsilon^n K(\varepsilon x)$ 关于 $\varepsilon > 0$ 一致地满足(4.112)-(4.114)式.

记 $K^{(\varepsilon)}(x) = K(x)\chi_{|x|\ge\varepsilon}(x)$, 取定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, 显见

$$f * K^{(\varepsilon)} = f * ((K_{\varepsilon^{-1}})^{(1)})_\varepsilon = f * (W * \varphi_\varepsilon) + f * ((K_{\varepsilon^{-1}})^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \varphi)_\varepsilon. \tag{4.116}$$

下面对任意 $\varepsilon > 0$ 与任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 证明估计

$$|((K_{\varepsilon^{-1}})^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \varphi)(x)| \le C(A_1 + A_2 + A_3)(1 + |x|)^{-n-\delta}. \tag{4.117}$$

根据 $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$ 知在 $|x| \ge 1$ 时可将(4.117)左式记作

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} (K_{\varepsilon^{-1}}(x) - K_{\varepsilon^{-1}}(x-y))\varphi(y)dy\right|.$$

因为 $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0, \frac{1}{2})$, 故 $|x| \ge 2|y|$, 于是光滑性条件(4.113)表明:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} (K_{\varepsilon^{-1}}(x) - K_{\varepsilon^{-1}}(x-y))\varphi(y)dy\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} A_2|y|^{\delta}|x|^{-n-\delta}|\varphi(y)|dy \overset{(A)}{\le} c\frac{A_2}{(1+|x|)^{n+\delta}}$$

其中 (A) 是因为 φ 是紧支函数. 至此便在 $|x| \ge 1$ 时证明了(4.117)式. 当 $|x| < 1$ 时, 对(4.117)左式有

$$|((K_{\varepsilon^{-1}})^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \varphi)(x)| = |(W_{\varepsilon^{-1}} * \varphi)(x)| = \left|\lim_{\delta_j\to 0}\int_{|x-y|\ge\delta_j} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)\varphi(y)dy\right| \tag{4.118}$$

其中 $\delta_j \downarrow 0$. (4.118)式绝对值内的表达式可以被分为三部分:

$$I_1 = \int_{|x-y|>\frac{1}{8}} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)\varphi(y)dy,$$

$$I_2 = \int_{|x-y|\le\frac{1}{8}} (\varphi(y) - \varphi(x))dy,$$

$$I_3 = \varphi(x)\lim_{\delta_j\to 0}\int_{\frac{1}{8}\ge|x-y|\ge\delta_j} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)dy.$$

对 I_1 知 $\frac{1}{8} \le |x-y| \le |x|+|y| \le 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 因而由尺寸条件(4.112)知 I_1 可被 A_1 的倍数控制. 根据 φ 的光滑性与微分中值定理知 $|\varphi(x)-\varphi(y)| \le c|x-y|$, 进而由尺寸条件(4.112)与极坐标换元知 I_2 也可被 A_1 的倍数控制. 最后, 由消失性条件(4.114)与 φ 的有界性知 I_3 可被 A_3 的倍数控制. 结合上述讨论即知 $|x|<1$ 时(4.117)式依旧成立.

现由正递减可积径向函数生成的恒等逼近族性质的推论3.2可知

$$\sup_{\varepsilon>0} |f * ((K_{\varepsilon^{-1}})^{(1)} - K_{\varepsilon^{-1}} * \varphi)_\varepsilon| \le c(A_1+A_2+A_3)M(f)$$

最后, 在(4.116)式两端对 $\varepsilon > 0$ 取上确界, 由(4.117)式与正递减可积径向函数生成的恒等逼近族性质的推论3.2可得估计

$$T^{(*)}(f) \le M(f*W) + C(A_1+A_2+A_3)M(f)$$

其中 C 依赖于 n, δ. (4.115)式进而得证. □

4.3.5 从极大奇异积分的强 (2, 2) 型有界性到弱 (1, 1) 型有界性

下面对极大奇异积分给出类似于一般奇异积分算子 L^p 有界性延拓4.9的命题:

定理 4.11 (双重截断极大奇异积分算子 L^2 有界性的延拓) 设 $K(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的函数, 其满足对应常数为 $A_1<\infty$ 的尺寸条件(4.94)与对应常数为 $A_2<\infty$ 的 Hörmander 条件(4.103). 另设算子 $T^{(**)}$ 依(4.111)式定义, 其作为 $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的算子时算子范数至多为 B, 则 $T^{(**)}$ 可视作 $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的算子, 且其算子范数满足

$$\|T^{(**)}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le C_n(A_1+A_2+B),$$

其中 C_n 是只关于维数的常数. ♡

证明 该定理的证明基本可以看成在一般奇异积分算子 L^p 有界性的延拓定理4.9证明上加了一点东西. 取定 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 对其应用高度为 $\gamma\alpha$ 的 Calderón-Zygmund 分解 $(\gamma, \alpha > 0)$. 依照 Calderón-Zygmund 分解可记 $f(x) = g(x) + b(x)$, 其中 $b(x) = \sum_j b_j(x)$, 且每个 b_j 均支在二进方体 Q_j 上. 定义 Q_j^* 是与 Q_j 同心, 各边长平行, 且 $l(Q_j^*) = 5\sqrt{n}l(Q_j)$ 的方体 (边长的倍数关系是与定理4.9证明里 Q_j^* 的构造中唯一不同的地方). 证明中最主要的改变体现在对

$$|\{x \in (\bigcup_j Q_j^*)^c : |T^{(**)}(b)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| \tag{4.119}$$

这一项的处理上. 现在只需说明当 $\gamma \le (2^{n+5}A_1)^{-1}$ 时有

$$|\{x \in (\bigcup_j Q_j^*)^c : |T^{(**)}(b)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| \le 2^{n+8}A_2\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha}. \tag{4.120}$$

定理就得证了. 这是因为逐字逐句仿照一般奇异积分算子 L^p 有界性的延拓定理4.9的证明可以说明

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T^{(**)}(g)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}| + |\bigcup_j Q_j^*| \le \left(2^{n+2}B^2\gamma + \frac{(5\sqrt{n})^n}{\gamma}\right)\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha}.$$

将上述估计与(4.120)式结合, 取 $\gamma = (2^{n+5}(A_1+A_2+B))^{-1} \le (2^{n+5}A_1)^{-1}$ 即得估计

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T^{(**)}(f)(x)| > \alpha\}| \le C_n(A_1+A_2+B)\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha},$$

其中 $C_n = 2^{-3} + (5\sqrt{n})^n 2^{n+5} + 2^{n+8}$.

下面证明(4.120)式, 这又只需说明对 $x \in (\bigcup_j Q_j^*)^c$ 有

$$T^{(**)}(b)(x) \le 4E_1(x) + 2^{n+2}\alpha\gamma E_2(x) + 2^{n+3}\alpha\gamma A_1 \tag{4.121}$$

即可, 其中

$$E_1(x)=\sum_j\int_{Q_j}|K(x-y)-K(x-y_j)||b_j(y)|dy,$$
$$E_2(x)=\sum_j\int_{Q_j}|K(x-y)-K(x-y_j)|dy,$$

而 y_j 是 Q_j 的中心.

只要(4.121)式成立, 就可以很轻松地得到(4.120)式了. 这是因为若取 γ 满足 $\gamma\le(2^{n+5}A_1)^{-1}$, 就有 $2^{n+3}\alpha\gamma A_1<\frac{\alpha}{4}<\frac{\alpha}{3}$, 于是由(4.121)式与 $\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{12}+\frac{\alpha}{12}$ 知

$$\begin{aligned}
&|\{x\in(\bigcup_j Q_j^*)^c:|T^{(**)}(b)(x)|>\frac{\alpha}{2}\}|\\
\le&|\{x\in(\bigcup_j Q_j^*)^c:4E_1(x)>\frac{\alpha}{12}\}|+|\{x\in(\bigcup_j Q_j^*)^c:2^{n+2}\alpha\gamma E_2(x)>\frac{\alpha}{12}\}|+|\{x\in(\bigcup_j Q_j^*)^c:2^{n+3}\alpha\gamma A_1>\frac{\alpha}{3}\}|\\
=&|\{x\in(\bigcup_j Q_j^*)^c:4E_1(x)>\frac{\alpha}{12}\}|+|\{x\in(\bigcup_j Q_j^*)^c:2^{n+2}\alpha\gamma E_2(x)>\frac{\alpha}{12}\}|\\
\le&\int_{\{x\in(\bigcup_j Q_j^*)^c:4E_1(x)>\frac{\alpha}{12}\}}\frac{48}{\alpha}E_1(x)dx+\int_{\{x\in(\bigcup_j Q_j^*)^c:2^{n+2}\alpha\gamma E_2(x)>\frac{\alpha}{12}\}}2^{n+2}\alpha\gamma\cdot12\frac{E_2(x)}{\alpha}dx\\
=&\frac{48}{\alpha}\int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c}E_1(x)dx+2^{n+6}\gamma\int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c}E_2(x)dx,
\end{aligned}\tag{4.122}$$

进一步有

$$\begin{aligned}
\int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c}E_1(x)dx=&\int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c}\Big(\sum_j\int_{Q_j}|K(x-y)-K(x-y_j)||b_j(y)|dy\Big)dx\\
\le&\sum_j\int_{Q_j}|b_j(y)|\int_{(Q_j^*)^c}|K(x-y)-K(x-y_j)|dxdy\\
\overset{(C)}{\le}&\sum_j\int_{Q_j}|b_j(y)|\int_{|x-y_j|\ge2|y-y_j|}|K(x-y)-K(x-y_j)|dxdy\\
\overset{(D)}{\le}&A_2\sum_j\int_{Q_j}|b_j(y)|dy=A_2\sum_j\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\overset{(E)}{\le}A_2 2^{n+1}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}\tag{4.123}$$

其中 (C) 是因为当 $x\in(Q_j^*)^c$ 时有 $|x-y_j|\ge\frac{1}{2}l(Q_j^*)=\frac{5}{2}\sqrt{n}l(Q_j)$, 而 $|y-y_j|\le\frac{\sqrt{n}}{2}l(Q_j)$, 故 $|x-y_j|\ge2|y-y_j|$(见图4.4); (D) 是 Hörmander 条件4.103, (E) 是 Calderón-Zygmund 分解定理4.8(v).

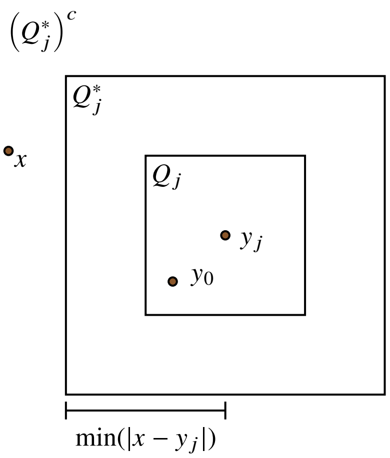

图 4.4: Q_j, Q_j^* 示意图

类似地, 对 E_2 有

$$\begin{aligned}\int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c} E_2(x)dx &\leq \sum_j \int_{Q_j} dy \int_{|x-y_j|\geq 2|y-y_j|} |K(x-y)-K(x-y_j)|dx \\ &\leq \sum_j \int_{Q_j} A_2 dy \leq A_2 \sum_j |Q_j| \overset{\text{(F)}}{\leq} A_2 \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha\gamma}\end{aligned} \tag{4.124}$$

其中 (F) 是 Calderón-Zygmund 分解定理4.8(vi). 结合(4.122)-(4.124)式即得(4.120)式.

现在的主要任务就是证明(4.121)式了. 因为 $b(x)=\sum_j b_j(x)$, 要估计 $T^{(**)}(b)$, 依照双重截断极大奇异积分的定义与三角不等式知只需给出每个 $|T^{(\varepsilon,N)}(b_j)|$ 关于 ε, N 的一致估计, 为此考虑

$$|T^{(\varepsilon,N)}(b_j)| \leq |T^{(\varepsilon)}(b_j)| + |T^{(N)}(b_j)|, \tag{4.125}$$

其中截断奇异积分 $T^{(\varepsilon)}(b_j)$ 是良定义的, 这是因为设 x 在紧集 K_0 内, 取 $M>0$ 使得 K_0-Q_j 在球 $B(0,M)$ 内, 则

$$|T^{(\varepsilon)}(b_j)(x)| = \left|\int_{Q_j} K^{(\varepsilon)}(x-y)b_j(y)dy\right| \leq (|b_j| * |K^{(\varepsilon,M)}|)(x)$$

因为上右式是两个 L^1 函数的卷积, 故其几乎处处有限, 因此 $T^{(\varepsilon)}(b_j)(x)$ 所对应的积分绝对收敛, 进而其对几乎处处 x 均良定义. 类似可以说明 $T^{(N)}(b_j)$ 是良定义的.

下面对 $T^{(\varepsilon)}$ 作估计, 这些过程也能套用到 $T^{(N)}$ 上. 取定 $x \notin \bigcup_j Q_j^*, \varepsilon>0$, 定义

$$\begin{aligned} J_1(x,\varepsilon) &= \{j : \forall y \in Q_j(|x-y|<\varepsilon)\}, \\ J_2(x,\varepsilon) &= \{j : \forall y \in Q_j(|x-y|>\varepsilon)\}, \\ J_3(x,\varepsilon) &= \{j : \exists y \in Q_j(|x-y|=\varepsilon)\}. \end{aligned} \tag{4.126}$$

注意到 $x \notin \bigcup_j Q_j^*, j \in J_1(x,\varepsilon)$ 时有

$$T^{(\varepsilon)}(b_j)(x) = \int_{Q_j} K^{(\varepsilon)}(x-y)b_j(y)dy = 0$$

另在 $x \notin \bigcup_j Q_j^*, j \in J_2(x,\varepsilon)$ 时有

$$K^{(\varepsilon)}(x-y) = K(x-y),$$

于是

$$\sup_{\varepsilon>0} |T^{(\varepsilon)}(b_j)(x)| \leq \sup_{\varepsilon>0}\left|\sum_{j\in J_2(x,\varepsilon)} T(b_j)(x)\right| + \sup_{\varepsilon>0}\left|\sum_{j\in J_3(x,\varepsilon)} T(b_j\chi_{|x-\circledast|\geq\varepsilon})(x)\right|$$

又因为

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\sum_{j\in J_2(x,\varepsilon)} T(b_j)(x)\right| \leq \sum_j |T(b_j)(x)| \leq E_1 \tag{4.127}$$

故只需估计

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\sum_{j\in J_3(x,\varepsilon)} T(b_j\chi_{|x-\circledast|\geq\varepsilon})(x)\right|$$

即可.

下面进行一些几何上的观察: 根据图4.4, 取定 $\varepsilon>0$ 与指标 $j \in J_3(x,\varepsilon)$ 对应的方体 Q_j. 注意我们此时讨论的是 $x \in (\bigcup_j Q_j^*)^c$ 的情况, 于是

$$\varepsilon = |x-y| \geq \frac{1}{2}(l(Q_j^*)-l(Q_j)) = \frac{1}{2}(5\sqrt{n}-1)l(Q_j) \geq 2\sqrt{n}l(Q_j). \tag{4.128}$$

因为 $j \in J_3(x,\varepsilon)$, 根据 $J_3(x,\varepsilon)$ 的定义知存在 $y_0 \in Q_j$ 使得

$$|x-y_0| = \varepsilon.$$

由(4.128)式知

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon - \sqrt{n}l(Q_j) \leq |x - y_0| - |y - y_0| \leq |x - y|$$

$$|x - y| \leq |x - y_0| + |y - y_0| \leq \varepsilon + \sqrt{n}l(Q_j) \leq \frac{3\varepsilon}{2}$$

于是

$$\bigcup_{j \in J_3(x,\varepsilon)} Q_j \subset B(x, \frac{3\varepsilon}{2}) \backslash B(x, \frac{\varepsilon}{2}).$$

现记

$$c_j(\varepsilon) = \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} b_j(y) \chi_{|x-y| \geq \varepsilon}(y) dy,$$

根据 Calderón-Zygmund 分解定理4.8(v) 可得估计

$$|c_j(\varepsilon)| \leq \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} 2^{n+1} \alpha\gamma \chi_{|x-y| \geq \varepsilon}(y) dy \leq 2^{n+1} \alpha\gamma,$$

因而

$$\begin{aligned}
&\sup_{\varepsilon>0} \left| \sum_{j \in J_3(x,\varepsilon)} \int_{Q_j} K(x-y) b_j(y) \chi_{|x-y| \geq \varepsilon}(y) dy \right| \\
&\leq \sup_{\varepsilon>0} \left| \sum_{J_3(x,\varepsilon)} \int_{Q_j} K(x-y)(b_j(y) \chi_{|x-y| \geq \varepsilon}(y) - c_j(\varepsilon)) dy \right| + \sup_{\varepsilon>0} \left| \sum_{j \in J_3(x,\varepsilon)} c_j(\varepsilon) \int_{Q_j} K(x-y) dy \right| \\
&\overset{(G)}{\leq} \sup_{\varepsilon>0} \left| \sum_{j \in J_3(x,\varepsilon)} \int_{Q_j} (K(x-y) - K(x-y_j))(b_j(y) \chi_{|x-y| \geq \varepsilon}(y) - c_j(\varepsilon)) dy \right| + 2^{n+1} \alpha\gamma \sup_{\varepsilon>0} \int_{B(x,\frac{3\varepsilon}{2}) \backslash B(x,\frac{\varepsilon}{2})} |K(x-y)| dy \\
&\leq \sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)|(|b_j(y)| + 2^{n+1} \alpha\gamma) dy + 2^{n+1} \alpha\gamma \sup_{\varepsilon>0} \int_{\frac{\varepsilon}{2} \leq |x-y| \leq \frac{3\varepsilon}{2}} |K(x-y)| dy \\
&\leq E_1(x) + 2^{n+1} \alpha\gamma E_2(x) + 2^{n+1} \alpha\gamma (2A_1)
\end{aligned} \tag{4.129}$$

其中 (G) 是因为 $\int_{Q_j} K(x-y_j)(b_j(y)\chi_{|x-y|\geq\varepsilon}(y) - c_j(\varepsilon))dy = 0$. 结合(4.129),(4.127),(4.125)式, 并考虑将上述过程对 $\sup\limits_{N>0} |T^{(N)}(b_j)(x)|$ 逐字逐句地重复一次所得的类似结果, 即得(4.121)式. □

双重截断极大奇异积分算子 L^2 有界性延拓定理4.11的意义在于: 只要知道了存在序列 $\varepsilon_j \downarrow 0, N_j \uparrow \infty$ 使得点态极限 $\lim\limits_{j\to\infty} T^{(\varepsilon_j,N_j)}(f)$ 对在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的某稠密子空间内的全体 f 均几乎处处存在, 则由双重截断极大奇异积分算子 L^2 有界性延拓定理4.11与算子族的点态收敛性3.2可知 $\lim\limits_{j\to\infty} T^{(\varepsilon_j,N_j)}(f)$ 对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 均几乎处处存在[46].

如果奇异积分的积分核形如 $\Omega(x/|x|)|x|^{-n}$, 其中 $\Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$(如 Hilbert 变换与 Riesz 变换), 则依(4.110)式定义的截断积分核 K 的上界就不再需要了 (因为此时 K 在 $|x|$ 足够大时与 $|x|^{-n}$ 表现类似, 这便说明 K 在远处的 $p'(p'>1)$ 阶可积性与 $\frac{1}{r}$ 的 $p'(p'>1)$ 阶可积性应该等价, 后者在远处当然是可积的), 此时通过 Hölder 不等式可说明

$$T_\Omega^{(\varepsilon)}(f)(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y) \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy$$

对 $f \in \bigcup_{1\leq p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ 均良定义, 且

$$T_\Omega^{(\varepsilon)}(f)(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{\varepsilon\leq|y|\leq N} f(x-y) \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy.$$

推论 4.4 (极大 Hilbert 变换与极大 Riesz 变换的弱 (1, 1) 型有界性)

极大 Hilbert 变换 $H^{(*)}$ 与极大 Riesz 变换 $R_j^{(*)}$ 是弱 (1, 1) 型算子. 另外, 极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0} H^{(\varepsilon)}(f)$ 与 $\lim\limits_{\varepsilon\to0} R_j^{(\varepsilon)}(g)$ 对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 都是几乎处处存在的.

证明 因为 Hilbert 变换的积分核 $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ 与 Riesz 变换的积分核 $\frac{x_j}{|x|^{n+1}} \in \mathbb{R}^n$ 均满足梯度条件(4.101), 故它们必满

[46] 怎么将定理内容本身的 L^2 与这里的稠密子空间联系起来?

足 Hörmander 条件(4.103). 另外显见这两个积分核均满足尺寸条件(4.94), 故由双重截断极大奇异积分算子 L^2 有界性延拓定理4.11立得 $H^{(*)}$ 与 $R_j^{(*)}$ 的弱 $(1,1)$ 型估计. 极限 $\lim_{\varepsilon\to 0} H^{(\varepsilon)}(f)$ 与 $\lim_{\varepsilon\to 0} R_j^{(\varepsilon)}(g)$ 的存在性可结合算子族的点态收敛性3.2, Hilbert 变换的 L^2 性质??(i), 极大 Hilbert 变换的 $L^p(1<p<\infty)$ 有界性4.4以及 Riesz 变换与极大 Riesz 变换的 $L^p(1,\infty)$ 有界性4.2得到, 这是因为这两个极限对 Schwartz 函数当然是存在的, 由双重截断极大奇异积分算子 L^2 有界性延拓定理4.11即得结论. □

由 Marcinkiewicz 插值定理的推论3.1可进一步得到下述结论:

推论 4.5

在双重截断极大奇异积分算子 L^2 有界性延拓定理4.11的条件下, $T^{(**)}$ 可视作 $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<2)$ 的算子, 且

$$\|T^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{C_n(A_1+A_2+B)}{p-1},$$

其中 C_n 是只关于维数的常数.

4.4 L^p 有界性的充分条件

前面我们已经用 Calderón-Zygmunde 分解证明了奇异积分算子与极大奇异积分算子在已知算子自身 L^2 有界时的弱 $(1,1)$ 型有界性. 一个问题顺势而生: 那么怎样的充分条件可以导出这些算子的 L^2 有界性呢? 更确切地说, 我们需要对 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的函数 K 添加怎样的充分条件, 才能让其所诱导的奇异积分算子与极大奇异积分算子是 L^2 有界算子? 在对齐次奇异积分的讨论中, 我们已经知道如果 K 形如 $K(x)=\Omega(x/|x|)|x|^{-n}$(其中 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(x)dx=0$), 则(4.61)式就是 T 具有 L^2 有界性的充要条件, 而 $T^{(*)}$ 的 L^2 有界性需要更强的光滑性条件[47](对数可积性条件)(4.69).

对本节所考虑的一般积分核 K(其对应的算子不必与伸缩变换可换[48]), 这里并不打算讨论其所诱导的算子 L^2 有界性的充要条件, 而只研究充分条件. 本节提到的 K 均为定义在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的局部可积函数, 其满足尺寸条件

$$\sup_{R>0}\int_{R\le|x|\le 2R}|K(x)|dx = A_1<\infty, \tag{4.130}$$

光滑性条件

$$\sup_{y\neq 0}\int_{|x|\ge 2|y|}|K(x-y)-K(x)|dx = A_2<\infty, \tag{4.131}$$

与消失性条件

$$\sup_{0<R_1<R_2<\infty}\left|\int_{R_1<|x|<R_2}K(x)dx\right| = A_3<\infty, \tag{4.132}$$

其中 $A_1,A_2,A_3>0$. 如前文所言, 光滑性条件(4.131)又称为 Hörmander 条件. 本节说明满足上述三个条件的积分核 K 所诱导的卷积算子具有 L^p 有界性.

4.4.1 奇异积分 L^p 有界性的充分条件: Calderón-Zygmund 定理

首先说明在条件(4.130)-(4.132)成立时, 存在形如(4.97)式的缓增分布 W, 且其在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上与 K 重合. 这是因为消失性条件(4.132)表明存在序列 $\delta_j\downarrow 0$ 使得

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\delta_j<|x|\le 1}K(x)dx = L,$$

进而由一般积分核对应缓增分布的合法性4.8可知这样的缓增分布 W 是存在的. 注意此时有 $|L|\le A_3$.

回忆在利用(4.97)式定义缓增分布 W 时, 提到过这样定义的缓增分布未必唯一. 但如果缓增分布 W,W' 在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上均与 K 重合, 它们的差 $W-W'$ 就只能支在原点.

[47] 为什么这里会把对数可积性条件称作光滑性条件?

[48] 与伸缩变换可换是齐次函数对应算子的性质, 此时积分核的伸缩变换对应常数可以提出.

定理 4.12 (Calderón-Zygmund)

设 K 满足条件(4.130)-(4.132), W 是形如(4.97)式且在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上与 K 重合的缓增分布, 则

$$\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|(K\chi_{\varepsilon<|\circledast|<N})^{\wedge}(\xi)|\leq 15(A_1+A_2+A_3) \tag{4.133}$$

进而

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\widehat{W}(\xi)|\leq 15(A_1+A_2+A_3). \tag{4.134}$$

从而算子 $T:\varphi\mapsto W*\varphi$ 可视作 $L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的算子, 其满足

$$\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}\leq 15(A_1+A_2+A_3),$$

它也可视作 $L^1(\mathbb{R}^n)\to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的算子, 其满足

$$\|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}\leq C_n(A_1+A_2+A_3)$$

最后, 也可将其视为 $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 的算子, 且满足

$$\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C_n'\max(p,(p-1)^{-1})(A_1+A_2+A_3)$$

其中 C_n,C_n' 是只关于维数的常数.

证明 当(4.133)式成立时, 记 $K^{(\varepsilon,N)}(x)=K(x)\chi_{\varepsilon<|x|<N}(x)$, 由(4.133)式这一关于 ε,δ 的一致估计与 Plancheral 定理2.23知对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$\|f*K^{(\delta_j,j)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq 15(A_1+A_2+A_3)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.135}$$

且估计(4.135)关于 j 一致. 由估计(4.135), 缓增分布 W 的定义式(4.97)与 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned}\|f*W\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}&=\left\|\int_{\mathbb{R}^n}f(\circledast-y)(\lim_{j\to\infty}K(y)\chi_{\delta_j<|y|<j})dy\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\&\overset{(A)}{\leq}\varliminf_{j\to\infty}\|f*K^{(\delta_j,j)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq 15(A_1+A_2+A_3)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

其中 (A) 中蕴含的 Fatou 引理需要下界条件[49], 而这已由 $f\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ 与 K 的尺寸条件(4.130)保证了. 至此已知

$$\|f*W\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq 15(A_1+A_2+A_3)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

由 Plancherel 定理2.23即得(4.134)式, 另由一般奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.9知 $T:f\mapsto f*W$ 可延拓为 $L^1(\mathbb{R}^n)\to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的算子, 进而可延拓为 $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 的算子, 其算子范数上界可由一般奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.9计算得到.

下面证明(4.133)式, 考虑将 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 分为下述几种情况:

- 情况一: $\varepsilon<|\xi|^{-1}<N$. 此时可记

$$\widehat{K^{(\varepsilon,N)}}(\xi)=I_1(\xi)+I_2(\xi)$$

其中

$$\begin{aligned}I_1(\xi)&=\int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}}K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx,\\I_2(\xi)&=\int_{|\xi|^{-1}<|x|<N}K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx.\end{aligned}$$

针对 I_1 有

$$I_1(\xi)=\int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}}K(x)dx+\int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}}K(x)(e^{-i2\pi x\cdot\xi}-1)dx. \tag{4.136}$$

[49] 存在 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 使得 $f*K^{(\delta_j,j)}\geq g$.

进而由消失性条件(4.132), 微分中值定理与尺寸条件(4.130)知

$$|I_1(\xi)| \le A_3 + 2\pi|\xi| \int_{|x|<|\xi|^{-1}} |x||K(x)|dx \le A_3 + 2\pi(2A_1)$$

显见上式是关于 ε 的一致估计. 下面还需得到 $I_2(\xi)$ 关于 N 的一致估计. 记 $z = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$, 知 $e^{i2\pi z\cdot\xi} = -1$ 且 $2|z| = |\xi|^{-1}$, 作换元 $x = x' - z$ 知可将 I_2 记为

$$\begin{aligned} I_2(\xi) &= -\int_{|\xi|^{-1}<|x'-z|<N} K(x'-z)e^{-i2\pi x'\cdot\xi}dx' \\ &= -\int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<N} K(x-z)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx \end{aligned}$$

对 I_2 的两个表达式取平均可得

$$I_2(\xi) = \frac{1}{2}\int_{|\xi|^{-1}<|x|<N} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx - \frac{1}{2}\int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<N} K(x-z)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx.$$

由积分等式

$$\int_A F dx - \int_B G dx = \int_B (F-G)dx + \int_{A\setminus B} F dx - \int_{B\setminus A} F dx \tag{4.137}$$

可记 $I_2(\xi) = J_1(\xi) + J_2(\xi) + J_3(\xi) + J_4(\xi) + J_5(\xi)$, 其中

$$J_1(\xi) = \frac{1}{2}\int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<N} (K(x) - K(x-z))e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx, \tag{4.138}$$

$$J_2(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\substack{|\xi|^{-1}<|x|<N \\ |x-z|\le|\xi|^{-1}}} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx, \tag{4.139}$$

$$J_3(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\substack{|\xi|^{-1}<|x|<N \\ |x-z|\ge N}} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx, \tag{4.140}$$

$$J_4(\xi) = -\frac{1}{2}\int_{\substack{|\xi|^{-1}<|x-z|<N \\ |x|\le|\xi|^{-1}}} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx, \tag{4.141}$$

$$J_5(\xi) = -\frac{1}{2}\int_{\substack{|\xi|^{-1}<|x-z|<N \\ |x|\ge N}} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx. \tag{4.142}$$

因为 $2|z| = |\xi|^{-1} \ne 0$, 故在 Hörmander 条件(4.131)中将 x 换成 $x-z$, y 换成 $-z$ 可知 $|J_1(\xi)| \le \frac{1}{2}A_2$.
注意到在(4.139)式中有 $|\xi|^{-1} \le |x| \le \frac{3}{2}|\xi|^{-1}$, 在(4.141)式中有 $\frac{1}{2}|\xi|^{-1} \le |x| \le |\xi|^{-1}$, 故由尺寸条件(4.130)可知 $|J_2(\xi)| \le \frac{1}{2}A_1, |J_4(\xi)| \le \frac{1}{2}A_1$. 最后, 在(4.140)式中有 $\frac{1}{2}N < |x| < N$(因为 $|x| > N - \frac{1}{2}|\xi|^{-1} \ge \frac{1}{2}N$), 类似地在(4.142)式中有 $N \le |x| < \frac{3}{2}N$, 故由尺寸条件(4.130)知 $|J_3(\xi)| \le \frac{1}{2}A_1, |J_5(\xi)| \le \frac{1}{2}A_1$.

- 情况二: $\varepsilon < N \le |\xi|^{-1}$. 此时记

$$\widehat{K^{(\varepsilon,N)}}(\xi) = \int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx = \int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)dx + \int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)(e^{-i2\pi x\cdot\xi} - 1)dx$$

根据消失性条件(4.132), 微分中值定理与一般奇异积分核尺寸条件的等价提法4.7可知

$$\left|\int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)dx + \int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)(e^{-i2\pi x\cdot\xi} - 1)dx\right| \le A_3 + 2\pi|\xi| \int_{|x|\le|\xi|^{-1}} |K(x)||x|dx \le A_3 + 4\pi A_1.$$

另若 $\xi = 0$, 则

$$\int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx = \int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)dx$$

它同样能被 A_3 控制.

- 情况三: $|\xi|^{-1} \le \varepsilon < N$. 此时记

$$\int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx = \int_{|\xi|^{-1}<|x|<N} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx - \int_{|\xi|^{-1}<|x|<\varepsilon} K(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}dx,$$

上右式两项均形如 I_2, 进而用类似的方法可以说明上式被 $2A_1 + \frac{1}{2}A_2$ 控制.

综上, 对全体 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 均有估计 $|\widehat{K^{(\varepsilon,N)}}(\xi)| \le 15(A_1 + A_2 + A_3)$, (4.133)式进而成立. □

4.4.2 满足充分条件的一个例子

下面给出一个满足条件(4.130)-(4.132)的分布例子.

例 4.6 设 τ 是非零实数, $K(x)=\frac{1}{|x|^{n+i\tau}}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的函数. 对序列 $\delta_k\downarrow 0$ 与 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 在极限存在时定义

$$\langle W,\varphi\rangle=\lim_{k\to\infty}\int_{\delta_k\le|x|}\varphi(x)\frac{dx}{|x|^{n+i\tau}}. \tag{4.143}$$

可以选取序列 δ_k 使得 W 是在 $\mathbb{R}^n$ 上良定义的缓增分布. 例如取 $\delta_k=e^{-2\pi\frac{k}{\tau}}$, 此时

$$\int_{\delta_k\le|x|\le 1}\frac{dx}{|x|^{n+i\tau}}=\omega_{n-1}\frac{1-(e^{-2\pi\frac{k}{\tau}})^{-i\tau}}{-i\tau}=0$$

因而

$$\langle W,\varphi\rangle=\int_{|x|\le 1}(\varphi(x)-\varphi(0))\frac{dx}{|x|^{n+i\tau}}+\int_{|x|\ge 1}\varphi(x)\frac{dx}{|x|^{n+i\tau}} \tag{4.144}$$

由微分中值定理与 Schwartz 空间对多项式乘积的封闭性可证

$$|\langle W,\varphi\rangle|\le C(\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\||\circledast|\varphi(\circledast)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)})$$

因而 $W\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 另外, 若 φ 支在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上, 则

$$\langle W,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}K(x)\varphi(x)dx,$$

这说明 W 在原点之外与函数 K 重合. 现在显见 K 满足尺寸条件(4.130)与 Hörmander 条件(4.131), 对于消失性条件(4.132), 知

$$\left|\int_{R_1<|x|<R_2}\frac{dx}{|x|^{n+i\tau}}\right|=\omega_{n-1}\left|\frac{R_1^{-i\tau}-R_2^{-i\tau}}{-i\tau}\right|\le\frac{2\omega_{n-1}}{|\tau|}$$

由 τ 非零即知 K 满足消失性条件(4.132).

注 我们需要特别强调: 极限(4.143)未必对所有趋零序列 $\{\delta_k\}$ 均成立. 例如取 $\delta_k=e^{-\pi\frac{k}{\tau}}$, 极限(4.143)就不存在. 另外, 就算选取的序列 $\{\delta_k\}$ 能使得极限(4.143)存在, 根据所取序列的不同 (例如令 $\delta_k=e^{-\pi\frac{2k+1}{\tau}}$), 我们也将得到在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上与函数 $K(x)=|x|^{-n-i\tau}$ 重合的另一分布 W_1.

另外, 就算 $K(x)$ 本身是 $-n-i\tau$ 阶齐次函数, 依(4.143)式定义的缓增分布 W 也未必是 $-n-i\tau$ 阶齐次分布. 事实上, 在原点外与函数 $|x|^{-n-i\tau}$ 重合的 $-n-i\tau$ 阶齐次分布只有一种, 即分布 $u_{-n-i\tau}$ 的常数倍, 其中分布 u_z 依(2.81)式定义:

$$\langle u_z,f\rangle:=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma(\frac{z+n}{2})}|x|^z f(x)dx,\quad z\in\mathbb{C},f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

由(2.82)式可知

$$\langle u_{-n-i\tau},\varphi\rangle=\int_{|x|\ge 1}\varphi(x)\frac{\pi^{-i\frac{\tau}{2}}}{\Gamma(-i\frac{\tau}{2})}|x|^{-n-i\tau}dx+\int_{|x|\le 1}(\varphi(x)-\varphi(0))\frac{\pi^{-i\frac{\tau}{2}}}{\Gamma(-i\frac{\tau}{2})}|x|^{-n-i\tau}dx+\frac{\omega_{n-1}\pi^{-i\frac{\tau}{2}}}{-i\tau\Gamma(-i\frac{\tau}{2})}\varphi(0).$$

与(4.144)式比对知 $u_{-n-i\tau}-c_1W=c_2\delta_0$, 其中 c_1,c_2 是某非零常数. 因为在原点处的 Dirac 测度不是 $-n-i\tau$ 阶齐次分布, 故 W 也不会是 $-n-i\tau$ 阶齐次分布.

另知

$$\widehat{u_{-n-i\tau}}=u_{i\tau}=c_3|\xi|^{i\tau},$$

于是恒等式 $u_{-n-i\tau}-c_1W=c_2\delta_0$ 也能用于导出 W 的 Fourier 变换的表达式, 进而给出 Calderón-Zygmund 定理4.12不同于前述方法的另一种证明.

4.4.3 消失性条件的必要性

尽管条件(4.130)-(4.132)是 L^2 有界性的充分条件, 它们却不一定是必要条件. 本小节说明在给出尺寸条件(4.130)的情况下, 消失性条件(4.132)将是必要的.

命题 4.9

设 K 是定义在 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上, 且满足尺寸条件(4.130)的函数; W 是由 K 依(4.97)式诱导的定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的缓增分布. 若算子 $T: f \mapsto W * f$ 是 L^2 有界的 (该条件也等价于 $\widehat{W} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$), 则函数 K 必满足消失性条件(4.132).

证明 取光滑径向函数 φ 满足 $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,2), 0 \le \varphi \le 1$, 且 $|x| \le 1$ 时 $\varphi(x) = 1$. 对 $R > 0$ 定义 $\varphi^R(x) = \varphi(\frac{x}{R})$, 则

$$(W * \varphi^R)(0) = \langle W, \varphi^R\rangle = \langle \widehat{W}, \widehat{\varphi^R}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{W}(\xi)R^n\widehat{\varphi}(R\xi)d\xi,$$

于是

$$|(W * \varphi^R)(0)| \le \|\widehat{W}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}\|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.145}$$

且上述估计关于 $R > 0$ 一致. 取定 $0 < R_1 < R_2 < \infty$, 若 $R_2 \le 2R_1$, 则

$$\left|\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)dx\right| \le \int_{R_1<|x|<2R_1} |K(x)|dx \le A_1$$

这便是消失性条件(4.132). 现设 $2R_1 < R_2$, 根据尺寸条件(4.130)知消失性条件(4.132)中 $R_1 < |x| < 2R_1$ 的部分已经被 A_1 一致控制了, 故只需说明 $2R_1 < |x| < R_2$ 的部分也具有一致控制. 因为 $\varphi^{R_2} - \varphi^{R_1}$ 支在原点之外, 故缓增分布 W 在该函数上的作用可以写成 K 与该函数的 L^2 内积的形式. 知:

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x)(\varphi^{R_2}(x) - \varphi^{R_1}(x))dx = \int_{2R_1<|x|<R_2} K(x)dx + \int_{R_1<|x|<2R_1} K(x)(1 - \varphi^{R_1}(x))dx + \int_{R_2<|x|<2R_2} K(x)\varphi^{R_2}(x)dx.$$

因为 $0 \le \varphi \le 1$, 故由尺寸条件(4.130)可知上右式后两项将被 $3A_1$ 控制. 对上左式, 由(4.145)式知

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} K(x)(\varphi^{R_2}(x) - \varphi^{R_1}(x))dx\right| \le |(W * \varphi^{R_2})(0)| + |(W * \varphi^{R_1})(0)| \le 2\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}\|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int_{2R_1<|x|<R_2} K(x)dx\right| &\le \left|\int_{\mathbb{R}^n} K(x)(\varphi^{R_2}(x) - \varphi^{R_1}(x))dx\right| + \left|\int_{R_1<|x|<2R_1} K(x)(1 - \varphi^{R_1}(x))dx + \int_{R_2<|x|<2R_2} K(x)\varphi^{R_2}(x)dx\right| \\ &\le 2\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}\|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 3A_1\end{aligned}$$

因此 K 必满足消失性条件(4.132), 且其对应常数满足

$$A_3 \le 3A_1 + 2\|\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)} \le c(A_1 + \|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}).$$

命题至此即证. □

4.4.4 极大奇异积分算子 L^p 有界性的充分条件

对极大奇异积分算子 $T^{(**)}$ 而言, 有类似于 Calderón-Zygmund 定理4.12的结论.

定理 4.13 (极大奇异积分算子 L^p 有界性的充分条件)

若 K 满足尺寸条件(4.130), Hörmander 条件(4.131)与消失性条件(4.132), 且 $T^{(**)}$ 依(4.111)式定义, 则 $T^{(**)}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ 的有界算子, 且

$$\|T^{(**)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n \max(p, (p-1)^{-1})(A_1 + A_2 + A_3),$$

其中 C_n 是只关于维数的常数.

证明 若 K 满足条件(4.130)-(4.132), 根据消失性条件(4.132)知存在序列 $\delta_j \downarrow 0$ 使得极限

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\delta_j<|x|\le 1} K(x)dx$$

存在. 因此对 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 可定义缓增分布:

$$\langle W, \varphi\rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{\delta_j\le|x|\le j} K(x)\varphi(x)dx$$

进而可以定义算子 $T: f \mapsto f * W (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. 由 Calderón-Zygmund 定理4.12知 T 是强 $(2,2)$ 型算子, 进而由一般奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.9可知 T 是强 $(p,p)(1<p<\infty)$ 型算子, 且

$$\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n \max(p,(p-1)^{-1})(A_1+A_2+A_3) \tag{4.146}$$

另外 T 也是弱 $(1,1)$ 型算子, 记经过这些延拓后得到的算子依旧为 T.

现取定 $1<p<\infty, f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 具有紧支集, 则

$$\begin{aligned}
T^{(\varepsilon,N)}(f)(x) &= \int_{\varepsilon\le|x-y|<N} K(x-y)f(y)dy = T^{(\varepsilon)}(f)(x) - T^{(N)}(f)(x)\\
&= \int_{|x-y|\ge\varepsilon} K(x-y)f(y)dy - \int_{|x-y|\ge N} K(x-y)f(y)dy\\
&= \int_{|x-y|\ge\varepsilon} (K(x-y)-K(z_1-y))f(y)dy + \int_{|x-y|\ge\varepsilon} K(z_1-y)f(y)dy\\
&\quad - \int_{|x-y|\ge N} (K(x-y)-K(z_2-y))f(y)dy - \int_{|x-y|\ge N} K(z_2-y)f(y)dy\\
&\overset{(A)}{=} \int_{\varepsilon\le|x-y|} (K(x-y)-K(z_1-y))f(y)dy + T(f)(z_1) - T(f\chi_{|x-\circledast|<\varepsilon})(z_1)\\
&\quad - \int_{N\le|x-y|} (K(x-y)-K(z_2-y))f(y)dy - T(f)(z_2) + T(f\chi_{|x-\circledast|<N})(z_2),
\end{aligned} \tag{4.147}$$

其中 (A) 是因为 $\{y: |x-y|\ge\varepsilon\} = \mathbb{R}^n\backslash\{y: |x-y|<\varepsilon\}$, z_1, z_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意选取的点, 且它们满足 $|z_1-x|\le \frac{\varepsilon}{2}, |z_2-x|\le\frac{N}{2}$. 因为 f 具有紧支集, 故对每个给定的 ε, N 而言, $T^{(\varepsilon)}(f)(x)$ 与 $T^{(N)}(f)(x)$ 都是对几乎处处 $x\in\mathbb{R}^n$ 收敛的积分, 因而(4.147)式至少是有意义的.

现在在(4.147)式两端取绝对值, 并在 $|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}, |z_2-x|\le\frac{N}{2}$ 上取球平均可得:

$$\begin{aligned}
|T^{(\varepsilon,N)}(f)(x)| \le& \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}} \int_{|x-y|\ge\varepsilon} |K(x-y)-K(z_1-y)||f(y)|dydz_1\\
&+ \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}} |T(f)(z_1)|dz_1\\
&+ \left(\frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}} |T(f\chi_{|x-\circledast|<\varepsilon})(z_1)|^p dz_1\right)^{\frac{1}{p}}\\
&+ \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \int_{|z_2-x|\le\frac{N}{2}} \int_{|x-y|\ge N} |K(x-y)-K(z_2-y)||f(y)|dydz_2\\
&+ \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \int_{|z_2-x|\le\frac{N}{2}} \int_{|z_2-x|\le\frac{N}{2}} |T(f)(z_2)|dz_2\\
&+ \left(\frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \int_{|z_2-x|\le\frac{N}{2}} |T(f\chi_{|x-\circledast|<N})(z_2)|^p dz_2\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

其中 v_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积. 由 Hörmander 条件(4.131)与估计(4.146)可知对任意具有紧支集的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有:

$$\begin{aligned}
|T^{(\varepsilon,N)}(f)(x)| \le& \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}} \int_{|x-y|\ge\varepsilon} |K(x-y)-K(z_1-y)|dydz_1\\
&+ \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|z_2-x|\le\frac{N}{2}} \int_{|x-y|\ge N} |K(x-y)-K(z_2-y)|dydz_2\\
&+ \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}} |T(f)(z_1)|dz_1 + \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \int_{|z_2-x|\le\frac{N}{2}} |T(f)(z_2)|dz_2\\
&+ C_n\max(p,(p-1)^{-1})(A_1+A_2+A_3)\left(\frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(z_1)\chi_{|x-z_1|<\varepsilon}(z_1)|^p dz_1\right)^{\frac{1}{p}}\\
&+ C_n\max(p,(p-1)^{-1})(A_1+A_2+A_3)\left(\frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(z_2)\chi_{|x-z_2|<N}(z_2)|^p dz_2\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{(B)}}{\leq} \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|z_1-x|\leq\frac{\varepsilon}{2}} A_2 dz_1 + \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|z_2-x|\leq\frac{N}{2}} A_2 dz_2 \\
&\quad + \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|z_1-x|\leq\frac{\varepsilon}{2}} |T(f)(z_1)| dz_1 + \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \int_{|z_2-x|\leq\frac{N}{2}} |T(f)(z_2)| dz_2 \\
&\quad + C_n \max(p,(p-1)^{-1})(A_1+A_2+A_3)\left(\frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|x-z_1|<\varepsilon} |f(z_1)|^p dz_1\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + C_n \max(p,(p-1)^{-1})(A_1+A_2+A_3)\left(\frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \int_{|x-z_2|<N} |f(z_2)|^p dz_2\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|z_1-x|\leq\frac{\varepsilon}{2}} |T(f)(z_1)| dz_1 + \frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \int_{|z_2-x|\leq\frac{N}{2}} |T(f)(z_2)| dz_2 \\
&\quad + C_n \max(p,(p-1)^{-1})(A_1+A_2+A_3)\left(\frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|x-z_1|<\varepsilon} |f(z_1)|^p dz_1\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + C_n \max(p,(p-1)^{-1})(A_1+A_2+A_3)\left(\frac{1}{v_n}\left(\frac{2}{N}\right)^n \int_{|x-z_2|<N} |f(z_2)|^p dz_2\right)^{\frac{1}{p}} + 2A_1.
\end{aligned}
$$

根据紧支函数在 $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性与上述估计在 $L^p\cap L^\infty$ 意义下的封闭性知上述估计对任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 均成立 (此时就没有紧支条件了). 对全体 $0<\varepsilon<N$ 与 $N>0$ 取上确界可知对任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 均有估计

$$
T^{(**)}(f)(x) \leq 2A_2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + S_p(f)(x), \tag{4.148}
$$

其中 S_p 是按下式定义的次线性算子[50]

$$
S_p(f)(x) = 2M(T(f))(x) + 3^{n+1}C_n(A_1+A_2+A_3)\max(p,(p-1)^{-1})(M(|f|^p)(x))^{\frac{1}{p}}
$$

其中 M 是 Hardy-Littlewood 极大算子.

对 Hardy-Littlewood 极大算子 M 而言, 已由极大函数的弱 (1,1) 型不等式与强 (p,p) 型不等式3.8知它是 $L^1(\mathbb{R}^n)\to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 与 $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子, 进而由估计(4.146)知 S_p 可视为 $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的算子, 且

$$
\|S_p\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C}_n(A_1+A_2+A_3)\max(p,(p-1)^{-1}), \tag{4.149}
$$

其中 $\widetilde{C}_n$ 是只关于维数的常数.

现记 $f(x)=f_\alpha(x)+f^\alpha(x)$, 其中

$$
f_\alpha(x) = f(x)\chi_{|f(x)|\leq\frac{\alpha}{16A_2}}(x), \quad f^\alpha(x) = f(x)\chi_{|f(x)|>\frac{\alpha}{16A_2}}.
$$

因为 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 故 $f_\alpha\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$, $f^\alpha\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$. 另外显见

$$
\|f^\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{16A_2}{\alpha}\right)^{p-1}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.150}
$$

对函数 f^α 应用高度为 $\alpha\gamma$ 的 Calderón-Zygmund 分解定理4.8, 记 $f^\alpha(x)=g^\alpha(x)+b^\alpha(x)$, 其中 g^α, b^α 分别对应分解中的好函数与坏函数. 由(4.89)式与 Hölder 不等式知

$$
\|g^\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{\frac{n}{p'}}(\alpha\gamma)^{\frac{1}{p'}}\|f^\alpha\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{\frac{n+4}{p'}}(A_2\gamma)^{\frac{1}{p'}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.151}
$$

现在由(4.148)式, 三角不等式与 S_p 的次线性性可知

$$
|\{x\in\mathbb{R}^n : T^{(**)}(f)(x)>\alpha\}| \leq b_1+b_2+b_3 \tag{4.152}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
b_1 &= |\{x\in\mathbb{R}^n : 2A_2\|f_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + S_p(f_\alpha)(x) > \frac{\alpha}{4}\}| \\
b_2 &= |\{x\in\mathbb{R}^n : 2A_2\|g^\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + S_p(g^\alpha)(x) > \frac{\alpha}{4}\}| \\
b_3 &= |\{x\in\mathbb{R}^n : T^{(**)}(b^\alpha)(x) > \frac{\alpha}{2}\}|.
\end{aligned}
$$

[50]定义中的 3 按照原式放缩的话应该是 2 吧? 不过这里对结论没有什么影响.

根据 f_α 的定义显见 $2A_2\|f_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\alpha}{8}$. 为使 $2A_2\|g^\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, 利用 Calderón-Zygmund 分解定理4.8(ii) 并令 $\gamma = 2^{-n-5}(A_1+A_2)^{-1}$ 可知

$$2A_2\|g^\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le A_2 2^{n+1}\alpha\gamma \le \alpha 2^{-4} < \frac{\alpha}{8}$$

于是

$$\begin{aligned} b_1 &\le |\{x\in\mathbb{R}^n : S_p(f_\alpha)(x) > \frac{\alpha}{8}\}|, \\ b_2 &\le |\{x\in\mathbb{R}^n : S_p(g^\alpha)(x) > \frac{\alpha}{8}\}|. \end{aligned} \tag{4.153}$$

因为 $\gamma = 2^{-n-5}(A_1+A_2)^{-1} \le (2^{n+5}A_1)^{-1}$, 由(4.120)式可知

$$b_3 \le |\bigcup_j Q_j^*| + 2^{n+8}A_2\frac{\|f^\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha} \le \left(\frac{(5\sqrt{n})^n}{\gamma} + 2^{n+8}A_2\right)\frac{\|f^\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\alpha},$$

进而由(4.150)式知

$$b_3 \le C_n(A_1+A_2)^p\alpha^{-p}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.154}$$

对(4.153)式应用 Chebyshev 不等式, 并结合(4.149)式可知

$$\begin{aligned} b_1 &\le \left(\frac{8}{\alpha}\right)^p \|S_p(f_\alpha)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{8}{\alpha}\right)^p \widetilde{C}_n^p(A_1+A_2+A_3)^p \max(p,(p-1)^{-1})^p\|f_\alpha\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ b_2 &\le \left(\frac{8}{\alpha}\right)^p \|S_p(g^\alpha)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \left(\frac{8}{\alpha}\right)^p \widetilde{C}_n^p(A_1+A_2+A_3)^p \max(p,(p-1)^{-1})^p\|g^\alpha\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

另知 $\|f_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, 故

$$b_1+b_2 \le \left(\frac{8}{\alpha}\right)^p \widetilde{C}_n^p(A_1+A_2+A_3)^p\max(p,(p-1)^{-1})^p(\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g^\alpha\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}). \tag{4.155}$$

结合(4.155),(4.154),(4.151)式可得

$$\|T^{(**)}(f)\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le C_n(A_1+A_2+A_3)\max(p,(p-1)^{-1})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.156}$$

最后, 我们还需要把(4.156)左式的 $L^{p,\infty}$ 范数改为 L^p 范数. 为了突破插值理论的限制[51], 不可避免地需要使用双重截断极大奇异积分算子 L^2 有界性延拓定理4.11, 为此首先需要得到 $T^{(**)}$ 的强 (2,2) 型有界性. 当 $p=2$ 时, 由 $L^2(\mathbb{R}^n)\to L^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 知(4.156)式自然蕴含了 $T^{(**)}$ 的强 $(2,2)$ 型有界性, 而这进一步已经得到了欲证, 下面便考虑 $p\ne 2$ 的情况. 在 $p\ne 2$ 时, 总能通过对偶说明 $T^{(**)}$ 也是弱 (p',p') 型有界的, 且 2 必定在 p,p' 之间, 故由 Marcinkiewicz 插值定理3.4可知 $T^{(**)}$ 是强 (2,2) 型有界的, 进而由双重截断极大奇异积分算子 L^2 有界性延拓定理4.11知 $T^{(**)}$ 是弱 (1,1) 型有界的. 于是当 $2<p<\infty$ 时, 为了通过插值获得强 (p,p) 型不等式, 可以尝试获得弱 (Bp,Bp) 型不等式 (其中 $B>1$ 是待定系数), 根据对偶性知只需获得弱 $(\frac{Bp}{Bp-1},\frac{Bp}{Bp-1})$ 型不等式. 为了求解系数 B, 要求 $\frac{Bp}{Bp-1} < p \Rightarrow \frac{1+B}{B} < p$. 特别取 $\frac{1+B}{B} < 2$ 即知 B 有解, 取符合条件的 B 即得 $T^{(**)}$ 的强 (p,p) 型不等式. 而当 $1<p<2$ 时, 根据 Marcinkiewicz 插值定理3.4可得 $T^{(**)}$ 的强 $(\frac{1+p}{2},\frac{1+p}{2})$ 型不等式, 通过对偶性可得强 $(\frac{p+1}{p-1},\frac{p+1}{p-1})$ 型不等式, 又因为容易验证 $1<p<2$ 时 $\frac{1+p}{2}<p<\frac{p+1}{p-1}$, 故由 Riesz-Thorin 插值定理2.24即得 $T^{(**)}$ 的强 (p,p) 型不等式. 至此命题即证. □

4.5 向量值不等式

出现在 Fourier 分析中的很多非线性表达式 (比如极大函数与平方函数) 都可以看成线性量在某个 Banach 空间中的取值, 这一观点成为了 Banach 值算子系统研究的动机. 下面我们通过一个例子来说明这一想法. 设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是测度空间, T 是作用在 $L^p(X,\mu)$ 上的线性算子, 其在 (Y,ν) 上的可测函数空间中取值. 下面这一看上去非线性的不等式

$$\left\|\left(\sum_j |T(f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(Y,\nu)} \le C_p\left\|\left(\sum_j |f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(X,\mu)} \tag{4.157}$$

[51] 如果仅仅考虑插值理论, 我们只能知道从弱 (p,p) 型有界能推出弱 (p',p') 型有界, 而插值只能进一步得到强 (r,r) 型有界, 其中 r 在 p,p' 之间, 这没法得出强 (p,p) 型有界.

通过视角的小小改变即可转换为线性不等式. 记 $L^p(X, l^2)$ 为 X 上所有满足下式的序列 $\{f_j\}_j$ 构成的 Banach 空间:

$$\|\{f_j\}_j\|_{L^p(X,l^2)} = \left(\int_X \left(\sum_j |f_j|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{4.158}$$

定义作用在这些序列上的线性算子为

$$\boldsymbol{T}(\{f_j\}_j) = \{T(f_j)\}_j. \tag{4.159}$$

则(4.157)式等价于不等式

$$\|\boldsymbol{T}(\{f_j\}_j)\|_{L^p(Y,l^2)} \le C_p \|\{f_j\}\|_{L^p(X,l^2)}, \tag{4.160}$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 是作用在 X 上取值在 l^2 空间中的 L^p 函数构成空间的线性算子. 这便是向量值不等式的基本想法: 类似于(4.157)式的非线性不等式可以看成作用在合适的 Banach 空间, 且在合适的 Banach 空间中取值的算子的线性范数估计.

4.5.1 线性算子的 l^2 值延拓

下面的结果在向量值不等式的研究中是经典且基本的.

定理 4.14 (线性算子的 l^2 值延拓)

设 $0 < p, q < \infty, (X, \mu), (Y, \nu)$ 是 σ 有限测度空间, 则有下述命题成立:

(a) 若 $T : L^p(X) \to L^q(Y)$ 是算子范数为 N 的有界线性算子, 则 T 具有 l^2 值延拓, 即对 $L^p(X)$ 中的全体复值函数 f_j 均有:

$$\left\|\left(\sum_j |T(f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^q(Y)} \le C_{p,q} N \left\|\left(\sum_j |f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(X)} \tag{4.161}$$

其中 $C_{p,q}$ 是常数, 在 $p \le q$ 时 $C_{p,q} = 1$. 另外, 若 T 将实 L^p 函数以算子范数 N_{real} 映为实 L^q 函数, 则(4.161)式对实函数 f_j 也成立, 且 N 此时换为 N_{real}.

(b) 若 $T : L^p(X) \to L^{q,\infty}(Y)$ 是算子范数为 M 的有界线性算子, 则 T 具有 l^2 值延拓, 即:

$$\left\|\left(\sum_j |T(f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{q,\infty}(Y)} \le D_{p,q} M \left\|\left(\sum_j |f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(X)} \tag{4.162}$$

其中 $D_{p,q}$ 是仅依赖于 p, q 的常数. 另外, 若 T 将实 L^p 函数以算子范数 M_{real} 映为实 $L^{q,\infty}$ 函数, 则(4.162)式对实函数 f_j 也成立, 且 M 此时换为 M_{real}.

♡

要证明延拓定理4.14, 首先需要作下述准备:

引理 4.4

对任意 $0 < r < \infty$, 记

$$A_r = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{r+1}{2}}}\right)^{\frac{1}{r}}, \quad B_r = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{r}{2}}}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{4.163}$$

则对任意 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n|^r e^{-\pi|x|^2} dx\right)^{\frac{1}{r}} = A_r(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.164}$$

其中 $dx = dx_1 \cdots dx_n$. 另外对任意 $w_1, w_2, \cdots, w_n \in \mathbb{C}$ 有

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} |w_1 z_1 + \cdots + w_n z_n|^r e^{-\pi|z|^2} dz\right)^{\frac{1}{r}} = B_r(|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.165}$$

其中 $dz = dz_1 \cdots dz_n$, 若记 $z_j = x_j + iy_j$, 则 $dz = dx_1 dy_1 \cdots dx_n dy_n$.

♡

证明 在(4.164)式两端同时除以 $(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}$, 可知只需讨论 $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1$ 的情形. 设 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^t$ 是 $\mathbb{R}^n$

中的一个标准列向量, 另设 $n\times n$ 正交阵 $A\in O(n)$ 满足 $A^{-1}e_1=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^t$, 则 Ax 的第一个坐标为:

$$(Ax)_1=Ax\cdot e_1=x\cdot A^te_1=x\cdot A^{-1}e_1=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n.$$

现在在(4.164)式中换元 $y=Ax$ 并注意到 $|Ax|=|x|$, 知

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n|^re^{-\pi|x|^2}dx\right)^{\frac{1}{r}}&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|y_1|^re^{-\pi|y|^2}dy\right)^{\frac{1}{r}}\overset{(A)}{=}\left(2\int_0^\infty t^re^{-\pi t^2}dt\right)^{\frac{1}{r}}\\&=\left(\int_0^\infty s^{\frac{r-1}{2}}e^{-\pi s}ds\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{r+1}{2}}}\right)^{\frac{1}{r}}=A_r,\end{aligned}$$

此即(4.164)式, 其中 (A) 是因为 $\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi|x|^2}dx=1$.

(4.165)式的证明几乎是一样的. 通过相同的操作可设

$$|w_1|^2+\cdots+|w_n|^2=1$$

设 ε_1 是 $\mathbb{C}^n$ 中第一个元素为 1, 其余元素均为 0 的列向量, 并设 $n\times n$ 酉矩阵[52]$\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^{-1}\varepsilon_1=(\overline{w_1},\cdots,\overline{w_n})^t$. 则 $(\mathscr{A}z)_1=w_1z_1+\cdots+w_nz_n$, 且 $|\mathscr{A}z|=|z|$. 因此在(4.165)式中换元 $\zeta=\mathscr{A}z$ 知:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{C}^n}|\zeta_1|^re^{-\pi|\zeta|^2}d\zeta\right)^{\frac{1}{r}}&=\left(\int_{\mathbb{C}}|\zeta_1|^re^{-\pi|\zeta_1|^2}d\zeta_1\right)^{\frac{1}{r}}\overset{(B)}{=}\left(2\pi\int_0^\infty t^re^{-\pi t^2}tdt\right)^{\frac{1}{r}}\\&\overset{(C)}{=}\left(\pi\int_0^\infty s^{\frac{r}{2}}e^{-\pi s}ds\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{r}{2}}}\right)^{\frac{1}{r}}=B_r\end{aligned}$$

其中 (B) 是极坐标换元, (C) 是换元 $s=t^2$. □

下面证明线性算子的 l^2 值延拓定理4.14.

证明 该证明依赖于(4.165)式与引理4.4.

(a): 先设 $q<p$, 依照(4.163)式定义 B_r, 并设序列 $\{f_j\}_j$ 的指标在 $\mathbb{N}$ 中. 知:

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{j=1}^n|T(f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^q(Y)}^q&=\int_Y\left(\sum_{j=1}^n|T(f_j)(y)|^2\right)^{\frac{q}{2}}d\nu\\&\overset{(A)}{=}(B_q)^{-q}\int_Y\int_{\mathbb{C}^n}|z_1T(f_1)(y)+\cdots+z_nT(f_n)(y)|^qe^{-\pi|z|^2}dzd\nu\\&=(B_q)^{-q}\int_{\mathbb{C}^n}\int_Y|T(z_1f_1+\cdots+z_nf_n)(y)|^qd\nu e^{-\pi|z|^2}dz\\&\overset{(B)}{\le}(B_q)^{-q}N^q\int_{\mathbb{C}^n}\left(\int_X|z_1f_1(x)+\cdots+z_nf_n(x)|^pd\mu\right)^{\frac{q}{p}}e^{-\pi|z|^2}dz\\&\overset{(C)}{\le}(B_q)^{-q}N^q\left(\int_{\mathbb{C}^n}\int_X|z_1f_1(x)+\cdots+z_nf_n(x)|^pd\mu e^{-\pi|z|^2}dz\right)^{\frac{q}{p}}\\&\overset{(D)}{=}(B_q)^{-q}N^q\left(B_p^p\int_X(|f_1(x)|^2+\cdots+|f_n(x)|^2)^{\frac{p}{2}}d\mu\right)^{\frac{q}{p}}\\&=(B_pB_q^{-1})^qN^q\left\|\left(\sum_{j=1}^n|f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(X)}^q.\end{aligned}$$

其中 (A) 是在(4.165)式中取 $w_i=T(f_j)(y),r=q$, 再在(4.165)式两端同时取 q 次幂, 将所得等式右端代入 (A) 左端得到的 (A) 右端; (B) 是因为 T 作为 $L^p(X)\to L^q(Y)$ 的算子, 其算子范数为 N; (C) 是在 $\int_{\mathbb{C}^n}$ 这一层积分中用测度为 $e^{-\pi|z|^2}dz$ 的 Hölder 不等式, 且分别为 1 和 $(\int_X|z_1f_1+\cdots+z_nf_n|^pd\mu)^{\frac{q}{p}}$ 分配指标 $\left(\frac{p}{q}\right)',\frac{p}{q}$; (D) 是在(4.165)式中取 $w_i=f_i(x),r=p$, 再在(4.165)式两端同时取 p 次幂, 将所得等式左端代入 (D) 左端得到的 (D) 右端. 现在在上式令 $n\to\infty$ 即得(4.161)式在 $q<p$ 时的情况, 其中 $C_{p,q}=B_pB_q^{-1}$.

下面讨论 $q\ge p$ 的情况, 在同样的记号下知

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^n|T(f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^q(Y)}^q=\int_Y\left(\sum_{j=1}^n|T(f_j)(y)|^2\right)^{\frac{q}{2}}d\nu$$

[52]即 $\mathscr{A}^{-1}=\mathscr{A}^*$, 其中 $\mathscr{A}^*$ 表示 $\mathscr{A}$ 的共轭转置, 亦即其中各元素均为 $\mathscr{A}^t$ 对应元素的共轭, 且 $u\cdot\overline{\mathscr{A}v}=\mathscr{A}^*u\cdot\overline{v}$ 对任意 $u,v\in\mathbb{C}^n$ 均成立.

$$
\begin{aligned}
&\overset{(E)}{=} (B_q)^{-q}\int_Y\int_{\mathbb{C}^n}|z_1T(f_1)(y)+\cdots+z_nT(f_n)(y)|^q e^{-\pi|z|^2}dzd\nu\\
&\overset{(F)}{\le} (NB_q^{-1})^q\int_{\mathbb{C}^n}\left(\int_X|z_1f_1(x)+\cdots+z_nf_n(x)|^p d\mu\right)^{\frac{q}{p}}e^{-\pi|z|^2}dz\\
&= (NB_q^{-1})^q\left\|\int_X|z_1f_1(x)+\cdots+z_nf_n(x)|^p d\mu\right\|_{L^{\frac{q}{p}}(\mathbb{C}^n,e^{-\pi|z|^2}dz)}^{\frac{q}{p}}\\
&\overset{(G)}{\le} (NB_q^{-1})^q\left\{\int_X\||z_1f_1(x)+\cdots+z_nf_n(x)|^p\|_{L^{\frac{q}{p}}(\mathbb{C}^n,e^{-\pi|z|^2}dz)}d\mu\right\}^{\frac{q}{p}}\\
&= (NB_q^{-1})^q\left\{\int_X\left(\int_{\mathbb{C}^n}|z_1f_1(x)+\cdots+z_nf_n(x)|^q e^{-\pi|z|^2}dz\right)^{\frac{p}{q}}d\mu\right\}^{\frac{q}{p}}\\
&\overset{(H)}{=} (NB_q^{-1})^q\left\{\int_X(B_q)^p\left(\sum_{j=1}^n|f_j(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\mu\right\}^{\frac{q}{p}}\\
&= N^q\left\|\left(\sum_{j=1}^n|f_j|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L^p(X)}^q.
\end{aligned}
$$

其中 (E) 与 (A) 所蕴含的过程完全相同; (F) 与 (B) 所蕴含的过程完全相同; (G) 是测度为 $e^{-\pi|z|^2}dz$ 的积分形式 Minkowski 不等式1.8; (H) 是在(4.165)式中取 $w_i=f_i(x), r=q$, 再在(4.165)式两端同时取 q 次幂, 将所得等式左端代入 (H) 左端得到的 (H) 右端. 现在在上式令 $n\to\infty$ 即得(4.161)式在 $q\ge p$ 时的情况, 其中 $C_{p,q}=1$.

如果 T 将实值函数映为实值函数, 则将前述过程中的 f_j 取为实值函数, 将 B_p 换为 A_p, B_q 换为 A_q, N 换为 N_{real}, 采用(4.165)式的过程全部换成采用(4.164)式, 逐字逐句重复证明即得结论.

(b): 不等式(4.162)的证明需要用到(4.161)式与(3.31)式:

$$\|g\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}\le\sup_{0<\nu(E)<\infty}\nu(E)^{\frac1q-\frac1r}\left(\int_E|g(y)|^r d\nu\right)^{\frac1r}\le\left(\frac{q}{q-r}\right)^{\frac1r}\|g\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)},$$

其中 $0<r<q$, 上确界在 Y 的全体有限测度子集 E 中取. 由(3.31)式可知:

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_j|T(f_j)|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}&\le\sup_{0<\nu(E)<\infty}\nu(E)^{\frac1q-\frac1r}\left(\int_E\left(\sum_j|T(f_j)(y)|^2\right)^{\frac r2}d\nu\right)^{\frac1r}\\
&=\sup_{0<\nu(E)<\infty}\nu(E)^{\frac1q-\frac1r}\left(\int_Y\left(\sum_j|\chi_E(y)T(f_j)(y)|^2\right)^{\frac r2}d\nu\right)^{\frac1r}\\
&=\sup_{0<\nu(E)<\infty}\nu(E)^{\frac1q-\frac1r}\left\|\left(\sum_j|\chi_ET(f_j)|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L^r(Y,\nu)}\\
&\overset{(I)}{\le}\sup_{0<\nu(E)<\infty}\nu(E)^{\frac1q-\frac1r}C_{p,r}\|T_E\|_{L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)}\left\|\left(\sum_j|f_j|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L^p(X,\mu)}\\
&=\sup_{0<\nu(E)<\infty}\nu(E)^{\frac1q-\frac1r}C_{p,r}\|T_E\|_{L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)}\left(\int_X\left(\sum_j|f_j(x)|^2\right)^{\frac p2}d\mu\right)^{\frac1p}
\end{aligned}
\tag{4.166}
$$

其中 (I) 是(4.161)式, $T_E(f):=\chi_ET(f)$. 又因为对任意 $f\in L^p(X)$, 由(3.31)式与 $\|T\|_{L^p(X,\mu)\to L^{q,\infty}(Y,\nu)}=M$ 可知:

$$\nu(E)^{\frac1q-\frac1r}\|T_E(f)\|_{L^r(Y,\nu)}\le\nu(E)^{\frac1q-\frac1r}\|T(f)\|_{L^r(Y,\nu)}\le\left(\frac{q}{q-r}\right)^{\frac1r}\|T(f)\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}\le\left(\frac{q}{q-r}\right)^{\frac1r}M\|f\|_{L^p(X,\mu)}$$

于是对任意有限测度集 E 有估计:

$$\nu(E)^{\frac1q-\frac1r}\|T_E\|_{L^p(X,\mu)\to L^r(Y,\nu)}\le\left(\frac{q}{q-r}\right)^{\frac1r}M.\tag{4.167}$$

现将(4.167)式代回(4.166)式可得

$$\left\|\left(\sum_j|T(f_j)|^2\right)^{\frac12}\right\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}\le\sup_{0<\nu(E)<\infty}C_{p,r}\left(\frac{q}{q-r}\right)^{\frac1r}M\left(\int_X\left(\sum_j|f_j(x)|^2\right)^{\frac p2}d\mu\right)^{\frac1p}$$

取 $D_{p,q}=C_{p,r}\left(\frac{q}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}}$(并在取定 $0<r<p$ 后) 即得(4.162)式. 注意 $r\geq p$ 时 $C_{p,r}=1$, $r<p$ 时 $C_{p,r}=B_pB_r^{-1}$.

若 T 将实值函数映为实值函数, 则将前述过程中的 f_j 取为实值函数, 将 M 换为 M_{real}, B_r 换为 A_r, B_q 换为 A_q, 逐字逐句重复证明即得结论. □

4.5.2 线性算子 l^r 值延拓的应用

下面展示线性算子 l^2 值延拓定理4.14的一个应用:

例 4.7 在实轴上记 $I_j=[b_j,\infty)(j\in\mathbb{Z})$, $T_j:\varphi\mapsto(\chi_{I_j}\widehat{\varphi})^\vee$, 则有下述两条不等式成立:

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|T_j(f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq C_p\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})},\tag{4.168}$$

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|T_j(f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\leq C\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1(\mathbb{R})},\tag{4.169}$$

其中 $1<p<\infty$. 要证明这件事, 首先观察到算子 $T=\frac{1}{2}(I+iH)$ 可以记作 $\varphi\mapsto(\chi_{[0,\infty)}\widehat{\varphi})^\vee$, 这是因为由 Hilbert 变换的 Fourier 变换刻画知 $H:\varphi\mapsto((-i\,\mathrm{sgn}\circledast)\widehat{\varphi})^\vee$, 于是 $\frac{1}{2}(I+iH):\varphi\mapsto\frac{1}{2}(\widehat{\varphi}+(\mathrm{sgn}\circledast)\widehat{\varphi})^\vee$, 而 $1+\mathrm{sgn}\,x=\chi_{[0,\infty)}(x)$. 进而对每个 T_j 均有:

$$\begin{aligned}T_j(f)&=(\chi_{I_j}(\xi)\widehat{f}(\xi))^\vee=(\chi_{[0,\infty)}(\xi-b_j)\widehat{f}(\xi))^\vee\\&=e^{i2\pi b_jx}(\chi_{[0,\infty)}(\xi)\widehat{f}(\xi+b_j))^\vee\\&=e^{i2\pi b_jx}(\chi_{[0,\infty)}(\xi)(e^{-i2\pi b_j\circledast}f)^\wedge(\xi))^\vee\\&=e^{i2\pi b_jx}T(e^{-i2\pi b_j\circledast}f)\end{aligned}$$

进一步记 $g_j(x)=e^{-i2\pi b_jx}f(x)$, 则(4.168),(4.169)式可分别写为

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|T(g_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq C_p\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|g_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|T(g_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\leq C\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|g_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

根据 Hilbert 变换的强 (p,p) 型不等式与弱 $(1,1)$ 型不等式4.3知 T 同时是 $L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})$ 与 $L^1(\mathbb{R})\to L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子, 进而在线性算子 l^2 值延拓定理4.14的(4.161)式中代入 $q=p$, 在(4.162)式中代入 $p=q=1$ 即得(4.168),(4.169)式. □

根据线性算子 l^2 值延拓定理4.14已经知道 $L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)$(或 $L^p(X,\mu)\to L^{q,\infty}(Y,\nu)$) 的任意有界线性算子都有 l^2 值延拓, 我们自然会问: 那它们是否也会有 $l^r(r\neq 2)$ 延拓? 在 r 满足某种特定条件时答案是肯定的, 此即下述推论:

推论 4.6 (线性算子的 l^r 值延拓)

设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是 σ 有限测度空间, $T:L^p(X)\to L^p(Y)(1<p<\infty)$ 是有界线性算子, 且 $\|T\|_{L^p(X)\to L^p(Y)}=A$, 另设 r 位于 p 和 2 之间, 则

$$\left\|\left(\sum_j|T(f_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(Y)}\leq A\left\|\left(\sum_j|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(X)}.\tag{4.170}$$

证明 首先说明对 $L^p(X)$ 中的全体复值函数 f_j 均有

$$\left\|\left(\sum_j|T(f_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L^p(Y)}\leq A\left\|\left(\sum_j|f_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L^p(X)}\tag{4.171}$$

这是因为对任意 $n\in\mathbb{N}$ 均有

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_j|T(f_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L^p(Y)}^p&=\int_Y\left(\sum_{j=1}^n|T(f_j)(y)|^p\right)dv=\sum_{j=1}^n\int_Y|T(f_j)(y)|^p\,dv\\&\le\sum_{j=1}^n A^p\int_X|f_j(x)|^p\,d\mu=A^p\int_X\left(\sum_{j=1}^n|f_j(x)|^p\right)d\mu\end{aligned}$$

在式子两端令 $n\to\infty$ 并同取 $\frac{1}{p}$ 次幂即得(4.171)式.

现已知延拓算子 $\boldsymbol{T}(\{f_j\}_j)=\{T(f_j)\}_j$ 同时在 $L^p(X,l^p)\to L^p(Y,l^p)$ 和 $L^p(X,l^2)\to L^p(Y,l^2)$ 上具有算子范数 A, 进而根据 l^r 值 Lebesgue 空间的 Riesz-Thorin 插值定理4.18可知 $\boldsymbol{T}$ 在 $L^p(X,l^r)\to L^p(Y,l^r)$ 上算子范数的一个上界为 A, 其中 r 在 p 和 2 之间. □

注 线性算子 l^r 值延拓定理4.6中 r 在 p 和 2 之间这一条件是必要的. 例如若取 $1<p<2, r<p, X=Y=\mathbb{R}$, 设线性算子 T 为

$$T(f)(x)=\widehat{f}(x)\chi_{[0,1]}(x)$$

则显见 T 是 L^p 有界的, 且 $\|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\|T(f)\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$. 现取 $f_j(x)=\chi_{[j-1,j]}(x)(j=1,\cdots,N)$, 则计算可得

$$\left(\sum_{j=1}^N|T(f_j)(x)|^r\right)^{\frac{1}{r}}=N^{\frac{1}{r}}\left|\frac{e^{-i2\pi x}-1}{-i2\pi x}\chi_{[0,1]}(x)\right|,$$

且

$$\left(\sum_{j=1}^N|f_j(x)|^r\right)^{\frac{1}{r}}=\chi_{[0,N]}(x)$$

于是如果(4.170)式成立, 对任意 $N>1$ 就应有 $N^{\frac{1}{r}}\le CN^{\frac{1}{p}}$(其中 C 是常数), 但在 $p>r$ 时总能找到足够大的 N 不满足该式, 矛盾!

前面已经说明了 $r\neq 2$ 时一般的线性算子 l^r 值延拓未必成立, 但会不会对 Fourier 分析中的算子而言, 确有它们的一般 l^r 值延拓呢? 例如在 $1<p,r<\infty$ 时对 Hilbert 变换 H 而言, 不等式

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|H(f_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\le C_{p,r}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\tag{4.172}$$

是否成立? 答案是肯定的, 不等式(4.172)确实成立, 且它的首次证明运用的是复分析技巧. 下一节我们将把前面提到的 Calderón-Zygmund 分解定理应用到 Banach 值函数上, 进一步研究一般奇异积分类似于(4.172)式的不等式.

4.5.3 一般 Banach 值延拓

4.5.3.1 补充: Banach 值函数的测度与积分

[53]设 B 是复数域上的 Banach 空间, 其范数为 $\|\circledast\|_B$, 记其共轭空间为 B^*(其范数为 $\|\circledast\|_{B^*}$), 另设 (X,μ) 是测度空间. 为讨论 Banach 值延拓算子的各种性质, 首先需要作下述理论准备:

定义 4.8 (Banach 值函数的弱可测, 有限取值与强可测)

称 Banach 值函数 $F:(X,\mu)\to B$ 是弱 μ 可测的, 如果对任意 $u\in B^*$, 数值函数

$$u(F(\circledast)):X\to\mathbb{C},x\mapsto\langle u,F(x)\rangle$$

都是 μ 可测的; 称其为有限取值函数, 如果存在 X 中有限个不交 μ 可测子集构成的集列 $\{X_j\}_{j=1}^n$ 满足 $\mu(X_j)<\infty(j=1,\cdots,n)$, F 在每个 X_j 上均为 B 中的非零常值, 且在 $X\backslash\bigcup_{j=1}^n X_j$ 上有 $F(s)=\theta$(θ 为 B 中的零元); 称其为强 μ 可测的, 如果存在 X 上的有限取值函数列 μ a.e. 强收敛到 F. ♣

[53]本小节选自 **[KY]**.

注 Banach 值函数的有限取值性对应的是实分析中的简单函数, 亦即有限个示性函数的线性组合. 另外, 从强 μ 可测性出发可推知弱 μ 可测性, 这是因为若 F 是强 μ 可测函数, 则可设有限取值函数列 $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 在 X 中 μ a.e. 强收敛到 F. 因为每个有限取值函数 F_j 都是弱 μ 可测的, 故根据 μ 可测函数空间对极限的封闭性知对任意 $u\in B^*$ 而言, 数值函数 $x\mapsto \lim\limits_{j\to\infty}\langle u,F_j(x)\rangle$ 也是可测函数. 再由 μ a.e. 强收敛性知

$$\lim_{j\to\infty}\langle u,F_j(x)\rangle=\langle u,\lim_{j\to\infty}F_j(x)\rangle=\langle u,F(x)\rangle$$

故 F 是弱 μ 可测的.

定义 4.9 (可分取值, μ 几乎处处可分取值)

称 Banach 值函数 $F:(X,\mathscr{B},\mu)\to B$ 是可分取值函数, 如果其值域 $\{F(x):x\in X\}$ 是 B 的可分子空间; 称其为 μ a.e. 可分取值函数, 如果存在 X 的 μ 零测子集 X_0 使得 $\{F(x):x\in X\backslash X_0\}$ 是 B 的可分子空间.

定理 4.15 (Pettis)

$F:(X,\mu)\to B$ 是强 μ 可测函数当且仅当其为弱 μ 可测的 μ a.e. 可分取值函数.

证明 若 F 是强 μ 可测函数, 则其必为弱 μ 可测函数. 另外, 根据强 μ 可测的定义知存在 X 上的有限取值函数列 $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ μ a.e. 收敛到 F, 由有限取值性可知全体 F_j 值域之并 $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{F_j(x):x\in X\}$ 是可列集, 而 F 在忽略零测集 X_0 下的值域 $\{F(x):x\in X\backslash X_0\}\subset\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{F_j(x):x\in X\}}$, 后者显然可分, 因此 F 也是 μ a.e. 可分取值函数.

若 F 是弱 μ 可测的 μ a.e. 可分取值函数, 不失一般性, 可设 F 本身就是可分取值函数, 进而可设 B 本身是可分空间 (否则可将 B 替换为包含值域 $\{F(x):x\in X\}$ 的最小闭子空间). 下面首先证明数值函数 $x\mapsto\|F(x)\|_B$ 是 μ 可测函数, 为此需要下述 (在末尾会补充证明的) 引理:

引理 4.5

若 B 是可分 Banach 空间 (其上范数为 $\|\circledast\|_B$), B^* 为其共轭空间 (其上范数为 $\|\circledast\|_{B^*}$), 则存在序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B^*$ 使得 $\|u_n\|_{B^*}\le 1$, 且对任意 $u_0\in B^*$, 只要 $\|u_0\|_{B^*}\le 1$, 就存在 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{u_{n'}\}$ 使得 $\lim\limits_{n'\to\infty}\langle u_{n'},x\rangle=\langle u_0,x\rangle$ 对任意 $x\in B$ 均成立.

现对任意 $a\in\mathbb{R}$, 记

$$A=\{x\in X:\|F(x)\|_B\le a\},\quad A_u=\{x\in X:|\langle u,F(x)\rangle|\le a,u\in B^*\}.$$

若能说明 $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{u_j}$, 则根据 F 的弱 μ 可测性知每个 A_{u_j} 都是 μ 可测集, 再由可测集族关于任意交的封闭性知 A 是 μ 可测集, 因而 $\|F(x)\|_B$ 是 X 上的 μ 可测函数. 现任取 $x\in A$, 根据 A 的构造知 $\|F(x)\|_B\le a$, 于是只要 $\|u\|_{B^*}\le 1$, 就有 $|\langle u,F(x)\rangle|\le\|u\|_{B^*}\|F(x)\|_B\le a$, 亦即 $x\in A_u$, 这说明 $A\subset\bigcap_{\|u\|_{B^*}\le 1}A_u$. 又根据 Hahn-Banach 定理的推论, 对每个取定的 x, 总存在 $u_x\in B^*$ 使得 $\|u_x\|_{B^*}=1$ 且 $\langle u_x,F(x)\rangle=\|F(x)\|_B$, 于是

$$\bigcap_{\|u\|_{B^*}\le 1}A_u\subset\bigcap_{\|u\|_{B^*}=1}A_u\subset\bigcap_{x\in X}A_{u_x}\subset A$$

另外根据引理4.5知存在序列 $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 使得只要 $\|u\|_{B^*}\le 1$, u 就可以表为该序列某子列的点态极限, 因而 $\|u\|_{B^*}\le 1$ 时 A_u 总能表为集列 $\{A_{u_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的某子列的极限 $\bigcap_{j'}A_{u_{j'}}$, 这说明

$$\bigcap_{\|u\|_{B^*}\le 1}A_u=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{u_j}$$

因此 $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{u_j}$.

现因 F 是可分取值函数, 根据定义知其值域 $\{F(x):x\in X\}\subset B$ 可分, 进而可设它被可列个半径不大于 $\frac{1}{n}$ 的开球 $S_{j,n}(j=1,2,\cdots)$ 覆盖. 设 $S_{j,n}$ 对应的球心为 $f_{j,n}$, 容易证明函数 $F(\circledast)-f_{j,n}:x\mapsto F(x)-f_{j,n}$ 同样是弱 μ 可测函数, 进而重复上述证明可知 $\|F(x)-f_{j,n}\|_B$ 是 μ 可测函数, 于是 $\{x\in X:\|F(x)-f_{j,n}\|_B\le\frac{1}{n}\}$ 是 μ 可测集, 亦

即 $B_{j,n}=\{x\in X: F(x)\in S_{j,n}\}$ 是 μ 可测集, 记 $S=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{j,n}$. 现取

$$F_n(x)=f_{i,n},\quad x\in B'_{i,n}=B_{i,n}\backslash\bigcup_{j=1}^{i-1}B_{j,n}$$

则因为 $S=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{j,n}=\bigcup_{j=1}^{\infty}B'_{j,n}$, 知对任意 $x\in S$ 均有 $\|F(x)-F_n(x)\|_B<\frac{1}{n}$, 又因为 $B'_{i,n}$ 是 μ 可测集, 故每个 $F_n(x)$ 都是强 μ 可测函数, 进而 $F(x)$ 作为强 μ 可测函数的依范数极限也应是强 μ 可测的, 定理证毕. □

下面证明引理4.5.

证明 因为 B 是可分空间, 故可设序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 B 中强稠密[54], 考虑映射

$$\varphi_n:\begin{cases}S'=\{u\in B^*:\|u\|_{B^*}\le 1\}\to l^2(n)=\left\{(\xi_1,\cdots,\xi_n):\|(\xi_1,\cdots,\xi_n)\|_{l^2(n)}:=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\right\},\\ u\mapsto\varphi_n(u)=(\langle u,x_1\rangle,\cdots,\langle u,x_n\rangle)\end{cases}$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$ 而言, 空间 $l^2(n)$ 显然是可分的, 因此 φ_n 的值域也是可分的, 故在 n 取定时存在 S' 中的序列 $\{u_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{\varphi_n(u_{n,k}):k\in\mathbb{N}\}$ 在 φ_n 的值域 $\varphi_n(S')$ 中稠密. 因此对每个取定的 n, 任意 $\varepsilon>0$ 与任意 $u\in S'$, 总存在足够大的 k_n 使得

$$\max_{1\le j\le n}|\langle u,x_j\rangle-\langle u_{n,k_n},x_j\rangle|\le\|\varphi_n(u-u_{n,k_n})\|_{l^2(n)}<\varepsilon$$

现通过对角线论证可说明对任意 $u_0\in S'$, 总存在序列 $\{u_{n,k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $|\langle u_0,x_i\rangle-\langle u_{n,k_n},x_i\rangle|<\frac{1}{n}(i=1,\cdots,n)$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle u_{n,k_n},x_i\rangle=\langle u_0,x_i\rangle(i=1,2,\cdots)$. 现在回忆 Banach-Steinhaus 定理的推论:

推论 4.7

若 B 是 Banach 空间, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B^*, u_0\in B^*$, 则 $w^*-\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$ 当且仅当

(i) $\|u_n\|_{B^*}$ 关于 n 一致有界;

(ii) 对 B 的一个稠密子集上的全体 x 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle u_n,x\rangle=\langle u,x\rangle$.

其中

$$w^*-\lim_{n\to\infty}u_n=u\Leftrightarrow\forall x\in B(\lim_{n\to\infty}\langle u_n,x\rangle=\langle u,x\rangle).$$

♡

利用推论4.7即知对任意 $x\in B$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle u_{n,k_n},x\rangle=\langle u_0,x\rangle$. □

在给出 Banach 值函数的测度后, 就可以仿照实值函数的 Lebesgue 积分去定义 Banach 值函数的积分了. 设 (X,μ) 是测度空间, B 是 Banach 空间, $u:(X,\mu)\to B$ 是简单取值函数. 根据简单取值函数的定义, 设 u 在 X_i 上取值为 $u_i\ne\theta(i=1,\cdots,n)$, 其中 θ 是 B 中的零元, X_i 两两不交, $\mu(X_i)<\infty$, 且在 $X\backslash\bigcup_{i=1}^{n}X_i$ 上 $u=\theta$. 因为现在所谈论的是有限和, 故和式 $\sum_{i=1}^{n}u_i\mu(X_i)\in B$ 自然有意义, 称该和式为 u 在 X 上的 μ 积分, 记作 $\int_S u(x)d\mu$. 通过对和式取极限, 就可以定义一般函数的 μ 积分, 此即下述定义:

定义 4.10 (Bochner μ 可积, Bochner μ 积分)

设 (X,μ) 是测度空间, B 是 Banach 空间, 称函数 $u:(X,\mu)\to B$ 是 Bochner μ 可积[a]的, 如果存在有限取值函数列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μ a.e. 强收敛到 u, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X\|u(x)-u_n(x)\|_B d\mu=0.\tag{4.173}$$

对任意 $E\subset X$, Banach 值函数 u 在 E 上的 Bochner μ 积分[b]定义为

$$\int_E u(x)d\mu:=\lim_{n\to\infty}\int_X\chi_E(x)u_n(x)d\mu,\tag{4.174}$$

其中极限是依范数意义下的.

[a]在不会混淆的情况下简称为 Bochner 可积.

[b]在不会混淆的情况下简称为 Bochner 积分.

♣

[54]即 B 中的每个元素都是该序列某子列的依范数极限.

下面说明上述定义是合理的, 亦即说明极限(4.173)的成立不会导出矛盾, 且在 u 是 Bochner μ 可积函数时强极限(4.174)确实存在, 另外极限值不依赖于逼近序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的选取. 当 u 能被有限取值函数列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 μ a.e. 依范数意义下逼近, 根据强 μ 可测的定义知 u 是强 μ 可测函数, 故由 Pettis 定理4.15的证明可知 $\|u(\circledast)-u_n(\circledast)\|_B$ 是 X 上的 μ 可测函数, 因而极限(4.173)作为 X 上 μ 可测函数的积分, 它的成立自然不会导出矛盾. 若现已知 u 是 Bochner μ 可积函数, 则有:

$$\begin{aligned}\left\|\int_E u_n(x)d\mu-\int_E u_k(x)d\mu\right\|_B &= \left\|\int_E (u_n(x)-u_k(x))d\mu\right\|_B \overset{(A)}{\le} \int_E \|u_n(x)-u_k(x)\|_B d\mu\\ &\overset{(B)}{\le} \int_X \|u_n(x)-u(x)\|_B d\mu+\int_X \|u(x)-u_k(x)\|_B d\mu\end{aligned}$$

其中 (A),(B) 均为范数 $\|\circledast\|_B$ 的三角不等式. 因为序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μ a.e. 强收敛到 u, 故上右式在 $n,k\to\infty$ 时趋零, 因而序列 $\left\{\int_E u_n(x)d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 B 中的基本列, 根据 B 的完备性知该序列存在强极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E u_n(x)d\mu$, 且该极限值不依赖于序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的选取. 至此即知 Bochner μ 可积与 Bochner μ 积分均是良定义的.

定理 4.16 (Bochner)

强 μ 可测函数 u 是 Bochner μ 可积的, 当且仅当 $\|u(\circledast)\|_B$ 是 μ 可积函数.

证明 若 u 是 Bochner μ 可积函数, 知对任意 $x\in X$ 均有 $\|u(x)\|_B\le\|u_n(x)\|_B+\|u(x)-u_n(x)\|_B$, 进而由 $\|u_n\|_B$ 的 μ 可积性与 Bochner μ 可积的定义(4.173)知

$$\int_E \|u(x)\|_B d\mu\le\int_E \|u_n(x)\|_B d\mu+\int_E \|u(x)-u_n(x)\|_B d\mu,\quad \forall E\subset X.$$

又因为

$$\int_E \big|\|u_n(x)\|_B-\|u_k(x)\|_B\big| d\mu\le\int_E \|u_n(x)-u_k(x)\|_B d\mu$$

故 $\left\{\int_E \|u_n(x)\|_B d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 B 中的基本列, 从而根据 B 的完备性知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E \|u_n(x)\|_B d\mu$ 存在, 进而结合(4.173)式知

$$\int_E \|u(x)\|_B d\mu\le\lim_{n\to\infty}\int_E \|u_n(x)\|_B d\mu,\quad \forall E\subset X$$

特别取 $E=X$ 即得 $\|u\|_B$ 的 μ 可积性.

若 $\|u(\circledast)\|_B$ 是 μ 可积函数, 因为 u 本身是强 μ 可测函数, 故可设有限取值函数列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μ a.e. 强收敛到 u. 记

$$v_n(x)=\begin{cases}u_n(x), & \|u_n(x)\|_B\le\frac{3}{2}\|u(x)\|_B,\\ 0, & \|u_n(x)\|_B>\frac{3}{2}\|u(x)\|_B\end{cases}$$

于是根据构造可知有限取值函数列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\|v_n(x)\|_B\le\frac{3}{2}\|u(x)\|_B(\forall x\in X)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u(x)-v_n(x)\|_B=0$ μ a.e. 成立, 故由 $\|u\|_B$ 的 μ 可积性, 估计 $\|u(x)-v_n(x)\|_B\le\frac{5}{2}\|u(x)\|_B$ 与 Lebesgue 控制收敛定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \|u(x)-v_n(x)\|_B d\mu=\int_X \lim_{n\to\infty}\|u(x)-v_n(x)\|_B d\mu=0$$

这正是 u 的 Bochner μ 可积性的定义. □

根据定义与上述证明立得下述推论:

推论 4.8 (Bochner 积分的放大不等式, μ 绝对连续性与 σ 可加性)

对 Bochner μ 可积函数 u 有

$$\int_E \|u(x)\|_B d\mu\ge\left\|\int_E u(x)d\mu\right\|_B,\quad \forall E\subset X \tag{4.175}$$

另外 u 的 Bochner μ 积分是 μ 绝对连续的, 即下述强极限成立:

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E u(x)d\mu=0. \tag{4.176}$$

同时若 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_j$, 其中 E_j 两两不交, 则下述强极限成立:

$$\int_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j}u(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{E_j}u(x)d\mu. \tag{4.177}$$

推论 4.9 (有界线性算子在 Bochner 积分上的作用)

设 B,Y 是 Banach 空间, $T:B\to Y$ 是有界线性算子. 若 u 是在 B 中取值的 Bochner μ 可积函数, 则 Tu 是在 Y 中取值的 Bochner μ 可积函数, 且对任意 $E\subset X$ 有

$$\int_E Tu(x)d\mu=T\left(\int_E u(x)d\mu\right).$$

证明 设有限取值函数列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\|v_n(x)\|_B\le(1+\frac{1}{n})\|u(x)\|_B \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}v_n(x)=u(x),\ \mu \text{ a.e.}$$

则根据 T 的线性性与连续性知

$$\int_E Tv_n(x)d\mu=T\left(\int_E v_n(x)d\mu\right).$$

由 T 的有界性知

$$\|Tv_n(x)\|_Y\le\|T\|_{B\to Y}\|v_n(x)\|_B\le\|T\|_{B\to Y}(1+\frac{1}{n})\|u(x)\|_B,\quad \mu \text{ a.e.}$$

最后由 T 的连续性知

$$\lim_{n\to\infty}Tv_n(x)=Tu(x),\quad \mu \text{ a.e.}$$

故 Tu 是 Bochner μ 可积函数, 且

$$\int_E Tu(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E Tv_n(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}T\left(\int_E v_n(x)d\mu\right)=T\left(\int_E u(x)d\mu\right).$$

□

4.5.3.2 Banach 值函数的 Lebesgue 空间

设 (X,μ) 是测度空间, B 是 Banach 空间 (其上范数为 $\|\circledast\|_B$). 记 $L^p(X)$ 是经典的 Lebesgue 空间 $L^p(X,\mu)$, 其中的元素是 $X\to\mathbb{C}$ 的函数. 记 $L^p(X)\otimes B$ 为 B 中的系数在 $L^p(X)$ 中的有限线性组合的全体, 亦即

$$L^p(X)\otimes B:=\{\sum_{j=1}^{n}f_ju_n:f_j\in L^p(X),u_j\in B(j=1,\cdots,n),n\in\mathbb{N}\}. \tag{4.178}$$

依下式定义 $L^p(X,B)(0<p<\infty)$:

$$L^p(X,B):=\left\{F:F\text{是 } X \text{ 到 } B \text{ 的强可测函数}, \|\|F(\circledast)\|_B\|_{L^p(X)}:=\left(\int_X\|F(x)\|_B^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\} \tag{4.179}$$

在 $p=\infty$ 时(4.179)式中的范数修改为

$$\|\|F\|_B\|_{L^\infty(X)}:=\inf_{\substack{E\subset X\\ \mu(E)=0}}\sup_{x\in X\setminus E}\|F(x)\|_B.$$

类似地定义 $L^{p,\infty}(X,B)(0<p\le\infty)$:

$$L^{p,\infty}(X,B):=\left\{F:F\text{是 } X \text{ 到 } B \text{ 的强可测函数}, \|\|F(\circledast)\|_B\|_{L^{p,\infty}(X)}<\infty\right\} \tag{4.180}$$

称 $L^p(X,B)$(或 $L^{p,\infty}(X,B)$) 为 X 上在 B 中取值函数的 L^p(或 $L^{p,\infty}$) 空间, 其范数为 $\|\|\circledast\|_B\|_{L^p(X)}$(或 $\|\|\circledast\|_B\|_{L^{p,\infty}(X)}$).

Banach 值函数的 Lebesgue 空间理论中有类似于实值函数 Lebesgue 空间中简单函数逼近定理与光滑函数逼近定理的结论:

命题 4.10 ($L^p(X,B)$ 的简单函数逼近与光滑函数逼近)

设 B 是 Banach 空间, (X,μ) 是 σ 有限测度空间.

(a) 集合 $\left\{\sum_{j=1}^m \chi_{E_j}u_j : m\in\mathbb{N}, u_j\in B, E_j\subset X \text{两两不交}, \mu(E_j)<\infty(j=1,\cdots,m)\right\}$ 在 $L^p(X,B)(0<p<\infty)$ 中稠密;

(b) 集合 $\left\{\sum_{j=1}^m \chi_{E_j}u_j : m\in\mathbb{N}, u_j\in B, E_j\subset X \text{两两不交} (j=1,\cdots,m), X=\bigcup_{j=0}^\infty E_j\right\}$ 在 $L^\infty(X,B)$ 中稠密;

(c) 全体形如 $\sum_{j=1}^m \varphi_j u_j$(其中 $m\in\mathbb{N}, u_j\in B, \varphi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)(j=1,\cdots,m)$) 构成的空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes B$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n,B)(1\le p<\infty)$ 中稠密.

证明 若对取定的 $0<p\le\infty$ 有 $F\in L^p(X,B)$, 则根据 Bochner 定理4.16知 $\|F(\circledast)\|_B$ 是 μ 可积函数, 因而 F 是 Bochner μ 可积函数, 自然 F 也应是强 μ 可测函数, 于是由 Pettis 定理4.15知 F 是 μ a.e. 可分取值函数, 根据定义知存在 $X_0\subset X$ 使得 $\mu(X\backslash X_0)=0$, 且 $\{F(x):x\in X_0\}=:B_0$ 是 B 的可分子空间. 设序列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 是 B_0 的稠密子集.

(a) 对 $p<\infty$ 的情况, 因为 X 是 σ 有限的, 且 $\mu(X\backslash X_0)=0$, 故根据 Lebesgue 积分的绝对连续性知对任意 $\varepsilon>0$ 总存在 $X_1\subset X_0$ 使得 $\mu(X_1)<\infty$, 且

$$\int_{X\backslash X_1}\|F(x)\|_B^p d\mu<\frac{\varepsilon^p}{3}.$$

取

$$\widetilde{B}(u_j,\varepsilon)=\{u\in B_0:\|u-u_j\|_B<\varepsilon(3\mu(X_1))^{-\frac{1}{p}}\},$$

既然 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 在 B_0 中稠密, 自然有 $B_0\subset\bigcup_{j=1}^\infty\widetilde{B}(u_j,\varepsilon)$. 现设 $A_1=\widetilde{B}(u_1,\varepsilon), A_j=\widetilde{B}(u_j,\varepsilon)\backslash(\bigcup_{i=1}^{j-1}\widetilde{B}(u_i,\varepsilon))(j\ge 2)$. 显见 $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ 两两不交, 且 $\bigcup_{j=1}^\infty A_j=\bigcup_{j=1}^\infty\widetilde{B}(u_j,\varepsilon)$. 令 $E_j=\{x\in X:F(x)\in A_j\}\cap X_1$, 则 $X_1=\bigcup_{j=1}^\infty E_j$, 且 $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ 两两不交[55]. 因为 $\mu(X)_1=\sum_{j=1}^\infty\mu(E_j)<\infty$, 故对每个 $j\in\mathbb{N}$ 均有 $\mu(E_j)<\infty$, 且由 Lebesgue 积分的绝对连续性知存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\int_{\bigcup\limits_{j=m+1}^\infty E_j}\|F(x)\|_B^p d\mu<\frac{\varepsilon^p}{3}. \tag{4.181}$$

另一方面, 显见 $\sum_{j=1}^m\chi_{E_j}u_j$ 是强 μ 可测的. 根据 E_j 的构造可知任取 $x\in E_j$ 均有 $\|F(x)-u_j\|_B<\varepsilon(\mu(X_1))^{-\frac{1}{p}}(j=1,\cdots,m)$, 结合(4.181)式即知

$$\begin{aligned}\int_X\left\|F(x)-\sum_{j=1}^m\chi_{E_j}(x)u_j\right\|_B^p d\mu&=\int_{X\backslash X_1}\|F(x)\|_B^p d\mu+\int_{\bigcup\limits_{j=m+1}^\infty E_j}\|F(x)\|_B^p d\mu+\int_{\bigcup\limits_{j=1}^m E_j}\left\|\sum_{j=1}^m\chi_{E_j}(x)[F(x)-u_j]\right\|_B^p d\mu\\&<\frac{\varepsilon^p}{3}+\frac{\varepsilon^p}{3}+\frac{\varepsilon^p}{3}=\varepsilon^p\end{aligned}$$

(a) 至此得证.

(b) 对 $p=\infty$ 的情况, 记 $B(u_j,\varepsilon)=\{u\in B_0:\|u-u_j\|_B<\varepsilon\}$, 根据 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 在 B_0 中的稠密性立得 $B_0\subset\bigcup_{j=1}^\infty B(u_j,\varepsilon)$. 取 $A_1=B(u_1,\varepsilon)$, 并在 $kj\ge 2$ 时定义 $A_j=B(u_j,\varepsilon)\backslash(\bigcup_{i=1}^{j-1}B(u_i,\varepsilon))$. 令 $E_j=\{x\in X:F(x)\in A_j\}(j\ge 1), E_0=X\backslash(\bigcup_{j=1}^\infty E_j)$. 易知 $\mu(E_0)=0$. 类似于 $p<\infty$ 的情况, 可见 $\{E_j\}_{j=0}^\infty$ 两两不交, 且 $X_0\subset\bigcup_{j=0}^\infty E_j$. 现取 $u_0=0$, 知 $\sum_{j=0}^\infty\chi_{E_j}u_j$ 是强 μ 可测的. 因为对任意 $x\in E_j$ 与 $j\ge 0$ 均有 $\|F(x)-u_j\|_B<\varepsilon$, 故

$$\left\|F(\circledast)-\sum_{j=0}^\infty\chi_{E_j}(\circledast)u_j\right\|_{L^\infty(X,B)}=\left\|\sum_{j=0}^\infty\chi_{E_j}(\circledast)(F(\circledast)-u_j)\right\|_{L^\infty(X,B)}<\varepsilon$$

这便完成了 $p=\infty$ 时的证明.

(c) 取定光滑函数 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足 $\operatorname{supp}\varphi\subset\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le 1\}, \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=1$. 对全体 $x\in\mathbb{R}^n$ 与 $\delta>0$, 记 $\varphi_\delta(x)=\delta^{-n}\varphi(\frac{x}{\delta})$. 现在对每个在 (a) 中逼近 f 的函数 $\sum_{j=1}^m\chi_{E_j}(x)u_j\in L^p(\mathbb{R}^n)\otimes B$, 取函数 $\sum_{j=1}^m(\chi_{E_j}*\varphi_\delta)(x)u_j\in$

[55] 因为 F 只能把一个值输出为一个值, 故不存在两不同元映回同一元素的情况.

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes B$. 根据恒等逼近定理3.1可知 $\|\chi_{E_j}*\varphi_\delta-\chi_{E_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\to 0(\delta\to 0)(1\le p<\infty)$, 因此

$$\left\|\sum_{j=1}^m(\chi_{E_j}*\varphi_\delta)(\circledast)u_j-\sum_{j=1}^m\chi_{E_j}(\circledast)u_j\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}\le\sum_{j=1}^m\|\chi_{E_j}*\varphi_\delta-\chi_{E_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|u_j\|_B\to 0,\quad \delta\to 0$$

(c) 至此即证. □

注意到谈论 Banach 值函数的 Lebesgue 空间时, 我们是对 $\|F(x)\|_B$ 这一实值函数进行讨论, 而并没有讨论 Bochner 积分在其中的作用. 通过对比 $L^1(X)\otimes B$ 与 Bochner 积分的定义可知, 对任意 $F\in L^1(X)\otimes B$, 记 $F=\sum_{j=1}^m f_ju_j$, 则:

$$\begin{aligned}\left\|\int_X F(x)d\mu\right\|_B&=\sup_{\|u^*\|_{B^*}\le 1}\left|\left\langle u^*,\sum_{j=1}^m\left(\int_X f_j(x)d\mu\right)u_j\right\rangle\right|=\sup_{\|u^*\|_{B^*}\le 1}\left|\int_X\left\langle u^*,\sum_{j=1}^m f_j(x)u_j\right\rangle d\mu\right|\\&\le\int_X\sup_{\|u^*\|_{B^*}\le 1}\left|\left\langle u^*,\sum_{j=1}^m f_j(x)u_j\right\rangle\right|d\mu=\int_X\|F(x)\|_B d\mu=\|F\|_{L^1(X,B)}\end{aligned}$$

因此线性算子

$$F\mapsto I_F=\int_X F(x)d\mu$$

是 $L^1(X)\otimes B\to B$ 的有界算子. 根据 $L^1(X,B)$ 的简单函数逼近定理4.10可知 $L^1(X,B)$ 中的每个元素都是 $L^1(x)\otimes B$ 中某序列的依范数极限, 因此由上述线性算子的连续性知其在 $L^1(X,B)$ 上有唯一有界延拓, 这一有界延拓正是前面提到的 Bochner 积分. 因此, $L^1(X,B)$ 实际上是 X 到 B 的全体 Bochner 可积函数构成的空间. 另外, 容易说明 $F:X\to B$ 的 Bochner 积分是 B 中唯一一个满足

$$\left\langle u^*,\int_X F(x)d\mu\right\rangle=\int_X\langle u^*,F(x)\rangle d\mu \tag{4.182}$$

的元素, 这说明 B^* 中的元素在 Bochner 积分上的作用等价于该元素与被积函数上作用的 Lebesgue 积分. 因此, 类似于 Lebesgue 空间的共轭空间诸性质, 在 $X=\mathbb{R}^n$ 时有下述命题成立:

命题 4.11 ($L^p(X,B)$ 的共轭空间性质)

设 B 是 Banach 空间, $1\le p\le\infty$.

(a) 对任意 $F\in L^p(\mathbb{R}^n,B)$ 有

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}=\sup_{\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F(x)\rangle dx\right|.$$

因此 $L^p(\mathbb{R}^n,B)$ 可等距嵌入 $(L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*))^*$.

(b) 对任意 $G\in L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)$ 有

$$\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}=\sup_{\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F(x)\rangle dx\right|$$

因此 $L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)$ 可等距嵌入 $(L^p(\mathbb{R}^n,B))^*$.

证明 (a) 一方面, 由 Hölder 不等式知

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F(x)\rangle dx\right|\le\int_{\mathbb{R}^n}|\langle G(x),F(x)\rangle|dx\le\int_{\mathbb{R}^n}\|G(x)\|_{B^*}\|F(x)\|_B dx\le\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}$$

因此

$$\sup_{\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F(x)\rangle dx\right|\le\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}.$$

另一方面, 对 $F\in L^p(\mathbb{R}^n,B)$, 取定 $\varepsilon>0$, 根据 $L^p(X,B)$ 的简单函数逼近定理4.10知存在 $F_\varepsilon(x)=\sum_{j=1}^m\chi_{E_j}(x)u_j(m\in\mathbb{N}$, 或在 $p=\infty$ 时 $m=\infty)$ 使得 $\|F_\varepsilon-F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}<\frac{\varepsilon}{2}$, 其中 $\{E_j\}_{j=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的不交子集, $u_j\in B$. 因为 $F_\varepsilon\in L^p(\mathbb{R}^n,B)$, 故 $\|F(\circledast)\|_B\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 从而由经典 Lebesgue 空间的共轭空间性质知

$$\|F(\circledast)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=\sup_{\|h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\le 1}|\langle h,\|F_\varepsilon(\circledast)\|_B\rangle_{L^2}|=\sup_{\|h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\|F_\varepsilon(x)\|_B dx\right|$$

其中 $\langle f,g\rangle_{L^2}=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g(x)}dx$. 根据上确界的定义知对前述给定的 ε, 总存在 $h\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\le 1$, 且

$$\|F_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|F_\varepsilon(x)\|_B^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\|F_\varepsilon(x)\|_B dx+\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.183}$$

若 $1\le p<\infty$, 因为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 此时在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 故可进一步选取 $h\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 是紧支有界函数, 因此必有 $h\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 根据算子范数的上确界定义, 知对每个 $u_j\in B$, 均对应存在 $u_j^*\in B^*$ 使得 $\|u_j^*\|_{B^*}=1$, 且

$$\|u_j\|_B<\langle u_j^*,u_j\rangle+\frac{\varepsilon}{4(\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}+1)}. \tag{4.184}$$

现取 $G(x)=\sum_{j=1}^m h(x)\chi_{E_j}(x)u_j^*$, 显见 G 是值域在 B^* 中的强可测函数, 且 $\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}\le 1$. 现由(4.183),(4.184)式知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F_\varepsilon(x)\rangle dx&=\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\sum_{j=1}^m\chi_{E_j}(x)\langle u_j^*,u_j\rangle dx\\&\ge\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\sum_{j=1}^m\left(\|u_j\|_B-\frac{\varepsilon}{4(\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}+1)}\right)\chi_{E_j}(x)dx\\&\ge\|F_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

由 Hölder 不等式知

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F_\varepsilon(x)-F(x)\rangle dx\right|\le\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}\|F-F_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$\begin{aligned}\|F_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}&\le\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F_\varepsilon(x)\rangle dx+\frac{\varepsilon}{2}\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F(x)\rangle dx+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&\le\sup_{\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F(x)\rangle dx\right|+\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即得 (a)[56].

(b) 通过与 (a) 类似的过程可得

$$\sup_{\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F(x)\rangle dx\right|\le\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)},$$

下证

$$\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}\le\sup_{\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F(x)\rangle dx\right|.$$

证明过程与 (a) 也是类似的. 对 $G\in L^{p'}(\mathbb{R}^n,B)$, 取定 $\varepsilon>0$, 根据 $L^{p'}(\mathbb{R}^n,B)$ 的简单函数逼近定理4.10知存在 $G_\varepsilon(x)=\sum_{j=1}^m\chi_{E_j}(x)u_j^*(m\in\mathbb{N}$, 或在 $p=1$ 时 $m=\infty)$ 使得 $\|G_\varepsilon-G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}<\frac{\varepsilon}{2}$, 其中 $\{E_j\}_{j=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的不交子集, $u_j^*\in B^*$. 因为 $G_\varepsilon\in L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)$, 故由经典 Lebesgue 空间的共轭空间性质知对前述给定的 ε, 存在非负函数 h 使得 $\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le 1$, 且

$$\|G_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|G_\varepsilon(x)\|_{B^*}^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}<\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\|G_\varepsilon(x)\|_{B^*}dx+\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.185}$$

在 $1<p\le\infty$ 时, 可以取 $h\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 为有界紧支函数, 因而必有 $\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}<\infty$. 知每个 $u_j^*\in B^*$ 均对应存在 $u_j\in B$ 使得 $\|u_j\|_B=1$, 且

$$\|u_j^*\|_{B^*}<\langle u_j^*,u_j\rangle+\frac{\varepsilon}{4(\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}+1)}. \tag{4.186}$$

[56] $p=\infty$ 怎么处理? 此时不能很好的再去刻画 $(L^\infty(\mathbb{R}^n))^*$ 了.

现取 $F(x)=\sum_{j=1}^m h(x)\chi_{E_j}(x)u_j$, 显见 F 是值域在 B 中的强可测函数, 且 $\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}\le 1$. 由(4.185),(4.186)式可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\langle G_\varepsilon(x),F(x)\rangle dx&=\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\sum_{j=1}^m\chi_{E_j}(x)\langle u_j^*,u_j\rangle dx\\&\ge\int_{\mathbb{R}^n}h(x)\sum_{j=1}^m\left(\|u_j^*\|_{B^*}-\frac{\varepsilon}{4(\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}+1)}\right)\chi_{E_j}(x)dx\\&\ge\|G_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}-\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

因此对任意 $\varepsilon>0$ 均有

$$\|G_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,B^*)}\le\sup_{\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B)}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle G(x),F(x)\rangle dx\right|+\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即得 (b)[57]. □

定义 4.11 (有界线性算子的有界 Banach 值延拓)

设 X,Y 是测度空间, $T:L^p(X)\to L^q(Y)(0<p,q\le\infty)$(或 $L^p(X)\to L^{q,\infty}(Y)(0<p,q\le\infty)$) 是线性算子. 定义作用在 $L^p(X)\otimes B$ 上的算子 $\boldsymbol{T}$ 为:

$$\boldsymbol{T}\left(\sum_{j=1}^m f_ju_j\right)=\sum_{j=1}^m T(f_j)u_j.$$

若 $\boldsymbol{T}$ 有 $L^p(X,B)\to L^q(Y,B)$(或 $L^p(X,B)\to L^{q,\infty}(Y,B)$) 的有界延拓, 就称 T 具有有界 B 值延拓. 此时将 T 的 B 值延拓记为 $\boldsymbol{T}$. ♣

例 4.8 令 $B=l^r(1\le r<\infty)$, 则强可测函数 $F:X\to B$ 本质上是可测函数 $f_j:X\to\mathbb{C}$ 所构成的序列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, 而空间 $L^p(X,l^r)$ 由在 X 上的全体满足

$$\|\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\|_{L^p(X,l^r)}=\left\|\left(\sum_j|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(X)}<\infty$$

的复值可测函数列 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 构成. 空间 $L^p(X)\otimes l^r$ 由全体有限和

$$\sum_{j=1}^m(a_{j1},a_{j2},a_{j3},\cdots)g_j,\quad g_j\in L^p(X),(a_{j1},a_{j2},a_{j3},\cdots)\in l^r,j=1,\cdots,m$$

构成. 显见 $L^p(X)\otimes l^r$ 是 $L^p(X,l^r)$ 的子空间. 现取定 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in L^p(X,l^r)$, 记 $F_m=e_1f_1+\cdots+e_mf_m$, 其中 e_j 是第 j 项为 1, 其余项均为 0 的序列. 知 $F_m\in L^p(X)\otimes l^r$, 且根据 $L^p(X,B)$ 的简单函数逼近定理4.10知 F_m 依 $L^p(X,l^r)$ 范数逼近 f. 这表明 $L^p(X)\otimes l^r$ 在 $L^p(X,l^r)$ 中稠密.

若 T 是 $L^p(X)\to L^q(Y)$ 的有界线性算子, 则定义 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}(\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}})=\{T(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$$

根据定义4.11, T 具有有界 l^r 值延拓当且仅当不等式

$$\left\|\left(\sum_j|T(f_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^q(Y)}\le C\left\|\left(\sum_j|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(X)}$$

成立.

定义 4.12 (正算子)

称作用在可测函数上的线性算子 T 为正算子, 如果 $f\ge 0\Rightarrow T(f)\ge 0$. ♣

[57] 问题同上.

容易验证正算子的下述性质:

$$\begin{cases} f \le g \Rightarrow T(f) \le T(g), \\ |T(f)| \le T(|f|), \\ \sup\limits_j |T(f_j)| \le T(\sup\limits_j |f_j|) \end{cases} \tag{4.187}$$

其中 f, g, f_j 是可测函数. 对于正算子的向量值延拓, 我们有下述结果:

命题 4.12 (正算子 B 值延拓的存在性)

设 $0 < p, q \le \infty, (X, \mu), (Y, \nu)$ 是 σ 有限测度空间, $T : L^p(X) \to L^q(Y)$(或 $L^p(X) \to L^{q,\infty}(Y)$) 是正线性算子, 且其算子范数为 A. 若 B 是 Banach 空间, 则 T 具有 B 值延拓 $\boldsymbol{T} : L^p(X, B) \to L^q(Y, B)$(或 $L^p(X, B) \to L^{q,\infty}(Y, B)$), 且 $\boldsymbol{T}$ 的算子范数不超过 A.

证明 先考虑 $B = l^r (1 \le r \le \infty)$ 的情形. 当 $r = 1$, 由正算子性质(4.187)知

$$\left\| \sum_j |T(f_j)| \right\|_{L^q(Y)} \le \left\| \sum_j T(|f_j|) \right\|_{L^q(Y)} = \left\| T\left(\sum_j |f_j| \right) \right\|_{L^q(Y)} \le A \left\| \sum_j |f_j| \right\|_{L^p(X)},$$

因此根据 $L^p(X, B)$ 的简单函数逼近定理4.10可知 $\boldsymbol{T}$ 具有 $L^p(X, B) \to L^q(Y, B)$ 的有界延拓. 当 $r = \infty$, 同样由正算子性质(4.187)知

$$\| \sup_j |T(f_j)| \|_{L^q(Y)} \le \| T(\sup_j |f_j|) \|_{L^q(Y)} \le A \| \sup_j |f_j| \|_{L^p(X)},$$

结论同理可得. 现对 $1 < r < \infty$ 的情形, 由 l^r 值 Lebesgue 空间的 Riesz-Thorin 插值定理4.18可知

$$\left\| \left(\sum_j |T(f_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(Y)} \le A \left\| \left(\sum_j |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(X)},$$

此即欲证.

对于一般 Banach 空间 B 的情况, 首先承认下述不等式:

$$\| \boldsymbol{T}(F)(x) \|_B \le T(\|F\|_B)(x), \quad x \in X. \tag{4.188}$$

因而

$$\| \| \boldsymbol{T}(F) \|_B \|_{L^q(Y)} \le \| T(\|F\|_B) \|_{L^q(Y)} \le A \| \|F\|_B \|_{L^p(X)}$$

此即欲证. 下面证明(4.188)式, 取 $F(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) u_j$, 知:

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{T}(F)(x) \|_B &= \left\| \sum_{j=1}^n T(f_j)(x) u_j \right\|_B = \sup_{\|u^*\|_{B^*} \le 1} \left| \left\langle u^*, \sum_{j=1}^n T(f_j)(x) u_j \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\|u^*\|_{B^*} \le 1} \left| T\left(\sum_{j=1}^n f_j \langle u^*, u_j \rangle \right)(x) \right| \overset{(A)}{\le} T\left(\sup_{\|u^*\|_{B^*} \le 1} \left| \left\langle u^*, \sum_{j=1}^n f_j u_j \right\rangle \right| \right)(x) \\ &= T\left(\left\| \sum_{j=1}^n f_j u_j \right\|_B \right)(x) = T(\|F\|_B)(x) \end{aligned}$$

其中 (A) 是因为 T 是正算子. 现由范数的连续性与 T 的连续性, 结合 $L^p(X, B)$ 的简单函数逼近4.10(a)(b) 即得(4.188)式.

4.5.4 补充: Banach 值函数空间的插值

本节主要介绍 Riesz-Thorin 插值定理2.24与 Marcinkiewicz 插值定理3.4在 Banach 值函数的 Lebesgue 空间上的版本.

定理 4.17 (一般 Banach 值 Lebesgue 空间的 Riesz-Thorin 插值定理)

设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是 σ 有限测度空间, $0<p_0,p_1\le\infty, 1\le q_0,q_1\le\infty, p_0>p_1$. 对 $0<\theta<1$, 设 p,q 满足

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}. \tag{4.189}$$

设 B_1,B_2 是 Banach 空间, $\boldsymbol{T}$ 是以范数 A_0 将 $L^{p_0}(X,B_1)$ 映入 $L^{q_0}(Y,B_2)$, 且以范数 A_1 将 $L^{p_1}(X,B_1)$ 映入 $L^{q_1}(Y,B_2)$ 的线性算子, 则 $\boldsymbol{T}$ 具有作为 $L^p(X,B_1)\to L^q(Y,B_2)$ 的线性延拓, 且延拓后的算子范数不超过 $c_\theta A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}$, 其中 c_θ 是仅关于 θ 的常数.

证明 我们将证明过程分为下述四部分.

第一部分: 设 $i\in\{0,1\}$, 若 $F_j\in L^{p_i}(B_1)(j=1,\cdots,m)$ 的支集两两不交, 则

$$\|\max_{j=1,\cdots,m}\|\boldsymbol{T}(F_j)\|_{B_2}\|_{L^{q_i}(Y)}\le A_i\left\|\sum_{j=1}^m F_j\right\|_{L^{p_i}(X,B_1)}. \tag{4.190}$$

为此首先说明对任意 $y\in Y$ 均有

$$\max_{j=1,\cdots,m}\|\boldsymbol{T}(F_j)(y)\|_{B_2}\le\frac{1}{2^m}\sum_{\varepsilon_k=\pm1}\left\|\sum_{k=1}^m\varepsilon_k\boldsymbol{T}(F_k)(y)\right\|_{B_2}, \tag{4.191}$$

这是因为任意取定 $j_0\in\{1,\cdots,m\}$, 对应有

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon_k=\pm1}\left\|\sum_{k=1}^m\varepsilon_k\boldsymbol{T}(F_k)(y)\right\|_{B_2}&=\sum_{\substack{\varepsilon_k=\pm1\\k\ne j_0}}\left\|\boldsymbol{T}(F_{j_0})(y)+\sum_{\substack{1\le k\le m\\k\ne j_0}}\varepsilon_k\boldsymbol{T}(F_k)(y)\right\|_{B_2}+\sum_{\substack{\varepsilon_k=\pm1\\k\ne j_0}}\left\|-\boldsymbol{T}(F_{j_0})(y)+\sum_{\substack{1\le k\le m\\k\ne j_0}}\varepsilon_k\boldsymbol{T}(F_k)(y)\right\|_{B_2}\\&\ge\sum_{\substack{\varepsilon_k=\pm1\\k\ne j_0}}\left\|2\boldsymbol{T}(F_{j_0})(y)+\sum_{\substack{1\le k\le m\\k\ne j_0}}\varepsilon_k\boldsymbol{T}(F_k)(y)-\sum_{\substack{1\le k\le m\\k\ne j_0}}\varepsilon_k\boldsymbol{T}(F_k)(y)\right\|_{B_2}\\&=2^{m-1}\|2\boldsymbol{T}(F_{j_0})(y)\|_{B_2}=2^m\|\boldsymbol{T}(F_{j_0})(y)\|_{B_2}.\end{aligned}$$

(4.191)式因而得证. 又因为 $F_j(j=1,\cdots,m)$ 的支集两两不交, 故对任意 $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^m\subset\{0,1\}$ 有

$$\left|\sum_{k=1}^m\varepsilon_kF_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^mF_k(x)\right|$$

因此

$$\begin{aligned}\|\max_{j=1,\cdots,m}\|\boldsymbol{T}(F_j)\|_{B_2}\|_{L^{q_i}(Y)}&\le\frac{1}{2^m}\left\|\sum_{\varepsilon_k=\pm1}\left\|\sum_{k=1}^m\varepsilon_k\boldsymbol{T}(F_k)\right\|_{B_2}\right\|_{L^{q_i}(Y)}=\frac{1}{2^m}\sum_{\varepsilon_k=\pm1}\left\|\left\|\boldsymbol{T}\left(\sum_{k=1}^m\varepsilon_kF_k\right)\right\|_{B_2}\right\|_{L^{q_i}(Y)}\\&\le\frac{A_i}{2^m}\sum_{\varepsilon_k=\pm1}\left\|\left\|\sum_{k=1}^m\varepsilon_kF_k\right\|_{B_1}\right\|_{L^{p_i}(X)}=\frac{A_i}{2^m}\sum_{\varepsilon_k=\pm1}\left\|\left\|\sum_{k=1}^mF_k\right\|_{B_1}\right\|_{L^{p_i}(X)}=A_i\left\|\sum_{j=1}^mF_j\right\|_{L^{p_i}(X,B_1)}\end{aligned}$$

此即(4.190)式.

第二部分: 设 F 是从 X 映入 B_1 的某稠密子空间的有限取值函数, 且 $\|\|F\|_{B_1}\|_{L^p(X)}=1$. 取定 $\lambda>1$, 对全体满足 $\|F(x)\|_{B_1}\ne0$ 的 $x\in X$, 知存在足够大的 N 使得 $\lambda^{-N}<\|F(x)\|_{B_1}\le\lambda^N$. 记 $F_j(x)=F(x)\cdot\chi_{\Omega_j}(x)$, 其中 $\Omega_j=\{x\in X:\lambda^j<\|F(x)\|_{B_1}\le\lambda^{j+1}\}$. 记 $a=\frac{p}{p_1}-\frac{p}{p_0}$, 则有

$$\left\|\sum_j\lambda^{-ja\theta}F_j\right\|_{L^{p_0}(X,B_1)}^{p_0}\le\lambda^{a\theta p_0}, \tag{4.192}$$

且

$$\left\|\sum_j\lambda^{ja(1-\theta)}F_j\right\|_{L^{p_1}(X,B_1)}^{p_1}\le1. \tag{4.193}$$

这是因为此时显见

$$F(x)=\sum_{j=-N}^NF_j(x)$$

另由(4.189)式可知

$$\theta = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}} = \frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}}{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_0}} \Rightarrow a\theta = 1-\frac{p}{p_0}.$$

同样由(4.189)式与 $p_0 > p_1$ 可知 $p_0 > p > p_1$, 结合 F_j 的支集两两不交可知:

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j=-N}^{N}\lambda^{-ja\theta}F_j\Big\|_{L^{p_0}(X,B_1)}^{p_0} &= \int_X\Big(\sum_{j=-N}^{N}\lambda^{-ja\theta}\|F_j(x)\|_{B_1}\Big)^{p_0}dx = \int_X\sum_{j=-N}^{N}\lambda^{-j(p_0-p)}\|F_j(x)\|_{B_1}^{p_0}dx\\
&= \sum_{j=-N}^{N}\lambda^{-j(p_0-p)}\int_X\|F_j(x)\|_{B_1}^{p_0}dx = \sum_{j=-N}^{N}\lambda^{-j(p_0-p)}\int_{\Omega_j}\|F(x)\|_{B_1}^{p_0}dx\\
&= \sum_{j=-N}^{N}\lambda^{-j(p_0-p)}\int_{\Omega_j}\|F(x)\|_{B_1}^{p_0-p}\|F(x)\|_{B_1}^{p}dx\\
&\le \sum_{j=-N}^{N}\lambda^{-j(p_0-p)+(p_0-p)(j+1)}\int_{\Omega_j}\|F(x)\|_{B_1}^{p}dx\\
&= \lambda^{p_0-p}\sum_{j=-N}^{N}\int_{\Omega_j}\|F(x)\|_{B_1}^{p}dx = \lambda^{p_0-p}\|\|F\|_{B_1}\|_{L^p(X)}^{p} = \lambda^{p_0-p} = \lambda^{a\theta p_0}
\end{aligned}$$

此即(4.192)式. 另一方面计算可得

$$a(1-\theta) = \frac{p}{p_1}-1$$

于是

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j=-N}^{N}\lambda^{ja(1-\theta)}\Big\|_{L^{p_1}(X,B_1)}^{p_1} &= \int_X\Big(\sum_{j=-N}^{N}\lambda^{ja(1-\theta)}\|F_j(x)\|_{B_1}\Big)^{p_1}dx = \int_X\sum_{j=-N}^{N}\lambda^{j(p-p_1)}\|F_j(x)\|_{B_1}^{p_1}dx\\
&= \sum_{j=-N}^{N}\lambda^{j(p-p_1)}\int_X\|F_j(x)\|_{B_1}^{p_1}dx = \sum_{j=-N}^{N}\lambda^{j(p-p_1)}\int_{\Omega_j}\|F(x)\|_{B_1}^{p_1}dx\\
&= \sum_{j=-N}^{N}\lambda^{j(p-p_1)}\int_{\Omega_j}\|F(x)\|_{B_1}^{p_1-p}\|F(x)\|_{B_1}^{p}dx\\
&\le \sum_{j=-N}^{N}\lambda^{j(p-p_1)+j(p_1-p)}\int_{\Omega_j}\|F(x)\|_{B_1}^{p}dx\\
&= \sum_{j=-N}^{N}\|F(x)\|_{B_1}^{p}dx = \|\|F\|_{B_1}\|_{L^p(X)}^{p} = 1.
\end{aligned}$$

此即(4.193)式.

第三部分: 记

$$g_0(y) = \max_{-N\le j\le N}\lambda^{-ja\theta}\|\boldsymbol{T}(F_j)(y)\|_{B_2},$$

$$g_1(y) = \max_{-N\le j\le N}\lambda^{ja(1-\theta)}\|\boldsymbol{T}(F_j)(y)\|_{B_2}.$$

其中 $y\in Y$, 则

$$\|g_0\|_{L^{q_0}(Y)} \le A_0\lambda^{a\theta}, \tag{4.194}$$

且

$$\|g_1\|_{L^{q_1}(Y)} \le A_1. \tag{4.195}$$

这是因为结合(4.190),(4.192)两式可知

$$\|g_0\|_{L^{q_0}(Y)}=\Big\|\max_{-N\le j\le N}\lambda^{-ja\theta}\|\boldsymbol{T}(F_j)\|_{B_2}\Big\|_{L^{q_0}(Y)}=\Big\|\max_{-N\le j\le N}\|\boldsymbol{T}(\lambda^{-ja\theta}F_j)\|_{B_2}\Big\|_{L^{q_0}(Y)}$$
$$\le A_0\Big\|\sum_{j=-N}^{N}\lambda^{-ja\theta}F_j\Big\|_{L^{p_0}(X,B_1)}\le A_0\lambda^{a\theta}.$$

另一方面,结合(4.191),(4.193)两式可知

$$\|g_1\|_{L^{q_1}(Y)}=\Big\|\max_{-N\le j\le N}\lambda^{ja(1-\theta)}\|\boldsymbol{T}(F_j)\|_{B_2}\Big\|_{L^{q_1}(Y)}=\Big\|\max_{-N\le j\le N}\|\boldsymbol{T}(\lambda^{ja(1-\theta)}F_j)\|_{B_2}\Big\|_{L^{q_1}(Y)}$$
$$\le A_1\Big\|\sum_{j=-N}^{N}\lambda^{ja(1-\theta)}F_j\Big\|_{L^{p_1}(X,B_1)}\le A_1.$$

第四部分: 现在任取 $y\in Y$, 往证

$$\|\boldsymbol{T}(F)(y)\|_{B_2}\le\sum_{j=-N}^{N}\|\boldsymbol{T}(F_j)(y)\|_{B_2}\le g_0(y)^{1-\theta}g_1(y)^{\theta}\left(2+\frac{1}{\lambda^{a\theta}-1}+\frac{1}{\lambda^{a(1-\theta)}-1}\right).\tag{4.196}$$

(4.196)式中第一个不等号是显然的. 对于第二个不等号, 设存在 $-N\le j_0\le N$ 使得 $j\le j_0$ 时 $\lambda^{ja}\le\frac{g_1(y)}{g_0(y)}$, $j>j_0$ 时 $\lambda^{ja}>\frac{g_1(y)}{g_0(y)}$. 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-N}^{N}\|\boldsymbol{T}(F_j)(y)\|_{B_2}&=\sum_{j=-N}^{j_0}\|\boldsymbol{T}(F_j)(y)\|_{B_2}+\sum_{j=j_0+1}^{N}\|\boldsymbol{T}(F_j)(y)\|_{B_2}\\
&=\sum_{j=-N}^{j_0}\lambda^{ja\theta}\lambda^{-ja\theta}\|\boldsymbol{T}(F_j)(y)\|_{B_2}+\sum_{j=j_0+1}^{N}\lambda^{-ja(1-\theta)}\lambda^{ja(1-\theta)}\|\boldsymbol{T}(F_j)(y)\|_{B_2}\\
&\le\sum_{j=-N}^{j_0}\lambda^{ja\theta}g_0(y)+\sum_{j=j_0+1}^{N}\lambda^{-ja(1-\theta)}g_1(y)\\
&\le\sum_{j=-\infty}^{j_0}\lambda^{ja\theta}g_0(y)+\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\lambda^{-ja(1-\theta)}g_1(y)\\
&=\frac{1}{1-\lambda^{-a\theta}}\lambda^{j_0a\theta}g_0(y)+\frac{1}{1-\lambda^{-a(1-\theta)}}\lambda^{-(j_0+1)a(1-\theta)}g_1(y)\\
&\le\left(1+\frac{1}{\lambda^{a\theta}-1}\right)\left(\frac{g_1(y)}{g_0(y)}\right)^{\theta}g_0(y)+\left(1+\frac{1}{\lambda^{a(1-\theta)}-1}\right)\left(\frac{g_0(y)}{g_1(y)}\right)^{1-\theta}g_1(y)\\
&=g_0(y)^{1-\theta}g_1(y)^{\theta}\left(2+\frac{1}{\lambda^{a\theta}-1}+\frac{1}{\lambda^{a(1-\theta)}-1}\right).
\end{aligned}$$

此即(4.196)式. 在(4.196)式两端关于 y 取经典的 L^q 范数, 可知:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{T}(F)\|_{L^q(Y,B_2)}&\le\left\|g_0^{1-\theta}g_1^{\theta}\left(2+\frac{1}{\lambda^{a\theta}-1}+\frac{1}{\lambda^{a(1-\theta)}-1}\right)\right\|_{L^q(Y)}\\
&=\left(2+\frac{1}{\lambda^{a\theta}-1}+\frac{1}{\lambda^{a(1-\theta)}-1}\right)\left(\int_Y|g_0(y)|^{(1-\theta)q}|g_1(y)|^{\theta q}dy\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\overset{(A)}{\le}\left(2+\frac{1}{\lambda^{a\theta}-1}+\frac{1}{\lambda^{a(1-\theta)}-1}\right)\left(\int_Y|g_0(y)|^{(1-\theta)q\cdot\frac{q_0}{(1-\theta)q}}dy\right)^{\frac{1}{q}\cdot\frac{(1-\theta)q}{q_0}}\left(\int_Y|g_1(y)|^{\theta q\cdot\frac{q_1}{\theta q}}dy\right)^{\frac{1}{q}\cdot\frac{\theta q}{q_1}}\\
&=\left(2+\frac{1}{\lambda^{a\theta}-1}+\frac{1}{\lambda^{a(1-\theta)}-1}\right)\|g_0\|_{L^{q_0}(Y)}^{1-\theta}\|g_1\|_{L^{q_1}(Y)}^{\theta}\\
&\le\left(2+\frac{1}{\lambda^{a\theta}-1}+\frac{1}{\lambda^{a(1-\theta)}-1}\right)\lambda^{a\theta(1-\theta)}A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}
\end{aligned}$$

[58]其中 (A) 是 Hölder 不等式. 回忆最初 $\lambda>1$ 是任意取定的, 现在令 $\lambda=(1+\sqrt{2})^{\frac{1}{a}}$ 即得 $\|\boldsymbol{T}(F)\|_{L^q(Y,B_2)}\le c_\theta A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}$(其中 c_θ 是仅关于 θ 的常数). 最后, 因为在第二部分开头已经设定了 $\|\|F\|_{B_1}\|_{L^p(X)}=1$, 根据一般 Banach 值 Lebesgue 空间上范数的齐次性即得欲证. □

[58]这里得到的系数无论如何都会在 $\theta\to0$ 和 $\theta\to1$ 时爆破吧?

对于 l^r 值 Lebesgue 空间而言, 还有下述更具体的 Riesz-Thorin 插值定理成立:

定理 4.18 (l^r 值 Lebesgue 空间的 Riesz-Thorin 插值定理)

设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是 σ 有限测度空间, $1<p_0,q_0,p_1,q_1,r_0,s_0,r_1,s_1<\infty$, 且存在 $0<\theta<1$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}=\frac{1}{p},\quad \frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}=\frac{1}{q},\\ \frac{1-\theta}{r_0}+\frac{\theta}{r_1}=\frac{1}{r},\quad \frac{1-\theta}{s_0}+\frac{\theta}{s_1}=\frac{1}{s}.\end{aligned}\tag{4.197}$$

设 T 是将 $L^{p_0}(X)$ 映入 $L^{q_0}(Y)$, 将 $L^{p_1}(X)$ 映入 $L^{q_1}(Y)$ 的有界线性算子, 定义作用在 X 上的复值函数列上的向量值算子 $\boldsymbol{T}$ 为 $\boldsymbol{T}(\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}})=\{T(f_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$. 若 $\boldsymbol{T}$ 以范数 M_0 将 $L^{p_0}(X,l^{r_0}(\mathbb{C}))$ 映入 $L^{q_0}(Y,l^{s_0}(\mathbb{C}))$, 以范数 M_1 将 $L^{p_1}(X,l^{r_1}(\mathbb{C}))$ 映入 $L^{q_1}(Y,l^{s_1}(\mathbb{C}))$, 则 $\boldsymbol{T}$ 以至多为 $M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ 的范数将 $L^p(X,l^r(\mathbb{C}))$ 映入 $L^q(Y,l^s(\mathbb{C}))$.

♡

证明 设 $S_0(X)\otimes l^r(\mathbb{C})$ 由全体形如

$$\boldsymbol{f}(x)=\sum_{k=1}^m\chi_{A_k}(x)\{a_{k,l}e^{i\alpha_{k,l}}\}_{l\in\mathbb{Z}},$$

的 l^r 值函数构成, 其中 A_k 是 X 中两两不交的有限测度子集; $\alpha_{k,l}\in\mathbb{R}$; 当 $l\in I$ 时 $a_{k,l}>0$, $l\in\mathbb{Z}\backslash I$ 时 $a_{k,l}=0$, 其中 I 是 $\mathbb{Z}$ 的有限子集. 结合紧支序列空间在 $l^r(\mathbb{C})(r<\infty)$ 中的稠密性与 $L^p(X,B)$ 的简单函数逼近4.10(a) 可知 $S_0(X)\otimes l^r(\mathbb{C})$ 在 $L^p(X,l^r(\mathbb{C}))(0<p<\infty)$ 中稠密. 根据 $L^p(X,B)$ 的共轭空间性质4.11(a) 知现在需要给出

$$\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f})\|_{L^q(Y,l^s)}=\sup_{\substack{\boldsymbol{g}\in S_0(Y)\otimes l^{s'}(\mathbb{C})\\ \|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}\le 1}}\left|\int_Y \boldsymbol{T}(\boldsymbol{f})(y)\cdot\boldsymbol{g}(y)d\nu(y)\right|$$

的估计, 其中 $\cdot$ 表示序列内积; 上确界在全体形如

$$\boldsymbol{g}(y)=\sum_{j=1}^n\chi_{B_j}(y)\{b_{j,l}e^{i\beta_{j,l}}\}_{l\in\mathbb{Z}}$$

的 $l^{s'}$ 值函数中取, 其中 $b_{j,l}>0,\beta_{j,l}\in\mathbb{R},B_j$ 是 Y 中两两不交的有限测度子集, 且 $\|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}\le 1$. 记

$$\begin{aligned}P(z)&=\frac{p}{p_0}(1-z)+\frac{p}{p_1}z,\\ Q(z)&=\frac{q'}{q_0'}(1-z)+\frac{q'}{q_1'}z,\\ R(z)&=\frac{r}{r_0}(1-z)+\frac{r}{r_1}z,\\ S(z)&=\frac{s'}{s_0'}(1-z)+\frac{s'}{s_1'}z.\end{aligned}$$

现对 $z\in\overline{S}:=\{z\in\mathbb{C}:0\le\operatorname{Re}z\le 1\}$, 定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_z(x)&=\sum_{k=1}^m\chi_{A_k}(x)\left\{\frac{a_{k,l}^{R(z)}}{\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{R(z)-P(z)}}e^{i\alpha_{k,l}}\right\}_{l\in\mathbb{Z}},\\ \boldsymbol{g}_z(y)&=\sum_{j=1}^n\chi_{B_j}(y)\left\{\frac{b_{j,l}^{S(z)}}{\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{S(z)-Q(z)}}e^{i\beta_{j,l}}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

则

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}_z)(y)=\sum_{k=1}^m T(\chi_{A_k})(y)\left\{\frac{a_{k,l}^{R(z)}}{\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{P(z)-P(z)}}e^{i\alpha_{k,l}}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}.$$

另外定义

$$F(z)=\int_Y\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}_z)(y)\cdot\boldsymbol{g}_z(y)d\nu(y),$$

因为

$$\int_Y T(\chi_{A_k})(y)\chi_{B_j}(y)d\nu(y)\le\|T(\chi_{A_k})\|_{L^{q_0}(Y)}\|\chi_{B_j}\|_{L^{q_0'}(Y)}<\infty$$

故 $F(z)$ 对 $z\in\overline{S}$ 是良定义的. 现根据线性性可得

$$F(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{a_{k,l}^{R(z)}e^{i\alpha_{k,l}}}{\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{R(z)-P(z)}}\frac{b_{j,l}^{S(z)}e^{i\beta_{j,l}}}{\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{S(z)-Q(z)}}\int_Y T(\chi_{A_k})(y)\chi_{B_j}(y)d\nu(y) \tag{4.198}$$

因为 $a_{k,l},\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})},b_{j,l},\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}$ 都是严格正的, 故 F 是关于 z 的解析函数.

现在若 $\operatorname{Re}z=0$, 设 $z=it$, 则

$$\begin{gathered}
|a_{k,l}^{R(it)}|=a_{k,l}^{\frac{r}{r_0}},\quad |b_{j,l}^{S(it)}|=b_{j,l}^{\frac{s'}{s'_0}},\\
|\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{R(it)-P(it)}|=\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{\frac{r}{r_0}-\frac{p}{p_0}},\\
|\|\{b_{j,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{S(it)-Q(it)}|=\|\{b_{j,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{\frac{s'}{s'_0}-\frac{q'}{q'_0}}.
\end{gathered}$$

根据 A_k 两两不交知

$$\begin{aligned}
\|f_{it}\|_{L^{p_0}(X,l^{r_0}(\mathbb{C}))}&=\left(\int_X\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{k=1}^{m}\chi_{A_k}(x)\frac{a_{k,l}^{R(it)}}{\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{R(it)-P(it)}}e^{i\alpha_{k,l}}\right|^{r_0}\right)^{\frac{p_0}{r_0}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&=\left(\int_X\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{m}\chi_{A_k}(x)\left|\frac{a_{k,l}^{R(it)}}{\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{R(it)-P(it)}}e^{i\alpha_{k,l}}\right|^{r_0}\right)^{\frac{p_0}{r_0}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&=\left(\int_X\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{m}\chi_{A_k}(x)\left|\frac{a_{k,l}^{\frac{r}{r_0}}}{\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{\frac{r}{r_0}-\frac{p}{p_0}}}\right|^{r_0}\right)^{\frac{p_0}{r_0}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&=\left(\int_X\sum_{k=1}^{m}\chi_{A_k}(x)\left(\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{\frac{pr_0}{p_0}-r}\sum_{l\in\mathbb{Z}}a_{k,l}^r\right)^{\frac{p_0}{r_0}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&=\left(\sum_{k=1}^{m}\mu(A_k)\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{p-\frac{rp_0}{r_0}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}a_{k,l}^r\right)^{\frac{p_0}{r_0}}\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&=\left(\sum_{k=1}^{m}\mu(A_k)\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{p-\frac{rp_0}{r_0}}\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{\frac{rp_0}{r_0}}\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&=\left(\sum_{k=1}^{m}\mu(A_k)\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{p}\right)^{\frac{1}{p_0}}=\|f\|_{L^p(X,l^r(\mathbb{C}))}^{\frac{p}{p_0}}.
\end{aligned}$$

类似地, 根据 B_j 两两不交知

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{g}_{it}\|_{L^{q_0'}(Y,l^{s_0'}(\mathbb{C}))} &= \left(\int_Y \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{j=1}^n \chi_{B_j}(y)\frac{b_{j,l}^{S(it)}}{\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{S(it)-Q(it)}}e^{i\beta_{j,l}}\right|^{s_0'}\right)^{\frac{q_0'}{s_0'}} d\nu(y)\right)^{\frac{1}{q_0'}} \\
&= \left(\int_Y \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^n \chi_{B_j}(y)\left|\frac{b_{j,l}^{S(it)}}{\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{S(it)-Q(it)}}e^{i\beta_{j,l}}\right|^{s_0'}\right)^{\frac{q_0'}{s_0'}} d\nu(y)\right)^{\frac{1}{q_0'}} \\
&= \left(\int_Y \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^n \chi_{B_j}(y)\left|b_{j,l}^{\frac{s'}{s_0'}}\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{\frac{q'}{q_0'}-\frac{s'}{s_0'}}\right|^{s_0'}\right)^{\frac{q_0'}{s_0'}} d\nu(y)\right)^{\frac{1}{q_0'}} \\
&= \left(\int_Y \sum_{j=1}^n \chi_{B_j}(y)\left(\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{\frac{q's_0'}{q_0'}-s'}\sum_{l\in\mathbb{Z}} b_{j,l}^{s'}\right)^{\frac{q_0'}{s_0'}} d\nu(y)\right)^{\frac{1}{q_0'}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^n \nu(B_j)\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{q'-\frac{s'q_0'}{s_0'}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} b_{j,l}^{s'}\right)^{\frac{q_0'}{s_0'}}\right)^{\frac{1}{q_0'}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^n \nu(B_j)\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{q'-\frac{s'q_0'}{s_0'}}\|\{b_{j,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{\frac{s'q_0'}{s_0'}}\right)^{\frac{1}{q_0'}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^n \nu(B_j)\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{q'}\right)^{\frac{1}{q_0'}} = \|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}^{\frac{q'}{q_0'}}.
\end{aligned}
$$

现在根据 Hölder 不等式可知

$$
\begin{aligned}
|F(it)| &\le \int_Y \|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}_{it})(y)\|_{l^{s_0}(\mathbb{C})}\|\boldsymbol{g}_{it}(y)\|_{l^{s_0'}(\mathbb{C})} d\nu(y) \\
&\le \|\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}_{it})\|_{l^{s_0}(\mathbb{C})}\|_{L^{q_0}(Y)}\|\|\boldsymbol{g}_{it}\|_{l^{s_0'}(\mathbb{C})}\|_{L^{q_0'}(Y)} \\
&\le M_0\|\boldsymbol{f}_{it}\|_{L^{p_0}(X,l^{r_0}(\mathbb{C}))}\|\boldsymbol{g}_{it}\|_{L^{q_0'}(Y,l^{s_0'}(\mathbb{C}))} \\
&= M_0\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(X,l^r(\mathbb{C}))}^{\frac{p}{p_0}}\|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}^{\frac{q'}{q_0'}}.
\end{aligned}
$$

另一方面, 若 $\operatorname{Re} z = 1$, 设 $z = 1 + it$, 则

$$
\begin{gathered}
|a_{k,l}^{R(1+it)}| = a_{k,l}^{\frac{r}{r_1}}, \quad |b_{j,l}^{S(1+it)}| = b_{j,l}^{\frac{s'}{s_1'}}, \\
|\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{R(1+it)-P(1+it)}| = \|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{\frac{r}{r_1}-\frac{p}{p_1}}, \\
|\|\{b_{j,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{S(1+it)-Q(1+it)}| = \|\{b_{j,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{\frac{s'}{s_1'}-\frac{q'}{q_1'}}.
\end{gathered}
$$

根据 A_k 两两不交知

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{f}_{1+it}\|_{L^{p_1}(X,l^{r_1}(\mathbb{C}))} &= \left(\int_X\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{k=1}^m \chi_{A_k}(x)\frac{a_{k,l}^{R(1+it)}}{\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{R(1+it)-P(1+it)}}e^{i\alpha_{k,l}}\right|^{r_1}\right)^{\frac{p_1}{r_1}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \left(\int_X\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^m \chi_{A_k}(x)\left|\frac{a_{k,l}^{R(1+it)}}{\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{R(1+it)-P(1+it)}}e^{i\alpha_{k,l}}\right|^{r_1}\right)^{\frac{p_1}{r_1}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \left(\int_X\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^m \chi_{A_k}(x)\left|\frac{a_{k,l}^{\frac{r}{r_1}}}{\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{\frac{r}{r_1}-\frac{p}{p_1}}}\right|^{r_1}\right)^{\frac{p_1}{r_1}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \left(\int_X\sum_{k=1}^m \chi_{A_k}(x)\left(\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{\frac{pr_1}{p_1}-r}\sum_{l\in\mathbb{Z}}a_{k,l}^r\right)^{\frac{p_1}{r_1}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \left(\sum_{k=1}^m \mu(A_k)\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{p-\frac{rp_1}{r_1}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}a_{k,l}^r\right)^{\frac{p_1}{r_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \left(\sum_{k=1}^m \mu(A_k)\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{p-\frac{rp_1}{r_1}}\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{\frac{rp_1}{r_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \left(\sum_{k=1}^m \mu(A_k)\|\{a_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(\mathbb{C})}^{p}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \|\boldsymbol{f}\|_{L^p(X,l^r(\mathbb{C}))}^{\frac{p}{p_1}}.
\end{aligned}
$$

类似地, 根据 B_j 两两不交知

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{g}_{1+it}\|_{L^{q_1'}(Y,l^{s_1'}(\mathbb{C}))} &= \left(\int_Y\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{j=1}^n \chi_{B_j}(y)\frac{b_{j,l}^{S(1+it)}}{\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{S(1+it)-Q(1+it)}}e^{i\beta_{j,l}}\right|^{s_1'}\right)^{\frac{q_1'}{s_1'}}d\nu(y)\right)^{\frac{1}{q_1'}}\\
&= \left(\int_Y\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^n \chi_{B_j}(y)\left|\frac{b_{j,l}^{S(1+it)}}{\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{S(1+it)-Q(1+it)}}e^{i\beta_{j,l}}\right|^{s_1'}\right)^{\frac{q_1'}{s_1'}}d\nu(y)\right)^{\frac{1}{q_1'}}\\
&= \left(\int_Y\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^n \chi_{B_j}(y)\left|b_{j,l}^{\frac{s'}{s_1'}}\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{\frac{q'}{q_1'}-\frac{s'}{s_1'}}\right|^{s_1'}\right)^{\frac{q_1'}{s_1'}}d\nu(y)\right)^{\frac{1}{q_1'}}\\
&= \left(\int_Y\sum_{j=1}^n \chi_{B_j}(y)\left(\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{\frac{q's_1'}{q_1'}-s'}\sum_{l\in\mathbb{Z}}b_{j,l}^{s'}\right)^{\frac{q_1'}{s_1'}}d\nu(y)\right)^{\frac{1}{q_1'}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^n \nu(B_j)\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{q'-\frac{s'q_1'}{s_1'}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}b_{j,l}^{s'}\right)^{\frac{q_1'}{s_1'}}\right)^{\frac{1}{q_1'}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^n \nu(B_j)\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{q'-\frac{s'q_1'}{s_1'}}\|\{b_{j,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{\frac{s'q_1'}{s_1'}}\right)^{\frac{1}{q_1'}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^n \nu(B_j)\|\{b_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\|_{l^{s'}(\mathbb{C})}^{q'}\right)^{\frac{1}{q_1'}} = \|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}^{\frac{q'}{q_1'}}.
\end{aligned}
$$

现在根据 Hölder 不等式可知

$$
\begin{aligned}
|F(1+it)| &\le \int_Y \|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}_{1+it})(y)\|_{l^{s_1}(\mathbb{C})}\|\boldsymbol{g}_{1+it}(y)\|_{l^{s_1'}(\mathbb{C})}d\nu(y)\\
&\le \|\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}_{1+it})\|_{l^{s_1}(\mathbb{C})}\|_{L^{q_0}(Y)}\|\|\boldsymbol{g}_{1+it}\|_{l^{s_1'}(\mathbb{C})}\|_{L^{q_1'}(Y)}\\
&\le M_1\|\boldsymbol{f}_{1+it}\|_{L^{p_1}(X,l^{r_1}(\mathbb{C}))}\|\boldsymbol{g}_{1+it}\|_{L^{q_1'}(Y,l^{s_1'}(\mathbb{C}))}\\
&= M_1\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(X,l^r(\mathbb{C}))}^{\frac{p}{p_1}}\|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}^{\frac{q'}{q_1'}}.
\end{aligned}
$$

回忆 Hadamard 三线引理:

引理 4.6 (Hadamard 三线引理)

设 F 是开带 $S=\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re}z<1\}$ 上的解析函数, 且在 $\overline{S}$ 上有界连续, 亦即存在 $0<B_0,B_1<\infty$ 使得 $\operatorname{Re}z=0$ 时 $|F(z)|\le B_0$, $\operatorname{Re}z=1$ 时 $|F(z)|\le B_1$. 则对任意的 $0\le\theta\le 1$, 在 $\operatorname{Re}z=\theta$ 时有 $|F(z)|\le B_0^{1-\theta}B_1^{\theta}$.

前面已经说明了依(4.198)式定义的 F 满足引理条件, 故对任意 $0\le\theta\le1$, 在 $\operatorname{Re}z=\theta$ 时有

$$
\begin{aligned}
|F(\theta)| &\le \left(M_0\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(X,l^r(\mathbb{C}))}^{\frac{p}{p_0}}\|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}^{\frac{q'}{q'_0}}\right)^{1-\theta}\left(M_1\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(X,l^r(\mathbb{C}))}^{\frac{p}{p_1}}\|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}^{\frac{q'}{q'_1}}\right)^{\theta}\\
&= M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(X,l^r(\mathbb{C}))}\|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}
\end{aligned}
$$

易知 $P(\theta)=Q(\theta)=R(\theta)=S(\theta)=1$, 于是 $\boldsymbol{f}_\theta=\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_\theta=\boldsymbol{g}$, 因此

$$
F(\theta)=\int_Y \boldsymbol{T}(\boldsymbol{f})(y)\cdot\boldsymbol{g}(y)d\nu(y)
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f})\|_{L^q(Y,l^s)} &\le \sup_{\substack{\boldsymbol{g}\in S_0(Y)\otimes l^{s'}(\mathbb{C})\\ \|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}\le 1}}\left|\int_Y \boldsymbol{T}(\boldsymbol{f})(y)\cdot\boldsymbol{g}(y)d\nu(y)\right|\\
&\le \sup_{\substack{\boldsymbol{g}\in S_0(Y)\otimes l^{s'}(\mathbb{C})\\ \|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}\le 1}} M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(X,l^r(\mathbb{C}))}\|\boldsymbol{g}\|_{L^{q'}(Y,l^{s'}(\mathbb{C}))}\\
&\le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(X,l^r(\mathbb{C}))}
\end{aligned}
$$

最后, 根据 $\boldsymbol{f}$ 的任意性与 $S_0(X)\otimes l^r(\mathbb{C})$ 在 $L^p(X,l^r(\mathbb{C}))$ 中的稠密性即得欲证. □

下面介绍 Banach 值 Lebesgue 空间之间的 Marcinkiewicz 插值定理.

定理 4.19 (一般 Banach 值 Lebesgue 空间的 Marcinkiewicz 插值定理)

设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是 σ 有限测度空间, $0<p_0<p<p_1\le\infty$, $0<\theta<1$ 满足

$$
\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}=\frac{1}{p}.
$$

设 B_1,B_2 是 Banach 空间, $\boldsymbol{T}$ 是定义在 $L^{p_0}(X,B_1)+L^{p_1}(X,B_1)$ 上的算子, 它满足对任意 $y\in Y$ 与任意 $F,G\in L^{p_0}(X,B_1)+L^{p_1}(X,B_1)$ 而言均有

$$
\|\boldsymbol{T}(F+G)(y)\|_{B_2}\le\|\boldsymbol{T}(F)(y)\|_{B_2}+\|\boldsymbol{T}(G)(y)\|_{B_2}. \tag{4.199}
$$

现若 $\boldsymbol{T}$ 以范数 A_0 将 $L^{p_0}(X,B_1)$ 映入 $L^{p_0,\infty}(Y,B_2)$, 以范数 A_1 将 $L^{p_1}(X,B_1)$ 映入 $L^{p_1,\infty}(Y,B_2)$, 则 $\boldsymbol{T}$ 以至多为 $2\left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}}A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}$ 的范数将 $L^p(X,B_1)$ 映入 $L^p(Y,B_2)$.

另外, 若 $p_0=1$, $\boldsymbol{T}$ 以范数 A_0 将 $L^1(X,B_1)$ 映入 $L^{1,\infty}(Y,B_2)$, 以范数 A_1 将 $L^{p_1}(X,B_1)$ 映入 $L^{p_1}(Y,B_2)$, 则 $\boldsymbol{T}$ 以至多为 $C_\theta(p-1)^{-\frac{1}{p}}A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}$ 的范数将 $L^p(X,B_1)$ 映入 $L^p(Y,B_2)$.

证明 给定 $f\in L^p(X,B_1)$, 任取 $\lambda>0$, 将 f 分解为 f_0+f_1:

$$
\begin{aligned}
f_0&=f\chi_{\{x\in X:\|f(x)\|_{B_1}>c\lambda\}},\\
f_1&=f\chi_{\{x\in X:\|f(x)\|_{B_1}\le c\lambda\}}.
\end{aligned}
$$

其中 c 是待定系数. 知

$$
\begin{aligned}
\|f_0\|_{L^{p_0}(X,B_1)}^{p_0}&=\int_X\|f_0(x)\|_{B_1}^{p_0}d\mu(x)=\int_X\|f_0(x)\|_{B_1}^{p_0-p}\|f_0(x)\|_{B_1}^{p}d\mu(x)\\
&\le(c\lambda)^{p_0-p}\int_X\|f_0(x)\|_{B_1}^{p}d\mu(x)=(c\lambda)^{p_0-p}\|f_0\|_{L^p(X,B_1)}^{p}\le(c\lambda)^{p_0-p}\|f\|_{L^p(X,B_1)}^{p}<\infty,
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
\|f_1\|_{L^{p_1}(X,B_1)}^{p_1}&=\int_X\|f_1(x)\|_{B_1}^{p_1}d\mu(x)=\int_X\|f_1(x)\|_{B_1}^{p_1-p}\|f_1(x)\|_{B_1}^{p}d\mu(x)\\
&\le(c\lambda)^{p_1-p}\int_X\|f_1(x)\|_{B_1}^{p}d\mu(x)=(c\lambda)^{p_1-p}\|f_1\|_{L^p(X,B_1)}^{p}\le(c\lambda)^{p_1-p}\|f\|_{L^p(X,B_1)}^{p}<\infty.
\end{aligned}
$$

因此 $f_0 \in L^{p_0}(X,B_1)$, $f_1 \in L^{p_1}(X,B_1)$. 进一步根据(4.199)式知对任意 $y \in Y$ 均有

$$\|\boldsymbol{T}(f)(y)\|_{B_2} \le \|\boldsymbol{T}(f_0)(y)\|_{B_2} + \|\boldsymbol{T}(f_1)(y)\|_{B_2}. \tag{4.200}$$

(4.201)式表明

$$d_{\|T(f)\|_{B_2}}(\lambda) \le d_{\|T(f_0)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + d_{\|T(f_1)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

下面对 p_1 的情况进行分类讨论.

第一种情况: $p_1 = \infty$. 此时取 $c = \frac{1}{2A_1}$, 知

$$\|T(f_1)\|_{L^{p_1,\infty}(Y,B_2)} \le A_1\|f_1\|_{L^{\infty,\infty}(Y,B_2)} = A_1\|\|f_1\|_{B_2}\|_{L^\infty(Y)} \le A_1 c\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

于是 $d_{\|T(f_1)\|_{B_2}}(\frac{\lambda}{2}) = 0$. 因此

$$d_{\|T(f)\|_{B_2}}(\lambda) \le d_{\|T(f_0)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \nu(\{y \in Y : \|T(f_0)(y)\|_{B_2} > \frac{\lambda}{2}\}) \le \left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{L^{p_0}(X,B_1)}\right)^{p_0}.$$

故

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|^p_{L^p(Y,B_2)} &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} d_{\|T(f)\|_{B_2}}(\lambda)d\lambda \le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(d_{\|T(f_0)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + d_{\|T(f_1)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)d\lambda \\
&= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} d_{\|T(f_0)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda \le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{L^{p_0}(X,B_1)}\right)^{p_0} d\lambda \\
&= p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_X \|f_0(x)\|^{p_0}_{B_1} d\mu(x)d\lambda \\
&= p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}\int_{\{x\in X:\|f(x)\|_{B_1} > c\lambda\}} \|f(x)\|^{p_0}_{B_1} d\mu(x)d\lambda \\
&= p(2A_0)^{p_0}\int_X \|f(x)\|^{p_0}_{B_2}\int_0^{\frac{\|f(x)\|_{B_2}}{c}} \lambda^{p-1-p_0} d\lambda d\mu(x) \\
&= \frac{p(2A_0)^{p_0}}{(p-p_0)c^{p-p_0}}\int_X \|f(x)\|^p_{B_2} d\mu(x) \\
&= \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|^p_{L^p(X,B_1)}.
\end{aligned}$$

第二种情况: $p_1 < \infty$. 此时有

$$\begin{aligned}
d_{\|T(f_0)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) &\le \left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{L^{p_0}(X,B_1)}\right)^{p_0}, \\
d_{\|T(f_1)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) &\le \left(\frac{2A_1}{\lambda}\|f_1\|_{L^{p_1}(X,B_1)}\right)^{p_1}.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|^p_{L^p(Y,B_2)} &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} d_{\|T(f)\|_{B_2}}(\lambda)d\lambda \le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(d_{\|T(f_0)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + d_{\|T(f_1)\|_{B_2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)d\lambda \\
&\le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{L^{p_0}(X,B_1)}\right)^{p_0} d\lambda + p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_1}{\lambda}\|f_1\|_{L^{p_1}(X,B_1)}\right)^{p_1} d\lambda \\
&\le p(2A_0)^{p_0}\int_X \|f(x)\|^{p_0}_{B_1}\int_0^{\frac{\|f(x)\|_{B_1}}{c}} \lambda^{p-1-p_0} d\mu(x)d\lambda + p(2A_1)^{p_1}\int_X \|f(x)\|^{p_1}_{B_1}\int_{\frac{\|f(x)\|_{B_1}}{c}}^\infty \lambda^{p-1-p_1} d\mu(x)d\lambda \\
&\le p\left(\frac{(2A_0)^{p_0}}{(p-p_0)c^{p-p_0}} + \frac{(2A_1)^{p_1}}{(p_1-p)c^{p-p_1}}\right)\int_X \|f(x)\|^p_{B_1} d\lambda \\
&= \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0}\frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p}\frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}}\right)\|f\|^p_{L^p(X,B_1)}
\end{aligned}$$

取 c 使得 $(2A_0c)^{p_0} = (2A_1c)^{p_1}$ 即得欲证.

现若 $p_0 = 1$, $\boldsymbol{T}$ 以范数 A_0 将 $L^1(X,B_1)$ 映入 $L^{1,\infty}(Y,B_2)$, 以范数 A_1 将 $L^{p_1}(X,B_1)$ 映入 $L^{p_1}(Y,B_2)$, 则根据 $L^{p_1}(Y,B_2) \hookrightarrow L^{p_1,\infty}(Y,B_2)$ 知 $\boldsymbol{T}$ 同样以范数 A_1 将 $L^{p_1}(X,B_1)$ 映入 $L^{p_1,\infty}(Y,B_2)$, 于是由前述结论与 $1 < \frac{1+p}{2} < p <$

p_1 知

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{T}\|_{L^{\frac{1+p}{2}}(X,B_1)\to L^{\frac{1+p}{2}}(Y,B_2)} &\le 2\left(\frac{1+p}{2}\right)^{\frac{2}{1+p}}\left(\frac{2}{p-1}+\frac{2}{p_1-(p+1)}\right)^{\frac{2}{p+1}} A_0^{\frac{\frac{2}{1+p}-\frac{1}{p_1}}{1-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{1-\frac{2}{1+p}}{1-\frac{1}{p_1}}} \\
&= 2\left(\frac{p+1}{p-1}+\frac{p+1}{p_1-(p+1)}\right)^{\frac{2}{1+p}} A_0^{\frac{\frac{2}{1+p}-\frac{1}{p_1}}{1-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{1-\frac{2}{1+p}}{1-\frac{1}{p_1}}}.
\end{aligned}
$$

再由一般 Banach 值 Lebesgue 空间的 Riesz-Thorin 插值定理4.17与 $\frac{1+p}{2} < p < p_1$ 知

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{T}\|_{L^p(X,B_1)\to L^p(Y,B_2)} &\le c_\theta\left(2\left(\frac{p+1}{p-1}+\frac{p+1}{p_1-(p+1)}\right)^{\frac{2}{1+p}} A_0^{\frac{\frac{2}{1+p}-\frac{1}{p_1}}{1-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{1-\frac{2}{1+p}}{1-\frac{1}{p_1}}}\right)^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{2}{1+p}-\frac{1}{p}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p_1}}} \\
&= c_\theta\left(2\left(\frac{\frac{p+1}{2}}{\frac{p+1}{2}-1}+\frac{\frac{p+1}{2}}{p_1-\frac{p+1}{2}}\right)^{\frac{2}{p+1}}\right)^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p_1}}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{1-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{(1-\frac{2}{p+1})(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})}{(1-\frac{1}{p_1})(\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p_1})}+\frac{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p_1}}}.
\end{aligned}
\tag{4.201}
$$

因为

$$
\frac{(1-\frac{2}{p+1})(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})}{(1-\frac{1}{p_1})(\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p_1})}+\frac{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p_1}}=\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p_1}}
\tag{4.202}
$$

且

$$
\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p_1}} \le \frac{p+1}{2p}
\tag{4.203}
$$

又因为 $\frac{p+1}{2} < \frac{p_1+1}{2}$, 故 $p_1-\frac{p+1}{2} > \frac{p+1}{2}-1$, 因而

$$
\frac{\frac{p+1}{2}}{p_1-\frac{p+1}{2}} < \frac{\frac{p+1}{2}}{\frac{p+1}{2}-1}
\tag{4.204}
$$

将(4.202)-(4.204)式代入(4.201)式可得

$$
\|\boldsymbol{T}\|_{L^p(X,B_1)\to L^p(Y,B_2)} \le c_\theta 2^{1+\frac{1}{p}}\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{1-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p_1}}}
$$

最后由 $(p+1)^{\frac{1}{p}} < 2(p>1)$ 并记 $C_\theta = 8c_\theta$ 可得

$$
\|\boldsymbol{T}\|_{L^p(X,B_1)\to L^p(Y,B_2)} \le C_\theta (p-1)^{-\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{1-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p_1}}}
$$

此即欲证. □

4.6 向量值奇异积分

下面讨论向量值奇异积分的相关结果, 其中向量值奇异积分意为作用在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 输出值在 Banach 空间中的奇异积分算子.

4.6.1 Banach 值奇异积分算子

设 B_1, B_2 是 Banach 空间, 记 $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ 为 $B_1 \to B_2$ 的全体有界线性算子构成的空间. 现考虑在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 中取值, 输出到 $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ 的积分核 $\boldsymbol{K}$. 也就是说, 对任意 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\boldsymbol{K}(x)$ 都是 $B_1 \to B_2$ 的有界线性算子, 且其范数为 $\|\boldsymbol{K}(x)\|_{B_1\to B_2} < \infty$. 于是对任意 $v \in B_1$ 与任意 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 均有

$$
\|\boldsymbol{K}(x)(v)\|_{B_2} \le \|\boldsymbol{K}(x)\|_{B_1\to B_2}\|v\|_{B_1}.
$$

现设存在常数 $A<\infty$ 使得 $\boldsymbol{K}(x)$ 满足尺寸条件:

$$\|\boldsymbol{K}(x)\|_{B_1\to B_2}\le A|x|^{-n} \tag{4.205}$$

与正则性条件:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\int_{|x|\ge 2|y|}\|\boldsymbol{K}(x-y)-\boldsymbol{K}(x)\|_{B_1\to B_2}dx\le A<\infty. \tag{4.206}$$

另外, 设存在序列 $\varepsilon_k\downarrow 0(k\to\infty)$ 与 $\boldsymbol{K}_0\in\mathcal{L}(B_1,B_2)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\int_{\varepsilon_k\le|y|\le 1}\boldsymbol{K}(y)dy-\boldsymbol{K}_0\right\|_{B_1\to B_2}=0. \tag{4.207}$$

在上述诸假设下, 现定义作用在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes B_1$ 上的算子 $\boldsymbol{T}$ 为: 对任意 $f_i\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), u_i\in V_1$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\Big(\sum_{i=1}^m f_iu_i\Big)(x)&=\lim_{k\to\infty}\int_{\varepsilon_k\le|y|}\boldsymbol{K}(y)\Big(\sum_{i=1}^m f_i(x-y)u_i\Big)dy\\&=\sum_{i=1}^m\int_{|y|\le 1}(f_i(x-y)-f_i(x))\boldsymbol{K}(y)(u_i)dy+\sum_{i=1}^m f_i(x)\boldsymbol{K}_0(u_i)+\int_{|y|>1}\sum_{i=1}^m f_i(x-y)\boldsymbol{K}(y)(u_i)dy.\end{aligned} \tag{4.208}$$

其中对每个 $i\in\{1,\cdots,m\}$ 均有

$$\int_{|y|\le 1}|f_i(x-y)-f_i(x)|\|\boldsymbol{K}(y)(u_i)\|_{B_2}dy\le\|\nabla f_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_i\|_{B_1}\int_{|y|\le 1}|y|\|\boldsymbol{K}(y)\|_{B_1\to B_2}dy$$

根据尺寸条件(4.205)知上述积分收敛, 因此函数

$$(f_i(x-y)-f_i(x))\boldsymbol{K}(y)(u_i)$$

是 B_2 上的 Bochner 可积函数, 故

$$\int_{|y|\le 1}(f_i(x-y)-f_i(x))\boldsymbol{K}(y)(u_i)dy$$

在 B_2 中良定义. 另外, 因为 $m<\infty$, 故存在 $M>0$ 使得 $\operatorname{supp} f_i\subset B(0,M)(i=1,\cdots,m)$, 于是积分

$$\int_{|y|>1}\sum_{i=1}^m f_i(x-y)\boldsymbol{K}(y)(u_i)dy$$

实际上支在 $1\le|y|\le|x|+M$ 上, 故根据尺寸条件(4.205)知该积分同样在 B_2 中良定义.

下面介绍类似于一般奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.9的结论:

定理 4.20 (Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性的延拓) 设 B_1,B_2 是 Banach 空间, 存在 $A>0$ 与 $\boldsymbol{K}_0\in\mathcal{L}(B_1,B_2)$ 使得 $\boldsymbol{K}(x)$ 满足条件(4.205)-(4.207). $\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{K}$ 依照(4.208)式诱导的 Banach 值奇异积分算子. 若存在 $1<r\le\infty$ 使得 $\boldsymbol{T}$ 是以范数 $B_\star$ 将 $L^r(\mathbb{R}^n,B_1)$ 映入 $L^r(\mathbb{R}^n,B_2)$ 的有界线性算子, 则对任意 $1\le p<\infty$ 而言, $\boldsymbol{T}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n,B_1)$ 上均有良定义的延拓. 另外, 存在仅关于维数 n 的常数 C_n,C_n' 使得对任意 $F\in L^1(\mathbb{R}^n,B_1)$ 均有

$$\|\boldsymbol{T}(F)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n,B_2)}\le C_n'(A+B_\star)\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}, \tag{4.209}$$

且对任意 $1<p<\infty$ 与 $F\in L^p(\mathbb{R}^n,B_1)$ 均有

$$\|\boldsymbol{T}(F)\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B_2)}\le C_n\max(p,(p-1)^{-1})(A+B_\star)\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B_1)}. \tag{4.210}$$

♡

证明 尽管 $\boldsymbol{T}$ 在整个 $L^1(\mathbb{R}^n,B_1)\cap L^r(\mathbb{R}^n,B_1)$ 上均有定义, 简便起见我们还是选择研究 $\boldsymbol{T}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n,B_1)\cap L^r(\mathbb{R}^n,B_1)$ 的某稠密子空间上的限制. 记

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\otimes B_1:=\left\{\sum_{i=1}^m\chi_{R_i}u_i: R_i\text{是 }\mathbb{R}^n\text{ 中的不交二进方体}, u_i\in B_1, 1\le i\le m, m\in\mathbb{N}\right\}$$

事实上, $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\otimes B_1$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n,B_1)$ 中稠密 (进而在 $L^1(\mathbb{R}^n,B_1)\cap L^r(\mathbb{R}^n,B_1)$ 中稠密), 为此根据 $L^p(X,B)$ 的光滑函数逼近4.10(c) 知只需用 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\otimes B_1$ 中的元素在 $L^1(\mathbb{R}^n,B_1)$ 的意义下逼近 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes B_1$ 中的元素即可, 而这由 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的元素总能被不交二进方体示性函数的有限线性组合在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的意义下逼近这一事实即可推知. 下面

对 r 的情况进行分类讨论.

第一种情况: $r=\infty$. 此时取定 $F=\sum_{i=1}^{m}\chi_{R_i}u_i\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\otimes B_1$, 因为 R_i 两两不交, 故对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有 $\|F(x)\|_{B_1}=\sum_{i=1}^{m}\chi_{R_i}(x)\|u_i\|_{B_1}$, 显见 $\|F(x)\|_{B_1}$ 依旧是不交二进方体示性函数的有限线性组合. 现在对 $\|F\|_{B_1}$ 应用高度为 $\gamma\alpha$ 的 Calderón-Zygmund 分解, 其中 $\gamma=2^{-n-1}B_\star^{-1}$ 与一般奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.9证明中 γ 的取法相同. 因为 $\|F\|_{B_1}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 根据 Calderón-Zygmund 分解定理4.8(vi) 知存在有限闭二进方体列 $\{Q_j\}_j$ 使得 $\sum_j|Q_j|\le(\gamma\alpha)^{-1}\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}$. 依此定义分解的好函数

$$G(x)=\begin{cases}F(x), & x\notin\bigcup\limits_j Q_j\\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}F(x)dx, & x\in Q_j\end{cases}$$

与坏函数 $B(x)=F(x)-G(x)$. 显见 $B(x)=\sum_j B_j(x)$, 其中每个 B_j 均支在 Q_j 上, 且 $\int_{Q_j}B_j(x)dx=0$. 下面说明

$$\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}\le\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)},\tag{4.211}$$

$$\|G\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,B_1)}\le 2^n\gamma\alpha,\tag{4.212}$$

$$\|B_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}\le 2^{n+1}\gamma\alpha|Q_j|.\tag{4.213}$$

对于(4.211)式, 知

$$\begin{aligned}\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}&=\int_{\mathbb{R}^n\setminus\bigcup\limits_j Q_j}\|F(x)\|_{B_1}dx+\sum_j\int_{Q_j}\left\|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}F(y)dy\right\|_{B_1}dx\\&=\int_{\mathbb{R}^n\setminus\bigcup\limits_j Q_j}\|F(x)\|_{B_1}dx+\sum_j\left\|\int_{Q_j}F(y)dy\right\|_{B_1}\\&\le\int_{\mathbb{R}^n\setminus\bigcup\limits_j Q_j}\|F(x)\|_{B_1}dx+\sum_j\int_{Q_j}\|F(y)\|_{B_1}dy\\&=\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}.\end{aligned}$$

对于(4.212)式, 回忆 Calderón-Zygmund 分解中二进方体的选取规则, 知每个选出的 Q_j 均满足

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\|F(x)\|_{B_1}dx>\gamma\alpha\tag{4.214}$$

且总对应存在某个未被选取的二进方体 Q_j' 满足 $Q_j\subset Q_j'$, $l(Q_j')=2l(Q_j)$, 另外根据选取规则知

$$\frac{1}{|Q_j'|}\int_{Q_j'}\|F(x)\|_{B_1}dx\le\gamma\alpha$$

于是

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\|F(x)\|_{B_1}dx\le\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j'}\|F(x)\|_{B_1}dx=\frac{2^n}{|Q_j'|}\int_{Q_j'}\|F(x)\|_{B_1}dx\le 2^n\gamma\alpha.$$

现知在每个 Q_j 上均有

$$\|G(x)\|_{B_1}=\left\|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}F(x)dx\right\|_{B_1}\le\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\|F(x)\|_{B_1}dx\le 2^n\gamma\alpha$$

而对任意 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_j Q_j$ 与任意 $k=0,1,2,\cdots$, 总存在唯一未被选取的第 k 代二进方体 $Q_x^{(k)}$ 包含 x. 现对每个 $k\ge0$ 均有

$$\left\|\frac{1}{Q_x^{(k)}}\int_{Q_x^{(k)}}F(y)dy\right\|_{B_1}\le\frac{1}{|Q_x^{(k)}|}\int_{Q_x^{(k)}}\|F(y)\|_{B_1}dy\le\gamma\alpha.\tag{4.215}$$

另外知 $\bigcap_{k=0}^{\infty} Q_x^{(k)} = \{x\}$, 于是由 Lebesgue 微分定理3.5知对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j Q_j$ 有

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{m} \chi_{R_i}(x) u_i = \sum_{i=1}^{m} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{|Q_x^{(k)}|} \int_{Q_x^{(k)}} \chi_{R_i}(y) dy \right) u_i \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_x^{(k)}|} \int_{Q_x^{(k)}} \sum_{i=1}^{m} \chi_{R_i}(y) u_i dy = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_x^{(k)}|} \int_{Q_x^{(k)}} F(y) dy. \end{aligned}$$

又根据(4.215)式知 $\|F(x)\|_{B_1} \le \gamma\alpha$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j Q_j$, 因此 $\|G(x)\| \le \gamma\alpha$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j Q_j$. 至此即得(4.212)式.

对于(4.213)式, 知

$$B_j(x) = \left(F(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} F(y) dy \right) \chi_{Q_j}(x)$$

因此

$$\int_{Q_j} \|B_j(x)\|_{B_1} dx \le \int_{Q_j} \|F(x)\|_{B_1} dx + |Q_j| \left\| \int_{Q_j} F(x) dx \right\|_{B_1} \le 2 \int_{Q_j} \|F(x)\|_{B_1} dx \le 2^{n+1} \gamma\alpha |Q_j|.$$

因为 $\|\boldsymbol{T}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n, B_1) \to L^\infty(\mathbb{R}^n, B_2)} = B_\star$, 故

$$\|\boldsymbol{T}(G)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n, B_2)} \le B_\star \|G\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n, B_1)} \le 2^n \gamma\alpha B_\star = \frac{\alpha}{2}.$$

因此 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(G)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\} = \varnothing$, 故

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(F)(x)\|_{B_2} > \alpha\}| \le |\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(B)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\}|.$$

现取 $Q_j^* = 2\sqrt{n} Q_j$, 知

$$\begin{aligned} &|\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(B)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\}| \\ \le& |\bigcup_j Q_j^*| + |\{x \notin \bigcup_j Q_j^* : \|\boldsymbol{T}(B)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\}| \\ \le& (2\sqrt{n})^n \sum_j |Q_j| + \frac{2}{\alpha} \int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c} \|\boldsymbol{T}(B)(x)\|_{B_2} dx \\ \overset{(A)}{\le}& \frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma} \frac{\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n, B_1)}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \sum_j \int_{(Q_j^*)^c} \|\boldsymbol{T}(B_j)(x)\|_{B_2} dx, \end{aligned}$$

其中 (A) 右端第一项基于(4.214)式, 第二项基于 $B = \sum_j B_j$. 为了得到 $\boldsymbol{T}$ 的弱 (1, 1) 型估计, 现在只需估计上式最后一项. 记 y_j 是方体 Q_j 的中心, 因为 $\int_{Q_j} B_j(x) dx = 0$, 故

$$\begin{aligned} \sum_j \int_{(Q_j^*)^c} \|\boldsymbol{T}(B_j)(x)\|_{B_2} dx &= \sum_j \int_{(Q_j^*)^c} \left\| \int_{Q_j} (\boldsymbol{K}(x-y) - \boldsymbol{K}(x-y_j))(B_j(y)) dy \right\|_{B_2} dx \\ &\le \sum_j \int_{(Q_j^*)^c} \int_{Q_j} \|(\boldsymbol{K}(x-y) - \boldsymbol{K}(x-y_j))(B_j(y))\|_{B_2} dy dx \\ &\le \sum_j \int_{(Q_j^*)^c} \int_{Q_j} \|\boldsymbol{K}(x-y) - \boldsymbol{K}(x-y_j)\|_{B_1 \to B_2} \|B_j(y)\|_{B_2} dy dx \\ &= \sum_j \int_{Q_j} \|B_j(y)\|_{B_2} \int_{(Q_j^*)^c} \|\boldsymbol{K}(x-y) - \boldsymbol{K}(x-y_j)\|_{B_1 \to B_2} dx dy \\ &\overset{(B)}{\le} \sum_j \int_{Q_j} \|B_j(y)\|_{B_2} \int_{|x-y_j| \ge 2|y-y_j|} \|\boldsymbol{K}(x-y) - \boldsymbol{K}(x-y_j)\|_{B_1 \to B_2} dx dy \\ &\overset{(C)}{\le} A \sum_j \|B_j\|_{L^1(Q_j, B_1)} \overset{(D)}{\le} 2^{n+1} A \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n, B_1)}, \end{aligned}$$

其中 (B) 根据 Q_j^* 的构造而来; (C) 是正则性条件(4.206); (D) 是(4.213)式与 $\sum_j |Q_j| \le (\gamma\alpha)^{-1}\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}$. 因此

$$
\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(F)(x)\|_{B_2} > \alpha\}| &\le \frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma}\frac{\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}2^{n+1}A\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)} \\
&= ((2\sqrt{n})^n 2^{n+2}B_\star + 2^{n+1}A)\frac{\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}}{\alpha} \\
&\le C_n'(A+B_\star)\frac{\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}}{\alpha},
\end{aligned}
$$

其中 $C_n' = (2\sqrt{n})^n 2^{n+1} + 2^{n+2}$. 因此 $\boldsymbol{T}$ 具有以至多为 $C_n'(A+B_\star)$ 的范数将 $L^1(\mathbb{R}^n, B_1)$ 映入 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, B_2)$ 的延拓. 现在根据一般 Banach 值 Lebesgue 空间的 Marcinkiewicz 插值定理4.19知对任意 $1 < p < r = \infty$ 而言均有(4.210)式成立.

第二种情况: $1 < r < \infty$. 取定 $F = \sum_{i=1}^m \chi_{R_i} u_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \otimes B_1$, 根据 R_i 的不交性知对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 均有 $\|F(x)\|_{B_1} = \sum_{i=1}^m \chi_{R_i}(x)\|u_i\|_{B_1}$, 因此函数 $x \mapsto \|F(x)\|_{B_1}$ 依旧是不交二进方体示性函数的有限线性组合. 下面对 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $x \mapsto \|F(x)\|_{B_1}$ 应用 Calderón-Zygmund 分解, 进而给出形如(4.209)式的弱型估计. 现记 $F = G + B$, 其中 G, B 的构造方法和性质 ((4.211)-(4.213)式) 与 $r = \infty$ 的情况完全相同. 但需要注意的是, 此时集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(G)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\}$ 不再是空集, 其测度满足:

$$
\begin{aligned}
&|\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(G)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\}| \\
\le& \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(G)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\}} \left(\frac{2\|\boldsymbol{T}(G)(x)\|_{B_2}}{\alpha}\right)^r dx \\
\le& \frac{2^r}{\alpha^r}\int_{\mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{T}(G)(x)\|_{B_2}^r dx \le \frac{2^r}{\alpha^r}\int_{\mathbb{R}^n} B_\star^r \|G(x)\|_{B_1}^r dx \\
=& \left(\frac{2B_\star}{\alpha}\right)^r \|G\|_{L^r(\mathbb{R}^n,B_1)}^r \overset{\text{(E)}}{\le} \frac{2B_\star}{\alpha}\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}.
\end{aligned}
$$

其中 (E) 是因为由(4.211),(4.212)式与 L^p 范数的对数凸性1.13知

$$
\|\|G\|_{B_1}\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \|\|G\|_{B_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{r}} \|\|G\|_{B_1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{r}} \le 2^{\frac{n}{r'}}(\gamma\alpha)^{\frac{1}{r'}}\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}^{\frac{1}{r}},
$$

结合 $\gamma = 2^{-n-1}B_\star^{-1}$ 即得 (E) 右式. 现在逐字逐句地重复 $r = \infty$ 时对坏函数的估计可得

$$
|\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(B)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\}| \le ((2\sqrt{n})^n 2^{n+2}B_\star + 2^{n+1}A)\frac{\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}}{\alpha}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(F)(x)\|_{B_2} > \alpha\}| &\le |\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(G)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{T}(B)(x)\|_{B_2} > \frac{\alpha}{2}\}| \\
&\le (\frac{2B_\star}{\alpha} + (2\sqrt{n})^n 2^{n+2}B_\star + 2^{n+1}A)\frac{\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}}{\alpha} \\
&\le C_n'(A+B_\star)\frac{\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)}}{\alpha}
\end{aligned}
$$

其中 $C_n' = 2 + (2\sqrt{n})^n 2^{n+1} + 2^{n+1}$. 至此即得 $\|\boldsymbol{T}\|_{L^1(\mathbb{R}^n,B_1)\to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n,B_2)} \le C_n'(A+B_\star)$.

现在当 $1 < p < r$ 时, 因为 $\boldsymbol{T}$ 以至多为 $C_n'(A+B_\star)$ 的范数将 $L^1(\mathbb{R}^n, B_1)$ 映入 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, B_2)$, 以范数 A 将 $L^r(\mathbb{R}^n, B_1)$ 映入 $L^r(\mathbb{R}^n, B_2)$, 故由一般 Banach 值 Lebesgue 空间的 Marcinkiewicz 插值定理4.19与 $(p-1)^{-\frac{1}{p}} \le (p-1)^{-1} (1 < p < 2)$ 知

$$
\|\boldsymbol{T}(F)\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B_2)} \le C_n(p-1)^{-1}(A+B_\star)\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B_1)}, \tag{4.216}
$$

其中 $1 < p < \min(r, 2)$, C_n 是与 r, p, B_1, B_2 无关的常数.

对 $p > r$ 的情况, 我们用对偶性来证明. 因为 $\boldsymbol{K}(x)$ 是 $B_1 \to B_2$ 的算子, 故其伴随 $\boldsymbol{K}^*(x)$ 是 $B_2^* \to B_1^*$ 的算子. 显见 $\|\boldsymbol{K}^*(x)\|_{B_2^*\to B_1^*} = \|\boldsymbol{K}(x)\|_{B_1\to B_2}$, 因此 $\boldsymbol{K}^*$ 同样满足尺寸条件(4.205), 同理可知 $\boldsymbol{K}^*$ 也满足正则性条件(4.206). 对于条件(4.207), 因为对任意 $\varepsilon_k \downarrow 0 (k\to\infty)$ 均有:

$$
\left\|\int_{\varepsilon_k \le |y| \le 1} \boldsymbol{K}^*(y)dy - \boldsymbol{K}_0^*\right\|_{B_2^*\to B_1^*} = \left\|\int_{\varepsilon_k \le |y| \le 1} \boldsymbol{K}(y)dy - \boldsymbol{K}_0\right\|_{B_1\to B_2} \to 0,
$$

故 $\boldsymbol{K}^*$ 也满足条件(4.207).

现设 $\boldsymbol{T}'$ 是积分核为 $\boldsymbol{K}^*(-x)$ 的 Banach 值算子, 显见 $\boldsymbol{T}'$ 在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes B_1$ 上良定义. 现对 $F(y)=\sum_{i=1}^m f_i(y)w_i^*\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes B_2^*, G(z)=\sum_{j=1}^l g_j(z)v_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes B_1$, 往证下述对偶关系:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\langle \boldsymbol{T}'(F)(x),G(x)\rangle dx=\int_{\mathbb{R}^n}\langle F(z),\boldsymbol{T}(G)(z)\rangle dz. \tag{4.217}$$

事实上, 对每个指标 $i\in\{1,\cdots,m\}, j\in\{1,\cdots,l\}$ 均有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle \lim_{k\to\infty}\int_{|y|\geq\varepsilon_k}\boldsymbol{K}^*(-y)(f_i(x-y)w_i^*)dy, g_j(x)v_j\right\rangle dx\\
=&\lim_{k\to\infty}\int_{|y|\geq\varepsilon_k}\int_{\mathbb{R}^n}\langle \boldsymbol{K}^*(-y)(f_i(x-y)w_i^*), g_j(x)v_j\rangle dxdy\\
=&\lim_{k\to\infty}\int_{|y|\geq\varepsilon_k}\int_{\mathbb{R}^n}\langle \boldsymbol{K}^*(-y)(f_i(z)w_i^*), g_j(z+y)v_j\rangle dzdy\\
=&\lim_{k\to\infty}\int_{|y|\geq\varepsilon_k}\int_{\mathbb{R}^n}\langle f_i(z)w_i^*, \boldsymbol{K}(-y)(g_j(z+y)v_j)\rangle dzdy\\
=&\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle f_i(z)w_i^*, \lim_{k\to\infty}\int_{|y|\geq\varepsilon_k}\boldsymbol{K}(y)(g_j(z-y)v_j)dy\right\rangle dz,
\end{aligned}$$

其中要说明积分换序合理, 就是要说明

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle \lim_{k\to\infty}\int_{|y|\geq\varepsilon_k}\boldsymbol{K}^*(-y)(f_i(x-y)w_i^*)dy, g_j(x)v_j\right\rangle dx<\infty.$$

现在已知

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}'(f_iw_i^*)(x)=&\lim_{k\to\infty}\int_{\varepsilon_k\leq|y|}\boldsymbol{K}^*(-y)f_i(x-y)w_i^*dy\\
=&\int_{|y|\leq1}(f_i(x-y)-f_i(x))\boldsymbol{K}^*(-y)(w_i^*)dy+f_i(x)\boldsymbol{K}_0^*(w_i^*)+\int_{|y|>1}f_i(x-y)\boldsymbol{K}^*(-y)(w_i^*)dy,
\end{aligned}$$

因此只需说明

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle\int_{|y|\leq1}(f_i(x-y)-f_i(x))\boldsymbol{K}^*(-y)(w_i^*)dy, g_j(x)v_j\right\rangle dx\right|<\infty, \tag{4.218}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\langle f_i(x)\boldsymbol{K}_0^*(w_i^*), g_j(x)v_j\rangle dx\right|<\infty, \tag{4.219}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle\int_{|y|>1}f_i(x-y)\boldsymbol{K}^*(-y)(w_i^*)dy, g_j(x)v_j\right\rangle dx\right|<\infty. \tag{4.220}$$

对于(4.218)式, 结合(4.182)式与尺寸条件(4.205)知

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle\int_{|y|\leq1}(f_i(x-y)-f_i(x))\boldsymbol{K}^*(-y)(w_i^*)dy, g_j(x)v_j\right\rangle dx\right|\\
=&\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y|\leq1}\langle(f_i(x-y)-f_i(x))\boldsymbol{K}^*(-y)(w_i^*), g_j(x)v_j\rangle dydx\right|\\
=&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y|\leq1}|(f_i(x-y)-f_i(x))g_j(x)\langle w_i^*,\boldsymbol{K}(-y)(v_j)\rangle|dydx\\
\leq&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y|\leq1}\|\nabla f_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\cdot|y|\cdot|g_j(x)|\cdot\|w_i^*\|_{B_2^*}\cdot\|\boldsymbol{K}(-y)(v_j)\|_{B_1}dydx\\
\leq&\|\nabla f_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|w_i^*\|_{B_2^*}\int_{\mathbb{R}^n}|g_j(x)|\int_{|y|\leq1}|y|\cdot\|\boldsymbol{K}(-y)\|_{B_1\to B_2}\cdot\|v_j\|_{B_1}dydx\\
\leq&\|\nabla f_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|w_i^*\|_{B_2^*}\|v_j\|_{B_1}\int_{\mathbb{R}^n}|g_j(x)|\int_{|y|\leq1}|y|\cdot A|y|^{-n}dydx<\infty.
\end{aligned}$$

对于(4.219)式, 由伴随算子的定义与 $\boldsymbol{K}_0$ 的有限性即证. 最后对于(4.220)式, 因为 $f_i\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 故关于 y 的积分实际上是有限区域上的积分, 式子即证. 至此即得(4.217)式.

下面说明 $\boldsymbol{T}'$ 是 $L^{r'}(\mathbb{R}^n,B_2^*)\to L^{r'}(\mathbb{R}^n,B_1^*)$ 的有界线性算子. 事实上, 取定 $F\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes B_2^*$, 根据(4.217)式知

对任意 $G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes B_1$ 均有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \langle \boldsymbol{T}'(F)(x), G(x)\rangle dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \langle F(x), \boldsymbol{T}(G)(x)\rangle dx\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_{B_2^*} \|\boldsymbol{T}(G)(x)\|_{B_2} dx \\ &\le \|F\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n, B_2^*)} \|\boldsymbol{T}(G)\|_{L^r(\mathbb{R}^n, B_2)} \\ &\le \|F\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n, B_2^*)} B_\star \|G\|_{L^r(\mathbb{R}^n, B_1)},\end{aligned}$$

根据 $L^p(X, B)$ 的共轭空间性质4.11(b) 可得

$$\|\boldsymbol{T}'(F)\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n, B_1^*)} = \sup_{\substack{\|G\|_{L^r(\mathbb{R}^n, B_1)} \le 1 \\ G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes B_1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \langle \boldsymbol{T}'(F)(x), G(x)\rangle dx\right| \le B_\star \|F\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n, B_2^*)}.$$

目前为止, 我们已经知道了满足条件(4.205)-(4.207)(将 $\boldsymbol{K}_0$ 对应换为 $\boldsymbol{K}_0^*$) 的积分核 $\boldsymbol{K}^*(-x)$ 诱导的算子 $\boldsymbol{T}'$ 具有 $L^{r'}(\mathbb{R}^n, B_2^*) \to L^{r'}(\mathbb{R}^n, B_1^*)$ 的有界延拓. 因此逐字逐句地重复 $1 < p < r$ 时应用 Calderón-Zygmund 分解的过程可知 $\boldsymbol{T}'$ 具有 $L^1(\mathbb{R}^n, B_2^*) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, B_1^*)$ 的延拓, 且其满足

$$\|\boldsymbol{T}'(F)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, B_1^*)} \le C_n'(A + B_\star)\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n, B_2^*)}.$$

因为 $p > r > 1 \Rightarrow 1 < p' < r'$, 故根据一般 Banach 值 Lebesgue 空间的 Marcinkiewicz 插值定理4.19与 $(p'-1)^{\frac{1}{p'}} \le p$ 知 $\boldsymbol{T}'$ 具有 $L^{p'}(\mathbb{R}^n, B_2^*) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n, B_1^*)$ 的延拓, 且

$$\|\boldsymbol{T}'(F)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, B_1^*)} \le C_n p(A + B_\star)\|F\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, B_2^*)}. \tag{4.221}$$

最后将算子 $\boldsymbol{T}'$ 与 $\boldsymbol{T}$ 联系起来. 取 $F = \sum_{i=1}^m \varphi_i u_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes B_1$, 下面说明 $\|\boldsymbol{T}(F)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, B_2)} < \infty$. 因为 $m < \infty$, 故存在 $R > 0$ 使得 $\operatorname{supp}\varphi_i \subset B(0, R)(i = 1, \cdots, m)$, 因此 $|x| \ge 2R$ 时根据尺寸条件(4.205)知

$$\left\|\int_{|y| \le R} \boldsymbol{K}(x-y)\left(\sum_{i=1}^m \varphi_i u_i\right) dy\right\|_{B_2} \le A\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-n} \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u_i\|_{B_1}, \tag{4.222}$$

(4.222)右式在 $|x| \ge 2R$ 上显然是 $p(p > 1)$ 阶可积的. 另由(4.208)式知(4.222)左式是有界的, 因此其在 $|x| \le 2R$ 上 p 阶可积. 现在对取定的 $r < p < \infty$, 由 $L^p(X, B)$ 的共轭空间性质4.11(a) 知

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{T}(F)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, B_2)} &\le \sup_{\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, B_2^*)} \le 1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \langle G(x), \boldsymbol{T}(F)(x)\rangle dx\right| \\ &= \sup_{\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, B_2^*)} \le 1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \langle \boldsymbol{T}'(G)(x), F(x)\rangle dx\right| \\ &\le \sup_{\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, B_2^*)} \le 1} \|\boldsymbol{T}'(G)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, B_1^*)} \|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n, B_1)} \\ &\le C_n p(A + B_\star)\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n, B_1)}.\end{aligned}$$

结合(4.216)式即知 $r < \infty, p \in (1, \min(r, 2)) \cup (r, \infty)$ 时(4.210)式成立. 对于 $p \in [\min(r, 2), r]$ 的情形, 利用一般 Banach 值 Lebesgue 空间的 Riesz-Thorin 插值定理4.17即得结论. □

4.6.2 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理的应用

下面研究 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.20的几个重要推论.

推论 4.10 (Calderón-Zygmund 定理在 $L^p(\mathbb{R}^n, l^r)$ 上的拓展)

设 $A, B > 0$, W_j 是 $\mathbb{R}^n$ 上的缓增分布列, 且它们的 Fourier 变换一致有界 (即 $|\widehat{W_j}| < B(j \in \mathbb{Z})$). 设对每个 j 而言, 在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上存在函数 K_j 使得 W_j 与之满足(4.97)式, 且

$$|K_j(x)| \le A|x|^{-n}, \quad x \ne 0, \tag{4.223}$$

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0}\int_{1\geq|x|\geq\varepsilon_k} K_j(x)dx = L_j, \tag{4.224}$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\int_{|x|\geq 2|y|}\sup_{j\in\mathbb{Z}}|K_j(x-y)-K_j(x)|dx \leq A. \tag{4.225}$$

则存在常数 $C_n, C_n' > 0$ 使得对任意 $1 < p, r < \infty$ 均有

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|W_j * f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C_n'\max(r,(r-1)^{-1})(A+B)\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|W_j * f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n c(p,r)(A+B)\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $c(p,r) = \max(p,(p-1)^{-1})\max(r,(r-1)^{-1})$.

证明 设 $T_j : \varphi \mapsto W_j * \varphi$, 由 Young 不等式与 Plancherel 定理知

$$\|T_j(\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{W_j}\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\widehat{W_j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq B\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

因此 $\|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)} \leq B$, 于是由 Calderón-Zygmund 定理4.12知 T_j 是弱 $(1,1)$ 型算子, 且 (关于 j 一致地) 以至多为 $\max(r,(r-1)^{-1})(A+B)$ 某常数倍的范数将 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 映入 $L^r(\mathbb{R}^n)(1<r<\infty)$. 现取 $N\in\mathbb{N}$, 令

$$B_1 = B_2 = l_N^r(\mathbb{R}^n) := \{\{f_j\}_{|j|\leq N} : \|\{f_j\}_{|j|\leq N}\|_{l^r(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

定义

$$\boldsymbol{T}(\{f_j\}_{|j|\leq N}) = \{W_j * f_j\}_{|j|\leq N}, \quad \{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in L^r(\mathbb{R}^n, l_N^r(\mathbb{R}^n)).$$

则

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{T}(\{f_j\}_{|j|\leq N})\|_{L^r(\mathbb{R}^n,l_N^r)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=-N}^{N}|T_j(f_j)(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{j=-N}^{N}\int_{\mathbb{R}^n}|T_j(f_j)(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\sum_{j=-N}^{N}\|T_j(f_j)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \max(r,(r-1)^{-1})(A+B)\left(\sum_{j=-N}^{N}\|f_j\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \max(r,(r-1)^{-1})(A+B)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=-N}^{N}|f_j(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \max(r,(r-1)^{-1})(A+B)\|\{f_j\}_{|j|\leq N}\|_{L^r(\mathbb{R}^n,l_N^r(\mathbb{R}^n))}.
\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{T}$ 以至多为 $\max(r,(r-1)^{-1})(A+B)$ 的范数将 $L^r(\mathbb{R}^n,l_N^r(\mathbb{R}^n))$ 映入 $L^r(\mathbb{R}^n,l_N^r(\mathbb{R}^n))$. 知 $\boldsymbol{T}$ 的积分核 $\boldsymbol{K}\in\mathcal{L}(l_N^r(\mathbb{R}^n),l_N^r(\mathbb{R}^n))$ 为

$$\boldsymbol{K}(x)(\{t_j\}_{|j|\leq N}) = \{K_j(x)t_j\}_{|j|\leq N}, \quad \{t_j\}_{|j|\leq N}\in l_N^r(\mathbb{R}^n).$$

因为对任意 $\{t_j\}_{|j|\leq N}\in l_N^r(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{K}(x-y)-\boldsymbol{K}(x))(\{t_j\}_{|j|\leq N})\|_{l_N^r(\mathbb{R}^n)} &= \|\{(K_j(x-y)-K_j(x))t_j\}_{|j|\leq N}\|_{l_N^r(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sup_{|j|\leq N}|K_j(x-y)-K_j(x)|\|\{t_j\}_{|j|\leq N}\|_{l_N^r(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

故

$$\|\boldsymbol{K}(x-y)-\boldsymbol{K}(x)\|_{l_N^r(\mathbb{R}^n)\to l_N^r(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{|j|\leq N}|K_j(x-y)-K_j(x)|,$$

因此由(4.225)式知

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\int_{|x|\geq 2|y|}\|\boldsymbol{K}(x-y)-\boldsymbol{K}(x)\|_{l_N^r(\mathbb{R}^n)\to l_N^r(\mathbb{R}^n)}dx \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\int_{|x|\geq 2|y|}\sup_{|j|\leq N}|K_j(x-y)-K_j(x)|dx \leq A < \infty$$

故 $\boldsymbol{K}$ 满足条件(4.207). 另外令 $\boldsymbol{K}_0 = \{L_j\}_{|j|\leq N}$, 由(4.223),(4.224)式知 $\boldsymbol{K}$ 同样满足尺寸条件(4.205)与正则性条件(4.206), 于是根据 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.20即得对应 Banach 空间为 $l_N^r(\mathbb{R}^n)$ 时的结论, 令

$N \to \infty$ 即得欲证. □

如果更进一步, 设 Calderón-Zygmund 定理在 $L^p(\mathbb{R}^n, l^r)$ 上的拓展4.10中提到的 $\widehat{W_i}$ 均相等, 则还有下述推论:

推论 4.11

设 $W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换是函数, 且存在常数 $B > 0$ 使得 $|\widehat{W_j}| \le B$, 另外在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上存在局部可积函数 K 使得 W_j 与之满足(4.97)式, 且

$$
\begin{aligned}
|K(x)| &\le A|x|^{-n}, \quad x \neq 0, \\
\lim_{\varepsilon_k \to 0} \int_{\varepsilon_k \le |x| \le 1} & K(x)dx = L, \\
\sup_{y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \int_{|x| \ge 2|y|} & |K(x-y) - K(x)|dx \le A.
\end{aligned} \tag{4.226}
$$

令 $T: f \mapsto W * f$, 则存在常数 $C_n, C_n' > 0$ 使得对任意 $1 < p, r < \infty$ 均有

$$
\left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |T(f_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le C_n' \max(r, (r-1)^{-1})(A+B) \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},
$$

$$
\left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |T(f_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n c(p,r)(A+B) \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
$$

其中 $c(p,r) = \max(p, (p-1)^{-1}) \max(r, (r-1)^{-1})$. 特别地, 上述不等式对 Hilbert 变换与 Riesz 变换均成立. ♡

另外, 可以从 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.20自身出发推知其向量值版本:

命题 4.13 (Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理的向量值版本)

设 $1 < p, r < \infty, B_1, B_2$ 是 Banach 空间, 依照(4.208)式定义的 $\boldsymbol{T}$ 是以范数 $B = B(r)$ 将 $L^r(\mathbb{R}^n, B_1)$ 映入 $L^r(\mathbb{R}^n, B_2)$ 的有界线性算子. 另设存在常数 $A > 0$ 与算子 $\boldsymbol{K}_0 \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\boldsymbol{K}(x)$ 都是满足条件(4.205)-(4.207)的 $B_1 \to B_2$ 的有界线性算子. 则存在正常数 C_n, C_n' 使得对任意 B_1 值函数 F_j 有:

$$
\left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\boldsymbol{T}(F_j)\|_{B_2}^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le C_n'(A+B) \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|F_j\|_{B_1}^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},
$$

$$
\left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\boldsymbol{T}(F_j)\|_{B_2}^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n(A+B)c(p) \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|F_j\|_{B_1}^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
$$

其中 $c(p) = \max(p, (p-1)^{-1})$. ♠

证明 设

$$
l^r(B_1) := \left\{ \{u_j\}_{j \in \mathbb{Z}} : u_j \in B_1, j \in \mathbb{Z}, \|\{u_j\}\|_{l^r(B_1)} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|u_j\|_{B_1}^r \right)^{\frac{1}{r}} < \infty \right\},
$$

现考虑定义在 $L^r(\mathbb{R}^n, l^r(B_1))$ 上的算子 $\boldsymbol{S}$:

$$
\boldsymbol{S}(\{F_j\}_{j \in \mathbb{Z}}) := \{\boldsymbol{T}(F_j)\}_{j \in \mathbb{Z}}.
$$

因为

$$
\|\boldsymbol{S}(\{F_j\}_{j \in \mathbb{Z}})\|_{L^r(\mathbb{R}^n, l^r(B_2))} = \|\{\boldsymbol{T}(F_j)\}_{j \in \mathbb{Z}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n, l^r(B_2))} = \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\boldsymbol{T}(F_j)\|_{B_2}^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le B \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|F_j\|_{B_1}^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}
$$

故 $\boldsymbol{S}$ 以至多为 B 的范数将 $L^r(\mathbb{R}^n, l^r(B_1))$ 映入 $L^r(\mathbb{R}^n, l^r(B_2))$. 另知 $\boldsymbol{S}$ 的积分核为 $\widetilde{K}(x) \in \mathcal{L}(l^r(B_1), l^r(B_2))$:

$$
\widetilde{K}(x)(\{u_j\}_{j \in \mathbb{Z}}) = \{\boldsymbol{K}(x)(u_j)\}_{j \in \mathbb{Z}},
$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的积分核. 下面说明对任意 $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 均有

$$
\|\widetilde{K}(x)\|_{l^r(B_1) \to l^r(B_2)} = \|\boldsymbol{K}(x)\|_{B_1 \to B_2} \tag{4.227}
$$

这是因为任取 $\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\subset B_1$ 与 $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 有

$$\|\widetilde{K}(x)(\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}})\|_{l^r(B_2)}=\|\{\boldsymbol{K}(x)(u_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(B_2)}\le\|\boldsymbol{K}(x)\|_{B_1\to B_2}\|\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(B_1)}$$

于是 $\|\widetilde{K}(x)\|_{l^r(B_1)\to l^r(B_2)}\le\|\boldsymbol{K}(x)\|_{B_1\to B_2}$. 另一方面, 对任意 $\varepsilon>0$ 选取 $u\in B_1$ 使得 $\|u\|_{B_1}=1$ 的同时有

$$\|\boldsymbol{K}(x)(u)\|_{B_2}\ge\|\boldsymbol{K}\|_{B_1\to B_2}-\varepsilon$$

现在在序列 $\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 中取 $u_1=u$, 其余项均为 0, 则 $\|\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(B_1)}=1$, 于是

$$\|\widetilde{K}(x)(\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}})\|_{l^r(B_2)}=\|\{\boldsymbol{K}(x)(u_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r(B_2)}\ge\|\boldsymbol{K}\|_{B_1\to B_2}-\varepsilon$$

由此立得(4.227)式, 进一步对 $x\ne y\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\|\widetilde{K}(x-y)-\widetilde{K}(x)\|_{l^r(B_1)\to l^r(B_2)}=\|\boldsymbol{K}(x-y)-\boldsymbol{K}(x)\|_{B_1\to B_2}.$$

另外, 定义 $\widetilde{K_0}\in\mathcal{L}(l^r(B_1),l^r(B_2))$ 为

$$\widetilde{K_0}(\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}})=\{\boldsymbol{K}_0(u_j)\}_{j\in\mathbb{Z}},\quad\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in l^r(B_1)$$

则极限

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\varepsilon_k\le|y|\le1}\widetilde{K}(y)dy=\widetilde{K_0}$$

在 $\mathcal{L}(l^r(B_1),l^r(B_2))$ 的意义下成立.

至此, 我们已经说明了 $\mathcal{L}(l^r(B_1),l^r(B_2))$ 中的算子 $\widetilde{K}(x)$ 满足条件(4.205)-(4.207), 故由 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.20知 $\widetilde{K}$ 所诱导的算子 $\boldsymbol{S}$ 满足(4.209),(4.210)式, 此即欲证. □

4.6.3 极大函数的向量值估计: Fefferman-Stein 不等式

下面我们讨论向量值不等式在某些非线性算子上的应用. 现取定 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数 Φ, 对 $t>0$ 定义 $\Phi_t(x)=t^{-n}\Phi(t^{-1}x)$. 设 Φ 满足下述正则性条件:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}\int_{|x|\ge2|y|}\sup_{t>0}|\Phi_t(x-y)-\Phi_t(x)|dx=A_\Phi<\infty.\tag{4.228}$$

现在考察 $L^1(\mathbb{R}^n)+L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 的极大算子

$$M_\Phi(f)(x)=\sup_{t>0}|(f*\Phi_t)(x)|$$

我们希望得到 M_Φ 的 L^p 估计. 首先, 当 $p=\infty$ 时利用放大不等式即得:

$$\|M_\Phi(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.\tag{4.229}$$

从前述向量值不等式的视角出发, 可设 $B_1=\mathbb{C}$, $B_2=L^\infty(\mathbb{R}^+)$, 下面尝试将 M_Φ 视作将 B_1 值函数映成 B_2 值函数[59]的线性[60]算子 $f\mapsto\{f*\Phi_\delta\}_{\delta>0}$.

更确切地说, 取定 $\delta_0>0$, 对每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 均可定义将 $B_1=\mathbb{C}$ 映入 $B_2=L^\infty((\delta_0,\infty))$ 的有界线性算子 $\boldsymbol{K}_\Phi(x)$:

$$\boldsymbol{K}_\Phi(x)(c)=\{c\Phi_\delta(x)\}_{\delta>\delta_0},\quad c\in\mathbb{C}$$

于是

$$\|\boldsymbol{K}_\Phi(x)\|_{\mathbb{C}\to L^\infty((\delta_0,\infty))}=\sup_{\delta>\delta_0}|\Phi_\delta(x)|.$$

现在(4.228)式表明积分核 $\boldsymbol{K}_\Phi$ 满足正则性条件(4.206). 若存在 $C,\varepsilon>0$ 使得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有

$$|\Phi(x)|\le C(1+|x|)^{-n-\varepsilon}\tag{4.230}$$

则存在常数 $A<\infty$ 使得

$$\sup_{\delta>\delta_0}|\Phi_\delta(x)|\le A|x|^{-n},$$

[59]这里的 $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ 是对下标 δ 说的, 也就是说 $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ 中的每个元素都是关于 $\delta>0$ 的函数, 因此 $\{f*\Phi_\delta\}_{\delta>0}$ 实际上可以写成 $(f*\Phi_\delta)(\delta)$, 为避免符号上的混乱并追求与经典视角的统一才选择将 δ 写成下标.

[60]需要提醒的是, 这里的线性指的是 $K(\alpha c_1+\beta c_2)=\alpha K(c_1)+\beta K(c_2)$, 所以不用纠结于 $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ 中有没有加法结构.

因此 $\boldsymbol{K}_\Phi$ 也满足尺寸条件(4.205). 最后, 根据估计(4.230)知极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|\le 1}\Phi_\delta(y)dy=\int_{|y|\le 1}\Phi_\delta(y)dy$$

关于 $\delta>\delta_0$ 一致成立, 故 $\boldsymbol{K}_\Phi$ 满足条件(4.207).

现在定义将 $\mathbb{R}^n$ 上的复值函数映成 B_1 值函数的线性算子 $\boldsymbol{M}_\Phi$ 为

$$\boldsymbol{M}_\Phi(f)=f*\boldsymbol{K}_\Phi=\{f*\Phi_\delta\}_{\delta>\delta_0}.$$

可见 $\boldsymbol{M}_\Phi$ 以至多为 $\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ 的范数将 $L^\infty(\mathbb{R}^n,B_1)$ 映入 $L^\infty(\mathbb{R}^n,B_2)$, 这是因为[61]

$$\|\|\boldsymbol{M}_\Phi(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,B_2)}=\|\sup_{\delta>\delta_0}|f*\Phi_\delta|\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

现在应用 $r=\infty$ 时的 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.20, 可得对任意 $1<p<\infty$ 均有

$$\|\boldsymbol{M}_\Phi(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n,B_2)}\le C_n\max(p,(p-1)^{-1})(A_\Phi+\|\Phi\|_{L^1})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\tag{4.231}$$

结合插值与(4.229)式, 可进一步将(4.231)式优化为[62]

$$\|\boldsymbol{M}_\Phi(f)\|_{L^r(\mathbb{R}^n,B_2)}\le C_n\max(1,(r-1)^{-1})(A_\Phi+\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)})\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)},\quad\forall 1<r<\infty.\tag{4.232}$$

最后, 令 $\delta_0\downarrow 0$ 并利用 Lebesgue 单调收敛定理即得 $\delta_0=0$ 时的估计[63].

现在利用(4.232)式给出次线性算子 M_Φ 的向量值估计:

推论 4.12 (极大算子的向量值不等式)

设 Φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上满足正则性条件(4.228)的可积函数, 则存在只关于维数的常数 C_n,C_n' 使得对任意 $1<p,r<\infty$ 均有下述向量值不等式成立:

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|M_\Phi(f_j)|^r\right)^{\frac1r}\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}\le C_n'c(r)(A_\Phi+\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac1r}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},\tag{4.233}$$

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|M_\Phi(f_j)|^r\right)^{\frac1r}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_nc(p,r)(A_\Phi+\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac1r}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\tag{4.234}$$

其中 $c(r)=1+(r-1)^{-1},c(p,r)=(1+(r-1)^{-1})(p+(p-1)^{-1})$.

证明 类似于前文, 先取 $B_1=\mathbb{C},B_2=L^\infty((\delta_0,\infty))$, 为了应用 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理的向量值版本4.13, 首先需要说明存在 $r\in(1,\infty)$ 使得 $\boldsymbol{M}_\Phi$ 是 $L^r(\mathbb{R}^n,B_1)\to L^r(\mathbb{R}^n,B_2)$ 的有界线性算子, 而(4.232)式确认了此事, 进而(4.233),(4.234)两式正是命题4.13的结论. 再令 $\delta_0\downarrow 0$ 即得结论. □

特别地, 对 Hardy-Littlewood 极大算子也有类似估计, 这是 Fefferman 与 Stein 的结果:

定理 4.21 (Fefferman-Stein 向量值极大不等式)

对 $1<p,r<\infty$, Hardy-Littlewood 极大函数 M 满足下述向量值不等式:

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|M(f_j)|^r\right)^{\frac1r}\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}\le C_n'(1+(r-1)^{-1})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac1r}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},\tag{4.235}$$

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|M(f_j)|^r\right)^{\frac1r}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_nc(p,r)\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac1r}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\tag{4.236}$$

其中 $c(p,r)=(1+(r-1)^{-1})(p+(p-1)^{-1})$.

证明 证明的关键在于注意到取定 $\mathbb{R}^n$ 上的某个正递减径向 Schwartz 函数 Φ 满足 $|x|\le 1$ 时 $\Phi(x)\ge 1$, 则 Hardy-Littlewood 极大函数 $M(f)$ 能被函数 $M_\Phi(|f|)$ 的常数倍点态控制, 进而用极大算子的向量值不等式4.12得到结论.

---

[61] 注意此时 $L^\infty(\mathbb{R}^n,B_1)$ 就是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

[62] 并没有推出来这个系数是怎样通过插值进行优化的... 但这样的优化或许会有些”鸡肋”.

[63] [LG1] 的勘误指出这里一定要取 $\delta_0>0$, 再通过单调收敛定理进行证明. 但我目前并没有弄清楚直接用 0 上手会有什么问题.

现在需要验证满足上述条件的函数 Φ 同时可以满足正则性条件(4.228). 首先说明

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}(|f|*\Phi_{2^j})\le M_\Phi(|f|)\le 2^n\sup_{j\in\mathbb{Z}}(|f|*\Phi_{2^j}),\tag{4.237}$$

(4.237)左式是显然的, 对于(4.237)右式, 已知对每个 $t>0$, 总存在 $j_t\in\mathbb{Z}$ 使得 $2^{j_t-1}<t\le 2^{j_t}$, 于是根据 Φ 的递减性与径向性知

$$\begin{aligned}(|f|*\Phi_t)(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|t^{-n}\Phi(t^{-1}y)dy\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|(2^{j_t-1})^{-n}\Phi(2^{j_t}y)dy\\&=2^n(|f|*\Phi_{j^t})(x)\le 2^n\sup_{j\in\mathbb{Z}}(|f|*\Phi_{2^j})\end{aligned}$$

至此即得(4.237)式, 该式说明极大算子 M_Φ 与二进极大算子

$$M_\Phi^d(f):=\sup_{j\in\mathbb{Z}}|f*\Phi_{2^j}|$$

是等价的. 下面说明 $M(f)$ 能被 $M_\Phi^d(|f|)$ 点态控制, 这是因为对任意 $r>0$ 与任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 均有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_r|}\int_{B(0,r)}|f(x-y)|dy&\le\frac{1}{v_nr^n}\int_{B(0,r)}|\Phi(\frac{y}{r})|\cdot|f(x-y)|dy=\frac{1}{v_n}\int_{B(0,r)}|\Phi_r(y)|\cdot|f(x-y)|dy\\&\le\frac{1}{v_n}\int_{\mathbb{R}^n}|\Phi_r(y)|\cdot|f(x-y)|dy\le\frac{1}{v_n}M_\Phi(|f|)\le\frac{2^n}{v_n}M_\Phi^d(|f|).\end{aligned}\tag{4.238}$$

至此只要能说明

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\int_{|x|\le 2|y|}\sup_{j\in\mathbb{Z}}|\Phi_{2^j}(x-y)-\Phi_{2^j}(x)|dx=C_n<\infty,\tag{4.239}$$

就能说明将(4.233),(4.234)两式中的 M_Φ 替换为 M_Φ^d 得到的结论依旧成立. 下面着重证明(4.239)式, 知:

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\ge 2|y|}\sup_{j\in\mathbb{Z}}|\Phi_{2^j}(x-y)-\Phi_{2^j}(x)|dx\\
\le&\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{|x|\ge 2|y|}|\Phi_{2^j}(x-y)-\Phi_{2^j}(x)|dx\\
=&\sum_{2^j>|y|}\int_{|x|\ge 2|y|}|\Phi_{2^j}(x-y)-\Phi_{2^j}(x)|dx+\sum_{2^j\le|y|}\int_{|x|\ge 2|y|}|\Phi_{2^j}(x-y)-\Phi_{2^j}(x)|dx\\
\le&\sum_{2^j>|y|}\int_{|x|\ge 2|y|}\frac{|y||\nabla\Phi(\frac{x-\theta y}{2^j})|}{2^{(n+1)j}}dx+\sum_{2^j\le|y|}\int_{|x|\ge 2|y|}(|\Phi_{2^j}(x-y)|+|\Phi_{2^j}(x)|)dx\\
\le&\sum_{2^j>|y|}\int_{|x|\ge 2|y|}\frac{|y|}{2^{(n+1)j}}\frac{C_Ndx}{(1+|2^{-j}(x-\theta y)|)^N}+2\sum_{2^j\le|y|}\int_{|x|\ge|y|}|\Phi_{2^j}(x)|dx\\
\overset{(A)}{\le}&\sum_{2^j>|y|}\int_{|x|\ge 2|y|}\frac{|y|}{2^{(n+1)j}}\frac{C_Ndx}{(1+|2^{-j-1}x|)^N}+2\sum_{2^j\le|y|}\int_{|x|\ge 2^{-j}|y|}|\Phi(x)|dx\\
\le&\sum_{2^j>|y|}\int_{|x|\ge 2^{-j}|y|}\frac{|y|}{2^j}\frac{C_Ndx}{(1+|x|)^N}+2\sum_{2^j\le|y|}C_N(2^{-j}|y|)^{-N}\\
\le&C_N\sum_{2^j>|y|}\frac{y}{2^j}+C_N\le 3C_N\end{aligned}$$

其中 $C_N>0$ 是依赖于 $N>n$ 的常数, $\theta\in[0,1]$, (A) 是因为 $|x|\ge 2|y|$ 时 $|x-\theta|\ge\frac{|x|}{2}$.

现在将(4.233),(4.234)两式应用到 M_Φ^d 上, 由(4.238)式知 $M(f)\le\frac{2^n}{v_n}M_\Phi^d(|f|)$, 进而可得欲求向量值不等式. □

注 (4.235),(4.236)两式在 $r=\infty$ 时也成立, 为此只需注意到 $\sup_{j\in\mathbb{Z}}M(f_j)\le M(\sup_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|)$. 同样, (4.233),(4.234)两式也有类似结果. 最后, (4.234),(4.236)两式在 $p=r=\infty$ 时也成立.

4.6.4 补充: L^pL^q 型空间与含时空间

本节为个人的思考, 主要研究形如 $L^p(X, L^q(T))$ 的空间的诸性质, 旨在为后文用到的 L^pL^q 型估计作准备, 同时介绍发展 PDEs 中具有基础地位的含时空间.

设 $(T,\tau), (X,\mu), (Y,\nu)$ 是 σ 有限测度空间, 在 $1 \le r \le \infty$ 时, 显见 $L^r(T)$ 是 Banach 空间, 因此由 $L^p(X,B)$ 的简单函数逼近与光滑函数逼近4.10立得下述推论:

命题 4.14 (L^pL^q 型空间的简单函数逼近与光滑函数逼近)

(a) 若 $0 < p < \infty, 1 \le r \le \infty$, 则集合 $\left\{\sum_{j=1}^m \chi_{E_j} u_j : m \in \mathbb{N}, u_j \in L^r(T), E_j \subset X \text{两两不交}, \tau(E_j) < \infty (j = 1, \cdots, m)\right\}$ 在 $L^p(X, L^r(T))$ 中稠密;

(b) 若 $1 \le r \le \infty$, 则集合 $\left\{\sum_{j=1}^m \chi_{E_j} u_j : m \in \mathbb{N}, u_j \in L^r(T), E_j \subset X \text{两两不交}, X = \bigcup_{j=0}^\infty E_j\right\}$ 在 $L^\infty(X, L^r(T))$ 中稠密;

(c) 若 $1 \le p < \infty, 1 \le r \le \infty$, 则全体形如 $\sum_{j=1}^m \varphi_j u_j$(其中 $m \in \mathbb{N}, u_j \in L^r(T), \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) (j = 1, \cdots, m)$) 构成的空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes L^r(T)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n, L^r(T))$ 中稠密.

注意到 $1 \le p < \infty$ 时 $(L^p)^* = L^{p'}$, 于是 $L^p(X,B)$ 的共轭空间性质4.11在 $B = L^r(T)$ 时特别有下述推论:

命题 4.15 ($L^p(\mathbb{R}^n, L^q(X))$ 的共轭空间性质)

设 $1 \le p \le \infty, 1 \le r < \infty$.

(a) 对任意 $F \in L^p(\mathbb{R}^n, L^r(T))$ 有

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n, L^r(T))} = \sup_{\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, L^{r'}(T))} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle G(x), F(x) \rangle dx \right|.$$

(b) 对任意 $G \in L^{p'}(\mathbb{R}^n, L^{r'}(X))$ 有

$$\|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, L^{r'}(T))} = \sup_{\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n, L^r(T))} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle G(x), F(x) \rangle dx \right|.$$

套用有界线性算子的有界 Banach 值延拓的定义可知, 对于 $L^p(X) \to L^q(Y)$ 的有界线性算子 $\mathcal{T}$, 可定义作用在 $L^p(X) \otimes L^r(T)$ 上的算子 $\widetilde{\mathcal{T}}$ 为

$$\widetilde{\mathcal{T}}\left(\sum_{j=1}^m f_j u_j\right) = \sum_{j=1}^m \mathcal{T}(f_j) u_j,$$

其中 $f_j \in L^p(X), u_j \in L^r(T)$. 若 $\widetilde{\mathcal{T}}$ 有 $L^p(X, L^r(T)) \to L^q(Y, L^r(T))$ 的有界延拓, 就称 T 具有有界 L^r 值延拓, 记其 L^r 值延拓为 $\widetilde{\mathcal{T}}$.

现在从上述定义出发将本节关于 $L^p l^r$ 型空间的命题重写为 L^pL^q 型空间的版本.

定理 4.22 (线性算子的 L^2 值延拓)

设 $0 < p, q < \infty, (X,\mu), (Y,\nu), (T,\tau)$ 是 σ 有限测度空间, $\mathcal{T} : L^p(X) \to L^q(Y)$ 是算子范数为 N 的有界线性算子, 则其 L^2 值延拓 $\widetilde{\mathcal{T}}$ 满足对任意 $f \in L^p(X, L^2(T))$ 有

$$\| \|\mathcal{T}(f)\|_{L^2(T)} \|_{L^q(Y)} \le C_{p,q} \| \|f\|_{L^2(T)} \|_{L^p(X)}$$

其中 $C_{p,q}$ 是常数.

证明 根据 L^2L^q 范数的定义知欲证式即[64]

$$\left(\int_Y \left(\int_T |T(f)|^2 d\tau \right)^{\frac{q}{2}} d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \le C_{p,q} \left(\int_X \left(\int_T |f|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

[64] 这里强调一下 $|T(f)|$ 与 $|f|$ 的意义: 因为 f 是输入 x, 输出 $L^2(T)$ 中元素的函数, 故对每个固定的 x 而言, $f(x)$ 都是 $L^2(T)$ 函数, 进而它对每个输入的 t 都将输出一个对应的数值结果, 这里的 $|f|$ 表示经历上述过程后得到的数值结果的模. $|T(f)|$ 同理.

第五章 Littlewood-Paley 分解与乘子

本章我们研究 Fourier 变换的正交性质. 这种正交性在 L^2 上是很容易理解的, 但在其他函数空间中这种性质就不那么显然了. 平方函数给出了一种表示与量化 L^p 以及其他函数空间中 Fourier 变换正交性的方法, 这类函数由 Littlewood 和 Paley 最先引入, 随后发展的一系列理论就以他们的名字来命名了. Littlewood-Paley 理论在刻画函数空间上的贡献是卓然的.

历史上, Littlewood-Paley 理论最先出现在一维 Fourier 级数的背景下, 并在复函数理论中得到发展. 随着实变量方法的进步, 这一整套理论渐渐独立于复方法, 延拓到了 $\mathbb{R}^n$ 中. 本章我们也会循着这一过程进行研究. 事实表明, Littlewood-Paley 理论与前面介绍的 Calderón-Zygmund 理论有密不可分的联系. 这一联系深刻且深远, 它体现在两套理论的主要结果是可以互推的.

Littlewood-Paley 理论的为例在本章中的一些例子中得以充分体现, 这些例子包括特定乘子理论的推导, 即研究有界函数成为 L^p 乘子的充分条件的理论. 作为 Littlewood-Paley 理论的一个结果, 我们也会证明缺项部分 Fourier 积分 $\int_{|\xi|\le 2^N}\widehat{f}(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi$ 几乎处处收敛到 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^p 函数 f.

5.1 Littlewood-Paley 理论

作为一切的开始, 我们首先需要说清楚当谈及 Fourier 变换的正交性时指的是什么东西. 如果定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f_j 具有支在不交集合上的 Fourier 变换 $\widehat{f_j}$, 且

$$\Big\|\sum_j f_j\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\sum_j\|f_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.1}$$

则称这些函数正交. 不幸的是, 如果(5.1)中的 2 被替换为 $p\neq 2$, 等号两边的量就可能变得不可比较. Littlewood-Paley 理论提供了(5.1)式的一个替代不等式用以表明 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中也可以谈论某种正交性. 该不等式的最初动机源于一维缺项 Fourier 级数的研究, 其中缺项序列定义为:

定义 5.1 (缺项序列)

称正整数序列 $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ 是缺项序列, 如果存在常数 $A>1$ 使得对全体 $k\in\mathbb{N}$ 均有 $\lambda_{k+1}\ge A\lambda_k$. ♣

关于缺项序列有下述定理成立:

定理 5.1 (缺项 Fourier 级数范数的等价性)

设 $1\le\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$ 是常数为 $A>1$ 的缺项序列, 记 $\Lambda=\{\lambda_k:k\in\mathbb{N}\}$, 则对任意 $1\le p<\infty$, 均存在常数 $C_p(A)$ 使得对任意 $f\in L^1(\mathbb{T})$, 只要 $\widehat{f}(k)=0(k\in\mathbb{Z}\backslash\Lambda)$, 就有

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\le C_p(A)\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}. \tag{5.2}$$

另外, (5.2)式的反向不等式也成立, 因此缺项 Fourier 级数的全体 $L^p(1\le p<\infty)$ 范数均等价. ♡

证明 首先设 $f\in L^2(\mathbb{T})$ 是非零函数, 定义

$$f_N(x)=\sum_{j=1}^N\widehat{f}(\lambda_j)e^{i2\pi\lambda_j x}. \tag{5.3}$$

对给定的 $2\le p<\infty$, 取整数 m 满足 $2m>p$, 并取正整数 r 使得 $A^r>m$, 则可将 f_N 写成 r 个函数 $\varphi_s(s=1,\cdots,r)$ 的和, 其中每个 φ_s 的 Fourier 系数只可能在缺项集

$$U:=\{\lambda_{kr+s}:k\in\mathbb{Z}\cup\{0\}\}=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\cdots\}$$

上不为零. 从缺项序列的定义出发可见序列 $\{\mu_k\}_k$ 是常数为 A^r 的缺项序列, 进而

$$\int_0^1 |\varphi_s(x)|^{2m}dx = \int_0^1 \varphi_s(x)^m\overline{\varphi_s(x)^m}dx = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_s^m}(\alpha)\overline{\widehat{\varphi_s^m}(\alpha)}.$$

现利用 Fourier 系数的乘法公式2.13(iii) 知

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi_s^m}(\alpha) = \widehat{\varphi_s^{m-1}\varphi_s}(\alpha) &= \sum_{\alpha_1\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_s^{m-1}}(\alpha_1)\widehat{\varphi_s}(\alpha-\alpha_1) \\
&= \sum_{\alpha_1\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha_2\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_s^{m-2}}(\alpha_2)\widehat{\varphi_s}(\alpha_1-\alpha_2)\widehat{\varphi_s}(\alpha-\alpha_1) \\
&= \cdots = \sum_{\substack{\beta_1,\cdots,\beta_m\in\mathbb{Z}\\ \beta_1+\cdots+\beta_m=\alpha}} \widehat{\varphi_s}(\beta_1)\cdots\widehat{\varphi_s}(\beta_n) \\
&\overset{(A)}{=} \sum_{\substack{1\le j_1,\cdots,j_m\le N\\ \mu_{j_1}+\cdots+\mu_{j_m}=\alpha}} \widehat{\varphi_s}(\beta_1)\cdots\widehat{\varphi_s}(\beta_n)
\end{aligned}$$

其中 (A) 是因为 $\widehat{\varphi_s}(\alpha)$ 只可能在 $\alpha\in U$ 时不为零. 因此

$$\int_0^1 |\varphi_s(x)|^{2m}dx = \sum_{\substack{1\le j_1,\cdots,j_m,k_1,\cdots,k_m\le N\\ \mu_{j_1}+\cdots+\mu_{j_m}=\mu_{k_1}+\cdots+\mu_{k_m}}} \widehat{\varphi_s}(\mu_{j_1})\cdots\widehat{\varphi_s}(\mu_{j_m})\overline{\widehat{\varphi_s}(\mu_{k_1})}\cdots\overline{\widehat{\varphi_s}(\mu_{k_m})}. \tag{5.4}$$

下面断言若 $\mu_{j_1}+\cdots+\mu_{j_m}=\mu_{k_1}+\cdots+\mu_{k_m}$, 则

$$\max(\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_m}) = \max(\mu_{k_1},\cdots,\mu_{k_m}) \tag{5.5}$$

这是因为若 $\max(\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_m}) > \max(\mu_{k_1},\cdots,\mu_{k_m})$, 则

$$\max(\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_m}) \le \mu_{k_1}+\cdots+\mu_{k_m} \le m\max(\mu_{k_1},\cdots,\mu_{k_m}),$$

若记 $\mu_{j_0}=\max(\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_m}), \mu_{k_0}=\max(\mu_{k_1},\cdots,\mu_{k_m})$, 则由 $\{\mu_k\}_k$ 是常数为 A^r 的缺项序列知它至少是递增列, 因此 $j_0>k_0 \Rightarrow j_0\ge k_0+1$, 于是

$$\mu_{j_0} \ge \mu_{k_0+1} \ge A^r\mu_{k_0} \Rightarrow \max(\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_m}) \ge A^r\max(\mu_{k_1},\cdots,\mu_{k_m})$$

因此 $A^r\le m$, 但这与 r 的选取方式矛盾了. 同理也可以否定 $\max(\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_m}) < \max(\mu_{k_1},\cdots,\mu_{k_m})$ 的情形, 因此(5.5)式成立. 由此可以归纳说明[1]若 $\mu_{j_1}+\cdots+\mu_{j_m}=\mu_{k_1}+\cdots+\mu_{k_m}$, 则

$$\{\mu_{k_1},\cdots,\mu_{k_m}\} = \{\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_m}\}$$

也就是说 $\mu_{k_1},\cdots,\mu_{k_m}$ 与 $\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_m}$ 是同一组正整数. 现在由这一事实与(5.4)右和式中所蕴含的排列知

$$\int_0^1 |\varphi_s(x)|^{2m}dx \le m!\sum_{j_1=1}^N\cdots\sum_{j_m=1}^N |\widehat{\varphi_s}(\mu_{j_1})|^2\cdots|\widehat{\varphi_s}(\mu_{j_m})|^2 = m!(\|\varphi_s\|_{L^2(\mathbb{T})}^2)^m$$

这表明对任意 $s\in\{1,2,\cdots,r\}$ 均有 $\|\varphi_s\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \le (m!)^{\frac{1}{2m}}\|\varphi_s\|_{L^2(\mathbb{T})}$, 因此

$$\begin{aligned}
\|f_N\|_{L^p(\mathbb{T})} \le \|f_N\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} = \left\|\sum_{s=1}^r\varphi_s\right\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} &\le \sum_{s=1}^r\|\varphi_s\|_{L^{2m}(\mathbb{T})} \\
\le \sqrt{r}\left(\sum_{s=1}^r\|\varphi_s\|_{L^{2m}(\mathbb{T})}^2\right)^{\frac12} &\le \sqrt{r}(m!)^{\frac{1}{2m}}\left(\sum_{s=1}^r\|\varphi_s\|_{L^2(\mathbb{T})}^2\right)^{\frac12} \\
&\overset{(B)}{=} \sqrt{r}(m!)^{\frac{1}{2m}}\|f_N\|_{L^2(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

其中 (B) 是因为 $\{\varphi_s\}_{s=1}^r$ 在 $L^2(\mathbb{T})$ 中正交. 现取 $r=[\log_A m]+1, m=\left[\frac{p}{2}\right]+1$, 则对任意形如(5.3)式的 f_N 均有

$$\|f_N\|_{L^p(\mathbb{T})} \le c_p(A)\|f_N\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad p\ge 2 \tag{5.6}$$

其中 $c_p(A)=\sqrt{1+[\log_A([\frac{p}{2}]+1)]}(([\frac{p}{2}]+1)!)^{\frac{1}{2([\frac{p}{2}]+1)}}$.

现在要将(5.6)式中的 f_N 换回 f, 回忆在证明最开始我们假设了 $f\in L^2(\mathbb{T})$, 于是由 Fourier 级数的 L^2 收敛

[1]在 $\mu_{k_1},\cdots,\mu_{k_m}$ 与 $\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_m}$ 中同时去除最大的那项, 剩下的项组成的和式依旧相等, 重复该操作即可.

性2.2知 f_N 在 L^2 意义下收敛到 f, 因而根据 Riesz 引理知存在子列 $\{f_{N_j}\}_j$ 几乎处处收敛到 f, 于是由 Fatou 引理与(5.6)式可知 $1 < p < \infty$ 时有

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^1 \varliminf_{j\to\infty} |f_{N_j}(x)|^p dx \le \varliminf_{j\to\infty} \int_0^1 |f_{N_j}(x)|^p dx$$
$$\le c_p(A)^p \varliminf_{j\to\infty} \|f_{N_j}\|_{L^2(\mathbb{T})}^p = c_p(A)^p \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$$

于是

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \le c_p(A)\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad p \ge 2. \tag{5.7}$$

现由 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 可知 $f \in L^4(\mathbb{T})$, 进而 $f \in L^4(\mathbb{T}) \cap L^1(\mathbb{T})$, 进而结合 L^p 范数的对数凸性1.13与(5.7)式可知

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^4(\mathbb{T})}^{\frac{2}{3}} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\frac{1}{3}} \le 6^{\frac{1}{9}}(1 + [\log_A 3])^{\frac{1}{3}} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{2}{3}} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\frac{1}{3}}.$$

于是只要设 $0 < \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} < \infty$, 就有

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \le 6^{\frac{1}{2}}(1 + [\log_A 3])\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}. \tag{5.8}$$

最后根据 Hölder 不等式易得

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad 1 \le p < 2 \tag{5.9}$$

现在综合(5.7)-(5.9)式并令 $C_p(A) = c_p(A)6^{\frac{1}{2}}(1 + [\log_A 3])$ 即得(5.2)式.

下面将上述结果延拓到 $L^1(\mathbb{T})$ 中. 任取 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 满足 $\widehat{f}(k) = 0 (k \in \mathbb{Z}\backslash\Lambda)$, 考察函数 $f * F_M$, 其中 F_M 是 Fejer 核, $M \in \mathbb{N}$. 利用 $F_M = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^N D_k(t)$ 与 $\{e^{i2\pi kt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的正交性可知存在常数 B 使得 $\|F_M\|_{L^2(\mathbb{T})} \le B < \infty$, 因此由 Young 不等式知 $f * F_M \in L^2(\mathbb{T})$, 由 Fejer 核的恒等逼近定理知 $f * F_m \to f$ 在 $L^p(1 \le p < \infty)$ 意义下成立, 且由 $\widehat{f}(k)$ 的缺项性知 $\widehat{f * F_M}(k) = 0 (k \in \mathbb{Z}\backslash\Lambda)$, 故由前述讨论可得不等式

$$\|f * F_M\|_{L^p(\mathbb{T})} \le C_p(A)\|f * F_M\|_{L^1(\mathbb{T})} \tag{5.10}$$

最后令 $M \to \infty$ 即得(5.2)式. □

在缺项 Fourier 级数范数的等价性5.1中取 $f(x) = \sum_{k=1}^N a_k e^{i2\pi 2^k x}$, $A = 2$ 可知对任意 $1 < p < \infty$, 一方面有

$$\left\|\sum_{k=1}^N a_k e^{i2\pi 2^k \circledast}\right\|_{L^p[0,1]} \le C_p \left\|\sum_{k=1}^N a_k e^{i2\pi 2^k \circledast}\right\|_{L^1[0,1]} \le C_p \left\|\sum_{k=1}^N a_k e^{i2\pi 2^k \circledast}\right\|_{L^2[0,1]} = C_p \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

另一方面在 $p \ge 2$ 时显见

$$\left(\sum_{k=1}^N |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left\|\sum_{k=1}^N a_k e^{i2\pi 2^k \circledast}\right\|_{L^p[0,1]}$$

而 $1 < p < 2$ 时再次利用缺项 Fourier 级数范数的等价性5.1可得

$$\left(\sum_{k=1}^N |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C_p \left\|\sum_{k=1}^N a_k e^{i2\pi 2^k \circledast}\right\|_{L^1[0,1]} \le C_p \left\|\sum_{k=1}^N a_k e^{i2\pi 2^k \circledast}\right\|_{L^p[0,1]}$$

因此

$$\left\|\sum_{k=1}^N a_k e^{i2\pi 2^k \circledast}\right\|_{L^p[0,1]} \approx \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.11}$$

也就是说, 对 $\sum_{k=1}^N a_k e^{i2\pi 2^k x}$ 的 L^p 范数进行计算所得到的结果几乎都可以 (在忽略常数倍的意义下) 照搬到 L^2 范数的情形. 类似的结果在更一般的二进指数指标范围 $\{2^k + 1, \cdots, 2^{k+1} - 1\}$ 中也是成立的, 因为该范围中每个指标对应的指数函数与其它指标对应的函数均无关. 特别地, $\mathbb{T}$ 中函数的 L^p 可积性并不会被前述二进方体中其 Fourier 系数的随机符号影响[2]. 这就是 Littlewood-Paley 理论背后的直觉性思考.

从上述讨论出发, 下面介绍连续情形的 Littlewood-Paley 算子.

[2][LG1] 中这段的原文并没有读懂...

定义 5.2 (Littlewood-Paley 算子)

设 Ψ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数, $j \in \mathbb{Z}$. 定义 Ψ 所诱导的 Littlewood-Paley 算子 Δ_j 为

$$\Delta_j(f) = f * \Psi_{2^{-j}}$$

其中 $\Psi_{2^{-j}}(x) = 2^{jn}\Psi(2^j x)(x \in \mathbb{R}^n)$.

由 L^1 函数 Fourier 变换的性质立得对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 均有 $\widehat{\Psi_{2^{-j}}}(\xi) = \widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)$. 另外注意当 Ψ 是 Schwartz 函数而 f 是缓增分布时, 值 $\Delta_j(f)$ 是良定义的函数.

Littlewood-Paley 算子的定义依赖于函数 Ψ 的选取, 在一般情况下我们都选取 Ψ 是具有紧支频率[3]的光滑函数. 观察到若 $\widehat{\Psi}$ 支在环 $0 < c_1 < |\xi| < c_2 < \infty$ 上, 则 Δ_j 的 Fourier 变换支在环 $c_1 2^j < |\xi| < c_2 2^j$ 上, 这是因为

$$\widehat{\Delta_j(f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\Psi_{2^{-i}}}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)$$

故

$$\widehat{\Delta_j(f)}(\xi) \neq 0 \Rightarrow c_1 < 2^{-j}|\xi| < c_2 \Rightarrow c_1 2^j < |\xi| < c_2 2^j.$$

也就是说, Δ_j 的频率在 $|\xi| \approx 2^j$ 附近局部化了. 因此 Δ_j 可以用于将函数在 $|\xi| \approx 2^j$ 附近的频率独立出来.

Littlewood-Paley 算子 Δ_j 诱导的平方函数定义为

$$f \mapsto \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这个二次表达式捕捉了函数 f 的内在正交性.

定理 5.2 (Littlewood-Paley)

若 Ψ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积 C^1 函数, 满足 $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x)dx = 0$ 且

$$|\Psi(x)| + |\nabla\Psi(x)| \leq B(1+|x|)^{-n-1}. \tag{5.12}$$

则存在常数 $C_n < \infty$ 使得对全体 $1 < p < \infty$ 与任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n B \max(p,(p-1)^{-1})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.13}$$

另存在 $C_n' < \infty$ 使得对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C_n' B\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.14}$$

相反地, 设 Ψ 是 Schwartz 函数, 它要么满足

$$\widehat{\Psi}(0) = 0 \wedge \forall\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)|^2 = 1\right), \tag{5.15}$$

要么满足

$$0 \notin \operatorname{supp}\widehat{\Psi} \wedge \forall\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\Psi}(2^{-j}\xi) = 1\right). \tag{5.16}$$

则存在常数 $C_{n,\Psi}$ 使得对任意 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 只要存在 $1 < p < \infty$ 使得

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

就存在唯一的多项式 Q 使得缓增分布 $f - Q$ 与某 L^p 函数重合, 且

$$\|f-Q\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,\Psi} B \max(p,(p-1)^{-1})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.17}$$

[3] 即 $\widehat{\Psi}$ 紧支.

因此若对某个 $1<p<\infty$ 有 $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\approx\left\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

♡

证明 我们首先证明(5.13)式在 $p=2$ 时的情形. 由 Plancherel 定理知任取 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}\left\|\Big(\sum_{j=-N}^{N}|\Delta_j(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}&=\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=-N}^{N}|\Delta_j(f)(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}=\Big(\sum_{j=-N}^{N}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta_j(f)(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\&=\Big(\sum_{j=-N}^{N}\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{\Delta_j(f)}(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}=\Big(\sum_{j=-N}^{N}\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(\xi)|^2|\widehat{\Psi_{2^{-j}}}(\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\le\Big(\sum_{j=-N}^{N}\|\widehat{\Psi_{2^{-j}}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}=\Big(\sum_{j=-N}^{N}\|\widehat{\Psi_{2^{-j}}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

现在在上式两端令 $N\to\infty$, 根据 Beppo Levi 非负渐升列收敛定理可得

$$\left\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\widehat{\Psi_{2^{-j}}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

因此要证明 $p=2$ 时的(5.13)式, 只需证明存在 $C_n<\infty$ 使得对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 均有

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)|^2\le C_nB^2. \tag{5.18}$$

因为 Ψ 满足(5.12)式, 故 $\Psi\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 因此由 L^1 函数 Fourier 变换的可积性2.18Ψ 的 Fourier 反演公式成立. 另因 $\int_{\mathbb{R}^n}\Psi(x)dx=0$, 故

$$\widehat{\Psi}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i2\pi x\cdot\xi}\Psi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}(e^{-i2\pi x\cdot\xi}-1)\Psi(x)dx, \tag{5.19}$$

注意到一方面

$$|(e^{-i2\pi x\cdot\xi}-1)\Psi(x)|\le2|\Psi(x)|$$

另一方面由微分中值定理知

$$|(e^{-i2\pi x\cdot\xi}-1)\Psi(x)|\le2\pi|\xi||x||\Psi(x)|$$

于是

$$|(e^{-i2\pi x\cdot\xi}-1)\Psi(x)|\le4\sqrt{\pi|\xi|}|x|^{\frac{1}{2}}|\Psi(x)|$$

因此

$$|\widehat{\Psi}(\xi)|\le\sqrt{4\pi|\xi|}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\frac{1}{2}}|\Psi(x)|dx\le C_nB|\xi|^{\frac{1}{2}}, \tag{5.20}$$

现对每个 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\ne0$, 设 j 满足 $|\xi_j|\ge|\xi_k|(\forall k\in\{1,\cdots,n\})$. 在(5.14)右式关于 ∂_j 分部积分得

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{k\ne j}dx_k\int_{\mathbb{R}}e^{-i2\pi x\cdot\xi}\Psi(x)dx_j\\&=-\int_{\mathbb{R}^n}(-i2\pi\xi_j)^{-1}e^{-i2\pi x\cdot\xi}(\partial_j\Psi)(x)dx\end{aligned}$$

于是根据 $\sqrt{n}|\xi_j|\ge|\xi|$ 知

$$|\widehat{\Psi}(\xi)|\le\sqrt{n}|\xi|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\Psi(x)|dx\le C_nB|\xi|^{-1}. \tag{5.21}$$

下面断言若 Ψ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数, 且存在 $\varepsilon,\varepsilon'>0$ 使得 $|\widehat{\Psi}(\xi)|\le B\min(|\xi|^{\varepsilon},|\xi|^{-\varepsilon'})$, 则存在常数 $C_{\varepsilon,\varepsilon'}<\infty$ 使得

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^\infty|\widehat{\Psi}(t\xi)|^2\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{2}}+\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\le C_{\varepsilon,\varepsilon'}B. \tag{5.22}$$

为此只需证明对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 均有

$$\int_0^\infty |\widehat{\Psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \leq C_{\varepsilon,\varepsilon'} B^2, \tag{5.23}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)|^2 \leq C_{\varepsilon,\varepsilon'} B^2 \tag{5.24}$$

即可. 对于(5.23)式知

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\widehat{\Psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} &= \int_{t\leq \frac{1}{|\xi|}} |\widehat{\Psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} + \int_{t>\frac{1}{|\xi|}} |\widehat{\Psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_{t\leq \frac{1}{|\xi|}} B^2 |t\xi|^{2\varepsilon} \frac{dt}{t} + \int_{t>\frac{1}{|\xi|}} B^2 |t\xi|^{-2\varepsilon'} \frac{dt}{t} \\
&= B^2 \int_0^{\frac{1}{|\xi|}} |\xi|^{2\varepsilon} t^{2\varepsilon-1} dt + B^2 \int_{\frac{1}{|\xi|}}^\infty |\xi|^{-2\varepsilon'} t^{-2\varepsilon'-1} dt \\
&= C^1_{\varepsilon,\varepsilon'} B^2
\end{aligned}$$

对于(5.24)式知

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)|^2 &\leq \sum_{2^{-j}|\xi|\leq 2^{-\frac{j}{2}}} |\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)|^2 + \sum_{2^{-j}|\xi|> 2^{-\frac{j}{2}}} |\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)|^2 \\
&\leq \sum_{2^{-j}|\xi|\leq 2^{-\frac{j}{2}}} B^2 |2^{-j}\xi|^{2\varepsilon} + \sum_{2^{-j}|\xi|> 2^{-\frac{j}{2}}} B^2 |2^{-j}\xi|^{-2\varepsilon'} \\
&\leq B^2 \Big(\sum_{2^{-j}|\xi|\leq 2^{-\frac{j}{2}}} 2^{-j\varepsilon} + \sum_{2^{-j}|\xi|> 2^{-\frac{j}{2}}} 2^{j\varepsilon'} \Big) \\
&= C^2_{\varepsilon,\varepsilon'} B^2
\end{aligned}$$

取 $C_{\varepsilon,\varepsilon'} = (C^1_{\varepsilon,\varepsilon'})^{\frac{1}{2}} + (C^2_{\varepsilon,\varepsilon'})^{\frac{1}{2}}$ 即得(5.22)式.

回到原来的证明, 在(5.22)式中代入 $\varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon' = 1$ 即得(5.18)式.

下面研究(5.13)式在 $p \neq 2$ 的情形. 从向量值不等式的视角出发, 将(5.13),(5.14)两式看成向量值不等式: 定义作用在 $\mathbb{R}^n$ 上函数的算子 $\boldsymbol{T}$ 为:

$$\boldsymbol{T}(f)(x) = \{\Delta_j(f)(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$$

则(5.13),(5.14)两式分别为 $\boldsymbol{T}$ 在将 $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 映入 $L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$ 时与将 $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 映入 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, l^2)$ 时的有界性. 刚刚我们证明的是 $p = 2$ 时对应的有界性, 因此 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.20的第一个条件已经满足了. 观察到算子 $\boldsymbol{T}$ 能写成

$$\boldsymbol{T}(f)(x) = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{2^{-j}}(x-y) f(y) dy \right\}_{j\in\mathbb{Z}} = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{K}(x-y)(f(y)) dy$$

其中对每个 $x \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{K}(x)$ 都是 $\mathbb{C} \to l^2$ 的有界线性算子:

$$\boldsymbol{K}(x)(a) = \{\Psi_{2^{-j}}(x) a\}_{j\in\mathbb{Z}}. \tag{5.25}$$

显见

$$\|\boldsymbol{K}(x)\|_{\mathbb{C}\to l^2} = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Psi_{2^{-j}}(x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

于是为了应用 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.20, 就需要验证存在 C_n 使得

$$\|\boldsymbol{K}(x)\|_{\mathbb{C}\to l^2} \leq C_n B |x|^{-n}, \tag{5.26}$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} \boldsymbol{K}(y) dy = \left\{ \int_{|y|\leq 1} \Psi_{2^{-j}}(y) dy \right\}_{j\in\mathbb{Z}}, \tag{5.27}$$

$$\sup_{y\neq 0} \int_{|x|\geq 2|y|} \|\boldsymbol{K}(x-y) - \boldsymbol{K}(x)\|_{\mathbb{C}\to l^2} dx \leq C_n B. \tag{5.28}$$

对于(5.26)式, 对每个取定的 $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, 设 $j_x \in \mathbb{Z}$ 满足 $2^{-j_x} \le |x| \le 2^{-j_x+1}$, 则由(5.12)式知

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{K}(x)\|^2_{\mathbb{C}\to l^2} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Psi_{2^{-j}}(x)|^2 \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{2jn}B^2}{(1+2^j|x|)^{2n+2}} \\
&= \sum_{j\le j_x} \frac{2^{2jn}B^2}{(1+2^j|x|)^{2n+2}} + \sum_{j>j_x} \frac{2^{2jn}B^2}{(1+2^j|x|)^{2n+2}} \\
&\le B^2 \sum_{j\le j_x} 2^{2jn} + B^2 \sum_{j>j_x} \frac{2^{2jn}}{2^{(2n+2)j}|x|^{2n+2}} \\
&\le B^2 \frac{2^{-2j_x n}}{1-2^{-2n}} + \frac{4}{3}B^2|x|^{-2n-2}2^{-2j_x} \\
&\le B^2 \frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}|x|^{-2n} + \frac{4}{3}B^2|x|^{-2n}
\end{aligned}$$

取 $C_n = B^2(\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1} + \frac{4}{3})$ 即可.

对于(5.27)式, 任取 $N > 0, a \in \mathbb{C}$, 设 $\boldsymbol{K}_0^N(x)(a) = \{\Psi_{2^{-j}}(x)a\}_{|j|\le N}$, 则

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{\varepsilon\le|y|\le 1} \boldsymbol{K}(y)(a)dy - \int_{|y|\le 1} \boldsymbol{K}_0^N(y)(a)dy\right\|_{l^2} \\
\le &\left\|\int_{|y|<\varepsilon} \{\Psi_{2^{-j}}(y)a\}_{|j|\le N}dy\right\|_{l^2} + \left\|\int_{\varepsilon\le|y|\le 1} \{\Psi_{2^{-j}}(y)a\}_{|j|>N}dy\right\| \\
\le &\int_{|y|<\varepsilon}\left(\sum_{|j|\le N}|\Psi_{2^{-j}}(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} ady + \int_{\varepsilon\le|y|\le 1}\left(\sum_{|j|>N}|\Psi_{2^{-j}}(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} ady \\
\le &a\int_{|y|<\varepsilon}\sum_{|j|\le N}|\Psi_{2^{-j}}(y)|dy + a\int_{\varepsilon\le|y|\le 1}\sum_{|j|>N}|\Psi_{2^{-j}}(y)|dy \\
\le &a\int_{|y|<\varepsilon}\sum_{|j|\le N}\frac{2^{jn}B}{(1+2^j|y|)^{n+1}}dy + a\int_{\varepsilon\le|y|\le 1}\sum_{|j|>N}\frac{2^{jn}B}{(1+2^j|y|)^{n+1}}dy \\
\le &a\sum_{|j|\le N}\int_{|y|<\varepsilon}\frac{2^{jn}B}{1+2^{j(n+1)}|y|^{n+1}}dy + a\int_{\varepsilon\le|y|\le 1}\sum_{|j|>N}\frac{2^{jn}B}{1+2^{j(n+1)}|y|^{n+1}}dy \\
\le &a\sum_{|j|\le N}2^{-j}\int_{|y|<\varepsilon}\frac{B}{2^{-j(n+1)}+|y|^{n+1}}dy + a\int_{\varepsilon\le|y|\le 1}\sum_{|j|>N}\frac{2^{-j}B}{2^{-j(n+1)}+|y|^{n+1}}dy \\
\le &a\sum_{|j|\le N}2^{-j}\frac{B}{2^{-j(n+1)}}(2\varepsilon)^n + a\sum_{j<-N}2^{-j}\frac{B}{2^{-j(n+1)}} + a\sum_{j>N}\frac{2^{-j}B}{|y|^{n+1}} \\
= &aB\frac{2^n}{2^n-1}(1-2^{-Nn})\varepsilon^n + aB2^{-Nn}\frac{2^n}{2^n-1} + CaB2^{1-N}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)
\end{aligned}$$

其中 C 是常数. 令 $2^{-N}\frac{1}{\varepsilon} < \varepsilon^n$ 可知

$$aB\frac{2^n}{2^n-1}(1-2^{-Nn})\varepsilon^n + aB2^{-Nn}\frac{2^n}{2^n-1} + CaB2^{1-N}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \le aB(\frac{\varepsilon^n}{2} + \varepsilon^{n(n+1)} + 2C\varepsilon^n + 2C\varepsilon^{n+1})$$

因此对每个固定的 $N > 0$ 与任意 $a \in \mathbb{C}$ 均有

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\|\int_{\varepsilon\le|y|\le 1}\boldsymbol{K}(y)(a)dy\right\|_{l^2} = \left\|\int_{|y|\le 1}\boldsymbol{K}^N(y)(a)dy\right\|_{l^2}$$

又因为上右式随着 N 的增加而单调增, 故在上式中令 $N \to \infty$, 由 Lebesgue 单调收敛定理即得欲证.

对于(5.28)式, 因为 Ψ 是 C^1 函数, 故在 $|x| \ge 2|y|$ 时有

$$\begin{aligned}
|\Psi_{2^{-j}}(x-y) - \Psi_{2^{-j}}(x)| &\le 2^{j(n+1)}|\nabla\Psi(2^j(x-\theta y))||y| \\
&\le B2^{j(n+1)}(1+2^j|x-\theta y|)^{-(n+1)}|y| \qquad (5.29)\\
&\overset{(A)}{\le} B2^{jn}(1+2^{j-1}|x|)^{-(n+1)}2^j|y|
\end{aligned}$$

其中 $\theta\in[0,1]$, (A) 是因为 $|x-\theta y|\geq\frac{1}{2}|x|$. 另有

$$\begin{aligned}|\Psi_{2^{-j}}(x-y)-\Psi_{2^{-j}}(x)|&\leq 2^{jn}|\Psi(2^j(x-y))|+2^{jn}|\Psi(2^jx)|\\&\leq B2^{jn}(1+2^j|x-y|)^{-(n+1)}+B2^{jn}(1+2^j|x|)^{-(n+1)}\\&\leq B2^{jn}(1+2^{j-1}|x|)^{-(n+1)}+B2^{jn}(1+2^j|x|)^{-(n+1)}\\&\leq 2B2^{jn}(1+2^{j-1}|x|)^{-(n+1)}.\end{aligned}\tag{5.30}$$

对(5.29),(5.30)式取几何平均知对任意 $\gamma\in[0,1]$ 均有

$$|\Psi_{2^{-j}}(x-y)-\Psi_{2^{-j}}(x)|\leq 2^{1-\gamma}B2^{jn}(2^j|y|)^\gamma(1+2^{j-1}|x|)^{-(n+1)}\tag{5.31}$$

于是当 $|x|\geq 2|y|$ 时有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{K}(x-y)-\boldsymbol{K}(y)\|_{\mathbb{C}\to l^2}&=\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Psi_{2^{-j}}(x-y)-\Psi_{2^{-j}}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leq\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Psi_{2^{-j}}(x-y)-\Psi_{2^{-j}}(x)|\\&=\sum_{2^j<\frac{2}{|x|}}|\Psi_{2^{-j}}(x-y)-\Psi_{2^{-j}}(x)|+\sum_{2^j\geq\frac{2}{|x|}}|\Psi_{2^{-j}}(x-y)-\Psi_{2^{-j}}(x)|\\&\leq\sum_{2^j<\frac{2}{|x|}}2B2^{jn}2^j|y|(1+2^{j-1}|x|)^{-(n+1)}+\sum_{2^j\geq\frac{2}{|x|}}2^{\frac{1}{2}}B2^{jn}2^{\frac{j}{2}}|y|^{\frac{1}{2}}(1+2^{j-1}|x|)^{-(n+1)}\\&\leq 2B|y|\sum_{2^j<\frac{2}{|x|}}2^{j(n+1)}+2^{\frac{1}{2}}B|y|^{\frac{1}{2}}|x|^{-(n+1)}\sum_{2^j\geq\frac{2}{|x|}}2^{jn+\frac{j}{2}-(n+1)(j-1)}\\&\leq 2B|y|\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}\frac{2}{|x|^{n+1}}+B|y|^{\frac{1}{2}}|x|^{-n-\frac{1}{2}}2^{n+1}\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}-1}\\&\leq C_nB(|y||x|^{-n-1}+|y|^{\frac{1}{2}}|x|^{-n-\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 2|y|}\|\boldsymbol{K}(x-y)-\boldsymbol{K}(x)\|_{\mathbb{C}\to l^2}dx&\leq C_nB\left(|y|\int_{|x|\geq 2|y|}\frac{dx}{|x|^{n+1}}+|y|^{\frac{1}{2}}\int_{|x|\geq 2|y|}\frac{dx}{|x|^{n+\frac{1}{2}}}\right)\\&\leq C_n'B(|y|\cdot\frac{1}{2|y|}+|y|^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}}})\leq C_n''B\end{aligned}$$

因此(5.28)式成立. 进而根据 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界性延拓定理4.20即得(5.13),(5.14)两式.

下面证明反向不等式. 设 Ψ 满足(5.15)式, 根据条件知存在 $1<p<\infty$ 使得对 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 有 $(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2)^{\frac{1}{2}}\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 设 Δ_j^* 是 Δ_j 的伴随算子, 其定义为 $\widehat{\Delta_j^*f}=\widehat{f}\overline{\widehat{\Psi_{2^{-j}}}}$. 对 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 下面说明级数 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^*\Delta_j(f)$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中收敛. 根据 Cauchy 准则, 只需说明部分和序列 $u_N=\sum_{|j|<N}\Delta_j^*\Delta_j(f)$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中收敛. 也就是说, 如果我们把 u_N 作用到 Schwartz 函数 g 上, 产生的数值列应该是基本列. 现由对偶性, Cauchy-Schwartz 不等式与 Hölder 不等式可知 $M>N$ 时有:

$$\begin{aligned}|\langle u_N,g\rangle-\langle u_M,g\rangle|&=\left|\left\langle\sum_{N\leq|j|<M}\Delta_j^*\Delta_j(f),g\right\rangle\right|=\left|\sum_{N\leq|j|<M}\langle\Delta_j(f),\Delta_j(g)\rangle\right|\\&\overset{(B)}{\leq}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{N\leq|j|<M}\Delta_j(f)(x)\Delta_j(g)(x)dx\right|\\&\leq\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{N\leq|j|<M}|\Delta_j(f)(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{N\leq|j|<M}|\Delta_j(g)(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}dx\right|\\&\leq\left\|\left(\sum_{N\leq|j|<M}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left\|\left(\sum_{N\leq|j|<M}|\Delta_j(g)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

$$\le \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left\|\left(\sum_{N\le|j|<M}|\Delta_j(g)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

其中 (B) 是因为 $\Delta_j(f)$ 此时是函数, 故 $\Delta_j(f)$ 在 $\Delta_j(g)$ 上的作用能写成 L^2 内积的形式. 因为 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 故 $\|(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(g)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$ 可被 $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$ 控制, 因此若取 $M>N\ge N_0(g)$, 则根据 Cauchy 准则知 $\|(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(g)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$ 可充分小. 又因为根据条件有 $\|(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}<\infty$, 因此 $\langle u_N,g\rangle$ 确实是关于 N 的收敛数列, 于是可设它收敛到 $\Lambda(g)$. 现只需证明映射 $g\mapsto\Lambda(g)$ 是缓增分布即可. 显见 $\Lambda(g)$ 是线性泛函, 且由已证明的(5.13)式知

$$\begin{aligned}|\Lambda(g)|&\le\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(g)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\\&\le C_{p'}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

又因为 $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$ 能被 g 的 Schwartz 半范有限和控制, 故 Λ 确为缓增分布. 缓增分布 Λ 正是缓增分布级数 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^*\Delta_j$ 的收敛分布.

现在在(5.15)式的假设下, 缓增分布 $f-\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^*\Delta_j(f)$ 的 Fourier 变换支在原点, 这是因为任取 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 只要 $0\notin\operatorname{supp}g$, 就有

$$\begin{aligned}\left\langle\left(f-\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^*\Delta_j(f)\right)^\wedge,g\right\rangle&=\left\langle\widehat{f}-\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\Delta_j^*\Delta_j(f))^\wedge,g\right\rangle=\langle\widehat{f},g\rangle-\langle\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\Delta_j f}\overline{\widehat{\Psi_{2^{-j}}}},g\rangle\\&=\langle\widehat{f},g\rangle-\langle\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{\Psi_{2^{-j}}}|^2\widehat{f},g\rangle=\langle\widehat{f},g\rangle-\langle\widehat{f},\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{\Psi_{2^{-j}}}|^2g\rangle=0\end{aligned}$$

因此 $\operatorname{supp}(f-\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^*\Delta_j(f))\subset\{0\}$. 根据支在原点的缓增分布刻画2.6知存在多项式 Q 使得 $f-Q=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^*\Delta_j(f)$. 现设 g 是 Schwartz 函数, 有

$$\begin{aligned}|\langle f-Q,\overline{g}\rangle|&=\left|\left\langle\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^*\Delta_j(f),\overline{g}\right\rangle\right|=\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle\Delta_j^*\Delta_j(f),\overline{g}\rangle\right|\\&=\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle\Delta_j(f),\overline{\Delta_j(g)}\rangle\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j(f)\overline{\Delta_j(g)}dx\right|\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(g)|^2\right)^{\frac{1}{2}}dx\\&\le\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(g)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\\&\overset{(C)}{\le}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}C_nB\max(p',(p'-1)^{-1})\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}\tag{5.32}$$

其中 (C) 是已证明的(5.13)式. 在上式两端对 $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\le1$ 取上确界可知缓增分布 $f-Q$ 是 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函. 根据 Riesz 表示定理, $f-Q$ 与某个 L^p 函数重合, 且它满足估计

$$\|f-Q\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_nB\max(p,(p-1)^{-1})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

下面说明 Q 的唯一性. 若 Q_1 作为多项式同样满足 $f-Q_1\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $Q-Q_1$ 必是 L^p 函数, 但多项式中唯一能成为 L^p 函数的只有零多项式, 故 $Q=Q_1$ 点态成立, 这便在(5.15)式的条件下证明了(5.17)式.

Ψ 满足(5.16)式情况的证明这里先按下不表[4]. □

注 现在对 Littlewood-Paley 定理5.2作一些观察. 如果 $\widehat{\Psi}$ 是实值函数, 则 Δ_j 是自伴算子. 这是因为

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_j(f)\overline{g}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}\widehat{\Psi_{2^{-j}}}\overline{\widehat{g}}d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}\overline{\widehat{\Psi_{2^{-j}}}\widehat{g}}d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f\overline{\Delta_j(g)}dx.$$

[4][LG1] 中提到和后面的推论证明类似, 但应该还是有些本质上的区别: Ψ 紧不紧支的问题. 如何证明这里的结论?

另外, 如果 Ψ 是径向函数, 则 Δ_j 是自转置算子, 即

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_j(f) g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \Delta_j(g) dx$$

这是因为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_j(f) g dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Psi_{2^{-j}}(x-y) dy \Big) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{2^{-j}}(y-x) g(x) dx \Big) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f \Delta_j(g) dx.\end{aligned}$$

现设 Ψ 要么是径向函数, 要么具有实值 Fourier 变换. 另设 Ψ 满足(5.12)式, 且 $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x) dx = 0$, 则不等式

$$\Big\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j(f_j) \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n B \max(p, (p-1)^{-1}) \Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{5.33}$$

对函数列 $\{f_j\}_j$ 成立. 这是因为设

$$\boldsymbol{T}(f) = \{\Delta_j(f)\}_j$$

则在 Ψ 是径向函数时, 任取 $\{g_j\}_j$, 根据自转置性有

$$\langle \boldsymbol{T}(f), \{g_j\}_j \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} f \Delta_j(g_j) dx \Rightarrow \boldsymbol{T}^*(\{g_j\}_j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j(g_j),$$

而在 Ψ 具有实值 Fourier 变换时, 根据自伴性有

$$\langle \boldsymbol{T}(f), \{g_j\}_j \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} f \overline{\Delta_j(g_j)} dx \Rightarrow \boldsymbol{T}^*(\{g_j\}_j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j(g_j),$$

现由不等式(5.13)知算子 $\boldsymbol{T}$ 将 $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 映入 $L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$, 进而根据对偶性可知 $\boldsymbol{T}^*$ 将 $L^{p'}(\mathbb{R}^n, l^2)$ 映入 $L^{p'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. 如果把 p 换成 p', 这就正是(5.33)式. 又因为 p 可以取 $(1, \infty)$ 中的任意数, 进而(5.33)式得证.

5.1.1 向量版本的阐述

下面给出 Littlewood-Paley 定理5.2的向量值拓展. 此即下述命题:

命题 5.1 (Littlewood-Paley 定理的向量值版本)

设 Ψ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积 C^1 函数, $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x) dx = 0$, 且 Ψ 满足(5.12)式. 设 Δ_j 是 Ψ 所诱导的 Littlewood-Paley 算子, 则存在常数 $C_n < \infty$ 使得对任意 $1 < p, r < \infty$ 与任意 L^p 函数列 $\{f_j\}_j$ 均有

$$\Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta_k(f_j)|^2 \Big)^{\frac{r}{2}} \Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n B \widetilde{C}_{p,r} \Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $\widetilde{C}_{p,r} = \max(p, (p-1)^{-1}) \max(r, (r-1)^{-1})$. 另外, 存在 $C_n' > 0$ 使得对任意 L^1 函数列 $\{f_j\}_j$ 均有

$$\Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta_k(f_j)|^2 \Big)^{\frac{r}{2}} \Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C_n' B \max(r, (r-1)^{-1}) \Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

特别有

$$\Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f_j)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n B \widetilde{C}_{p,r} \Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.34}$$

♠

证明 记 $B_1 = \mathbb{C}, B_2 = l^2$, 对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 定义算子

$$\boldsymbol{T}(f) = \{\Delta_k(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

在 Littlewood-Paley 定理5.2的证明中我们已经说明了 $\boldsymbol{T}$ 具有满足条件(5.26)-(5.28)的核 $\boldsymbol{K}$, 另由 Littlewood-Paley 定理的结论(5.13)可知必存在 $r \in (1, \infty)$ 使得 $\boldsymbol{T}$ 将 $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 映入 $L^r(\mathbb{R}^n, l^2)$. 现由 Banach 值奇异积分算子 L^p 有界

性延拓定理的向量值版本4.13可得命题的前两个结论. 又因为显见

$$|\Delta_j(f_j)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta_k(f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

进而(5.34)式成立.

5.1.2 平方函数二进和的 L^p 估计

现在选定 Schwartz 函数 Ψ, 其 Fourier 变换在环 $2^{-1} \leq |\xi| \leq 2^2$ 上紧支, 且 Ψ 满足(5.15)式. (显见如果 $\widehat{\Psi}$ 只支在环 $1 \leq |\xi| \leq 2$ 上, (5.15)式是不可能成立的. 这就是为什么支集环的两端点必须在 1 两端.) Littlewood-Paley 算子 $f \mapsto \Delta_j(f)$ 表示的是函数 f 在二进环 $|\xi| \approx 2^j$ 附近的光滑截断频率局部化. Littlewood-Paley 定理5.2表明这些局部化构成的平方函数与原来函数的 L^p 范数是可比较的. 也就是说, 这个平方函数刻画了原来函数的 L^p 范数. 这就是 Littlewood-Paley 理论的主要特点.

有人可能会问: 如果 Littlewood-Paley 算子 Δ_j 被换成非光滑版本

$$f \mapsto (\chi_{2^j\leq|\xi|<2^{j+1}}\widehat{f}(\xi))^{\vee}(x), \tag{5.35}$$

此时 Littlewood-Paley 定理5.2是否依旧成立? 这一问题有个令人震惊的答案, 该答案表明一维 Fourier 分析与高维 Fourier 分析可能存在某些本质性的不同. (5.35)式中的算子构成的平方函数可以用与 Δ_j 相同的方法来刻画 $L^p(\mathbb{R})$, 但并不能用统一方法来刻画 $L^p(\mathbb{R}^n)(n>1, p\neq 2)$. 这其中的关键点在于除非 $p=2$, 否则单位圆盘的示性函数在 $n\geq 2$ 时不是 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^p 乘子. 下面介绍前面提到的一维结果.

对于 $j\in\mathbb{Z}$, 定义一维算子

$$\Delta_j^{\#}(f)(x) = (\widehat{f}\chi_{I_j})^{\vee}(x), \tag{5.36}$$

其中

$$I_j = [2^j, 2^{j+1}) \cup (-2^{j+1}, -2^j],$$

可见 $\Delta_j^{\#}$ 是算子 Δ_j 中把函数 $\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)$ 替换为集合 $2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}$ 的示性函数而得到的.

定理 5.3 (一维情况下 $\Delta_j^{\#}$ 诱导平方函数的 L^p 估计)

存在常数 C_1 使得对任意 $1<p<\infty$ 与任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 均有

$$\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}}{C_1(p+(p-1)^{-1})^2} \leq \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j^{\#}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_1(p+(p-1)^{-1})^2\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{5.37}$$

证明 取 $\mathbb{R}$ 上的 Schwart 函数 ψ, 令 $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset \{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2^2\}$, 且在集合 $\{1\leq|\xi|\leq 2\}$ 上 $\widehat{\psi}\equiv 1$. 记 Δ_j 是 ψ 诱导的 Littlewood-Paley 算子. 显见 $\operatorname{supp}\widehat{\psi_{2^{-j}}} \subset \{2^{j-1}\leq|\xi|\leq 2^{j+2}\}$, 且在 $\{2^j\leq|\xi|\leq 2^{j+1}\}=I_j$ 上 $\widehat{\psi_{2^{-j}}}\equiv 1$. 观察到 $\Delta_j\Delta_j^{\#} = \Delta_j^{\#}\Delta_j = \Delta_j^{\#}$, 这是因为

$$\begin{aligned}\Delta_j\Delta_j^{\#}(f) &= (\widehat{\psi_{2^{-j}}}\widehat{\Delta_j^{\#}(f)})^{\vee} = (\widehat{\psi_{2^{-j}}}\chi_{I_j}\widehat{f})^{\vee} = (\chi_{I_j}\widehat{f})^{\vee} = \Delta_j^{\#}(f)\\ &= (\chi_{I_j}\widehat{\psi_{2^{-j}}}\widehat{f})^{\vee} = (\chi_{I_j}\widehat{\Delta_j(f)})^{\vee} = \Delta_j^{\#}\Delta_j(f).\end{aligned}$$

为继续证明, 下面需要证明一个引理:

引理 5.1

对任意 $j\in\mathbb{Z}$, 设 I_j 是 $\mathbb{R}$ 上的区间, $T_j: f\mapsto(\chi_{I_j}\widehat{f})^{\vee}$, 则存在常数 $C>0$ 使得对任意 $1<p,r<\infty$ 与 $\mathbb{R}$ 上的

任意平方可积函数 f 均有

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|T_j(f_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\le C\max(r,(r-1)^{-1})\max(p,(p-1)^{-1})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|T_j(f_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\le C\max(r,(r-1)^{-1})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

首先说明若 $I_j=(a,b)$, 则

$$T_j=\frac{i}{2}(M^aHM^{-a}-M^bHM^{-b})$$

其中 $M^a(f)(x)=f(x)e^{i2\pi ax}$, H 是 Hilbert 变换. 这是因为

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}M^aHM^{-a}(f)&=\frac{i}{2}M^a(H(fe^{-i2\pi a\circledast}))=\frac{i}{2}M^a(((fe^{-i2\pi a\circledast})^\wedge(\xi)(-i\operatorname{sgn}\xi))^\vee)\\&=\frac{1}{2}M_a((\widehat{f}(\circledast+a)(\operatorname{sgn}\circledast))^\vee)=\frac{1}{2}(\widehat{f}(\circledast+a)(\operatorname{sgn}\circledast))^\vee(x)e^{i2\pi ax}\\&=\frac{1}{2}(\widehat{f}\operatorname{sgn}(\circledast-a))^\vee(x)\end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{i}{2}M^bHM^{-b}(f)=\frac{1}{2}(\widehat{f}\operatorname{sgn}(\circledast-b))^\vee(x)$$

因此

$$\left(\frac{i}{2}M^aHM^{-a}-\frac{i}{2}M^bHM^{-b}\right)(f)=\frac{1}{2}(\widehat{f}(\operatorname{sgn}(\circledast-a)-\operatorname{sgn}(\circledast-b)))^\vee=(\widehat{f}\chi_{I_j})^\vee=T_j(f)$$

对区间 $I_j=(a_j,b_j)$, 设 $T_j^1:f\mapsto\frac{i}{2}M^{a_j}HM^{-a_j}(f)$, $T_j^2:f\mapsto-\frac{i}{2}M^{b_j}HM^{-b_j}(f)$, 则只需对 $k=1,2$ 证明

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|T_j^k(f_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\le C\max(r,(r-1)^{-1})\max(p,(p-1)^{-1})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|T_j^k(f_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\le C\max(r,(r-1)^{-1})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

即可. 下面着重说明 $k=1$ 的情况, 记 $g_j(x)=e^{-i2\pi a_jx}f_j(x)$, 显见 $|g_j(x)|=|f_j(x)|$, 且

$$|T_j^1(g_j)|=\left|\frac{i}{2}M^{a_j}H(g_j)\right|=\frac{1}{2}|H(g_j)|$$

因此

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|T_j^1(f_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}=\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|H(g_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

现由推论4.11即得结论, $k=2$ 的情况类似可证, 至此引理得证.

回到原来的证明, 根据引理5.1可知

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}&=\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\\&\le C\max(p,(p-1)^{-1})\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\\&\overset{(A)}{\le}CB\max(p,(p-1)^{-1})^2\|f\|_{L^p(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

其中 (A) 是 Littlewood-Paley 定理的结论(5.13).

对于反向不等式, 下面的证明类似于 Littlewood-Paley 中反向不等式(5.17)的证明. 显见对任意 $j\in\mathbb{Z}$ 均有

$\chi_{I_j}(0)=0$. 又因为 $I_j\cap I_{j+1}=\varnothing$, 故对任意 $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 均有

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\chi_{I_j}(x)|^2=1.$$

因为 χ_{I_j} 本身是轴对称的实值函数, 故 $\Delta_j^\#$ 同时是自伴算子与自转置算子. 任取 $f\in L^p(\mathbb{R})$, 下面说明 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^\#\Delta_j^\#(f)$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中收敛, 这便只需说明 $u_N=\sum_{|j|<N}\Delta_j^\#\Delta_j^\#(f)$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中收敛. 现任取 $g\in L^{p'}(\mathbb{R})$ 知 $M>N$ 时有:

$$\begin{aligned}
|\langle u_N,g\rangle-\langle u_M,g\rangle| &= \left|\sum_{N\le|j|<M}\langle\Delta_j^\#(f),\Delta_j^\#(g)\rangle\right|\le\left|\int_{\mathbb{R}}\sum_{N\le|j|<M}\Delta_j^\#(f)\Delta_j^\#(g)dx\right|\\
&\le\left|\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{N\le|j|<M}|\Delta_j^\#(f)|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{N\le|j|<M}|\Delta_j^\#(g)|^2\Big)^{\frac12}dx\right|\\
&\le\left\|\Big(\sum_{N\le|j|<M}|\Delta_j^\#(f)|^2\Big)^{\frac12}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\left\|\Big(\sum_{N\le|j|<M}|\Delta_j^\#(g)|^2\Big)^{\frac12}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\\
&\le\left\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(f)|^2\Big)^{\frac12}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\left\|\Big(\sum_{N\le|j|<M}|\Delta_j^\#(g)|^2\Big)^{\frac12}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

根据前面已证明的结论知 $\|(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(f)|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\mathbb{R})}$ 被 $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ 控制, 又因为 $f\in L^p(\mathbb{R})$, 故 $\|(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(f)|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\mathbb{R})}<\infty$. 同样根据已证明的结论知 $\|(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(g)|^2)^{\frac12}\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}$ 被 $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}$ 控制, 因此可以通过增大 M,N 使得 $\|(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(g)|^2)^{\frac12}\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}$ 任意小. 这说明 $\langle u_N,g\rangle$ 确为关于 N 的收敛列, 设其收敛到 $\Lambda(g)$, 进一步可以说明 Λ 是 $L^{p'}(\mathbb{R})$ 上的线性泛函, 因此 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^\#\Delta_j^\#(f)$ 确为 L^p 函数.

通过与 Littlewood-Paley 定理的(5.17)式证明中完全相同的步骤, 可以说明 $f-\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^\#\Delta_j^\#(f)$ 的 Fourier 变换支在原点, 因此存在唯一多项式 Q 使得 $f-Q$ 作为缓增分布与某个 L^p 函数重合. 又因为 f 本身就是 L^p 函数, 故 $Q\equiv0$. 最后知

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le1}|\langle f,\overline{g}\rangle|=\sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le1}\left|\Big\langle\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^\#\Delta_j^\#(f),\overline{g}\Big\rangle\right|\\
&=\sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le1}\left|\int_{\mathbb{R}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^\#(f),\Delta_j^\#(\overline{g})dx\right|\\
&\le\sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le1}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(f)|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(g)|^2\Big)^{\frac12}dx\\
&=\sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le1}\left\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(f)|^2\Big)^{\frac12}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\left\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(g)|^2\Big)^{\frac12}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\\
&\le\sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\le1}\left\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(f)|^2\Big)^{\frac12}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}C_1(p'+\frac{1}{p'-1})^2\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\\
&\le C_1(p+(p-1)^{-1})^2\left\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j^\#(f)|^2\Big)^{\frac12}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

反向不等式至此得证. □

下面介绍一维情况下 $\Delta_j^\#$ 诱导平方函数 L^p 估计5.3的高维版本, 其中需要将二进区间换成二进矩体. 前文已经表明, 如果把二进区间换成二进环 (而非矩体), 实际上不能得到类似的结果.

现在先约定一些符号. 对 $j\in\mathbb{Z}$, 用 I_j 表示定理5.3中提到的二进区间 $[2^j,2^{j+1})\cup(-2^{j+1},-2^j]$. 对 $j_1,\cdots,j_n\in\mathbb{Z}$, 记 $\mathbb{R}^n$ 中的二进矩体为

$$R_{j_1,\cdots,j_n}=I_{j_1}\times\cdots\times I_{j_n}.$$

严格来说, $R_{j_1,\cdots,j_n}$ 本身不是矩体, 而是 2^n 个矩体的并, 但是方便起见我们还是称它为矩体. 另外为了符号的便利性, 记

$$R_{\boldsymbol{j}}=R_{j_1,\cdots,j_n},\quad \boldsymbol{j}=(j_1,\cdots,j_n)\in\mathbb{Z}^n.$$

观察到如果 $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}' \in \mathbb{Z}^n$ 不同, 则矩体 $R_{\boldsymbol{j}}, R_{\boldsymbol{j}'}$ 的内部是不交的, 同时全体 $R_{\boldsymbol{j}}$ 的并正是 $\mathbb{R}^n \backslash (\bigcup_{k=1}^{n} \{x_k = 0\})$. 也就是说, 集族 $\{R_{\boldsymbol{j}}\}_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^n}$ 可以铺满 $\mathbb{R}^n$, 该集族称为 $\mathbb{R}^n$ 的二进分解. 约定

$$\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)(x) = (\widehat{f}\chi_{R_{\boldsymbol{j}}})^{\vee}(x), \tag{5.38}$$

利用这些符号, 可以得到定理5.3的高维版本:

定理 5.4 (高维情况下 $\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}$ 诱导平方函数的 L^p 估计)

对 $\mathbb{R}$ 上的 Schwartz 函数 ψ, 设其满足 $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$, 定义算子

$$\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)(x) = (\widehat{\psi}(2^{-j_1}\xi_1) \cdots \widehat{\psi}(2^{-j_n}\xi_n)\widehat{f}(\xi))^{\vee}(x), \tag{5.39}$$

其中 $\boldsymbol{j} = (j_1, \cdots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$, 则存在只关于维数的常数 C_n 使得

$$\left\| \left(\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^n} |\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n(p + (p-1)^{-1})^n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.40}$$

另设 $\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}$ 是依(5.38)式定义的算子, 则存在正常数 C_n 使得对任意 $1 < p < \infty$ 与任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{C_n(p + (p-1)^{-1})^{2n}} \le \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^n} |\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n(p + (p-1)^{-1})^{2n} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.41}$$

证明 先证明(5.40)式. 由 $\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)$ 的定义可知若 $\boldsymbol{j} = (j_1, \cdots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$, 则

$$\Delta_{\boldsymbol{j}}(f) = \Delta_{j_1}^{(1)} \cdots \Delta_{j_n}^{(n)}(f),$$

其中 $\Delta_{j_r}^{(r)}$ 是一维算子: $f \mapsto (\widehat{f}\widehat{\psi}(2^{-j_r}\xi_r))^{\vee}$, 其中 $\widehat{f}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f 关于 x_r 的 Fourier 变换. 现在可以说明(5.40)式就是一维情形的推论, 例如当 $n = 2$ 时, 由 Littlewood-Paley 定理的向量值版本5.1知

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^2} |\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{j_2 \in \mathbb{Z}} |\Delta_{j_1}^{(1)}\Delta_{j_2}^{(2)}(f)(x_1, x_2)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx_1 \right] dx_2 \\
&\le C^p \max(p, (p-1)^{-1})^p \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j_2 \in \mathbb{Z}} |\Delta_{j_2}^{(2)}(f)(x_1, x_2)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx_1 \right] dx_2 \\
&= C^p \max(p, (p-1)^{-1})^p \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j_2 \in \mathbb{Z}} |\Delta_{j_2}^{(2)}(f)(x_1, x_2)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx_2 \right] dx_1 \\
&\le C^{2p} \max(p, (p-1)^{-1})^{2p} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2)|^p dx_2 \right] dx_1 \\
&= C^{2p} \max(p, (p-1)^{-1})^{2p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p.
\end{aligned}$$

$n > 2$ 的情形归纳即得.

下面证明(5.41)右式. 取 Schwartz 函数 ψ 满足 $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset [-4, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 4]$, 且在 $[-2, -1] \cup [1, 2]$ 上 $\widehat{\psi} \equiv 1$, 则容易验证 $\widehat{\psi}(2^{-j_1}\xi_1) \cdots \widehat{\psi}(2^{-j_n}\xi_n)$ 在矩体 $R_{\boldsymbol{j}}$ 上恒为 1, 故

$$\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#} = \Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}\Delta_{\boldsymbol{j}}.$$

类似于一维情况为了给出平方函数上界估计而证明的引理5.1, 这里我们也需要先证明下述引理:

引理 5.2

设 $R_{\boldsymbol{j}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上各边平行于坐标轴的矩体, $S : f \mapsto (\widehat{f}\chi_{R_{\boldsymbol{j}}})^{\vee}, \boldsymbol{j} = (j_1, \cdots, j_n)$, 则存在只关于维数的常数 $C_n < \infty$ 使得对任意 $1 < p, r < \infty$ 与 $\mathbb{R}^n$ 上的任意平方可积函数 $f_{\boldsymbol{j}}$ 均有

$$\left\| \left(\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^n} |S_{\boldsymbol{j}}(f_{\boldsymbol{j}})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n \max(r, (r-1)^{-1})^n \max(p, (p-1)^{-1})^n \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^n} |f_{\boldsymbol{j}}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

容易证明若 $f_{\boldsymbol{j}}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则对每个分量而言 $f_{\boldsymbol{j}}$ 同样是 L^2 函数. 现设 $n=2, R_{\boldsymbol{j}}=I_{j_1}\times I_{j_2}$, 方便起见, 记

$$\mathcal{F}_{x_k}[f](\xi_k)=\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)e^{i2\pi x_k\xi_k}dx_k,$$
$$\mathcal{F}_{x_k}^{-1}[f](x_k)=\int_{\mathbb{R}} f(\xi_1,\cdots,\xi_k,\cdots,\xi_n)e^{i2\pi\xi_k x_k}d\xi_k,$$

则知

$$\begin{aligned}
\left\|\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^2}|S_{\boldsymbol{j}}(f_{\boldsymbol{j}})|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{j_1\in\mathbb{Z}}\sum_{j_2\in\mathbb{Z}}|(\widehat{f_{(j_1,j_2)}}(\xi_1,\xi_2)\chi_{I_{j_1}}(\xi_1)\chi_{I_{j_2}}(\xi_2))^{\vee}(x_1,x_2)|^r\Big)^{\frac{p}{r}}dx_1\right]dx_2\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{j_1\in\mathbb{Z}}\sum_{j_2\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}_{x_1}^{-1}[\mathcal{F}_{x_2}^{-1}[\mathcal{F}_{x_1}[\mathcal{F}_{x_2}[f_{(j_1,j_2)}]]\chi_{I_{j_2}}\chi_{I_{j_1}}]](x_1,x_2)|^r\Big)^{\frac{p}{r}}dx_1\right]dx_2\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{j_1\in\mathbb{Z}}\sum_{j_2\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}_{x_1}^{-1}[\mathcal{F}_{x_2}^{-1}[\mathcal{F}_{x_1}[\mathcal{F}_{x_2}[f_{(j_1,j_2)}]]\chi_{I_{j_2}}]\chi_{I_{j_1}}](x_1,x_2)|^r\Big)^{\frac{p}{r}}dx_1\right]dx_2\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{j_1\in\mathbb{Z}}\sum_{j_2\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}_{x_1}^{-1}[\mathcal{F}_{x_1}[\mathcal{F}_{x_2}^{-1}[\mathcal{F}_{x_2}[f_{(j_1,j_2)}]\chi_{I_{j_2}}]]\chi_{I_{j_1}}](x_1,x_2)|^r\Big)^{\frac{p}{r}}dx_1\right]dx_2\\
&\overset{\text{(A)}}{\leq} \int_{\mathbb{R}}\left[C_{p,r}\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{j_1\in\mathbb{Z}}\sum_{j_2\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}_{x_2}^{-1}[\mathcal{F}_{x_2}[f_{(j_1,j_2)}]\chi_{I_{j_2}}](x_1,x_2)|^r\Big)^{\frac{p}{r}}dx_1\right]dx_2\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[C_{p,r}\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{j_2\in\mathbb{Z}}\sum_{j_1\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}_{x_2}^{-1}[\mathcal{F}_{x_2}[f_{(j_1,j_2)}]\chi_{I_{j_2}}](x_1,x_2)|^r\Big)^{\frac{p}{r}}dx_2\right]dx_1\\
&\overset{\text{(B)}}{\leq} \int_{\mathbb{R}}\left[C_{p,r}^2\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{j_2\in\mathbb{Z}}\sum_{j_1\in\mathbb{Z}}|f_{(j_1,j_2)}(x_1,x_2)|^r\Big)^{\frac{p}{r}}dx_2\right]dx_1 = C_{p,r}^2\left\|\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^2}|f_{\boldsymbol{j}}|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

其中 (A),(B) 是引理5.1, $C_{p,r}=C\max(r(r-1)^{-1})\max(p,(p-1)^{-1})$. $n>2$ 的情形归纳即得. 引理至此得证.

回到原来的证明, 由引理5.2与(5.40)式可知

$$\begin{aligned}
\left\|\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left\|\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\max(p,(p-1)^{-1})^n\left\|\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq CB\max(p,(p-1)^{-1})^{2n}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

这便是(5.41)右式.

在 $1<p<\infty$ 时, (5.41)左式的证明类似于 Littlewood-Paley 定理中结论(5.17)的证明. 任取 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\operatorname{supp}\widehat{f}\cap(\bigcup_{1\leq k\leq n}\{x_k=0\})=\varnothing$, 下面说明 $\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中收敛. 若记 $|\boldsymbol{j}|=|j_1|+\cdots+|j_n|$, 这便只需说明 $u_N=\sum_{|\boldsymbol{j}|<N}\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中收敛. 任取 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 知 $M>N$ 时

$$\begin{aligned}
|\langle u_N,g\rangle-\langle u_M,g\rangle| &= \left|\sum_{N\leq|\boldsymbol{j}|\leq M}\langle\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f),\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(g)\rangle\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{N\leq|\boldsymbol{j}|\leq M}\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(g)dx\right|\\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{N\leq|\boldsymbol{j}|<M}|\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{N\leq|\boldsymbol{j}|<M}|\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\$}(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}dx\right|\\
&\leq \left\|\Big(\sum_{N\leq|\boldsymbol{j}|<M}|\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\left\|\Big(\sum_{N\leq|\boldsymbol{j}|<M}|\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \left\|\Big(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{N}^n}|\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\left\|\Big(\sum_{N\leq|\boldsymbol{j}|<M}|\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

最后得到的式子随着 M,N 的增大可以任意小, 进而 $\langle u_N, g\rangle$ 是关于 N 的收敛列, 设其极限为 $\Lambda(g)$, 进而可以说明 Λ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函, 因此 $\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}(f)$ 确实是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的函数. 通过与(5.32)式相同的步骤与 f 是 Schwartz 函数即得 Schwartz 函数情况下的(5.41)左式.

现在对于一般的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 根据稠密性可知 f 可由频率紧支在坐标平面 $\{x_k=0\}(k=1,\cdots,n)$ 外的 Schwartz 函数列在 L^p 意义下逼近, 进而在 Schwartz 函数情况下的(5.41)左式两端对逼近序列取极限即得 L^p 情况下的(5.41)左式, 其中平方函数 L^p 范数列的收敛性需要用到前面已经证明的(5.41)右式. 至此定理即证. □

观察到只要 Schwartz 函数 ψ 选的足够好, 则(5.40)式的反向不等式也成立. 准确来说, 设 $\widehat{\psi}(\xi)$ 是 $\mathbb{R}$ 中支在集合 $\frac{9}{10}\leq|\xi|\leq\frac{21}{10}$ 上的光滑实值偶函数, 且其满足

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)=1,\quad \xi\in\mathbb{R}\backslash\{0\};\tag{5.42}$$

就有:

推论 5.1 ($\Delta_{\boldsymbol{j}}$ 诱导平方函数的下界估计)

设 ψ 满足(5.42)式, $\Delta_{\boldsymbol{j}}$ 依(5.39)式定义, f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^p 函数, 满足 $(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2)^{\frac{1}{2}}\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 则存在只关于维数和 ψ 的常数 C_n 使得平方函数下界估计

$$\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{C_n(p+(p-1)^{-1})^n}\leq\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\tag{5.43}$$

成立.

证明 如果已知的是 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2=1$ 而非(5.42)式, 就可以仿照 Littlewood-Paley 定理中下界估计(5.17)的方法进行证明. 在已知(5.42)式的情况下, 我们给出另一种证明方法.

首先对 Schwartz 函数 f 证明(5.43)式, 知

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2&=\left\|\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}(\Delta_{\boldsymbol{j}}(f))^{\wedge}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\psi}(2^{-j_1}\xi_1)\cdots\widehat{\psi}(2^{-j_n}\xi_n)\widehat{f}(\xi)\right)^2d\xi\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j_n\in\mathbb{Z}}\cdots\sum_{j_1\in\mathbb{Z}}\widehat{\psi}(2^{-j_1}\xi_1)\cdots\widehat{\psi}(2^{-j_n}\xi_n)\right)^2\widehat{f}(\xi)^2d\xi\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)^2d\xi=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

因此级数 $\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)$ 在 L^2 意义下收敛到 f, 进而它也在 $\mathcal{S}'$ 意义下收敛到 f. 现取 g 同样是 Schwartz 函数, 用内积 $\langle f,\overline{g}\rangle$ 表示分布 $\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)$ 在测试函数 $\overline{g}$ 上的作用:

$$\begin{aligned}
|\langle f,\overline{g}\rangle|&=\left|\left\langle\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\boldsymbol{j}}(f),\overline{g}\right\rangle\right|=\left|\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\langle\Delta_{\boldsymbol{j}}(f),\overline{g}\rangle\right|\\
&\overset{(A)}{=}\left|\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_n)\in\mathbb{Z}^n\\ \exists r(|k_r-j_r|\leq1)}}\langle\Delta_{\boldsymbol{j}}(f),\overline{\Delta_{\boldsymbol{k}}(g)}\rangle\right|\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_n)\in\mathbb{Z}^n\\ \exists r(|k_r-j_r|\leq1)}}|\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)||\Delta_{\boldsymbol{k}}(g)|dx\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\left(|\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|\sum_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_n)\in\mathbb{Z}^n\\ \exists r(|k_r-j_r|\leq1)}}|\Delta_{\boldsymbol{k}}(g)|\right)dx\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n\\ \exists\boldsymbol{j}\exists r(|k_r-j_r|\leq1)}}|\Delta_{\boldsymbol{k}}(g)|^2\right)^{\frac{1}{2}}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le 3^n \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n} |\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} |\Delta_{\boldsymbol{k}}(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\le 3^n \Big\| \Big(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n} |\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big\| \Big(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^n} |\Delta_{\boldsymbol{k}}(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_n^{-1} \max(p', (p'-1)^{-1})^n \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \Big\| \Big(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n} |\Delta_{\boldsymbol{j}}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned} \tag{5.44}
$$

其中 (A) 是因为对每个固定的变量 x_r, 考察与 x_r 有关的指标 j_r, k_r, 知在 x_r 方向上有

$$\langle \Delta_{j_r}(f), \overline{\Delta_{k_r}(g)} \rangle = \langle \widehat{\Delta_{j_r}(f)}, \widehat{\Delta_{k_r}(g)} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(2^{-j_r}\xi_r)\widehat{\psi}(2^{-k_r}\xi_r)\widehat{f}(\xi_r)\widehat{g}(\xi_r)d\xi_r$$

已知

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi}(2^{-j_r}\circledast) \subset \{\frac{9}{10}\cdot 2^{j_r} \le |\xi_r| \le \frac{21}{10}\cdot 2^{j_r}\}$$

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi}(2^{-k_r}\circledast) \subset \{\frac{9}{10}\cdot 2^{k_r} \le |\xi_r| \le \frac{21}{10}\cdot 2^{k_r}\}$$

于是要想 $\langle \Delta_{j_r}(f), \overline{\Delta_{k_r}(g)} \rangle \ne 0$, 就需要

$$\frac{9}{10}\cdot 2^{j_r} \le \frac{21}{10}\cdot 2^{k_r}, \quad \frac{9}{10}\cdot 2^{k_r} \le \frac{21}{10}\cdot 2^{j_r}$$

于是 $k_r - 1 \le j_r \le k_r + 1$, 亦即 $|k_r - j_r| \le 1$. 现在在(5.44)式两端对 $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le 1$ 取上确界即得(5.43)式.

现若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 用 $\Delta_{\boldsymbol{j}}^{\#}$ 诱导平方函数的 L^p 估计5.4的证明末尾提到的过程即得结论. □

5.1.3 L^p 上的正交性损失

下面给出两例来说明为什么(5.1)式两端在指标 2 换成 $q \ne 2$ 时就不成立了. 准确来说, 下面说明如果函数 f_j 的 Fourier 变换支在不交集上, 则不等式

$$\Big\|\sum_j f_j\Big\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \le C_p \sum_j \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \tag{5.45}$$

在 $p > 2$ 时不能成立, 而不等式

$$\sum_j \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \le C_p \Big\|\sum_j f_j\Big\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \tag{5.46}$$

在 $p < 2$ 时不能成立. (5.45),(5.46)两式中 C_p 均与 f_j 的选取无关.

例 5.1 取定 Schwartz 函数 ζ 满足其 Fourier 变换非负, 且 $\operatorname{supp}\widehat{\zeta} \subset \{|\xi| \le \frac{1}{4}\}$. 设 N 是足够大的整数, 取

$$f_j(x) = e^{i2\pi jx}\zeta(x)$$

则

$$\widehat{f_j}(\xi) = \widehat{\zeta}(\xi - j)$$

且 $\widehat{f_j}$ 有不交支集. 显见

$$\sum_{j=0}^{N} \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = (N+1)\|\zeta\|_{L^p(\mathbb{R})}^p.$$

另一方面, 有下述估计成立:

$$
\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j=0}^{N} f_j\Big\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{i2\pi(N+1)x}-1}{2^{i2\pi x}-1}\right|^p |\zeta(x)|^p dx \\
&\overset{(A)}{\le} c\int_{|x|<\frac{1}{10}(N+1)^{-1}} \frac{(N+1)^p|x|^p}{|x|^p} = C_\zeta (N+1)^{p-1}
\end{aligned}
$$

其中 (A) 是因为一方面 ζ 在 $x=0$ 附近非零[5], 根据被积函数连续性得到积分区域的缩小, 另一方面用微分中值定理得到被积函数的估计. 现若 $p>2$, 则总会存在足够大的 N 使得(5.45)式不成立.

例 5.2 下面说明为什么 $p<2$ 时(5.46)式不成立. 取 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 Ψ, 令 $\widehat{\Psi}$ 非负, $\operatorname{supp}\widehat{\Psi}\subset[\frac{7}{8},\frac{17}{8}]$, 且在 $[\frac{9}{8},\frac{15}{8}]$ 上 $\widehat{\Psi}\equiv 1$. 容易验证

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)^2=1,\quad \forall\xi>0.$$

现在把 $\widehat{\Psi}$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 并记 Δ_j 是 Ψ 所诱导的 Littlewood-Paley 算子. 另取 $\mathbb{R}$ 上的非零 Schwartz 函数 φ, 令 $\widehat{\varphi}$ 非负, $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}\subset[\frac{11}{8},\frac{13}{8}]$. 取 N 是足够大的正整数, 设

$$f_j(x)=e^{i2\pi\frac{12}{8}2^jx}\varphi(x),\quad j=1,2,\cdots,N \tag{5.47}$$

则函数 $\widehat{f_j}(\xi)=\widehat{\varphi}(\xi-\frac{12}{8}2^j)$ 支在集合 $[\frac{11}{8}+\frac{12}{8}2^j,\frac{13}{8}+\frac{12}{8}2^j]$, 在 $j\geq 3$ 时该集合被包含在 $[\frac{9}{8}2^j,\frac{15}{8}2^j]$ 内. 也就是说, $j\geq 3$ 时 $\widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)$ 在 $\operatorname{supp}\widehat{f_j}$ 上恒为 1, 这表明 $j\geq 3$ 时

$$\Delta_j(f_j)=f_j.$$

结合(5.33)式[6]可知在 $N\geq 3$ 时

$$\left\|\sum_{j=3}^N f_j\right\|_{L^p(\mathbb{R})}=\left\|\sum_{j=3}^N\Delta_j(f_j)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq C_p\left\|\left(\sum_{j=3}^N|f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}=C_p\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}(N-2)^{\frac{1}{2}},\quad 1<p<\infty$$

另一方面, 由(5.47)式显见

$$\left(\sum_{j=3}^N\|f_j\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}(N-2)^{\frac{1}{p}}$$

令 $N\to\infty$, 因为 $\frac{1}{p}>\frac{1}{2}$, 故 $\left(\sum_{j=3}^N\|f_j\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 的增长总会快于 $\left\|\sum_{j=3}^N f_j\right\|_{L^p(\mathbb{R})}$ 的增长, 至此即知就算 f_j 具有不交频率支集, $p<2$ 时(5.46)式依旧不会成立.

例 5.3 通过与例5.2类似的构造, 可以说明(5.13)左式出现的 l^2 范数也是必要的. 为此设 Ψ,Δ_j 与例5.2相同, 固定 $1<p<\infty, q<2$. 下面说明不等式

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(f)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C_{p,q}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{5.48}$$

不成立. 取 $f=\sum_{j=3}^N f_j$, 其中 f_j 依照(5.47)式定义, $N\geq 3$, 则(5.48)左式被 $\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}(N-2)^{\frac{1}{q}}$ 控制了下界, 而(5.48)右式被 $\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}(N-2)^{\frac{1}{2}}$ 控制了上界. 令 $N\to\infty$ 即知(5.48)式在 $q<2$ 时不可能成立.

例 5.4 对 $1<p<\infty, 2<q<\infty$, 就算 Ψ 满足(5.15)式, 不等式

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C_{p,q}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j(g)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{5.49}$$

也不会成立. 这是因为取 Δ_j 是例5.2中定义的 Littlewood-Paley 算子, 设(5.49)式在 $q>2$ 时对这些 Δ_j 确实成立, 则由 Δ_j 的自伴性与对偶性可知

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\Delta_k(g)|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}&\overset{(A)}{=}\sup_{\|\|\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^q}\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Delta_k(g)\overline{h_k}dx\right|\\&\leq\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\sup_{\|\|\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^q}\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq 1}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\Delta_k(h_k)}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\\&\overset{(B)}{\leq}C\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\sup_{\|\|\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^q}\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq 1}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_j\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Delta_k(h_k)\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

[5]这又是因为 $\int_{\mathbb{R}}\widehat{\zeta}d\xi>0$, 于是 $\zeta(0)=(\widehat{\zeta})^\vee(0)>0$.

[6]因为 $0\notin\operatorname{supp}\widehat{\Psi}$, 故 $\widehat{\Psi}(0)=\int_{\mathbb{R}}\Psi dx=0$. 又因为延拓后的 $\widehat{\Psi}$ 是 Schwartz 函数, 故 Ψ 也可以看成 Schwartz 函数, 这便满足了(5.33)式对 Ψ 的要求.

$$\overset{(C)}{\leq} C'\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\sup_{\|\|\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^q}\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq 1}\left\{\sum_{l=-1}^{1}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j\Delta_{j+l}(h_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|\right\}$$

$$\overset{(D)}{\leq} C''\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\sup_{\|\|\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{l^q}\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq 1}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|h_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} = C''\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}$$

其中 (A) 是 $L^p(X,B)$ 的共轭空间性质4.11; (B) 是(5.49)式; (C) 一方面是 Minkowski 不等式, 另一方面根据 Δ_j 的支集构造知 $|l|\geq 2$ 时 $\Delta_j\Delta_{j+l}=0$; (D) 是把(5.34)式用了两次. 又因为 $q'<2$, 上述过程实际上说明的是(5.48)式, 但这个式子在 $q'<2$ 时本身不成立, 矛盾! 故只能有(5.49)式不成立.

综上所述, 如果在 Littlewood-Paley 定理中 Ψ 同时满足(5.12),(5.16)式, 则 L^p 范数内的 l^2 范数不能换成 $l^q(q\neq 2)$ 范数.

5.1.4 两个乘子定理

现在回到曾经在 Fourier 乘子部分介绍过的空间 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^\varkappa)$. 乘子定理的动机在于寻找定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^∞ 函数成为 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 中元素的充分条件. 本节我们介绍提供这种充分条件的两个基本定理, 即 Marcinkiewicz 乘子定理与 Hörmander-Mihlin 乘子定理. 这两个定理都是前面介绍过的 Littlewood-Paley 定理的结论.

通过对 $\mathbb{R}^n$ 作二进分解, 可以把任意 L^∞ 函数 m 写成和式

$$m=\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n} m\chi_{R_{\boldsymbol{j}}}\ \text{a.e.}$$

其中 $\boldsymbol{j}=(j_1,\cdots,j_n), R_{\boldsymbol{j}}=I_{j_1}\times\cdots\times I_{j_n}, I_k=[2^k,2^{k+1})\cup(-2^{k+1},-2^k]$. 对 $\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n$, 记 $m_{\boldsymbol{j}}=m\chi_{R_{\boldsymbol{j}}}$. 做好这些准备工作后, 下面我们用向量值不等式刻画 $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$.

命题 5.2 ($\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 的向量值不等式刻画)

设 $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $m_{\boldsymbol{j}}=m\chi_{R_{\boldsymbol{j}}}$, 则 $m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$(即存在常数 c_p 使得对任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 有 $\|(\widehat{f}m)^\vee\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq c_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$) 当且仅当存在 $C_p>0$ 使得

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|(\widehat{f_{\boldsymbol{j}}}m_{\boldsymbol{j}})^\vee|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C_p\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|f_{\boldsymbol{j}}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{5.50}$$

对任意 $\{f_{\boldsymbol{j}}\}_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 均成立.

♠

证明 设 $m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 由引理5.2可得

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|(\chi_{R_{\boldsymbol{j}}}m\widehat{f_{\boldsymbol{j}}})^\vee|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C_p\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|(m\widehat{f_{\boldsymbol{j}}})^\vee|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C_p\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|f_{\boldsymbol{j}}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中第二个不等式用到了线性算子的 l^2 延拓4.14(a)(注意到 $p=q$ 时定理4.14中的 $C_{p,q}=1$).

相反地, 若对任意函数列 $\{f_{\boldsymbol{j}}\}_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 均有(5.50)式成立, 则取定函数 f, 在(5.50)式中令 $f_{\boldsymbol{j}}=(\widehat{f}\chi_{R_{\boldsymbol{j}}})^\vee$(其中 $R_{\boldsymbol{j}}$ 是指标为 $\boldsymbol{j}=(j_1,\cdots,j_n)\in\mathbb{Z}^n$ 的二进方体). 知

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|(\widehat{f}m\chi_{R_{\boldsymbol{j}}})^\vee|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C_p\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n}|(\widehat{f}\chi_{R_{\boldsymbol{j}}})^\vee|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

现由高维情况下 $\Delta_{\boldsymbol{j}}^\#$ 诱导平方函数的 L^p 估计5.4可知上左式在忽略常数倍的意义下等价于 $\|(\widehat{f}m)^\vee\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, 而上右式在忽略常数倍的意义下等价于 $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, 因此上式实际上等价于不等式

$$\|(\widehat{f}m)^\vee\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq c_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

该不等式说明了 $m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. □

5.1.5 $\mathbb{R}$ 上的 Marcinkiewicz 乘子定理

$\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 的向量值不等式刻画5.2表明 m 在每个二进方体 R_j 上的行为在决定 m 是否为 L^p 乘子这件事上至关重要. Marcinkiewicz 乘子定理给出了针对 m 在任意二进方体 R_j 上的限制的充分条件. 在阐述定理前, 我们首先通过下面的例子来展示定理的主要想法. 设 m 是在 $-\infty$ 附近衰减的有界函数, 它在每一点均可导, 且它的导函数还是可积的. 则有

$$m(\xi)=\int_{-\infty}^{\xi}m'(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[t,\infty)}(\xi)m'(t)dt$$

因而对 Schwartz 函数 f 有

$$(\widehat{f}m)^{\vee}=\int_{\mathbb{R}}(\widehat{f}\chi_{[t,\infty)})^{\vee}m'(t)dt.$$

因为算子 $f\mapsto(\widehat{f}\chi_{[t,\infty)})^{\vee}$ 是 $L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})$ 的, 故

$$\|(\widehat{f}m)^{\vee}\|_{L^p(\mathbb{R})}\le C_p\|m'\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

这便说明 $m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Marcinkiewicz 乘子定理正是这一结果的拓展, 它的证明需要用到 Littlewood-Paley 定理. 下面我们先从一维情况开始.

定理 5.5 (Marcinkiewicz 乘子定理)

设 $m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是有界函数, 且它在每个二进区间 $(2^j,2^{j+1})\cup(-2^{j+1},-2^j)(j\in\mathbb{Z})$ 上都是 C^1 函数. 另设 m 的导函数 m' 满足

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left[\int_{-2^{j+1}}^{-2^j}|m'(\xi)|d\xi+\int_{2^j}^{2^{j+1}}|m'(\xi)|d\xi\right]\le A<\infty.\tag{5.51}$$

则对任意 $1<p<\infty$ 均有 $m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, 且存在常数 $C>0$ 使得

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}\le C\max(p,(p-1)^{-1})^6(\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+A).\tag{5.52}$$

♡

证明 因为函数 m 在 $(2^j,2^{j+1})$ 上有可积的导函数, 故其在该区间上为有界变差函数, 进而它可以被表为两个递增函数之差. 因此 m 在点 2^j 与 2^{j+1} 处分别具有左极限和右极限, 故通过定义 m 在这两个端点的值可使 m 在 2^j 处右连续, 在 -2^j 处左连续.

记 $I_j=[2^j,2^{j+1})\cup(-2^{j+1},-2^j],I_j^+=[2^j,2^{j+1})(j\in\mathbb{Z})$. 对于 $\mathbb{R}$ 上给定的区间 I, 记算子 Δ_I 为 $\Delta_I(f)=(\widehat{f}\chi_I)^{\vee},\Delta_{I_j^+}(f)=(\widehat{f}\chi_{I_j})^{\vee}$. 现取 m 是满足题意的函数, 记 $m(\xi)=m_+(\xi)+m_-(\xi)$, 其中 $m_+(\xi)=m(\xi)\chi_{\xi\ge0},m_-(\xi)=m(\xi)\chi_{\xi<0}$, 接下来说明 m_+,m_- 均为 L^p 乘子. 因为 m' 在每个形如 $[2^j,\xi](2^j\le\xi<2^{j+1})$ 的区间上均可积, 故由微积分基本定理知

$$m(\xi)=m(2^j)+\int_{2^j}^{\xi}m'(t)dt,\quad 2^j\le\xi<2^{j+1},$$

因此对 $\mathbb{R}$ 上的 Schwartz 函数 f 有

$$m(\xi)\widehat{f}(\xi)\chi_{I_j^+}(\xi)=m(2^j)\widehat{f}(\xi)\chi_{I_j^+}(\xi)+\int_{2^j}^{2^{j+1}}\widehat{f}(\xi)\chi_{[t,\infty)}(\xi)\chi_{I_j^+}(\xi)m'(t)dt.$$

进而

$$(\widehat{f}\chi_{I_j}m_+)^{\vee}=(\widehat{f}m\chi_{I_j^+})^{\vee}=m(2^j)\Delta_{I_j^+}(f)+\int_{2^j}^{2^{j+1}}\Delta_{[t,\infty)}\Delta_{I_j^+}(f)m'(t)dt,$$

故由(5.51)式得

$$\begin{aligned}|(\widehat{f}\chi_{I_j}m_+)^{\vee}|&\le\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|\Delta_{I_j^+}(f)|+\left|\int_{2^j}^{2^{j+1}}\Delta_{[t,\infty)}\Delta_{I_j^+}(f)(m'(t))^{\frac12}(m'(t))^{\frac12}dt\right|\\&\le\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|\Delta_{I_j^+}(f)|+\left(\int_{2^j}^{2^{j+1}}|\Delta_{[t,\infty)}\Delta_{I_j^+}(f)|^2|m'(t)|dt\right)^{\frac12}\left(\int_{2^j}^{2^{j+1}}|m'(t)|dt\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

$$\leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|\Delta_{I_j^+}(f)| + A^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} |\Delta_{[t,\infty)}\Delta_{I_j^+}(f)|^2|m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

两边同取 l^2 范数得

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |(\widehat{f}\chi_{I_j}m_+)^\vee|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_{I_j^+}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty |\Delta_{[t,\infty)}\Delta^\#_{[\log_2 t]}(f_+)|^2|m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $f_+ = (\widehat{f}\chi_{[0,\infty)})^\vee$. 为估计上右式第二项, 首先阐明断言下述引理成立:

引理 5.3

设 $(T, d\mu)$ 是 σ 有限测度空间. 对任意 $t\in T$, 设 $R(t)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中各边平行于坐标轴的矩体, 其满足映射 $t\mapsto R(t)$ 可测. 则存在常数 $C_n > 0$ 使得对任意 $1 < p < \infty$ 与 $\mathbb{R}^n$ 上的任意平方可积函数族 $\{f_t\}_{t\in T}$ 而言, 只要映射 $t\mapsto f_t(x)$ 可测, 对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 就有

$$\left\|\left(\int_T |(\widehat{f_t}\chi_{R(t)})^\vee|^2 d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \max(p,(p-1)^{-1})^n\left\|\left(\int_T |f_t|^2 d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

根据引理可得

$$A^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\int_0^\infty |\Delta_{[t,\infty)}\Delta^\#_{[\log_2 t]}(f_+)|^2|m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\max(p,(p-1)^{-1})A^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\int_0^\infty |\Delta^\#_{[\log_2 t]}(f_+)|^2|m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

从取整函数的性质与 $\Delta_{I_j^+}$ 的定义可知上右式中 L^p 范数内的积分可以写成

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_{I_j^+}(f)|^2\int_{I_j^+}|m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

又由(5.51)式可得

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_{I_j^+}(f)|^2\int_{I_j^+}|m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq A^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_{I_j^+}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

根据一维情况下 $\Delta_j^\#$ 诱导平方函数的 L^p 估计5.3知

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_{I_j^+}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C'\max(p,(p-1)^{-1})^2\|(\widehat{f}\chi_{(0,\infty)})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

利用 Hausdorff-Young 不等式2.8可以说明 $1 < p \leq 2$ 时 $\|(\widehat{f}\chi_{(0,\infty)})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \max(p,(p-1)^{-1})\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$, 再由对偶性可得 $p > 2$ 时该不等式也成立, 从而上右式被 $\max(p,(p-1)^{-1})^3\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ 的常数倍控制. 综合上述诸式可得

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |(\widehat{f}\chi_{I_j}m_+)^\vee|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C''\max(p,(p-1)^{-1})^4(A+\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})})\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{5.53}$$

于是由一维情况下 $\Delta_j^\#$ 诱导平方函数的 L^p 估计5.3的下界估计知

$$\|(\widehat{f}m_+)^\vee\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\max(p,(p-1)^{-1})^2\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |(\widehat{f}\chi_{I_j}m_+)^\vee|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\max(p,(p-1)^{-1})^6(A+\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})})\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

这便对 m_+ 证明了(5.52)式, 对 m_- 的证明是类似的, 将所得两式相加即得欲证.

下面还需证明引理5.3. 当 $n=1$ 时, $R(t)$ 退化为区间 $I(t)$, 不妨设 $I(t) = (a(t), b(t))$, 利用与引理5.1完全相同的证明可以说明算子 $T_t : f\mapsto (\chi_{I(t)}\widehat{f})^\vee$ 能表为

$$T_t = \frac{i}{2}(M^{a(t)}HM^{-a(t)} - M^{b(t)}HM^{-b(t)})$$

其中 $M^{a(t)}(f)(x) = f(x)e^{i2\pi a(t)x}$. 另记 $T_t^1 : f\mapsto \frac{i}{2}M^{a(t)}HM^{-a(t)}(f), T_t^2 : f\mapsto \frac{i}{2}M^{b(t)}HM^{-b(t)}(f)$, 往证

$$\|\|T_t^k(f_t)\|_{L^2(T,d\mu)}\|_{L^p(\mathbb{R},dx)} \leq C_n\max(p,(p-1))\|\|f_t\|_{L^2(T,d\mu)}\|_{L^p(\mathbb{R},dx)}, \quad k=1,2$$

下面着重说明 $k=1$ 的情况.

参考文献

[ABAH] A. B. 布林斯基, A. H. 施利亚耶夫. 随机过程论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[CR] Colin Bennett, Robert Sharpley. *Interpolation of Operators*[M]. Florida: Academic Press, Inc., 1988.

[CY] Cong Wu, Yongjin Li. *On the Triangle Inequality in Quasi-Banach Spaces*[J]. J. Inequal. Pure and Appl. Math., 9(2)(2008), Art. 41, 4 pp.

[DY] 丁勇. 现代分析基础 (第 2 版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2013.

[FL] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[Fou] Jean Baptiste Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*[M]. Paris: Chez Firmin Didot, Père Et Fils, 1822.

[HJR] Hajer Bahouri, Jean-Yves Chemin, Raphael Danchin. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*[M]. Berlin: Springer, 2011.

[JYC] Jean-Yves Chemin. *Localization in Fourier space and Navier-Stokes system*. 2005.

[KY] Kosaku Yosida. *Functional Analysis*[M]. New York: Springer, 1980.

[LG1] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*[M]. New York: Springer, 2014.

[LG2] Loukas Grafakos. *Modern Fourier Analysis*[M]. New York: Springer, 2014.

[LVA] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*[M]. New York: McGraw-Hill, Inc., 1979.

[Miao1] 苗长兴, 张波. 偏微分方程的调和分析方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[Miao2] 苗长兴. 调和分析及其在偏微分方程中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[JD] Javier Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1995.

[ST1] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*[M]. New Jersey: Princeton University Press, 2003.

[ST4] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*[M]. New Jersey: Princeton University Press, 2011.

[ST5] Elias M. Stein. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1993.

[ST6] Elias M. Stein. *Note on the class* $L\log L$[J]. Studia Math. 32(1969), 305-310.

[STW] Elias M. Stein, N. J. Weiss. *An extension of theorem of Marcinkiewicz and some of its applications*[J]. J. Math. Mech. 8(1959), 263-284.

[SW] L. Schwartz. 广义函数论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[TMA] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.

[UN] Umberto Neri. *Singular Integrals*[M]. Berlin: Springer, 1971.

[WL] 汪林. 实分析中的反例 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[ZGQ] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义 (第二版)(上)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2021.

[ZMQ] 周民强. 实变函数论 (第三版)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2016.

[Zo] B. A. 卓里奇. 数学分析 (第二卷)(第四版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.