# 实变函数论学习笔记


作者：UN

组织：北京师范大学数学科学学院



时间：June 6, 2024

模板来源：https://github.com/ElegantLaTeX


行路难, 行路难. 多歧路, 今安在? 长风破浪会有时, 直挂云帆济沧海.

# 目录

# 第一章 集合与点集

## 1.1 集合的运算

### 1.1.1 思考题

✍ **练习 1.1** 设 $A, B, E$ 是全集 $X$ 的子集, 则
$$B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \text{当且仅当} B^c = E.$$

**证明**

此即证明 $(E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) = E^c$. 任取 $x \in (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A)$, 知 $x \in (E \cap A)^c$ 且 $x \in E^c \cup A$, 进而 $x \notin E \cap A$ 且 $x \in E^c$ 或 $x \in A$. $x \in E^c$ 符合条件, 而若 $x \in A$, 则不可能有 $x \in E$, 即 $x \in E^c$. 故 $x \in E^c$, 从而 $(E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \subset E^c$.

当 $x \in E^c$, 知 $x \notin E$, 进而首先有 $x \in (E \cap A)^c$. 又因为 $E^c \subset E^c \cup A$, 故 $x \in E^c \cup A$, 即 $x \in (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A)$, 故 $E^c \subset (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A)$.

综上, $(E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) = E^c$, 命题即证.

✍ **练习 1.2** 设 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$, 则
$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n).$$

**证明**

任取 $x \in (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$, 知 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, 这说明总是存在某 $p, q \in \mathbb{N}^*$ 使得 $x \in A_p \wedge x \in B_q$, 进而 $x \in A_p \cap B_q$. 注意到 $\{A_n\}, \{B_n\}$ 都是递增列, 故不妨设 $p > q$, 则 $A_p \cap B_q \subset A_p \cap B_p$, 这便说明 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n)$, 进而
$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n)$$
另一边, 任取 $p \in \mathbb{N}^*$, 有 $A_p \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, B_p \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, 故
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$
综上, 命题即证.

✍ **练习 1.3** 设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$, 则
$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n).$$

**证明**

既然 $\{A_n\}, \{B_n\}$ 都是递降列, 知任取 $p \in \mathbb{N}^*$, 总有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_p, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset B_p$, 进而
$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) \subset A_p \cup B_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$
这说明
$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$$

另一边, 任取 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$, 知任取 $p \in \mathbb{N}^*$, 都有 $x \in A_p \cup B_p$, 这说明任取 $p \in \mathbb{N}^*$, 都有 $x \in A_p$ 且 $x \in B_p$, 从而 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. 故 $x \in (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$, 此即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n) \subset (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)$$

综上, 命题即证.

**练习 1.4** 设有集合 $A, B, E$ 和 $F$.

(i) 若 $A \cup B = E \cup F, A \cap F = \varnothing, B \cap E = \varnothing$, 则

$$A = E 且 B = F;$$

(ii) 若 $A \cup B = E \cup F$, 令 $A_1 = A \cap E, A_2 = A \cap F$, 则

$$A_1 \cup A_2 = A.$$

证明

(i) 任取 $x \in A$, 知必有 $x \in A \cup B$, 依题知 $x \in E \cup F$, 从而 $x \in E$ 或 $x \in F$. 届于 $A \cap F = \varnothing$, 知不可能同时有 $x \in A, x \in F$, 故只能是 $x \in E$, 这便说明 $A \subset E$.

任取 $y \in E$, 知必有 $y \in E \cup F$, 依题知 $y \in A \cup B$, 从而 $x \in A$ 或 $x \in B$. 届于 $E \cap B = \varnothing$, 知不可能同时有 $x \in E, x \in B$, 故只能是 $x \in A$, 这便说明 $E \subset A$.

综上可知 $A = E$, $B = F$ 同理.

(ii) 显见 $A_1 \subset A, A_2 \subset A$, 故 $A_1 \cup A_2 \subset A$, 进而只需证 $A \subset A_1 \cup A_2$.

任取 $x \in A$, 知必有 $x \in A \cup B$, 依题知 $x \in E \cup F$, 从而 $x \in E$ 或 $x \in F$, 这分别可导出 $x \in A \cup E = A_1$ 或 $x \in A \cup F = A_2$, 故 $x \in A_1 \cup A_2$, 即 $A \subset A_1 \cup A_2$.

综上命题得证.

**练习 1.5** 设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

则对 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \le t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) < t + \frac{1}{k}\}.$$

†(错误的) 证明

根据极限的保号性, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$ 知:

$$f(x) \le t \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N (f_n(x) < t + \varepsilon) \Leftrightarrow \forall \mathbb{N}^* \ni k > 0 \exists N > 0 \forall n > N (f_n(x) < t + \frac{1}{k})$$

现在记

$$A_{\frac{1}{k},n} = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) < t + \frac{1}{k}\}$$

注意到 $A$ 关于 $k \to \infty$ 是递减列, 故令 $k \to \infty$ 有:

$$A_{\frac{1}{\infty},n} := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{\frac{1}{k},n} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) < t + \frac{1}{k}\} = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \le t\}$$

既然 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 知

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \le t \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} f_n(x) \le t$$

而

$$\sup_{n\ge N} f_n(x) \le t \Leftrightarrow \forall n > N (f_n(x) \le t)$$

故若取

$$B_N=\bigcap_{n=N}^{\infty}A_{\frac{1}{\infty},n}=\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f_n(x)\leq t\}=\{x\in\mathbb{R}:\sup_{n\geq N}f_n(x)\leq t\}$$

知 $B_N$ 关于 $N$ 是递减列, 且:

$$\bigcup_{N=1}^{\infty}B_N=\{x\in\mathbb{R}:\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geq N}f_n(x)\leq t\}=\{x\in\mathbb{R}:f(x)\leq t\}$$

代回 $B_N=\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_{\frac{1}{\infty},n}$ 即得:

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)\leq t\}=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}A_{\frac{1}{\infty},n}=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{\frac{1}{k},n}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f_n(x)<t+\frac{1}{k}\}.$$

命题即证.

† 订正

知:

$$f(x)\leq t\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}f_n(x)\leq t\Leftrightarrow\forall k>0\exists N=N(k)>0\forall n>N(f_n(x)<t+\frac{1}{k})$$

从而考虑到是先固定 $k$ 才能讨论 $N=N(k)$, 知当 $k$ 固定, 满足 $\forall n>N(f_n(x)\leq t+\frac{1}{k})$ 的 $x$ 的集合可表示为:

$$A_{N,k}=\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f_n(x)<t+\frac{1}{k}\}$$

既然只需存在 $N$, 知只需将全体的 $N$ 并起来即可, 即满足 $\exists N\in\mathbb{N}\forall n>N(f_n(x)<t+\frac{1}{k})$ 的 $x$ 的集合为:

$$A_{\infty,k}:=\bigcup_{N=1}^{\infty}A_{N,k}$$

现在再令 $k\to\infty$, 考虑到 $A_{\infty,k}$ 关于 $k$ 递减, 知满足 $\forall\mathbb{N}\ni k>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n>N(f_n(x)<t+\frac{1}{k})$ 的 $x$ 的集合为:

$$A:=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{\infty,k}$$

而 $A$ 根据前面的讨论恰是 $\{x\in\mathbb{R}:f(x)\leq t\}$, 故

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)\leq t\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f_n(x)<t+\frac{1}{k}\}.$$

**笔记** 这里原证明主要的问题在于事件表示的顺序. 在原证明中, 是先令 $k\to\infty$, 再令 $n\to\infty$. 但回到订正中极限的定义:

$$f(x)\leq t\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}f_n(x)\leq t\Leftrightarrow\forall k>0\exists N=N(k)>0\forall n>N(f_n(x)<t+\frac{1}{k})$$

这里是先固定了 $k$, 才能给出一个由 $k$ 确定的 $N$. 所以这里不能先令 $k\to\infty$ 再令 $N\to\infty$. 事实上下述交换律

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}A_{k,N}=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{k,N}$$

(甚至在有限的情况下) 不一定成立!

**练习 1.6** 设 $a_n\to a(n\to\infty)$, 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(a_n-\frac{1}{k},a_n+\frac{1}{k})=\{a\}.$$

证明

采用上题结论. 知

$$(a_n-\frac{1}{k},a_n+\frac{1}{k})=\{x\in\mathbb{R}:x-a_n<\frac{1}{k}\}\cup\{x\in\mathbb{R}:-x+a_n<\frac{1}{k}\}$$

其中第一个集合里 $f_n(x) = x - a_n$, 第二个集合里 $f_n(x) = -x + a_n$, 两个集合中均有 $t = 0$. 注意到

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} : x < a_n + \frac{1}{k}\} = \{x \in \mathbb{R} : x - a \le 0\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} : -x + a_n < \frac{1}{k}\} = \{x \in \mathbb{R} : -x + a \le 0\}$$

故

$$\begin{aligned}&\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(\{x \in \mathbb{R} : x - a_n < \frac{1}{k}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -x + a_n < \frac{1}{k}\})\\ =&\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} : x - a_n < \frac{1}{k}\}\Big) \cup \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} : -x + a_n < \frac{1}{k}\}\Big)\\ =&\{x \in \mathbb{R} : x - a \le 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -x + a \le 0\} = \{a\}\end{aligned}$$

命题即证.

## 1.2 映射与基数

### 1.2.1 知识梳理

**定理 1.2.1 (单调映射不动点)**

*设 $X$ 是一个非空集合, 且有 $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$. 若对 $\mathscr{P}(X)$ 中满足 $A \subset B$ 的任意 $A, B$, 必有 $f(A) \subset f(B)$, 则存在 $T \subset \mathscr{P}(X)$, 使得 $f(T) = T$.*

证明

作集合 $S, T$:

$$S = \{A : A \in \mathscr{P}(X) \text{且} A \subset f(A)\},$$
$$T = \bigcup_{A \in S} A$$

因为 $\varnothing \subset f(\varnothing) = \varnothing$, 故 $\varnothing \in S$, 这说明 $S \neq \varnothing$. 下面证明 $f(T) = T$.

先证明 $T \subset f(T)$. 当 $A \in S$, 根据 $S$ 的定义知 $A \subset f(A)$, 同时由 $A \subset T$ 知 $f(A) \subset f(T)$. 这说明 $A \in S$ 可推出 $A \subset f(A) \subset f(T)$, 而这对全体 $A \in S$ 都成立, 故有:

$$\bigcup_{A \in S} A \subset f(T) \Rightarrow T \subset f(T)$$

再证明 $f(T) \subset T$. 根据已经推知的 $T \subset f(T)$, 两边取映射知 $f(T) \subset f(f(T))$. 如果把 $f(T)$ 新看作 $B$, 这便说明 $B \subset f(B)$, 从而 $B = f(T) \in S$, 这说明

$$f(T) \subset \bigcup_{A \in S} A = T$$

综上, $f(T) = T$. □

**引理 1.2.1 (Banach)**

*若有 $f : X \to Y, g : Y \to X$, 则存在分解*

$$X = A \cup A^{\sim}, \quad Y = B \cup B^{\sim}$$

*其中 $f(A) = B, g(B^{\sim}) = A^{\sim}, A \cap A^{\sim} = \varnothing$ 以及 $B \cap B^{\sim} = \varnothing$.*

证明

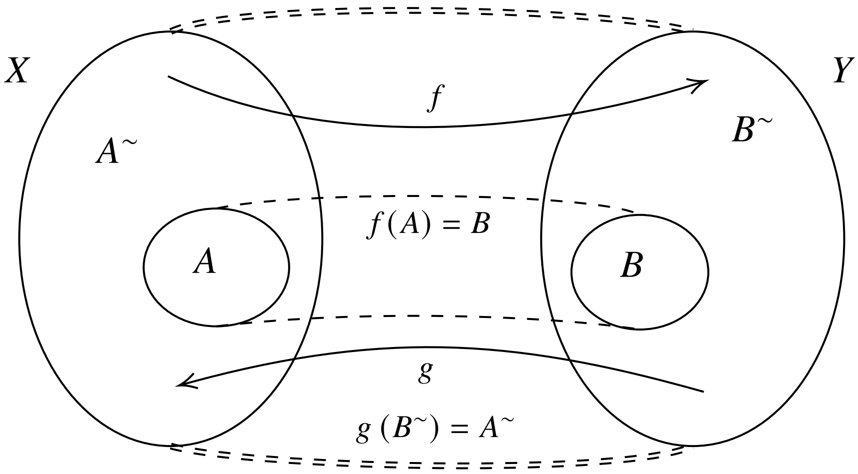


**图 1.1:** Banach 引理的图示

对于 X 中的子集 $E$, 不妨假定 $Y\backslash f(E)=\varnothing$, 若 $E$ 满足

$$E\cap g(Y\backslash f(E))=\varnothing$$

则称 $E$ 为 $X$ 中的分离集.

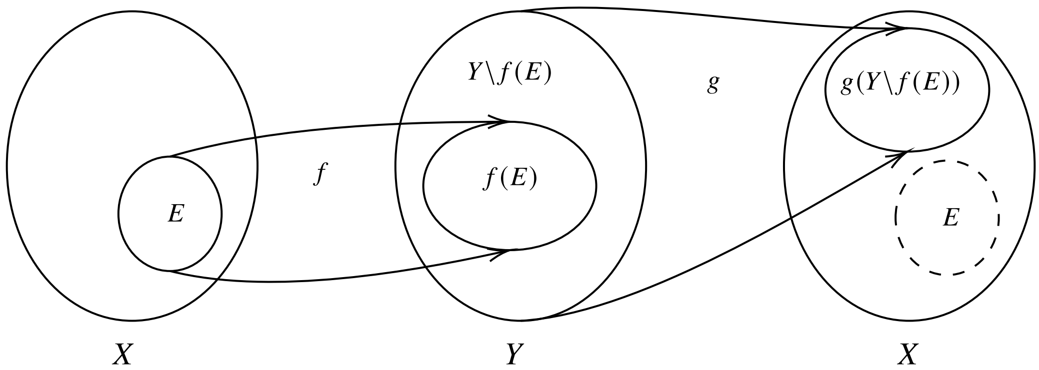


**图 1.2:** 分离集示意图

现将 $X$ 中分离集的全体记为 $\Gamma$, 且作其并集

$$A:=\bigcup_{E\in\Gamma}E.$$

知 $A\in\Gamma$, 这是因为任取 $E\in\Gamma$, 因为 $E\subset A$, 故

$$f(E)\subset f(A)\Rightarrow Y\backslash f(E)\supset Y\backslash f(A)\Rightarrow g(Y\backslash f(E))\supset g(Y\backslash f(A))$$

进而

$$E\cap g(Y\backslash f(A))\subset E\cap g(Y\backslash f(E))=\varnothing$$

得到 $E\cap g(Y\backslash f(A))=\varnothing$. 令 $E=A$ 可知 $A\cap g(Y\backslash f(A))=\varnothing$, 故这说明 $A$ 是 $X$ 中的分离集且是 $\Gamma$ 中关于包含关系的最大元.

现在令 $f(A)=B, Y\backslash B=B^{\sim}, g(B^{\sim})=A^{\sim}$. 知 $Y=B\cup B^{\sim}$. 首先说明 $A\cap A^{\sim}=\varnothing$, 这是因为根据 $A$ 为分离集: $A\cap g(Y\backslash f(A))=\varnothing$, 而

$$f(A)=B\to Y\backslash f(A)=B^{\sim}\Rightarrow g(B^{\sim})=A^{\sim}\Rightarrow A\cap A^{\sim}=\varnothing$$

再说明 $A\cup A^{\sim}=X$. 这是因为如若不然, 设存在 $x_0\in X$ 且 $x_0\notin A\cup A^{\sim}$. 作 $A_0=A\cup\{x_0\}$, 有:

$$A\subset A_0\Rightarrow f(A)=B\subset f(A_0)\Rightarrow Y\backslash B=B^{\sim}\supset Y\backslash f(A_0)$$

进而在最后的式子两边作用 $g$, 有 $g(Y\backslash f(A_0)) \subset A^{\sim}$, 这说明 $A$ 与 $g(Y\backslash f(A_0))$ 不相交, 且 $x_0 \notin g(Y\backslash f(A_0))$, 故

$$A_0 \cap g(Y\backslash f(A_0)) = \varnothing$$

这与 $A$ 是最大元矛盾! 命题进而得证. □

**定理 1.2.2 (Cantor-Bernstein)**

若集合 $X$ 与 $Y$ 的某个真子集对等, $Y$ 与 $X$ 的某个真子集对等, 则 $X \sim Y$.

证明

根据条件中的对等关系知存在单射 $f: X \to Y, g: Y \to X$, 进而由 Banach 引理知存在下述分解:

$$X = A \cup A^{\sim}, \quad Y = B \cup B^{\sim}, \quad f(A) = B, \quad g(B^{\sim}) = A^{\sim}$$

注意到这里的 $f: A \to B$ 和 $g: B^{\sim} \to A^{\sim}$ 都是一一映射, 故考虑映射:

$$F: X \to Y, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g^{-1}(x), & x \in A^{\sim} \end{cases}$$

其为一一映射, 故 $X \sim Y$. □

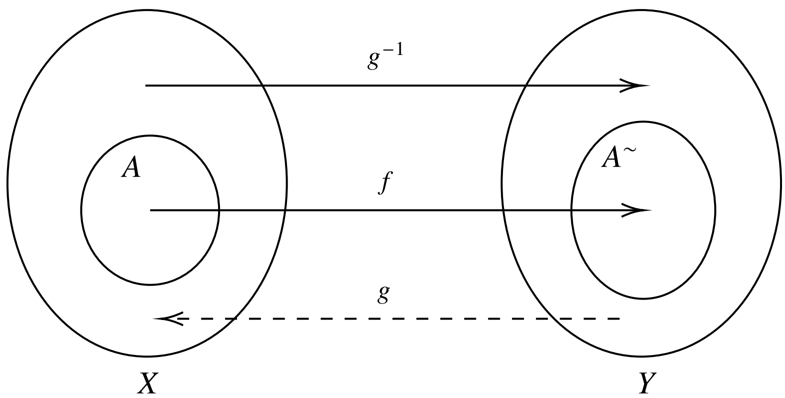


图 1.3: Cantor-Bernstein 定理图解

**推论 1.2.1**

设 $A, B, C$ 满足下述关系:

$$C \subset A \subset B.$$

若 $B \sim C$, 则 $B \sim A$.

**定理 1.2.3**

若 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为可列集, 则并集

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

也是可列集.[a]

[a]注意这个定理的论证方法.

证明

只需讨论 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$ 的情形. 设:

$$\begin{array}{llllll}
A_1 = \{a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1j}, & \cdots\}, \\
A_2 = \{a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2j}, & \cdots\}, \\
A_3 = \{a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots, & a_{3j}, & \cdots\}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots, \\
A_i\ = \{a_{i1}, & a_{i2}, & a_{i3}, & \cdots, & a_{1j}, & \cdots\}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

考虑如下箭头所示的映射 $f$:

$$\begin{array}{llllll}
A_1 = \{a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1j}, & \cdots\}, \\
A_2 = \{a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2j}, & \cdots\}, \\
A_3 = \{a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots, & a_{3j}, & \cdots\}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots, \\
A_i\ = \{a_{i1}, & a_{i2}, & a_{i3}, & \cdots, & a_{1j}, & \cdots\}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

也即 $f$ 将 $A$ 中的元素排列为:

$$\{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots\}$$

(在求出 $f$ 的具体映射方案后) 命题即证. □

**定理 1.2.4**

设 $E_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是可列集, 则 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ 是可列集, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$ 是可列集.

**证明**

不妨就设 $E_k = \mathbb{N}(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \mathbb{N}^n$, 现取不同的素数 $p_1, \cdots, p_n$, 对 $\mathbb{N}^n$ 中的元 $(m_1, \cdots, m_n)$ 取 $p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$ 与之对应, 由算数基本定理可知该对应是单的, 进而 $\mathbb{N}^n \sim \mathbb{N}$. 命题进而可证. □

**定理 1.2.5**

$\mathbb{R}$ 中互不相交的开区间族是可数集.

**证明**

既然 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 上稠密, 知每个开区间总包含某有理数, 由这些开区间不交知总可以选取不同的有理数代表不同的开区间, 从而若记 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{R}$ 上互不相交的开区间族, 由前述对应知 $\mathbb{A} \sim \mathbb{Q}$, 而 $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, 命题即证. □

**定理 1.2.6**

$[0, 1] = \{x : 0 \le x \le 1\}$ 不是可数集.

**证明**

对 $(0, 1]$ 上的点考虑二进制小数表示法:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

其中 $a_0 = 0$或1, 且上述表达式中总会出现无穷个 $a_n = 1$[1]. 显见 $(0, 1]$ 与全体二进制小数一一对应[2].

现在将上述表示式中 $a_n = 0$ 的项均舍去, 得到 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i}$, 其中 $n_i$ 是严格上升的自然数数列. 再令

$$k_1 = n_1, \quad k_i = n_i - n_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots$$

[1]为什么?

[2]这件事的证明是否与 Riemann 重排定理类似?

知 $\{k_i\}$ 是自然数子列. 自然 $\{k_i\}$ 的全体 (记为 $\mathscr{H}$) 与 $(0,1]$ 一一对应, 故如果 $(0,1]$ 可数, 必有 $\mathscr{H}$ 可数, 考虑其下述排列:

$$\begin{array}{llllll}
\{k_1^{(1)}, & k_2^{(1)}, & k_3^{(1)}, & \cdots, & k_i^{(1)}, & \cdots\}, \\
\{k_1^{(2)}, & k_2^{(2)}, & k_3^{(2)}, & \cdots, & k_i^{(2)}, & \cdots\}, \\
\{k_1^{(3)}, & k_2^{(3)}, & k_3^{(3)}, & \cdots, & k_i^{(3)}, & \cdots\}, \\
\multicolumn{6}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,} \\
\{k_1^{(i)}, & k_2^{(i)}, & k_3^{(i)}, & \cdots, & k_i^{(i)}, & \cdots\}, \\
\multicolumn{6}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

但数列

$$\{k_1^{(1)}+1, k_2^{(2)}+1, k_3^{(3)}+1, \cdots, k_i^{(i)}+1, \cdots\}$$

并不在上述排列之中, 因为其与上述排列中的任何一个 (比如第 $q$ 个) 总至少有一个元素 (第 $q$ 个元素) 是不同的, 而这个数列也应在 $\mathscr{H}$ 之中, 这说明 $\mathscr{H}$ 并不与 $\mathbb{N}$ 一一对应, 也即 $\mathscr{H}$ 不可数, 故 $(0,1]$ 不可数. □

**笔记** 关于 $\mathbb{R}$ 不可数的证明可参见下述视频, 其虽缺少一些严谨性, 但对于理解上述构造方法是大有帮助的.

♣ 怎样数到无限之后?(从阿列夫零到不可达基数)

**定理 1.2.7**

设有集合列 $\{A_k\}$. 若每个 $A_k$ 的基数都是连续基数, 则其并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 的基数是连续基数.

**证明**

不妨假定 $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$. 既然每个 $A_k$ 都有连续基数, 知其总可以与 $\mathbb{R}$ 上的非退化区间等价 (因为后者也有连续基数), 不妨设 $A_k \sim [k, k+1)$, 则:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim [1, +\infty) \sim \mathbb{R}$$

故 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 与 $\mathbb{R}$ 等势, 也即其有连续基数. □

**定理 1.2.8 (无最大基数定理)**

若 $A$ 是非空集合, 则 $A$ 与其幂集 $\mathscr{P}(A)$(由 $A$ 的一切子集所构成的集合族) 不对等.

**证明**

用反证法, 假设 $A$ 与其幂集 $\mathscr{P}(A)$ 对等, 这说明存在一一映射 $f: A \to \mathscr{P}(A)$. 作集合:

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

考虑 $\varnothing \subset \mathscr{P}(A)$ 是 $\mathscr{P}(A)$ 的子集, 知 $f^{-1}(\varnothing)$ 必定非空 (否则 $f$ 不是满射). 在 $f^{-1}(\varnothing)$ 中任选元素 $x$, 则知 $f(x) \subset \varnothing \Rightarrow f(x) = \varnothing$, 故 $x \notin \varnothing = f(x)$, 从而 $B$ 非空. 既然 $B$ 也是 $A$ 的非空子集, 知 $B \in \mathscr{P}(A)$, 设 $B$ 的原像为 $y \in A$. 考虑 $y$ 和 $B$ 的关系:

当 $y \in B$, 根据定义, $y \notin f(y) = B$.

当 $y \notin B$, 这说明 $y \in f(y) = B$.

这两个矛盾说明不存在这样的 $y$, 从而最初的假设是错误的, 也即 $A$ 与其幂集 $\mathscr{P}(A)$ 并不对等. □

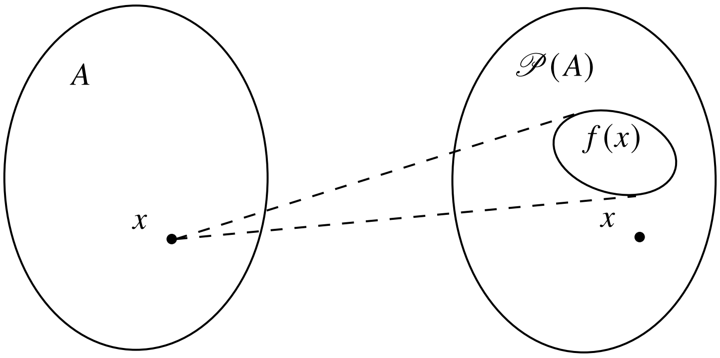


图 1.4: $B$ 定义示意图

### 1.2.2 例子整理

**例题 1.1** 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则点集

$$E=\{x\in\mathbb{R}:\lim_{y\to x}f(y)=+\infty\}$$

是可数集.

证明

考虑集列

$$E_N=\{x\in\mathbb{R}:\lim_{y\to x}f(y)>M\wedge f(x)<N\}$$

知

$$E=\bigcup_{N=1}^{\infty}E_N=\bigcup_{N=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:\lim_{y\to x}f(y)>M\wedge f(x)<N\}$$

下面证明对每个给定的 $N\in\mathbb{N}$, $E_N$ 都是可数集.

首先证明 $E_N$ 中的点都是孤立点, 也即任取 $x_0\in E_N$, 在 $E_N$ 中并不存在趋向 $x_0$ 的点列. 用反证法: 如果存在 $x_0\in E_N$ 与点列 $\{x_n\}\subset E_N$ 使得 $x_n\to x_0, n\to\infty$, 根据 $E_N$ 自身的定义:

$$\lim_{y\to x_0}f(y)=+\infty$$

由 Heine 定理知对任意趋向 $x_0$ 的点列 $\{x_n\}$ 都有:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$$

根据定义:

$$\forall M>0\exists K>0\forall n>K(f(x_n)>M)$$

但这与 $E_N$ 的定义相悖, 矛盾! 故 $E_N$ 中的点均为孤立点, 进而任一 $E_N$ 中的点总有仅包含它的邻域, 这便构造了 $E_N$ 中的点到 $\mathbb{R}$ 中不相交的开区间族的子集的单射, 进而说明 $E_N$ 可数. 故

$$E=\bigcup_{N=1}^{\infty}E_N$$

是可数集. □

**例题 1.2** 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则点集

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)\text{在点 }x\text{ 处不连续, 但右极限 }f(x+0)\text{ 存在}\}$$

是可数集.

证明

设

$$S=\{x\in\mathbb{R}:f(x+0)\text{存在}\}$$

对每个自然数 $n$, 考虑

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)(|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{n})\}$$

则知 $E_n$ 的极限集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 是 $f(x)$ 的连续点集. 如果记题设集合为 $A$, 则

$$A = S \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (S \backslash E_n)$$

所以如果能说明对任意的 $n$, $S\backslash E_n$ 均可数, 这便证明了命题. 现在取定 $n$, 设 $x \in S\backslash E_n$, 根据右连续知存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x') - f(x+0)| < \frac{1}{2n}, \quad x' \in (x, x+\delta)$$

故任取 $x', x'' \in (x, x+\delta)$ 有

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f(x+0)| + |f(x'') - f(x+0)| < \frac{1}{n}$$

根据 $E_n$ 的定义这便说明 $(x, x+\delta) \subset E_n$. 故取定 $S\backslash E_n$ 中的每一个点 $x$, 都有一个开区间 $I_x = (x, x+\delta)$ 与之对应, 且 $I_x \subset E_n$, 这意味着 $I_x$ 与 $S\backslash E_n$ 不相交, 也即这个对应是单射. 而全体 $I_x$ 所成的集合本身是可数集, 故 $S\backslash E_n$ 是可数集, 命题得证. □

**例题 1.3(在无理点上连续, 在有理点上间断的递增函数)** 记 $(a,b)$ 中有理数的全体为 $\{r_n\}$, 并作

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < +\infty, \quad C_n > 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

现在定义 $(a,b)$ 上的函数

$$f(x) = \sum_{r_n < x} C_n \quad (\text{即对 } r_n < x \text{ 的指标 } n \text{ 求和}).$$

则 $f(x)$ 递增, 在无理点上连续, 在有理点上间断.

证明

显见 $f(x)$ 递增. 当 $x \in \mathbb{Q}$, 记 $x$ 对应的指标为 $N$, 则任取 $\delta > 0$:

$$f(x) = \sum_{r_n < x} C_n < \sum_{r_n < x} C_n + C_N \le \sum_{r_n < x+\delta} C_n = f(x+\delta)$$

这说明 $f(x+0)$ 与 $f(x)$ 至少有 $C_N$ 这一定值的差距, 也即 $f(x)$ 在有理点上间断.

当 $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 首先考虑题设级数的收敛条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} C_k = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n \ge N (\sum_{k=n}^{\infty} C_k < \varepsilon)$$

现在固定 $\varepsilon$, 进而固定了指标 $N$, 知既然 $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 总能选取足够小的 $\delta$ 使得 $U_\delta(x)$ 不包含 $\{r_1, r_2, \cdots, r_N\}$, 进而

$$f(x) \ge f(x-\delta) = \sum_{r_n < x-\delta} C_n = \sum_{r_n < x} C_n - \sum_{\substack{k \ge N \\ r_k < x}} C_k \ge \sum_{r_n < x} C_n - \sum_{k=N}^{\infty} C_k > \sum_{r_n < x} C_n - \varepsilon$$

同理可证

$$f(x) \le f(x+\delta) \le f(x) + \varepsilon$$

现在令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$, 故 $f(x)$ 在无理点上连续. □

### 1.2.3 思考题

✍ **练习 1.7** 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 记 $f_1(x) = f(x), f_n(x) = f(f_{n-1}(x))(n = 2, 3, \cdots)$. 若存在 $n_0$, 使得 $f_{n_0}(x) = x$, 则 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $f(\mathbb{R})$ 上的一一映射.

证明

用反证法. $f$ 必定是 $\mathbb{R}$ 到 $f(\mathbb{R})$ 的满射, 故设 $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 满足 $x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$, 进而 $f_2(x_1) = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = f_2(x_2)$, 归纳可知 $\forall n \in \mathbb{N}^*(f_n(x_1) = f_n(x_2))$, 进而 $f_{n_0}(x_1) = f_{n_0}(x_2)$, 导出 $x_1 = x_2$, 矛盾! 故命题得证.

**练习 1.8** 不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f$, 它在无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 上是一一映射, 而在 $\mathbb{Q}$ 上则不是一一映射.

证明

用反证法, 假设存在 $f \in C(\mathbb{R})$ 使得其在 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 上是一一映射, 但在 $\mathbb{Q}$ 上并非一一映射. 这说明存在 $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_1 < q_2$ 使得

$$f(q_1) = f(q_2)$$

同时不失一般性, 固定 $q_1$, 设

$$q_2 = \inf\{x \in \mathbb{Q} : x > q_1 \wedge f(x) = f(q_1)\} \cap \mathbb{Q}$$

这便保证了不存在 $q \in \mathbb{Q}$ 使得 $q_1 < q < q_2, f(q_1) = f(q) = f(q_2)$. 结合 $f \in C(\mathbb{R})$, 知 $f(x) - f(q_1)$ 在 $(q_1, q_2)$ 内必不变号 (否则由零点定理即可推出矛盾), 不妨设

$$f(x) - f(q_1) > 0, x \in (q_1, q_2) \Leftrightarrow f(x) > f(q_1), x \in (q_1, q_2)$$

如果考虑 $[q_1, q_2]$, 知 $f$ 在 $[q_1, q_2]$ 上必有最大最小值, 而 $\min\limits_{[q_1,q_2]} f(x) = f(q_1)$, 故设 $x_0$ 是 $f$ 在 $[q_1, q_2]$ 上的最大值点. 现在在 $[q_1, x_0)$ 和 $(x_0, q_2]$ 上应用介值定理:

$$\forall v \in (f(q_1), f(x_0)) \exists x_1 \in (q_1, x_0) \exists x_2 \in (x_0, q_2)(f(x_1) = f(x_2) = v)$$

既然 $f$ 在 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 上是一一映射, 知 $x_1, x_2$ 不能同时为无理数, 也即对每一个 $v \in (f(q_1), f(x_0))$, 总至少有一个有理数 $x_q$ 满足 $f(x_q) = v$, 但这就建立了 $(f(q_1), f(x_0))$ 到 $\mathbb{Q}$ 的单射, 与 $\mathbb{Q}$ 本身基数为 $\aleph_0$ 矛盾! 命题即证.

•

**练习 1.9** $f : X \to Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B \subset Y$, 有

$$f(f^{-1}(B)) = B$$

证明

当 $f : X \to Y$ 是满射, 若存在 $B_0 \subset Y$ 使得 $f(f^{-1}(B_0)) \neq B_0$, 首先容易验证 $B_0 \subset f(f^{-1}(B_0))$, 这说明存在 $y_0 \in f(f^{-1}(B_0))\backslash B_0$. 既然 $f$ 是满射, 总存在 $x_0 \in f^{-1}(B_0)$ 使得 $y_0 = f(x_0)$.

**练习 1.10** 设 $f : X \to Y$ 是满射, 则下述命题等价:

(i) $f$ 是一一映射;
(ii) 对任意的 $A, B \subset X$, 有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
(iii) 对满足 $A \cap B = \varnothing$ 的 $A, B \subset X$, 有 $f(A) \cap f(B) = \varnothing$;
(iv) 对任意的 $A \subset B \subset X$, 有 $f(B\backslash A) = f(B)\backslash f(A)$.

证明

(i)$\Rightarrow$(ii): 由 $A \cap B \subset A$ 知 $f(A \cap B) \subset f(A)$, 同理 $f(A \cap B) \subset f(B)$, 故 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

当 $f(A) \cap f(B) = \varnothing$, 如若 $A \cap B \neq \varnothing$, 这便说明存在 $x \in A$ 且 $x \in B$, 使得 $f(x) \in f(A)$ 且 $f(x) \in f(B)$, 进而 $f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$, 矛盾! 故当 $f(A) \cap f(B) = \varnothing$, 有 $A \cap B = \varnothing$, 进而 $f(\varnothing) = \varnothing$ 显然.

而当 $f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$, 任取 $y \in f(A) \cap f(B) \subset Y$, 知 $y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$. 对于 $y \in f(A)$, 由 $f$ 是满射知存在 $x_1 \in A$ 使得 $f(x_1) = y$, 同理对 $y \in f(B)$ 知存在 $x_2 \in B$ 使得 $f(x_2) = y$. 根据 $f$ 是一一映射知 $x_1 = x_2$, 故 $x_1 = x_2 \in A \cap B$, 这说明 $y \in f(A \cap B)$, 也即 $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

综上知 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(ii)⇒(iii): 知 $f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)=f(\varnothing)=\varnothing$.

(iii)⇒(iv): 知

$$\begin{aligned}f(B\backslash A)\backslash(f(B)\backslash f(A))&=f(B\backslash A)\cap(f(B)\backslash f(A))^c=f(B\backslash A)\cap((f(B))^c\cup f(A))\\&=(f(B\backslash A)\cap(f(B))^c)\cup(f(B\backslash A)\cap f(A))\end{aligned}$$

对第一项, 注意到 $f(B\backslash A)\subset f(B)$, 而 $f(B)\cap(f(B))^c=\varnothing$, 故 $f(B\backslash A)\cap(f(B))^c=\varnothing$. 对第二项, 注意到 $(B\backslash A)\cap A=\varnothing$, 故 $f(B\backslash A)\cap f(A)=\varnothing$. 综上知

$$f(B\backslash A)\backslash(f(B)\backslash f(A))=\varnothing$$

这便说明 $f(B\backslash A)\subset f(B)\backslash f(A)$.

再考虑 $(f(B)\backslash f(A))\backslash f(B\backslash A)$, 知

$$\begin{aligned}(f(B)\backslash f(A))\backslash f(B\backslash A)&=(f(B)\cap(f(A))^c)\cap(f(B\backslash A))^c=f(B)\cap((f(A))^c\cap(f(B\backslash A))^c)\\&=f(B)\cap(f(A)\cup f(B\backslash A))^c\end{aligned}$$

注意到 $B=A\cup(B\backslash A)$, 任取 $x\in B$, 知要么 $x\in A$, 要么 $x\in B\backslash A$. 当 $x\in A$, 知 $f(x)\in f(A)$; 当 $x\in B\backslash A$, 知 $f(x)\in f(B\backslash A)$, 故 $f(B)\subset(f(A)\cup f(B\backslash A))$, 进而 $(f(B))^c\supset(f(A)\cup f(B\backslash A))^c$. 已知 $f(B)\cap(f(B))^c=\varnothing$, 进而 $f(B)\cap(f(A)\cup f(B\backslash A))^c=\varnothing$, 得到

$$(f(B)\backslash f(A))\backslash f(B\backslash A)=\varnothing$$

这便说明 $f(B)\backslash f(A)\subset f(B\backslash A)$.

综上, $f(B)\backslash f(A)=f(B\backslash A)$.

(iv)⇒(i): 只需证明 $f$ 是单射, 用反证法. 如果存在 $x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$, 取 $B=\{x_1,x_2\},A=\{x_1\}$, 知 $A\subset B\subset X$, 而:

$$f(B\backslash A)=\{f(x_2)\},\quad f(B)\backslash f(A)=\{f(x_2)\}\backslash\{f(x_2)\}=\varnothing$$

两者并不相等, 矛盾! 命题即证.

综上, 命题得证.

**练习 1.11** 设 $f:X\to Y,g:Y\to X$. 若对任意的 $x\in X$, 必有 $g(f(x))=x$, 则 $f$ 是单射，$g$ 是满射.

证明

用反证法. 如果 $g$ 不是满射, 则至少存在 $x_0\in X$, 其在 $Y$ 中并无原像, 自然无法成立题式. 而如果 $f$ 不是单射, 设 $f(x_1)=f(x_2),x_1\neq x_2$, 可得 $g(f(x_1))=x_1=g(f(x_2))=x_2$, 矛盾! 故 $f$ 只能是单射, 命题得证.

**笔记** $f$ 并非满射而 $g$ 并非单射的例子:

$$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{Q},\quad x\mapsto\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

**练习 1.12** 设 $A_1\subset A_2,B_1\subset B_2$. 若 $A_1\sim B_1,A_2\sim B_2$, 试问：是否有 $(A_2\backslash A_1)\sim(B_2\backslash B_1)$?

解

不对. 比方说 $A_2=\mathbb{Z},A_1=B_1=B_2=\mathbb{N}$.

**练习 1.13** 若 $(A\backslash B)\sim(B\backslash A)$, 则 $A\sim B$, 对吗?

证明

该命题正确. 可验证下述分解成立:

$$A = (A\backslash B) \cup (A \cap B), \quad B = (B\backslash A) \cup (A \cap B)$$

由 $(A\backslash B) \sim (B\backslash A)$ 知存在一一映射 $f : A\backslash B \to B\backslash A$, 进而考虑下述映射:

$$F : A \to B, \quad x \mapsto \begin{cases} x, & x \in A \cap B \\ f(x), & x \in A\backslash B \end{cases}$$

容易验证 $F$ 是一一的, 命题即证.

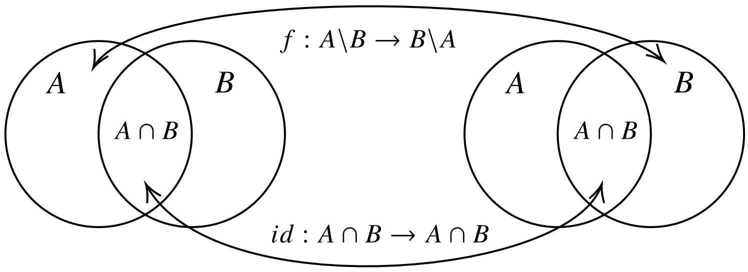


图 1.5: 练习 1.13 示意图

**练习 1.14** 若 $A \subset B$ 且 $A \sim (A \cup C)$, 试证明 $B \sim (B \cup C)$.

证明

记:

$$E = (B\backslash A) \cap C, \quad F = C\backslash B, \quad G = (B\backslash A)\backslash E$$

则知

$$A \cup C = A \cup E \cup F$$

既然

$$A \sim A \cup E \cup F, \quad A \cup F \subset A \cup E \cup F$$

由 Cantor-Bernstein 定理即知

$$A \sim A \cup F$$

两边同时并 $E \cup G$ 有:

$$B = E \cup G \cup A \sim E \cup G \cup A \cup F = B \cup C$$

命题即证.

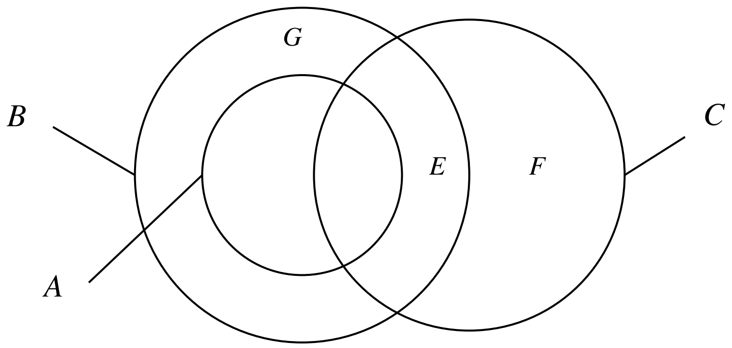


图 1.6: 练习 1.14 示意图

✍ **练习 1.15** 对于平面上的直线 $3y-2x=5$ 来说, 它具有下述性质: 若 $x\in\mathbb{Q}$, 则 $y\in\mathbb{Q}$. 试问: 具有这种性质的直线在平面上有多少?

解

记 $\mathbb{A}$ 为全体满足题设条件的直线的集合. 注意到两点确定一条直线, 故 $\mathbb{A}$ 中的每个元素总可以用点对 $((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in\mathbb{Q}^2\times\mathbb{Q}^2$ 表示, 而 $\mathbb{Q}^2\times\mathbb{Q}^2\sim\mathbb{N}$, 故 $\mathbb{A}\sim\mathbb{N}$, 即这样的直线有 $\aleph_0$ 个.

✍ **练习 1.16** 试问: 由自然数组成且公差亦为自然数的等差数列之全体形成的集合的基数是什么?

解

记 $\mathbb{A}$ 为全体满足题设条件的等差数列的集合, 注意到 $\mathbb{A}$ 的每个元素都可由数对 $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ 表示, 其中 $p$ 是首项, $q$ 是公差, 而 $\mathbb{N}^2\sim\mathbb{N}$, 故 $\mathbb{A}\sim\mathbb{N}$, 也即欲求为 $\aleph_0$.

✍ **练习 1.17** 设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上可微, 且除可数集外, 有 $f'(x)=0$, 试证明 $f(x)=c$(常数).

课堂解法

用反证法, 如果 $f(x)\not\equiv c$, 这说明至少存在 $x_1,x_2\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)\neq f(x_2), x_1<x_2$, 进而由 Lagrange 中值定理知存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0$. 进而由 Darboux 定理[3]可知, $f'(x)$ 在 $[0,f'(\xi)]$ 间均可取值, 这与 $\{x\in\mathbb{R}:f'(x)\neq 0\}$ 可数矛盾! 命题进而得证.

✍ **练习 1.18** 试问: 是否存在满足

$$f(x)=\begin{cases}\text{无理数}, & x\text{是有理数}\\ \text{有理数}, & x\text{是无理数}\end{cases}$$

的函数 $f\in C(\mathbb{R})$?

解

不存在, 用反证法. 如果存在这样的函数 $f$, 可分别从 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}$ 两方面考虑. 一方面, $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ 均为有理数, 故 $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$ 是可数集. 而 $\mathbb{Q}$ 本身是可数集, 故 $f$ 作为函数自然将可数集映成可数集, 即 $f(\mathbb{Q})$ 是可数集. 故 $f(\mathbb{R})=f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cup f(\mathbb{Q})$ 是可数集, 但从连续函数的介值定理知 $f(\mathbb{R})$ 必定不可数, 矛盾! 命题即证.

✍ **练习 1.19** 设 $E\subset(0,1)$ 是无限集. 若从 $E$ 中任意选取不同的数所组成的无穷正项级数总是收敛的, 试证明 $E$ 是可数集.

证明

考虑

$$E_n=\{x\in(0,1):x>\frac{1}{n+1}\},\quad n\in\mathbb{N}$$

知

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

故只需证明每个 $E_n$ 为可数集即可. 事实上每个 $E_n$ 均为有限集, 否则如果存在无限集 $E_{n_0}$, 则知 $E$ 中存在无限个在 $(\frac{1}{n_0},1)$ 中的元素, 在这个区间中选取的无穷正项级数并不收敛, 矛盾! 故每个 $E_n$ 均为有限集, 从而 $E$ 是可数集, 命题得证.

✍ **练习 1.20** 试问: 直线上所有开区间的全体形成的集合的基数是什么?(设法与平面点集对应)

解

考虑直线上的任意开区间 $(a,b)$, 将其与 $\mathbb{R}^2$ 中的元素 $(a,b)$ 对应, 知这个对应显见是一一的, 而 $\overline{\overline{\mathbb{R}^2}}=c$, 故欲求即连续基数 $c$.

[3]也即导数的介值性.

•

✍ **练习 1.21** 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是不可数集, 试证明存在 $x_0 \in E$, 使得对于任意内含 $x_0$ 的圆邻域 $B(x_0)$, 点集 $E \cap B(x_0)$ 为不可数集.[4]

证明

用反证法. 若任取 $x \in E$, 总存在圆邻域 $B(x)$ 使得 $E \cap B(x_0)$ 是可数集. 在 $E$ 中考虑:

✍ **练习 1.22** 设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $\overline{\overline{E}} < c$, 试证明存在实数 $a$, 使得 $E + \{a\} = \{x + a : x \in E\} \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

证明

用反证法. 命题的逻辑表达式为:

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall x \in E (x + a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$$

其否定为

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists x_0 \in E (x + a \in \mathbb{Q})$$

也即

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists x_0 \in E \exists q \in \mathbb{Q} (x + a = q)$$

这说明任取 $a \in \mathbb{R}$, 总能找到有理数对 $(q, x) \in \mathbb{Q} \times E$, 使得 $q - x = a$. 该断言说明存在 $\mathbb{Q} \times E$ 到 $\mathbb{R}$ 的满射, 也即 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = c \le \mathbb{Q} \times E$. 但本身 $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} < c, \overline{\overline{E}} < c$, 故 $\overline{\overline{\mathbb{Q} \times E}} < c = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$, 矛盾! 命题即证.

✍ **练习 1.23** 试作由 0,1 两个数组成的数列的全体 $E$ 与 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 之间的一一映射.

解

考虑映射

$$f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to E, \quad f(A) \mapsto \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}, x_n = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases}, A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$$

先证上述映射是一一的. 其首先是单射, 因为如若 $A \ne B$, 必存在 $x_k \in A \Delta B$, 进而 $f(A)$ 与 $f(B)$ 至少在 $x_k$ 处是不同的值. 其其次是满射, 因为对任意的序列 $\{x_n\}$, 总能构造 $\mathbb{N}$ 的子集 $\{n_i\}_{x_{n_i}=1}$, 也即 $\{x_n\}$ 在 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 中有原像. 故 $f$ 是一一映射.

✍ **练习 1.24** 试问: 是否存在集合 $E$, 使得 $\mathscr{P}(E)$ 是可列集?

解

不存在. 如果 $E$ 是有限集, 则显见 $\mathscr{P}(E)$ 依旧是有限集. 如果 $E$ 是无限集, 则 $E$ 至少包含一个可数子集 $F$. 根据无最大基数定理知 $\overline{\overline{\mathscr{P}(E)}} \ge \overline{\overline{\mathscr{P}(F)}} > \overline{\overline{F}} = \aleph_0$.

**笔记** 注意, 可列集和可数集并非同一个概念! 可列集特指与 $\mathbb{N}$ 等势的集合, 而可数集包含了可列集和有限集两个概念.

✍ **练习 1.25** 试证明全体超越数 (即不是整系数方程 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 的根) 的基数是 $c$.

证明

考虑证明代数数的全体 $\mathscr{A}$ 的基数是 $\aleph_0$. 这是因为任取代数数 $\alpha$, 总有整系数多项式 $g(x)$ 作为 $\alpha$ 的极小多项式. 不妨设 $\deg g = n$, 则由代数学基本定理知 $g$ 共有 $n$ 个根 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \ni \alpha$(重根按重数计算). 进而考虑映射:

$$\varphi : \mathscr{A} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n, \quad \alpha_i \mapsto (\cdots, 0, a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0, i)$$

[4] 问题: 在反证法中为什么可以保证覆盖?

容易知道 $\varphi$ 至少是单的, 故 $\overline{\overline{\mathscr{A}}} \le \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n}} = \aleph_0$. 再考虑证明下述引理:

**引理 1.2.2**

若 $B \subset A, \overline{\overline{A}} = c, \overline{\overline{B}} = \aleph_0$, 则 $\overline{\overline{A \backslash B}} = c$.

证明

不妨设 $B = \{b_n\}$, 在 $A$ 中选取与 $B$ 不交的可列子集 $A_0 = \{a_n\}$, 考虑映射:

$$f : A \to A \backslash B, \quad x \mapsto \begin{cases} a_{2n}, & x = a_n \\ a_{2n+1}, & x = b_n \\ x, & \text{其他} \end{cases}$$

易知 $f$ 是一一映射, 故 $A \sim A \backslash B$, 即 $\overline{\overline{A \backslash B}} = c$. □

根据引理, $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}, \overline{\overline{\mathbb{R}}} = c, \overline{\overline{\mathscr{A}}} = \aleph_0$, 故 $\overline{\overline{\mathbb{R} \backslash \mathscr{A}}} = c$, 也即超越数集的基数是 $c$.

## 1.3 $\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离 • 点集的极限点

### 1.3.1 知识梳理

**定理 1.3.1**

向量 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)$ 的模长 $|\boldsymbol{x}| = ((x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2)^{\frac{1}{2}}$ 有下述性质:

1. $|\boldsymbol{x}| \ge 0$, $|\boldsymbol{x}| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = (0, \cdots, 0)$;
2. 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, 有 $|a\boldsymbol{x}| = |a| \cdot |\boldsymbol{x}|$;
3. $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$;
4. 设 $\boldsymbol{y} = (y^1, \cdots, y^n)$, 则

$$(x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n)^2 \le ((x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2)((y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2)$$

**定义 1.3.1**

一般地说, 设 $X$ 是一个集合. 若对 $X$ 中任意两个元素 $x, y$, 有一个确定的实数与之对应, 记为 $d(x, y)$, 且其满足下述三条性质:

1. $d(x, y) \ge 0$, $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$,

则认为在 $X$ 中定义了距离 $d$, 并称 $(X, d)$ 为距离空间.

**定义 1.3.2**

设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一些点形成的集合, 令

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E\}$$

称为点集 $E$ 的直径. 若 $\operatorname{diam}(E) < +\infty$, 则称 $E$ 为有界集.

**定义 1.3.3**

设 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$, 称点集

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心, 以 $\delta$ 为半径的开球, 也称为 $\boldsymbol{x}_0$ 的 (球) 邻域, 记为 $B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$, 从而称

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leq \delta\}$$

为闭球, 记为 $C(\boldsymbol{x}_0, \delta)$.

♣

**定义 1.3.4**

设 $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n (k = 1, 2, \cdots)$. 若存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\lim_{k \to \infty} |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| = 0$$

则称 $\boldsymbol{x}_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的收敛 (于 $\boldsymbol{x}$ 的) 点列, 称 $\boldsymbol{x}$ 为它的极限, 并简记为

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}.$$

♣

**定义 1.3.5**

设 $E \subset \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. 若存在 $E$ 中的互异点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$, 使得

$$\lim_{k \to \infty} |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| = 0$$

则称 $x$ 为 $E$ 的极限点. $E$ 的极限点的全体记为 $E'$, 称为 $E$ 的导集.

♣

**定理 1.3.2**

若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $\boldsymbol{x} \in E'$ 当且仅当对任意的 $\delta > 0$, 有

$$(B(\boldsymbol{x}, \delta) \backslash \{\boldsymbol{x}\}) \cap E \neq \varnothing$$

♡

证明

当 $\boldsymbol{x} \in E'$, 根据定义知存在 $E$ 中的互异点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 使得

$$|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| \to 0, \quad k \to \infty$$

这说明任取 $\delta > 0$, 总存在 $K \in \mathbb{N}$, 使得当 $k > K$ 时, 有

$$|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| < \delta$$

即 $\boldsymbol{x}_k \in B(\boldsymbol{x}, \delta), k > K$.

当任取 $\delta > 0$ 总有

$$(B(\boldsymbol{x}, \delta) \backslash \{\boldsymbol{x}\}) \cap E \neq \varnothing$$

则考虑令 $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$, 相应的可找到对应的 $\boldsymbol{x}_n$ 使得

$$\boldsymbol{x}_n \in (B(\boldsymbol{x}, \delta_n) \backslash \{\boldsymbol{x}\}) \cap E$$

易知 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 恰是趋向 $\boldsymbol{x}$ 的 (互异)[5] 点列, 从而 $\boldsymbol{x} \in E'$. □

**定义 1.3.6**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 $E$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 不是 $E$ 的极限点, 即存在 $\delta > 0$, 使得

$$(B(\boldsymbol{x}, \delta) \backslash \{\boldsymbol{x}\}) \cap E = \varnothing$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 为 $E$ 的孤立点, 即 $\boldsymbol{x} \in E \backslash E'$.

♣

[5] 这可以通过限制在 $B(\boldsymbol{x}, \delta_n) \backslash B(\boldsymbol{x}, \delta_{n+1})$ 内选点来实现.

**定理 1.3.3**

设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$, 则 $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cup E_2'$.

证明

首先说明 $E_1' \cup E_2' \subset (E_1 \cup E_2)'$. 这是因为

$$E_1 \subset E_1 \cup E_2, \quad E_2 \subset E_1 \cup E_2$$

故

$$E_1' \subset (E_1 \cup E_2)', \quad E_2' \subset (E_1 \cup E_2)'$$

从而

$$E_1' \cup E_2' \subset (E_1 \cup E_2)'.$$

再说明 $(E_1 \cup E_2)' \subset E_1' \cup E_2'$. 任取 $\boldsymbol{x} \in (E_1 \cup E_2)'$, 根据定义知存在 $E_1 \cup E_2$ 中的互异点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$$

知 $\boldsymbol{x}_k$ 中必能选出仅在 $E_1$ 或 $E_2$ 内的子列 $\boldsymbol{x}_{k_i}$ 满足

$$\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_i} = \boldsymbol{x}$$

这说明 $\boldsymbol{x} \in E_1'$ 或 $\boldsymbol{x} \in E_2'$, 故 $x \in E_1' \cup E_2'$, 也即

$$(E_1 \cup E_2)' \subset E_1' \cup E_2'$$

综上, $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cup E_2'$, 命题得证. □

**定理 1.3.4 (Bolzano-Weierstrass)**

$\mathbb{R}^n$ 中任意有界无限点集 $E$ 至少有一个极限点.

证明

首先从 $E$ 中取出互异点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$, 其中

$$\boldsymbol{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \cdots, x_k^n), \quad k = 1, 2, \cdots$$

知 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 依旧有限, 从而 $\boldsymbol{x}_k$ 的每一个分量都是有界的. 考虑 $\{x_k^1\}$ 这一有界数列, 由 $\mathbb{R}$ 上的 Bolzano-Weierstrass 定理知其有收敛点列 $\{x_{k_{i1}}^1\}$, 进而考虑 $E$ 中的点列

$$\boldsymbol{x}_{k_{i1}} = (x_{k_{i1}}^1, x_{k_{i1}}^2, \cdots, x_{k_{i1}}^n), \quad i = 1, 2, \cdots$$

知这个点列的第一个分量是收敛的. 其依旧有界, 故再考虑它的第二个分量 $\{x_{k_{i1}}^2\}$, 这仍然是有界数列, 故能找到其收敛子列 $\{x_{k_{i2}}^2\}$, 进而再考虑 $E$ 中的点列

$$\boldsymbol{x}_{k_{i2}} = (x_{k_{i2}}^1, x_{k_{i2}}^2, \cdots, x_{k_{i2}}^n), \quad i = 1, 2, \cdots$$

以此类推, 可找到 $E$ 中的点列

$$\boldsymbol{x}_{k_{in}} = (x_{k_{in}}^1, x_{k_{in}}^2, \cdots, x_{k_{in}}^n), \quad i = 1, 2, \cdots$$

它的每一个分量都收敛, 故该点列自身收敛, 设其极限为 $\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{x}$ 为 $E$ 的极限点, 命题得证. □

### 1.3.2 思考题

**练习 1.26** 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是不可数集, 则 $E' \neq \varnothing$.

证明

用反证法, 如果 $E' = \varnothing$, 知 $E$ 中的点均为孤立点, 也即对 $E$ 中的每个点 $x$, 存在邻域 $U(x)$ 使得 $(U(x)\backslash\{x\}) \cap E = \varnothing$, 这说明可将 $E$ 中的元素与这些元素的互不相交的邻域作一一对应, 而后者所成的集合是可数集, 故 $E$ 是可数

集, 矛盾! 命题即证.

**练习 1.27** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 $E'$ 是可数集, 则 $E$ 是可数集.

证明

在本题中首先说明下述引理:

**引理 1.3.1**

$\mathbb{R}^n$ 中互不相交的开球有可数个.

这个引理的证明与 $\mathbb{R}$ 中的情况完全相同, 而结合该引理与孤立点的定义可知, $E$ 的孤立点集 $\mathscr{I}_E$ 是可数集. 现在 $E'$ 也是可数集, 故 $E = \mathscr{I}_E \cup E'$ 是可数集, 命题即证.

**练习 1.28** 若 $E \subset (0, +\infty)$ 中的点不能以数值大小加以排列, 则 $E' \neq \varnothing$.

证明

既然 $E' = \varnothing$, 知 $E$ 中的所有点都是孤立点, 从而任取 $x \in E$, 总能找到足够小的 $\delta_x > 0$ 使得 $U_{\delta_x}(x) \cap E = \{x\}$. 而考虑点集 $\{x - \delta_x : x \in E\}$, 这个点集可以按照数值大小排列, 且它的排列顺序恰对应 $x$ 的排列顺序, 矛盾! 故 $E' \neq \varnothing$.

**练习 1.29** 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界点列, 且有

$$|a_n - a_{n+1}| \geq 1, \quad n = 1, 2, \cdots$$

则 $\{a_n\}$ 也可能有无穷多个极限点.

解

知 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 是可数集, 设 $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, \cdots, q_n, \cdots\}$, 并定义 $\{a_n\}$ 如下:

$$\begin{cases} a_{2n-1} = q_n \\ a_{2n} = q_n + 4 \end{cases}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

显然 $|a_n - a_{n+1}| \geq 1, n = 1, 2, \cdots$, 且既然 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 在 $[0,1]$ 中稠密, 知 $\{a_{2n-1}\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密, 故 $\{a_{2n-1}\}$ 有无穷个极限点, 也即 $\{a_n\}$ 有无穷个极限点.

**练习 1.30** 若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 中任意两点间的距离均大于 1, 则 $E$ 是可数集.

证明

根据 $E$ 的定义知 $E' = \varnothing$, 故 $E$ 是可数集.

## 1.4 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 • 开集 •Borel 集 •Cantor 集

### 1.4.1 知识梳理

**定义 1.4.1**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 $E \supset E'$(也即 $E$ 包含 $E$ 的一切极限点), 就称 $E$ 为闭集 (规定 $\varnothing$ 是闭集). 记 $\overline{E} = E \cup E'$, 并称 $\overline{E}$ 为 $E$ 的闭包. $E$ 为闭集等价于 $E = \overline{E}$.

**定义 1.4.2**

若 $A \subset B$ 且 $\overline{A} = B$, 则称 $A$ 在 $B$ 中稠密, 或称 $A$ 是 $B$ 的稠密子集.

**定理 1.4.1 (闭集的运算性质)**

1. 若 $F_1, F_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 则其并集 $F_1 \cup F_2$ 也是闭集, 从而有限多个闭集的并集是闭集;
2. 若 $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个笔记组, 则其交集 $F = \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ 是闭集.

证明

1. 考虑等式

$$\begin{aligned}\overline{F_1 \cup F_2} &= (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2)' = (F_1 \cup F_2) \cup (F_1' \cup F_2') \\ &= (F_1 \cup F_1') \cup (F_2 \cup F_2') = \overline{F_1} \cup \overline{F_2}\end{aligned}$$

进而若 $F_1, F_2$ 是闭集, 则 $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2$, 故 $F_1 \cup F_2$ 是闭集.

2. 注意到对全体 $\alpha \in I$, 总有 $F \subset F_\alpha$, 故对全体 $\alpha \in I$ 都有 $\overline{F} \subset \overline{F_\alpha}$. 又因为 $F_\alpha$ 是闭集, 所以 $\overline{F_\alpha} = F_{[}\alpha]$, 即 $\overline{F} \subset F_\alpha$, 故

$$\overline{F} \subset \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = F$$

但本身 $F \subset \overline{F}$, 故 $F = \overline{F}$, 也即 $F$ 为闭集. □

**命题 1.4.1**

设 $E_\alpha \subset \mathbb{R}^n (\alpha \in I)$, 则

$$\bigcup_{\alpha \in I} \overline{E_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha \in I} \overline{E_\alpha}.$$

**定理 1.4.2 (Cantor)**

若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集列, 且满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

证明

不妨设对一切 $k$, $F_{k+1}$ 都是 $F_k$ 的真子集, 也即

$$F_k \backslash F_{k+1} \neq \varnothing, k = 1, 2, \cdots$$

选取 $\boldsymbol{x}_k \in F_k \backslash F_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界互异点列. 由 Bolzano-Weierstrass 定理知, 存在 $\{\boldsymbol{x}_{k_i}\}$ 及 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\lim_{i \to \infty} |\boldsymbol{x}_{k_i} - \boldsymbol{x}| = 0$$

因为每个 $F_k$ 都是闭集, 故 $\boldsymbol{x} \in F_l (k = 1, 2, \cdots)$, 从而

$$\boldsymbol{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$$

□

**定义 1.4.3**

设 $G \subset \mathbb{R}^n$, 若 $G^c = \mathbb{R}^n \backslash G$ 是闭集, 则称 $G$ 为开集.

**定理 1.4.3 (开集的运算性质)**

1. 若 $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集族, 则其并集 $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集;
2. 若 $G_k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则其交集 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$ 是开集, 进而有限个开集的交集是开集;
3. 若 $G$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 则 $G$ 是开集的充分必要条件是, 对于 $G$ 中的任一点 $\boldsymbol{x}$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset G$.

证明

(i) 根据定义知 $G_\alpha^c(\alpha\in I)$ 是闭集, 且 $G^c=\bigcap\limits_{\alpha\in I}G_\alpha^c$. 根据闭集的运算性质知 $G^c$ 是闭集, 故 $G$ 是开集.

(ii) 根据定义知 $G_k^c(k=1,2,\cdots,m)$ 是闭集, 且 $G^c=\bigcup\limits_{k=1}^{m}G_k^c$. 根据闭集的运算性质知 $G^c$ 是闭集, 故 $G$ 是开集.

(iii) 当 $G$ 是开集, 取 $\boldsymbol{x}\in G$, 注意到此时 $G^c$ 是闭集, 且 $\boldsymbol{x}\notin G^c$, 故存在 $\delta>0$ 使得 $B(\boldsymbol{x},\delta)\cap G^c=\varnothing$, 也即 $B(\boldsymbol{x},\delta)\subset G$.

当任取 $\boldsymbol{x}\in G$ 都存在 $\delta>0$ 使得 $B(\boldsymbol{x},\delta)\subset G$, 则知 $B(\boldsymbol{x},\delta)\cap G^c=\varnothing$, 进而 $\boldsymbol{x}$ 并非 $G^c$ 的极限点. 这说明 $G^c$ 的极限点仅在 $G^c$ 中出现, 从而 $G^c$ 是闭集, 也即 $G$ 是开集. □

**定义 1.4.4**

设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 对 $\boldsymbol{x}\in E$, 若存在 $\delta>0$, 使得 $B(\boldsymbol{x},\delta)\subset E$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 $E$ 的内点. $E$ 的内点的全体记为 $E^\circ$, 称为 $E$ 的内核. 若 $\boldsymbol{x}\in\overline{E}$ 但 $\boldsymbol{x}\notin E^\circ$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 $E$ 的边界点, 边界点全体记为 $\partial E$.

♣

**定理 1.4.4 (开集构造)**

$\mathbb{R}$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间 (包括 $(-\infty,a),(b,\infty),(-\infty,+\infty)$) 的并集.

♡

证明

设 $G\subset\mathbb{R}$ 是开集, 根据定义, 对 $G$ 中的任一点 $a$, 存在 $\delta>0$, 使得 $(a-\delta,a+\delta)\subset G$. 现在令

$$a'=\inf\{x:(x,a)\subset G\},\quad a''=\sup\{x:(a,x)\subset G\}$$

(其中 $a'$ 可以是 $-\infty$, $a''$ 可以是 $+\infty$), 显见 $a'<a<a''$. 下面说明 $(a',a'')\subset G$, 这是因为任意给定 $z\in(a',a'')$, 不妨设 $a'<z\le a$, 根据下确界的定义知存在 $x$ 使得 $a'<x<z$, 且 $(x,a)\subset G$, 故 $z\in G$. 称这样的开区间 $(a',a'')$ 为 $G$ 关于点 $a$ 的构成区间 $I_a$.

下面证明对 $G$ 的两个构成区间 $I_a=(a',a''),I_b=(b',b'')$, 它们要么重合, 要么互不相交. 不妨设 $a<b$, 若 $I_a\cap I_b\neq\varnothing$, 知必有 $b'<a''$. 现在令

$$c=\min\{a',b'\},\quad d=\max\{a'',b''\}$$

知

$$(c,d)=(a',a'')\cup(b',b'')$$

取 $x\in I_a\cap I_b$, 则知 $I_x=(c,d)$ 是构成区间, 且有

$$(c,d)=(a',a'')=(b',b'')$$

最后, $\mathbb{R}$ 上互不相交的开区间族可数, 故 $G$ 中最多有可数个这样的构成区间, 命题得证. □

**定理 1.4.5 (开集构造)**

$\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 $G$ 是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

♡

证明

首先介绍下述分割 $\mathbb{R}^n$ 的方法:

将 $\mathbb{R}^n$ 用格点 (坐标皆为整数) 分为可列个边长为 1 的半开闭方体, 其全体记为 $\Gamma_0$. 再将 $\Gamma_0$ 中每个方体的每一边二等分, 这样每个方体就又分成了 $2^n$ 个边长为 $\frac{1}{2}$ 的半开闭方体, 记 $\Gamma_0$ 中如此做成的子方体的全体为 $\Gamma_1$. 继续按这个方法二分下去, 可得其所含方体越来越小的方体族组成的序列 $\{\Gamma_k\}$, 这里 $\Gamma_k$ 中每个方体的边长是 $2^{-k}$, 且 $\Gamma_k$ 中的每个方体是 $\Gamma_{k+1}$ 中相应的 $2^n$ 个互不相交的方体的并集. 称这样分成的方体为二进方体.

现在考虑 $G$ 的分割:

- 首先把 $\Gamma_0$ 中含于 $G$ 内的方体取出, 记其全体为 $H_0$. 现在得到了 $G$ 挖掉 $H_0$ 所剩的集合:

$$G\backslash\bigcup_{J\in H_0}J$$

这里 $J$ 是 $\Gamma_0$ 中的二进方体.

- 然后在上述集合中, 挖去 $\Gamma_1$ 含于它的那些方体, 记这些方体为 $H_1$, 现在就得到了 $G$ 挖掉 $H_0, H_1$ 所剩的集合:

$$G \backslash \bigcup_{i=0}^{1} \bigcup_{J \in H_i} J$$

这里 $J$ 是一些二进方体.

- 以此类推, 记 $H_k$ 是 $\Gamma_k$ 中含于集合

$$G \backslash \bigcup_{i=0}^{k} \bigcup_{J \in H_i} J$$

的方体的全体.

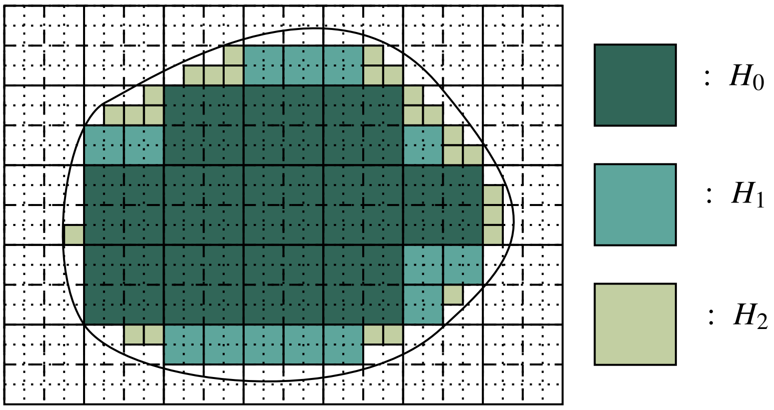


图 1.7: $\mathbb{R}^2$ 情况下 $G$ 的分割示意图

显然, 一切由 $H_k(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 中的方体构成的集合是可列的. 因为 $G$ 是开集, 所以任取 $\boldsymbol{x} \in G$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset G$. 而 $\Gamma_k$ 中的方体的直径当 $k \to \infty$ 时趋于零, 这说明 $\boldsymbol{x}$ 必定最终落入某个 $\Gamma_k$ 中的方体[6], 故:

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{J \in H_k} J, \quad J \text{ 是半开闭二进方体}$$

命题即证. □

**定义 1.4.5**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集族. 若对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$, 存在 $G \in \Gamma$, 使得 $\boldsymbol{x} \in G$, 则称 $\Gamma$ 为 $E$ 的一个开覆盖. 设 $\Gamma$ 是 $E$ 的一个开覆盖, 若 $\Gamma' \subset \Gamma$ 仍是 $E$ 的一个开覆盖, 则称 $\Gamma'$ 为 $\Gamma$ 关于 $E$ 的一个子覆盖. ♣

**引理 1.4.1**

$\mathbb{R}^n$ 中点集 $E$ 的任一开覆盖 $\Gamma$ 都含有一个可数子覆盖. ♡

证明

考虑对 $\mathbb{R}^n$ 中的所有有理点 $\boldsymbol{x}$ 作半径为 1 的球 $B(\boldsymbol{x}, 1)$, 则 $\mathbb{R}^n$ 自身的开覆盖

$$\bigcup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}^n} B(\boldsymbol{x}, 1)$$

是可数覆盖. □

[6] 更精细一点的话, 这句话可以这样理解: 既然 $\boldsymbol{x}$ 已经被包在了某开球内, 其各个分量自然都存在一个范围. 比如 $x^1 \in (a, b)$. 而对 $\mathbb{R}^n$ 的二进方体分割相当于不断细化了对范围的选定, 比方说分 $(a, b)$ 为 $a = \eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_k = b$, 而既然 $x^1$ 自身是定的, 其肯定落在某 $(\eta_i, \eta_{i+1})$ 中, 对其他分量亦然, 而这些 $\eta$ 正是 $\Gamma_k$ 对 $\mathbb{R}^n$ 的分割, 故这便找到了 $\Gamma_k$ 中包含 $\boldsymbol{x}$ 的方体.

**定理 1.4.6 (Heine-Borel)**

$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖.

证明

设 $F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, $\Gamma$ 是 $F$ 的一个开覆盖. 由上述引理, 可以假定 $\Gamma$ 由可列个开集组成:

$$\Gamma = \{G_1, G_2, \cdots, G_i, \cdots\}$$

令

$$H_k = \bigcup_{i=1}^{k} G_i, \quad L_k = F \cap H_k^c, \quad k = 1, 2, \cdots$$

显见 $H_k$ 是开集, $L_k$ 是闭集, 且因为 $H_k$ 递增, 知 $L_k$ 递减, 即 $L_k \supset L_{k+1}, k = 1, 2, \cdots$, 从而对 $L_k$ 可以考虑 Cantor 闭集套定理:

- 如果存在 $k_0$ 使得 $L_{k_0}$ 是空集, 知此时 $H_{k_0}^c \cap F = \varnothing$, 进而 $F \subset H_{k_0}$, 故 $H_{k_0}$ 正是欲求的有限子覆盖.
- 如果全体 $L_k$ 均非空, 根据 Cantor 闭集套定理知存在 $\boldsymbol{x}_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} L_k$, 根据 $L_k$ 的定义即知 $\boldsymbol{x}_0 \in F$, 且任取 $k$ 都有 $\boldsymbol{x}_0 \notin H_k$. 这说明 $F$ 中存在一点 $\boldsymbol{x}_0$ 不属于全体 $H_k$, 但本身 $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_k$, 矛盾! 故该情况不存在.

综上, 命题得证. □

**笔记** 上述定理中有界与闭集两个条件缺一不可:

- 有界的反例如 $\mathbb{R}$ 中对 $\mathbb{N}$ 作开覆盖 $\{(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})\}$, 这个覆盖就不存在有限子覆盖.
- 闭集的反例如 $\mathbb{R}$ 中对点集 $\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ 作开覆盖
$$\{(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n})\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$
这个覆盖也不存在有限子覆盖.

**定理 1.4.7**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 $E$ 的任一开覆盖都包含有限子覆盖, 则 $E$ 是有界闭集.

证明

给定 $\boldsymbol{y} \in E^c$, 则对于每一个 $\boldsymbol{x} \in E$, 都存在 $\delta_{\boldsymbol{x}} > 0$, 使得

$$B(\boldsymbol{x}, \delta_{\boldsymbol{x}}) \cap B(\boldsymbol{y}, \delta_{\boldsymbol{x}}) = \varnothing$$

显见 $\{B(\boldsymbol{x}, \delta_{\boldsymbol{x}}) : \boldsymbol{x} \in E\}$ 是 $E$ 的一个开覆盖. 根据条件知这个开覆盖存在有限子覆盖, 记为

$$B(\boldsymbol{x}_1, \delta_{\boldsymbol{x}_1}), \quad \cdots, \quad B(\boldsymbol{x}_m, \delta_{\boldsymbol{x}_m})$$

由此首先知道 $E$ 是有界集, 再令

$$\delta_0 = \min\{\delta_{\boldsymbol{x}_1}, \cdots, \delta_{\boldsymbol{x}_m}\}$$

根据 $\delta$ 的选取原则知 $B(\boldsymbol{y}, \delta_0) \cap E = \varnothing$, 这说明 $y \notin E'$, 也即 $E$ 是闭集, 命题得证. □

**笔记** 若 $E$ 的任一开覆盖均包含有限子覆盖, 则称 $E$ 是紧集. 上述两个定理说明 $\mathbb{R}^n$ 中紧集与有界闭集是等价的概念.

**定义 1.4.6**

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数, $\boldsymbol{x}_0 \in E$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\boldsymbol{x} \in E \cap B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 处连续, 称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的一个连续点 (在 $\boldsymbol{x}_0 \notin E'$ 的情形, 也即 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $E$ 的孤立点时, $f(\boldsymbol{x})$ 自然在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 处连续). 若 $E$ 中的任一点皆为 $f(\boldsymbol{x})$ 的连续点, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上连续. 记 $E$ 上的连续函数的全体为 $C(E)$.

**命题 1.4.2**

设 $F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, $f \in C(F)$, 则:

1. $f(x)$ 是 $F$ 上的有界函数, 即 $f(F)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集;
2. 存在 $\boldsymbol{x}_0 \in F, \boldsymbol{y}_0 \in F$, 使得
$$f(\boldsymbol{x}_0)=\sup\{f(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}\in F\}, \quad f(\boldsymbol{y}_0)=\inf\{f(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}\in F\}$$
3. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $F$ 上一致连续. 也即对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 当 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in F$ 且 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|<\delta$ 时, 有 $|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon$.

**定理 1.4.8**

若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ 一致收敛于 $f(\boldsymbol{x})$, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E$ 上的连续函数.

**定理 1.4.9 (压缩映射原理)**

设 $F\subset\mathbb{R}$ 是有界闭集, $f:F\to F$, 若有
$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in F$$
则存在 $\boldsymbol{x}_0\in F$, 使得 $f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$.

证明

作函数 $g(x)=|x-f(x)|$, 易知 $g\in C(F)$, 故只需证明存在 $x_0\in F$ 使得 $g(x_0)=0$.

考虑反证法, 如果 $g(x)>0(x\in F)$, 根据连续性知存在 $\xi\in F$, 使得
$$0<g(\xi)=l=\inf_{x\in F}\{g(x)\}$$
但本身有
$$g(f(\xi))=|f(\xi)-f(f(\xi))|<|\xi-f(\xi)|=l, \quad \xi\in F$$
这说明 $l$ 并非 $\inf\limits_{x\in F}\{g(x)\}$, 矛盾! 故 $g$ 必存在零点, 也即 $f(x)$ 在 $F$ 中存在不动点. □

**定义 1.4.7 ($F_\sigma, G_\delta$ 集)**

若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可数个闭集的并集, 则称 $E$ 为 $F_\sigma$ 型集; 若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可数个开集的交集, 则称 $E$ 为 $G_\delta$(型) 集.

**命题 1.4.3**

$(F_\sigma)^c=G_\delta, (G_\delta)^c=F_\sigma$.[a]

[a]这由 De Morgan 法则立得.

**定义 1.4.8 ($\sigma-$ 代数)**

设 $\Gamma$ 是由集合 $X$ 的一些子集所构成的集合族且满足下述条件:

1. $\varnothing\in\Gamma$;
2. 若 $A\in\Gamma$, 则 $A^c\in\Gamma$;
3. 若 $A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots)$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\Gamma$.

这时称 $\Gamma$ 是一个 $\sigma-$ 代数.

**命题 1.4.4**

当 $\Gamma$ 是 $X$ 上的 $\sigma-$ 代数, 有:

1. 若 $A_n \in \Gamma(n=1,2,\cdots,m)$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$;
2. 若 $A_n \in \Gamma(n=1,2,\cdots)$, 则
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma$$
3. 若 $A, B \in \Gamma$, 则 $A \backslash B \in \Gamma$;
4. $X \in \Gamma$.

**定义 1.4.9 (生成 $\sigma-$ 代数)**

设 $\Sigma$ 是集合 $X$ 的一些子集所构成的集合族, 考虑包含 $\Sigma$ 的 $\sigma-$ 代数 $\Gamma$(即若 $A \in \Sigma$, 必有 $A \in \Gamma$, 比如 $\mathscr{P}(X)$ 就是这样的一个 $\Gamma$). 记包含 $\Sigma$ 的最小 $\sigma-$ 代数为 $\Gamma(\Sigma)$, 也即对任一包含 $\Sigma$ 的 $\sigma-$ 代数 $\Gamma'$, 若 $A \in \Gamma(\Sigma)$, 则 $A \in \Gamma'$, 称 $\Gamma(\Sigma)$ 为由 $\Sigma$ 生成的 $\sigma-$ 代数.

**定义 1.4.10 (Borel 集)**

由 $\mathbb{R}^n$ 中一切开集构成的开集族所生成的 $\sigma-$ 代数称为 Borel $\sigma-$ 代数, 记为 $\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 中的元称为 Borel 集.

**定理 1.4.10 (Baire)**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 $F_\sigma$ 集, 即 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, $F_k(k=1,2,\cdots)$ 是闭集. 若每个 $F_k$ 皆无内点, 则 $E$ 也无内点.

证明

用反证法. 如果 $E$ 有内点, 设之为 $\boldsymbol{x}_0$, 则根据内点的定义知存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $\overline{B}(\boldsymbol{x}_0, \delta_0) \subset E$. 因为 $F_1$ 没有内点, 故针对 $\boldsymbol{x}_0$ 而言, 就必存在 $\boldsymbol{x}_1 \in B(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 满足 $\boldsymbol{x}_1 \notin F_1$(否则 $\boldsymbol{x}_0$ 就成为 $F_1$ 的内点了). 又因为 $F_1$ 是闭集, 故
$$\exists \delta_1 \in (0,1)(B(\boldsymbol{x}_1, \delta_1) \cap F_1 = \varnothing)$$
同时可取 $\delta_1$ 足够小使得 $\overline{B}(\boldsymbol{x}_1, \delta_1) \subset B(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$. 再在 $F_2$ 中针对 $\boldsymbol{x}_1$, 知存在 $\boldsymbol{x}_2 \in B(\boldsymbol{x}_1, \delta_1)$ 且 $\boldsymbol{x}_2 \notin F_2$, 仿照上述过程可以得到 $B(\boldsymbol{x}_2, \delta_2)$, 其中 $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$. 一直下去可以得到点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 和正数列 $\{\delta_k\}$, 满足任取 $k \in \mathbb{N}$ 有
$$\overline{B}(\boldsymbol{x}_k, \delta_k) \subset B(\boldsymbol{x}_{k-1}, \delta_{k-1}), \quad \overline{B}(\boldsymbol{x}_k, \delta_k) \cap F_k = \varnothing$$
其中 $0 < \delta_k < \frac{1}{k}$. 从上述构造过程可以看出, 当 $l > k$ 时, 总有 $\boldsymbol{x}_l \in B(\boldsymbol{x}_k, \delta_k)$, 故
$$|\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}_k| < \delta_k < \frac{1}{k}$$
这说明 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基本列, 进而其收敛, 设其收敛到 $\boldsymbol{x}$. 知
$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k| \le |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_l| + |\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}_k| < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_l| + \delta_k, \quad l > k$$
知 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k| \le \delta_k$, 这说明 $\boldsymbol{x} \in \overline{B}(\boldsymbol{x}_k, \delta_k)$, 进而 $x \notin F_k$. 但这对任意 $k$ 都成立, 故 $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = E$, 矛盾! 命题即证. □

**定义 1.4.11**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\overline{E} = \mathbb{R}^n$, 则称 $E$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密集; 若 $\overline{E}^\circ = \varnothing$, 则称 $E$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的无处稠密集; 可数个无处稠密集的并集称为贫集或第一纲集. 不是第一纲集的集称为第二纲集.

下面介绍 Cantor 集的构造.

设 $[0,1] \subset \mathbb{R}$, 将 $[0,1]$ 三等分, 并移去中间的开区间:
$$I_{1,1} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

记留存的部分为 $F_1$, 即:

$$F_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]=F_{1,1}\cup F_{1,2}$$

再将 $F_1$ 中的区间 $[0,\frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3},1]$ 各三等分, 同样移去中间的两个区间:

$$I_{2,1}=(\frac{1}{9},\frac{2}{9}),\quad I_{2,2}=(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$$

记留存的部分为 $F_2$, 即:

$$F_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]=F_{2,1}\cup F_{2,2}\cup F_{2,3}\cup F_{2,4}$$

一般来说, 设所得的剩余部分为 $F_n$, 则将 $F_n$ 中每个 (互不相交的) 区间三等分, 并移去中央的三分开区间, 记留存部分为 $F_{n+1}$. 重复这个操作可以得到集合列 $\{F_n\}$, 其中

$$F_n=F_{n,1}\cup F_{n,2}\cup\cdots\cup F_{n,2^n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

作点集 $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 称 $C$ 为 Cantor(三分) 集.

Cantor 集 $C$ 有下述基本性质:

**命题 1.4.5**

$C$ 是非空有界闭集.

**证明**

因为 $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 而每个 $F_n$ 都是非空有界闭集, 且 $F_n\supset F_{n+1}$, 故由 Cantor 闭集套定理知 $C$ 首先不是空集, 故 $C$ 作为有界闭集的并是有界闭集.

**命题 1.4.6**

$C=C'$[a].

[a] $E=E'$ 的集合称作完全集.

**证明**

设 $x\in C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 则 $x\in F_n(n=1,2,\cdots)$, 即对每个 $n$, $x$ 都属于长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的 $2^n$ 个闭区间中的某一个. 进而对任意 $\delta>0$, 存在 $n$ 满足 $\frac{1}{3^n}<\delta$, 且使得 $F_n$ 中包含 $x$ 的闭区间被包含在 $(x-\delta,x+\delta)$ 中. 现在考虑闭区间 $F_n,F_{n+1},\cdots$, 知它们中的每个都有两个端点, 这两个端点总为 $C$ 中的点, 且至少有一个不是 $x$. 这列端点是趋向 $x$ 的, 进而 $x$ 是 $C$ 的极限点, 故 $C'\supset C$. 又因为 $C$ 是闭集, 故 $C=C'$.

**命题 1.4.7**

$C$ 无内点.

**证明**

设 $x\in C$, 给定任一区间 $(x-\delta,x+\delta)$, 取 $\frac{2}{3^n}<\delta$. 因为 $x\in F_n$, 故 $F_n$ 中总有某个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间 $F_{n,\delta}$ 含于 $(x-\delta,x+\delta)$. 但是在进一步构造 $F_{n+1,\delta}$ 时, 总是会挖去 $F_{n,\delta}$ 中的一部分, 这说明 $(x-\delta,x+\delta)$ 中有不属于 $C$ 的部分, 故 $x$ 并非 $C$ 的内点.

**命题 1.4.8**

$\overline{\overline{C}}=c$.

**证明**

将 $[0,1]$ 中的实数按三进位小数展开, 则 Cantor 集中的点 $x$ 可与下述三进位小数集的元

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i},\quad a_i=0,2$$

一一对应. 而考虑映射

$$f:\frac{a_i}{3^i}\mapsto\frac{1}{2}a_i\cdot\frac{1}{2^i},\quad a_i=0,2,i=1,2,\cdots$$

知全体形如 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i},\quad a_i=0,2$ 的数的集合与全体形如 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{2^i},\quad b_i=0,1$ 的数的集合等同, 但后者正是 $(0,1]$ 上二进位小数的集合, 故后者的基数为 $c$, 故 $\overline{\overline{C}}=c$.

笔记 根据 Cantor 集可以构造 Cantor 函数.

设 $C$ 是 [0,1] 中的 Cantor 集, 其中的点用三进位小数

$$x=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i},\quad \alpha_i=0,1(i=1,2,\cdots)$$

表示.

1. 作定义在 $C$ 上的函数 $\varphi(x)$. 对于 $x\in C$, 定义:

$$\varphi(x)=\varphi(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i},\quad \alpha_i=0,1(i=1,2,\cdots).$$

因为 $[0,1]$ 中的点可以用二进位小数表示, 故 $\varphi(C)=[0,1]$.

现在证明 $\varphi(x)$ 是 $C$ 上的递增函数. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\beta_1,\beta_2,\cdots$ 是取 0 或 1 的数, 且它们所表示的 $C$ 中的数有下述关系:

$$2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}<2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i}$$

若记 $k=\min\{i:\alpha_i\neq\beta_i\}$, 则有:

$$0<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i-\alpha_i}{3^i}=\frac{\beta_k-\alpha_k}{3^k}+\sum_{i>k}\frac{\beta_i-\alpha_i}{3^i}\leq\frac{\beta_k-\alpha_k}{3^i}+\sum_{i>k}\frac{2}{3^i}=\frac{\beta_k-\alpha_k+1}{3^k}$$

进而由 $\alpha_k<\beta_k$ 知只能有 $\alpha_k=0,\beta_k=1$, 故

$$\begin{aligned}\varphi(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i})&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha_i}{2^i}+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\alpha_i}{2^i}\\&\leq\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i}+\frac{\alpha_k}{2^k}+\sum_{i=k+1}\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i}+\frac{1}{2^k}\\&\leq\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\beta_i}{2^i}+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\beta_i}{2^i}=\varphi(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i})\end{aligned}$$

2. 作定义在 [0,1] 上的 $\Phi(x)$. 对于 $x\in[0,1]$, 定义

$$\Phi(x)=\sup\{\varphi(y):y\in C,y\leq x\}.$$

显见 $\Phi(x)$ 是 [0,1] 上的递增函数. 因为 $\Phi([0,1])=[0,1]$, 故 $\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数 •[7]. 此外, 在构造 Cantor 集过程中所移去的每个中央三分开区间 $I_{n,k}$ 上, $\Phi(x)$ 都是常数. 称 $\Phi(x)$ 为 Cantor 函数.

### 1.4.2 例子整理

**例题 1.4** 设 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上, 则 $f\in C(\mathbb{R}^n)$ 的充分必要条件是: 对任意的 $t\in\mathbb{R}$, 点集

$$E_1=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:f(\boldsymbol{x})\geq t\},\quad E_2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:f(\boldsymbol{x})\leq t\}$$

[7] 为什么?

都是闭集.

证明

当 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 以 $E_1$ 为例, 取 $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset E_1$ 满足 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0 (k \to \infty)$, 注意到 $f(\boldsymbol{x}_k) \geq t$, 故由 $f$ 的连续性与极限的保号性知:

$$\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_0) \geq t$$

这说明 $\boldsymbol{x}_0 \in E_1$, 故 $E_1$ 是闭集, $E_2$ 同理可证.

当 $E_1, E_2$ 都是闭集, 用反证法. 设存在 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 并非 $f(\boldsymbol{x})$ 的连续点, 则知存在 $\varepsilon_0 > 0$ 与趋向 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$, 使得

$$\forall k \in \mathbb{N}(f(\boldsymbol{x}_k) \leq f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon_0 \vee f(\boldsymbol{x}_k) \geq f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon_0)$$

不妨设对全体 $\boldsymbol{x}_k$ 都有 $f(\boldsymbol{x}_k) \leq f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon_0$, 则取 $t = f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon_0$, 知 $\boldsymbol{x}_k \in E_2$, 但 $\boldsymbol{x}_0 \notin E_2$, 这与 $E_2$ 是闭集矛盾! 命题即证. □

**例题 1.5** 设 $\alpha \notin \mathbb{Q}, E_\alpha = \{p + \alpha q : p, q \in \mathbb{Z}\}$, 则有 $\overline{E_\alpha} = \mathbb{R}$.

证明

对任意的 $x \in \mathbb{R}, \delta > 0$, 取正整数 $m$ 满足 $10^{-m} < \delta$, 则在点集 $\{n\alpha : n = 1, 2, \cdots\}$ 中必有 $n_1\alpha$ 与 $n_2\alpha$, 它们的前 $m$ 个小数相同. 这是因为如果考虑 $[0, 1) \supset \{n\alpha\}, n = 1, 2, \cdots$ (即 $n\alpha$ 的小数部分), 可将 $[0, 1)$ 视作圆周, $\{n\alpha\}$ 视作圆周上的点[8].

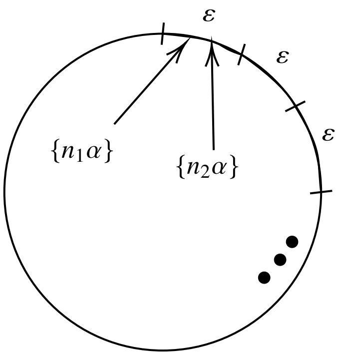


**图 1.8:** $[0, 1)$ 结成的圆周被 $\varepsilon-$ 等分示意图

现在令 $k$ 是 $n_1\alpha - n_2\alpha$ 的整数部分, 则:

$$|n_1\alpha - n_2\alpha - k| < 10^{-m} < \delta$$

记 $|(n_1 - n_2)\alpha - k| = l_1\alpha + l_2, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$, 则 $0 < l_1\alpha + l_2 < \delta$. 故根据 Archimedes 原理, 对固定的 $l_1\alpha + l_2$, 总能找到 $z \in \mathbb{Z}$ 使得

$$(z - 1)(l_1\alpha + l_2) \leq x < z(l_1\alpha + l_2)$$

此即

$$z(l_1\alpha + l_2) + \delta > z(l_1\alpha + l_2) > x \geq z(l_1\alpha + l_2) - (l_1\alpha + l_2) > z(l_1\alpha + l_2) - \delta$$

令 $p = l_2 z, q = l_1 z$, 知 $p + q\alpha \in (x - \delta, x + \delta)$. 注意到 $\delta$ 可以任意小, 命题即证. □

**例题 1.6** 设 $E = \{\cos n\}$, 则 $\overline{E} = [-1, 1]$.

证明

取 $A = \{n + 2m\pi : n, m \in \mathbb{Z}\}$, 根据上例可知 $\overline{A} = \mathbb{R}$. 现在设 $x \in [-1, 1], \varepsilon > 0$, 则存在 $t \in \mathbb{R}$, 使得 $\cos t = x$, 且

[8] 比方说如果希望 $n_1\alpha$ 与 $n_2\alpha$ 的前 3 个小数相同, 则取 $\varepsilon = 10^{-3}$. 因为如果每个 $\varepsilon-$ 段内都仅有一个 $n\alpha$, 这便说明 $\alpha$ 是有理数, 矛盾! 故总会存在 $\{n_1\alpha\}, \{n_2\alpha\}$ 落在同一个 $\varepsilon-$ 段内, 它们之间的差距不超过 $\varepsilon = 10^{-3}$, 这恰说明 $\{n_1\alpha\}$ 与 $\{n_2\alpha\}$ 的前三位小数均相同.

由 $A$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密知存在 $n, m \in \mathbb{Z}$, 使得 $t < n + 2m\pi < t + \varepsilon$, 因而:

$$|x - \cos n| = |\cos t - \cos(n + 2m\pi)| \leq n + 2m\pi - t < \varepsilon$$

命题即证. □

**例题 1.7** 设函数 $f(x)$ 在 $B(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 上有定义, 令

$$\omega_f(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\delta \to 0} \sup\{|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| : \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in B(\boldsymbol{x}_0, \delta)\},$$

我们称 $\omega_f(\boldsymbol{x}_0)$ 为 $f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的振幅. 若 $G$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 且 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在 $G$ 上, 则对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 点集

$$H = \{\boldsymbol{x} \in G : \omega_f(\boldsymbol{x}) < t\}$$

是开集.

证明

不妨设 $H \neq \varnothing$[9]. 对于 $H$ 中的任一点 $\boldsymbol{x}_0$, 因为 $\omega_f(\boldsymbol{x}_0) < t$, 根据定义知存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $B(\boldsymbol{x}_0, \delta_0) \subset G$, 且有

$$\sup\{|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| : \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in B(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)\} < t.$$

现在对于 $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$, 可以选取 $\delta_1 > 0$, 使得

$$B(\boldsymbol{x}, \delta_1) \subset B(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$$

显见

$$\sup\{|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| : \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in B(\boldsymbol{x}, \delta_1)\} < t$$

故 $\omega_f(\boldsymbol{x}) < t$, 即 $B(\boldsymbol{x}_0, \delta_0) \subset H$, 这说明 $H$ 中的点都是内点, 故 $H$ 是开集. □

**例题 1.8** 设 $F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, $G$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 且 $F \subset G$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\boldsymbol{x}| < \delta$ 时, 有:

$$F + \{\boldsymbol{x}\} \triangleq \{\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} \in F\} \subset G.$$

证明

任取 $\boldsymbol{y} \in F$, 因为 $\boldsymbol{y} \in G$, 故存在 $\delta_{\boldsymbol{y}} > 0$, 使得 $B(\boldsymbol{y}, \delta_{\boldsymbol{y}}) \subset G$. 知 $\{B(\boldsymbol{y}, \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{y}}) : \boldsymbol{y} \in F\}$ 组成 $F$ 的一个开覆盖, 故根据 Heine-Borel 有限子覆盖定理知, 存在 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m \in F$, 使得

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(\boldsymbol{y}_k, \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{y}_k})$$

故每个 $\boldsymbol{y} \in F$ 至少属于某个 $B(\boldsymbol{y}_k, \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{y}_k})$, 且 $\boldsymbol{y}$ 与 $G^c$ 中任一点 $\boldsymbol{z}$ 的距离为

$$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| \geq |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}_k| - |\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}| > \delta_{\boldsymbol{y}_k} - \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{y}_k} = \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{y}_k}$$

现取

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{\boldsymbol{y}_1}, \delta_{\boldsymbol{y}_2}, \cdots, \delta_{\boldsymbol{y}_k}\}$$

则当 $|\boldsymbol{x}| < \delta$ 时, 有 $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \in G$, 即 $F + \{\boldsymbol{x}\} \subset G$. □

**例题 1.9** 记 $\mathbb{R}^n$ 中全体有理点为 $\{r_k\}$, 则有理点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}$$

是 $F_\sigma$ 集. 这是因为单点集 $\{r_k\}$ 是闭集.

**例题 1.10(函数连续点的结构)** 若 $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 的连续点集是 $G_\delta$ 集.

证明

[9] $H = \varnothing$ 的一种情况: $f$ 是 Dirichlet 函数.

令 $\omega_f(\boldsymbol{x})$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 点的振幅, 易知 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 处连续的充要条件为 $\omega_f(\boldsymbol{x}_0)=0$, 进而可知 $f(\boldsymbol{x})$ 的连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\boldsymbol{x}\in G:\omega_f(\boldsymbol{x})<\frac{1}{k}\}$$

根据例题 1.7 知 $\{\boldsymbol{x}\in G:\omega_f(\boldsymbol{x})<\frac{1}{k}\}$ 是开集, 故上述集合作为可数开集交是 $G_\delta$ 集. □

**例题 1.11** 设 $f_k\in C(\mathbb{R}^n)(k=1,2,\cdots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

则 $f(\boldsymbol{x})$ 的连续点集

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^{\circ}(\frac{1}{m})$$

是 $G_\delta$ 型集, 其中 $E_k(\varepsilon)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:|f_k(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\le\varepsilon\}$.

证明

首先, 已经知道 $E_k^{\circ}(\frac{1}{m})$ 是开集, 故 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^{\circ}(\frac{1}{m})$ 是开集, 进而题述集合作为可数开集交是 $G_\delta$ 集, 从而只需验证题述集合确实是 $f(\boldsymbol{x})$ 的连续点即可. 另设 $f(\boldsymbol{x})$ 的连续点集为 $C$, 下面开始证明.

先证明 $C\subset\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^{\circ}(\frac{1}{m})$. 任取 $\boldsymbol{x}_0\in C$, 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0)$, 根据极限的定义知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $k_0$ 使得

$$|f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$$

因为 $\boldsymbol{x}_0\in C$, 故根据连续的定义知存在 $\delta>0$, 任取 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 有

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$$

因为 $f_k$ 本身在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 自然可以调整 $\delta$ 使得

$$|f_{k_0}(\boldsymbol{x})-f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon,\quad \forall\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$$

进而对 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 有

$$\begin{aligned}|f_{k_0}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|&=|f_{k_0}(\boldsymbol{x})-f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)+f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)+f(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x})|\\&\le|f_{k_0}(\boldsymbol{x})-f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)|+|f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)|+|f(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x})|<3\varepsilon\end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{x}\in E_{k_0}(3\varepsilon)$, 进而 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subset E_{k_0}(3\varepsilon)$, 故 $\boldsymbol{x}_0\in E_{k_0}^{\circ}(3\varepsilon)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^{\circ}(3\varepsilon)$. 又根据 $\varepsilon$ 的任意性, 得到:

$$\boldsymbol{x}_0\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^{\circ}(\frac{1}{m})$$

从而 $C\subset\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^{\circ}(\frac{1}{m})$.

再证明 $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^{\circ}(\frac{1}{m})\subset C$. 设 $\boldsymbol{x}_0\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^{\circ}(\frac{1}{m})$, 给定 $\varepsilon>0$, 取 $m>\frac{1}{\varepsilon}$. 因为 $\boldsymbol{x}_0\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^{\circ}(\frac{1}{m})$, 故存在 $k_0$ 使得 $\boldsymbol{x}_0\in E_{k_0}^{\circ}(\frac{1}{m})$. 又因为后者是开集, 故存在 $\delta_0>0$ 使得 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)\subset E_k(\frac{1}{m})$, 根据 $E_k$ 的定义此即

$$|f_{k_0}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\le\frac{1}{m}<\varepsilon,\quad \boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$$

注意到 $f_{k_0}$ 本身在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 故又存在 $\delta_1>0$ 使得

$$|f_{k_0}(\boldsymbol{x})-f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon,\quad \forall\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_1)$$

记 $\delta=\min\{\delta-0,\delta_1\}$, 知当 $\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 时, 有

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|&=|f(\boldsymbol{x})-f_{k_0}(\boldsymbol{x})+f_{k_0}(\boldsymbol{x})-f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)+f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)|\\&\le|f(\boldsymbol{x})-f_{k_0}(\boldsymbol{x})|+|f_{k_0}(\boldsymbol{x})-f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)|+|f_{k_0}(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)|<3\varepsilon\end{aligned}$$

其中 $k_0$ 足够大. 由 $\varepsilon$ 的任意性即知 $\boldsymbol{x}_0\in C$, 命题得证. □

**例题 1.12** 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 $G_\delta$ 集.

证明

令 $\mathbb{Q}=\{r_k : k=1,2,\cdots\}$, 如若 $\mathbb{Q}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, 其中 $G_1(i=1,2,\cdots)$ 是开集, 则有表达式

$$\mathbb{R}=(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}=(\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i^c)\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\})$$

其中每个单点集 $\{r_k\}$ 与 $G_i^c$ 均为闭集, 且由 $\overline{G_i}=\mathbb{R}$ 知每个 $G_i^c$ 均无内点, 这说明 $\mathbb{R}$ 是可列个无内点的闭集的并集, 故由 Baire 定理知 $\mathbb{R}$ 也无内点, 矛盾! 故 $\mathbb{Q}$ 不是 $G_\delta$ 集. □

**例题 1.13** 设 $\{G_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密开集列, 则 $G_\delta=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

证明

只需证明任取 $\mathbb{R}^n$ 中的闭球 $\overline{B}=\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$, 均有 $G_0\cap\overline{B}\neq\varnothing$. 用反证法, 如果存在闭球 $\overline{B_0}=\overline{B(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)}$ 使得 $G_0\cap\overline{B_0}=\varnothing$, 则知

$$\mathbb{R}^n=(G_0\cap\overline{B_0})^c=G_0^c\cup(\overline{B_0})^c$$

进而

$$\overline{B_0}=\mathbb{R}^n\cap\overline{B_0}=(G_0^c\cup(\overline{B_0})^c)\cap\overline{B_0}=G_0^c\cap\overline{B_0}=(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k)^c\cap\overline{B_0}=\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k^c\cap\overline{B_0})$$

注意到 $G_k^c$ 是无内点的闭集, 故 $G_k^c\cap\overline{B_0}$ 是无内点的闭集, 进而由 Baire 定理知 $\overline{B_0}$ 是无内点的闭集, 矛盾! 命题即证. □

•

**例题 1.14** 设 $f_k\in C(\mathbb{R}^n)(k=1,2,\cdots)$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 的不连续点集为第一纲集.

证明

根据例 1.11, $f(\boldsymbol{x})$ 的连续点集可表示为

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^\circ(\frac{1}{m}),\quad E_k(\varepsilon)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : |f_k(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\le\varepsilon\}.$$

故只需说明它的余集, 即

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}(E_k^\circ(\frac{1}{m}))^c$$

是第一纲集, 进而如果记

$$G(\frac{1}{m})=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^\circ(\frac{1}{m})$$

则只需说明 $(G(\frac{1}{m}))^c$ 是第一纲集即可. 对 $\varepsilon>0$, 令

$$F_k(\varepsilon)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : |f_k(\boldsymbol{x})-f_{k+i}(\boldsymbol{x})|\le\varepsilon\}$$

可知 $\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k(\varepsilon)$[10], $F_k(\varepsilon)\subset E_k(\varepsilon)$, 从而

$$F_k^\circ(\varepsilon)\subset E_k^\circ(\varepsilon)\subset G(\varepsilon)\Rightarrow\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^\circ(\varepsilon)\subset G(\varepsilon)$$

[10] 为什么?

故

$$[G(\varepsilon)]^c = \mathbb{R}^n \backslash G(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{\circ}(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon) \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{\circ}(\varepsilon)$$
$$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [F_k(\varepsilon) \backslash F_k^{\circ}(\varepsilon)] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \partial F_k(\varepsilon)$$

因为 $F_k(\varepsilon)$ 是闭集, 故 $\partial F_k(\varepsilon)$ 是无处稠密集, 故 $(G(\varepsilon))^c$ 是第一纲集. □

**例题 1.15** 设 $f \in C([0,1])$, 且令

$$f_1'(x) = f(x), f_2'(x) = f_1(x), \cdots, f_n'(x) = f_{n-1}(x), \cdots$$

若对每一个 $x \in [0,1]$, 都存在自然数 $k$, 使得 $f_k(x) = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明

只需指出 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中的一个稠密集上为 0 即可. 对此在 $[0,1]$ 中任取一个闭子区间 $I$, 并记

$$F_k = \{x \in I : f_k(x) = 0\}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

显见每个 $F_k$ 都是闭集, 且 $I = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. 根据 Baire 定理知, 既然 $I$ 有内点, 总存在 $F_{k_0}$ 有内点, 即包含一个区间 $(\alpha, \beta)$. 因为在 $(\alpha, \beta)$ 上 $f_{k_0}(x) = 0$, 故 $f(x) = 0, x \in (\alpha, \beta)$. 注意到 $(\alpha, \beta) \subset I$, 命题即证[11].

**例题 1.16** $E \subset \mathrm{R}$ 是完全集当且仅当 $E = (\bigcup\limits_{n \geq 1}(a_n, b_n))^c$, 其中 $(a_i, b_i)$ 与 $(a_j, b_j)(i \neq j)$ 无公共端点.

证明

若 $E$ 是完全集, 根据定义知 $E = E'$, 故 $E = E \cup E' = \overline{E}$, 从而 $E$ 是闭集, 进而 $E^c$ 是开集. 根据开集构造知 $E^c$ 是可数个互不相交的开区间的并, 而这些开区间彼此之间不应有公共端点, 否则 $E$ 中包含孤立点, 与 $E = E'$ 矛盾! 该方向得证.

若 $E = (\bigcup\limits_{n \geq 1}(a_n, b_n))^c$, 其中 $(a_i, b_i)$ 与 $(a_j, b_j)(i \neq j)$ 无公共端点, 由 De Morgan 法则首先知道 $E$ 是闭集. 其次任取 $x \in E$, 如果 $x \notin E'$, 则说明存在 $\delta > 0$ 使得 $U_\delta(x) \cap E = \{x\}$, 这说明 $x$ 是两个开区间的公共端点, 矛盾! 故 $E = E'$. □

**例题 1.17** 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是完全集, 则 $E$ 是不可数集.

证明

用反证法, 若 $E = \{\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^2 : n = 1, 2, \cdots\}$.

1. 选取 $\boldsymbol{y}_1 \in E \backslash \{\boldsymbol{x}_1\}$, 则知 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1$ 之间的距离大于 0, 故存在以 $\boldsymbol{y}_1$ 为中心的闭正方形 $Q_1$, 使得 $Q_1 \cap E$ 是紧集.
2. 考察 $E \backslash \{\boldsymbol{x}_2\}$. 因为 $\boldsymbol{y}_1 \in E = E'$, 故 $\boldsymbol{y}_1$ 是 $E \backslash \{\boldsymbol{x}_2\}$ 的极限点, 从而 $Q_1^{\circ} \cap (E \backslash \{\boldsymbol{x}_2\}) \neq \varnothing$. 再取 $\boldsymbol{y}_2 \in Q_1^{\circ} \cap (E \backslash \{\boldsymbol{x}_2\})$, 并作以 $\boldsymbol{y}_2$ 为中心的闭正方形 $Q_2 : Q_2 \subset Q_1, \boldsymbol{x}_1 \notin Q_2, \boldsymbol{x}_2 \notin Q_2$, 可知 $(Q_1 \cap E) \supset (Q_2 \cap E)$ 是紧集. 如此往复可得有界闭集套列 $\{Q_n \cap E\}$, 其中 $(Q_{n-1} \cap E) \supset (Q_n \cap E), n \in \mathbb{N}$, 且 $x_1, \cdots, x_n$ 不在 $Q_n \cap E$ 中. 知
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (Q_n \cap E) = \varnothing$$
矛盾!

命题即证. □

### 1.4.3 思考题

✍ **练习 1.31** 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是非空点集. 若 $E$ 中任一子集皆为闭集, 试问 $E$ 是有限集吗?

解　不是, 考虑 $E = \mathbb{N}$ 即可.

---

[11] 为什么?

**练习 1.32** 设 $A, B$ 是 $\mathbb{R}$ 中点集, 试问: 等式 $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cap\overline{B}$ 一定成立吗?

解　不一定, 考虑 $A = [-1, 0), B = (0, 1]$ 即可.

**练习 1.33** 设 $E_k \subset \mathbb{R}^n (k = 1, 2, \cdots)$, 令 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. 若有 $\boldsymbol{x}_0 \in E'$, 试问: 是否一定存在 $E_{k_0}$, 使得 $\boldsymbol{x}_0 \in E'_{k_0}$?

解　不一定, 考虑 $n = 1, E_k = [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}], k = 1, 2, \cdots$, 则 $E = (0, 1], 0 \in E'$, 但对任何 $k$ 都有 $0 \notin E'_k$.

**练习 1.34** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 试证明 $\overline{E}$ 是包含 $E$ 的一切闭集 $F$ 之交:

$$\overline{E} = \bigcap_{F\supset E} F.$$

证明

先证明 $\bigcap\limits_{F\supset E} F \subset \overline{E}$, 这是因为 $\overline{E}$ 本身是包含 $E$ 的闭集, 该方向自然成立.

再证明 $\overline{E} \subset \bigcap\limits_{F\supset E} F$. 任取 $x \in \overline{E}$, 知 $x \in E$ 或 $x \in E'$. 当 $x \in E$, 知对任何 $F \supset E$ 都有 $x \in F$, 故 $x \in \bigcap\limits_{F\supset E} F$. 当 $x \in E'$, 根据定义知存在 $E$ 中的互异点列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_n \longrightarrow x, \quad n \longrightarrow \infty$$

知对任意的 $F \supset E$ 都有 $\{x_n\} \subset F$, 故 $\{x_n\} \subset \bigcap\limits_{F\supset E} F$. 又因为 $F$ 均为闭集, 故 $\bigcap\limits_{F\supset E} F$ 为闭集, 进而 $x \in \bigcap\limits_{F\supset E} F$. 综上知 $\overline{E} \subset \bigcap\limits_{F\supset E} F$.

综上, $\overline{E} = \bigcap\limits_{F\supset E} F$, 命题得证.

**练习 1.35** 设 $F \subset \mathbb{R}$ 是有界闭集, $f(x)$ 是定义在 $F$ 上的 (实值) 函数. 若对任意的 $x_0 \in F'$, 均有 $f(x) \to +\infty (x \in F$ 且 $x \to x_0)$, 试证明 $F$ 是可数集.

证明

根据例(1.1), 已经知道 $F'$ 是可数集, 而 $F$ 的孤立点集 $\mathscr{I}_F$ 也是可数集, 故 $F = F' \cup \mathscr{I}_F$ 是可数集.

**练习 1.36** 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 试证明 $F = \{(x, y) : f(x) \geq y\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集.

证明

考虑证明 $\mathbb{R}^2 \backslash F = \{(x, y) : f(x) < y\}$ 是开集. 任取 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash F$, 知存在 $\alpha > 0$ 使得 $f(x_0) < y_0 - \alpha$, 由连续函数的性质知

$$\exists\delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0)(f(x) < y - \alpha)$$

从而考虑区域 $U(x_0, y_0) = \{(x, y) : x \in U_\delta(x_0), y \in U_\alpha(y_0)\}$, 知 $U(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2 \backslash F$, 进而任取 $B(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$ 即知 $\mathbb{R}^2 \backslash F$ 是开集, 从而 $F$ 是闭集, 命题得证.

**练习 1.37** 试在 $\mathbb{R}$ 中做出可列个互不相交的稠密可列集.

解

考虑

$$\mathbb{Q} + \sqrt{p_k} := \{x + \sqrt{p_k} : x \in \mathbb{Q}, p_k \text{是素数}, k = 1, 2, \cdots\}$$

此即欲求.

**练习 1.38** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 试证明 $E^\circ = (\overline{E^c})^c, \partial E = \overline{E} \backslash E^\circ$.

证明

当 $E = \varnothing$, 命题平凡.

当 $E \neq \varnothing$, 先证明 $E^\circ \subset (\overline{E^c})^c$. 任取 $e \in E^\circ$, 知存在 $\delta > 0$ 使得 $B(e, \delta) \subset E^\circ$, 这说明 $e \notin (E^c)'$. 而既然 $e \in E^\circ \subset E$, 显见 $e \notin E^c$, 从而 $e \notin E^c \cup (E^c)' = \overline{E^c}$, 也即 $e \in (\overline{E^c})^c$. 从而 $E^\circ \subset (\overline{E^c})^c$.

再证明 $(\overline{E^c})^c \subset E^\circ$. 任取 $e \in (\overline{E^c})^c$, 知 $e \notin \overline{E^c}$, 这说明 $e \notin E^c$ 且 $e \notin (E^c)'$. 前者即 $e \in E$, 后者即 $\exists\delta > 0(B(e,\delta) \cap E^c = \varnothing)$, 这便是 $B(e,\delta) \subset E$, 从而 $e \in E^\circ$. 故 $(\overline{E^c})^c \subset E^\circ$.

综上, $E^\circ = (\overline{E^c})^c$.

对于 $\partial E = \overline{E}\backslash E^\circ$, 知

$$e \in \partial E \Leftrightarrow e \in \overline{E} \wedge e \notin E^\circ \Leftrightarrow e \in \overline{E}\backslash E^\circ$$

命题即证.

**练习 1.39** 试证明函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{y}), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

的不连续点集不是闭集.

证明

知 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的连续点, 但 $(a,0)(a \neq 0)$ 均是函数的不连续点, 故 $(0,0)$ 作为 $f(x,y)$ 不连续点集的极限点并不在该集合中, 从而该集合并非闭集.

**练习 1.40** 试证明 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是开集当且仅当 $G \cap \partial G = \varnothing$; $F \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集当且仅当 $\partial F \subset F$.

证明

当 $G \cap \partial G \neq \varnothing$, 设 $g \in G \cap \partial G$. 既然 $g \in \partial G$, 根据边界点的定义知 $g \notin G^\circ \wedge g \in E'$, 这说明 $\forall\delta > 0(B(g,\delta) \not\subset G \wedge B(g,\delta) \cap G \neq \varnothing)$, 进而 $G$ 不是开集.

当 $G$ 不是开集, 知存在 $g \in G$ 满足 $\forall\delta > 0(B(g,\delta) \not\subset G \wedge B(g,\delta) \cap G \neq \varnothing)$, 这说明 $g \in \partial G$, 也即 $G \cap \partial G \neq \varnothing$.

当 $F$ 是闭集, 知 $\overline{F} = F$, 进而根据边界点的定义, $\partial F$ 中的点 $x$ 首先要满足 $x \in \overline{F}$, 故 $\partial F \subset F$.

当 $F$ 不是闭集, 这说明存在不在 $F$ 中的极限点, 记之为 $f$. 知 $f \in \overline{F}$, 但既然 $f \notin F$, 当然有 $f \notin F^\circ$, 故 $f \in \partial F$, 也即 $\partial F$ 中有不在 $F$ 中的点, 从而 $\partial F \not\subset F$.

综上, 命题得证.

**练习 1.41** 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是非空开集, $r_0 > 0$. 若对任意的 $\boldsymbol{x} \in G$, 作闭球 $\overline{B(\boldsymbol{x},r_0)}$, 试证明 $A = \bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in G} \overline{B(\boldsymbol{x},r_0)}$ 是开集.

证明

**练习 1.42** 设 $F \subset \mathbb{R}$ 是无限闭集, 试证明存在 $F$ 中可数子集 $E$,

证明

记 $F$ 的孤立点集为 $\mathscr{I}_F$, 则知 $\mathscr{I}_F$ 可数, 考虑

$$E = (\mathbb{Q} \cap F) \cup \mathscr{I}_F$$

知 $E$ 可数, 且既然 $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, 知 $\overline{E} = F$, 命题得证.

**练习 1.43** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 中的每点都是 $E$ 的孤立点, 试证明 $E$ 是某开集和闭集的交集.

证明

知 $E$ 本身是闭集. 既然 $E$ 中的每个点都是孤立点, 知任取 $\boldsymbol{x} \in E$, 总存在 $\delta_{\boldsymbol{x}} > 0$, 使得

$$(B(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})\backslash\{\boldsymbol{x}\}) \cap E = \varnothing$$

记 $\mathscr{E} = \bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in E} B(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})$, 由 $B(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})$ 是开集知 $\mathscr{E}$ 是开集, 从而 $E = E \cup \mathscr{E}$, 命题得证.

**练习 1.44** 设在 $\mathbb{R}^n$ 中 $\{G_\alpha\}$ 是 $E$ 的一个开覆盖, 试问 $\{\overline{G_\alpha}\}$ 能覆盖 $\overline{E}$ 吗?

解

不能, 参照

$$\mathbb{R} \supset E = \{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}, \quad G_\alpha = \{(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n})\}|_{n=1}^{\infty}$$

知 $0 \in \overline{E}, 0 \notin \{\overline{G_\alpha}\}$, 故 $\{\overline{G_\alpha}\}$ 不能覆盖 $\overline{E}$.

**练习 1.45** 设 $\Gamma = \{[a_\alpha, b_\alpha] : \alpha \in [0,1]\}$, 且 $\Gamma$ 中的任意两个闭区间必相交, 试证明

$$\bigcap_{\alpha \in [0,1]} [a_\alpha, b_\alpha] \neq \varnothing$$

证明

既然 $\Gamma$ 中的任意两个闭区间必相交, 知必有 $\inf_\alpha\{b_\alpha\} \geq \sup_\alpha\{a_\alpha\}$, 从而考虑证明

$$\varnothing \neq [\sup_\alpha\{a_\alpha\}, \inf_\alpha\{b_\alpha\}] \subset \bigcap_{\alpha \in [0,1]} [a_\alpha, b_\alpha]$$

显见 $[\sup_\alpha\{a_\alpha\}, \inf_\alpha\{b_\alpha\}]$ 至少包含 $\inf_\alpha\{b_\alpha\}$. 而根据上下确界的定义即知对任意的 $\alpha \in [0,1]$, 都有

$$[\sup_\alpha\{a_\alpha\}, \inf_\alpha\{b_\alpha\}] \subset [a_\alpha, b_\alpha]$$

故

$$[\sup_\alpha\{a_\alpha\}, \inf_\alpha\{b_\alpha\}] \subset \bigcap_{\alpha \in [0,1]} [a_\alpha, b_\alpha]$$

从而命题得证.

•[12]

**练习 1.46** 设 $F \subset \mathbb{R}$ 是非空可数闭集, 试证明 $F$ 必含有孤立点.

证明

首先讨论 $\mathbb{R}$ 中闭集的结构.

**引理 1.4.2**

$\mathbb{R}$ 中的非空闭集总能表示为可数个闭区间 (包括退化闭区间即单点集) 的并.

证明

设 $G \subset \mathbb{R}$ 是非空闭集, 知 $G^c$ 是不为 $\mathbb{R}$ 的开集, 从而 $G^c$ 是可数个开区间的并, 设:

$$G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n), \quad -\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots$$

知 $G^c$ 的边界是否含有 $\pm\infty$ 对结论的影响仅仅是 $G$ 的子集族中是否会存在形如 $(-\infty, a], [b, +\infty)$ 这两项, 而 $(-\infty, a], [b, +\infty)$ 都是闭集, 故这个影响可以忽略. 不妨就设 $G^c$ 的边界包含 $\pm\infty$, 进而有:

$$G = \mathbb{R} \backslash G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}[b_n, a_{n+1}]$$

当 $b_n = a_{n+2}$ 时此即单点集. 另外, 当 $Q = \mathbb{R}$, 知 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 本身是闭集, 命题依旧成立. □

根据引理, 当 $F \subset \mathbb{R}$ 是非空可数闭集, 知 $F$ 的子集中不能有非退化的闭区间, 故 $F$ 只能作为单点集的并,

**练习 1.47** 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负渐降连续函数列. 若在有界闭集 $F$ 上 $f_n(x) \to 0 (n \to \infty)$, 试证明 $f_n(x)$ 在 $F$ 上一致收敛于零.

证明

此即 Dini 定理的一个弱化版本.

[12]整理那汤松关于非空完全集的断言后写

✍ **练习 1.48** 设 $F \subset \mathbb{R}$ 是闭集, 且 $f \in C(F)$, 则点集 $\{x \in F : f(x) = 0\}$ 是闭集.

证明

记 $A = \{x \in F : f(x) = 0\}$, 考虑证明 $A^c = \{x : x \in \mathbb{R}\backslash F \vee (x \in F \wedge f(x) \neq 0)\}$ 是开集. 任取 $x \in A^c$, 当 $x \in \mathbb{R}\backslash F$, 既然 $F$ 是闭集, 知 $\mathbb{R}\backslash F$ 是开集, 从而自然存在 $x$ 的某邻域 $U(x)$ 使得 $U(x) \subset \mathbb{R}\backslash F \subset A^c$. 当 $x \in F \wedge f(x) \neq 0$, 不妨设 $f(x) > 0$, 既然 $f \in C(F)$, 知存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $y \in U_\delta(x)$ 都有 $f(y) > 0$, 这恰说明 $U_\delta(x) \subset A^c$. 综上知 $A^c$ 为开集, 故 $A$ 为闭集.

•[13]

✍ **练习 1.49** 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$, 且 $f \in C(E_1), f \in C(E_2)$. 证明:

(i) 若 $E_1, E_2$ 皆是开集, 则 $f \in C(E_1 \cup E_2)$;

(ii) 若 $E_1, E_2$ 皆是闭集, 则 $f \in C(E_1 \cap E_2)$.

证明

✍ **练习 1.50** 设 $E \subset \mathbb{R}$, 若每个 $f \in C(E)$ 都是有界函数, 则 $E$ 是有界闭集; 若每个 $f \in C(E)$ 都在 $E$ 上达到最大值, 则 $E$ 是有界闭集.

证明

如果 $E$ 无界, 考虑函数 $f(x) = x$, 知 $f \in C(E)$, 但随着 $E$ 的无界知 $f$ 亦无界. 如果 $E$ 是开集, 知 $E' \not\subseteq E$. 取 $e' \in E'\backslash E$, 考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x-e'}$, 知既然 $e' \notin E$, 有 $f \in C(E)$, 但 $e' \in E'$, 这说明存在 $E$ 中的数列 $\{e_n\}$ 趋向 $e'$, 进而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(e_n) = \infty$, 与条件矛盾! 综上知 $E$ 只能是有界闭集.

如果 $E$ 无界, 考虑函数 $f(x) = |x|$, 知 $f \in C(E)$, 但随着 $E$ 的无界知 $f$ 无最大值. 如果 $E$ 是开集, 知 $E' \not\subseteq E$. 取 $e' \in E'\backslash E$, 考虑函数 $f(x) = \frac{1}{|x-e'|}$, 知既然 $e' \notin E$, 有 $f \in C(E)$, 但 $e' \in E'$, 这说明存在 $E$ 中的数列 $\{e_n\}$ 趋向 $e'$, 进而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(e_n) = +\infty$, 与条件矛盾! 综上知 $E$ 只能是有界闭集.

✍ **练习 1.51** 设定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(\boldsymbol{x})$ 满足: 对 $E$ 中的任意有界闭集 $K$, 均有 $f \in C(K)$, 则 $f \in C(E)$.

证明

用反证法, 如果 $f \notin C(E)$, 这说明

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists \boldsymbol{x}_1 \in E \exists \boldsymbol{x}_0 \in B(\boldsymbol{x}_1, \delta)(|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| > \varepsilon_0)$$

但考虑 $B(\boldsymbol{x}_1, \delta) \subset \overline{B}(\boldsymbol{x}_1, \delta + \nu)(\nu > 0$ 足够小), 根据条件知 $\overline{B}(\boldsymbol{x}_1, \delta + \nu)$ 中的每一点都是 $f$ 的连续点, 这恰与上式矛盾! 命题即证.

✍ **练习 1.52** 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 且当 $G \subset \mathbb{R}$ 是开集时, $f(G)$ 必是开集, 则 $f(x)$ 是严格单调函数.

证明

当 $f(x)$ 并非严格单调函数, 也即 $\exists x_1 < x_2(f(x_1) = f(x_2))$, 考虑 $G = (x_1, x_2)$, 知 $G$ 是开集. 既然 $f \in C(\mathbb{R})$, 知 $f$ 在 $\overline{G}$ 上能取到最大最小值, 分别记为 $M, m$, 显见 $m \leq M$. 同时 $f(G)$ 必定也是 $\mathbb{R}$ 上的区间. 当 $f(x_1), f(x_2)$ 同为 $M$, 要想 $f(G)$ 是开集, 只能要求 $m < f(x_1)$, 否则 $M = m$ 意味着 $f(G)$ 是单点集, 为闭集. 而当 $m < M$, 设 $\xi \in (x_1, x_2)$ 满足 $f(\xi) = m$, 则知 $f(\xi) \in f(G)$, 但任取 $\delta > 0$ 总有 $U_\delta(f(\xi)) \not\subseteq f(G)$(否则 $m$ 并非最小值), 这与 $f(G)$ 是开集矛盾! $f(x_1) = f(x_2) = M$ 的情况同理, 故 $f(x)$ 只能是严格单调函数.

✍ **练习 1.53** 设 $f_n \in C([a, b])(n = 1, 2, \cdots)$, 且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in [a, b]$. 则对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 点集

$$\{x \in [a, b] : f(x) < t\}$$

是 $F_\delta$ 集.

证明

---

[13]整理拓扑后写.

知

$$\{x\in[a,b]:f(x)<t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}\{x\in[a,b]:f_n(x)\le t-\frac{1}{k}\}=\bigcup_{k,j\ge1}\bigcap_{n=j}^{\infty}\{x\in[a,b]:f_n(x)\le t-\frac{1}{k}\}$$

既然 $f_n\in C([a,b])$, 知 $\{x\in[a,b]:f_n(x)\le t-\frac{1}{k}\}$ 是闭集, 进而 $\bigcap\limits_{n=j}^{\infty}\{x\in[a,b]:f_n(x)\le t-\frac{1}{k}\}$ 是闭集, 故 $\{x\in[a,b]:f(x)<t\}$ 是可数个闭集的并集, 也即是 $F_\delta$ 集.

**练习 1.54** 设 $\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F\subset\mathbb{R}$ 上的连续函数列, 则 $f_n(x)$ 在 $F$ 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

证明

**练习 1.55** 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 则点集

$$\{x\in\mathbb{R}:\lim_{y\to x}f(y)\text{存在}\}$$

是 $G_\delta$ 集.

**练习 1.56** 试证明:

(i) 定义在 $(0,1)$ 上的函数 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 不是连续函数列的极限;

(ii) $[a,b]$ 上的导函数 $f'(x)$ 的连续点在 $[a,b]$ 中稠密.

**练习 1.57** 设有 $\mathbb{R}$ 中的闭集 $F$ 以及开集列 $\{G_k\}$. 若对每一个 $k$, $\overline{G_k\cap F}=F$, 证明:

$$\overline{G_0\cap F}=F,\quad G_0=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$$

**练习 1.58** 设 $\{F_k\}\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集列, 且 $\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$, 证明 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k^{\circ}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

## 1.5 点集间的距离

### 1.5.1 知识梳理

**定义 1.5.1**

设 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(\boldsymbol{x},E)=\inf\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|:\boldsymbol{y}\in E\}$$

为点 $\boldsymbol{x}$ 到 $E$ 的距离; 若 $E_1,E_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 称

$$d(E_1,E_2)=\inf\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|:\boldsymbol{x}\in E_1,\boldsymbol{y}\in E_2\}$$

为 $E_1$ 与 $E_2$ 之间的距离. 这也可等价地定义为

$$\inf\{d(\boldsymbol{x},E_2):\boldsymbol{x}\in E_1\}\text{或}\inf\{d(E_1,\boldsymbol{y}):\boldsymbol{y}\in E_2\}$$

**定理 1.5.1**

若 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是非空闭集, 且 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, 则存在 $\boldsymbol{y}_0\in F$, 使得

$$|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|=d(\boldsymbol{x}_0,F).$$

证明

为了应用连续函数最大最小值的定理, 首先要选出一个有界闭集. 作闭球 $\overline{B}=\overline{B}(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 满足 $\overline{B}\cap F$ 非空. 显见

$$d(\boldsymbol{x}_0,F)=d(\boldsymbol{x}_0,\overline{B}\cap F).$$

因为 $\overline{B}\cap F$ 是有界闭集, 故如果将 $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}|$ 看作定义在 $\overline{B}\cap F$ 上的 $\boldsymbol{y}$ 的连续函数, 则其在 $\overline{B}\cap F$ 上有最小值, 即存在 $\boldsymbol{y}_0\in\overline{B}\cap F$, 使得

$$|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|=\inf\{|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}|:\boldsymbol{y}\in\overline{B}\cap F\},$$

进而 $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|=d(\boldsymbol{x}_0,F)$. □

**定理 1.5.2**

若 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 则 $d(\boldsymbol{x},E)$ 作为 $\boldsymbol{x}$ 的函数在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

证明

考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的两点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$. 根据 $d(\boldsymbol{y},E)$ 作为下确界的定义, 任取 $\varepsilon$, 总存在 $z\in E$, 使得 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|<d(\boldsymbol{y},E)+\varepsilon$. 进而:

$$d(\boldsymbol{x},E)\leq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\leq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+d(\boldsymbol{y},E)+\varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知

$$d(\boldsymbol{x},E)-d(\boldsymbol{y},E)\leq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

同理可证 $d(\boldsymbol{y},E)-d(\boldsymbol{x},E)\leq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, 进而

$$|d(\boldsymbol{x},E)-d(\boldsymbol{y},E)|\leq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

这说明 $d(\boldsymbol{x},E)$ 满足 Lipschitz 条件, 进而其一致连续. □

**推论 1.5.1**

若 $F_1,F_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个非空闭集, 且其中至少有一个有界, 则存在 $\boldsymbol{x}_1\in F_1,\boldsymbol{x}_2\in F_2$, 使得

$$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|=d(F_1,F_2).$$

**定理 1.5.3 (连续延拓定理)**

若 $F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $F$ 上的连续函数, 且 $|f(\boldsymbol{x})|\leq M(\boldsymbol{x}\in F)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(\boldsymbol{x})$ 满足

$$|g(\boldsymbol{x})|\leq M, g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in F.$$

证明

把 $F$ 分成三个点集:

$$\begin{aligned}A&=\{\boldsymbol{x}\in F:\frac{M}{3}\leq f(\boldsymbol{x})\leq M\},\\B&=\{\boldsymbol{x}\in F:-M\leq f(\boldsymbol{x})\leq-\frac{M}{3}\},\\C&=\{\boldsymbol{x}\in F:-\frac{M}{3}<f(\boldsymbol{x})<\frac{M}{3}\}\end{aligned}$$

并作函数

$$g_1(\boldsymbol{x})=\frac{M}{3}\frac{d(\boldsymbol{x},B)-d(\boldsymbol{x},A)}{d(\boldsymbol{x},B)+d(\boldsymbol{x},A)}$$

因为 $A\cap B=\varnothing$, 所以 $g_1(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处有定义. 又因为本身 $d(\boldsymbol{x},A),d(\boldsymbol{x},B)$ 都是连续函数, 所以 $g_1(\boldsymbol{x})$ 也是连续函数. 此外:

$$\begin{aligned}|g_1(\boldsymbol{x})|&\leq\frac{M}{3},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\\|f(\boldsymbol{x})-g_1(\boldsymbol{x})|&\leq\frac{2}{3}M,\quad \boldsymbol{x}\in F\end{aligned}$$

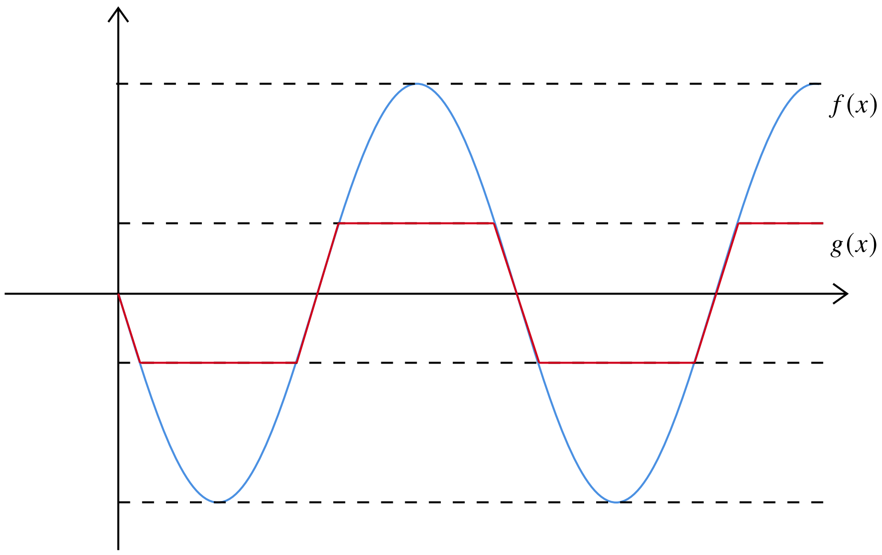


图 1.9: $g(x)$ 示意图

现在, 把 $f(\boldsymbol{x})-g_1(\boldsymbol{x})$ 视作新的 $f(\boldsymbol{x})$, $\frac{2}{3}M$ 视作新的 $M$, 同样可以用上述做法作出 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g_2(\boldsymbol{x})$, 满足:

$$|g_2(\boldsymbol{x})| \le \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

$$|f(\boldsymbol{x})-g_1(\boldsymbol{x})-g_2(\boldsymbol{x})| \le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}M, \quad \boldsymbol{x}\in F$$

继续这一过程, 可得在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(\boldsymbol{x})\}$, 使得

$$|g_k(\boldsymbol{x})| \le \frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{k-1}M, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, k=1,2,\cdots$$

$$|f(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^{k}g_i(\boldsymbol{x})| \le (\frac{2}{3})^k M, \quad \boldsymbol{x}\in F, k=1,2,\cdots$$

现在讨论 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i(\boldsymbol{x})$, 根据构造的规则首先有:

$$|\sum_{i=1}^{\infty}g_i(\boldsymbol{x})| \le \sum_{i=1}^{\infty}|g_i(\boldsymbol{x})| \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{i-1}M = M$$

故由 Weierstrass 判别法知该函数项级数一致收敛. 因为每个 $g_i(\boldsymbol{x})$ 都是连续函数, 根据一致收敛即知 $g(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i(\boldsymbol{x})$ 是连续函数. 而根据

$$|f(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^{k}g_i(\boldsymbol{x})| \le (\frac{2}{3})^k M, \quad \boldsymbol{x}\in F, k=1,2,\cdots$$

即知 $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), x\in F, |g(\boldsymbol{x})| \le M$, 命题得证. □

### 1.5.2 例子整理

**例题 1.18** 在 $\mathbb{R}^2$ 中作点集:

$$E_1 = \{\boldsymbol{x} = (\xi,\eta) : -\infty < \xi < +\infty, \eta = 0\}$$

$$E_2 = \{\boldsymbol{y} = (\xi,\eta) : \xi\cdot\eta = 1\}$$

则 $d(E_1,E_2) = 0$.

证明

当 $\boldsymbol{x} = (\xi,0)\in E_1, \boldsymbol{y} = (\xi,\eta)\in E_2$, 知

$$d(E_1,E_2) \le d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\eta| = \frac{1}{|\xi|}$$

令 $\xi \to \infty$ 得 $\frac{1}{|\xi|} \to 0$, 故只能有 $d(E_1, E_2) = 0$. □

**例题 1.19** 若 $F_1, F_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个互不相交的非空闭集, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(\boldsymbol{x})$, 使得

1. $0 \le f(\boldsymbol{x}) \le 1(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$;
2. $F_1 = \{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}) = 1\}, F_2 = \{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}) = 0\}$.

证明

构造

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{d(\boldsymbol{x}, F_2)}{d(\boldsymbol{x}, F_1) + d(\boldsymbol{x}, F_2)}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

即可.

### 1.5.3 思考题

**练习 1.59** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空点集. 若对任意的 $\boldsymbol{x} \notin E$, 存在 $\boldsymbol{y} \in E$, 使得 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{x}, E)$, 试证明 $E$ 是闭集.

**练习 1.60** 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $F$ 是 $G$ 内的闭集, 试证明存在 $r > 0$, 使得

$$\{\boldsymbol{x} : d(\boldsymbol{x}, F) \le r\} \subset G.$$

**练习 1.61** 试问: 平面中的圆盘 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ 能表示为两个不同的非空闭集之并吗?

**练习 1.62** 试证明定义在区间 $(0, 1]$ 上的函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 不能延拓为 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数.

## 1.6 补充: 点集拓扑基础

这一节主要选自 [2], 整理于此旨在加深对开集, 闭集与连续的理解.

### 1.6.1 拓扑空间

回忆数学分析中函数连续性的规定, 如果 $f : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$ 是函数, $x_0 \in \mathbb{E}^1$, 则 $f$ 在 $x_0$ 处连续可描述为:

- 如果序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x_0$, 则序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x_0)$;
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0)(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$;
- 如果 $V$ 是包含 $f(x_0)$ 的开集, 则存在包含 $x_0$ 的开集 $U$, 使得 $f(U) \subset V$.

其中前两个定义都额外的需要添加" 距离" 的定义, 而第三个则绕过了距离, 仅通过开集和闭集刻画了连续性. 拓扑空间正是具有开集结构的空间.

**定义 1.6.1 (子集族)**

设 $X$ 是一个非空集合, 记 $2^X$ 是 $X$ 的幂集, 即以 $X$ 的所有子集 (包括空集 $\varnothing$ 和 $X$ 自己) 为成员的集合. 把 $2^X$ 的子集 (即以 $X$ 的一部分子集为成员的集合) 称为 $X$ 的子集族. ♣

**定义 1.6.2 (拓扑与开集)**

设 $X$ 是一个非空集合. $X$ 的一个子集族 $\tau$ 称为 $X$ 的一个拓扑, 如果它满足下述三条拓扑公理:

1. $X \in \tau, \varnothing \in \tau$;
2. $\tau$ 中任意多个成员的并集仍在 $\tau$ 中;
3. $\tau$ 中有限多个成员的交集仍在 $\tau$ 中.

集合 $X$ 和它的一个拓扑 $\tau$ 一起称为一个拓扑空间, 记作 $(X, \tau)$. 称 $\tau$ 中的成员为这个拓扑空间的开集. ♣

设 $X$ 是一个非空集合, 显见 $2^X$ 构成 $X$ 上的拓扑, 称为 $X$ 上的离散拓扑. $\{X, \varnothing\}$ 也是 $X$ 上的拓扑, 称为 $X$ 上的平凡拓扑. 设 $\tau_1, \tau_2$ 是集合 $X$ 上的两个拓扑, 如果 $\tau_1 \subset \tau_2$, 则说 $\tau_2$ 比 $\tau_1$ 大 (或 $\tau_2$ 比 $\tau_1$ 精细). 显见离散拓扑比任何别的拓扑都大, 而平凡拓扑比别的拓扑都小.

下面是几个拓扑的例子:

**例题 1.20** 设 $X$ 是无穷集合, $\tau_f=\{A^c: A$是 $X$ 的有限子集$\}\cup\{\varnothing\}$, 则 $\tau_f$ 是 $X$ 的一个拓扑, 称为 $X$ 上的余有限拓扑.

证明

逐一验证三条公理:

- $X\in\tau_f$, 这是因为 $\varnothing$ 是 $X$ 的有限子集, 而 $\varnothing^c=X$. 显然 $\varnothing\in\tau_f$.
- 对任意并封闭. 这是因为任取 $\tau_f$ 中的元素 $A_\alpha^c, \alpha\in I$, 知

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c=(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c$$

既然 $A_\alpha$ 本身是有限子集, $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\subset A_\alpha$ 自然也是有限子集, 故 $(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)^c\in\tau_f$.

- 对有限交封闭. 这是因为任取 $\tau_f$ 中的元素 $A_1^c,\cdots,A_n^c$, 知

$$\bigcap_{k=1}^n A_k^c=(\bigcup_{k=1}^n A_k)^c$$

既然 $A_k$ 是有限子集, 知有限个有限子集的并依旧是有限子集, 故 $(\bigcup\limits_{k=1}^n A_k)^c\in\tau_f$.

□

**例题 1.21** 设 $X$ 是不可数无穷集合, $\tau_c=\{A^c: A$是 $X$ 的可数子集$\}\cup\{\varnothing\}$, 则 $\tau_c$ 也是 $X$ 的拓扑, 称为余可数拓扑.

**例题 1.22** 设 $\mathbb{R}$ 是全体实数的集合, 规定 $\tau_e=\{U: U$是若干个开区间的并集$\}$, 这里" 若干" 可以是无穷, 有限, 也可以是零, 因而 $\varnothing\in\tau_e$, 则 $\tau_e$ 是 $\mathbb{R}$ 上的拓扑, 称为 $\mathbb{R}$ 上的欧氏拓扑.

回到数学分析与实变函数中的定义, 同样可以利用度量来定义拓扑. 这首先需要重申一遍度量与邻域的定义:

**定义 1.6.3 (度量)**

集合 $X$ 上的一个度量 $d$ 是一个映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}$, 满足:

1. 正定性: $d(x,y)=0,\forall x\in X$, 且 $d(x,y)\neq 0$, 当 $x\neq y$;
2. 对称性: $d(x,y)=d(y,x),\forall x,y\in X$;
3. 三角不等式: $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z),\forall x,y,z\in X$.

当集合 $X$ 上规定了一个度量 $d$ 后, 称为度量空间, 记作 $(X,d)$.

♣

**定义 1.6.4 (邻域)**

设 $(X,d)$ 是度量空间, $x_0\in X,\varepsilon>0$, 称 $X$ 的子集

$$B(x_0,\varepsilon):=\{x\in X: d(x_0,x)<\varepsilon\}$$

为以 $x_0$ 为心, $\varepsilon$ 为半径的球形邻域.

♣

**引理 1.6.1**

$(X,d)$ 的任意两个球形邻域的交集是若干球形邻域的并集.

♡

证明

设

$$U=B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2),\quad x_1,x_2\in X,\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$$

既然 $U$ 中的任意点 $x$ 必同时在上述两个邻域中, 知

$$d(x,x_1)<\varepsilon_1, d(x,x_2)<\varepsilon_2\Rightarrow\varepsilon_1-d(x,x_1)>0,\varepsilon_2-d(x,x_2)>0$$

取

$$\varepsilon_x=\min\{\varepsilon_1-d(x,x_1),\varepsilon_2-d(x,x_2)\}$$

可知 $B(x,\varepsilon_x)\subset U$, 故

$$U=\bigcup_{x\in U}B(x,\varepsilon_x)$$

□

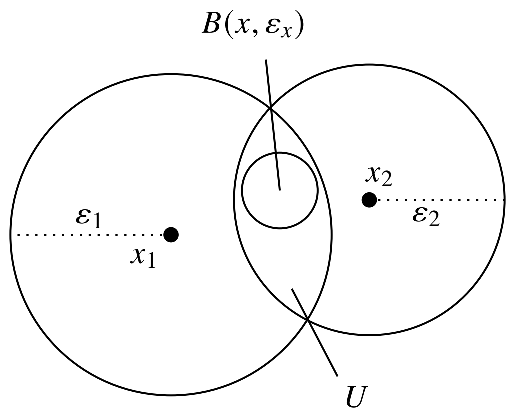


**图 1.10:** 证明示意图

规定 $X$ 的子集族 $\tau_d=\{U:U\text{是若干个球形邻域的并集}\}$.

**命题 1.6.1**

$\tau_d$ 是 $X$ 上的一个拓扑.

证明

逐一验证三条公理:

- $X\in\tau_d$, 这是因为 $X$ 总能表成其中所有元素的球形邻域的并. $\varnothing\in\tau_d$, 这是因为" 若干" 包含零.
- 对任意并封闭, 这从定义即知.
- 对有限交封闭. 设 $U,U'\in\tau_d$, 记

$$U=\bigcup_{\alpha}B(x_\alpha,\varepsilon_\alpha),\quad U'=\bigcup_{\beta}B(x'_\beta,\varepsilon'_\beta)$$

则

$$U\cap U'=(\bigcup_{\alpha}B(x_\alpha,\varepsilon_\alpha))\cap(\bigcup_{\beta}B(x'_\beta,\varepsilon'_\beta))=\bigcup_{\alpha,\beta}(B(x_\alpha,\varepsilon_\alpha)\cap B(x'_\beta,\varepsilon'_\beta))$$

而根据引理等式最右端恰是若干球形邻域的并, 故 $U\cap U'\in\tau_d$.

□

称 $\tau_d$ 是 $X$ 上由度量 $d$ 决定的度量拓扑. 注意到开集和度量的定义已经分开了, 接下来在脱离了度量的情况下重新建立开集闭集的相关概念.

**定义 1.6.5 (闭集)**

拓扑空间 $X$ 的一个子集 $A$ 称为闭集, 如果 $A^c$ 是开集.

**命题 1.6.2**

拓扑空间的闭集满足:

1. $X$ 和 $\varnothing$ 都是闭集;
2. 任意多闭集的交是闭集;
3. 有限个闭集的并是闭集.

**定义 1.6.6 (内点, 内部)**

设 $A$ 是拓扑空间 $X$ 的一个子集, $x \in A$. 如果存在开集 $U$, 使得 $x \in U \subset A$, 则称 $x$ 是 $A$ 的一个内点, $A$ 是 $x$ 的一个邻域. $A$ 的所有内点的集合称为 $A$ 的内部, 记作 $A^\circ$.

**命题 1.6.3**

若 $A \subset B$, 则 $A^\circ \subset B^\circ$.

证明

如果 $x$ 是 $A$ 的内点, 根据定义知存在开集 $U$ 使得 $x \in U \subset A$. 因为 $A \subset B$, 故 $U \subset B$, 这说明 $x \in U \subset B$, 也即 $x$ 是 $B$ 的内点, 故 $A^\circ \subset B^\circ$. □

**命题 1.6.4**

$A^\circ$ 是包含在 $A$ 中的所有开集的并集, 因此是包含在 $A$ 中的最大开集.

证明

记 $\{U_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ 是包含在 $A$ 中的所有开集构成的集族. 知取定 $U_\alpha$, 任取 $x \in U_\alpha$, 总成立 $x \in U_\alpha \subset A$, 这说明 $x \in A^\circ$, 故 $U_\alpha \subset A^\circ$, 进而 $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} U_\alpha \subset A^\circ$. 同时, 任取 $x \in A^\circ$, 根据定义知总存在开集 $U$ 使得 $x \in U \subset A$, 而 $U \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} U_\alpha$, 这说明 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} U_\alpha$, 故 $A^\circ \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} U_\alpha$. 综上知 $A^\circ = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} U_\alpha$. □

**命题 1.6.5**

$A^\circ = A \Leftrightarrow A$ 是开集.

证明

当 $A$ 是开集, 已经知道 $A^\circ \subset A$, 而 $A$ 也是包含 $A$ 的开集, 故 $A \subset A^\circ$, 综上知 $A = A^\circ$.

当 $A^\circ = A$, 已经知道 $A^\circ$ 是开集, 故 $A$ 是开集. □

**命题 1.6.6**

$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

证明

既然 $A \cap B \subset A$, 知 $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$, 同理 $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$, 故 $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.

另一边, 注意到 $A^\circ \subset A, B^\circ \subset B$, 故 $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. 因为 $A^\circ, B^\circ$ 都是开集, 故 $A^\circ \cap B^\circ$ 是开集, 也即 $(A^\circ \cap B^\circ)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, 进一步有

$$A^\circ \cap B^\circ = (A^\circ \cap B^\circ)^\circ \subset (A \cap B)^\circ$$

故综上知 $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. □

**命题 1.6.7**

$(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

证明

因为 $A^\circ \cup B^\circ \subset A \cup B$, 且其本身是开集, 故根据命题(1.6.4)知 $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$. □

**定义 1.6.7**

设 $A$ 是拓扑空间 $X$ 的子集, $x \in X$. 如果 $x$ 的每个邻域都含有 $A \backslash \{x\}$ 中的点, 则称 $x$ 是 $A$ 的聚点. $A$ 的所有聚点的集合称为 $A$ 的导集, 记作 $A'$. 称集合 $\overline{A} := A \cup A'$ 为 $A$ 的闭包.

由定义知 $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x$ 的任一邻域与 $A$ 都有交点.

闭包与内部的关系如下.

**命题 1.6.8**

若拓扑空间 $X$ 的子集 $A$ 与 $B$ 互为余集, 则 $\overline{A}$ 与 $B^{\circ}$ 互为余集.

证明

任取 $x \in \overline{A}^{c}$, 知这等价于存在 $B(x,\delta)$ 使得 $B(x,\delta) \cap A = \varnothing$, 又因为 $B = A^{c}$, 故这说明 $B(x,\delta) \subset B$, 也即 $x \in B^{\circ}$. 反之同理, 命题即证. □

**命题 1.6.9**

1. 若 $A \subset B$, 则 $\overline{A} \subset \overline{B}$;
2. $\overline{A}$ 是所有包含 $A$ 的闭集的交集, 进而是包含 $A$ 的最小闭集;
3. $\overline{A} = A \Leftrightarrow A$ 是闭集;
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
5. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

**笔记** 在引入拓扑空间后, 聚点的概念发生了一些改变. 比方说取拓扑空间 $X = \{a,b,c\}$, 其上的拓扑为 $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$, 则当 $A = \{a\} \subset X$ 时, $b,c$ 都是 $A$ 的聚点. 这是因为 $b$ 或 $c$ 的邻域只有 $X$, 而 $X \ni a$. 但 $a$ 不是 $A$ 的聚点, 因为 $A \backslash \{a\} = \varnothing$. 在传统意义下, $A$ 是没有聚点的.

**定义 1.6.8**

拓扑空间 $X$ 的子集 $A$ 称为稠密的, 如果 $\overline{A} = X$. 如果 $X$ 有可数的稠密子集, 则称 $X$ 是可分拓扑空间.

**例题 1.23** $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 是可分的, 因为它的任一无穷子集都是稠密的, $\mathbb{Q}$ 是它的一个可数稠密子集; $(\mathbb{R}, \tau_c)$ 并非可分, 因为它的任一可数子集都是闭集, 不可能稠密.

**定义 1.6.9 (收敛)**

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$(或简单地记作 $\{x_n\}$) 是拓扑空间 $X$ 中点的序列. 如果点 $x_0 \in X$ 的任一邻域 $U$ 都包含 $\{x_n\}$ 的几乎所有项 (即只有有限个 $x_n$ 不在 $U$ 中, 或存在正整数 $N$ 使得当 $n > N$ 时, $x_n \in U$), 则说 $\{x_n\}$ 收敛到 $x_0$, 记作 $x_n \to x_0$.

拓扑空间中的序列收敛性已经丧失了诸多良好性质, 其应用范围并不广泛.

**定义 1.6.10 (子空间)**

设 $A$ 是拓扑空间 $(X,\tau)$ 的一个非空子集, 规定 $A$ 的子集族

$$\tau_A := \{U \cap A | U \in \tau\}$$

容易验证 $\tau_A$ 是 $A$ 上的一个拓扑, 称为 $\tau$ 导出的 $A$ 上的子空间拓扑, 称 $(A, \tau_A)$ 为 $(X,\tau)$ 的子空间.

在引入子空间的概念后, 可以发现开集是一个相对的概念. 比方说 $\mathbb{E}^1$ 是 $\mathbb{E}^2$ 的子空间, 开区间 $(0,1)$ 在 $\mathbb{E}^1$ 中是开集, 但在 $\mathbb{E}^2$ 中并非开集. 下面的命题阐述了判断子空间中闭集的方法.

**命题 1.6.10**

设 $X$ 是拓扑空间, $C \subset A \subset X$, 则 $C$ 是 $A$ 的闭集等价于 $C$ 是 $A$ 与 $X$ 的一个闭集的交集.

证明

$C$ 是 $A$ 的闭集等价于 $A \backslash C$ 是 $A$ 的开集, 进而根据子空间拓扑的定义知存在 $X$ 中的开集 $U$, 使得 $A \backslash C = U \cap A$, 可以验证这等价于 $C = U^c \cap A$, 而 $U^c$ 恰是 $X$ 中的一个闭集, 命题即证. □

**命题 1.6.11**

设 $X$ 是拓扑空间, $B \subset A \subset X$, 则

1. 若 $B$ 是 $X$ 的开 (闭) 集, 则 $B$ 也是 $A$ 的开 (闭) 集;
2. 若 $A$ 是 $X$ 的开 (闭) 集, $B$ 是 $A$ 的开 (闭) 集, 则 $B$ 也是 $X$ 的开 (闭) 集.

证明

1. 因为 $B \subset A$, 故 $B = B \cap A$, 因此当 $B$ 是 $X$ 中的开 (闭) 集时, 根据子空间拓扑的定义知 $B$ 也是 $A$ 的开 (闭) 集.

2. 设 $B$ 是 $A$ 的开 (闭) 集, 根据子空间拓扑的定义知存在 $X$ 的开 (闭) 集 $U$, 使得 $B = U \cap A$. 但 $A$ 本身是 $X$ 中的开 (闭) 集, 故 $B$ 也是 $X$ 中的开 (闭) 集.

### 1.6.2 连续映射

和在分析学中一样, 连续性是一种局部性的概念.

**定义 1.6.11 (连续)**

设 $X$ 和 $Y$ 都是拓扑空间, $f : X \to Y$ 是一个映射, $x \in X$. 如果对于 $Y$ 中 $f(x)$ 的任一邻域 $V$, $f^{-1}(V)$ 总是 $X$ 的邻域, 则说 $f$ 在 $x$ 处连续.

这个定义可以等价的看成:

**定理 1.6.1 (利用开集的连续等价定义)**

$f : X \to Y$ 在点 $x \in X$ 处连续 $\Leftrightarrow$ 对每个包含 $f(x)$ 的 $Y$ 中开集 $V$, 必存在包含 $x$ 的 $X$ 中开集 $U$, 使得 $f(U) \subset V$.

**命题 1.6.12**

设 $f : X \to Y$ 是一个映射, $A$ 是 $X$ 的子集, $x \in A$. 记 $f_A = f|_A : A \to Y$ 是 $f$ 在 $A$ 上的限制, 则

1. 如果 $f$ 在 $x$ 连续, 则 $f_A$ 在 $x$ 也连续;
2. 如果 $A$ 是 $x$ 的邻域, 则当 $f_A$ 在 $x$ 连续时, $f$ 在 $x$ 也连续.

证明

1. 设 $V$ 是 $f_A(x) = f(x)$ 的邻域, 届于 $f$ 在 $x$ 连续, 知 $f^{-1}(V)$ 是 $x$ 在 $X$ 中的邻域, 即存在开集 $U$ 使得 $x \in U \subset f^{-1}(V)$. 而 $f_A^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V) \supset A \cap U$, 其中 $A \cap U$ 是 $A$ 中包含 $x$ 的开集, 此即 $f_A$ 在 $x$ 连续.

2. 设 $V$ 是 $f(x)$ 的邻域, 既然 $f_A$ 在 $x$ 连续, 知存在 $A$ 中的开集 $U_A$, 使得 $x \in U_A \subset f_A^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$. 设 $U_A = U \cap A$, 其中 $U$ 是 $X$ 中的开集, 则 $U \cap A^\circ$ 也是 $X$ 中的开集, 且 $x \in U \cap A^\circ \subset U_A \subset f^{-1}(V)$. 故 $f$ 在 $x$ 连续. □

**定义 1.6.12**

如果映射 $f : X \to Y$ 在任一点 $x \in X$ 处都连续, 则说 $f$ 是连续映射.

连续映射也有下述" 整体性" 的刻画.

**定理 1.6.2**

设 $f : X \to Y$ 是映射, 则下述条件等价:

1. $f$ 是连续映射;
2. $Y$ 的任一开集在 $f$ 下的原像是 $X$ 的开集;
3. $Y$ 的任一闭集在 $f$ 下的原像是 $X$ 的闭集.

证明

$1 \Rightarrow 2$ 设 $V$ 是 $Y$ 的开集, $U = f^{-1}(V)$. 任取 $x \in U$, 知 $V$ 是 $f(x)$ 的邻域. 因为 $f$ 在 $x$ 连续, 知存在包含 $x$ 的开集 $U_x$, 使得 $f(U_x) \subset V$, 也即 $U_x \subset U$, 这说明 $x$ 是 $U$ 的内点. 令 $x$ 跑遍 $U$, 则知 $U = U^\circ$, 故 $U$ 是开集.

$2 \Rightarrow 3$ 设 $F$ 是 $Y$ 的闭集, 则 $F^c$ 是开集, 故 $f^{-1}(F^c)$ 是 $X$ 的开集, 进而 $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F^c))^c$ 是 $X$ 的闭集.

$3 \Rightarrow 1$ 任取 $x \in X$, 设 $V$ 是 $f(x)$ 的邻域, $U = f^{-1}(V)$. 知 $(V^\circ)^c$ 是 $Y$ 的闭集, 故 $f^{-1}((V^\circ)^c)$ 是 $X$ 的闭集, 进而 $f^{-1}(V) = (f^{-1}((V^\circ)^c))^c$ 是 $X$ 的开集. 既然 $V$ 是 $f(x)$ 的邻域, 知 $f(x) \in V^\circ$, 故 $x \in f^{-1}(V^\circ) \subset U$, 故 $U$ 是 $x$ 的邻域, 这说明 $f$ 在 $x$ 连续. 令 $x$ 跑遍 $X$ 即得命题. □

下面是几个简单而常见的连续映射.

**例题 1.24** 恒同映射 $id : X \to X, x \mapsto x$ 是连续映射.

**例题 1.25** 设 $A$ 是 $X$ 的子空间, 记 $i : A \to X, a \mapsto a$ 是包含映射, 则 $i$ 是连续映射. 因为当 $U$ 是 $X$ 的开集时, $i^{-1}(U) = A \cap U$ 是 $A$ 的开集.

**例题 1.26** 常值映射 $f : X \to Y, x \mapsto y_0$($y_0$ 是 $Y$ 中的定点) 是连续映射. 因为当 $y_0 \in V$ 是 $f^{-1}(V) = X$ 是 $X$ 中的开集, 而 $y_0 \notin V$ 时 $f^{-1}(V) = \varnothing$ 同样是 $X$ 中的开集.

**例题 1.27** 若 $X$ 是离散拓扑空间, 或 $Y$ 是平凡拓扑空间, 则 $f : X \to Y$ 必连续.

**命题 1.6.13**

设 $X, Y, Z$ 均为拓扑空间, 映射 $f : X \to Y$ 在 $x$ 处连续, $g : Y \to Z$ 在 $f(x)$ 处连续, 则复合映射 $g \circ f : X \to Z$ 在 $x$ 处连续.

证明

知 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, 任取它的邻域 $W$, 既然 $g$ 在 $f(x)$ 处连续, 知 $g^{-1}(W)$ 是 $f(x)$ 的邻域, 又因为 $f$ 在 $x$ 处连续, 故 $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ 是 $x$ 的邻域, 命题即证. □

**定义 1.6.13 (覆盖)**

设 $\mathscr{C} \subset 2^X$ 是拓扑空间 $X$ 的子集族, 称 $\mathscr{C}$ 是 $X$ 的一个覆盖, 如果 $\bigcup\limits_{C \in \mathscr{C}} C = X$(即 $X$ 中的任一点 $x$ 至少包含在 $\mathscr{C}$ 的一个成员中). 如果覆盖 $\mathscr{C}$ 的每个成员都是开 (闭) 集, 则称 $\mathscr{C}$ 为开 (闭) 覆盖; 覆盖 $\mathscr{C}$ 只包含有限个成员时, 称 $\mathscr{C}$ 是有限覆盖.

**定理 1.6.3 (粘接引理)**

设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 $X$ 的一个有限闭覆盖. 如果映射 $f : X \to Y$ 在每个 $A_i$ 上的限制都是连续的, 则 $f$ 是连续映射.

证明

只需验证 $Y$ 的每个闭集的原像均为闭集即可. 设 $B$ 是 $Y$ 的闭集, 记 $f_{A_i}$ 是 $f$ 在 $A_i$ 上的限制, 则

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{n} (f^{-1}(B) \cap A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} f_{A_i}^{-1}(B)$$

根据条件知对任意的 $i$, $f_{A_i}$ 都是连续的, 故 $f_{A_i}^{-1}(B)$ 是 $A_i$ 的闭集. 又因为 $A_i$ 是 $X$ 的闭集, 故 $f_{A_i}^{-1}(B)$ 也是 $X$ 的闭集, 进而 $f^{-1}(B)$ 作为有限个闭集的并集依旧是闭集, 命题得证. □

## 1.7 补充: 完全集的基数

这一节主要选自 **[3]**, 整理于此旨在证明下述定理.

**定理 1.7.1**

非空完全集的基数均为 $c$.

证明

设 $P$ 是一个非空完全集, 取 $x \in P$, 并取一个包含 $x$ 的区间 $U(x)$. 因为 $P$ 作为完全集满足 $P = P'$, 知 $P$ 中不存在孤立点, 从而 $P \cap U(x)$ 是无穷集. 在 $P \cap U(x)$ 中取两个不同的点 $x_0, x_1$, 再作区间 $U_0, U_1$ 满足:

1. $x_0 \in U_0, x_1 \in U_1$;
2. $U_0 \subset U(x), U_1 \subset U(x)$;
3. $\overline{U_0} \cap \overline{U_1} = \emptyset$;
4. $|U_0| < 1, |U_1| < 1$, 这里 $|U|$ 表示区间 $U$ 的长度.

因为 $x_0$ 是 $P$ 的极限点, 所以在 $U_0$ 中有无数个点属于 $P$, 在这些点中再取两个不同的点 $x_{0,0}, x_{0,1}$, 作区间 $U_{0,0}, U_{0,1}$ 满足:

1. $x_{0,0} \in U_{0,0}, x_{0,1} \in U_{0,1}$;
2. $U_{0,0} \subset U_0, U_{0,1} \subset U_0$;
3. $\overline{U_{0,0}} \cap \overline{U_{0,1}} = \emptyset$;
4. $|U_{0,0}| < \frac{1}{2}, |U_{0,1}| < \frac{1}{2}$.

对 $x_1$ 同样取 $x_{1,0}, x_{1,1}$ 和区间 $U_{1,0}, U_{1,1}$ 满足:

1. $x_{1,0} \in U_{1,0}, x_{1,1} \in U_{1,1}$;
2. $U_{1,0} \subset U_1, U_{1,1} \subset U_1$;
3. $\overline{U_{1,0}} \cap \overline{U_{1,1}} = \emptyset$;
4. $|U_{1,0}| < \frac{1}{2}, |U_{1,1}| < \frac{1}{2}$.

综合起来, 对 $i, k = 0, 1$ 有:

1. $x_{i,k} \in P \cap U_{i,k}$;
2. $U_{i,k} \subset U_i$;
3. $\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{i',k'}} = \emptyset, (i, k) \neq (i', k')$;
4. $|U_{i,k}| < \frac{1}{2}$.

持续这种拆分 $n$ 次, 可以得到如下的点:

$$x_{i_1,i_2,\cdots,i_n}, \quad i_k = 0, 1, k = 1, 2, \cdots, n$$

和区间 $U_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$:

1. $x_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \in P \cap U_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$;
2. $U_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n} \subset U_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}$;
3. $\overline{U_{i_1,i_2,\cdots,i_n}} \cap \overline{U_{i'_1,i'_2,\cdots,i'_n}} = \emptyset, (i_1, i_2, \cdots, i_n) \neq (i'_1, i'_2, \cdots, i'_n)$;
4. $|U_{i_1,i_2,\cdots,i_n}| < \frac{1}{n}$.

因为每一个点 $x_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 都是 $P$ 的极限点, 所以在 $P \cap U_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 中依旧可以取两个不同的点

$$x_{i_1,i_2,\cdots,i_n,0} \text{和} x_{i_1,i_2,\cdots,i_n,1}$$

与区间:

$$U_{i_1,i_2,\cdots,i_n,0} \text{和} U_{i_1,i_2,\cdots,i_n,1}$$

当 $i_{n+1} = 0, 1$ 时, 同样有:

1. $x_{i_1,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}} \in P \cap U_{i_1,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}}$;
2. $U_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n,i_{n+1}} \subset U_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n}$;
3. $\overline{U_{i_1,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}}} \cap \overline{U_{i'_1,i'_2,\cdots,i'_n,i'_{n+1}}} = \emptyset, (i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1}) \neq (i'_1, i'_2, \cdots, i'_n, i'_{n+1})$;
4. $|U_{i_1,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}}| < \frac{1}{n+1}$.

现在假设这个构造已经对全体自然数都做了一次, 于是对每个无穷数列

$$(i_1, i_2, i_3, \cdots), \quad i_k = 0, 1$$

都有一个点

$$x_{i_1,i_2,i_3,\cdots}$$

与之对应, 而这个点又是一系列严格递减的闭区间的交集

$$\overline{U}_{i_1} \cap \overline{U}_{i_1,i_2} \cap \overline{U}_{i_1,i_2,i_3} \cap \cdots$$

中唯一的一个点. 容易看到, 两个不同的数列

$$i_1, i_2, i_3, \cdots \text{和} i'_1, i'_2, i'_3, \cdots$$

对应两个不同的点 $x_{i_1,i_2,i_3,\cdots}$ 和 $x_{i'_1,i'_2,i'_3,\cdots}$. 这是因为设 $i_n \neq i'_n$, 则

$$x_{i_1,i_2,i_3,\cdots} \in U_{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n}, x_{i'_1,i'_2,i'_3,\cdots} \in U_{i'_1,i'_2,i'_3,\cdots,i'_n}$$

但根据前面的性质已经有

$$\overline{U_{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n}} \cap \overline{U_{i'_1,i'_2,i'_3,\cdots,i'_n}} = \varnothing$$

故 $x_{i_1,i_2,i_3,\cdots} \neq x_{i'_1,i'_2,i'_3,\cdots}$. 取 $S = \{x_{i_1,i_2,i_3,\cdots} : 0, 1 = i_1, i_2, i_3, \cdots\}$, 则因为 $S$ 中的点恰与 $(0,1)$ 上的二进位小数一一对应, 故 $\overline{\overline{S}} = c$. 又因为 $S \subset P$, 故 $\overline{\overline{P}} \geq c$. 但显见 $\overline{\overline{P}} \leq c$, 故 $\overline{\overline{P}} = c$. □

## 1.8 章末习题

**练习 1.63** 设 $\{f_j(\boldsymbol{x})\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数列, 试用点集

$$\{\boldsymbol{x} : f_j(\boldsymbol{x}) \geq \frac{1}{k}\}, \quad j, k = 1, 2, \cdots$$

表示点集 $\{\boldsymbol{x} : \overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(\boldsymbol{x}) > 0\}$.

解

知 $\overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(\boldsymbol{x}) > 0$ 的定义为:

$$\forall j > 0 \exists n > j (f_n(x) > 0)$$

如果用 $k$ 表示 $f_n(x) > 0$, 则有

$$\forall j > 0 \exists n > j \exists k > 0 (f_n(x) \geq \frac{1}{k})$$

故

$$\{\boldsymbol{x} : \overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(\boldsymbol{x}) > 0\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\boldsymbol{x} : f_n(x) \geq \frac{1}{k}\}$$

**练习 1.64** 设 $\{f_n(\boldsymbol{x})\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数列, $E \subset [a,b]$, 且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[a,b]\setminus E}(x), \quad x \in [a,b]$$

若令 $E_n = \{x \in [a,b] : f_n(x) \geq \frac{1}{2}\}$, 试求集合 $\lim_{n\to\infty} E_n$.

解

考虑证明 $\lim_{n\to\infty} E_n = [a,b]\setminus E$.

•[14]

**练习 1.65** **3.** 设有集合列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 试证明:

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}} (A_n \cup B_n) = (\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) \cup (\overline{\lim_{n\to\infty}} B_n)$;

(ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}} (A_n \cap B_n) = (\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n) \cap (\underline{\lim_{n\to\infty}} B_n)$.

**练习 1.66** 设 $f : X \to Y, A \subset X, B \subset Y$, 试问: 下列等式成立吗?

(i) $f^{-1}(Y\setminus B) = f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B)$;

(ii) $f(X\setminus A) = f(X)\setminus f(A)$.

[14]订正或找助教商量.

解

(i)

两问都可以考虑下述映射:

$$f:\mathbb{Z}\to\{0,1\},\quad x\mapsto\begin{cases}0, & x\text{ 是偶数或 }x=1\\ 1, & x\text{ 是奇数且 }x\neq 1\end{cases}$$

从而两个等式均不成立.

**练习 1.67** 试作开圆盘 $\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 与闭圆盘 $\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$ 之间的一一对应.

解

为叙述简便, 用极坐标系重述命题, 此即求开圆盘 $A:=\{(r,\theta):r^2<1,0\leq\theta<2\pi\}$ 与闭圆盘 $B:=\{(r,\theta):r^2\leq 1,0\leq\theta<2\pi\}$ 之间的一一对应, 考虑映射: 进而作映射:

$$f:B\to A,\quad (r,\theta)\mapsto\begin{cases}(\frac{n}{n+1}r,\theta), & r=\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}^*\\ (r,\theta), & \text{其他}\end{cases}$$

容易验证 $f$ 是一一映射, 此即欲求.

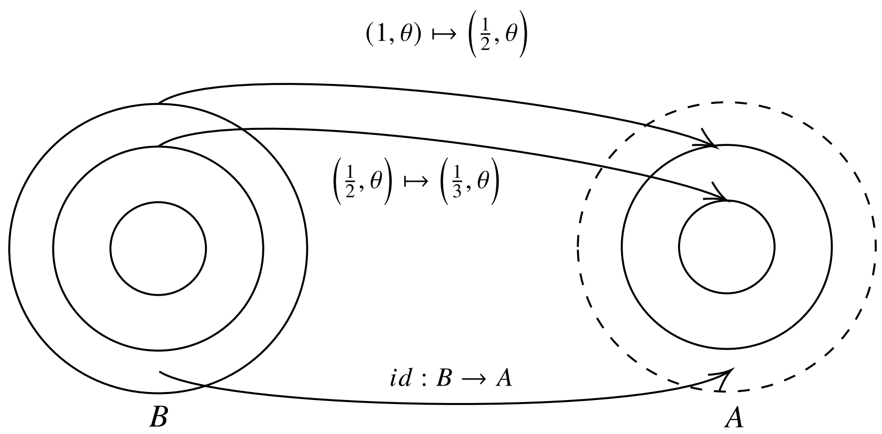


图 1.11: 该题示意图

**练习 1.68** 设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上有界. 若 $f(x)$ 是保号的 (即当 $f(x_0)\lesseqgtr 0$ 时, 必有 $\delta_0>0$, 使得 $f(x)\lesseqgtr 0(x_0-\delta<x<x_0+\delta)$), 试证明 $f(x)$ 的不连续点集是可数的.

分析

题目似乎有些问题. 反例如 $f(x)=D(x)+1$, 其中 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数.

**练习 1.69** 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的实值函数, 且存在常数 $M$, 使得对于 $[0,1]$ 中任意有限个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 均有

$$|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)|\leq M$$

试证明集合 $E=\{x\in[0,1]:f(x)\neq 0\}$ 是可数集.

证明

记

$$E_n=\{x\in[0,1]:|f(x)|>\frac{1}{n}\}$$

知任意固定 $n$, $E_n$ 总是有限集, 否则如果存在 $n_0$ 使得 $E_{n_0}$ 是无限集, 任取 $\mathbb{N}^*\ni k>0$, 总可以在 $E_{n_0}$ 中找到 $kn_0$ 个

同号的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_{kn_0}$[15], 使得

$$|\sum_{p=1}^{kn_0} f(x_p)| = \sum_{p=1}^{kn_0} |f(x_p)| > \sum_{p=1}^{kn_0} \frac{1}{n_0} = k$$

即不存在题设所言的 $M$, 矛盾! 故既然 $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n$ 是有限集, 知

$$E = \{x \in [0,1] : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

是可数集.

**练习 1.70** 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数. 如果对于任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 必存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) \geq f(x_0)$, 试证明集合 $E = \{y : y = f(x)\}$ 是可数集.

证明

首先证明任取 $x_0 \in \mathbb{R}$, 总存在 $\delta > 0$ 使得任取 $x \in U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ 有 $f(x) \equiv f(x_0)$. 用反证法, 如果

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \forall \delta > 0 \exists x_{\delta,x_0} \in U_\delta(x_0)(f(x_{\delta,x_0}) \neq f(x_0)) \tag{1.1}$$

因为将题目条件应用到 $x_0$ 上本身有:

$$\exists \delta_1 > 0 \forall x \in U_{\delta_1}(x_0)(f(x) \geq f(x_0)) \tag{1.2}$$

针对 $x_{\delta,x_0}$ 应用题目条件, 知

$$\exists \delta_2 > 0 \forall x \in U_{\delta_2}(x_{\delta,x_0})(f(x) \geq f(x_{\delta,x_0})) \tag{1.3}$$

故在表达式(1.1)中令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 知一方面由(1.2)知 $f(x_{\delta,x_0}) > f(x_0)$, 另一方面由(1.3), 结合 $x_0 \in U_{\delta_2}(x_{\delta,x_0})$ 得 $f(x_0) > f(x_{\delta,x_0})$, 二者矛盾! 故原命题成立, 也即

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0)(f(x) \equiv f(x_0))$$

现任取 $y \in E$, 知 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $y = f(x_0)$, 进而存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $x \in U_\delta(x_0)$ 均有 $y = f(x)$. 如果另有 $U_{\delta'}(x_0')$ 与 $U_\delta(x_0)$ 相交且亦满足 $f(x) = y, x \in U_{\delta'}(x_0')$, 则将 $U_{\delta'}(x_0') \cup U_\delta(x_0)$ 视作 $y$ 所对应的新的开区间, 从而 $E$ 中不同的 $y$ 可对应到 $\mathbb{R}$ 中不同的不交开区间, 而已经知道 $\mathbb{R}$ 中全体不交开区间构成的集可数, 故 $E$ 可数, 命题得证.

**练习 1.71** 设 $E$ 是三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的点集, 且 $E$ 中任意两点的距离都是有理数, 试证明 $E$ 是可数集.

证明

首先注意到 $\mathbb{R}^3$ 中, 如果选定四个不同的点 $\boldsymbol{x}_i, i = 1,2,3,4$, 约定 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离, 则映射

$$f : \mathbb{R}^{15} \to \mathbb{R}^4, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) \mapsto (d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1), d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2), d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_3), d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_4))$$

是单射 (即 $\mathbb{R}^3$ 中不存在两个点, 到给定的四个点的距离完全一样).

现在对 $E$ 讨论. 当 $E$ 中不足四个点时, 命题显然成立. 而当 $E$ 中可以选出四个互异点, 记它们为 $\boldsymbol{x}_i (i = 1,2,3,4)$, 结合 $E$ 中任意两点的距离都是有理数, 可以考虑:

$$f : E^5 \to \mathbb{Q}^4, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) \mapsto (d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1), d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2), d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_3), d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_4)), \quad \boldsymbol{x} \in E$$

知 $f$ 是单射, 故 $\overline{\overline{E}} \leq \overline{\overline{E^5}} \leq \overline{\overline{\mathbb{Q}^4}} = \aleph_0$, 故 $E$ 是可数集.

•

**练习 1.72** 设 $E$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中的可数集, 试证明存在互不相交的集合 $A$ 与 $B$, 使得 $E = A \cup B$, 且任一平行于 $x$ 轴的直线交 $A$ 至多是有限个点, 任一平行于 $y$ 轴的直线交 $B$ 至多是有限个点.

[15]这是因为 $E_{n_0}$ 中的使得 $|f(x)| \geq 0$ 的项与 $|f(x)| < 0$ 的项中, 总有一部分是无限集. 这里不妨就在满足 $|f(x)| \geq 0$ 的项中取, 从而绝对值可以直接拿掉.

解

练习 1.73 设 $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数族. 若存在 $M>0$, 使得

$$|f_\alpha(x)|\le M,\quad x\in[a,b],\alpha\in I$$

试证明对 $[a,b]$ 中任一可数集 $E$, 总有函数列 $\{f_{\alpha_n}(x)\}$, 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\{f_{\alpha_n}(x)\},\quad x\in E$$

证明

首先易知 $I$ 是无限集. 既然 $E$ 可数, 不妨设 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_k,\cdots\}$, 并设 $E_k=\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$, 则 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$. 现在对每一个 $E_k$ 证明命题, 这可以考虑归纳法:

当 $k=1$, 此即证明存在关于 $\{\alpha_n\}$ 的数列 $\{f_{\alpha_n}(e_1)\}$, 使得极限

$$\lim_{n\to\infty}f_{\alpha_n}(e_1)$$

存在. 依题知

$$\exists M>0\forall\alpha\in I(|f_\alpha(e_1)|\le M)$$

这说明 $\{f_\alpha(e_1)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界无限点集, 故由 Bolzano-Weierstrass 定理知其至少有一个极限点, 也即存在函数列 $\{f_{\alpha_n}(e_1)\}$ 使得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_{\alpha_n}(e_1)\}$ 存在.

现在假设 $k=q-1$ 时命题成立, 也即任取 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{q-1}\}\subset[a,b]$, 总有函数列 $\{f_{\alpha_n}(x)\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\{f_{\alpha_n}(x)\}\text{存在},\quad x\in\{e_1,e_2,\cdots,e_{q-1}\}$$

当 $k=q$, 记 $I_n=\{\alpha_n\}$, 依题知

$$\exists M>0\forall\alpha\in I_n(|f_\alpha(e_q)|\le M)$$

这说明 $\{f_\alpha(e_q)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界无限点集, 故由 Bolzano-Weierstrass 定理知其至少有一个极限点, 也即存在函数列 $\{f_{\alpha_n'}(e_q)\}$ 使得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_{\alpha_n'}(e_q)\}$ 存在, 且 $\{\alpha_n'\}\subset\{\alpha_n\}$ 是保留了原顺序的子列. 现在任取 $e_i\in E_{q-1}$, 既然 $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\alpha_n}(e_i)$ 存在, 知将 $\{\alpha_n\}$ 替换为其任意保留了原顺序的子列 $\{\beta_n\}$, 应有

$$\lim_{n\to\infty}f_{\alpha_n}(e_i)=\lim_{n\to\infty}f_{\beta_n}(e_i)$$

故令 $\beta_n=\alpha_n'$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}f_{\alpha_n}(e_i)=\lim_{n\to\infty}f_{\alpha_n'}(e_i)$$

综上有

$$\lim_{n\to\infty}f_{\alpha_n'}(x)\text{存在},\quad x\in E_q$$

据归纳原理即知

$$\forall k\in\mathbb{N}\exists\alpha_n\in I\forall x\in E_k(\lim_{n\to\infty}\{f_{\alpha_n}(x)\}\text{存在})$$

命题即证.[16]

练习 1.74 设 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 若 $\overline{\overline{E}}=c$, 试证明存在 $n_0$, 使得 $\overline{\overline{A_{n_0}}}=c$.

证明

用反证法, 当任取 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\overline{\overline{A_n}}<c$, 知既然 $\overline{\overline{E}}=c$, 可设

$$E\sim\{(x^1,x^2,\cdots,x^n,\cdots):x^i\in[0,1],i=1,2,\cdots\}=:F$$

并设 $f:E\to F$ 是一一的. 任取 $n$, 有

$$A_n\sim f(A_n)=:B_n$$

[16]问题: 这个证明过程是否仅仅说明了对每一个有限集命题成立, 而并没有直接指出无限的情况? 比如每一步讨论都是对有限个 $e_i$ 所说的, 那是否会存在当 $e_i$ 本身有无限个时 $\{\alpha_n\}$ 被" 用光" 的情况?

现设 $P_k$ 是 $B_n$ 中元素 $\boldsymbol{b} = (b^1, \cdots, b^n, \cdots)$ 到其第 $k$ 个分量 $b^k$ 的投影映射, 则注意到投影映射是满射, 有

$$\overline{\overline{P_n(B_n)}} \le \overline{\overline{B_n}} = \overline{\overline{A_n}} < c$$

因为本身 $P_n(B_n) \subset [0,1]$, 而 $\overline{\overline{[0,1]}} = c$, 故存在 $\xi^n \in [0,1] \backslash P_n(B_n)$. 令

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n, \cdots)$$

知必有 $\boldsymbol{\xi} \in F$. 下面说明 $\boldsymbol{\xi} \notin B_n, n \in \mathbb{N}$. 这是因为如果存在 $n_0$ 使得 $\boldsymbol{\xi} \in B_{n_0}$, 则必有 $P_{n_0}(\boldsymbol{\xi}) = \xi^{n_0} \in P_{n_0}(B_{n_0})$, 但这与 $\boldsymbol{\xi}$ 的构造相悖! 故 $\forall n \in \mathbb{N}(\boldsymbol{\xi} \notin B_n)$, 也即

$$\boldsymbol{\xi} \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

而注意到

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow F = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

知

$$\boldsymbol{\xi} \notin F$$

矛盾! 故总存在 $A_{n_0}$ 使得 $\overline{\overline{A_{n_0}}} \ge c$.

再否定存在 $\overline{\overline{A_{n_0}}} > c$ 的情况, 这是因为如若该命题成立, 则届于 $A_{n_0} \subset E$, 有 $\overline{\overline{E}} \ge \overline{\overline{A_{n_0}}} > c$, 与 $\overline{\overline{E}} = c$ 矛盾! 故总存在 $A_{n_0}$ 使得 $\overline{\overline{A_{n_0}}} = c$, 命题得证.

**练习 1.75** 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的递增函数, 试证明点集

$$E = \{x : 对于任意的\varepsilon > 0, 有 f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) > 0\}$$

是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

**练习 1.76** 设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭集, $E$ 是 $F$ 的一个无限子集, 试证明 $E' \cap F \neq \varnothing$. 反之, 若 $F \subset \mathbb{R}^n$, 且对于 $F$ 中任一无限子集 $E$, 有 $E' \cap F \neq \varnothing$, 试证明 $F$ 是有界闭集.

证明

既然 $F$ 有界, 而 $E \subset F$, 知 $E$ 也有界, 故由 Bolzano-Weierstrass 定理知其至少有一个极限点, 记为 $e$. 根据极限点的定义, 设 $\{e_n\} \subset E$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e$$

因为 $E \subset F$, 故 $\{e_n\} \subset F$, 这说明 $e \in F'$. 但既然 $F$ 是闭集, 知 $F' \subset F$, 故 $e \in F$, 从而 $e \in E' \cap F$, 也即 $E' \cap F \neq \varnothing$.

如若 $F$ 无界, 不妨取 $F = \mathbb{R}, E = \mathbb{N}$, 则 $E' = \varnothing \Rightarrow E' \cap F = \varnothing$.

如若 $F$ 不是闭集, 不妨取 $F = (0,1), E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$, 知 $E' = \{0\}, E' \cap F = \varnothing$.

故 $F$ 不是有界闭集可推知存在 $E$ 的无限子集 $E$ 满足 $E' \cap F = \varnothing$, 取逆否命题即证.

**练习 1.77** 设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集, $r > 0$, 试证明点集

$$E = \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n : 存在\boldsymbol{x} \in F, 使得|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x}| = r\}$$

是闭集.

证明

考虑

$$E^c = \{t \in \mathbb{R}^n : \forall x \in F(|t-x| \neq r)\}$$

任取 $e \in E^c$, 知

$$\forall x \in F(|e-x| > r \vee |e-x| < r)$$

当 $|e-x| > r$, 根据

$$|x-y| := \sqrt{(x^1-y^1)^2 + \cdots + (x^n-y^n)^2} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

本身的连续性, 知在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 中存在 $(e,x)$ 的邻域 $B((e,x),\delta)$ 使得其中的任意点 $(p,q)$ 都满足 $|p-q|>r$, 进而自然存在 $\delta_1$ 使得 $B(e,\delta_1)\subset B((e,x),\delta)$, 也即存在 $e$ 的邻域 $B(e,\delta_1)$ 满足 $B(e,\delta_1)\subset E^c$.

当 $|e-x|<r$, 同理可证存在 $e$ 的邻域 $B(e,\delta_2)$ 满足 $B(e,\delta_2)\subset E^c$.

综上, $E^c$ 是开集, 故 $E$ 是闭集.

**练习 1.78** 设 $A,B$ 是 $\mathbb{R}$ 中的点集, 试证明

$$(A\times B)'=(\overline{A}\times B')\cup(A'\times\overline{B}).$$

**练习 1.79** 设 $E\subset\mathbb{R}^2$, 称 $E_y=\{x\in\mathbb{R}:(x,y)\in E\}$ 为 $E$ 在 $\mathbb{R}$ 上的投影 (集). 若 $E\subset\mathbb{R}^2$ 是闭集, 试证明 $E_y$ 也是闭集.

**练习 1.80** 设 $f\in C(\mathbb{R})$, $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的递减紧集列, 试证明

$$f(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k)=\bigcap_{k=1}^{\infty}f(F_k).$$

**练习 1.81** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性. 若对任意的 $r\in\mathbb{Q}$, 点集 $\{x\in\mathbb{R}:f(x)=r\}$ 必为闭集, 试证明 $f\in C(\mathbb{R})$.

**练习 1.82** 设 $E_1,E_2$ 是 $\mathbb{R}$ 中的非空集, 且 $E_2'\neq\varnothing$, 试证明

$$\overline{E_1}+E_2'\subset(E_1+E_2)'.$$

**练习 1.83** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若 $E\neq\varnothing$, 且 $E\neq\mathbb{R}^n$, 试证明 $E$ 的边界点集非空 (即 $\partial E\neq\varnothing$).

**练习 1.84** 设 $G_1,G_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的互不相交的开集, 试证明

$$G_1\cap\overline{G_2}=\varnothing.$$

**练习 1.85** 设 $G\subset\mathbb{R}^n$. 若对任意的 $E\subset\mathbb{R}^n$, 有 $G\cap\overline{E}\subset\overline{G\cap E}$, 试证明 $G$ 是开集.

**练习 1.86** 设 $a,b,c,d$ 是实数, 且

$$P(x,y)=ax^2y^2+bxy^2+cxy+dy,$$

试问: 点集 $\{(x,y):P(x,y)=0\}$ 有内点吗?

**练习 1.87** 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 令

$$G_1=\{(x,y):y<f(x)\},\quad G_2=\{(x,y):y>f(x)\}$$

试证明 $f\in C(\mathbb{R})$ 当且仅当 $G_1$ 与 $G_2$ 是开集.

**练习 1.88** 试问: 由 $\mathbb{R}$ 中的一切开集构成的集族的基数是什么?

**练习 1.89** 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族有界闭集. 若任取其中有限个: $F_{\alpha_1},F_{\alpha_2},\cdots,F_{\alpha_m}$, 都有

$$\bigcap_{i=1}^{m}F_{\alpha_i}\neq\varnothing$$

试证明: $\bigcap\limits_{\alpha}F_\alpha\neq\varnothing$.

**练习 1.90** 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集族, $G$ 是开集, 且有

$$\bigcap_{\alpha}F_\alpha\subset G,$$

试证明 $\{F_\alpha\}$ 中存在有限个 $F_{\alpha_1},F_{\alpha_2},\cdots,F_{\alpha_m}$, 使得

$$\bigcap_{i=1}^{m}F_{\alpha_i}\subset G.$$

**练习 1.91** 设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭集, $\{B_k\}$ 是 $K$ 的开球覆盖, 试证明存在 $\varepsilon>0$, 使得以 $K$ 中任一点为中心, $\varepsilon$ 为半径的球必含于 $\{B_k\}$ 中的一个.

**练习 1.92** 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 且对任意的 $t\in\mathbb{R}$, 点集 $\{x\in\mathbb{R}:f'(x)=t\}$ 是闭集, 试证明 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

✍ **练习 1.93** 设 $f \in C(\mathbb{R})$. 若存在 $a > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \geq a|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

试证明 $R(f) = \mathbb{R}$.

✍ **练习 1.94** 试证明 $\mathbb{R}$ 中可数稠密集不是 $G_\delta$ 集.

✍ **练习 1.95** 设 $f \in C([a,b])$, 且在 $[a,b]$ 内的任一子区间上皆非常数. 若 $f(x)$ 的极值点在 $[a,b]$ 中稠密, 试证明点集

$$\{x \in [a,b] : f'(x)\text{不存在或}f'(x)\text{在 } x \text{ 处不连续}\}$$

在 $[a,b]$ 上稠密.

✍ **练习 1.96** 试证明在 $[0,1]$ 上不能定义如下的函数 $f(x)$: 在有理数上连续, 在无理数处不连续.

✍ **练习 1.97** 试证明不存在满足下列条件的函数 $f(x,y)$:

(i) $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数;

(ii) 偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y), \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处存在;

(iii) $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的任一点上都不可微.

✍ **练习 1.98** 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是非空可数集. 若 $E$ 无孤立点, 试证明 $\overline{E} \backslash E$ 在 $\overline{E}$ 中稠密.

✍ **练习 1.99** 试证明 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭集皆为 $G_\delta$ 集, 任一开集皆为 $F_\sigma$ 集.

✍ **练习 1.100** 设 $f : [0,1] \to [0,1]$. 若点集

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$$

是 $[0,1] \times [0,1]$ 中的闭集, 试证明 $f \in C([0,1])$.

✍ **练习 1.101** 设 $F \subset \mathbb{R}$. 若对任意的 $f \in C(F)$, 必有在 $\mathbb{R}$ 上的连续延拓, 试证明 $F$ 是闭集.

✍ **练习 1.102** 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 且 $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \varnothing$, 试证明存在开集 $G_A, G_B$, 满足

$$G_A \cap G_B = \varnothing, \quad G_A \supset A, \quad G_b \supset B.$$

✍ **练习 1.103** 设 $F_1, F_2, F_3$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中三个互不相交的闭集, 试作 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得

(i) $0 \leq f(x) \leq 1$;

(ii) $f(x) = 0 (x \in F_1), f(x) = \frac{1}{2} (x \in F_2), f(x) = 1 (x \in F_3)$.

# 第二章 Lebesgue 测度

## 2.1 点集的 Lebesgue 外测度

### 2.1.1 知识梳理

**定义 2.1.1**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 如果 $\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可数个开矩体, 且有

$$E \subset \bigcup_{k\geq 1} I_k$$

则称 $\{I_k\}$ 为 $E$ 的一个 L-覆盖. 称

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{k\geq 1} |I_k| : \{I_k\}\text{为 } E \text{ 的 L-覆盖}\}$$

为点集的 Lebesgue 外测度, 简称外测度.

♣

笔记 注意到这个定义中对 $E$ 所做的覆盖不仅仅是有限个, 而且可以是可列个, 这两者之间的区别可以用下述例子来说明.

设 $\mathbb{Q} = \{r_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的有理数集. 任给 $\varepsilon > 0$, 作区间

$$(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

显见这些区间的全体覆盖了 $\mathbb{Q}$, 且这些区间的长度的总和为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. 因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 故在 Lebesgue 意义下 $m^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) < \varepsilon$ 可导出 $m^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$, 进而可以断言 $m^*(\mathbb{Q}) = 0$. 但如果只允许用有限个区间去覆盖, 则根据 $\mathbb{Q}$ 在 $[0, 1]$ 中的稠密性知, 这些区间所形成的覆盖 $\mathcal{K}$ 必须包含 $[0, 1]$ 挖掉有限个点后所形成的集合 (比方说 $[0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 与 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$). 这说明 $m^*(\mathcal{K}) \geq m^*([0, 1]) - m^*(A)$, 其中 $A$ 是有限点集, 进而 $m^*(A) = 0$, 故 $m^*(\mathcal{K}) \geq m^*([0, 1]) = 1$, 这说明 $m^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \geq 1$, 但同样可以得出 $m^*((\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0, 1]) = 1$, 也即 $[0, 1]$ 上的无理数的" 长度" 也是 1, 这与直觉矛盾! 从而还是取用可数个开区间作为定义更符合直觉.

显见如果 $E$ 的任意 L-覆盖 $\{I_k\}$ 都有

$$\sum_{k\geq 1} |I_k| = +\infty$$

则 $m^*(E) = +\infty$, 否则 $m^*(E) < +\infty$.

**定理 2.1.1** ($\mathbb{R}^n$ 中点集的外测度性质)

1. 非负性: $m^*(E) \geq 0, m^*(\varnothing) = 0$;
2. 单调性: 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$;
3. 次可加性: $m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

♡

证明

1. 根据定义即得.
2. 如果 $\{I_k\}$ 是 $E_2$ 的 L-覆盖, 则因为 $E_1 \subset E_2$ 知它也是 $E_1$ 的 L-覆盖. 这说明任取 $\{I_k\}$ 覆盖 $E_2$ 总有:

$$\sum_{k\geq 1} |I_k| \geq m^*(E_1)$$

这说明 $m^*(E_1)$ 为 $\{\sum\limits_{k\geq 1}|I_k|: E_2\subset\bigcup\limits_{k\geq 1}I_k\}$ 的一个下界, 故根据下确界定义有

$$m^*(E_2)=\inf\{\sum_{k\geq 1}|I_k|: E_2\subset\bigcup_{k\geq 1}I_k\}\geq m^*(E_1)$$

3. 当 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)<+\infty$ 时显然. 当 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)<+\infty$ 时, 任取 $\varepsilon>0$, 对 $k\in\mathbb{N}$ 都存在 $E_k$ 的 L-覆盖 $\{I_{k,l}\}$, 满足:

$$E_k\subset\bigcup_{l=1}^{\infty}I_{k,l},\qquad \sum_{l=1}^{\infty}|I_{k,l}|\leq\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$$

其中后式是下确界的性质. 进而有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\subset\bigcup_{k,l=1}^{\infty}I_{k,l},\quad \sum_{k,l=1}^{\infty}|I_{k,l}|\leq\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\varepsilon$$

显见 $\{I_{k,l}:k,l=1,2,\cdots\}$ 是 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 的 L-覆盖, 故 $m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)$ 作为下确界满足

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性即证命题. □

**推论 2.1.1**

如果 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可数点集, 则 $m^*(E)=0$.

根据次可加性可知 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个点集 $E_1,E_2$ 都满足:

$$m^*(E_1\cup E_2)\leq m^*(E_1)\cup m^*(E_2)$$

但上述不等式中的等号并不一定成立, 即使 $E_1\cap E_2=\varnothing$ 时也是如此! 不过如果 $d(E_1,E_2)>0$, 则上式等号成立, 这称为距离外测度性质. 为了证明这条性质, 首先说明一个引理.

**引理 2.1.1**

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 以及 $\delta>0$, 令

$$m^*_\delta(E)=\inf\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset E\text{且每个开矩体 }I_k\text{ 的边长}<\delta\},$$

则 $m^*_\delta(E)=m^*(E)$.

证明

因为

$$\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset E\text{且每个开矩体 }I_k\text{ 的边长}<\delta\}\subset\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset E\}$$

故 $m^*_\delta(E)\geq m^*(E)$, 从而只需证明 $m^*_\delta(E)\leq m^*(E)$. 当 $m^*(E)=+\infty$ 时显然, 当 $m^*(E)<+\infty$ 时, 由外测度作为下确界的定义知, 任取 $\varepsilon>0$, 总存在 $E$ 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leq m^*(E)+\varepsilon$$

对每个 $k$, 把 $I_k$ 进一步分成 $l(k)$ 个开矩体:

$$I_{k,1},I_{k,2},\cdots,I_{k,l(k)}$$

这些小开矩体互不相交, 且每个的边长都小于 $\frac{1}{2}\delta$. 为了保证覆盖, 考虑保持每个 $I_{k,i}$ 的中心不动, 而把它们的边长

扩大 $\lambda(1<\lambda<2)$ 倍做出开矩体, 记新的开矩体为 $\lambda I_{k,i}$. 显见对每个 $k$ 有:

$$\bigcup_{i=1}^{l(k)} \lambda I_{k,i} \supset I_k, \quad \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{i=1}^{l(k)} |I_{k,i}| = \lambda^n |I_k|$$

知 $\lambda I_{k,i}$ 的边长为 $\frac{\lambda}{2}\delta<\delta$, 从而 $\{\lambda I_{k,i} : i=1,2,\cdots,l(k); k=1,2,\cdots\}$ 也是 $E$ 的边长小于 $\delta$ 的 L-覆盖. 考虑它们的体积之和:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n |I_k| = \lambda^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le \lambda^n (m^*(E)+\varepsilon)$$

进而 $m^*_\delta(E)$ 作为上左式的下确界满足 $m^*_\delta(E) \le \lambda^n(m^*(E)+\varepsilon)$. 令 $\lambda \to 1$ 并由 $\varepsilon$ 的任意性即知 $m^*_\delta(E) \le m^*(E)$, 故 $m^*_\delta(E) = m^*(E)$. □

**定理 2.1.2**

设 $E_1, E_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个点集. 若 $d(E_1,E_2)>0$, 则

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$$

证明

根据次可加性已经有 $m^*(E_1\cup E_2) \le m^*(E_1)+m^*(E_2)$, 故只需说明 $m^*(E_1\cup E_2) \ge m^*(E_1)+m^*(E_2)$ 即可. 当 $m^*(E_1\cup E_2)=+\infty$ 时显然, 而当 $m^*(E_1\cup E_2)<+\infty$ 时, 考虑任取 $\varepsilon>0$, 作 $E_1\cup E_2$ 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(E_1\cup E_2)+\varepsilon$$

其中 $I_k$ 的边长都小于 $\frac{1}{\sqrt{n}}d(E_1,E_2)$. 现在把 $\{I_k\}$ 按 $E_1$ 的 L-覆盖与 $E_2$ 的 L-覆盖分成下述两组:

$$(i) \quad J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k\ge 1} J_{i_k} \supset E_1; \quad (ii) \quad J_{l_1}, J_{l_2}, \cdots, \bigcup_{k\ge 1} J_{l_k} \supset E_2$$

且其中任一矩体皆不能同时含有 $E_1$ 与 $E_2$ 中的点, 进而

$$m^*(E_1\cup E_2)+\varepsilon > \sum_{k\ge 1} |I_k| = \sum_{k\ge 1} |J_{i_k}| + \sum_{k\ge 1} |J_{l_k}| \ge m^*(E_1)+m^*(E_2)$$

再由 $\varepsilon$ 的任意性即得 $m^*(E_1\cup E_2) \ge m^*(E_1)+m^*(E_2)$. □

**定理 2.1.3 (平移不变性)**

设 $E\subset \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. 记 $E+\{\boldsymbol{x}_0\} = \{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}\in E\}$, 则

$$m^*(E+\{\boldsymbol{x}_0\}) = m^*(E)$$

证明

首先, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体 $I$, 易知 $I+\{\boldsymbol{x}_0\}$ 仍是一个开矩体, 且其相应的边长均应相等, 进而 $|I| = |I+\{\boldsymbol{x}_0\}|$. 其次, 对 $E$ 的任意 L-覆盖 $\{I_k\}$, $\{I_k+\{\boldsymbol{x}_0\}\}$ 仍是 $E+\{\boldsymbol{x}_0\}$ 的 L-覆盖, 故

$$m^*(E+\{\boldsymbol{x}_0\}) \le \sum_{k=1}^{\infty} |I_k+\{\boldsymbol{x}_0\}| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$$

从而 $m^*(E+\{\boldsymbol{x}_0\})$ 是 $\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| : \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k \supset E\}$ 的一个下界, 由外测度的下确界定义知

$$m^*(E+\{\boldsymbol{x}_0\}) \le m^*(E)$$

反之, 考虑 $E = E+\{\boldsymbol{x}_0\}-\{\boldsymbol{x}_0\} = (E+\{\boldsymbol{x}_0\})+\{-\boldsymbol{x}_0\}$, 得到

$$m^*(E) = m^*((E+\{\boldsymbol{x}_0\})+\{-\boldsymbol{x}_0\}) \le m^*(E+\{\boldsymbol{x}_0\})$$

命题即证. □

**定理 2.1.4 (数乘)**

设 $E \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$, 记 $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$, 则

$$m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E)$$

证明

知

$$E \subset \bigcup_{n \geq 1}(a_n, b_n) \Leftrightarrow \lambda E \subset \lambda(a_n, b_n)$$

其次已经证明了对任意区间 $(\alpha, \beta)$ 有

$$m^*((\alpha, \beta)) = m^*([\alpha, \beta]) = \beta - \alpha$$

这说明任取 $\lambda > 0$ 有

$$m^*(\lambda(\alpha, \beta)) = m^*((\lambda\alpha, \lambda\beta)) = \lambda\beta - \lambda\alpha = \lambda(\beta - \alpha) = \lambda m^*((\alpha, \beta))$$

$\lambda < 0$ 的情况类似, 得到 $m^*(\lambda(\alpha, \beta)) = |\lambda|(\beta - \alpha)$. 故根据外测度的定义知:

$$m^*(\lambda E) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|(b_n - a_n) : \lambda E \subset \lambda(a_n, b_n)\} = |\lambda| \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_n - a_n) : E \subset (a_n, b_n)\} = |\lambda| m^*(E)$$

命题即证. □

**笔记** 上面介绍的 $\mathbb{R}^n$ 中点集的外测度 $m^*$ 本身是一种定义在 $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ 上的集函数 (值域为广义实值), 即对每一个 $E \subset \mathbb{R}^n$, 它都对应于一个广义实值 $m^*(E)$. 一般来说, 设 $X$ 是一个非空集合, $\mu^*$ 是定义在幂集 $\mathscr{P}(X)$ 上的取广义实值的集函数, 且满足:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0, \mu^*(E) \geq 0 (E \subset X)$;
2. 若 $E_1, E_2 \subset X, E_1 \subset E_2$, 则 $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$;
3. 若 $\{E_n\}$ 是 $X$ 的子集列, 则

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

那么称 $\mu^*$ 是 $X$ 上的一个外测度.

如果 $(X, d)$ 是一个距离空间, 且其上的外测度 $\mu^*$ 还满足: 当 $d(E_1, E_2) > 0$ 时, 有

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$$

则称 $\mu^*$ 是 $X$ 上的一个距离外测度.

### 2.1.2 例子整理

**例题 2.1** $\mathbb{R}^n$ 中的单点集的外测度为零, 即 $m^*(\{\boldsymbol{x}_0\}) = 0, \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. 这是因为可作开矩体 $I$, 使得 $\boldsymbol{x}_0 \in I$ 且 $|I|$ 可任意小. 同理 $\mathbb{R}^n$ 中的点集

$$\{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{i-1}, t_0, \xi_i, \cdots, \xi_n) : a_j \leq \xi_j \leq b_j, j \neq i\}$$

($n - 1$ 维超平面块) 的外测度也为零.

**例题 2.2** 设 $I$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体, $\bar{I}$ 是闭矩体, 则 $m^*(\bar{I}) = |I|$.

证明

任取 $\varepsilon > 0$, 作开矩体 $J$ 满足 $\bar{I} \subset J$ 且 $|J| < |I| + \varepsilon$, 则有:

$$m^*(\bar{I}) \leq |J| < |I| + \varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知 $m^*(\bar{I}) \leq |I|$.

现在设 $\{I_k\}$ 是 $\bar{I}$ 的任意 L-覆盖, 因为 $\bar{I}$ 是有界闭集, 知存在 $\{I_k\}$ 的有限子覆盖:

$$\{I_{i_1}, I_{i_2}, \cdots, I_{i_l}\}, \quad \bigcup_{j=1}^{l} I_{i_j} \supset \bar{I}$$

得到

$$|I| \leq \sum_{j=1}^{l} |I_{i_j}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$$

进而由外测度的下确界定义知 $|I| \leq m^*(\bar{I})$.

综上, $m^*(\bar{I}) = |I|$. □

**例题 2.3** $[0,1]$ 中的 Cantor 集 $C$ 的外测度为零.

证明

根据定义知 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 其中的 $F_n$ 是 $2^n$ 个长度为 $3^{-n}$ 的闭区间的并集, 故

$$m^*(C) \leq m^*(F_n) \leq 2^n \cdot 3^{-n}$$

令 $n \to \infty$ 知 $m^*(C) = 0$. □

**例题 2.4** 设 $E \subset [a,b], m^*(E) > 0, 0 < c < m^*(E)$, 则存在 $E$ 的子集 $A$, 使得 $m^*(A) = c$.

证明

记 $f(x) = m^*([a,x) \cap E), a \leq x \leq b$, 则知 $f(a) = 0, f(b) = m^*(E)$. 只要说明了 $f$ 有介值性即得命题, 现在就来考察 $f$ 的连续性. 设 $a \leq x < x + \delta x \leq b$, 知

$$[a, x+\delta x) \cap E = ([a,x) \cap E) \cup ([x, x+\delta x) \cap E)$$

故由次可加性知

$$f(x+\delta x) = m^*([a,x+\delta x) \cap E) \leq m^*([a,x) \cap E) + m^*([x,x+\delta x) \cap E) \leq f(x) + m^*([x,x+\delta x)) = f(x) + \delta x$$

此即

$$f(x+\delta x) - f(x) \leq \delta x$$

对 $\delta x < 0$ 的情形也可得到类似不等式, 从而有:

$$|f(x+\delta x) - f(x)| \leq |\delta x|, \quad a \leq x \leq b$$

这说明 $f$ 满足 Lipschitz 条件, 进而 $f \in C([a,b])$. 根据介值定理, 对 $c \in (f(a), f(b))$, 总存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = c$, 取 $A = [a,\xi) \cap E$ 即证命题. □

### 2.1.3 思考题

**练习 2.1** 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*(A) = 0$, 试证明对任意的 $B \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(A \cup B) = m^*(B) = m^*(B \backslash A).$$

证明

由 $B \subset A \cup B$ 知 $m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$. 又由次可加性知 $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B)$, 故 $m^*(B) = m^*(A \cup B)$.

由 $B \backslash A \subset B$ 知 $m^*(B \backslash A) \leq m^*(B)$. 注意到 $B = (B \backslash A) \cup (B \cap A)$, 故:

$$m^*(B) \leq m^*(B \backslash A) + m^*(B \cap A) \leq m^*(B \backslash A) + m^*(A) = m^*(B \backslash A)$$

故 $m^*(B) = m^*(B\backslash A)$.

**练习 2.2** 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 且 $m^*(A), m^*(B) < +\infty$, 试证明

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \triangle B).$$

证明

知

$$m^*(A) \leq m^*(A \cup B) = m^*((A \triangle B) \cup B) \leq m^*(A \triangle B) + m^*(B) \Rightarrow m^*(A) - m^*(B) \leq m^*(A \triangle B)$$

同理可证

$$m^*(B) - m^*(A) \leq m^*(A \triangle B)$$

故

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \triangle B).$$

**练习 2.3** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$, 存在开球 $B(\boldsymbol{x}, \delta_{\boldsymbol{x}})$, 使得 $m^*(E \cap B(\boldsymbol{x}, \delta_{\boldsymbol{x}})) = 0$, 试证明 $m^*(E) = 0$.

证明

对 $E$ 中的全体点取这样的开球, 知这些开球构成 $E$ 的一个开覆盖, 从而其存在可数子覆盖 $\{B(\boldsymbol{x}_i, \delta_{\boldsymbol{x}_i}) : i = 1, 2, \cdots\}$, 有:

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap B(\boldsymbol{x}_i, \delta_{\boldsymbol{x}_i}))$$

故

$$m^*(E) \leq m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap B(\boldsymbol{x}_i, \delta_{\boldsymbol{x}_i}))) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E \cap B(\boldsymbol{x}_i, \delta_{\boldsymbol{x}_i})) = 0$$

命题即证.

## 2.2 可测集与测度

### 2.2.1 知识梳理

**定义 2.2.1 (Carathéodory 条件下的可测集)**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

则称 $E$ 为 Lebesgue 可测集 (或 $m^*-$ 可测集), 简称为可测集, 其中 $T$ 称为试验集. 可测集的全体称为可测集类, 简记为 $\mathscr{M}$.

**笔记**

- 在 [1] 中提到 Carathéodory 条件可以通过取试验集为矩体来得到. 事实上, 以 $\mathbb{R}$ 为例, 从直觉出发, 它上面的测度 $m$ 满足:
  1. $m(E) \geq 0, E \subset \mathbb{R}$;
  2. 可合同的点集具有相同的测度;
  3. 令 $I = (a, b)$, 则 $m(I) = b - a$;

4. 若 $E_1, E_2, \cdots, E_k, \cdots$ 是互不相交的点集, 则

$$m(\sum_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

现在, 如果认为 $\mathbb{R}^n$ 中的任一矩体 $I$ 应当可测, 则当点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 也可测时, 根据条件 4 应有:

$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c)$$

现在取试验集 $T$. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $T$ 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le m(T) + \varepsilon,$$

故

$$\begin{aligned}
m^*(T) &\le m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \\
&\le m^*((\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \cap E) + m^*((\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \cap E^c) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k \cap E^c) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} [m^*(I_k \cap E) + m^*(I_k \cap E^c)] \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le m^*(T) + \varepsilon
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$.

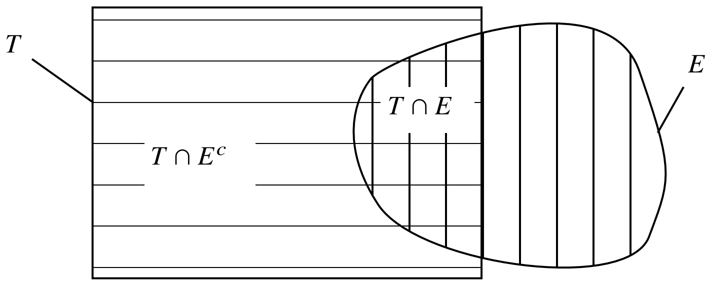


图 2.1: $T$ 为矩体时 Carathéodory 条件的示意图

- 一般来说, 一个集合 $E$ 的可测性并不是 $E$ 自身固有的, 而是依赖于外测度的选取. 事实上针对同一个 $E$, 可以给出两种不同的外测度, 使得 $E$ 在其中一种的意义下可测, 而在另一种意义下不可测.
- $m^*$ 和 $m$ 是有区别的! $m^*$ 是外测度, 而任何集合都有外测度. 而只有确定了集合 $A$ 可测, $m(A)$ 作为 $A$ 的测度才有意义. 在 $A \in \mathscr{M}$ 的情况下才有 $m(A) = m^*(A)$.

在定义可测集后, 就可以来讨论可测集的性质与结构了. 在此之前需要说明, 在证明 $\mathbb{R}^n$ 中任意点集 $E$ 为可测集时, 只需对任意点集 $T \subset \mathbb{R}^n$ 证明

$$m^*(T) \ge m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

即可. 这是因为根据次可加性, $m^*(T) \le m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$ 总成立. 而在论证上式时又只需论证 $m^*(T) < +\infty$ 的情况即可.

**命题 2.2.1**

若 $m^*(E) = 0$, 则 $E \in \mathscr{M}$.

证明

任取试验集 $T$, 知

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(E) + m^*(T) = m^*(T)$$

故 $E \in \mathscr{M}$. □

**定义 2.2.2**

外测度为零的点集称为零测集. ♣

结合前面的命题, 知零测集必定是可测集. 显然, $\mathbb{R}^n$ 中由单个点组成的点集是零测集, 故根据外测度的次可加性知 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集 $\mathbb{Q}^n$ 是零测集. 零测集的任一子集依旧是零测集. 注意到因为 Cantor 集 $C$ 本身也是零测集, 故 Cantor 集的子集也全部是零测集, 这说明 $\mathscr{P}(C) \subset \mathscr{M}$. 因为 $\overline{\overline{C}} = c$, 故 $\overline{\overline{\mathscr{M}}} \geq 2^c$. 但本身 $\overline{\overline{M}} \leq 2^c$, 故 $\overline{\overline{M}} = 2^c$.

上一节的定理(2.1.2)在这一节中也有体现.

**定理 2.2.1**

若 $E_1 \subset S, E_2 \subset S^c, S \in \mathscr{M}$, 则

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$$

♡

证明

取试验集 $T = E_1 \cup E_2$, 既然 $S \in \mathscr{M}$, 知

$$m^*(T) = m^*(E_1 \cup E_2) = m^*((E_1 \cup E_2) \cap S) + m^*((E_1 \cup E_2) \cap S^c) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$$

□

**推论 2.2.1**

当 $E_1, E_2$ 是互不相交的可测集, 则对任意集合 $T$ 有

$$m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2)$$

♡

**定理 2.2.2 (可测集的性质)**

1. $\varnothing \in \mathscr{M}$.
2. 如果 $E \in \mathscr{M}$, 则 $E^c \in \mathscr{M}$.
3. 如果 $E_1 \in \mathscr{M}, E_2 \in \mathscr{M}$, 则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 \backslash E_2$ 均可测[a].
4. 如果 $E_i \in \mathscr{M} (i = 1, 2, \cdots)$, 则其并集也属于 $\mathscr{M}$. 若进一步有 $E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$, 则

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$$

也即 $m^*$ 在 $\mathscr{M}$ 上满足可数可加性 (或称为 $\sigma-$ 可加性).

[a] 由此可知可测集作有限次交并运算后所得的集合依旧可测.

♡

证明

1. 任取试验集 $T$, 有

$$m^*(T \cap \varnothing) + m^*(T \cap \mathbb{R}^n) = m^*(T)$$

2. 知 $E = (E^c)^c$, 故由 $E \in \mathscr{M}$ 知任取试验集 $T$ 有:

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^*(T \cap E^c) + m^*(T \cap (E^c)^c)$$

此即 $E^c \in \mathscr{M}$.

3. 考虑证明 $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{M}$. 任取试验集 $T$, 由次可加性知

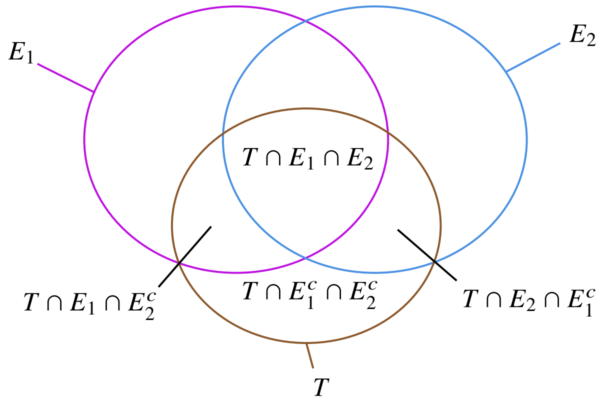


图 2.2: 集合分解示意图

$$
\begin{aligned}
m^*(T) \leq & m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c) \\
= & m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1^c \cap E_2^c)) \\
= & m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c) \\
= & m^*((T \cap E_1) \cup (T \cap E_2)) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c) \\
= & m^*((T \cap E_1^c \cap E_2) \cup (T \cap E_2^c \cap E_1) \cup (T \cap E_1 \cap E_2)) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c) \\
\leq & m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c) \\
& + m^*((T \cap E_1) \cap E_2^c) + m^*((T \cap E_1) \cap E_2)
\end{aligned}
$$

因为 $E_2 \in \mathscr{M}$, 把上式最后一部分中第一行的 $T \cap E_1^c$ 视作试验集, 有:

$$m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2) + m^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c) = m^*(T \cap E_1^c)$$

同理把上式最后一部分中第二行的 $T \cap E_1$ 视作试验集得到

$$m^*((T \cap E_1) \cap E_2^c) + m^*((T \cap E_1) \cap E_2) = m^*(T \cap E_1)$$

从而上式最后一部分即 $m^*(T \cap E_1^c) + m^*(T \cap E_1)$, 又因为 $E_1 \in \mathscr{M}$, 知 $m^*(T \cap E_1^c) + m^*(T \cap E_1) = m^*(T)$, 从而:

$$m^*(T) \leq m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq m^*(T)$$

这说明

$$m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c) = m^*(T)$$

因为 $T$ 依旧是任意选的, 故 $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{M}$.

至于 $E_1 \cap E_2$, 只需注意

$$E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c, \quad E_1 \in \mathscr{M}, E_2 \in \mathscr{M}$$

即可. 而针对 $E_1 \backslash E_2$ 有

$$E_1 \backslash E_2 = E_1 \cup E_2^c, \quad E_1 \in \mathscr{M}, E_2 \in \mathscr{M}$$

故 $E_1 \cap E_2 \in \mathscr{M}, E_1 \backslash E_2 \in \mathscr{M}$.

4. 首先不妨设 $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots$ 互不相交, 并记

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad S_k = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad k = 1, 2, \cdots$$

由结论 3 知每个 $S_k$ 都可测, 故任取试验集 $T$ 有

$$m^*(T) = m^*(T\cap S_k) + m^*(T\cap S_k^c) = m^*(T\cap\bigcup_{i=1}^k E_i) + m^*(T\cap S_k^c)$$

$$= m^*(\bigcup_{i=1}^k (T\cap E_i)) + m^*(T\cap S_k^c) = \sum_{i=1} m^*(T\cap E_i) + m^*(T\cap S_k^c)$$

这里的可加性恰是因为假设的 $E_1,\cdots,E_i,\cdots$ 互不相交. 因为 $T\cap S_k^c \supset T\cap S^c$, 知

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^k m^*(T\cap E_i) + m^*(T\cap S^c)$$

令 $k\to\infty$ 得到

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^\infty m^*(T\cap E_i) + m^*(T\cap S^c) \geq m^*(\bigcup_{i=1}^\infty (T\cap E_i)) + m^*(T\cap S^c)$$

任取 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^\infty (T\cap E_i)$, 知至少存在 $p$ 使得 $x\in T\cap E_p$, 而 $E_p\subset\bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i$, 故 $x\in T\cap\bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i$, 这说明 $\bigcup\limits_{i=1}^\infty (T\cap E_i)\subset T\cap\bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i$, 故

$$m^*(\bigcup_{i=1}^\infty (T\cap E_i)) + m^*(T\cap S^c) \geq m^*(T\cap\bigcup_{i=1}^\infty E_i) + m^*(T\cap S^c) = m^*(T\cap S) + m^*(T\cap S^c)$$

也即

$$m^*(T) \geq m^*(T\cap S) + m^*(T\cap S^c)$$

故 $S\in\mathscr{M}$. 此外, 在式子

$$m^*(T) \geq \sum_{i=1}^\infty m^*(T\cap E_i) + m^*(T\cap S^c)$$

中用 $T\cap S$ 替换 $T$, 可得

$$m^*(T\cap S) \geq \sum_{i=1}^\infty m^*(T\cap S\cap E_i) + m^*(T\cap S\cap S^c) = \sum_{i=1}^\infty m^*(T\cap E_i)$$

但同时任意给定 $k$ 有

$$m^*(T\cap S_k) = m^*(T\cap\bigcup_{i=1}^k E_i) = m^*(\bigcup_{i=1}^k (T\cap E_i)) \leq \sum_{i=1}^k m^*(T\cap E_i)$$

令 $k\to\infty$ 有

$$m^*(T\cap S) \leq \sum_{i=1}^\infty m^*(T\cap E_i)$$

故

$$m^*(T\cap S) = \sum_{i=1}^\infty m^*(T\cap E_i)$$

再取 $T=\mathbb{R}^n$ 可知:

$$m^*(T\cap S) = m^*(S) = m^*(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = \sum_{i=1}^\infty m^*(T\cap E_i) = \sum_{i=1}^\infty m^*(E_i)$$

此即可数可加性. 而对于一般的可测集列 $\{E_k\}$, 令

$$S_1 = E_1, S_k = E_k\backslash(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i),\quad k\geq 2$$

可知 $\{S_k\}$ 是互不相交的可测集列. 由 $\bigcup\limits_{i=1} E_i = \bigcup\limits_{k=1}^\infty S_k$, $\bigcup\limits_{k=1}^\infty S_k\in\mathscr{M}$ 知 $\bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i\in\mathscr{M}$. □

根据上述定理的结论知, $\mathbb{R}^n$ 中的可测集类构成一个 $\sigma-$ 代数. 对于可测集 $E$, 其外测度称为测度, 记为 $m(E)$. 这就是通常所说的 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度.

笔记 从公理化的角度出发，设 $X$ 是非空集合，$\mathscr{A}$ 是 $X$ 的一些子集构成的 $\sigma-$ 代数. 若 $\mu:\mathscr{A}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个集函数，满足:

1. $0\le\mu(E)\le+\infty(E\in\mathscr{A})$;
2. $\mu(\varnothing)=0$;
3. $\mu$ 在 $\mathscr{A}$ 上可数可加，

则称 $\mu$ 是 $\mathscr{A}$ 上的 (非负) 测度. $\mathscr{A}$ 中的元素称为 $\mu-$ 可测集，有序组 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 称为测度空间. 本节所建立的测度空间正是 $(\mathbb{R}^n,\mathscr{M},m)$.

**定理 2.2.3 (递增可测集列的测度运算)**

若有递增可测集列 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots$，则

$$m(\lim_{k\to\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)$$

证明

若存在 $k_0$ 使得 $m(E_{k_0})=+\infty$，则结论自然成立. 现在假设对一切 $k$ 都有 $m(E_k)<+\infty$. 由假设知 $E_k\in\mathscr{M}(k=1,2,\cdots)$，故 $E_{k-1}$ 与 $E_k\backslash E_{k-1}$ 是互不相交的可测集. 由测度的可加性知

$$m(E_{k-1})+m(E_k\backslash E_{k-1})=m(E_k)$$

因为 $m(E_{k-1})<+\infty$，故移项有

$$m(E_k\backslash E_{k-1})=m(E_k)-m(E_{k-1})$$

令 $E_0=\varnothing$，得

$$\lim_{k\to\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k\backslash E_{k-1})$$

再应用测度的可数可加性知

$$\begin{aligned}m(\lim_{k\to\infty}E_k)&=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k\backslash E_{k-1}))=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k\backslash E_{k-1})\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(m(E_k)-m(E_{k-1}))=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(m(E_i)-m(E_{i-1}))=\lim_{k\to\infty}m(E_k)\end{aligned}$$

□

**推论 2.2.2 (递减可测集列的测度运算)**

若有递减可测集列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\supset\cdots$，且 $m(E_1)<+\infty$，则

$$m(\lim_{k\to\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)$$

证明

对于 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，注意到 $(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)^c=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^c$，而 $\{E_k^c\}$ 是递增可测集列，故 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^c\in\mathscr{M}$，从而 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k\in\mathscr{M}$. 故 $m(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)$ 有定义，同时知 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)$ 作为单调递减的下有界列极限有定义. 因为

$$E_1\backslash E_lk\subset E_1\backslash E_{k+1},\quad k=2,3,\cdots$$

故 $\{E_1\backslash E_k\}$ 是递增集合列，根据定理(2.2.3)知

$$\begin{aligned}m(E_1\backslash\lim_{k\to\infty}E_k)&=m(E_1\cup(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k)^c)=m(E_1\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^c))\\&=m(\bigcup_{k\to\infty}(E_1\cup E_k^c))=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_1\backslash E_k))=m(\lim_{k\to\infty}(E_1\backslash E_k))=\lim_{k\to\infty}m(E_1\backslash E_k)\end{aligned}$$

由于 $m(E_1) < +\infty$, 故上式可写为

$$m(E_1) - m(\lim_{k\to\infty} E_k) = m(E_1) - \lim_{k\to\infty} m(E_k)$$

得到

$$m(\lim_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

□

**推论 2.2.3**

设 $\{E_k\}$ 是可测集列, 则

$$m(\varliminf_{k\to\infty} E_k) \le \varliminf_{k\to\infty} m(E_k)$$

证明

因为 $\bigcup\limits_{j=k}^{\infty} E_j \subset E_k (k = 1, 2, \cdots)$, 故

$$m(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j) \le m(E_k), \quad k = 1, 2, \cdots$$

令 $k \to \infty$, 注意到 $\bigcap\limits_{j=k}^{\infty} E_j$ 本身关于 $k$ 递增, 有:

$$m(\varliminf_{k\to\infty} E_k) = m(\lim_{k\to\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j) = \lim_{k\to\infty} m(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j) \le \varliminf_{k\to\infty} m(E_k)$$

□

笔记 也称结论

$$m(\varliminf_{n\to\infty} E_n) \le \varliminf_{n\to\infty} m(E_n), \quad m(\varlimsup_{n\to\infty} E_n) \ge \varlimsup_{n\to\infty} m(E_n)$$

为测度论中的 Fatou 引理.

### 2.2.2 例子整理

**例题 2.5** 若有可测集列 $\{E_k\}$, 且有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k) < +\infty$, 则

$$m(\varlimsup_{k\to\infty} E_k) = 0$$

证明

知

$$m(\varlimsup_{k\to\infty} E_k) = m(\lim_{k\to\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i) = \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} E_i = 0$$

其中第一步是上极限定义, 第二步是定理(2.2.3), 第三步是次可加性, 第四步是 Cauthy 准则. □

笔记 这个例子可对比到概率论中的 Borel-Cantelli 引理:

**引理 2.2.1 (Borel-Cantelli)**

设 $\{A_n\}$ 是一列事件.

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, 则 $\mathbb{P}(\varlimsup_{n} A_n) = 0$;
2. 设 $\{A_n\}$ 相互独立, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ 当且仅当 $\mathbb{P}(\varlimsup_{n} A_n) = 1$.

### 2.2.3 思考题

✍ **练习 2.4** 设 $E \subset [0,1]$. 若 $m(E)=1$, 试证明 $\overline{E}=[0,1]$; 若 $m(E)=0$, 试证明 $E^\circ=\varnothing$.

证明

用反证法, 如果 $\overline{E}\neq[0,1]$, 这说明 $[0,1]$ 中存在 $x_0$ 与 $\delta>0$, 使得 $U_\delta(x_0)\cap\overline{E}=\varnothing$. 故

$$\overline{E}\subset[0,1]\backslash U_\delta(x_0)\Rightarrow m(\overline{E})\le m([0,1]\backslash U_\delta(x_0))=1-2\delta$$

另一方面 $m(\overline{E})\ge m(E)=1$, 矛盾! 故 $\overline{E}=[0,1]$.

同样, 如果 $E^\circ\neq\varnothing$, 则存在 $x_0\in E$ 与 $\delta>0$ 使得 $U_\delta(x_0)\subset E$, 进而

$$m(E)\ge m(U_\delta(x_0))=2\delta>0$$

这与 $m(E)=0$ 矛盾! 故 $E^\circ=\varnothing$.

✍ **练习 2.5** 设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列, $B_n\subset A_n(n=1,2,\cdots)$, 试证明

$$m^*(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)=\sum_{n=1}^\infty m^*(B_n).$$

证明

已经知道

$$m^*(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)\le\sum_{n=1}^\infty m^*(B_n)$$

故只需说明

$$m^*(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)\ge\sum_{n=1}^\infty m^*(B_n)$$

注意到 $\{B_n\}$ 本身也是互不相交的被可测集分离的集列, 故给定 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$\sum_{n=1}^\infty m^*(B_n)=m^*(\bigcup_{n=1}^N B_n)\le m^*(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)$$

令 $N\to\infty$ 即知

$$\sum_{n=1}^\infty m^*(B_n)\le m^*(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)$$

命题即证.

✍ **练习 2.6** 设有点集 $E_1,E_2$, 且 $E_1$ 是可测集. 若 $m(E_1\triangle E_2)=0$, 试证明 $E_2$ 是可测集, 且

$$m(E_2)=m(E_1).$$

证明

如果 $m^*(E_1\backslash E_2)>0$, 则 $m^*(E_1\triangle E_2)\ge m^*(E_1\backslash E_2)>0$, 故 $m^*(E_1\backslash E_2)=0$, 同理 $m^*(E_2\backslash E_1)=0$. 因为零测集必定可测, 故 $E_1\backslash E_2,E_2\backslash E_1,E_1\triangle E_2\in\mathscr{M}$. 注意到

$$E_2=(E_2\backslash E_1)\cup((E_1\backslash E_2)^c\cap(E_2\backslash E_1)^c\cap(E_1\triangle E_2)^c)$$

故 $E_2\in\mathscr{M}$, 从而

$$m(E_2\backslash E_1)=0=m(E_2)-m(E_1)\Rightarrow m(E_2)=m(E_1)$$

✍ **练习 2.7** 设点集 $B$ 满足: 对于任给 $\varepsilon>0$, 都存在可测集 $A$, 使得 $m^*(A\triangle B)<\varepsilon$, 试证明 $B$ 是可测集.

证明

任取试验集 $T$, 任给 $\varepsilon > 0$, 取满足题意的可测集 $A$, 考虑集合分解:

$$T = (T \cap B \cap A^c) \cup (T \cap B \cap A) \cup (T \cap B^c \cap A) \cup (T \cap B^c \cap A^c)$$

知:

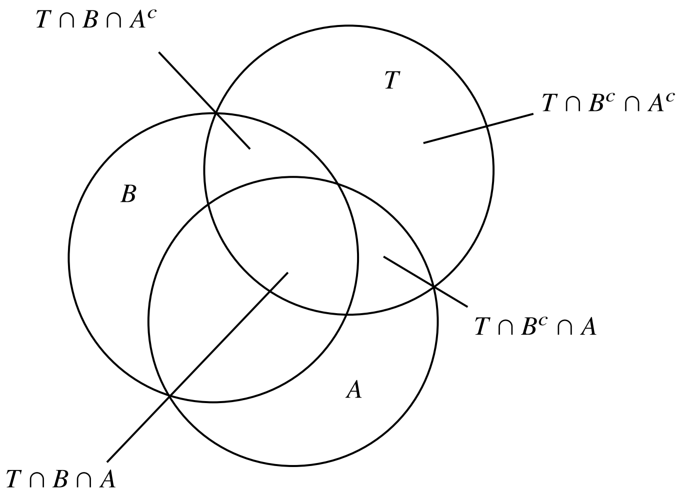


图 2.3: 集合分解示意图

$$\begin{aligned} m^*(T) &= m^*((T \cap B \cap A^c) \cup (T \cap B \cap A) \cup (T \cap B^c \cap A) \cup (T \cap B^c \cap A^c)) \\ &= m^*((T \cap B \cap A) \cup (T \cap B^c \cap A)) + m^*((T \cap B \cap A^c) \cup (T \cap B^c \cap A^c)) \\ &\geq \max\{m^*(T \cap B \cap A), m^*(T \cap B^c \cap A)\} + \max\{m^*(T \cap B \cap A^c), m^*(T \cap B^c \cap A^c)\} \end{aligned}$$

现在令 $\varepsilon \to 0$, 知 $m^*(A \triangle B) = m^*((B \cap A^c) \cup (A \cap B^c)) \to 0$. 又注意到

$$T \cap B^c \cap A \subset B^c \cap A \subset A \triangle B$$

$$T \cap B \cap A^c \subset B \cap A^c \subset A \triangle B$$

得到 $m^*(T \cap B^c \cap A) \to 0, m^*(T \cap B \cap A^c) \to 0$. 故在 $\varepsilon$ 足够小时有

$$\max\{m^*(T \cap B \cap A), m^*(T \cap B^c \cap A)\} = m^*(T \cap B \cap A)$$

$$\max\{m^*(T \cap B \cap A^c), m^*(T \cap B^c \cap A^c)\} = m^*(T \cap B^c \cap A^c)$$

得

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap B \cap A) + m^*(T \cap B^c \cap A^c)$$

进一步有

$$\begin{aligned} m^*(T) + m^*(T \cap B \cap A^c) + m^*(T \cap B^c \cap A) &\geq m^*(T \cap B \cap A) + m^*(T \cap B \cap A^c) + m^*(T \cap B^c \cap A^c) + m^*(T \cap B^c \cap A) \\ &= m^*(T \cap B) + m^*(T \cap B^c) \end{aligned}$$

同上, 令 $\varepsilon \to 0$ 得:

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap B) + m^*(T \cap B^c)$$

命题即证.

**练习 2.8** 设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $0 < \alpha < m(E)$, 试证明存在 $E$ 中的有界闭集 $F$, 使得 $m(F) = \alpha$.

证明

首先考虑 $m(E) < +\infty$ 的情况, 由定理(2.3.2)知对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在闭集 $F_0 \subset E$, 使得 $m(E \backslash F_0) < \varepsilon$, 自然可以取 $\varepsilon$ 足够小, 使得 $m(F_0) > \alpha$, 故只需讨论 $E$ 为闭集的情况即可. 设:

$$f(x) = m([-x, x] \cap E)$$

考虑证明 $f(x)$ 连续. 这是因为设 $\Delta x > 0$, 记 $I_x = [-x, x]$, 有:

$$\begin{aligned}|f(x+\Delta x) - f(x)| &= |m(I_{x+\Delta x} \cap E) - m(I_x \cap E)| = |m((I_{x+\Delta x} \cap E) \backslash (I_x \cap E))| \\ &= m((I_{x+\Delta x} \cap E) \cap (I_x^c \cup E^c)) = m((I_{x+\Delta x} \cap E \cap I_x^c) \cup (I_{x+\Delta x} \cap E \cap E^c)) \\ &\leq m(I_{x+\Delta x} \cap I_x^c) = 2\Delta x\end{aligned}$$

当 $\Delta x < 0$ 时类似可证 $|f(x+\Delta x) - f(x)| \leq -2\Delta x$, 进而 $|f(x+\Delta x) - f(x)| \leq 2\Delta x$, 从而 $f(x)$ 连续. 又因为

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = m(E)$$

由连续函数的介值性知存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x_0) = \alpha$, 此时 $m([-x_0, x_0] \cap E) = \alpha$, $[-x_0, x_0] \cap E \subset E$, 且由 $E$ 是闭集知 $[-x_0, x_0] \cap E$ 是闭集, 此情况得证.

再考虑 $m(E) = +\infty$, 此时既然 $\alpha$ 给定, 当然可以选取 $E$ 中的可测集 $E_0$, 使得 $0 < \alpha < m(E_0) < +\infty$, 从而回到上述情况. 命题得证.

- 

**练习 2.9** 设 $X = \{E_\alpha\}$ 是由 $\mathbb{R}$ 中某些互不相交的正测集形成的集族, 试证明 $X$ 是可数的.

证明

设 $I_n = [-n, n]$, 记 $E_\alpha^n = (I_{n+1} \backslash I_n) \cap E_\alpha (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 知固定 $n$, 使得 $m(E_\alpha^n) > 0$ 的 $E_\alpha$ 只有可数个

**练习 2.10** 设有 $\mathbb{R}$ 中的可测集列 $\{E_k\}$, 且当 $k \geq k_0$ 时, $E_k \subset [a, b]$. 若存在 $\lim\limits_{k \to \infty} E_k = E$, 试证明

$$m(E) = \lim_{k \to \infty} m(E_k).$$

知 $m(E), m(E_k)(k \geq k_0)$ 均不是 $+\infty$, 从而

$$m(E) = m(\overline{\lim_{k \to \infty}} E_k) \geq \overline{\lim_{k \to \infty}} m(E_k) \geq \underline{\lim_{k \to \infty}} m(E_k) \geq m(\underline{\lim_{k \to \infty}} E_k) = m(E)$$

命题即证.

**练习 2.11** 设 $0 < \varepsilon_n < 1 (n = 1, 2, \cdots)$, 试证明 $\varepsilon_n \to 0 (n \to \infty)$ 的充分必要条件是, 存在 $E_n \subset [0, 1], m(E_n) = \varepsilon_n (n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) < +\infty, \quad x \in [0, 1] \backslash \mathbb{Z}, m(\mathbb{Z}) = 0.$$

证明

当 $\varepsilon_n \to 0$, 取 $E_n = [0, \varepsilon_n]$, 知 $m(E_n) = \varepsilon_n$. 对任意给定的 $x \in [0, 1] \backslash \mathbb{Z}$, 既然 $\varepsilon_n \to 0$, 知在足够多项 (比如说 $N$ 项) 后总有 $\chi_{E_n}(x) = 0$, 进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \leq N < +\infty$.

当存在 $E_n \subset [0, 1], m(E_n) = \varepsilon_n$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) < +\infty, x \in [0, 1] \backslash \mathbb{Z}$, 这说明在点态意义上有 $\lim\limits_{n \to \infty} \chi_{E_n}(x) \to 0$, 根据定义此即

$$\forall x \in [0, 1] \backslash \mathbb{Z} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x) > 0 \forall n > N(|\chi_{E_n}(x)| < \varepsilon)$$

如果 $\varepsilon_n \nrightarrow 0$, 根据定义知

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall N > 0 \exists n > N(|\varepsilon_n| > \varepsilon_0)$$

为了记号简洁, 不妨就重新记满足 $\varepsilon_n > \varepsilon_0$ 的那些 $E_n$ 为新的 $E_n, n = 1, 2, \cdots$, 现在证明存在 $x \in [0, 1] \backslash \mathbb{Z}$, 使得其出现在 $\{E_n\}$ 中的无穷多个元素中, 这由鸽笼原理即得. 现取该 $x$, 并记包含它的那无穷多个元素为 $\{E_{n_k}\}, k = 1, 2, \cdots$, 则 $\chi_{E_{n_k}}(x) = 1, k = 1, 2, \cdots$, 与原先的点态收敛矛盾! 故只能有 $\varepsilon_n \to 0$. 命题得证.

## 2.3 可测集与 Borel 集的关系

**引理 2.3.1 (Carathéodory)**

设 $G \neq \mathbb{R}^n$ 是开集, $E \subset G$, 令

$$E_k = \{\boldsymbol{x} \in E : d(\boldsymbol{x}, G^c) \geq \frac{1}{k}\}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

则

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

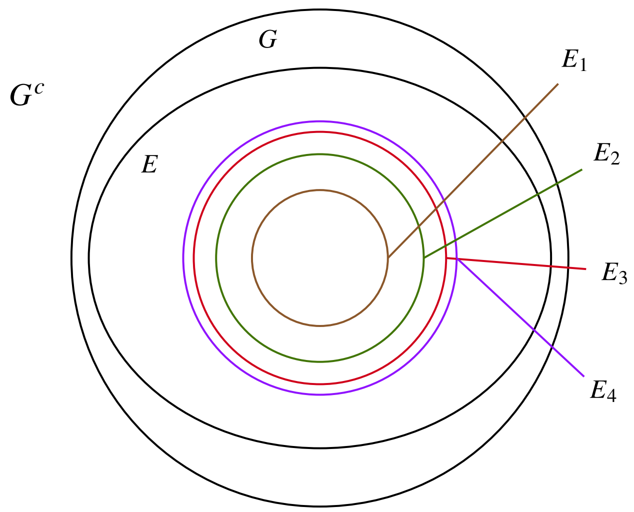


图 2.4: $E_k$ 定义示意图

**证明**

显见 $\{E_k\}$ 是递增列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subset E$. 再说明 $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. 任取 $\boldsymbol{x} \in E$, 既然 $G$ 是开集, 知 $\boldsymbol{x}$ 是 $G$ 的内点, 进而存在 $\delta > 0$ 使得 $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset G$, 这说明至少 $d(\boldsymbol{x}, G^c) \geq \delta$. 当 $\delta > \frac{1}{k} \Rightarrow k > \frac{1}{\delta}$, 则有 $\boldsymbol{x} \in E_k$, 从而 $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, 故:

$$E = \lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

故首先有 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) \leq m^*(E)$. 要证明 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) \geq m^*(E)$, 不妨假定 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 令 $A_k = E_{k+1} \backslash E_k (k = 1, 2, \cdots)$, 可知 $d(A_{2j}, A_{2j+2}) > 0 (j = 1, 2, \cdots)$.

注意到 $E - 2k \supset \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_{2j}$, 可得

$$m^*(E_{2k}) \geq m^*(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_{2j}) = \sum_{j=1}^{k-1} m^*(A_{2j})$$

令 $k \to \infty$ 有

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_{2j}) < +\infty$$

类似可证 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m^*(A_{2j+1}) < +\infty$.

因为对任意的 $k$, 都有:

$$E = E_{2k} \cup (\bigcup_{j=k}^{\infty} A_{2j}) \cup (\bigcup_{j=k}^{\infty} A_{[}2j + 1])$$

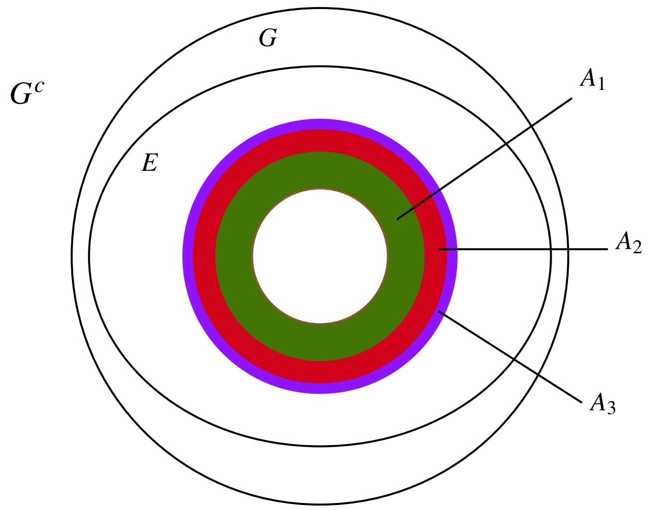


图 2.5: $A_k$ 定义示意图

故对任意的 $k$ 有:

$$m^*(E) \leq m*(E_{2k}) + \sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j}) + \sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j+1})$$

令 $k \to \infty$, 由 Cauthy 准则知

$$\sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j}) \to 0, \sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j+1}) \to 0, \quad k \to \infty$$

得到

$$m^*(E) \leq \lim_{k\to\infty} m^*(E_{2k}) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

命题即证. □

**定理 2.3.1**

非空闭集 $F$ 是可测集.

**证明**

对任意试验集 $T$, 由于 $T\backslash F \subset F^c := G$ 是开集, 故根据上述引理知存在 $T\backslash F$ 中的集列 $\{F_k\}$:

$$d(F_k, F) \geq \frac{1}{k}(k = 1, 2, \cdots), \quad \lim_{k\to\infty} m^*(F_k) = m^*(T\backslash F)$$

注意到 $(T \cap F) \cup F_k \subset T \cup F_k \subset T$, 且 $d(T \cap F, F_k) \geq d(F, F_k) > 0$, 故

$$m^*(T) \geq m^*((T \cap F) \cup F_k) = m^*(T \cap F) + m^*(F_k)$$

再令 $k \to \infty$ 知

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap F) + \lim_{k\to\infty} m^*(F_k) = m^*(T \cap F) + m^*(T \cap F^c)$$

又因为 $T$ 是任意的, 故 $F$ 是可测集. □

**推论 2.3.1**

Borel 集是可测集.

**证明**

由闭集可测知开集可测, 又因为可测集本身是一个 $\sigma-$ 代数, 故任一 Borel 集均可测. □

**定理 2.3.2**

若 $E \in \mathscr{M}$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 有:

1. 存在包含 $E$ 的开集 $G$, 使得 $m(G \backslash E) < \varepsilon$;
2. 存在含于 $E$ 的闭集 $F$, 使得 $m(E \backslash F) < \varepsilon$.

证明

1. 首先考虑 $m(E) < +\infty$ 的情形, 根据外测度作为下确界的定义知存在 $E$ 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \varepsilon$. 令 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, 则 $G$ 是包含 $E$ 的开集, 且 $m^*(G) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \varepsilon$. 因为 $m(E) < +\infty$, 故有 $m(G) - m(E) = m(G \backslash E) < \varepsilon$[1].

再来讨论 $m(E)$ 是 $+\infty$ 的情形. 令

$$E_k = E \cap B(0, k), E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

因为 $m(E_k) < +\infty (k = 1, 2, \cdots)$, 故应用前述结论知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在包含 $E_k$ 的开集 $G_k$, 使得 $m(G_k \backslash E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. 现在作点集 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 $G \supset E$ 且其为开集. 有:

$$G \backslash E = G \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \backslash E_k)$$

故

$$m(G \backslash E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k \backslash E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

2. 考虑 $E^c$, 知存在包含 $E^c$ 的开集 $G$, 使得 $m(G \backslash E^c) < \varepsilon$. 令 $F = G^c$, 知 $F$ 是闭集, 且 $F \subset E$. 又因为可以证明 $E \backslash F = G \backslash E^c$, 得 $m(E \backslash F) = m(G \backslash E^c) < \varepsilon$. □

**定理 2.3.3**

若 $E \in \mathscr{M}$, 则

1. $E = H \backslash Z_1$, $H$ 是 $G_\delta$ 集, $m(Z_1) = 0$;
2. $E = K \cup Z_2$, $K$ 是 $F_\sigma$ 集, $m(Z_2) = 0$.

证明

1. 对每个自然数 $k$, 知存在包含 $E$ 的开集 $G_k$, 使得 $m(G_k \backslash E) < \frac{1}{k}$. 现在作点集 $H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 $H$ 为 $G_\delta$ 集, 且 $E \subset H$. 因为对一切 $k$ 都有:

$$m(H \backslash E) \leq m(G_k \backslash E) < \frac{1}{k}$$

故由 $\frac{1}{k} \to 0, k \to \infty$ 知 $m(H \backslash E) = 0$. 若令 $H \backslash E = Z_1$, 则 $E = H \backslash Z_1$.

2. 对每个自然数 $k$, 知存在含于 $E$ 的闭集 $F_k$, 使得 $m(E \backslash F_k) < \frac{1}{k}$. 现在作点集 $K = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 $K$ 是 $F_\sigma$ 集, 且 $K \subset E$. 因为对一切 $k$ 都有:

$$m(E \backslash K) \leq m(E \backslash F_k) < \frac{1}{k}$$

故由 $\frac{1}{k} \to 0, k \to \infty$ 知 $m(H \backslash E) = 0$. 若令 $E \backslash K = Z_2$, 则 $E = K \cup Z_2$. □

笔记 如果只从测度的角度来看, 上述定理指出存在包含 $E$ 的集 $H$, 使得 $m(H) = m(E)$; 存在含于 $E$ 的集 $K$, 使得 $m(K) = m(E)$. 称如此的 $H, K$ 分别为 $E$ 的等测包与等测核. 等测包的结论对于一般点集 $E$ 的外测度也成立.

[1] $m(G) - m(E) = m(G \backslash E)$ 是因为 $E \in \mathscr{M}$, 选取 $G \supset E$ 为试验集有 $m(G) = m(G \cap E) + m(G \cap E^c) = m(E) + m(G \backslash E)$.

**定理 2.3.4 (外测度的正则性)**

若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则存在包含 $E$ 的 $G_\delta$ 集 $H$, 使得 $m(H) = m^*(E)$. 此时称 $H$ 为 $E$ 的等测包.

证明

对每个自然数 $k$, 都存在包含 $E$ 的开集, 使得

$$m(G_k) \le m^*(E) + \frac{1}{k}$$

现在作点集 $H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 $H$ 是 $G_\delta$ 集, 且 $H \supset E$. 因为

$$m^*(E) \le m(H) \le m(G_k) \le m^*(E) + \frac{1}{k}$$

令 $k \to \infty$, 知 $m(H) = m^*(E)$.

**推论 2.3.2**

设 $E_k \subset \mathbb{R}^n (k = 1, 2, \cdots)$, 则

$$m^*(\varliminf_{k\to\infty} E_k) \le \varliminf_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

证明

对每个 $E_k$ 作等测包 $H_k$, 有:

$$H_k \supset E_k, m(H_k) = m^*(E_k), \quad k = 1, 2, \cdots$$

得

$$m^*(\varliminf_{k\to\infty} E_k) \le m(\varliminf_{k\to\infty} H_k) \le \varliminf_{k\to\infty} m(H_k) = \varliminf_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

其中 $m(\varliminf\limits_{k\to\infty} H_k) \le \varliminf\limits_{k\to\infty} m(H_k)$ 是 Fatou 引理.

**推论 2.3.3**

若 $\{E_k\}$ 是递增集合列, 则

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*(\lim_{k\to\infty} E_k).$$

**定理 2.3.5**

若 $E \in \mathscr{M}, \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}$, 则 $(E + \{\boldsymbol{x}_0\}) \in \mathscr{M}$, 且

$$m(E + \{\boldsymbol{x}_0\}) = m(E).$$

证明

只需证明 $(E + \{\boldsymbol{x}_0\}) \in \mathscr{M}$. 由定理(2.3.3)知存在 $H$ 使得

$$E = H \backslash Z$$

其中 $H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, $G_k$ 是开集, $m(Z) = 0$. 知 $G_k + \{\boldsymbol{x}_0\}$ 也是开集, 故

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (G_k + \{\boldsymbol{x}_0\})$$

是可测集. 根据外测度平移不变性知 $Z + \{\boldsymbol{x}_0\}$ 是零测集, 进而由等式

$$E + \{\boldsymbol{x}_0\} = (H + \{\boldsymbol{x}_0\}) \backslash (Z + \{\boldsymbol{x}_0\}) = (\bigcap_{k=1}^{\infty} (G_k + \{\boldsymbol{x}_0\}) \backslash (Z + \{\boldsymbol{x}_0\}))$$

知 $E + \{\boldsymbol{x}_0\} \in \mathscr{M}$, 再由外测度的平移不变性即得结论. □

笔记 一般来说, 如果在 Borel $\sigma-$ 代数上定义了测度 $\mu$, 且对紧集 $K$ 有 $\mu(K) < +\infty$, 则称 $\mu$ 为 Borel 测度. 显见 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度就是一种 Borel 测度.

可以证明, 如果 $\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上平移不变的 Borel 测度, 则存在常数 $\lambda$, 使得对 $\mathbb{R}^n$ 中的每一个 Borel 集 $B$, 均有

$$\mu(B) = \lambda m(B)$$

也即在忽略常数因子的意义下, Lebesgue 测度是 $\mathbb{R}^n$ 平移不变的唯一的 Borel 测度

## 2.4 例子整理

**例题 2.6** 作 $[0,1]$ 中的第二纲零测集 $E$.

解

令 $\{r_n\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}, I_{n,k} = (r_n - 2^{-n-k}, r_n + 2^{-n-k})(n,k \in \mathbb{N})$. 知

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_{n,k}) = 2^{-k+1}$$

进而

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k}) \leq 2^{-p+1}, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow m(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k}) = 0$$

现在固定 $k$, 考虑 $I \backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_{n,k} (k \in \mathbb{N})$. 知其闭包至少与 $\mathbb{Q}$ 不交, 故其闭包无内点, 也即其为无处稠密集. 进而 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(I \backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_{n,k})$ 是第一纲集. 再考虑

$$(\bigcup_{k=1}^{\infty}(I \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k}))^c = \bigcap_{k=1}^{\infty}(I \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k})^c = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k}$$

得 $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_{n,k}$ 是第二纲集.

**例题 2.7** 设 $A \subset \mathbb{R}$, 且对 $x \in A$, 存在无穷多个数组 $(p,q)(p,q \in \mathbb{Z}, q \geq 1)$, 使得 $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^3}$, 则 $m(A) = 0$.

证明

首先令 $B = [0,1] \cap A$, 注意到 $x + n - \frac{p+nq}{q} = x - \frac{p}{q}$, 故

$$A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(B + \{n\})$$

从而只需指出 $m(B) = 0$ 即可. 令 $I_{p,q} = [\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}]$, 则 $x \in I_{p,q}$ 意味着

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3} \leq x \leq \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}$$

通分有

$$p - \frac{1}{q^2} \leq qx \leq p + \frac{1}{q^2} \Leftrightarrow qx - \frac{1}{q^2} \leq p \leq qx + \frac{1}{q^2} \tag{2.1}$$

知对于 $q \geq 2$ 或 $q = 1$, 在长度为 $\frac{2}{q^3}$ 的区间中至多只能有 1 个或 3 个整数. 注意到 $A$ 正是由这样一些 $I_{p,q}$ 取并得到的, 从而 $x \in B$ 当且仅当 $x$ 属于无穷多个 $B_q$:

$$B_q = [0,1] \cap (\bigcup_{p} I_{p,q})$$

故又只需指出 $\sum\limits_{q} m(B_q) < +\infty$.

由式(2.1)知, 对整数 $q$, 要使 $I_{p,q} \cap [0,1] \neq \varnothing$, 就是

$$-\frac{1}{q^2} \leq p \leq q + \frac{1}{q^2}$$

在 $q \geq 2$ 时, 这相当于 $0 \leq p \leq q$, 因而

$$m(B_q) \leq \frac{2(q+1)}{q^3}$$

命题即证.

### 2.4.1 思考题

**练习 2.12** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 且 $m^*(E) < +\infty$. 若有

$$m^*(E) = \sup\{m(F) : F \subset E\text{是有界闭集}\}$$

试证明 $E$ 是可测集.

证明

对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 根据题设关于上确界的条件, 知存在有界闭集 $F_k \subset E$, 使得 $m(F_k) > m^*(E) - \frac{1}{k}$. 再令 $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 知 $F \subset E$. 知:

$$m^*(E \backslash F) = m^*(E \backslash (\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k)) = m^*(\bigcap_{k=1}^{\infty}(E \backslash F_k)) \leq m^*(E \backslash F_k) = \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

这说明 $m^*(E \backslash F) = 0$, 进而 $E \backslash F$ 可测. 又因为 $F$ 可测, 故结合 $F \subset E$, 得到 $E = (E \backslash F) \cup F$ 可测.

**笔记** 该思考题说明有界集 $E$ 可测的充要条件是: 对任意正数 $\varepsilon$, 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $m^*(E - F) < \varepsilon$. **[3]** 中同样有这道习题, 其称作 Vallée-Poussin 检验法.

**练习 2.13** 设 $A \in \mathscr{M}, B \subset \mathbb{R}^n$, 试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

证明

既然 $A \in \mathscr{M}$, 取 $B$ 和 $A \cup B$ 为试验集, 知

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c)$$

$$m^*(A \cup B) = m^*((A \cup B) \cap A) + m^*((A \cup B) \cap A^c) = m^*(A) + m^*(B \cap A^c)$$

两式相减即得欲证.

**练习 2.14** 设 $f(x), g(x)$ 是 $[a, b]$ 上递减的连续函数, 且对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$m(\{x \in [a, b] : f(x) > t\}) = m(\{x \in [a, b] : g(x) > t\}),$$

试证明 $f(x) = g(x), x \in (a, b)$.

证明

如若存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) \neq g(x_0)$, 不妨设 $f(x_0) < t_0 < g(x_0)$, 则既然 $f(x), g(x)$ 都是连续函数, 知存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $x \in U(x_0, \delta)$, 有 $f(x) < t_0 < g(x)$. 又因为 $f(x), g(x)$ 递减, 知至少有:

$$U(x_0, \delta) \subset \{x \in [a, b] : g(x) > t_0\}$$

$$U(x_0, \delta) \not\subset \{x \in [a, b] : f(x) > t_0\}$$

从而至少对 $t_0$ 有

$$m(\{x \in [a, b] : f(x) > t\}) < m(\{x \in [a, b] : g(x) > t\})$$

矛盾! 故 $f(x) = g(x), x \in (a, b)$.

## 2.5 正测度集与矩体的关系

### 2.5.1 知识梳理

**定理 2.5.1**

设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 且 $m(E) > 0, 0 < \lambda < 1$, 则存在矩体 $I$, 使得

$$\lambda|I| < m(I \cap E).$$

证明

不妨设 $m(E) < +\infty$. 给定 $\varepsilon > 0$, 作 $E$ 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k| < m(E) + \varepsilon$. 现在证明存在 $k_0$ 使得 $\lambda|I_{k_0}| < m(I_{k_0} \cap E)$. 如若不然, 则对所有 $k$ 都有

$$\lambda|I_k| \geq m(I_k \cap E) \tag{2.2}$$

则

$$m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap E) \leq \lambda \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \lambda(m(E) + \varepsilon)$$

因为对任意的 $\varepsilon$ 总存在 L-覆盖满足上式, 自然可取 $\varepsilon < \frac{1}{\lambda}m(E) - m(E)$, 得到 $\lambda(m(E) + \varepsilon) < m(E)$, 矛盾! 命题即证. □

**定理 2.5.2 (Steinhaus)**

设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 且 $m(E) > 0$, 作点集

$$E - E \triangleq \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E\}$$

则存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $E - E \supset B(0, \delta_0)$.

证明

由定理(2.5.1)知, 对任意的 $\lambda \in (0, 1)$ 都存在矩体 $I$, 使得 $\lambda|I| < m(I \cap E)$. 记 $I$ 的最短边长为 $\delta$, 并作开矩体:

$$J = \{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) : |\xi_i| < \frac{\delta}{2}, i = 1, \cdots, n\}$$

下面证明 $J \subset E - E$, 特别地, 证明 $J \subset (E \cap I) - (E \cap I) \subset E - E$. 此即说明任取 $\boldsymbol{x}_0 \in J$, 总能找到 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in E \cap I$, 使得 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_0$, 也即 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}_0$, 进而这说明 $E \cap I$ 与 $E \cap I + \{\boldsymbol{x}_0\}$ 相交. 因为 $J$ 本身是以原点为中心, 以 $\delta$ 为边长的开方体, 故 $I$ 的平移矩体 $I + \{\boldsymbol{x}_0\}$ 依旧含有 $I$ 的中心.

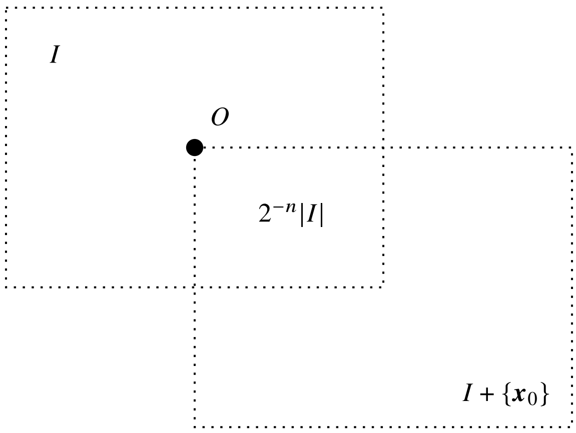


图 2.6: 平移示意图

知

$$m(I \cap (I + \{\boldsymbol{x}_0\})) > 2^{-n}|I|$$

进而

$$m(I \cup (I + \{\boldsymbol{x}_0\})) = |I| + m(I + \{\boldsymbol{x}_0\}) - m(I \cap (I + \{\boldsymbol{x}_0\})) < 2|I| - 2^{-n}|I|$$

现在令 $\lambda = 1 - 2^{-(n+1)}$, 知依旧存在矩体满足上式, 从而

$$m(I \cup (I + \{\boldsymbol{x}_0\})) < 2\lambda|I|$$

但如果 $E \cap I$ 和 $(E \cap I) + \{\boldsymbol{x}_0\}$ 在 $I \cup (I + \{\boldsymbol{x}_0\})$ 不交, 知必有

$$m((E \cap I) \cup (E \cap I + \{\boldsymbol{x}_0\})) = m(E \cap I) + m(E \cap I + \{\boldsymbol{x}_0\}) > 2\lambda|I|$$

得到

$$m(I \cup (I + \{\boldsymbol{x}_0\})) \geq m((E \cap I) \cup (E \cap I + \{\boldsymbol{x}_0\})) > 2\lambda|I|$$

矛盾! 故 $E \cap I$ 与 $(E \cap I) + \{\boldsymbol{x}_0\}$ 必相交, 命题即证. □

### 2.5.2 例子整理

**例题 2.8** $[0,1]$ 中存在正测集 $E$, 使得对 $[0,1]$ 中任一开区间 $I$, 有:

$$0 < m(E \cap I) < m(I).$$

证明

考虑构造. 首先在 [0,1] 中作类 Cantor 集 $H_1 : m(H_1) = \frac{1}{2}$. 然后在 [0,1] 中 $H_1$ 的邻接区间 (即构造 $H_1$ 时挖掉的那些空洞)$\{I_{1j}\}$ 的每个 $I_{1j}$ 中再作类 Cantor 集 $H_{1j} : m(H_{1j}) = \frac{1}{2^2}|I_{1j}|$, 并记 $H_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} H_{1j}$. 然后, 对 $H_1 \cup H_2$ 的邻接区间 $\{I_{2j}\}$ 中的每个 $I_{2j}$, 作类 Cantor 集 $H_{2j} : m(H_{2j}) = \frac{1}{2^3}|I_{2j}|$, 再记 $H_3 = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} H_{2j}$. 据此一直下去, 令 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ 即为所求.

**例题 2.9** 设有定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

且在某个 $E \subset \mathbb{R}, m(E) > 0$ 上有界, 则 $f(x) = cx (x \in \mathbb{R})$, 其中 $c = f(1)$.

证明

首先知对 $r \in \mathbb{Q}$ 有 $f(r) = rf(1)$. 其次, 由 $m(E) > 0$ 知, 存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $U_{\delta_0}(0) \subset E - E$, 再取区间 $I \subset U_{\delta_0}$. 不妨设 $|f(x)| \leq M (x \in E)$. 任取 $x \in I$, 知存在 $x', x'' \in E$, 使得 $x = x' - x''$, 进而:

$$|f(x)| = |f(x') - f(x'')| \leq |f(x')| + |f(x'')| \leq 2M, \quad x \in I$$

设 $I = [a,b]$, 考察 $[0, b-a]$. 若 $x \in [0, b-a]$, 则 $x + a \in I$, 进而由 $f(x) = f(x+a) - f(a), x+a, a \in I$ 知 $|f(x)| \leq 4M, x \in [0, b-a]$. 注意到 $f(x)$ 必为奇函数, 故

$$|f(x)| \leq 4M, \quad x \in [a-b, b-a]$$

已知任取 $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, 均存在有理数 $r$ 使得 $|x - r| < \frac{b-a}{n}$, 进而

$$\begin{aligned} |f(x) - xf(1)| &= |f(x) - f(r) + f(r) - xf(1)| = |f(x-r) + rf(1) - xf(1)| \\ &\leq |f(x-r)| + |r-x|f(1) \leq \frac{|f(n(x-r))|}{n} + \frac{(b-a)f(1)}{n} \leq \frac{4M + (b-a)f(1)}{n} \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 得 $f(x) = xf(1)$. □

### 2.5.3 思考题

**练习 2.15** 设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $m(E) > 0$, 试证明存在 $a > 0$, 使得

$$(E + \{x\}) \cap E \neq \varnothing \quad (|x| < a)$$

证明

由 Steinhaus 定理(2.5.2)知, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $E - E \supset B(0, \delta_0)$. 取 $a = \delta_0$ 即可.

**练习 2.16** 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是可测集, $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$. 若对满足 $|x| < \delta$ 的一切 $x$, 均有 $a + x \in E$ 或 $a - x \in E$, 试证明 $m(E) \geq \delta$.

证明

依题知

$$(-\delta, \delta) \subset (\{a\} + E) \cup (\{a\} - E)$$

这说明

$$m((-\delta, \delta)) = 2\delta = m((\{a\} + E) \cup (\{a\} - E)) \leq m(\{a\} + E) + m(\{a\} - E) = 2m(E) \Longrightarrow m(E) \geq \delta$$

## 2.6 不可测集

**例题 2.10** 设 $\mathbb{Q}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$, 若 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}^n$, 则记为 $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$. 根据该等价关系将 $\mathbb{R}^n$ 划分为一些等价类. 现在根据选择公理, 在每一类中取出一点且只取一点形成点集, 记为 $W$, 则 $W$ 是不可测集.

证明

若 $W$ 是可测集, 则其要么是正测集, 要么是零测集.

如果 $W$ 是正测集, 则根据 Steinhaus 定理(2.5.2)知点集 $W - W$ 中含有球 $B(0, \delta)$, 进而届于 $\mathbb{Q}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠, 知存在

$$\boldsymbol{x} \in (W - W) \cap \mathbb{Q}^n, \quad \boldsymbol{x} \neq 0$$

也即存在 $W$ 中的点 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$, 使得 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$. 但既然 $\boldsymbol{x}$ 本身是有理数, 根据 $W$ 的构造知 $y = z$, 矛盾!

如果 $W$ 是零测集, 作可列个平移集:

$$W + \{\boldsymbol{r}^{(k)}\}, \quad \{\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{r}^{(k)}, \cdots\} = \mathbb{Q}^n$$

既然 $W$ 本身是由不同的 $\mathbb{Q}^n$ 中的元素确定的, 知

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (W + \{\boldsymbol{r}^{(k)}\})$$

因为 $m(W) = 0$, 故 $m(W + \{\boldsymbol{r}^{(k)}\}) = 0$, 故只能有 $m(\mathbb{R}^n) = 0$, 矛盾!

综上, $W$ 不是可测集.

**笔记**

1. [4] 中提到在大多数常用的公理体系下, $\mathbb{R}^n$ 中总是会有不可测的子集, 而这往往都是用选择公理构造出来的. 但有一个版本的集合论允许 $\mathbb{R}^n$ 中全体子集均可测, 但在其上就不成立 Hahn-Banach 定理了.
2. 章末习题阐明, 若 $W$ 是不可测集, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对满足

   $$A \supset W, \quad B \supset W^c$$

   的任意两个可测集 $A$ 与 $B$, 均有

   $$m(A \cap B) \geq \varepsilon_0$$

   这说明 $W$ 与 $W^c$ 中的点缠缠绵绵无绝期, 从另一角度看这也说明不可测集无法凭借可测集从”外包”和”内挤”两个角度来逼近.
3. $\mathbb{R}^n$ 中存在零测集 $E$, 使得 $E + E$ 是不可测集.
4. 在 $[0,1]$ 中存在不可测集 $E$, 使得 $E - E$ 无内点.
5. $(0,1]$ 中存在互不相交的不可测集列 $\{W_n\}$, 使得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_n = (0, 1]$.
6. 设 $(0, +\infty) = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \varnothing$. 若每个 $E_i (i = 1, 2)$ 中的元素对加法运算封闭, 则 $E_1, E_2$ 均为不可测集.

### 2.6.1 思考题

✍ **练习 2.17** 试问: 是否存在可测集 $E \subset [0,1]$, 使得对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $y \in E$, 使得 $x - y \in \mathbb{Q}$?

解 存在, 就取 $E = [0,1]$ 即可.

- 

✍ **练习 2.18** 试作出互不相交的点集列 $\{E_k\}$, 使得

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

解

设 $W \subset (0,1)$ 是本节中构造的不可测集, 取 $\{r_k\} = \mathbb{Q} \cap (-1,1), E_k = W + \{r_k\}$, 首先证明 $E_k$ 互不相交. 这是因为如果存在 $k, k', x, y$ 使得 $x + r_k = y + r_{k'}$, 则 $x - y = r_{k'} - r_k$, 根据本节中的构造方法知在 $W$ 中有 $x = y$, 矛盾!

再说明题设不等式成立, 首先 $m^*(W) > 0$, 其次

- 

✍ **练习 2.19** 试在 [0,1] 中作一不可数集 $W$, 使得 $W - W$ 无内点[2].

✍ **练习 2.20** 设 $W$ 是不可测集, $E$ 是可测集, 试证明 $E \triangle W$ 是不可测集.

证明

用反证法. 如果 $E \triangle W$ 可测, 考虑集合分解:

$$W = ((E \triangle W)^c \cap E) \cup ((E \triangle W) \setminus E)$$

得 $W$ 可测, 矛盾! 命题即证.

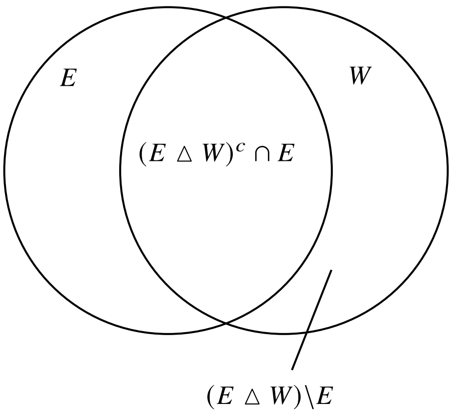


图 2.7: 集合分解示意图

✍ **练习 2.21** 设有点集 $E$. 若对任意的满足

$$F \subset E \subset G$$

的闭集 $F$ 和开集 $G$, 有

$$\sup_F\{m(F)\} < \inf_G\{m(G)\}$$

试证明 $E$ 不可测.

证明

若 $E$ 可测, 则由定理(2.3.2)即得矛盾, 命题得证.

✍ **练习 2.22** 试问: 一族可测集的交集必是可测集吗?

解

[2]这里是不是应该改成不可测集?

不一定, 比方说集族

$$\bigcup_{x\in W}\{x\}$$

其中每个 $\{x\}$ 是可测集, 但该集族本身不可测, 故其补集也不可测, 取补并由 De Morgan 法则即得反例.

## 2.7 连续变换与可测集

**定义 2.7.1**

设有变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 若对任一开集 $G\subset\mathbb{R}^n$, 逆像集

$$T^{-1}(G)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:T(\boldsymbol{x})\in G\}$$

是一个开集, 则称 $T$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续变换.

**定理 2.7.1**

变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换的充分必要条件是, 对任一点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 以及任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<\delta$ 时, 有

$$|T(\boldsymbol{y})-T(\boldsymbol{x})|<\varepsilon.$$

证明

当 $T$ 是连续变换, 任取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\varepsilon>0$, 知 $x\in T^{-1}(B(T(\boldsymbol{x}),\varepsilon))$. 注意到因为 $B(T(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$ 是开集, 故 $T(B(T(\boldsymbol{x}),\varepsilon))$ 是开集, 进而存在 $\delta>0$ 使得

$$B(\boldsymbol{x},\delta)\subset T^{-1}(B(T(\boldsymbol{x}),\varepsilon))$$

这说明, 当 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<\delta$ 时, 有 $\boldsymbol{y}\in T^{-1}(B(T(\boldsymbol{x}),\varepsilon))$, 即 $T(\boldsymbol{y})\in B(T(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$, 也即

$$|T(\boldsymbol{y})-T(\boldsymbol{x})|<\varepsilon.$$

当对任一点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 与任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<\delta\Rightarrow|T(\boldsymbol{y})-T(\boldsymbol{x})|<\varepsilon$, 可设 $G$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 且 $T^{-1}(G)$ 非空. 知任取 $\boldsymbol{x}\in T^{-1}(G)$, 有 $T(\boldsymbol{x})\in G$, 进而存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(T(\boldsymbol{x}),\varepsilon)\subset G$. 针对这个 $\varepsilon$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<\delta$ 时有

$$|T(\boldsymbol{y})-T(\boldsymbol{x})|<\varepsilon\Rightarrow T(y)\in B(T(\boldsymbol{x}),\varepsilon)$$

这说明 $B(\boldsymbol{x},\delta)\subset T^{-1}(G)$, 从而 $T^{-1}(G)$ 是开集. □

**定理 2.7.2**

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换. 若 $K$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则 $T(K)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集.

证明

对 $T(K)$ 的任意开覆盖族 $\{H_i\}$, 令 $G_i=T^{-1}(H_i)$, 则因为 $T$ 是连续变换, 故 $\{G_i\}$ 是 $K$ 的开覆盖族. 因为 $K$ 是紧集, 故 $\{G_i\}$ 存在有限子覆盖 $\{G_{i_t}\}|_{t=1}^k$, 使得

$$K\subset\bigcup_{t=1}^k G_{i_t}$$

进而

$$T(K)\subset\bigcup_{t=1}^k T(G_{i_t})\subset\bigcup_{t=1}^k H_{i_t}$$

从而 $T(K)$ 有有限子覆盖, 其为紧集, 命题得证. □

**推论 2.7.1**

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换, 若 $E$ 是 $F_\sigma$ 集, 则 $T(E)$ 是 $F_\sigma$ 集.

证明

设 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 其中 $A_n$ 是闭集. 要得到紧集, 对每个 $A_n$ 只需考虑

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{B(0,k)}\cap A_n$$

现在有

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{B(0,k)}\cap A_n=\bigcup_{n,k\geq 1}\overline{B(0,k)}\cap A_n$$

对每个 $\overline{B(0,k)}\cap A_n$, 知其为紧集, 从而 $T(\overline{B(0,k)}\cap A_n)$ 也是紧集, 得到

$$T(E)=T(\bigcup_{n,k\geq 1}\overline{B(0,k)}\cap A_n)=\bigcup_{n,k\geq 1}T(\overline{B(0,k)}\cap A_n)$$

进而 $T(E)$ 是 $F_\sigma$ 集. □

**推论 2.7.2**

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换, 若对 $\mathbb{R}^n$ 中的任一零测集 $Z, T(Z)$ 必为零测集, 则对 $\mathbb{R}^n$ 中任一可测集 $E, T(E)$ 必为可测集.

证明

根据定理(2.3.3), 既然 $E$ 可测, 知存在 $F_\sigma$ 集 $K$ 使得 $E=K\cup Z$. 因为

$$T(E)=T(K)\cup T(Z)$$

而 $T(K)$ 是 $F_\sigma$ 集, $T(Z)$ 是零测集, 故 $T(E)$ 是可测集. □

对于线性变换有下述类似于数学分析中体积元换元公式的结论.

**定理 2.7.3**

若 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, $E\subset\mathbb{R}^n$, 则

$$m^*(T(E))=|\det T|\cdot m^*(E).\tag{2.3}$$

证明

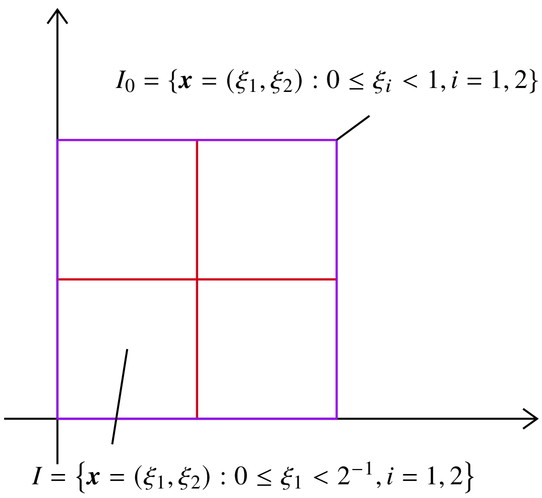


图 2.8: 二进方体分解示意图

首先对二进方体说明这件事, 以求用二进方体逼近证明命题. 记

$$I_0 = \{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : 0 \leq \xi_i < 1, 1 \leq i \leq n\}$$

$$I = \{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : 0 \leq \xi_i \leq 2^{-k}, 1 \leq i \leq n\}$$

显见 $I_0$ 本身是 $2^{nk}$ 个平移集 $I + \{\boldsymbol{x}_j\}(j = 1, 2, \cdots, 2^{nk})$ 的并集, $T(I_0)$ 是 $2^{nk}$ 个 $T(I + \{\boldsymbol{x}_j\})(j = 1, 2, \cdots, 2^{nk})$ 的并集, 且有:

$$m(T(I + \{\boldsymbol{x}_0\})) = m(T(I)), \quad j = 1, 2, \cdots, 2^{nk} \tag{2.4}$$

现在假定式(2.3)对于 $I_0$ 成立, 即

$$m(T(I_0)) = |\det T| \tag{2.5}$$

则由 $I + \{\boldsymbol{x}_j\}$ 之间被可测集分离与式(2.4), 知

$$|\det T| = 2^{nk} m(T(I))$$

因为本身 $m(T(I)) = 2^{-nk}$, 故得

$$m(T(I)) = 2^{-nk} |\det T| = |\det T| m(I)$$

这说明式(2.3)对每个 $I$ 与 $I$ 的平移集都成立, 从而其对可数个互不相交的任意二进方体的并集成立, 进而根据开集构造知对任意开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 成立, 最后应用等测包可知对一般点集都成立.

现在来证明式(2.5)成立. 对于线性变换 $T$, 根据代数的相关知识知其至多能表成下述几个初等变换的复合:

1. 坐标 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 之间的交换;
2. $\xi_1 \to \beta\xi_1, \xi_i \to \xi_i (i = 2, 3, \cdots, n)$;
3. $\xi_1 \to \xi_1 + \xi_2, \xi_i \to \xi_i (i = 2, 3, \cdots, n)$.

分别讨论这三个初等变换:

1. 显见此时 $|\det T| = 1, T(I_0) = I_0$, 从而式(2.5)成立.

2. 矩阵 $T$ 可由单位阵在第一行乘以 $\beta$ 得到, 此时:

$$T(I_0) = \{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : 0 \leq \xi_i < 1 (i = 2, 3, \cdots, n), 0 \leq \xi_1 < \beta(\beta > 0), \beta < \xi_1 \leq 0(\beta < 0)\}$$

从而 $m(T(I_0)) = |\beta|$, 式(2.5)成立.

3. 此时 $\det T = 1$, 有:

$$I(I_0) = \{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : 0 \leq \xi_i < 1 (i \neq 1), 0 \leq \xi_1 - \xi_2 < 1\}.$$

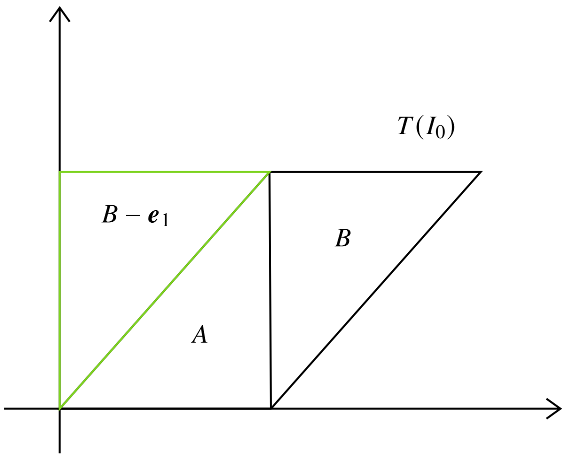


图 2.9: 变换及分解示意图

记

$$A = \{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in T(I_0) : \xi_1 < 1\}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \quad B = T(I_0) \backslash A$$

得

$$A = \{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in I_0 : \xi_2 < \xi_1\}$$

$$B - \boldsymbol{e}_1 = \{\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in I_0 : \xi_1 < \xi_2\}$$

进而

$$m(T(I_0)) = m(A) + m(B) = m(A) + m(B - \boldsymbol{e}_1) = m(I_0) = 1 \det T$$

进而式(2.5)对 $I_0$ 成立.

最后, 不妨设 $T = T_1 \cdot T_2 \cdot \cdots \cdot T_j$, 其中每个 $T_j$ 均是 1.2.3. 其中一种, 由归纳法可知:

$$m^*(T(E)) = m(T_1(T_2(\cdots(T_j(E))\cdots))) = |\det T_1||\det T_2|\cdots|\det T_j|m^*(E) = |\det T|m^*(E)$$

命题即证. □

**笔记** 在 $|\det T| = 0$ 时, $T$ 将 $\mathbb{R}^n$ 变为一个低维的线性子空间, 显然其像集是零测集, 从而依旧有

$$m(T(E)) = |\det T|m(E) = 0, \quad E \subset \mathrm{R}^n$$

**推论 2.7.3**

设 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, 若 $E \in \mathscr{M}$, 则 $T(E) \in \mathscr{M}$, 且

$$m(T(E)) = |\det T|m(E).$$

### 2.7.1 例子整理

**例题 2.11** 若 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性变换, 则 $T$ 是连续变换.

证明

令 $\boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 则对 $\mathbb{R}^n$ 中任意的 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, 有

$$\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \xi_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{e}_n$$

再令 $T(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{x}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 又有

$$T(\boldsymbol{x}) = \xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \xi_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n$$

记 $M = (\sum\limits_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, 得

$$|T(\boldsymbol{x})| \le |\xi_1||\boldsymbol{x}_1| + |\xi_2||\boldsymbol{x}_2| + \cdots + |\xi_n||\boldsymbol{x}_n| \le (\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} = M|\boldsymbol{x}|$$

进而

$$|T(\boldsymbol{y}) - T(\boldsymbol{x})| = |T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})| \le M|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$$

从而其为连续变换. □

**例题 2.12** 若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是可测集, 则将 $E$ 作旋转变换后所成集为可测集, 且测度不变.

**例题 2.13** $\mathbb{R}^2$ 中三角形的测度等于它的面积.

证明

首先显见 $\mathbb{R}^2$ 中任意三角形都是可测集, 由于测度的平移不变性, 不妨设三角形的一个顶点在原点. 记三角形为 $T$, 其面积记为 $|T|$. 因为 $m(T) = m(-T)$, 故经平移后可得 $2m(T) = m(T) + m(-T) = m(P)$, 其中 $P$ 是平行四边

形. 再将 $P$ 中自三角形作旋转或平移, 可将 $P$ 转换为矩形 $Q$, 且有 $m(P) = m(Q) = |P| = 2|T|$, 进而 $m(T) = |T|$. □

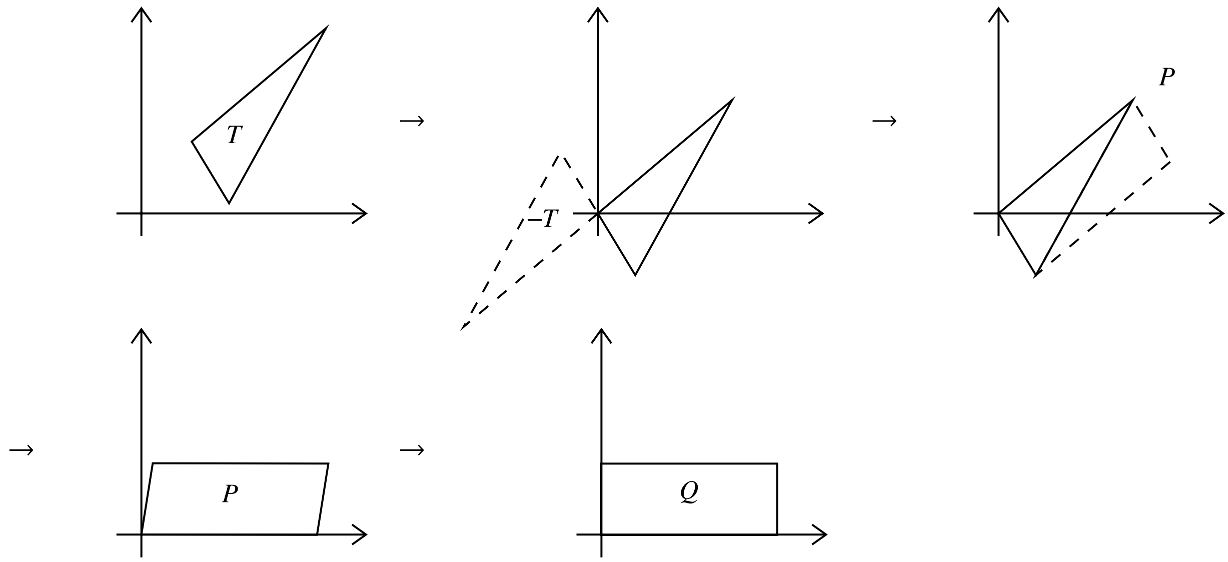


图 2.10: 变换过程示意图

**例题 2.14** 圆盘 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的可测集, 且 $m(D) = \pi r^2$.

证明

记 $P_n, Q_n$ 分别为 $D$ 的内接与外切正 $n$ 边形, 由 $P_n$ 与 $Q_n$ 的可测性知 $D$ 是可测集. 注意到 $P_n \subset D \subset Q_n$, 且

$$m(P_n) = \pi r^2 \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \cos\frac{\pi}{n} \to \pi r^2, \quad n \to \infty$$

$$m(Q_n) = \pi r^2 \frac{\tan(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \to \pi r^2, \quad n \to \infty$$

知 $m(D) = \pi r^2$. □

## 2.8 补充: 可测集的内外测度判别与不可测集的性质

本节旨在进一步阐释不可测集这一节的注中提到的一些性质, 主要参考了 [5].

不同于 [1] 中给出的 Carathéodory 条件, 一些教材中对可测集的定义是基于内外测度的.

**定义 2.8.1**

设 $E$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集, 所有包含 $E$ 的开集的测度的下确界称为 $E$ 的外测度, 并记为 $m^*(E)$:

$$m^*(E) = \inf_{G \supset E} m(G), \quad G\text{是开集}$$

所有含于 $E$ 的闭集的测度的上确界称为 $E$ 的内测度, 并记为 $m_*(E)$:

$$m_*(E) = \sup_{F \subset E} m(F), \quad F\text{是闭集}$$

设 $E$ 是有界集, 当 $m_*(E) = m^*(E)$ 时, 称 $E$ 是 Lebesgue 可测的, 此时 $E$ 的外测度或内测度称为 $E$ 的测度, 并记为 $m(E)$.

如果 $E$ 是 $\mathbb{R}$ 中的无界集, 而且它与任何开区间之交是可测的, 就称 $E$ 是 Lebesgue 可测的, 其测度定义为

$$\lim_{\alpha \to +\infty} m((-\alpha, \alpha) \cap E).$$

♣

关于内测度, [3] 中给出了下述定理.

**定理 2.8.1**

若有界集 $E$ 是有限个或可数个互不相交的集合 $E_k$ 的并

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,\quad E_k\cap E_{k'}=\varnothing, k\neq k'$$

则

$$m_*(E)\geq\sum_{k=1}^{\infty}m_*(E_k)$$

证明

首先考察有限个 $E_k$(设有 $n$ 个集:$E_1,\cdots,E_n$) 的情况, 任取 $\varepsilon>0$, 根据内测度的上确界定义知存在闭集 $F_k$, 满足:

$$F_k\subset E_k, m(F_k)>m_*(E_k)-\frac{\varepsilon}{n},\quad k=1,2,\cdots,n$$

下面的命题阐明了 Carathéodory 条件与上述定义的等价性, 其中可测定义为点集满足 Carathéodory 条件.

**命题 2.8.1**

点集 $E$ 可测的充分必要条件是: 对任给 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G_1,G_2:G_1\supset E,G_2\supset E^c$, 使得 $m(G_1\cap G_2)<\varepsilon$.

证明

当 $E$ 可测, 知存在包含 $E$ 的开集 $K$ 和含于 $E$ 的闭集 $H$, 使得 $m(E\backslash H)<\varepsilon, m(K\backslash E)<\varepsilon$, 由 $E\in\mathscr{M}$ 得到 $m(H)>m(E)-\varepsilon, m(K)<m(E)+\varepsilon$. 取 $G_1=K,G_2=H^c$, 知 $m(G_1)=m(G_2^c)=m(E)$, 且:

$$m(G_1\cap G_2)=m(G_1\backslash G_2^c)=m(G_1)-m(G_2^c)<2\varepsilon$$

上式第二个等号成立是因为 $G_1,G_2^c\in\mathscr{M}$, 进而由 $\varepsilon$ 的任意性即得命题.

当任给 $\varepsilon>0$ 都存在开集 $G_1,G_2$ 满足题设条件, 令 $\varepsilon_k=\frac{1}{k}$, 知对每个 $k$, 都存在开集 $G_{1k}\supset E,G_{2k}\supset E^c$, 使得 $m(G_{1k}\cap G_{2k})<\frac{1}{k}$. 为了表述方便, 不妨就设 $\{G_{1k}\},\{G_{2k}\}$ 都是递减列. 容易验证集合分解:

$$G_{1k}\cap G_{2k}=(G_{1k}\backslash E)\cup(E\backslash G_{2k}^c)$$

得到

$$\max\{m^*(G_{1k}\backslash E),m^*(E\backslash G_{2k}^c)\}\leq m^*((G_{1k}\backslash E)\cup(E\backslash G_{2k}^c))=m(G_{1k}\cap G_{2k})<\frac{1}{k}$$

令 $k\to\infty$, 记 $G_{10}=\lim\limits_{k\to\infty}G_{1k},G_{20}=\lim\limits_{k\to\infty}G_{2k}$, 有

$$\max\{m^*(G_{10}\backslash E),m^*(E\backslash G_{20}^c)\}=0\Rightarrow m^*(G_{10}\backslash E)=m^*(E\backslash G_{20}^c)=0$$

这说明 $G_{10}\backslash E,E\backslash G_{20}^c$ 都是可测集, 又因为 $\mathscr{M}$ 本身是 $\sigma-$ 代数, 故由 $G_{1k},G_{2k}\in\mathscr{M}$ 知 $G_{10},G_{20}\in\mathscr{M}$. 同时注意到对每个 $k$ 都有 $G_{2k}^c\subset E$, 得出 $G_{20}^c\subset E$. 最后根据

$$E=(E\backslash G_{20}^c)\cup G_{20}^c$$

得到 $E\in\mathscr{M}$. □

在构造反例时, 还会用到 Hamel 基的概念.

**定义 2.8.2**

集 $H\subset\mathbb{R}$ 叫作 Hamel 基, 如果对于任一 $x\in\mathbb{R}$, 存在有理数 $\{r_\alpha\}$ 与 $\{h_\alpha\}\subset H$, 使得

$$x=\sum_{\alpha}r_\alpha h_\alpha$$

其中和式有有限项, 且表示唯一.

下面开始讨论不可测集的诸作用与性质, 在此之前还是先给出 **[5]** 中关于不可测集的阐述, 它的构造与 **[1]** 大同小异, 但是通过否定内外测度相等来否定可测性的.

将 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 中的所有点按照下述方法分类: 对两点 $x,y$, 当且仅当 $x-y\in\mathbb{Q}$ 时, 称 $x$ 与 $y$ 属于同一类. 设 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 将 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 中具有形式 $x+r(r\in\mathbb{Q})$ 的点的全体归为一类 $K(x)$. 这样一来, 对每个 $x$, 都有一类 $K(x)$ 与之对应, 且显见 $x\in K(x)$.

下面证明不同的两类 $K(x),K(y)$ 是不相交的. 如果它们相交, 则存在 $z\in K(x)\cap K(y)$, 因而

$$z=x+r_x=y+r_y$$

其中 $r_x,r_y\in\mathbb{Q}$, 进而得到

$$y=x+r_x-r_y$$

这件事说明 $K(x)=K(y)$, 因为对任意的 $t\in K(y)$, 知

$$t=y+r=x+(r_x-r_y+r)=x+r'$$

故 $t\in K(x)$, 得到 $K(y)\subset K(x)$, 同理 $K(x)\subset K(y)$, 矛盾! 故 $K(x),K(y)$ 是不交的两类.

在对 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 作完上述分类后, 在每一类中任意选定一点作为代表元, 这些点的全体记为 $A$, 下面考虑证明 $A$ 是不可测集.

设 $[-1,1]$ 中有理点的全体为 $\{0,r_1,r_2,r_3,\cdots\},r_0=0$, 设 $A$ 经过平移 $\varphi_k(x)=x+r_k$ 得到集合 $A_k$, 显见若 $x\in A$, 则 $\varphi_k(x)\in A_k$, 若 $x\in A_k$, 则 $x-r_k\in A$. 特别地, $A_0=A$. 由 Lebesgue 内外测度的平移不变性, 可设:

$$m_*(A_k)=m_*(A)=\alpha,\quad m^*(A_k)=m^*(A)=\beta$$

首先证明 $\beta>0$, 为此先证

$$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subset\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k$$

这是因为当 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 知 $x$ 必属于上述分类中的某一类, 设该类的代表元为 $x_0$, 则 $x-x_0\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]$, 进而存在 $k_0$ 使得 $x-x_0=r_{k_0}$, 进而 $x\in A_{k_0}$, 上式进而成立.

因为

$$1=m^*([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])\le m^*(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k)\le\sum_{k=0}^{\infty}m^*(A_k)$$

知 $1\le\beta+\beta+\cdots$, 进而至少有 $\beta>0$.

另一方面, 证明 $\alpha=0$. 当 $n\neq m$, 知 $A_n\cap A_m=\varnothing$, 这是因为如果存在 $z\in A_n\cap A_m$, 则知

$$x_n=z-r_n,\quad x_m=z-r_m$$

首先不同, 其次都在 $A$ 内. 既然它们是 $A$ 中两个不同的元, 而 $A$ 本身是不同的类中选一个代表元出来构成的集合, 故不同的元在不同的类中, 也即 $x_n,x_m$ 在不同的类中. 但显然它们只相差一个有理数, 故它们应在同一类中, 矛盾! 故 $A_n\cap A_m=\varnothing$.

显见对任意的 $k$, 都有 $A_k\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$, 知

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$$

从而结合定理(2.8.1)有

$$3=m_*([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}])\ge m_*(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k)\ge\sum_{k=0}^{\infty}m_*(A_k)$$

这说明

$$3\ge\alpha+\alpha+\cdots$$

故只能有 $\alpha=0$.

最后, 因为 $\beta=m^*(A)>0,\alpha=m_*(A)=0$, 故 $m^*(A)>m_*(A)$, 也即 $A$ 不可测.

**命题 2.8.2**

存在一个两两不相交的集列 $\{A_n\}$, 使得 $m^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

证明

设 $\{A_n\}$ 是上述构造中提到的两两不相交的集列: " 设 $A$ 经过平移 $\varphi_k(x) = x + r_k$ 得到集合 $A_k$." 知对每个 $n$, $m^*(A_n) = \beta > 0$, 且 $A_n \subset [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. 进而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, 因而

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le 3$$

又因为本身 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta = +\infty$, 故

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

□

**命题 2.8.3**

存在一个有界的零测集 $E$, 使得 $E + E$ 是不可测集.

证明

在开始证明之前先重述符号约定:

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}, \quad A + \alpha = \{x + \alpha : x \in A\}, \quad \alpha A = \{\aleph x : x \in A\}.$$

用 $H$ 代表包含在区间 [0,1] 中的一个 Hamel 基, 使得 $m(H) = 0$, 进而根据 Hamel 基的定义知每个实数 $x \neq 0$ 可唯一表成形式:

$$x = \sum_{j=1}^{n} r_j h_j, \quad r_j \neq 0 \tag{2.6}$$

其中 $r_i \in \mathbb{Q}, h_j \in H$[3]. 令

$$E_0 = H \cup (-H) \cup \{0\}$$

对非负整数 $n$, 归纳得定义 $E_{n+1}$ 为

$$E_{n+1} = E_n + E_n$$

进而 $E_n$ 是 $E_0$ 中一切最多 $2^n$ 个元素之和所构成的集合. 现在证明存在非负整数 $n_0$, 使得 $m(E_{n_0}) = 0, m^*(E_{n_0+1}) > 0$. 事实上, 令

$$J = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} E_n$$

如果对每个 $n$ 都有 $m(E_n) = 0$, 则由次可加性知 $m(J) = 0$. 但根据 Hamel 基的定义, 任意实数 $x$ 都能写成

$$x = \frac{1}{b}(a_1 h_1 + a_2 h_2 + \cdots + a_n h_n), \quad r_1 = \frac{a_1}{b}, \cdots, r_n = \frac{a_n}{b}, a_1, \cdots, a_n, b \in \mathbb{Z}$$

故当 $2^n \ge |a_1| + \cdots + |a_n|$ 时, 这个和就必可以在 $J$ 中取, 也即

$$x \in \frac{1}{b} E_n \subset J.$$

这说明 $J = \mathbb{R}$, 得到 $m(\mathbb{R}) = 0$, 矛盾! 故并非每个 $E_n$ 都是零测集.

现在令 $n = n_0 + 1$ 是第一个使得 $m^*(E_n) > 0$ 的整数, 下面证明 $E_n$ 必为不可测集. 用反证法, 若 $E_n$ 可测, 由 Steinhaus 定理(2.5.2)知, $E_n$ 的差集

$$D(E_n) = \{x - y : x \in E_n, y \in E_n\}$$

[3] [5] 断言了这个 Hamel 基的存在性, 但并没有具体证明, 其中引用的参考文献也并没有找到.

将包含一个含有原点的开区间 $I = U(0,\delta)$. 进而由 $E_k = -E_k, k \in \mathbb{N}$ 知

$$E_{n_0+2} = E_{n_0+1} + E_{n_0+1} = E_{n_0+1} - E_{n_0+1} = D(E_n)$$

包含开区间 $I$. 注意到 $I$ 本身是一个给定长度的开区间, 所以

$$I + I + \cdots = \mathbb{R}$$

现在说明式(2.6)中的系数 $r_j$ 都可以取成整数. 这是因为任取 $x \in E_0$, 根据 $E_0$ 的结构知 $x$ 形如 $\lambda h, h \in H, \lambda = 0, \pm 1.$, 而根据 Hamel 基的定义知这个表示唯一. 再考虑 $E_1 = E_0 + E_0$, 知 $E_1$ 中的元素均形如 $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2, \lambda_i \in \{0, \pm 1, \pm 2\}, h_i \in H, i = 1, 2$. 再讨论 $E_2$, 类似有:

$$E_2 \subset \{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i h_i : \lambda_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}, h_i \in H, i = 1, 2, 3, 4.\}$$

现在任取 $x \in \mathbb{R}$, 根据 $I + I + \cdots = \mathbb{R}$ 知总存在某个 $E_k$ 使得 $x \in E_k$, 又根据上述讨论知 $x$ 可表示成有限个 $\lambda_i h_i$ 之和, 其中 $\lambda_i \in \mathbb{Z}, h_i \in H$. 但这件事不可能实现, 因为如果取 $h \in H$, 则 $\frac{1}{2}h$ 也应该有表为某个 $\sum \lambda_i h_i, \lambda_i \in \mathbb{Z}, h_i \in H$, 但此时其就有两种不同的表示, 与 Hamel 基的定义相悖! 故只能是 $E_n$ 不可测, 进而 $E = E_{n_0}$ 即为欲求.

# 第三章 可测函数

## 3.1 可测函数的定义及其性质

### 3.1.1 知识梳理

**定义 3.1.1 (可测函数)**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若对于任意的实数 $t$, 点集

$$\{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > t\}(\text{或简写为}\{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}) > t\})$$

是可测集, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E$ 上的可测函数, 或称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上可测.

**定理 3.1.1**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是可测集 $E$ 上的函数, $D$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个稠密集. 若对任意的 $r \in D$, 点集 $\{x : f(x) > r\}$ 都是可测集, 则对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 点集 $\{x : f(x) > t\}$ 也是可测集.

证明

取定任意实数 $t$, 选取 $D$ 中的点列 $\{r_k\}$, 使得

$$r_k \geq t(k = 1, 2, \cdots), \quad \lim_{k\to\infty} r_k = t.$$

知[1]

$$\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x : f(x) > r_k\}$$

因为每个点集 $\{x : f(x) > r_k\}$ 都是可测集, 故 $\{x : f(x) > t\}$ 是可测集. □

**定理 3.1.2**

若 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数, 则下列等式中左端的点集均可测:[a]

1. $\{x : f(x) \leq t\} = E\backslash\{x : f(x) > t\}(t \in \mathbb{R})$;
2. $\{x : f(x) \geq t\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{x : f(x) > t - \frac{1}{k}\}(t \in \mathbb{R})$;
3. $\{x : f(x) < t\} = E\backslash\{x : f(x) \geq t\}(t \in \mathbb{R})$;
4. $\{x : f(x) = t\} = \{x : f(x) \geq t\} \cap \{x : f(x) \leq t\}(t \in \mathbb{R})$;
5. $\{x : f(x) < +\infty\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x : f(x) < k\}$;
6. $\{x : f(x) = +\infty\} = E\backslash\{x : f(x) < +\infty\}$;
7. $\{x : f(x) > -\infty\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x : f(x) > -k\}$;
8. $\{x : f(x) = -\infty\} = E\backslash\{x : f(x) > -\infty\}$.

[a]这些点集可测的证明是很好的关于集合可测性定义的巩固, 但在这里就不赘述了.

笔记 因为对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有:

$$\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x : f(x) > t + \frac{1}{k}\} = E\backslash\{x : f(x) \leq t\} = E\backslash\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x : f(x) < t + \frac{1}{k}\}$$

故定理(3.1.2)中的 1.2.3. 均可以作为可测函数的等价定义.

[1]用相互包含的思路即可验证.

**定理 3.1.3**

1. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $E_1 \cup E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数, 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E_1, E_2$ 上均可测, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E_1 \cup E_2$ 上可测;
2. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上可测, $A$ 是 $E$ 中可测集, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 看做是定义在 $A$ 上的函数在 $A$ 上也是可测的.

证明

1. 只需注意

$$\{\boldsymbol{x} \in E_1 \cup E_2 : f(\boldsymbol{x}) > t\} = \{\boldsymbol{x} \in E_1 : f(\boldsymbol{x}) > t\} \cup \{\boldsymbol{x} \in E_2 : f(\boldsymbol{x}) > t\}, t \in \mathbb{R}$$

即可.

2. 只需注意

$$\{\boldsymbol{x} \in A : f(\boldsymbol{x}) > t\} = A \cap \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > t\}$$

即可. □

**定理 3.1.4 (可测函数的运算性质 1)**

若 $f(x), g(x)$ 是 $E$ 上的实值可测函数, 则下列函数

1. $cf(x)(c \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) + g(x)$;
3. $f(x) \cdot g(x)$

都是 $E$ 上的可测函数.

证明

1. 对于 $t \in \mathbb{R}$, 当 $c > 0$, 则由

$$\{x : cf(x) > t\} = \{x : f(x) > \frac{t}{c}\}$$

知 $cf(x)$ 在 $E$ 上可测; 当 $c < 0$, 则由

$$\{x : cf(x) < t\} = \{x : f(x) < \frac{t}{c}\}$$

知 $cf(x)$ 在 $E$ 上可测; 当 $c = 0$ 时结论显见.

2. 对 $t \in \mathbb{R}$, 由于 $f(x) + g(x) > t$ 正是 $f(x) > t - g(x)$, 考虑下述等式:

$$\{x \in E : f(x) + g(x) > t\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x \in E : f(x) > r_i\} \cap \{x \in E : g(x) > t - r_i\}) \tag{3.1}$$

其中 $\{r_i\}$ 是全体有理数. 下面用证明相互包含的办法证明式(3.1).

任取 $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\{x \in E : f(x) > r_i\} \cap \{x \in E : g(x) > t - r_i\})$, 知存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in \{x \in E : f(x) > r_k\} \cap \{x \in E : g(x) > t - r_k\}$, 进而 $f(x) + g(x) > r_k + t - r_k = t$, 也即 $x \in \{x \in E : f(x) + g(x) > t\}$. 这说明

$$\{x \in E : f(x) + g(x) > t\} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x \in E : f(x) > r_i\} \cap \{x \in E : g(x) > t - r_i\})$$

任取 $x \in \{x \in E : f(x)+g(x) > t\}$, 根据有理数的稠密性知存在 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $f(x)+g(x) > t+r$. 根据 Archimedes 原理, 存在 $r' \in \mathbb{Q}$ 使得

$$r' < f(x) < r' + \frac{r}{2}$$

此时

$$g(x) > t + r - f(x) > t + r - (r' + \frac{r}{2}) = t - r' + \frac{r}{2} > t - r'$$

因为 $\{r_i\}$ 表示全体有理数, 当然存在 $k$ 使得 $r' = r_k$, 从而 $x \in (\{x \in E : f(x) > r_k\} \cap \{x \in E : g(x) > t - r_k\})$, 进而

$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x \in E : f(x) > r_i\} \cap \{x \in E : g(x) > t - r_i\})$. 这说明

$$\{x \in E : f(x) + g(x) > t\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x \in E : f(x) > r_i\} \cap \{x \in E : g(x) > t - r_i\})$$

故式(3.1)成立. 现在 $\{x \in E : f(x) > r_i\}, \{x \in E : g(x) > t - r_i\}, i = 1, 2, \cdots$ 都可测, 故 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(\{x \in E : f(x) > r_i\} \cap \{x \in E : g(x) > t - r_i\})$ 可测, 也即 $\{x \in E : f(x) + g(x) > t\}$ 可测, 命题得证.

3. 首先证明 $f^2(x)$ 在 $E$ 上可测, 这是因为对于 $t \in \mathbb{R}$, 有:

$$\{x \in E : f^2(x) > t\} = \begin{cases} E, & t < 0 \\ \{x \in E : f(x) > \sqrt{t}\} \cup \{x \in E : f(x) < -\sqrt{t}\}, & t \geq 0 \end{cases}$$

又因为

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2)$$

而根据前述结论知 $f(x) + g(x), f(x) + (-g(x))$ 均可测, 故 $f(x) \cdot g(x)$ 可测. □

**推论 3.1.1**

定理(3.1.4)中的运算性质对于取广义实值的可测函数依旧成立.

**定理 3.1.5 (可测函数的运算性质 2)**

若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列, 则下列函数

1. $\sup\limits_{k \geq 1}\{f_k(x)\}$;
2. $\inf\limits_{k \geq 1}\{f_k(x)\}$;
3. $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} f_k(x)$;
4. $\underline{\lim\limits_{k \to \infty}} f_k(x)$

都是 $E$ 上的可测函数.

证明

1. 根据上确界的定义本身有

$$\{x \in E : \sup_{k \geq 1}\{f_k(x)\} > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in E : f_k(x) > t\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

故因为 $\{x \in E : f_k(x) > t\}$ 可测, 所以 $\{x \in E : \sup\limits_{k \geq 1}\{f_k(x)\} > t\}$ 可测.

2. 注意到 $\inf\limits_{k \geq 1}\{f_k(x)\} = -\sup\limits_{k \geq 1}\{-f_k(x)\}$, 从而由 $\sup\limits_{k \geq 1}\{-f_k(x)\}$ 可测知 $\inf\limits_{k \geq 1}\{f_k(x)\}$ 可测.

3. 注意到 $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} f_k(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{k \geq n} f_k(x)$, 而 $\sup\limits_{k \geq n} f_k(x)$ 关于 $n$ 是递减的, 故其有极限 (常数或 $-\infty$), 且 $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{k \geq n} f_k(x) = \inf\limits_{n \geq 1}(\sup\limits_{k \geq n} f_k(x))$. 已经有 $\sup\limits_{k \geq n} f_k(x)$ 可测, 故 $\inf\limits_{n \geq 1}(\sup\limits_{k \geq n} f_k(x)) = \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} f_k(x)$ 可测.

4. 注意到 $\underline{\lim\limits_{k \to \infty}} f_k(x) = -\overline{\lim\limits_{k \to \infty}}(-f_k(x))$, 而 $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}}(-f_k(x))$ 可测, 故 $\underline{\lim\limits_{k \to \infty}} f_k(x)$ 可测. □

**推论 3.1.2**

若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列, 且有

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in E$$

则 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数.

这个推论说明可测函数空间是完备空间.

**定义 3.1.2 (几乎处处)**

设有一个与集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 有关的命题 $P(\boldsymbol{x})$. 若除了 $E$ 中的一个零测集以外, $P(\boldsymbol{x})$ 皆为真, 则称 $P(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上几乎处处是真的, 并简记为 $P(\boldsymbol{x})$, a.e. $\boldsymbol{x} \in E$. ♣

**定义 3.1.3 (几乎处处相等)**

设 $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若有

$$m(\{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}) = 0,$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 与 $g(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上几乎处处相等, 也称为 $f(\boldsymbol{x})$ 与 $g(\boldsymbol{x})$ 是对等的, 记为 $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$, a.e. $\boldsymbol{x} \in E$. ♣

**定义 3.1.4 (几乎处处有限)**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若有

$$m(\{\boldsymbol{x} \in E : |f(\boldsymbol{x})| = +\infty\}) = 0$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上是几乎处处有限的, 并记为

$$|f(\boldsymbol{x})| < \infty, \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in E.$$

♣

**笔记** $|f(\boldsymbol{x})| < +\infty$, a.e. $\boldsymbol{x} \in E$ 与 $|f(\boldsymbol{x})| < M$, a.e. $\boldsymbol{x} \in E$ 并不是同一个概念. 后者称为几乎处处有界, 而有界蕴含了有限, 反之不然.

**定理 3.1.6**

设 $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数, $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E$ 上的可测函数. 若 $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$, a.e. $\boldsymbol{x} \in E$, 则 $g(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上可测. ♡

证明

令 $A = \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}$, 则依题 $m(A) = 0$, 进而 $E \backslash A$ 是可测集. 任取 $t \in \mathbb{R}$, 有:

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{x} \in E : g(\boldsymbol{x}) > t\} &= \{\boldsymbol{x} \in E \backslash A : g(\boldsymbol{x}) > t\} \cup \{\boldsymbol{x} \in A : g(\boldsymbol{x}) > t\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in E \backslash A : f(\boldsymbol{x}) > t\} \cup \{\boldsymbol{x} \in A : g(\boldsymbol{x}) > t\}\end{aligned}$$

因为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E \backslash A$ 上可测, 故 $\{\boldsymbol{x} \in E \backslash A : f(\boldsymbol{x}) > t\}$ 可测. 因为 $m^*(\{\boldsymbol{x} \in A : g(\boldsymbol{x}) > t\}) \leq m(A) = 0$, 故 $\{\boldsymbol{x} \in A : g(\boldsymbol{x}) > t\}$ 是零测集, 其进而可测. 从而 $\{\boldsymbol{x} \in E : g(\boldsymbol{x}) > t\}$ 可测, 也即 $g(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上可测. □

上述定理表明改变零测集上的值并不影响函数的可测性.

**定理 3.1.7 (局部有界化)**

设 $0 < m(A) < +\infty$, $f(\boldsymbol{x})$ 是 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 且 $0 < f(x) < +\infty$, a.e. $\boldsymbol{x} \in A$, 则对任给的 $\delta : 0 < \delta < m(A)$, 存在 $B \subset A$ 以及自然数 $k_0$, 使得

$$m(A \backslash B) < \delta, \frac{1}{k_0} \leq f(\boldsymbol{x}) \leq k_0, \quad \boldsymbol{x} \in B.$$

♡

证明

记 $A_k = \{\boldsymbol{x} \in A : \frac{1}{k} \leq f(\boldsymbol{x}) \leq k\} (k = 1, 2, \cdots), Z_1 = \{\boldsymbol{x} \in A : f(\boldsymbol{x}) = 0\}, Z_2 = \{\boldsymbol{x} \in A : f(\boldsymbol{x}) = +\infty\}$, 易知 $m(Z_1) = m(Z_2) = 0$, 且

$$A = (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cup Z_1 \cup Z_2, A_k \subset A_{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

这说明

$$\lim_{k\to\infty} m(A_k) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq m(A) = m((\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cup Z_1 \cup Z_2) \leq m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) + m(Z_1) + m(Z_2) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$$

也即 $m(A_k) \to m(A), k \to \infty$, 进而根据极限定义与可测性知存在 $k_0$ 使得 $m(A \backslash A_{k_0}) < \delta$. 取 $B = A_{k_0}$ 即得欲证. □

**定义 3.1.5 (简单函数)**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数. 若

$$\{y : y = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in E\}$$

是有限集, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E$ 上的简单函数.

♣

设 $f(x)$ 是 $E$ 上的简单函数, 若

$$E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i, E_i \cap E_j = \varnothing, f(x) = c_i, x \in E_i, i, j = 1, 2, \cdots, p, i \neq j$$

则有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in E.$$

当上式中的每个 $E_i$ 是矩体 (包括无限大矩体) 时, 称 $f(x)$ 是阶梯函数. 当每个 $E_i$ 都是可测集时, 称 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测简单函数.

**定理 3.1.8 (简单函数逼近定理)**

1. 若 $f(x)$ 是 $E$ 上的非负可测函数, 则存在非负可测的简单函数渐升列:

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots$$

使得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in E;$$

2. 若 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数, 则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, 使得 $|\varphi_k(x)| \leq |f(x)|$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in E$$

若 $f(x)$ 还是有界的, 则上述收敛是一致的.

♡

证明

1. 对任意的自然数 $k$, 将 $[0, k]$ 划分成 $k2^k$ 等分, 并记

$$E_{k,j} = \{x \in E : \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\}$$

$$E_k = \{x \in E : f(x) \geq k\}, \quad j = 1, 2, \cdots, k2^k, k = 1, 2, \cdots$$

作函数列

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^k}, & x \in E_{k,j} \\ k, & x \in E_k \end{cases}, \quad j = 1, 2, \cdots, k2^k, k = 1, 2, \cdots$$

根据前面的讨论, 可以把 $\varphi_k(x)$ 写成

$$\varphi_k(x) = k\chi_{E_k}(x) + \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_{k,j}}(x), \quad x \in E$$

显见每个 $\varphi_k$ 都是非负可测简单函数, 再证明 $\varphi_{k+1}(x) \geq \varphi_k(x)$[2], 这件事只需对 $f(x) < k$ 的情况讨论, 此时如

[2] 从几何上看这件事类似于 Darboux 下积分的讨论.

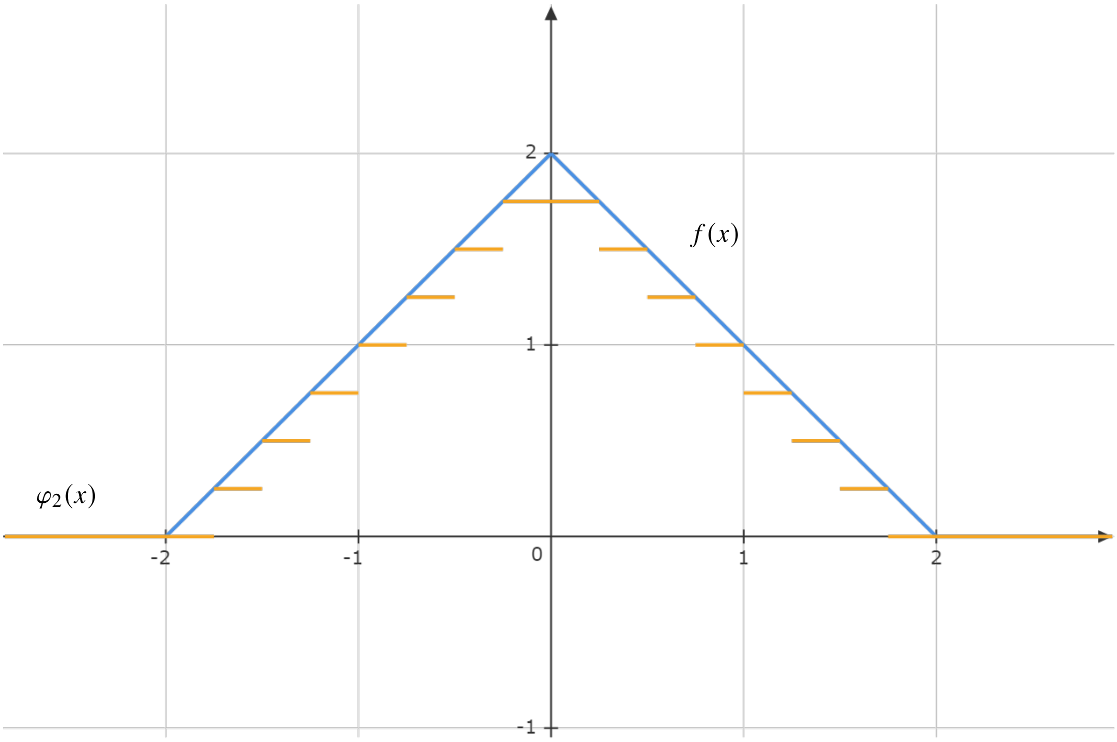


图 3.1: $k=2$ 时此构造的示意图

果给定 $x_0$, 如果有:

$$\frac{j-1}{2^k} \le f(x) < \frac{j}{2^k}, \quad \frac{j'-1}{2^{k+1}} \le f(x) < \frac{j'}{2^{k+1}}$$

则自然有

$$\frac{j'-1}{2^{k+1}} \ge \frac{j-1}{2^k} \Rightarrow j' \ge 2j-1$$

从而

$$\varphi_{k+1}(x_0) = \frac{j'-1}{2^{k+1}} \ge \frac{2j-1-1}{2^{k+1}} = \frac{j-1}{2^k} = \varphi_k(x_0)$$

又显见对任意的 $k$ 都有 $\varphi_k(x) \le f(x)$, 得到

$$\varphi_k(x) \le \varphi_{k+1}(x) \le f(x), \quad \varphi_k(x) \le k$$

现在, 对任意的 $x \in E$, 若 $f(x) \le M$, 则当 $k > M$ 时, 有:

$$0 \le f(x) - \varphi_k(x) \le 2^{-k}, \quad x \in E$$

自然得到 $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$. 而若 $f(x) = +\infty$, 则 $\varphi_k(x) = k(k=1,2,\cdots)$, 进而依旧有 $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = +\infty = f(x)$, 命题得证.

2. 记 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, 根据 1. 知存在可测简单函数列 $\{\varphi_k^{(1)}(x)\}$ 与 $\{\varphi_k^{(2)}(x)\}$, 满足

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k^{(1)}(x) = f^+(x), \lim_{k\to\infty} \varphi_k^{(2)}(x) = f^-(x), \quad x \in E.$$

显见 $\varphi_k^{(1)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x)$ 是可测简单函数, 且

$$\lim_{k\to\infty} [\varphi_k^{(1)}(x) = \varphi_k^{(2)}(x)] = f^+(x) - f^-(x) = f(x), \quad x \in E.$$

当 $f(x)$ 在 $E$ 上有界, 设 $|f(x)| \le M, x \in E$, 则当 $k > M$ 时, 有:

$$\sup |f^+(x) - \varphi_k^{(1)}(x)| \le \frac{1}{2^k}$$
$$\sup |f^-(x) - \varphi_k^{(2)}(x)| \le \frac{1}{2^k}, \quad x \in E$$

从而 $\varphi_k^{(1)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x) \rightrightarrows f(x), x \in E$. □

**定义 3.1.6 (支集)**

对于定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(\boldsymbol{x})$, 称点集

$$\{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}) \ne 0\}$$

的闭包为 $f(\boldsymbol{x})$ 的支集, 记为 $\mathrm{supp}(f)$. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 的支集是有界 (即支集是紧集) 的, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 是具有紧支集的函数. ♣

**推论 3.1.3**

定理(3.1.8)中所说的可测简单函数列中的每一个均可取成具有紧支集的函数[a].

[a]这里的构造思想在前面也出现过, 是个有用的构造紧集的思路. ♡

证明

对每个 $k$, 令 $g_k(x) = \varphi_k(x)\chi_{B(0,k)}(x)(x \in E)$, 则 $g_k(x)$ 仍是可测简单函数, 且具有紧支集. 如果 $x \in E$ 给定, 则存在 $k_0$ 使得 $k \ge k_0$ 时, $x \in B(0,k)$, 此时 $g_k(x) = \varphi_k(x)$, 进而

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in E.$$

□

**推论 3.1.4**

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 则存在函数值都是有理数的函数列 $\{f_n(x)\}$, 使得 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛且递增于 $f(x)$. ♡

证明

作

$$E_{k,n} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

且令

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k2^{-n}\chi_{E_{k,n}}(x)$$

可以验证此即欲求. □

### 3.1.2 例子整理

**例题 3.1** 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证明

对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 既然 $f(x)$ 单调, 知点集 $\{x \in [a,b] : f(x) > t\}$ 必属于下述三种情况之一: 区间, 单点集或空集, 而这三种集合都是可测集, 故 $\{x \in [a,b] : f(x) > t\}$ 是可测集, 也即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测. □

**例题 3.2** 若 $E \in \mathscr{M}$, 则 $\chi_E(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

**例题 3.3(函数的正部和负部)** 设 $f(x)$ 是定义在 $E$ 上的广义实值函数, 令

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

并分别称它们为 $f(x)$ 的正部和负部. 显见

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

若 $f(x)$ 在 $E$ 上可测, 则 $f^+(x), f^-(x)$ 都是 $E$ 上的可测函数, 反之亦然. 此外, 因为

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

故 $f(x)$ 在 $E$ 上可测时, $|f(x)|$ 也在 $E$ 上可测, 但反之不然. 反例如 $W$ 是不可测集时令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in W \\ -1, & x \in \mathbb{R} \backslash W \end{cases}$$

**例题 3.4** 若 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的实值函数, 且对固定的 $x \in \mathbb{R}$, $f(x,y)$ 是 $y \in \mathbb{R}$ 上的连续函数; 对固定的 $y \in \mathbb{R}$, $f(x,y)$ 是 $x \in \mathbb{R}$ 上的可测函数, 则 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数.

证明

对每个 $n = 1, 2, \cdots$, 作函数:

$$f_n(x,y) = f(x, \frac{k}{n}), \quad \frac{k-1}{n} < y \le \frac{k}{n}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x,y) < t\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x, \frac{k}{n}) < t\} \times (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$$

因为对每个固定的 $k, n$, 知 $f(x, \frac{k}{n})$ 是可测函数, 从而 $\{x \in \mathbb{R} : f(x, \frac{k}{n}) < t\}$ 可测, 又显见 $(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ 可测, 故 $\{x \in \mathbb{R} : f(x, \frac{k}{n}) < t\} \times (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ 可测[3]. 故 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x,y) < t\}$ 可测, 也即 $f_n(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数. 又依题

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

命题即证. □

**例题 3.5** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集. 若 $f \in C(E)$, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E$ 上的可测函数.

### 3.1.3 思考题

✍ **练习 3.1** 设 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上. 若 $f^2(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上可测, 且 $\{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > 0\}$ 是可测集, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上可测.

证明

依题知任取 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\{\boldsymbol{x} \in E : f^2(\boldsymbol{x}) > t\}$$

是可测集. 届于 $E$ 本身是可测集, 只需讨论 $t \ge 0$ 的情况即可. 注意到

$$\{\boldsymbol{x} \in E : f^2(\boldsymbol{x}) > t\} = \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > \sqrt{t}\} \cup \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) < -\sqrt{t}\}$$

从而至少对任意正实数 $u$, 令 $t = u^2$, 有:

$$\{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > u\} = (\{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > \sqrt{t}\} \cup \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) < -\sqrt{t}\}) \cup \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > 0\}$$

进而其为可测集. 而当 $u < 0$, 届于 $f^2(\boldsymbol{x})$ 是可测函数, 另有

$$\{\boldsymbol{x} \in E : f^2(\boldsymbol{x}) < t\} = \{\boldsymbol{x} \in E : -\sqrt{t} < f(\boldsymbol{x}) < \sqrt{t}\}$$

[3]这句话在这里并不显见, 其成立需要首先定义乘积测度空间, 而乘积测度空间的详细定义在 [6] 中又需要 Lebesgue 积分理论作铺垫, 故在这里先按下不表, 只需知道可测集的 Cartesian 积仍为可测集的事实.

是可测集. 现在令 $t = -u^2$, 得到

$$\{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > u\} = \{\boldsymbol{x} \in E : -\sqrt{t} < f(\boldsymbol{x}) < \sqrt{t}\} \cup \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) > 0\}$$

进而其为可测集, 命题即证.

**练习 3.2** 记 $\mathscr{F}$ 为 $(0,1)$ 上的一个连续函数族, 则函数

$$g(x) = \sup_{f \in \mathscr{F}} \{f(x)\}, \quad h(x) = \inf_{f \in \mathscr{F}} \{f(x)\}$$

是 $(0,1)$ 上的可测函数.

证明

任取 $t \in \mathbb{R}$, 考虑

$$\{x \in (0,1) : \sup_{f \in \mathscr{F}} \{f(x)\} > t\}$$

根据严格不等号, 任取上述集合中的 $x_0$, 知至少存在 $f_0(x) \in \mathscr{F}$, 使得 $f_0(x_0) > t$. 因为 $f_0(x)$ 连续, 故存在 $U(x_0) \subset (0,1)$, 使得任取 $x \in U(x_0)$, 总有 $f_0(x) > t$, 也即 $U(x_0) \subset \{x \in (0,1) : \sup_{f \in \mathscr{F}} \{f(x)\} > t\}$. 这说明上述集合是开集, 进而是可测集, 从而 $g(x)$ 可测. $f(x)$ 的可测性类似可证.

**练习 3.3** 若 $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数列, 则 $f_k(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上收敛的点集是可测集.

证明

若 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $f_k(\boldsymbol{x})$ 的收敛点, 则

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall p, q > N (|f_p(\boldsymbol{x}) - f_q(\boldsymbol{x})| < \varepsilon)$$

这说明

$$\{\boldsymbol{x} \in E : f_k(\boldsymbol{x})\text{收敛}\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{p,q>N} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\boldsymbol{x} \in E : |f_p(\boldsymbol{x}) - f_q(\boldsymbol{x})| < \frac{1}{n}\}$$

故只需证明对每组 $(p,q,n)$, $\{\boldsymbol{x} \in E : |f_p(\boldsymbol{x}) - f_q(\boldsymbol{x})| < \frac{1}{n}\}$ 可测即可. 注意到

$$|f_p(\boldsymbol{x}) - f_q(\boldsymbol{x})| < \frac{1}{n} \Leftrightarrow f_q(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{n} < f_p(\boldsymbol{x}) < f_q(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}$$

这说明

$$\{\boldsymbol{x} \in E : |f_p(\boldsymbol{x}) - f_q(\boldsymbol{x})| < \frac{1}{n}\} = \{\boldsymbol{x} \in E : f_q(\boldsymbol{x}) < f_p(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\} \cup \{\boldsymbol{x} \in E : f_p(\boldsymbol{x}) < f_q(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\}$$

而

$$\{\boldsymbol{x} \in E : f_q(\boldsymbol{x}) < f_p(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{\boldsymbol{x} \in E : f_q(\boldsymbol{x}) < r\} \cap \{\boldsymbol{x} \in E : r < f_p(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\})$$

$$\{\boldsymbol{x} \in E : f_p(\boldsymbol{x}) < f_q(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{\boldsymbol{x} \in E : f_p(\boldsymbol{x}) < r\} \cap \{\boldsymbol{x} \in E : r < f_q(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\})$$

而 $\{\boldsymbol{x} \in E : f_q(\boldsymbol{x}) < r\}, \{\boldsymbol{x} \in E : f_p(\boldsymbol{x}) < r\}, \{\boldsymbol{x} \in E : r < f_p(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\}, \{\boldsymbol{x} \in E : r < f_q(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\}$ 均可测, 且上述运算均只有可数个, 故 $\{\boldsymbol{x} \in E : f_k(\boldsymbol{x})\text{收敛}\}$ 可测, 命题得证.

**练习 3.4** 设 $f(x)$ 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上可测, $G$ 和 $F$ 各为 $\mathbb{R}$ 中的开集和闭集, 则点集

$$E_1 = \{x \in E : f(x) \in G\}, \quad E_2 = \{x \in E : f(x) \in F\}$$

是可测集.

证明

根据开集构造, 知 $G$ 是可数个互不相交的开区间之并, 设 $G = \bigcup_k (a_k, b_k)$, 进而有

$$E_1 = \bigcup_k \{x \in E : f(x) \in (a_k, b_k)\}$$

因为 $f(x)$ 可测, 故每个 $\{x \in E : f(x) \in (a_k, b_k)\}$ 均可测, 从而 $E_1$ 可测. 要证明 $E_2$ 可测, 注意到

$$\{x \in E : f(x) \in F\} = E \backslash \{x \in E : f(x) \in F^c\}$$

而 $\{x \in E : f(x) \in F^c\}$ 可测, 命题即证.

**练习 3.5** 设 $\{E_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 是互不相交的可测集列. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E_k(k = 1, 2, \cdots)$ 上是可测的, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 上也是可测的.

证明

任取 $t \in \mathbb{R}$, 知

$$\{\boldsymbol{x} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k : f(\boldsymbol{x}) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\boldsymbol{x} \in E_k : f(\boldsymbol{x}) > t\}$$

而 $f(\boldsymbol{x})$ 在每个 $E_k$ 上可测, 故每个 $\{\boldsymbol{x} \in E_k : f(\boldsymbol{x}) > t\}$ 均可测, 进而 $\{\boldsymbol{x} \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k : f(\boldsymbol{x}) > t\}$ 可测, 命题即证.

**练习 3.6** 设 $f \in C([a, b])$. 若有定义在 $[a, b]$ 上的函数 $g(x) : g(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a, b]$, 试问: $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上必是几乎处处连续的吗?

解

不一定, 比如

$$f(x) \equiv 1, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

**练习 3.7** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数, 试问是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得

$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}?$$

解

不一定, 譬如对 $f(x) = \tan x$ 就找不到这样的 $g(x)$.

## 3.2 可测函数列的收敛

### 3.2.1 知识梳理

**定义 3.2.1 (几乎处处收敛)**

设 $f(\boldsymbol{x}), f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_k(\boldsymbol{x}), \cdots$ 是定义在点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若存在 $E$ 中的点集 $Z$, 有 $m(Z) = 0$ 及

$$\lim_{k \to \infty} f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad x \in E \backslash Z$$

则称 $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(\boldsymbol{x})$, 并记为

$$f_k(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x}), \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in E$$

♣

显见如果 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列, 则 $f(x)$ 也是 $E$ 上的可测函数.

**引理 3.2.1**

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < +\infty$. 若 $f_k(x) \to f(x)$, a.e. $x \in E$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 令

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

有

$$\lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = 0.$$

证明

给定 $\varepsilon > 0$, 注意到 $\bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)$ 是递减集列, 从而

$$\lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = m(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon))$$

对于 $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)$, 其代表满足下述命题的 $x$ 所构成的点集: 对任意的 $j \in \mathbb{N}$, 总存在 $k \geq j$, 使得

$$|f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

从而这样的 $x$ 至少不是收敛点, 进而若记不收敛点所构成的集合为 $Z$, 则

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon) \subset Z \Rightarrow m(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)) \leq m^*(Z) = 0$$

命题进而得证. □

概率论中也有对应的版本.

**定理 3.2.1**

随机变量 $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$ 的充要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\bigcup_{n=k}^{\infty}[|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon]\} = 0.$$

下面的 Egorov 定理把可测函数列收敛的非一致性大部分一致化了, 在后面也会提到这个工作的重要性.

**定理 3.2.2 (Egorov 定理)**

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < +\infty$. 若 $f_k(x) \to f(x)$ a.e. $x \in E$, 则对任给的 $\delta > 0$, 存在 $E$ 的可测子集 $E_\delta : m(E_\delta) \leq \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E \backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明

由引理(3.2.1)知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 有:

$$\lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = 0$$

从而可以取正数列 $\frac{1}{i}(i = 1, 2, \cdots)$, 则对任给的 $\delta > 0$ 及每个 $i$, 都存在 $j$, 使得 $m(\bigcup\limits_{k=j_i}^{\infty} E_k(\frac{1}{i})) < \frac{\delta}{2^i}$. 令 $E_\delta = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k(\frac{1}{i})$, 有

$$m(E_\delta) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k(\frac{1}{i})) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta$$

现在证明在点集

$$E\backslash E_\delta = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=j_i}^{\infty}\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i}\}$$

上, $\{f_k(x)\}$ 是一致收敛于 $f(x)$ 的. 任取 $\varepsilon > 0$, 总存在 $i$ 使得 $\frac{1}{i} < \varepsilon$, 进而对一切 $x \in E \backslash E_\delta$, 当 $k \geq j_i$ 时都有

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i} < \varepsilon$$

这说明 $f_k(x) \rightrightarrows f(x), x \in E \backslash E_\delta$. □

笔记

1. Egorov 定理中的条件 $m(E) < +\infty$ 不能去掉. 反例如可测函数列

$$f_n(x) = \chi_{(0,n)}(x), \quad n = 1, 2, \cdots, x \in (0, +\infty).$$

它在 $(0, +\infty)$ 上点态意义下处处收敛于 $f(x) \equiv 1$, 但显见并不一致收敛于 $f(x)$.
不过, 对于 $m(E) = +\infty$ 的情形, 定理的结论可以陈述为: 对任给的 $M > 0$, 总存在 $E_M : E_M \subset E, m(E_M) > M$, 使得 $f_n(x)$ 在 $E_M$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2. 章末习题阐明, 若 $\{f_n(x)\}$ 及 $f(x)$ 均是 $E$ 上几乎处处有限可测函数, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, a.e. $x \in E$, 则存在可测集列 $\{E_i\} : E_i \subset E (i \in \mathbb{N}), m(E \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$, 且 $f_n(x)$ 在每个 $E_i$ 上都一致收敛于 $f(x)$.

**定义 3.2.2 (依测度收敛)**

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

笔记 几乎处处有限 $\Rightarrow m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0, k = 1, 2, \cdots$.

下面的定理说明依测度收敛的极限函数在函数对等 (即几乎处处) 的意义下唯一.

**定理 3.2.3**

若 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上同时依测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对等.

证明
从依测度收敛知对 a.e. $x \in E$, 有

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - g(x)|$$

故对任给的 $\varepsilon > 0$, 在除去一个零测集的情况下, 当 $|f(x) - g(x)| > \varepsilon$ 时, 不能同时出现 $|f(x) - f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $|f_k(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, 这说明

$$\{x \in E : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \subset \{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in E : |g(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

但根据依测度收敛的定义, 对任给的 $\varepsilon' > 0$ 有:

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon'\}) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - g(x)| > \varepsilon'\}) = 0$$

故

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in E : |g(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}) = 0$$

这说明 $\forall \varepsilon > 0, m(\{x \in E : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0$, 由 $\varepsilon$ 的任意性即知 $f(x) = g(x)$, a.e. $x \in E$. □

下面的定理阐明了依测度收敛和几乎处处收敛的关系.

**定理 3.2.4**

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数列, 且 $m(E) < +\infty$. 若 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于几乎处处有限的函数 $f(x)$, 则 $f_k(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$(反之不然).

证明

注意到题设满足引理(3.2.1)的条件, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

进而

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

此即 $f_k(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$. □

**定理 3.2.5**

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$ 且 $m(E_\delta) < \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上 a.e. 收敛于 $f(x)$.

证明

给定 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, 由条件知存在 $E_{\delta_n} \subset E$ 且 $m(E_{\delta_n}) < \delta_n$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\backslash E_{\delta_n}$ 上一致收敛于 $f(x)$. 根据一致收敛的定义又知道存在 $K > 0$, 使得当 $k \geq K$ 时有

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in E\backslash E_{\delta_n}$$

这说明

$$\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset E_{\delta_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

下面证明

$$\lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

这是因为当 $k$ 足够大 (至少大于 $K$) 时:

$$\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset E_{\delta_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

从而

$$m(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq m(E_{\delta_n}) = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

进而只能有

$$m(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

故

$$\lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

由引理(3.2.1)即得命题. □

**定义 3.2.3 (依测度 Cauchy 列)**

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数列, 若对任给的 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ j\to\infty}} m(\{x\in E:|f_k(x)-f_j(x)|>\varepsilon\})=0$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 为 $E$ 上的依测度 Cauchy(基本) 列.

**定理 3.2.6**

若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的依测度 Cauchy 列, 则在 $E$ 上存在几乎处处有限的可测函数 $f(x)$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

证明

根据条件, 对每个 $i\in\mathbb{N}$, 可取 $k_i$, 使得当 $l,j\geq k_i$ 时有

$$m(\{x\in E:|f_l(x)-f_j(x)|\geq\frac{1}{2^i}\})<\frac{1}{2^i}$$

不妨设 $k_i<k_{i+1}(i=1,2,\cdots)$, 令

$$E_i=\{x\in E:|f_{k_i}(x)-f_{k_{i+1}}(x)|\geq\frac{1}{2^i}\},\quad i=1,2,\cdots$$

则 $m(E_i)<\frac{1}{2^i}$. 现在研究 $\{E_i\}$ 的上限集 $S=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=j}^{\infty}E_i$, 易知 $m(S)=0$. 若 $x\notin S$, 则存在 $j$, 使得 $x\in E\backslash\bigcup\limits_{i=j}^{\infty}E_i=\bigcap\limits_{i=j}^{\infty}(E\backslash E_i)$, 此即

$$|f_{k_i}(x)-f_{k_{i+1}}(x)|<\frac{1}{2^i},\quad x\notin S, i\geq j$$

这说明当 $l\geq j$ 时:

$$\sum_{i=l}^{\infty}|f_{k_{i+1}}(x)-f_{k_i}(x)|\leq\sum_{i=l}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{l-1}}$$

这说明级数 $f_{k_1}(x)+\sum\limits_{i=1}^{\infty}[f_{k_{i+1}}(x)-f_{k_i}(x)]$ 在 $E\backslash S$ 上绝对收敛, 又因为 $m(S)=0$, 故 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛, 设其极限函数为 $f(x)$, 则知 $f(x)$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数.

下面证明 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 这是因为 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E\backslash\bigcup\limits_{i=j}^{\infty}E_i$ 上是一致收敛于 $f(x)$ 的. 因为

$$m(\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i)<\frac{1}{2^{j-1}}$$

故 $f(x)$ 与 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E$ 上满足定理(3.2.5)的条件, 故 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

最后证明 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 这是因为

$$m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})\leq m(\{x\in E:|f_k(x)-f_{k_i}(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\})+m(\{x\in E:|f_{k_i}(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\})$$

当 $i\to\infty,k\to\infty$, 由题目原本的条件知 $m(\{x\in E:|f_k(x)-f_{k_i}(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\})\to 0$, 由上面推出的几乎处处收敛知 $m(\{x\in E:|f_{k_i}(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\})\to 0$, 故

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=0$$

这正是 $f_k(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$. □

**笔记** 如果 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 则其必是 $E$ 上的依测度 Cauchy 列.

下面的定理看起来有点像 Bolzano-Weierstrass 定理 (有界数列必有收敛子列), 它说明依测度 Cauchy 列中必有几乎处处收敛的子列.

**定理 3.2.7 (Riesz)**

若 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

证明

因为 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 故 $\{f_k(x)\}$ 是依测度 Cauchy 列. 从定理(3.2.6)的论证过程中可看出, 存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 与可测函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = g(x), \quad \text{a.e. } x \in E$$

同时 $\{f_{k_i}(x)\}$ 依测度收敛于 $g(x)$, 但本身 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$ 说明 $\{f_{k_i}(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 而依测度收敛的极限函数在对等意义下相同, 故 $f(x) = g(x)$, a.e. $x \in E$, 命题即证. □

### 3.2.2 例子整理

**例题 3.6** 考察 $f_n(x) = x^n (0 \le x \le 1), f(x) = 0 (0 \le x < 1)$ 以及 $f(1) = 1$, 则在 $[0,1]$ 上 $f_n(x)$ 点态收敛于 $f(x)$, 而并非一致收敛于 $f(x)$. 但在舍去一个测度可任意小的正测集 (如 $(1-\delta, 1]$) 后, $f_n(x)$ 在余下点集上一致收敛于 $f(x)$.

**例题 3.7(依测度收敛但不几乎处处收敛的函数)** 对给定的自然数 $n$, 总可找到唯一的自然数 $k, i$, 使得

$$n = 2^k + i, \quad 0 \le i < 2^k, k = 0, 1, 2, \cdots$$

现在在 $[0,1]$ 上作函数列:

$$f_n(x) = \chi_{[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}]}(x), \quad n = 1, 2, \cdots, x \in [0,1] \tag{3.2}$$

下面说明这一函数列在 [0,1] 上的任一点上都不收敛, 这是因为若 $x_0 \in [0,1]$, 对每个 $k_0 \in \mathbb{N}$, 必存在 $i_0$, 使得

$$x_0 \in [\frac{i_0}{2^{k_0}}, \frac{i_0+1}{2^{k_0}}]$$

这说明 $f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_n(x_0), \cdots$ 中必有无穷多项为 1 和 0, 进而至少不点态收敛. 但取 $0 < \varepsilon \le 1$, 有:

$$m(\{x \in [0,1] : |f_n(x)| \ge \varepsilon\}) = \frac{1}{2^k}$$

当 $n \to \infty$, 显见 $k \to \infty$, 进而 $m(\{x \in [0,1] : |f_n(x)| \ge \varepsilon\}) \to 0$, 这说明 $f_n(x)$ 依测度收敛到 0.

**例题 3.8** 设 $f(x), f_k(x) (k \in \mathbb{N})$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的实值可测函数, $m(E) < +\infty$.

(i) 若在任一子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中均有子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 则 $f_k(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

(ii) 若 $f_k(x) > 0 (k \in \mathbb{N})$, 且 $f_k(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 则对 $p > 0$, $f_k^p(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f^p(x)$.

证明

(i) 用反证法. 若 $f_k(x)$ 并不在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0, \sigma_0 > 0$ 及正整数列 $\{k_i\}$, 使得

$$m(\{x \in E : |f_{k_i}(x) - f(x)| > \varepsilon_0\}) \ge \sigma_0$$

注意到上式是对 $\{k_i\}$ 中的每个指标都成立的, 但 $\{f_{k_i}\}$ 本身是 $\{f_k\}$ 的一个子列, 根据条件在这个子列中存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列 $\{f_{k_{ij}}(x)\}$, 这说明总有一些指标 $k_{ij}$ 在 $\{k_i\}$ 中, 但并不满足上式, 矛盾! 命题即证.

(ii) 既然 $f_k(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 知其任意子列 $f_{k_i}(x)$ 在 $E$ 上也依测度收敛于 $f(x)$, 进而根据 Riesz 定理(3.2.7)知必存在子列 $\{f_{k_ij}(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 进而 $\{f_{k_{ij}}^p(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f^p(x)$, 故根据 (i) 知 $f_k^p(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$. □

笔记 设 $f(x), \{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数列.

1. 若 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上近一致收敛[4]于 $f(x)$, $\varphi \in C(\mathbb{R})$, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上近一致收敛于 $\varphi[f(x)]$; 若 $f_n(x)$

[4]对在有限测度集 $E$ 上几乎处处有限的可测函数 $f(x), f_1(x), \cdots, f_k(x), \cdots$, 如果对任给的 $\delta > 0$, 存在 $E$ 的可测子集 $E_\delta : m(E_\delta) \le \delta$, 使

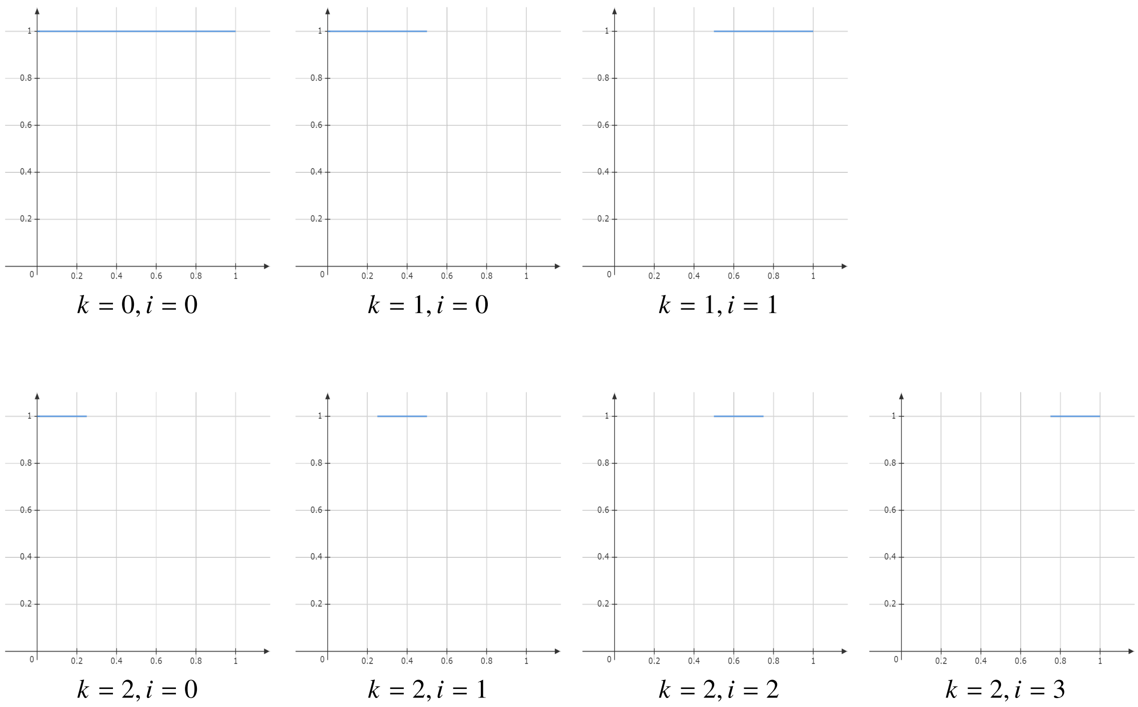


图 3.2: $n=1$ 到 7 的函数 $f_n$ 示意图

在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, $\varphi\in C(\mathbb{R})$, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

2. 若 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$(近一致收敛或依测度收敛于 $f(x)$), $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则 $\varphi[f_n(x)]$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛 (近一致收敛或依测度收敛) 于 $f(x)$.

### 3.2.3 思考题

**练习 3.8** 设在可测集 $E\subset\mathbb{R}$ 上, $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且依测度收敛于 $g(x)$, 试问: 是否有关系式

$$g(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in E?$$

解

有, 由 Riesz 定理知存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $g(x)$, 又因为本身 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 故 $g(x)=f(x)$, a.e. $x\in E$.

**练习 3.9** 设 $f(x), f_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 $E$ 上的实值可测函数. 若对任给 $\varepsilon>0$ 以及 $\delta>0$, 存在 $E$ 中可测子集 $e$ 以及正整数 $K$, 使得 $m(E\backslash e)<\delta$, 且有

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad k>K, x\in e$$

试问这是哪种意义下的收敛?

解

依测度收敛, 下面证明题设条件可以推出依测度收敛, 即证

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=0,\quad \forall\varepsilon>0$$

这等价于

$$\forall\varepsilon>0\forall\delta>0\exists K>0\forall k>K(m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})<\delta)$$

---

得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$, 就称 $f_k(x)$ 在 $E$ 上近一致收敛于 $f(x)$.

现在对任意的 $\varepsilon > 0$ 与 $\delta > 0$, 根据条件知存在 $K > 0$ 与 $E$ 的可测子集 $e : m(E\backslash e) < \delta$, 满足

$$\forall k > K \forall x \in e(|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

这说明

$$\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset E\backslash e$$

进而

$$m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq m(E\backslash e) < \delta$$

从而成立有

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists K > 0 \forall k > K(m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta)$$

进而 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$.

满足条件但不几乎处处收敛 (甚至不点态收敛) 的例子恰如(3.2).

**练习 3.10** 设 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于零, $g(x)$ 是 $E$ 上实值可测函数. 若 $m(E) = +\infty$, 试说明 $\{g(x)f_k(x)\}$ 在 $E$ 上不一定依测度收敛于零.

解

考虑 $E = [0, +\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [n, +\infty) \\ 0, & x \in [0, n) \end{cases}, \quad g(x) = x$$

**练习 3.11** 试问: $f_n(x) = \cos^n x(n = 1, 2, \cdots)$ 是 $[0, \pi]$ 上依测度收敛列吗?

解

考虑 $|f_n(x)| > \varepsilon$, 得到 $|\cos x| > \varepsilon^{\frac{1}{n}}$, 解得 $x \in [0, \arccos \varepsilon^{\frac{1}{n}}] \cup [\arccos(-\varepsilon^{\frac{1}{n}}), \pi]$, 进而

$$\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\} = [0, \arccos \varepsilon^{\frac{1}{n}}] \cup [\arccos(-\varepsilon^{\frac{1}{n}}), \pi]$$

又因为对任意给定的 $0 < \varepsilon < 1, n \to \infty, \arccos \varepsilon^{\frac{1}{n}} \to 0, \arccos(-\varepsilon^{\frac{1}{n}}) \to \pi$, 故

$$m(\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\}) = m([0, \arccos \varepsilon^{\frac{1}{n}}] \cup [\arccos(-\varepsilon^{\frac{1}{n}}), \pi]) \to 0, \quad n \to \infty$$

故 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0, \pi]$ 上的依测度收敛列.

**练习 3.12** 若 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x) \equiv 0$, 试问: 是否有

$$\lim_{n \to \infty} m(\{x \in E : |f_n(x)| > 0\}) = 0?$$

解

否, 例如 $E = [0, +\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [n, +\infty) \\ 0, & x \in [0, n) \end{cases}$$

**练习 3.13** 设 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足

$$f_k(x) \geq f_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots$$

若 $f_k(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛到 0, 试问: $f_k(x)$ 在 $E$ 上是否几乎处处收敛到 0?

解

既然 $f_k(x)$ 依测度收敛到 0, 由 Riesz 定理知存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 几乎处处收敛到 0, 也即

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E$$

又因为 $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$, 故 $f_{k_i}(x) \geq f_j(x) \geq f(x), j \geq k_i$, 这说明

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E$$

命题即证.

## 3.3 可测函数与连续函数的关系

### 3.3.1 知识梳理

**定理 3.3.1 (Lusin)**

若 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数, 则对任给的 $\delta > 0$, 存在 $E$ 中的闭集 $F$, 其中 $m(E\backslash F) < \delta$, 使得 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $F$ 上的连续函数.

证明

不妨假设 $f(\boldsymbol{x})$ 是实值函数, 这是因为由几乎处处有限知

$$m(\{\boldsymbol{x} \in E : |f(\boldsymbol{x})| = +\infty\}) = 0$$

首先考虑 $f(\boldsymbol{x})$ 是可测简单函数的情形:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i, E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$$

此时, 对任给的 $\delta > 0$ 以及每个 $E_i$, 可作 $E_i$ 中的闭集 $F_i$, 使得

$$m(E_i \backslash F_i) < \frac{\delta}{p}, \quad i = 1, 2, \cdots, p$$

因为当 $\boldsymbol{x} \in F_i$ 时, $f(\boldsymbol{x}) = c_i$, 故 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $F_i$ 上连续. 而 $F_1, F_2, \cdots, F_p$ 互不相交, 故 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $F = \bigcup\limits_{i=1}^{p} F_i$ 上连续. 显见 $F$ 作为有限闭集并是闭集, 且

$$m(E\backslash F) = \sum_{i=1}^{p} m(E_i \backslash F_i) < \sum_{i=1}^{p} \frac{\delta}{p} = \delta.$$

其次, 考虑 $f(\boldsymbol{x})$ 是一般可测函数的情形, 因为可作变换

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{1 + |f(\boldsymbol{x})|} (\text{即} f(\boldsymbol{x}) = \frac{g(\boldsymbol{x})}{1 - |g(\boldsymbol{x})|})$$

而 $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$ 同时连续, 故不妨假定 $f(\boldsymbol{x})$ 就是有界函数. 根据简单函数逼近定理(3.1.8)知, 存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$ 在 $E$ 上一致收敛于 $f(\boldsymbol{x})$. 现在对任给的 $\delta > 0$ 以及每个 $\varphi_k(\boldsymbol{x})$, 均作 $E$ 中的闭集 $F_k : m(E\backslash F_k) < \frac{\delta}{2^k}$, 使得 $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ 在 $F_k$ 上连续. 令 $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 $F \subset E$, 且有

$$m(E\backslash F) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E\backslash F_k) < \delta$$

因为每个 $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ 在 $F$ 上都连续, 而一致收敛保连续, 故 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $F$ 上连续. □

**推论 3.3.1**

若 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, 则对任给的 $\delta > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个连续函数 $g(\boldsymbol{x})$, 使得

$$m(\{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}) < \delta$$

若 $E$ 还是有界集, 则可使上述 $g(\boldsymbol{x})$ 具有紧支集.

证明

由 Lusin 定理知, 对任给的 $\delta > 0$, 存在 $E$ 中的闭集 $F : m(E\backslash F) < \delta$, 使得 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $F$ 上的连续函数, 进而根据连续函数的延拓定理(1.5.3)知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(\boldsymbol{x})$, 使得

$$f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in F$$

因为 $\{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\} \subset E\backslash F$, 故

$$m(\{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}) \leq m(E\backslash F) < \delta$$

若 $E$ 是有界集, 不妨设 $E \subset B(0, k)$, 则作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$, 使得 $0 \leq \varphi(\boldsymbol{x}) \leq 1$, 且

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in F \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin B(0, k) \end{cases}$$

把上述 $g(\boldsymbol{x})$ 换成 $g(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})$ 即得欲求. □

**推论 3.3.2**

若 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(\boldsymbol{x})\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in E.$$

证明

由推论(3.3.1)知, 对任意的趋零的正数列 $\{\varepsilon_k\}$ 与 $\{\delta_k\}$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(\boldsymbol{x})\}$, 使得

$$m(\{\boldsymbol{x} \in E : |f(\boldsymbol{x}) - g_k(\boldsymbol{x})| \geq \varepsilon_k\}) < \delta_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

这说明 $g_k(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(\boldsymbol{x})$, 进而根据 Riesz 定理, 可以选出子列 $\{g_{k_i}(\boldsymbol{x})\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} g_{k_i}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in E.$$

□

**笔记** 结论并不能强化为 $\lim_{k\to\infty} g_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$. 例如 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

可以表示成双重指标连续函数列的累次极限:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} [\cos(n!2\pi x)]^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

但并不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

作为统领性的梳理, [7] 中介绍了 Littlewood 三大原理, 用以总结可测集和可测函数两个概念, 与它们所替代的旧概念之间的关系. Littlewood 三大原理如下:

1. 每个集合接近于区间的有限并.
2. 每个函数接近于连续函数.
3. 每个收敛序列接近于一致收敛序列.

第一个原理正是等测包与等测核的定理, 第二个原理正是 Lusin 定理, 而第三个原理正是 Egorov 定理.

下面讨论复合函数的可测性问题, 首先给出一个判定可测函数的引理, 这个判别法十分类似于拓扑学中对连续函数的定义, 这个定义在之后的论证中也会用到.

**引理 3.3.1**

若 $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测的充分必要条件是, 对于 $\mathbb{R}$ 中的任一开集 $G$, $f^{-1}(G)$ 是可测集.

证明

当 $\mathbb{R}$ 中的任一开集 $G$ 都满足 $f^{-1}(G)$ 是可测集, 取 $G=(-\infty,t)$ 即知 $f$ 是可测函数.

当 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测, 知 $f^{-1}((t,+\infty))$ 是可测集, 进而对任意的区间 $(a,b)\subset\mathbb{R}$, 知

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,+\infty))\backslash f^{-1}([b,+\infty))$$

是可测集. 若 $G\subset\mathbb{R}$ 是开集, 则根据开集构造知 $G=\bigcup\limits_{k\geq 1}(a_k,b_k)$, 从而根据

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{k\geq 1}f^{-1}(a_k,b_k)$$

知 $f^{-1}(G)$ 可测. □

**定理 3.3.2**

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 则复合函数 $h(x)=f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

证明

对任一开集 $G\subset\mathbb{R}$, 因为 $f^{-1}(G)$ 是开集, 故根据 $g(x)$ 的可测性知 $g^{-1}(f^{-1}(G))=h^{-1}(G)$ 是可测集, 这说明 $h(x)$ 是可测函数. □

**笔记** 当 $f(x)$ 是可测函数而 $g(x)$ 是连续函数时, $f(g(x))$ 不一定是可测函数.

**定理 3.3.3**

设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续变换, 且满足当 $Z\subset\mathbb{R}^n$ 且 $m(Z)=0$ 时, $T^{-1}(Z)$ 是零测集. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, 则 $f(T(\boldsymbol{x}))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明

设 $G$ 是 $\mathbb{R}$ 中任一开集, 由 $f(\boldsymbol{x})$ 可测知 $f^{-1}(G)$ 是可测集. 不妨设 $f^{-1}(G)=H\backslash Z$, 其中 $H$ 是 $G_\delta$ 型集, 而 $m(Z)=0$. 因为 $T$ 是连续变换, 故根据连续变换的定义知 $T^{-1}(H)$ 是 $G_\delta$ 型集, 而 $T^{-1}(Z)=0$, 故从等式

$$T^{-1}(f^{-1}(G))=T^{-1}(H\backslash Z)=T^{-1}(H)\backslash T^{-1}(Z)$$

知 $T^{-1}(f^{-1}(G))$ 可测, 这说明 $f(T(\boldsymbol{x}))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. □

**推论 3.3.3**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, 则 $f(T(\boldsymbol{x}))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

### 3.3.2 例子整理

**例题 3.9** 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 且对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则 $f(x)$ 是连续函数.

证明

因为 $f(x+h)-f(x)=f(h), f(0)=0$, 故只需证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续即可, 因为这样一来, 对任一 $x_0$ 都有 $|f(x_0+h)-f(x_0)|=|f(h)|\to 0, h\to 0$. 根据 Lusin 定理(3.3.1), 存在有界闭集 $F:m(F)>0$, 使得 $f(x)$ 在 $F$ 上连续. 因为 $F$ 本身是有界闭集, 故这个连续性是一致的, 这说明对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\quad |x-y|<\delta_1,x,y\in F$$

现在研究 $F-F$, 由 Steinhaus 定理(2.5.2)知, 存在 $\delta_2>0$, 使得

$$F-F\supset[-\delta_2,\delta_2]$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $z\in[-\delta,\delta]\subset F-F$, 知存在 $x,y\in F$, 使得 $z=x-y$, 进而

$$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. □

**例题 3.10** 设 $f(x)$ 是 $I=(a,b)$ 上的实值可测函数. 若 $f(x)$ 具有中值 (下) 凸性质:

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

则 $f \in C(I)$.

证明

在数学分析中本身有结论: 开区间上的有界凸函数必连续.

现在假定 $f(x)$ 在 $x=x_0 \in I$ 处不连续, 则 $x_0$ 必是 $f(x)$ 的无无界点. 考察区间 $[x_0-2\delta, x_0+2\delta] \subset I$, 其中存在 $\{\xi_k\}$ 满足

$$\xi_k \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \quad f(\xi_k) \geq k, k=1,2,\cdots$$

对任意的 $x \in (\xi_k-\delta, \xi_k+\delta)$, 知

$$x_0-2\delta \leq x \leq x_0+2\delta, x_0-2\delta \leq x' \triangleq 2\xi_k - x \leq x_0+2\delta$$

由 $2\xi_k = x'+x$ 知 $2f(\xi_k) \leq f(x)+f(x')$, 而本身 $f(\xi_k) \geq k$, 这说明必有 $f(x) \geq k$ 或 $f(x') \geq k$, 这说明

$$m(\{x \in (\xi_k-\delta, \xi_k+\delta) : f(x) \geq k\}) \geq \delta$$

也即对任意大的自然数 $k$, 均有

$$m(\{x_0-2\delta \leq x \leq x_0+2\delta : f(x) \geq k\}) \geq \delta$$

这说明 $f(x_0)=+\infty$, 与 $f(x)$ 是实值函数矛盾! 命题即证. □

**例题 3.11($f$ 可测, $g$ 连续, 但 $f \circ g$ 并非可测函数)** 设 $\Phi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数, 令

$$\Psi(x) = \frac{x+\Phi(x)}{2}$$

则 $\Psi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数. 记 $C$ 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 集, $W$ 是 $\Psi(C)=[0,1]$ 中的不可测子集. 因为 $\Psi(x)$ 严格增且连续, 故其存在严格增且连续的反函数, 令 $f(x)$ 是点集 $\Psi^{-1}(W)$ 上的特征函数, 因为 $\Psi(C)=[0,1]$, 故 $\Psi^{-1}([0,1]) \subset C$, 进一步 $\Psi^{-1}(W) \subset \Psi^{-1}([0,1]) \subset C$, 进而 $m^*(\Psi^{-1}(W)) \leq m(C)=0$, 这说明 $f(x)=0$, a.e. $x \in [0,1]$, 再作

$$g(x) = \Psi^{-1}(x), \quad x \in [0,1]$$

知 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数, 现在讨论 $f(g(x))$. 当 $x \in W$, 知 $g(x) \in \Psi^{-1}(W)$, 故 $f(g(x))=1$. 当 $x \notin W$, 知 $g(x) \notin \Psi^{-1}(W)$, 故 $f(g(x))=0$, 这说明

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & x \in W \\ 0, & x \notin W \end{cases}$$

其显然不是可测函数.

**例题 3.12** 若 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则 $f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明

记 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}), (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 则因为对 $t > \mathbb{R}$, 有

$$\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > t\} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : f(\boldsymbol{x}) > t, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\}$$

可测, 故 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 再作 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的非奇异线性变换 $T$:

$$\left\{ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, \qquad (\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \right.$$

易知在变换 $T$ 下, $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 变为 $F(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) = f(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})$, 故 $f(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. □

**例题 3.13** 设定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)$ 满足:

(i) $f(x,y)$ 是单变量 $y \in \mathbb{R}$ 的可测函数;

(ii) $f(x,y)$ 是单变量 $x\in\mathbb{R}$ 的连续函数,

则对定义在 $\mathbb{R}$ 上任意实值可测函数 $g(y)$, $f[g(y),y]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

证明

对 $\mathbb{R}$ 作区间分割 $[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}](m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N})$, 并对 $(x,y)\in[\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}]\times\mathbb{R}$, 作函数列:

$$f_n(x,y)=n(\frac{m}{n}-x)f(\frac{m-1}{n},y)+n(x-\frac{m-1}{n})f(\frac{m}{n},y)$$

易知

$$\min\{f(\frac{m-1}{n},y),f(\frac{m}{n},y)\}\le f_n(x,y)\le\max\{f(\frac{m-1}{n},y),f(\frac{m}{n},y)\}$$

因为对每个点 $(x,y)$, 总存在区间列

$$I_k=[\frac{m_k-1}{n_k},\frac{m_k}{n_k}](k\in\mathbb{N}),\quad\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k=x$$

由条件 (ii) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x,y)=f(x,y)$, 进而

$$\lim_{n\to\infty}f_n(g(y),y)=f(g(y),y)$$

又因为每个 $f_n(g(y),y)$ 均可测, 故 $f(g(y),y)$ 可测. □

### 3.3.3 思考题

**练习 3.14** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试问: 是否存在 $g\in C(\mathbb{R})$, 使得

$$m(\{x\in\mathbb{R}:|f(x)-g(x)|>0\})=0?$$

解

不一定, 比如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

**练习 3.15** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测, 试证明存在多项式列 $\{P_n(x)\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

证明

**练习 3.16** 设 $f(x),g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数, 且 $f(x)>0(x\in\mathbb{R})$, 则 $f(x)^{g(x)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

证明

考虑 $F(x,y)=e^x$, 变换 $T:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,(x,y)\mapsto(x\ln y,y)$, 显见 $T$ 是连续变换, 且零测集的原像必为零测集. 现在 $F(x,y)$ 显然是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上的实值可测函数, 进而 $F(T(x,y))=e^{x\ln y}$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上的可测函数. 又因为 $F(T(x,y))$ 单独关于 $x,y$ 都是连续可测的, 故结合 $f(x),g(x)$ 的可测性, 知 $F(T(x,y))=e^{g(x)\ln f(x)}=f(x)^{g(x)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可测.

**练习 3.17** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测, 且 $m\le f(x)\le M$, $g(x)$ 在 $[m,M]$ 上单调, 则 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上可测.

证明

任取 $t\in\mathbb{R}$, 考察

$$\{x\in[a,b]:g(f(x))>t\}$$

因为 $g(x)$ 单调, 不妨设 $g(x)$ 单调增, 则 $\sup\limits_{[m,M]}(g^{-1}(t))$ 良定义, 有 $g(f(x))>t\Leftrightarrow f(x)>\sup\limits_{[m,M]}(g^{-1}(t))$, 也即

$$\{x\in[a,b]:g(f(x))>t\}=\{x\in[a,b]:f(x)>\sup_{[m,M]}(g^{-1}(t))\}$$

既然 $f(x)$ 可测, 知上右式是可测集, 进而 $\{x\in[a,b]:g(f(x))>t\}$ 可测, 命题即证.

# 第四章 Lebesgue 积分

在正式进入本章前, 需要介绍一下 Lebesgue 积分引入的动机. Riemann 积分的一个缺陷在于极限与积分次序交换过于麻烦. 事实上, 可以说明这个极限与积分次序交换的复杂性问题出在 Riemann 积分自己的定义上, 而并非是极限与积分一不一致.

**定理 4.0.1 (Arzela 控制收敛定理)**

设 $\{f_n\}$ 是在 $[a,b]$ 上收敛于极限函数 $f$ 的可积函数列, 若 $f$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\{f_n\}$ 于 $[a,b]$ 上一致有界, 即存在 $M>0$, 使得对于每个 $n$ 和每个 $x\in[a,b]$ 同时满足 $|f_n(x)|\le M$, 则成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx. \tag{4.1}$$

证明见 [8]. [1] 给出了阐明 Riemann 积分局限性的例子.

**例题 4.1** 设 $\{r_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的全体有理数列, 作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2,\cdots,r_n,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

显见 $f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots\le f_n(x)\le f_{n+1}(x)\le\cdots\le 1$, 且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

这里每个 $f_n(x)$ 都是 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积函数, 且它们的积分值为 0, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$$

但显见极限函数 $f(x)$ 并不 Riemann 可积.

这个例子说明 Arzela 控制收敛定理中 $f$ 可积的条件十分鸡肋: 就算式(4.1)左边的极限都存在了, 右式也依旧因为不可积而被拦住. 这恰是 Riemann 可积的一个局限性所在: 可积函数类不够广泛.

## 4.1 非负可测函数的积分

### 4.1.1 知识梳理

**定义 4.1.1 (非负可测简单函数的积分)**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, 它在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值为 $c_i$:

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^p c_i\chi_{A_i}(\boldsymbol{x}),\quad \bigcup_{i=1}^p A_i=\mathbb{R}^n,\quad A_i\cap A_j=\varnothing(i\ne j)$$

若 $E\in\mathscr{M}$, 则定义 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上的积分为

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^p c_i m(E\cap A_i).$$

这里积分符号下的 $d\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度的标志.

**定理 4.1.1 (积分的线性性质)**

设 $f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, $f(\boldsymbol{x})$ 在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$, $g(\boldsymbol{x})$ 在点集 $B_j(j=1,2,\cdots,q)$ 上取值 $b_j(j=1,2,\cdots,q)$, $E\in\mathscr{M}$, 则有

1. 若 $C$ 是非负常数, 则 $\int_E Cf(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = C\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$;
2. $\int_E (f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_E g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$.

证明

(i) 这是因为求和与数乘可换序.

(ii) 因为 $f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$ 在 $A_i\cap B_j$(如果其非空的话) 上取值 $a_i+b_j$, 故:

$$\begin{aligned}\int_E (f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(E\cap A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{p}a_i\sum_{j=1}^{q}m(E\cap A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{q}b_j\sum_{i=1}^{p}m(E\cap A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{p}a_i m(E\cap A_i)+\sum_{j=1}^{q}b_j m(E\cap B_j) = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+\int_E g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

□

**定理 4.1.2**

若 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的递增可测集列, $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, 则

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

证明

设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 $c_i(i=1,2,\cdots,p)$, 则:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{p}c_i m(E_k\cap A_i) = \sum_{i=1}^{p}c_i\lim_{k\to\infty}m(E_k\cap A) = \sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A) = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

□

**定义 4.1.2 (非负可测函数的积分与可积)**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 定义 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上的积分为

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \sup_{\substack{h(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{x}\in E}}\{\int_E h(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} : h(\boldsymbol{x})\text{是 } \mathbb{R}^n \text{ 上的非负可测简单函数}\},$$

这里积分可以是 $+\infty$; 若 $\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} < +\infty$, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上是可积的, 或称 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E$ 上的可积函数.

**定理 4.1.3**

设 $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$ 是 $E$ 上的非负可测函数. 若 $f(\boldsymbol{x})\le g(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\in E)$, 则

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \le \int_E g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

证明

若用 $h(\boldsymbol{x})$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, 且

$$h(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in E$$

则 $h(\boldsymbol{x})\le g(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\in E)$, 根据 $\int_E g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ 的定义可知

$$\int_E h(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \le \int_E g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

注意 $h(\boldsymbol{x})$ 是任意取的, 故根据上确界的性质有

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\sup_{\substack{h(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{x}\in E}}\{\int_E h(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\}\le\int_E g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

□

**推论 4.1.1**

设 $f(x)$ 在 $E$ 上非负可测, 则

1. 若存在 $E$ 上非负可积函数 $F(x)$, 使得
$$f(x)\le F(x),\quad x\in E$$
则 $f(x)$ 在 $E$ 上可积.
2. 若 $f(x)$ 在 $E$ 上有界, 且 $m(E)<+\infty$, 则 $f(x)$ 在 $E$ 上可积.

**定理 4.1.4**

若 $f(x)$ 是 $E$ 上的非负可测函数, $A$ 是 $E$ 中可测子集, 则

$$\int_A f(x)dx=\int_E f(x)\chi_A(x)dx$$

证明

知

$$\int_A f(x)dx=\sup_{\substack{h(x)\le f(x)\\ x\in A}}\{\int_A h(x)dx\}=\sup_{\substack{h(x)\chi_A(x)\le f(x)\chi_A(x)\\ x\in E}}\{\int_A h(x)dx\}=\int_E f(x)\chi_A(x)dx$$

**定理 4.1.5**

若 $f(x)$ 在 $E$ 上几乎处处等于零, 则 $\int_E f(x)dx=0$; (若 $m(E)=0$, 则 $\int_E f(x)dx=0$.) 若 $\int_E f(x)dx=0$, 则 $f(x)$ 在 $E$ 上几乎处处等于零.

证明

前一结论显见. 对于后者, 记

$$E_k=\{x\in E:f(x)>\frac{1}{k}\}$$

由于

$$\frac{1}{k}m(E_k)=\int_{E_k}\frac{1}{k}dx\le\int_{E_k}f(x)dx\le\int_E f(x)dx=0$$

故知 $m(E_k)=0(k=1,2,\cdots)$. 注意到

$$\{x\in E:f(x)>0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

可得 $m(\{x\in E:f(x)>0\})=0$.

□

**定理 4.1.6**

若 $f(x)$ 是 $E$ 上的非负可积函数, 则 $f(x)$ 在 $E$ 上是几乎处处有限的.

证明

令 $E_k=\{x\in E:f(x)>k\}$, 则有

$$\{x\in E:f(x)=+\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$$

对每个 $k$ 都有:

$$km(E_k)\le\int_{E_k}f(x)dx\le\int_E f(x)dx<+\infty$$

这说明 $\lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0$, 故

$$m(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) = 0$$

□

**定理 4.1.7 (Beppo Levi 非负渐升列积分定理)**

设有定义在 $E$ 上的非负可测函数渐升列:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_k(x) \leq \cdots$$

且有 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), x \in E$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx$$

证明

因为可测函数空间完备 (推论(3.1.2)), 故 $f(x)$ 是 $E$ 上的非负可测函数, 且由 $\{f_k(x)\}$ 的单调性知积分 $\int_E f(x)dx$ 有定义. 因为

$$\int_E f_k(x)dx \leq \int_E f_{k+1}(x)dx, \quad k = 1, 2, \cdots$$

故 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx$ 有定义, 且从函数列的渐升性知

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \leq \int_E f(x)dx.$$

现在令 $c$ 满足 $0 < c < 1$, $h(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任一非负可测简单函数, 且 $h(x) \leq f(x), x \in E$. 记

$$E_k = \{x \in E : f_k(x) \geq ch(x)\}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

由 $\{f_k(x)\}$ 递增可测知 $\{E_k\}$ 是递增可测集列, 且 $\lim_{k\to\infty} E_k = E$. 根据定理(4.1.2)知

$$\lim_{k\to\infty} c \int_{E_k} h(x)dx = c \int_E h(x)dx,$$

故由不等式

$$\int_E f_k(x)dx \geq \int_{E_k} f_k(x)dx \geq \int_{E_k} ch(x)dx = c \int_{E_k} h(x)dx$$

得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \geq c \int_E h(x)dx$$

令 $c \to 1$ 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \geq \int_E h(x)dx$$

根据 $f(x)$ 积分作为上确界的性质, 知

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) \geq \int_E f(x)dx$$

□

**定理 4.1.8 (积分的线性性质)**

设 $f(x), g(x)$ 是 $E$ 上的非负可测函数, $\alpha, \beta$ 是非负常数, 则

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx$$

证明

由非负可测简单函数的积分性质(4.1.1)知, 只需证明 $\alpha = \beta = 1$ 的情形. 因为 $f(x), g(x)$ 是 $E$ 上非负可测函数,

由简单函数逼近定理(3.1.8), 可设 $\{\varphi_k(x)\},\{\psi_k(x)\}$ 是非负可测简单函数渐升列, 满足:

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\ \lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=g(x),\quad x\in E$$

知 $\{\varphi_k(x)+\psi_k(x)\}$ 仍然是非负可测简单函数渐升列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}(\varphi_k(x)+\psi_k(x))=f(x)+g(x),\quad x\in E$$

故由简单函数积分性质(4.1.1)与 Beppo Levi 定理(4.1.7)知:

$$\int_E(f(x)+g(x))dx=\lim_{k\to\infty}\int_E(\varphi_k(x)+\psi_k(x))dx=\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k(x)dx+\lim_{k\to\infty}\int_E\psi_k(x)dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$$

□

**定理 4.1.9 (非负可积渐降列的单调收敛定理)**

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可积函数渐降列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in E,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx$$

♡

证明

由 $0\le f(x)\le f_1(x)$ 知, $f(x)$ 在 $E$ 上可积, 记

$$g_k(x)=f_1(x)-f_k(x),\quad k=1,2,\cdots$$

则 $\{g_k(x)\}$ 是非负可积函数渐升列, 进而由 Beppo Levi 定理(4.1.7)知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E(f_1(x)-f_k(x))dx=\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx=\int_E\lim_{k\to\infty}g_k(x)dx=\int_E(f_1(x)-f(x))dx$$

因为 $f_1(x)=(f_1(x)-f_k(x))+f_k(x)$, 故

$$\begin{aligned}&\int_E f_1(x)dx=\int_E(f_1(x)-f_k(x))dx+\int_E f_k(x)dx\\ \Rightarrow&\int_E(f_1(x)-f_k(x))dx=\int_E f_1(x)dx-\int_E f_k(x)dx\end{aligned}\tag{4.2}$$

同理可得

$$\int_E(f_1(x)-f(x))dx=\int_E f_1(x)dx-\int_E f(x)dx$$

在(4.2)两边取极限有

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_E(f_1(x)-f_k(x))dx\right)=\int_E(f_1(x)-f(x))dx=\int_E f_1(x)dx-\int_E f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\left(\int_E f_1(x)dx-\int_E f_k(x)dx\right)$$

因为 $\int_E f_1(x)dx<+\infty$, 故

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_E f_1(x)dx-\int_E f(x)dx\right)=\int_E f_1(x)dx-\lim_{k\to\infty}\int_E f(x)dx$$

两端约去 $\int_E f_1(x)dx$ 即证命题. □

**定理 4.1.10**

设 $f(x),g(x)$ 是 $E$ 上的非负可测函数. 若 $f(x)=g(x)$, a.e. $x\in E$, 则

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx.$$

♡

证明

令 $E_1=\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}, E_2=E\backslash E_1, m(E_1)=0$, 则

$$\begin{aligned}\int_E f(x)dx &= \int_E f(x)[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)]dx = \int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx \\ &= \int_{E_1} g(x)dx+\int_{E_2} g(x)dx = \int_E g(x)dx\end{aligned}$$

□

**定理 4.1.11 (逐项积分定理)**

若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可测函数列, 则

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx$$

证明

令 $S_m(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, 则 $\{S_m(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可测函数渐升列, 且

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

故根据 Beppo Levi 定理(4.1.7)与积分线性性质知

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \lim_{m\to\infty}\int_E S_m(x)dx = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

□

笔记 逐项积分定理指出, 只要每一函数项皆非负可测, 就可以对函数项级数逐项积分, 这一般可以用在估算积分中.

**推论 4.1.2**

设 $E_k\in\mathscr{M}(k=1,2,\cdots), E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$. 若 $f(x)$ 是 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 上的非负可测函数, 则

$$\int_E f(x)dx = \int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)dx.$$

证明

由逐项积分定理知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f(x)\chi_{E_k}(x)dx = \int_E f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

□

笔记 当 $f(x)\equiv 1$ 时, 上述推论正是测度的可数可加性.

**定理 4.1.12 (Fatou)**

若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可测函数列, 则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx \leq \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

证明

令 $g_k(x)=\int\{f_k(x): j\geq k\}$, 则知

$$g_k(x)\leq g_{k+1}(x),\quad k=1,2,\cdots$$

且根据下极限的定义本身有

$$\varliminf_{k\to\infty} f_k(x)=\lim_{k\to\infty} g(x),\quad x\in E,$$

故根据 Beppo Levi 定理(4.1.7)知

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx=\int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx=\varliminf_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx\le\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

□

笔记 Fatou 引理常用于判断极限函数的可积性: 当 $E$ 上的非负可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足 $\int_E f_k(x)dx\le M, k=1,2,\cdots$ 时, 就有 $\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx\le M$.

**命题 4.1.1 (依测度收敛型的 Fatou 引理)**

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列, 则:

$$\int_E f(x)dx\le\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

证明见章末习题.

下面的定理给出了非负可测函数可积的另一个等价条件, 这也恰是 Lebesgue 积分的几何说明.

**定理 4.1.13**

设 $f(x)$ 是 $E$ 上的几乎处处有限的非负可测函数, $m(E)<+\infty$. 在 $[0,+\infty)$ 上作如下划分:

$$0=y_0<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots\to\infty$$

其中 $y_{k+1}-y_k<\delta(k=0,1,\cdots)$. 若令

$$E_k=\{x\in E: y_k\le f(x)<y_{k+1}\},\quad k=0,1,\cdots$$

则 $f(x)$ 在 $E$ 上是可积的当且仅当级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)<+\infty.$$

此时有

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)=\int_E f(x)dx.$$

证明

注意到不等式

$$y_k m(E_k)\le\int_{E_k} f(x)dx\le y_{k+1}m(E_k)$$

两边求和得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)\le\int_E f(x)dx\le\sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1}m(E_k)=\sum_{k=0}^{\infty}(y_{k+1}-y_k)m(E_k)+\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)\le\delta m(E)+\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)$$

命题进而得证.

□

笔记

1. 上述定理的示意图如图 4.1.
2. 由上述定理可知, 对 $m(E)<+\infty$ 以及 $E$ 上的非负实值可测函数来说, 它的可积性等价于

$$\sum_{k=1}^{\infty} k m(E_k)<+\infty$$

图 4.1: 定理(4.1.13)的几何意义示意图

其中

$$E_k = \{x \in E : k \le f(x) \le k+1\}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

3. Lebesgue 本人的评价为: "我必须偿还一笔钱, 如果我从口袋中随意地摸出来各种不同面值的钞票, 逐一地还给债主直到全部还清, 这就是 Riemann 积分法; 不过, 我还有另外一种做法, 就是把钱全部拿出来 (考察 $f(x)$ 的值域) 并把相同面值的钞票放在一起 (考虑集合 $\{x \in E : y_k \le f(x) < y_{k+1}\}$), 然后再付给应还的数目 (对应乘上 $m(E_k)$), 这就是我的积分法."

**推论 4.1.3**

设 $E \subset \mathbb{R} : m(E) < +\infty$, $f(x)$ 是 $E$ 上的非负实值可测函数, 则 $f(x)$ 在 $E$ 上可积的充分必要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \ge n\}) < +\infty$$

证明

当 $f(x)$ 在 $E$ 上可积, 知

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \ge n\}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} m(\{x \in E : k \le f(x) < k+1\}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)m(\{x \in E : k \le f(x) < k+1\}) < +\infty\end{aligned}$$

当

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \ge n\}) < +\infty$$

知

$$\begin{aligned}\int_E f(x)dx &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{x\in E: k\le f(x)<k+1} f(x)dx \le \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)m(\{x \in E : k \le f(x) < k+1\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \ge n\}) < +\infty.\end{aligned}$$

□

笔记 如果 $f(x) \equiv x$, 上述推论在概率论中就正是一个重要的期望计算的定理:

**定理 4.1.14**

若 $\xi$ 是非负整数值随机变量, 则

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \ge n).$$

### 4.1.2 例子整理

### 4.1.3 思考题

**练习 4.1** 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 是 $E$ 上的非负可积函数, 则

(i) $F(x) = (\sum\limits_{k=1}^{m}(f_k(x)^2))^{\frac{1}{2}}$ 在 $E$ 上可积;

(ii) $G(x) = \sum\limits_{1\le i,k\le m}(f_i(x)f_k(x))^{\frac{1}{2}}$ 在 $E$ 上可积.

证明

(i) 既然 $f_1(x), \cdots, f_m(x)$ 仅有有限个, 可取

$$f(x) = \max_{x\in E}\{f_1(x), \cdots, f_m(x)\}$$

下面证明 $f(x)$ 是 $E$ 上的非负可积函数. 非负性显然, 设 $E_k = \{x \in E : k = \inf\limits_{1\le i\le m}\{i : f_i(x) = f(x)\}\}$, 知 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k$, 且有 $E_i \cap E_j = \varnothing$, 故

$$\int_E f(x)dx = \int_{\bigcup\limits_{k=1}^{m}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m}\int_{E_k} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m}\int_{E_k} f_k(x)dx \le \sum_{i=1}^{m}\int_{E} f_k(x)dx < +\infty$$

故 $f(x)$ 在 $E$ 上非负可积, 而

$$F(x) = (\sum_{k=1}^{m}(f_k(x))^2)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{m}f(x)$$

故 $F(x)$ 在 $E$ 上可积.

(ii) 因为 $(f_i(x)f_k(x))^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}(f_i(x) + f_k(x))$, 故

$$G(x) = \sum_{1\le i,k\le m}(f_i(x)f_k(x))^{\frac{1}{2}} \le \sum_{1\le i,k\le m}(\frac{1}{2}(f_i(x) + f_k(x))) \le C\sum_{i=1}^{m} f_i(x)$$

其中 $C$ 仅关于 $m$, 而 $\sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)$ 显然在 $E$ 上可积, 故 $G(x)$ 在 $E$ 上可积.

**练习 4.2** 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递增可测集列, 且 $E_k \to E(k \to \infty)$. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E$ 上的非负可测函数, 则

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

证明

因为 $\{E_k\}$ 是递增可测集列, 故 $\{f(\boldsymbol{x})\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})\}$ 是非负递增可测列. 注意到

$$\lim_{k\to\infty} E_k = E \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x})\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\chi_E(\boldsymbol{x})$$

故由 Beppo Levi 定理知

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\chi_E(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x})\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\int_E f(\boldsymbol{x})\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

命题即证.

**练习 4.3** 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可积函数列. 若

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx = 0,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E (1 - e^{-f_k(x)})dx = 0.$$

证明

知 $0 \le 1 - e^{-f_k(x)} \le f_k(x)$, 故

$$0 \le \int_E (1 - e^{-f_k(x)})dx \le \int_E f_k(x)dx$$

取极限有

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \int_E (1 - e^{-f_k(x)})dx \le \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = 0$$

故

$$\lim_{k\to\infty} \int_E (1 - e^{-f_k(x)})dx = 0$$

命题得证.

**练习 4.4** 设 $f(x)$ 是 $E$ 上的非负可积函数, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得

$$\int_E f(x)\chi_{\{x\in E: f(x)>N\}}(x)dx < \varepsilon.$$

证明

知

$$\{x \in E : f(x) > N\} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{x \in E : N + k < f(x) \le N + k + 1\} =: \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$$

显见 $E_i \cap E_j = \varnothing (i \ne j)$. 故

$$\int_E f(x)\chi_{\{x\in E: f(x)>N\}}(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_E f(x)\chi_{E_k}(x)dx \le \sum_{k=0}^{\infty}(N + k + 1)m(E_k)$$

但 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(N + k + 1)m(E_k)$ 本身是作为级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k + 1)m(\{x \in E : k \le f(x) < k + 1\})$ 的余项而存在的, 而根据 $f(x)$ 的非负可积性知该级数收敛, 故余项自然随着 $N \to \infty$ 而趋零, 命题自然成立.

**练习 4.5** $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,n]}(1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x}dx = \int_{[0,+\infty)} e^{-x}dx.$

证明

知

$$\int_{[0,n]}(1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2x}(1 + \frac{x}{n})^n\chi_{[0,n]}(x)dx = \int_{[0,+\infty)} e^{-2x}(1 + \frac{x}{n})^n\chi_{[0,n]}(x)dx$$

数学分析中已经证明了 $x \ge 0$ 时 $(1 + \frac{x}{n})^n$ 关于 $n$ 非负递增, 而显见 $\{\chi_{[0,n]}(x)\}$ 是非负递增列, 故 $(1 + \frac{x}{n})^n\chi_{[0,n]}(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的非负递增可测列, 且

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n\chi_{[0,n]}(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n \lim_{n\to\infty}\chi_{[0,n]}(x) = e^x$$

故由 Beppo Levi 定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty)} e^{-2x}(1+\frac{x}{n})^n\chi_{[0,n]}(x)dx = \int_{[0,+\infty)}\lim_{n\to\infty} e^{-2x}(1+\frac{x}{n})^n\chi_{[0,n]}(x)dx = \int_{[0,+\infty)} e^{-x}dx$$

命题即证.

**练习 4.6** $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} x^n dx = 0.$

证明

取 $\varepsilon > 0$ 足够小, 知

$$\int_{[0,1]} x^n dx = \int_{[0,1-\varepsilon]} x^n dx + \int_{(1-\varepsilon,1]} x^n dx$$

注意到当 $x \in [0, 1 - \varepsilon]$, 知 $\{x^n\}$ 是非负可积函数渐降列, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, 故:

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} x^n dx = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1-\varepsilon]} x^n dx + \int_{[1-\varepsilon,1]} x^n dx \le \int_{[0,1-\varepsilon]}\lim_{n\to\infty} x^n dx + \varepsilon = \varepsilon$$

其中极限可拆是出于 $x^n$ 在 $[0,1]$ 上与 $[0,1]$ 本身的有界性, 令 $\varepsilon \to 0$ 即知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} x^n dx = 0$$

命题得证.

✍ **练习 4.7** 设 $f^3(x)$ 是 $E$ 上的非负可积函数, $m(E) < +\infty$, 则 $f^2(x)$ 在 $E$ 上可积.

证明

设

$$E_1 = \{x \in E : 0 \le f^3(x) < 1\}, \quad E_2 = \{x \in E : f^3(x) \ge 1\}$$

则 $E_1 \cap E_2 = \varnothing, E_1 \cup E_2 = E$, 有

$$\int_E f^3(x)dx = \int_{E_1} f^3(x)dx + \int_{E_2} f^3(x)dx < +\infty$$

这说明 $\int_{E_2} f^3(x)dx < +\infty$. 再记

$$H_1 = \{x \in E : 0 \le f^2(x) < 1\}, \quad H_2 = \{x \in E : f^2(x) \ge 1\}$$

则 $H_1 \cap H_2 = \varnothing, H_1 \cup H_2 = E$, 且出于 $f(x)$ 的非负性有 $H_1 = E_1, H_2 = E_2$, 而在 $H_2$ 上有 $f^2(x) \le f^3(x)$. 有:

$$\int_E f^2(x)dx = \int_{H_1} f^2(x)dx + \int_{H_2} f^2(x)dx \le m(E_1) + \int_{E_2} f^3(x)dx < +\infty$$

其中 $m(E_1) \le m(E) < +\infty$, 命题即证.

✍ **练习 4.8** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可测, 则 $f^3(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 m(\{x \in [a,b] : f(x) \ge n\}) < +\infty.$$

- 证明

知

$$\{x \in [a,b] : f(x) \ge n\} =$$

✍ **练习 4.9** 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可测函数列. 若有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), f_k(x) \le f(x), \quad x \in E, k = 1, 2, \cdots$$

则对 $E$ 的任一可测子集 $e$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)dx = \int_e f(x)dx.$$

证明

取

$$g_k(x) = \sup_{i\ge k} f_i(x), \quad h_k(x) = \inf_{i\ge k} f_i(x)$$

得到

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x) = f(x) = \underline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x)$$

注意到 $\{g_k(x)\}$ 是非负可测渐降列, 故根据定理(4.1.9)知

$$\lim_{k\to\infty}\int_e g_k(x)dx = \int_e \lim_{k\to\infty} g_k(x)dx = \int_e f(x)dx$$

同样, 因为 $\{h_k(x)\}$ 是非负可测渐升列, 故根据 Beppo Levi 定理知

$$\lim_{k\to\infty}\int_e h_k(x)dx = \int_e \lim_{k\to\infty} h_k(x)dx = \int_e f(x)dx$$

现在知:

$$\int_e f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_e h_k(x)dx \le \lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)dx \le \lim_{k\to\infty}\int_e g_k(x)dx = \int_e f(x)dx$$

命题即证.

**练习 4.10** 设 $\{E_n\} \subset [0,1]$ 是可测集列. 若 $m(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n) = 0$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[0,1]$ 的可测子集 $A$, 使得 $m([0,1]\backslash A) < \varepsilon$, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A\cap E_n) < +\infty.$$

- 证明

## 4.2 一般可测函数的积分

### 4.2.1 知识梳理

**定义 4.2.1**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 若积分

$$\int_E f^+(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad \int_E f^-(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

中至少有一个是有限值, 则称

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_E f^+(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_E f^-(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上的积分; 当上式右端的两个积分值皆为有限时, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上是可积的, 或称 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E$ 上的可积函数. 在 $E$ 上可积的函数的全体记为 $L(E)$.

由于等式

$$\int_E |f(x)|dx = \int_E f^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx$$

成立, 故 $f(x)$ 可测时, $f(x)$ 的可积性与 $|f(x)|$ 的可积性等价, 且

$$|\int_E f(x)dx| \le \int_E |f(x)|dx.$$

**定理 4.2.1**

若 $f(x)$ 是 $E$ 上的有界可测函数, 且 $m(E) < +\infty$, 则 $f \in L(E)$.

证明

不妨设 $|f(x)| \le M$, 因为 $|f(x)|$ 是 $E$ 上的非负可测函数, 故:

$$\int_E |f(x)|dx \le \int_E M dx = Mm(E) < +\infty.$$

□

由积分的定义立得下述结论.

**定理 4.2.2**

若 $f \in L(E)$, 则 $f(x)$ 在 $E$ 上几乎处处有限.

**定理 4.2.3**

若 $E \in \mathscr{M}$, 且 $f(x) = 0$ a.e. $x \in E$, 则

$$\int_E f(x)dx = 0.$$

证明

因为 $f(x) = 0$ a.e. $x \in E \Rightarrow |f(x)| = 0$ a.e. $x \in E$, 故

$$|\int_E f(x)dx| \le \int_E |f(x)|dx = 0.$$

□

**定理 4.2.4**

若 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数, $g \in L(E)$, 且 $|f(x)| \le g(x), x \in E(g(x)$ 称为 $f(x)$ 的控制函数), 则 $f \in L(E)$.

证明

根据非负可测函数的积分性质知

$$\int_E |f(x)|dx \le \int_E g(x)dx < +\infty$$

□

**推论 4.2.1**

若 $f \in L(E), e \subset E$ 是可测集, 则 $f \in L(e)$.

下面这个定理类似于 Riemann 积分意义下, 函数在 $\mathbb{R}$ 上可积意味着函数在无穷远处趋 0.

**定理 4.2.5**

设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:|\boldsymbol{x}|\ge N\}} |f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} = 0,$$

或者说对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N$, 使得

$$\int_{\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}|\ge N\}} |f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} < \varepsilon.$$

证明

记 $E_N = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| \ge N\}$, 则 $\{|f(\boldsymbol{x})|\chi_{E_N}(\boldsymbol{x})\}$ 是非负可积函数渐降列, 且有

$$\lim_{N\to\infty} |f(\boldsymbol{x})|\chi_{E_N}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

故根据定理(4.1.9)知

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E_N} |f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x})|\chi_{E_N}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{N\to\infty} |f(\boldsymbol{x})|\chi_{E_N}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0.$$

□

**笔记** 若 $f \in L(E)$, 且有 $E_N = \{\boldsymbol{x} \in E : |\boldsymbol{x}| \ge N\}$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E\cap E_N} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0$$

这是因为 $f \cdot \chi_{E_N} \in L(\mathbb{R}^n)$.

**定理 4.2.6 (积分的线性性质)**

若 $f, g \in L(E), C \in \mathbb{R}$, 则

1. $\int_E Cf(x)dx = C\int_E f(x)dx$;
2. $\int_E (f(x) + g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$.

证明

不妨假定 $f(x), g(x)$ 都是实值函数.

1. 由公式

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$$

可知, 当 $C \ge 0$ 时, 有 $(Cf)^+ = Cf^+, (Cf)^- = Cf^-$. 根据积分定义及非负可测函数积分的线性性质, 知:

$$\int_E Cf(x)dx = \int_E Cf^+(x)dx - \int_E Cf^-(x)dx = C(\int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx) = C\int_E f(x)dx.$$

当 $C = -1$ 时, $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$, 同理有

$$\int_E (-f(x))dx = \int_E f^-(x)dx - \int_E f^+(x)dx = -\int_E f(x)dx$$

当 $C < 0$ 时, $Cf(x) = -|C|f(x)$, 由上述结论知

$$\int_E Cf(x)dx = \int_E -|C|f(x)dx = -\int_E |C|f(x)dx = -|C|\int_E f(x)dx = C\int_E f(x)dx.$$

$Cf(x)$ 的可积性由 $f(x)$ 的可积性立得.

2. 首先, 因为 $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$, 故 $f + g \in L(E)$. 又注意到

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

$$(f+g)^+ + f^- + g^+ = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

故根据非负可测函数积分的线性性质知

$$\int_E (f+g)^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx + \int_E g^-(x)dx = \int_E (f+g)^-(x)dx + \int_E f^+(x)dx + \int_E g^+(x)dx$$

因为式中每项积分值均有限, 故移项有

$$\int_E (f(x) + g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

□

**笔记**

1. 关于函数乘积有: 若 $f \in L(E)$, $g(x)$ 是 $E$ 上的有界可测韩树, 则 $f \cdot g \in L(E)$, 这是因为有不等式

$$|f(x) \cdot g(x)| \le |f(x)| \cdot \sup_{x \in E}|g(x)|, \quad x \in E$$

2. 从线性性质可知, 若 $f \in L(E)$, 且 $f(x) = g(x)$, a.e. $x \in E$, 则

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

这说明仅在零测集上有差异的函数积分相同.

**定理 4.2.7 (单调收敛定理)**

设 $f \in L(E), f_n \in L(E) (n \in \mathbb{N})$. 若有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) (x \in E), f_n(x) \le f_{n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, x \in E$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

证明

记 $G_n(x) = f(x) - f_n(x) (n \in \mathbb{N}, x \in E)$, 则 $\{F_n(x)\}$ 是 $E$ 上非负渐降收敛于 0 的可积函数列, 进而由定理(4.1.9)知

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_E F_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} (\int_E f(x)dx - \int_E f_n(x)dx) = \int_E f(x)dx - \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$$

命题即证.

□

**定理 4.2.8 (Fatou)**

设 $g \in L(E), f_n \in L(E)(n \in \mathbb{N})$. 若 $f_n(x) \geq g(x)$, a.e. $x \in E$, 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

证明

根据 Fatou 引理知:

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} [f_n(x) - g(x)]dx \leq \varliminf_{n\to\infty} (\int_E [f_n(x) - g(x)]dx).$$

而本身

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} [f_n(x) - g(x)]dx = \int_E [\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) - g(x)]dx = \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx - \int_E g(x)dx$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (\int_E [f_n(x) - g(x)]dx) = \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx - \varliminf_{n\to\infty} \int_E g(x)dx = \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx - \int_E g(x)dx$$

代入并消去 $\int_E g(x)dx$ 即得欲证. □

**定理 4.2.9 (Jensen 不等式)**

设 $w(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的正值可测函数, 且 $\int_E w(x)dx = 1$; $\varphi(x)$ 是区间 $I = [a, b]$ 上的 (下) 凸函数, $f(x)$ 在 $E$ 上可测, 且值域 $R(f) \subset I$. 若 $fw \in L(E)$, 则

$$\varphi(\int_E f(x)w(x)dx) \leq \int_E \varphi(f(x))w(x)dx.$$

证明

注意到 $a \leq f(x) \leq b$, 进而

$$y_0 = \int_E f(x)w(x)dx \in I$$

1. 当 $y_0 \in (a, b)$, 根据 $\varphi$ 的下凸性知

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_0) + k(y - y_0), \quad y \in [a, b]$$

把 $y$ 换成 $f(x)$ 得到

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(y_0) + k(f(x) - y_0), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

上式两端乘以 $w(x)$ 并在 $E$ 上积分:

$$\begin{aligned}\int_E \varphi(f(x))w(x)dx &\geq \int_E \varphi(y_0)w(x)dx + k\int_E (f(x) - y_0)w(x)dx \\ &= \varphi(y_0) + k(\int_E f(x)w(x)dx - y_0) = \varphi(y_0) = \varphi(\int_E f(x)w(x)dx).\end{aligned}$$

2. 若 $y_0 = b$(或 $a$), 知此时

$$y_0 - \int_E f(x)w(x)dx = \int_E (b - f(x))w(x)dx = 0$$

进而 $f(x) = b$ a.e. $x \in E$, 从而

$$\int_E \varphi(f(x))w(x)dx = \int_E \varphi(b)w(x)dx = \varphi(b)\int_E w(x)dx = \varphi(b) = \varphi(\int_E f(x)w(x)dx)$$

命题即证. □

**定理 4.2.10 (积分对定义域的可数可加性)**

设 $E_k \in \mathscr{M}(k=1,2,\cdots), E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$. 若 $f(x)$ 在 $E \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 上可积, 则

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

证明

根据 $f \in L(E)$ 与非负可测函数积分的可数可加性得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^+(x)dx = \int_E f^+(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^-(x)dx = \int_E f^-(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx < +\infty$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}(\int_{E_k} f^+(x)dx - \int_{E_k} f^-(x)dx) = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx = \int_E f(x)dx$$

□

**定理 4.2.11 (可积函数几乎处处为零的一种判别法)**

设函数 $f(x) \in L([a,b])$, 若对任意的 $c \in [a,b]$, 有

$$\int_{[a,c]} f(x)dx = 0$$

则 $f(x) = 0$ a.e. $x \in [a,b]$.

证明

用反证法, 若结论不成立, 则存在 $E \subset [a,b]$ 满足 $m(E) > 0$, 且 $f(x)$ 在 $E$ 上的值不等于零, 不妨设 $f(x) > 0, x \in E$, 则可作闭集 $F \subset E$, 使得 $m(F) > 0$, 再令 $G = (a,b) \backslash F$, 得到

$$\int_G f(x)dx + \int_F f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = 0$$

因为 $\int_F f(x)dx > 0$, 根据开集构造知:

$$\sum_{n \geq 1} \int_{[a_n,b_n]} f(x)dx = \int_G f(x)dx \neq 0$$

这说明至少存在 $n_0$ 使得

$$\int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)dx = \int_{[a,b_{n_0}]} f(x)dx - \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)dx \neq 0$$

进而 $\int_{[a,b_{n_0}]} f(x)dx$ 和 $\int_{[a,a_{n_0}]} f(x)dx$ 不能同时为零, 也即

$$\int_{[a,b_{n_0}]} f(x)dx \neq 0 \vee \int_{[a,a_{n_0}]} f(x)dx \neq 0$$

这与假设矛盾! 命题即证. □

**定理 4.2.12 (积分的绝对连续性)**

若 $f \in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $E$ 中子集 $e$ 的测度 $m(e) < \delta$ 时, 有:

$$|\int_e f(x)dx| \leq \int_e |f(x)|dx < \varepsilon$$

证明

不妨设 $f(x) \geq 0$, 根据简单函数逼近定理(3.1.8)与 Beppo Levi 定理(4.1.7)知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 都存在非负可测

简单函数渐升列 $\{\varphi_k(x)\}$, 满足 $0 \le \varphi_k(x) \le f(x)$, 且

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in E$$

进而

$$\lim_{k\to\infty} \int_E (f(x) - \varphi_k(x))dx = \int_E f(x)dx - \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k(x)dx = \int_E f(x)dx - \int_E f(x)dx = 0$$

根据极限定义有

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \forall k > K (\int_E (f(x) - \varphi_k(x))dx = \int_E f(x)dx - \int_E \varphi_k(x)dx < \varepsilon)$$

现在取定 $k$, 设 $\varphi_k(x) \le M$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $e \subset E$, 且 $m(e) < \delta$ 时:

$$\int_e f(x)dx = \int_e (f(x) - \varphi_k(x))dx + \int_e \varphi_k(x)dx \le \int_E (f(x) - \varphi_k(x))dx + \int_e \varphi_k(x)dx < \varepsilon + Mm(e) < 2\varepsilon$$

命题即证. □

**定理 4.2.13 (积分变量的平移变换定理)**

若 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 则对任意的 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0) \in L(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0)d\boldsymbol{x} = \int -\mathbb{R}^n f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

证明

只需考虑 $f(\boldsymbol{x}) \ge 0$ 的情形即可, 这又首先需要研究 $f(x)$ 是非负可测简单函数的情形:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

显见

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i - \{\boldsymbol{y}_0\}}(\boldsymbol{x})$$

其依旧是非负可测简单函数, 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0)d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} c_i m(E_i - \{\boldsymbol{y}_0\}) = \sum_{i=1}^{k} c_i m(E_i) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

再考虑一般非负可测函数 $f(\boldsymbol{x})$, 根据简单函数逼近定理(3.1.8)知此时存在非负可测简单函数渐升列 $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$, 使得 $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 显见 $\{\varphi_k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0)\}$ 依旧是渐升列, 且

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

故

$$\int -\mathbb{R}^n f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0)d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_0)d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

□

**定理 4.2.14**

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是区间, $f \in L(I)$, $a \ne 0$, 记 $J = \{\frac{x}{a} : x \in I\}$, $g(x) = f(ax)(x \in J)$, 则 $g \in L(J)$, 且

$$\int_I f(x)dx = |a| \int_I g(x)dx.$$

证明

若 $f(x) = \chi_E(x)$, $E$ 是 $I$ 中的可测集, 则知 $\frac{1}{a}E \subset J$. 因为 $\chi_E(ax) = \chi_{\frac{1}{a}E}(x)$, 故

$$\int_J g(x)dx = \frac{1}{|a|} m(E) = \frac{1}{|a|} \int_I f(x)dx$$

由此可知 $f(x)$ 是简单可测函数是结论也成立.

现在对一般可测函数 $f(x)\in L(I)$, 设非负简单可测函数渐升列 $\{\varphi_k^+(x)\},\{\varphi_k^-(x)\}$ 满足 $\varphi_n^+(x)\to f^+(x),\varphi_n^-(x)\to f^-(x)(n\to\infty,x\in I)$, 另设 $\psi_n^+(x)=\varphi_n^+(ax),\psi_n^-(x)=\varphi_n^-(ax),n=1,2,\cdots$, 知 $\psi_n^+(x)\to g^+(x),\psi^-(x)\to g^-(x)(n\to\infty,x\in J)$, 由 Beppo Levi 定理得到:

$$|a|\int_J g^+(x)dx=|a|\int_J\lim_{n\to\infty}\psi^+(x)dx=|a|\lim_{n\to\infty}\int_J\psi^+(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_I\varphi_n^+(x)dx=\int_I\lim_{n\to\infty}\varphi_n^+(x)dx=\int_I f^+(x)dx$$

$$|a|\int_J g^-(x)dx=|a|\int_J\lim_{n\to\infty}\psi^-(x)dx=|a|\lim_{n\to\infty}\int_J\psi^-(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_I\varphi_n^-(x)dx=\int_I\lim_{n\to\infty}\varphi_n^-(x)dx=\int_I f^-(x)dx$$

故

$$|a|\int_J g(x)dx=|a|\int_J g^+(x)dx-|a|\int_J g^-(x)dx=\int_I f^+(x)dx-\int_I f^-(x)dx=\int_I f(x)dx$$

□

**笔记** 对 $f\in L(\mathbb{R}^n),a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(a\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\frac{1}{|a|^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

**定理 4.2.15 (Lebesgue 控制收敛定理)**

设 $f_k\in L(E)(k=1,2,\cdots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in E$$

若存在 $E$ 上的可积函数 $F(x)$, 使得

$$|f_k(x)|\leq F(x),\quad \text{a.e. } x\in E(k=1,2,\cdots)$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx. \tag{4.3}$$

♡

证明

届于可测函数空间完备, $f(x)$ 首先是 $E$ 上的可测函数, 且由极限保号性知

$$|f_k(x)|\leq F\quad \text{a.e. } x\in E\Rightarrow|f(x)|\leq F(x)\quad \text{a.e. } x\in E$$

故 $f(x)$ 也是 $E$ 上的可积函数. 作函数列

$$g_k(x)=|f_k(x)-f(x)|,\quad k=1,2,\cdots$$

知 $g_k\in L(E)$, 且 $0\leq g_k(x)\leq 2F(x)$ a.e. $x\in E(k=1,2,\cdots)$.

根据 Fatou 引理知

$$\int_E\lim_{k\to\infty}(2F(x)-g_k(x))dx\leq\varliminf_{k\to\infty}\int_E(2F(x)-g_k(x))dx.$$

因为 $F(x)$ 和每个 $g_k(x)$ 都可积, 故上述极限可拆, 得到

$$\int_E 2F(x)dx-\int_E\lim_{k\to\infty}g_k(x)dx\leq\int_E 2F(x)dx-\varlimsup_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx$$

两边消去 $\int_E 2F(x)dx$, 根据 $g_k$ 的构造知

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in E$$

进而

$$0\leq\varlimsup_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx\leq\int_E\lim_{k\to\infty}g_k(x)dx=0$$

最后, 考虑不等式

$$|\int_E f_k(x)dx-\int_E f(x)dx|\leq|\int_E(f_k(x)-f(x))dx|\leq\int_E g_k(x)dx$$

两边令 $k\to\infty$ 即得命题.

□

笔记 上述证明实际上导出了比式(4.3)更强的结果[1]:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx=0 \tag{4.4}$$

称式(4.4)为 $f_k(x)$ 在 $E$ 上依 $L^1$ 范数收敛到 $f(x)$. 一般来说式(4.3)并不能导出式(4.4), 但可以导出 $f_k(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛到 $f(x)$. 这是因为对任意的 $\sigma>0$, 记

$$E_k(\sigma)=\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\sigma\}$$

得到

$$\sigma m(E_k(\sigma))=\int_{E_k(\sigma)}\sigma dx\le\int_{E_k(\sigma)}|f_k(x)-f(x)|dx\le\int_E|f_k(x)-f(x)|dx\to 0, k\to\infty$$

这说明 $m(E_k(\sigma))\to 0(k\to\infty)$, 从而由 Riesz 定理(3.2.7)知, 存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in E.$$

**推论 4.2.2 (弱化的 Lebesgue 控制收敛定理)**

设 $\{f_k(\boldsymbol{x})\},\{g_k(\boldsymbol{x})\}$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有 $|f_k(\boldsymbol{x})|\le g_k(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in E$. 若

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\ \lim_{k\to\infty} g_k(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x}),\ \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_E g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}<+\infty$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

证明见章末习题.

**推论 4.2.3 (有界收敛定理)**

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列, $m(E)<+\infty$, 且对 $x\in E$ 有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x), |f_k(x)|\le M,\quad k=1,2\cdots$$

则 $f\in L(E)$, 且

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

**证明**

只需注意常数函数 $M$ 正是 $E$ 上的控制函数即可. □

**定理 4.2.16 (依测度收敛型控制收敛定理)**

设 $f_k\in L(\mathbb{R}^n)(k=1,2,\cdots)$, 且 $f_k(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上依测度收敛于 $f(\boldsymbol{x})$. 若存在 $F\in L(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$|f_k(\boldsymbol{x})|\le F(\boldsymbol{x}),\quad k=1,2,\cdots;\text{a.e. } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

则 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

**证明**

根据极限定义, 即证

$$\forall\varepsilon>0\exists K>0\forall k>K(\int_{\mathbb{R}^n}|f_k(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<\varepsilon).$$

首先, 根据题设的依测度收敛与 Riesz 定理(3.2.7), 存在 $\{f_{k_i}(\boldsymbol{x})\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \text{a.e. } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

[1] 式(4.3)在概率论中对应弱收敛, 而式(4.4)对应 $L^1$ 收敛.

故在 $|f_{k_i}(\boldsymbol{x})| \le F(\boldsymbol{x})$ 中令 $i \to \infty$, 则由 Lebesgue 控制收敛定理得到 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 且根据极限的保号性知 $|f(\boldsymbol{x})| \le F(\boldsymbol{x})$, a.e. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

依测度收敛本身的定义为

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{k\to\infty} m(\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| \ge \varepsilon\}) = 0$$

这其中的启发在于对 $\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}$, 可以对 $\mathbb{R}^n$ 作分解. 根据定理(4.2.5), 只需要讨论 $\{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| \le N\}$ 中的情况, 而这恰可由依测度收敛来控制, 从而可以得到对 $\mathbb{R}^n$ 分解的方法.

1. 由 $F \in L(\mathbb{R}^n)$ 与定理(4.2.5)知, 存在 $N$ 使得

$$\int_{\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}|\ge N\}} F(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} < \varepsilon$$

进而对全体 $k = 1, 2, \cdots$ 有:

$$\int_{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}|\ge N} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} \le \int_{\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}|\ge N\}} 2F(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} < 2\varepsilon$$

2. 根据 $F(\boldsymbol{x})$ 的积分绝对连续性定理(4.2.12), 存在 $\delta > 0$, 使得当 $m(e) < \delta$ 时有

$$\int_e F(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} < \varepsilon$$

进而对全体 $k = 1, 2, \cdots$ 都有

$$\int_e |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} \le 2 \int_e F(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} < 2\varepsilon$$

3. 再处理 $B = B(0, N)$, 记 $m(B) = l$, 根据 $f_k(\boldsymbol{x})$ 依测度收敛到 $f(\boldsymbol{x})$ 知, 对任意的 $\delta$ 存在 $K \in \mathbb{N}$, 当 $k \ge K$ 时有

$$m(\{\boldsymbol{x} \in B : |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| \ge \frac{\varepsilon}{l}\}) < \delta$$

现在, 对 $k \ge K$ 的情况作分解有:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} &= \int_{\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}|\ge N\}} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} + \int_{\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}|< N\}} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} \\
&< 2\varepsilon + \int_{\{\boldsymbol{x}\in B:|f_k(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\ge\frac{\varepsilon}{l}\}} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} + \int_{\{\boldsymbol{x}\in B:|f_k(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|<\frac{\varepsilon}{l}\}} |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} \\
&< 2\varepsilon + 2\varepsilon + \int_{\{\boldsymbol{x}\in B:|f_k(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|<\frac{\varepsilon}{l}\}} \frac{\varepsilon}{l} d\boldsymbol{x} = 4\varepsilon + l \cdot \frac{\varepsilon}{l} = 5\varepsilon
\end{aligned}$$

命题即证. □

**推论 4.2.4**

对于 $E$ 上依测度收敛于 $f \in L(E)$ 的非负可积函数列 $\{f_k(x)\}$, 若有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| dx = 0.$$

证明

记

$$m_k(x) = \min_{x\in E}\{f_k(x), f(x)\}, \quad M_k(x) = \max_{x\in E}\{f_k(x), f(x)\}$$

则对 $\sigma > 0$, 因为

$$\{x \in E : f(x) - m_k(x) > \sigma\} \subset \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \sigma\}$$

故由 $f_k(x)$ 依测度收敛到 $f(x)$, 可知 $m_k(x)$ 依测度收敛到 $f(x)$. 又因为 $0 \le m_k(x) \le f(x)(x \in E)$, 根据依测度收敛型控制收敛定理(4.2.16), 可得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E m_k(x) dx = \int_E f(x) dx$$

又因为 $M_k(x) = f(x) + f_k(x) - m_k(x)(x \in E)$, 故

$$\int_E M_k(x)dx = \int_E f(x)dx + \int_E f_k(x)dx - \int_E m_k(x)dx \to \int_E f(x)dx, \quad k \to \infty.$$

最后, 由 $|f_k(x) - f(x)| = M_k(x) - m_k(x)$, 得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|dx = \lim_{k\to\infty} \int_E (M_k(x) - m_k(x))dx = \lim_{k\to\infty} \int_E M_k(x)dx - \lim_{k\to\infty} \int_E m_k(x)dx = 0$$

□

**推论 4.2.5 (逐项积分定理)**

设 $f_k \in L(E)(k = 1, 2, \cdots)$. 若有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f(x)|dx < +\infty,$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 $E$ 上几乎处处收敛; 若记其和函数为 $f(x)$, 则 $f \in L(E)$, 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

♡

证明

作函数 $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$, 根据非负可测函数的逐项积分定理(4.1.11)知

$$\int_E F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)|dx < +\infty,$$

这说明 $F \in L(E)$, 故 $F(x)$ 在 $E$ 上几乎处处有限, 进而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 $E$ 上几乎处处收敛, 记其和函数为 $f(x)$. 因为

$$|f(x)| = |\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = F(x), \quad \text{a.e. } x \in E$$

故 $f \in L(E)$. 现令 $g_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)(m = 1, 2, \cdots)$, 则

$$|g_m(x)| \le \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \le F(x), \quad m = 1, 2, \cdots$$

进而由控制收敛定理知

$$\int_E f(x)dx = \int_E \lim_{m\to\infty} g_m(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_E g_m(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

□

**定理 4.2.17 (积分号与求导换序)**

设 $f(x, y)$ 是定义在 $E \times (a, b)$ 上的函数, 其作为 $x$ 的函数在 $E$ 上可积, 作为 $y$ 的函数在 $(a, b)$ 上可微. 若存在 $F \in L(E)$, 使得

$$|\frac{d}{dy} f(x, y)| \le F(x), \quad (x, y) \in E \times (a, b),$$

则

$$\frac{d}{dy} \int_E f(x, y)dx = \int_E \frac{d}{dy} f(x, y)dx.$$

♡

证明

任意取定 $y\in(a,b)$ 以及 $h_k\to 0(k\to\infty)$, 根据导数定义知:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x,y+h_k)-f(x,y)}{h_k}=\frac{d}{dy}f(x,y),\quad x\in E$$

因为不等式 $|\frac{d}{dy}f(x,y)|\le F(x)$ 中 $F(x)$ 与 $y$ 无关, 故当 $k$ 足够大时, 根据中值定理知

$$|\frac{1}{h_k}(f(x,y+h_k)-f(x,y))|=|\frac{d}{dy}f(x,\xi_k)|\le F(x),\quad x\in E$$

故由控制收敛定理知

$$\frac{d}{dy}\int_E f(x,y)dx=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x,y+h_k)-f(x,y)}{h_k}dx=\int_E\frac{d}{dy}f(x,y)dx.$$

□

既然涉及了求导, 这里补充一个小命题.

**命题 4.2.1**

若 $g\in C((a,b)),\varphi(x)=\int_{(a,x)}g(t)dt,x\in(a,b)$, 则 $\varphi\in C^1((a,b))$, 且

$$\varphi'(x)=g(x),\quad x\in(a,b).$$

♠

证明

取定 $x_0\in(a,b)$, 取 $h>0$, 知

$$\frac{1}{|h|}|\int_{(a,x_0+h)}g(t)dt-\int_{(a,x_0)}g(t)dt|=\frac{1}{h}|\int_{[x_0,x_0+h)}g(t)dt|$$

因为 $g\in C([a,b])$, 故在 $x_0$ 处有

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\forall x\in U(x_0,\delta)(|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon\Rightarrow|g(x_0)|-\varepsilon<|g(x)|<|g(x_0)|+\varepsilon)$$

又出于连续函数在小邻域的保号性, 不妨就设 $g(t)$ 在 $(x_0,x_0+h]$ 上恒正, 进而

$$g(x_0)-\varepsilon=\frac{1}{h}\cdot h\cdot(g(x_0)-\varepsilon)\frac{1}{h}|\int_{[x_0,x_0+h)}g(t)dt|=\frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h)}g(t)dt<\frac{1}{h}\cdot h\cdot(g(x_0)+\varepsilon)=g(x_0)+\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即得

$$\frac{1}{h}|\int_{[x_0,x_0+h)}g(t)dt|=g(x_0)$$

当 $h<0$ 或 $g$ 在小邻域内恒负时类似可证, 从而一方面 $\varphi(x)$ 在 $x_0$ 处确有导数, 另一方面这个导数正是 $g(x_0)$, 命题即证. □

### 4.2.2 例子整理

**例题 4.2** 设 $g(x)$ 是 $E$ 上的可测函数. 若对任意的 $f\in L(E)$, 都有 $fg\in L(E)$, 则除去一个零测集 $Z$ 外, $g(x)$ 是 $E\backslash Z$ 上的有界函数.

证明

用反证法. 如果结论不成立, 则存在自然数的子列 $\{k_i\}$ 使得

$$m(\{x\in E:k_i\le|g(x)|<k_{i+1}\})=m(E_i)>0,\quad i=1,2,\cdots$$

考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sgn}g(x)}{i^{1+\alpha}m(E_i)}, & x\in E\\ 0, & x\notin E_i\end{cases}\qquad 0<\alpha\le 1,i=1,2,\cdots$$

因为

$$\int_E|f(x)|dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f(x)|dx=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1+\alpha}m(E_i)}m(E_i)<+\infty$$

故 $f \in L(E)$, 但同时注意到 $k_i \geq i$, 有

$$\int_E f(x)g(x)dx \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{i^{1+\alpha}m(E_i)}m(E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i^{1+\alpha}} = +\infty$$

故 $fg \notin L(E)$, 矛盾! □

**例题 4.3** 设 $f \in L(E)(E \subset \mathbb{R})$, 且

$$0 < A = \int_E f(x)dx < +\infty$$

则存在 $E$ 中可测子集 $e$, 使得

$$\int_e f(x)dx = \frac{A}{3}.$$

证明

设 $E_t = E \cap (-\infty, t), t \in \mathbb{R}$, 并记

$$g(t) = \int_{E_t} f(x)dx$$

则由积分的绝对连续性知:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall |\Delta t < \delta| (|g(t+\Delta t) - g(t)| \leq \int_{E\cap[t,t+\Delta t)} |f(x)|dx \leq \int_{[t,t+\Delta t)} |f(x)|dx < \varepsilon)$$

故 $g \in C(\mathbb{R})$, 又因为 $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = A$, 故根据介值定理可知存在 $t_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $g(t_0) = \frac{A}{3}$. 取 $e = E \cap (-\infty, t_0)$ 即证命题. □

**例题 4.4** 设 $f \in L([0, +\infty))$, 则

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

证明

因为 $f(x+n) = f(x+1+(n-1))$, 故可通过这样的方法将 $\mathbb{R}$ 上任意给定的 $x_0$ 平移到 $[0, 1]$ 上研究, 进而只需考察 [0,1] 上的点即可. 要证明

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [0, 1]$$

又只需证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处收敛, 因为如此即可由通项趋零得到结论. 现在考察这个级数, 由非负可测函数的逐项积分定理与积分变量平移变换定理有:

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f(x+n)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n,n+1]} |f(x)|dx = \int_{[1,+\infty)} |f(x)|dx < +\infty$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|$ 作为 $x$ 的函数在 $[0, 1]$ 上可积, 进而几乎处处有限, 也即级数几乎处处收敛. □

**例题 4.5** 设 $f_n \in C^{(1)}((a, b))(n = 1, 2, \cdots)$, 且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = F(x), \quad x \in (a, b)$$

若 $f'(x), F(x)$ 在 $(a, b)$ 上连续, 则 $f'(x) = F(x), x \in (a, b)$.

证明

只需指出在 $(a, b)$ 的一个稠密子集上有 $f'(x) = F(x)$ 即可, 为此可任取 $(a, b)$ 中的子区间 $[c, d]$, 且记

$$E_n = \{x \in [c, d] : |f_k'(x) - F(x)| \leq 1, k \geq n\}$$

易知每个 $E_n$ 都是闭集, 且 $[c, d] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 故根据 Baire 定理知至少有一个 $E_n$ 有内点, 即存在 $n_0$ 与区间 $[c', d']$, 使得 $[c', d'] \subset E_{n_0}$. 由于

$$|f_k'(x) - F(x)| \leq 1, \quad k \geq n_0, x \in [c', d']$$

知 $k \geq n_0$ 时, $\{f_k'(x)\}$ 在 $[c', d']$ 上一致有界. 这样一来, 根据定理(4.4.4), 既然 $f_k' \in R[c', x] \cap L[c', x]$, 知

$$\int_{[c',x]} f_k'(t)dt = \int_{c'}^{x} f_k'(t)dt = f_k(x) - f_k(c'), \quad c' < x < d'$$

进而两边令 $k \to \infty$, 由有界收敛定理知

$$\int_{[c',x]} F(t)dt = f(x) - f(c'), \quad c' < x < d'$$

等式两端对 $x$ 求导, 因为 $F \in C(a, b)$, 故根据命题(4.2.1)知

$$F(x) = f'(x), \quad c' < x < d'$$

命题即证. □

**例题 4.6** 证明 $\int_{[0,1]} \frac{x \sin x}{1+(nx)^\alpha} dx = o(\frac{1}{n})(n \to \infty, \alpha > 1)$.

证明

此即证明

$$\int_{[0,1]} \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha} dx \to 0, \quad n \to \infty$$

令

$$g(x) = 1 + (nx)^\alpha - nx^\beta$$

其中 $\beta$ 是待定的常数. 易知 $g(0) = 1, g(1) = 1 + n^\alpha - n$, 从而如果证明了 $g(x) \geq 0, x \in [0, 1]$, 就可以得到:

$$1 + (nx)^\alpha \geq nx^\beta \geq nx^{\beta-1} \sin x \Rightarrow 0 < \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha} \leq \frac{1}{x^{2-\beta}}, \quad x \in [0, 1]$$

为了应用 Lebesgue 控制收敛定理, 需要令 $\frac{1}{x^{2-\beta}} \in L([0, 1])$, 此即需要 $\beta > 1$. 现在回过头说明 $g(x) \geq 0, x \in [0, 1]$. 这是因为:

$$g'(x) = nx^{\alpha-1}(\alpha n^{\alpha-1} - \beta x^{\beta-\alpha}), \quad x \in [0, 1]$$

当 $n$ 足够大, 首先由 $\alpha > 1$ 知必有 $g(1) > 1$, 其次不如就取 $\beta > \alpha$, 这样一来 $x^{\beta-\alpha} \in [0, 1]$, 从而必能找到足够大的 $n$ 使得 $\alpha n^{\alpha-1} - \beta x^{\beta-\alpha} > 0$, 进而 $g'(x) \geq 0, x \in [0, 1]$, 得到 $g(x) \geq g(0) = 1 > 0$. 现在 $\beta$ 需要同时满足大于 1 和大于 $\alpha$, 因为 $\alpha$ 给定, 这样的 $\beta$ 当然可以取到, 从而 $g(x)$ 确有定义, 进而可以应用 Lebesgue 控制收敛定理:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha} dx = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha} dx = \int_{[0,1]} 0dx = 0.$$

□

**例题 4.7** 证明 $\int_{[a,+\infty)} \frac{xe^{-n^2x^2}}{1+x^2} dx = o(\frac{1}{n^2})(n \to \infty, a > 0)$.

证明

此即证明

$$I := \lim_{n\to\infty} \int_{[a,+\infty)} \frac{n^2 xe^{-n^2x^2}}{1 + x^2} dx = 0$$

令 $u = nx$, 则

$$I = \int_{[na,+\infty)} \frac{ue^{-u^2}}{1 + \frac{u^2}{n^2}} du = \int_{[0,+\infty)} \chi_{[na,+\infty)}(u) \frac{ue^{-u^2}}{1 + \frac{u^2}{n^2}} du$$

注意本身

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[na,+\infty)}(u) \frac{ue^{-u^2}}{1 + \frac{u^2}{n^2}} = 0$$

而

$$0 \leq \chi_{[na,+\infty)} \frac{ue^{-u^2}}{1 + \frac{u^2}{n^2}} \leq ue^{-u^2}, \quad 0 \leq u < +\infty$$

又因为 $ue^{-u^2} \in L([0,+\infty))$, 故根据 Lebesgue 控制收敛定理即得结论. □

**例题 4.8** 设 $f(x), f_n(x)(n \in \mathbb{N})$ 在 $\mathbb{R}$ 上实值可积. 若对 $\mathbb{R}$ 中任一可测集 $E$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

则 $\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \le f(x) \le \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

证明

作 $g_n(x) = \sup_{k\ge n}\{f_k(x)\}$, 则 $g_n(x)$ 作为递减列有极限, 记

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

现在只需指出在 $E(m(E)<\infty)$ 上, 有 $f(x) \le g(x)$ a.e. $x \in E$ 即可. 下面就讨论 $g(x)$ 在 $E$ 上可能的各种表现.

1. 作点集 $P = \{x \in E : g(x) = -\infty\}, P_n = \{x \in E : g_n(x) < 0\}(n \in \mathbb{N})$. 因为 $g_n(x)$ 递减收敛到 $g(x)$, 故 $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. 又对任意的 $F \subset P_n$, 均有:

$$\int_F f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_F f_k(x)dx \le \lim_{k\to\infty}\int_F g_k(x)dx = \int_F g(x)dx$$

上式最后一步可视作 Beppo Levi 定理 (两边同时加上负号即可), 故 $f(x) \le g(x)$, a.e. $x \in P_n$, 自然有 $f(x) \le p(x)$, a.e. $x \in P$. 注意因为 $g(x) = -\infty, x \in P$, 故根据 $g \in L(P)$ 知 $m(P) = 0$.

2. 若 $g(x) = +\infty$, 显见 $f(x) \le g(x)$.
3. 若 $-\infty < g(x) < +\infty$, 则令 $Q_m = \{x \in \mathbb{R} : -m \le g(x) \le m\}$, 可得 $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$, 从而只需考察 $Q_m$ 上 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的大小.

作点集 $S_n = \{x \in Q_m : g_n(x) - g(x) < \varepsilon_0\}$, 其中 $\varepsilon_0 > 0$ 给定, 则由 $\{g_n(x)\}$ 的渐降性得 $Q_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, 进而又只需指出 $f(x) \le g(x), x \in S_n$. 因为函数 $g(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)$ 均一致有界, 故根据有界收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_F g_k(x)dx = \int_F g(x)dx, \quad F \subset S_n$$

注意到

$$\int_F f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_F f_k(x)dx \le \lim_{k\to\infty}\int_F g_k(x)dx = \int_F g(x)dx, \quad F \subset S_n$$

故 $f(x) \le g(x)$ a.e. $x \in S_n$, 从而这个结论在 $\mathbb{R}$ 上也成立.

4. 对另一个要证的不等式, 只需注意

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = -\varlimsup_{n\to\infty}(-f_n(x)).$$

综上, 命题得证. □

### 4.2.3 思考题

**练习 4.11** 若 $f \in L(\mathbb{R}^n), g \in L(\mathbb{R}^n)$, 则函数

$$m(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\{f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\}, M(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\{f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上可积.

证明

既然 $f \in L(\mathbb{R}^n), g \in L(\mathbb{R}^n)$, 知

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x})|dx < +\infty, \int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|dx < +\infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n}(|f(x)|+|g(x)|)dx < +\infty, f+g \in L(\mathbb{R}^n)$$

故因为 $|m(\boldsymbol{x})| \le |f|+|g|, |M(\boldsymbol{x})| \le |f|+|g|$, 知 $m, M \in L(\mathbb{R}^n)$.

✍ **练习 4.12** 设有定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 的二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\\ 2, & xy\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

则 $\iint_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy=1.$

证明

注意 $f(x,y)-1=0$ a.e. $x\in[0,1]^2$, 故

$$\iint_{[0,1]^2}(f(x,y)-1)dxdy=0$$

又因为

$$\iint_{[0,1]^2}1dxdy=1$$

故

$$\iint_{[0,1]^2}(f(x,y)-1)dxdy=\iint_{[0,1]^2}f(x,y)-\iint_{[0,1]^2}1dxdy=\iint_{[0,1]^2}f(x,y)dxdy-1=0$$

命题即证.

✍ **练习 4.13** 若 $f\in L(E)$, 则

$$m(\{x\in E:|f(x)|>k\})=O(\frac{1}{k}),\quad k\to\infty$$

证明

因为 $f\in L(E)$, 故若记

$$E_k=\{x\in E:|f(x)|>k\},\quad k=1,2,\cdots$$

则有

$$M:=\int_E|f(x)|dx>\int_{E_k}|f(x)|dx\geq\int_{E_k}kdx=km(E_k),\quad k=1,2,\cdots$$

进而

$$km(E_k)\leq M,\quad k\to\infty\Rightarrow m(\{x\in E:|f(x)|>k\})=O(\frac{1}{k}),\quad k\to\infty$$

命题即证.

✍ **练习 4.14** 设 $f\in L((0,+\infty))$, 令 $f_n(x)=f(x)\chi_{(0,n)}(x)(n=1,2,\cdots)$, 则 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

证明

既然 $f\in L((0,+\infty))$, 知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{x\in(0,+\infty):x\geq n\}}|f(x)|dx=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,+\infty)}|f(x)\chi_{[n,+\infty)}(x)|dx=0$$

注意到

$$f(x)\chi_{[n,+\infty)}(x)=f(x)(1-\chi_{(0,n)}(x))=f(x)-f(x)\chi_{(0,n)}(x)=f(x)-f_n(x),\quad x\in(0,+\infty)$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|dx=0$$

进而 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上依 $L^1$ 范数收敛于 $f(x)$, 自然依测度收敛于 $f(x)$.

✍ **练习 4.15** 设 $f\in L([0,1])$. 若 $e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}=\int_{[0,1]}e^{f(x)}dx$, 则 $f(x)=C$(常数), a.e. $x\in[0,1]$.

证明

知 $e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}$ 本身是常数, 故

$$e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}=\int_{[0,1]}e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}dx$$

进而

$$e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}=\int_{[0,1]}e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}dx=\int_{[0,1]}e^{f(x)}dx\Rightarrow\int_{[0,1]}(e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}-e^{f(x)})dx=0$$

这说明 $e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}-e^{f(x)}=0$ a.e. $x\in[0,1]$, 也即 $f(x)=\int_0^1 f(x)dx$ a.e. $x\in[0,1]$, 而后者是常数.

† 订正

上述证明从 $\int_{[0,1]}(e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}-e^{f(x)})dx=0$ 到 $e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}-e^{f(x)}=0$ a.e. $x\in[0,1]$ 缺失了对函数非负性的研究. 注意只有当非负函数在区域上的积分为 0 时, 这个函数才几乎处处为零. 补救方式是利用 Jensen 不等式, 注意 $e^x$ 是下凸函数, 故

$$e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}\le\int_{[0,1]}e^{f(x)}dx$$

这说明 $e^{f(x)}-e^{\int_{[0,1]}f(x)dx}$ 是非负函数.

**练习 4.16** 设 $f\in L(\mathbb{R})$, 且对任意的区间 $I$, 记

$$f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx,\quad E_I=\{x\in I:f(x)>f_I\},$$

则

$$\int_I|f(x)-f_I|dx=2\int_{E_I}(f(x)-f_I)dx.$$

证明

记

$$g(x)=f(x)-f_I$$

可知 $E_I=\{x\in I:g(x)>0\}$, 且

$$\int_I|f(x)-f_I|dx=\int_I(g^+(x)+g^-(x))dx=\int_I g^+(x)dx+\int_I g^-(x)dx$$

注意到:

$$\int_I g^+(x)dx=\int_I(f(x)-f_I)\chi_{E_I}(x)dx=\int_{E_I}(f(x)-f_I)dx$$

故只需证明 $\int_I g^-(x)dx=\int_{E_I}(f(x)-f_I)dx$.

**练习 4.17** 设 $f\in L(\mathbb{R}),g\in L(\mathbb{R})$, 且有

$$\int_{[a,x]}f(t)dt=\int_{[a,x]}g(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

则 $f(x)=g(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}$.

证明

用反证法, 如果存在 $E\subset\mathbb{R}$ 满足 $m(E)>0$, 且 $f(x)\neq g(x),x\in E$, 不妨设 $f(x)<g(x),x\in E$, 进而存在包含在 $E$ 中的闭集 $F$ 满足 $m(F)>0,f(x)\neq g(x),x\in F$. 根据开集构造, 知 $\mathbb{R}$ 上的闭集总由可数个互不相交的闭区间与单点集构成. 既然 $m(F)>0$, 知 $F$ 不可能仅由可数个单点集构成, 也即其必定包含某闭区间 $[a',b']$, 得到:

$$f(x)<g(x),x\in[a',b']\Rightarrow\int_{[a',b']}(f(x)-g(x))dx<0\Leftrightarrow\int_{[a',b']}f(x)dx<\int_{[a',b']}g(x)dx$$

现考察 $\int_{[a,b']}f(x)dx,\int_{[a,b']}g(x)dx$, 知

$$\int_{[a,b']}f(x)dx=\int_{[a,a']}f(x)dx+\int_{[a',b']}f(x)dx=,\quad\int_{[a,b']}g(x)dx=\int_{[a,a']}g(x)dx+\int_{[a',b']}g(x)dx$$

根据条件, $\int_{[a,b']}f(x)dx=\int_{[a,b']}g(x)dx$, 又因为 $\int_{[a',b']}f(x)dx<\int_{[a',b']}g(x)dx$ 知 $\int_{[a,a']}f(x)dx>\int_{[a,a']}g(x)dx$, 矛盾! 命题即证.

✍ **练习 4.18** 设 $f \in L(\mathbb{R})$. 若对 $\mathbb{R}$ 上任意的有界可测函数 $\varphi(x)$, 都有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

则 $f(x) = 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

证明

用反证法, 如果存在 $E \subset \mathbb{R}$ 满足 $m(E) > 0, f(x) \neq 0, x \in E$, 不妨设 $f(x) > 0, x \in E$, 则取 $\varphi(x) = \chi_E(x)$, 知

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \int_E f(x)dx > 0$$

矛盾! 命题即证.

✍ **练习 4.19** 设 $f \in C([a,b]), \varphi \in C([a,b]), F \in L([a,b])$, 且对 $x \in [a,b]$ 有:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x), \quad \varphi_n \in C^{(1)}([a,b]), n = 1, 2, \cdots$$

且

$$\frac{d}{dx}\varphi_n(x) = f(x)\varphi_n(x), \quad |f(x)\varphi_n(x)| \leq F(x)$$

试证明

$$\varphi'(x) = f(x)\varphi(x), \quad x \in [a,b].$$

✍ **练习 4.20** 试证明函数列 $\{\cos nx\}$ 在 $[-\pi, \pi)$ 不是依测度收敛于 0 的.

证明

此即证明存在 $\varepsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$, 对任意的 $N > 0$ 都存在 $n_0 > N$, 使得

$$m(\{x \in [-\pi, \pi) : |\cos n_0 x| > \varepsilon_0\}) > \delta_0$$

不妨取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 求解 $x \in [-\pi, \pi), |\cos n_0 x| > \frac{1}{2}$ 得

$$E = \{x \in [-\pi, \pi) : |\cos n_0 x| > \frac{1}{2}\} \supset \{x \in [-\pi, \pi) : \cos n_0 x > \frac{1}{2}\} \supset \bigcup_{k=[-\frac{n}{2}]+1}^{k=[\frac{n}{2}]-1} (-\frac{\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}, \frac{\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n})$$

故

$$m(E) \geq m(\bigcup_{k=[-\frac{n}{2}]+1}^{k=[\frac{n}{2}]-1} (-\frac{\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}, \frac{\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n})) \geq (2[\frac{n}{2}] - 2)\frac{\pi}{6n} \geq \frac{\pi(n-3)}{6n} \geq \frac{\pi}{12}$$

最后几步放缩在 $n_0$ 足够大时总是成立的, 进而取 $\delta_0 = \frac{\pi}{12}$ 即得欲证.

✍ **练习 4.21** 设 $f \in L((0, +\infty))$, 试证明函数

$$g(x) = \int_{[0,+\infty)} \frac{f(t)}{x+t}dt$$

在 $(0, +\infty)$ 上连续.

证明

考察

$$\begin{aligned}|g(x+h) - g(x)| &= |\int_{[0,+\infty)} \frac{f(t)}{x+h+t}dt - \int_{[0,+\infty)} \frac{f(t)}{x+t}dt| = |\int_{[0,+\infty)} \frac{f(t)\cdot h}{(x+t)(x+h+t)}dt| \\ &\leq \int_{[0,+\infty)} \frac{|f(t)\cdot h|}{(x+t)^2}dt \leq \int_{[0,+\infty)} \frac{|h|}{x^2}|f(t)|dt = \frac{|h|}{x^2}\int_{[0,+\infty)} |f(t)|dt\end{aligned}$$

因为 $f \in L((0, +\infty))$, 故 $\int_{[0,+\infty)} |f(t)|dt = \int_{(0,+\infty)} |f(t)|dt < +\infty$, 进而当 $h \to 0$, 自然有 $\frac{|h|}{x^2}\int_{[0,+\infty)} |f(t)|dt \to 0$, 命题即证.

✍ **练习 4.22** 设 $f \in L(E)$, 记 $E_k = \{x \in E : |f(x)| < \frac{1}{k}\}$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx = 0.$$

证明

显见 $\{E_k\}$ 是递降列, 且 $E_0 = \lim_{k\to\infty} E_k = \{x \in E : |f(x)| = 0\}$. 故根据

$$|f(x)|\chi_{E_k}(x) \le |f(x)|\chi_E(x) \in L(\mathbb{R}), k = 1, 2, \cdots, x \in \mathbb{R}$$

且至少 $|f(x)|\chi_{E_k}(x)$ 依测度收敛到 $|f(x)|\chi_{E_0}(x)$, 故根据依测度收敛型控制收敛定理(4.2.16)知

$$|\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx| \le \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\chi_{E_k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} |f(x)|\chi_{E_k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} 0dx = 0.$$

故

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx = 0.$$

•[2]

✍ **练习 4.23** 设 $f, g \in L(E), f_k, g_k \in L(E), |f_k(x)| \le M(k = 1, 2, \cdots)$, 且

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|dx \to 0, \int_E |g_k(x) - g(x)|dx \to 0, \quad k \to \infty$$

试证明

$$\int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)|dx \to 0, \quad k \to \infty.$$

证明

知

$$\begin{aligned}\int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)|dx &= \int_E |f_k(x)g_k(x) - f_k(x)g(x) + f_k(x)g(x) - f(x)g(x)|dx \\ &\le \int_E |f_k(x)| \cdot |g_k(x) - g(x)|dx + \int_E |g(x)| \cdot |f_k(x) - f(x)|dx \\ &=\end{aligned}$$

✍ **练习 4.24** 设 $f_k \in L(E)(k = 1, 2, \cdots)$, 且 $f_k(x)$ 在 $E$ 上一致收敛于 $f(x)$, 若 $m(E) < +\infty$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

证明

根据一致收敛的定义:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall n > N \forall x \in E(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

故

$$|\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx - \int_E f(x)dx| \le \lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|dx < \varepsilon m(E), \quad k > N$$

根据 $m(E) < +\infty$ 即知 $|\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx - \int_E f(x)dx| = 0$, 命题即证.

•[3]

✍ **练习 4.25** 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非负可积, 且有 $E \subset (0, +\infty)$, $\int_E f(x)dx = 1$, 则

$$\int_E f(x) \cos x dx \ne 1.$$

证明

[2]不知道加和的第二项怎么处理, 目前的思路是看 $f_n$ 有没有更好的收敛性

[3]答案看不懂

✍ **练习 4.26** 设 $f \in L(\mathbb{R}), f_n \in L(\mathbb{R})(n=1,2,\cdots)$, 且有

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)|dx \leq \frac{1}{n^2}, \quad n=1,2,\cdots$$

则

$$f_n(x) \to f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

证明

要证明 $f_n(x) \to f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}$, 只需证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)-f(x)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)|dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

故根据逐项收敛定理知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)-f(x)|dx < +\infty$$

这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)-f(x)| \in L(\mathbb{R})$, 故其在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有限, 也即几乎处处收敛.

✍ **练习 4.27** 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n| < \ln n (n=2,3,\cdots)$, 则

$$\int_{[2,+\infty)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}.$$

证明

为了应用逐项收敛定理, 首先证明

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{[2,+\infty)} |a_n n^{-x}| dx < +\infty$$

这是因为

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \int_{[2,+\infty)} |a_n n^{-x}| dx &= \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \int_{[2,+\infty)} n^{-x} dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} \ln n \cdot \int_{[2,+\infty)} n^{-x} dx \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \ln n \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \int_{[k,k+1)} n^{-x} dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} \ln n \cdot \sum_{k=2}^{\infty} n^{-k} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \ln n \cdot n^{-2} \frac{1}{1-n^{-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2-n}
\end{aligned}$$

而

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2-n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} < +\infty$$

故

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{[2,+\infty)} |a_n n^{-x}| dx < +\infty$$

从而根据逐项收敛定理:

$$\int_{[2,+\infty)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{[2,+\infty)} a_n n^{-x} dx$$

故只需证

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \int_{[2,+\infty)} a_n n^{-x} dx - \frac{a_n}{\ln n} n^{-2} \right) = 0$$

现在说明对 $n=2,3,\cdots$ 均有

$$\int_{[2,+\infty)} a_n n^{-x} dx = \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}$$

当 $a_n=0$ 时显然, 当 $a_n\neq 0$ 时只需说明 $\int_{[2,+\infty)} n^{-x}dx=\frac{n^{-2}}{\ln n}, n=2,3,\cdots$. 因为 $n^{-x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上非负[4], 故:

$$\int_{[2,+\infty)} n^{-x}dx=\int_2^{+\infty} e^{-x\ln n}dx=\frac{-1}{\ln n}\int_2^{+\infty} e^{-x\ln n}d(-x\ln n)=\frac{n^{-2}}{\ln n},\quad n=2,3,\cdots$$

命题即证.

**练习 4.28** 设定义在 $E\times\mathbb{R}^n$ 的函数 $f(x,\boldsymbol{y})$ 满足

1. 对每一个 $y\in\mathbb{R}^n$, $f(x,\boldsymbol{y})$ 是 $E$ 上的可测函数;
2. 对每一个 $x\in E$, $f(x,\boldsymbol{y})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

若存在 $g\in L(E)$, 使得 $|f(x,\boldsymbol{y})|\le g(x)$, a.e. $x\in E$,, 则函数

$$F(\boldsymbol{y})=\int_E f(x,\boldsymbol{y})dx$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

证明

考察

$$|F(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{y})|=|\int_E (f(x,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h})-f(x,\boldsymbol{y}))dx|$$

## 4.3 可积函数与连续函数的关系

### 4.3.1 知识梳理

**定理 4.3.1**

若 $f\in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 具有紧支集的连续函数 $g(\boldsymbol{x})$, 使得

$$\int_E |f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<\varepsilon$$

证明[5]

首先说明对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的可测简单函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 使得

$$\int_E |f(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<\varepsilon$$

这是因为当 $E$ 无界, 也即 $m(E)=+\infty$, 此时根据定理(4.2.5)知对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $N$, 使得

$$\int_{E\setminus B(0,N)} |f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<\varepsilon$$

从而只需在 $E\cap B(0,N)$ 内研究即可. 根据简单函数逼近定理(3.1.8)知存在 $E\cap B(0,N)$ 上的可测简单函数列 $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$, 使得 $|\varphi_k(\boldsymbol{x})|\le|f(\boldsymbol{x})|$, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in E\cap B(0,N)$$

这说明可以找到足够大的 $K$ 使得

$$|f(\boldsymbol{x})-\varphi_k(\boldsymbol{x})|<\frac{\varepsilon}{N^p},\quad k>K, p>n+1$$

从而

$$\int_{E\cap B(0,N)} |f(\boldsymbol{x})-\varphi_k(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<C_n(N)\frac{\varepsilon}{N^p}<C\varepsilon$$

[4]这里用到了之后 Lebesgue 积分与 Riemann 积分等价的条件, 在此可以简单理解为: 在被积函数非负与积分区域有限两个情况下, 只要 Riemann 积分存在, 那它就等于 Lebesgue 积分.

[5][1] 在这个定理的证明中并没有考虑 $E$ 无界的情况, 从而在 Lusin 定理推论的那一步私以为是有问题的.

其中 $C_n(N)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $N$ 的球的体积, $C$ 是常数. 综上即得

$$\begin{aligned}\int_E|f(\boldsymbol{x})-\varphi_k(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}&=\int_{E\setminus B(0,N)}|f(\boldsymbol{x})-\varphi_k(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}+\int_{E\cap B(0,N)}|f(\boldsymbol{x})-\varphi_k(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}\\&\le\int_{E\setminus B(0,N)}|f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}+\int_{E\setminus B(0,N)}|\varphi_k(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}+C\varepsilon\le 2\varepsilon+C\varepsilon,\quad k>K\end{aligned}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性, 同时根据推论(3.1.3)知可以取 $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ 是紧支函数列, 故任取满足 $k>K$ 的 $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ 即为欲求. 而当 $E$ 有界时取 $N$ 足够大即可.

现在, 已经知道对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支可测简单函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 满足

$$\int_E|f(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<\varepsilon$$

既然 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 是简单函数, 其首先有界, 不妨设 $|\varphi(\boldsymbol{x})|\le M$. 现在 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 作为紧支函数, 不妨设其支集为 $F$, 显见 $F$ 有界. 根据 Lusin 定理的推论(3.3.1), 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支连续函数 $g(\boldsymbol{x})$, 使得

$$m(\{\boldsymbol{x}\in F:|\varphi(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|>0\})<\frac{\varepsilon}{M}$$

根据 Lusin 定理推论(3.3.1)中紧支连续函数的构造, 可以令 $g(\boldsymbol{x})$ 的支集就包含在 $F$ 中, 且 $|g(\boldsymbol{x})|\le M$, 进而

$$\begin{aligned}\int_E|\varphi(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}&=\int_F|\varphi(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=\int_{\{}\{\boldsymbol{x}\in F:|\varphi(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|>0\}\}|\varphi(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}\\&\le\int_{\{}\{\boldsymbol{x}\in F:|\varphi(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|>0\}\}(|\varphi(\boldsymbol{x})|+|g(\boldsymbol{x})|)d\boldsymbol{x}\le 2Mm(\{\boldsymbol{x}\in F:|\varphi(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|>0\})<2\varepsilon\end{aligned}$$

最后知

$$\int_E|f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}\le\int_E|f(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}+\int_E|\varphi(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<3\varepsilon$$

命题即证. □

**笔记** 上述定理说明, 如果 $f\in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $f$ 的分解:

$$f(x)=g(x)+[f(x)-g(x)]=f_1(x)+f_2(x)$$

其中 $f_1(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支连续函数, $|f_2(x)|$ 在 $E$ 上的积分小于 $\varepsilon$.

**推论 4.3.1**

设 $f\in L(E)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数列 $\{g_k(\boldsymbol{x})\}$, 使得

1. $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f(\boldsymbol{x})-g_k(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=0$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$, a.e. $\boldsymbol{x}\in E$.

上面推论的一维情况如下.

**推论 4.3.2**

设 $f\in L([a,b])$, 则存在支集在 $(a,b)$ 内的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

1. $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|dx=0$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$.

下面的定理看似是一个寻常推论, 但注释彰显其不凡.

**定理 4.3.2**

设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$. 若对一切 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0,$$

则 $f(\boldsymbol{x})=0$, a.e. $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

证明

采用反证法. 不妨设 $f(\boldsymbol{x})$ 在有界正测集 $E$ 上非零, 进一步可设 $f(\boldsymbol{x})>0, x\in E$. 则根据推论(4.3.1)知, 可作紧支连续函数列 $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$ 用来" 逼近"$\chi_E(\boldsymbol{x})$, 也即:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_E(\boldsymbol{x})-\varphi_k(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=0, |\varphi_k(\boldsymbol{x})|\le 1(k=1,2,\cdots), \lim_{k\to\infty}\varphi_k(\boldsymbol{x})=\chi_E(\boldsymbol{x})(\text{a.e. } \boldsymbol{x}\in E).$$

因为 $|\varphi_k(\boldsymbol{x})|\le 1\Rightarrow|f(\boldsymbol{x})\varphi_k(\boldsymbol{x})|\le|f(\boldsymbol{x})|, \boldsymbol{x}\in E$, 故由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$0<\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x})\chi_E(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x})\varphi_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0$$

矛盾! □

笔记 这个定理的概率论版本出现在陈昕昕老师教授的《数理统计》课堂中过, 换成概率论的语言或许会让人感到眼熟.

**推论 4.3.3**

设 $\xi$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 到 $(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}^n,m)$ 的随机变量, 其中 $m$ 是 Lebesgue 测度, $\mathscr{B}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 代数. 如果 $\mathbb{E}(\xi)<+\infty$, 且对一切 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支连续函数有

$$\mathbb{E}(\varphi(\xi))=0$$

那么 $\xi$ 几乎必然为 0.

**定理 4.3.3 (平均连续性)**

若 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=0.$$

证明

任给 $\varepsilon>0$, 作分解 $f(\boldsymbol{x})=f_1(\boldsymbol{x})+f_2(\boldsymbol{x})$, 其中 $f_1(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支连续函数, $f_2(\boldsymbol{x})$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<\varepsilon$$

因为 $f_1(\boldsymbol{x})$ 紧支, 故其也是一致连续函数, 从而存在 $\delta>0$, 当 $|h|<\delta$ 时, 有[6]

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f_1(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<\varepsilon$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}&\le\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f_1(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}+\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f_2(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}\\&<\varepsilon+\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})|d\boldsymbol{x}+\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=\varepsilon+2\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<2\varepsilon.\end{aligned}$$

□

**推论 4.3.4**

若 $f\in L(E)$, 则存在具有紧支集的阶梯函数列 $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$, 使得

1. $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ a.e. $\boldsymbol{x}\in E$;
2. $\lim_{k\to\infty}\int_E|f(\boldsymbol{x})-\varphi_k(\boldsymbol{x})|dx=0$.

- 证明

[6] 因为是紧支, 所以 $\mathbb{R}^n$ 上的积分说到底还是有界闭集上的积分, 再套用一致连续的定义就好说了.

**定理 4.3.4 (Riemann-Lebesgue 引理的推广)**

若 $\{g_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数列, 且满足

1. $|g_n(x)| \leq M(x \in [a,b])(n = 1,2,\cdots)$;
2. 对任意的 $c \in [a,b]$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,c]} g_n(x)dx = 0,$$

则对任意的 $f \in L([a,b])$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f(x)g_n(x)dx = 0.$$

证明

根据推论(4.3.4), 对任给的 $\varepsilon > 0$, 可作阶梯函数 $\varphi(x)$, 使得

$$\int_{[a,b]} |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$$

不妨设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上有表示式

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \chi_{[x_{i-1},x_i)}(x), \quad x \in [a,b)$$

其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$. 因为

$$|\int_{[a,b]} \varphi(x)g_n(x)dx| = |\int_{[a,b]} \sum_{i=1}^{p} y_i \chi_{[x_{i-1},x_i)}(x)g_n(x)dx| \leq \sum_{i=1}^{p} |y_i \int_{[x_{i-1},x_i]} g_n(x)dx|$$

根据条件 2, 可以证明对任意的 $[c,d] \subset [a,b]$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \int [c,d]g_n(x)dx = 0$, 进而针对 $[x_{i-1},x_i]$ 可取 $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{py_i}$, 可知

$$\exists N_i > 0 \forall n > N_i (|\int [x_{i-1},x_i]g_n(x)dx| < \varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{py_i})$$

因为 $x_0,\cdots,x_p$ 终究是有限个点, 故上述 $N_i$ 也只有有限个, 从而可以取它们中最大的记作 $N$, 得到 $n > N$ 时

$$\sum_{i=1}^{p} |y_i \int_{[x_{i-1},x_i]} g_n(x)dx| < \sum_{i=1}^{p} |y_i| \cdot \frac{\varepsilon}{py_i} = \varepsilon$$

最后可知当 $n > N$ 时有:

$$\begin{aligned} |\int_{[a,b]} f(x)g_n(x)dx| &\leq |\int_{[a,b]} (f(x) - \varphi(x))g_n(x)dx| + |\int_{[a,b]} \varphi(x)g_n(x)dx| \\ &\leq M \int_{[a,b]} |f(x) - \varphi(x)|dx + \varepsilon < (M+1)\varepsilon \end{aligned}$$

命题即证. □

## 4.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

### 4.4.1 知识梳理

回忆 Riemann 积分中, 设 $f(x)$ 是定义在 $I = [a,b]$ 上的有界函数, $\{\Delta^{(n)}\}$ 是对 $[a,b]$ 作的分划序列:

$$\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b, \quad n = 1,2,\cdots$$

记

$$|\Delta^{(n)}| = \max\{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)} : 1 \leq i \leq k_n\}$$

并令 $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta^{(n)}|=0$. 对每个 $i$ 以及 $n$, 若令

$$M^{(n)}=\sup\{f(x): x_{i-1}^{(n)}\le x\le x_i^{(n)}\},$$
$$m^{(n)}=\inf\{f(x): x_{i-1}^{(n)}\le x\, ex_i^{(n)}\},$$

z 则关于 $f(x)$ 的 Darboux 上下积分有

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}M_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}),$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}m_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}).$$

**引理 4.4.1**

设 $f(x)$ 是定义在 $I=[a,b]$ 上的有界函数, 记 $\omega(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅函数:

$$\omega(x)=\lim_{\delta\to 0}\sup\{|f(x')-f(x'')|: x',x''\in[a,b]\}$$

则有:

$$\int_I \omega(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

其中上式左端是 $\omega(x)$ 在 $I$ 上的 Lebesgue 积分.

证明

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 故 $\omega(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 根据例 1.7 可知 $\omega(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数, 故 $\omega\in L([a,b])$.

对前面所提及的分划序列 $\{\Delta^{(n)}\}$, 作函数列

$$\omega_{\Delta^{(n)}}(x)=\begin{cases}M_i^{(n)}-m_i^{(n)}, & x\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}),\\ 0, & x\text{是 }\Delta^{(n)}\text{ 的分点}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,k_n, n=1,2,\cdots$$

并取

$$E=\{x\in[a,b]: x\text{是 }\Delta^{(n)}(n=1,2,\cdots)\text{ 的分点}\}.$$

显见 $m(E)=0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\omega_{\Delta^{(n)}}(x)=\omega(x),\quad x\in[a,b]\backslash E.$$

现在记 $A,B$ 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上, 下确界. 因为对一切 $n$ 都有 $\omega_{\Delta^{(n)}}(x)\le A-B$, 且 $I$ 是有界区间, 故根据有界收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \omega_{\Delta^{(n)}}(x)dx=\int_I\omega(x)dx.$$

另一方面, 根据 $\omega_{\Delta^{(n)}}(x)$ 本身的构造:

$$\int_I \omega_{\Delta^{(n)}}(x)dx=\sum_{i=1}^{k_n}(M_i^{(n)}-m_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})=\sum_{i=1}^{k_n}M_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})-\sum_{i=1}^{k_n}m_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})$$

得到

$$\int_I\omega(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_I\omega_{\Delta^{(n)}}(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

□

**定理 4.4.1 (Lebesgue 准则)**

若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续点集是零测集.

证明

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则 $f(x)$ 的 Darboux 上下积分相等, 进而根据引理(4.4.1)知 $\int_I \omega(x)dx = 0$. 根据 $\omega(x)$ 的定义知 $\omega(x) \geq 0$, 故 $\omega(x) = 0$ a.e. $x \in [a,b]$. 这说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集, 知 $f(x)$ 的振幅函数 $\omega(x) = 0$ a.e. $x \in [a,b]$, 进而由引理(4.4.1)知

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_I \omega(x)dx = 0$$

故 $f(x)$ 的 Darboux 上下积分相等, 得到 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

**定理 4.4.2**

若 $f(x)$ 在 $I = [a,b]$ 上 Riemann 可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Lebesgue 可积的, 且其积分值相同.

证明

首先说明 Lebesgue 可积性: 根据 $f(x)$ 的 Riemann 可积性与 Lebesgue 准则(4.4.1), 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续, 故 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数[7], 进而 $f \in L(I)$.

其次说明积分相等: 对 $[a,b]$ 的任一分划

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

根据 Lebesgue 积分对积分区域的可加性, 知

$$\int_I f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1},x_i]} f(x)dx$$

记 $M_i, m_i$ 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上下确界, 可得

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{[x_{i-1},x_i]} f(x)dx \leq M_i(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1,2,\cdots,n$$

从而

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \int_I f(x)dx \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

在上式左右两端对一切分划 $\Delta$ 取上下确界有:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_I f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

而由 Riemann 可积性知 $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$, 故

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_I f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分与 Riemann 积分是相等的.

**为整合起见, 对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分, 也记为**

$$\int_a^b f(x)dx.$$

下面再讨论瑕积分与反常积分:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

[7]有界性是 $f \in \mathcal{R}[a,b]$ 的必要条件.

**定理 4.4.3**

设 $\{E_k\}$ 是递增可测集列, 其并集是 $E$, 又

$$f \in L(E_k), \quad k = 1, 2, \cdots$$

若极限 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx$ 存在, 则 $f \in L(E)$, 且

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

证明

因为 $\{|f(x)|\chi_{E_k}(x)\}$ 是非负渐升列, 且

$$\lim_{k\to\infty} |f(x)|\chi_{E_k}(x) = |f(x)|, \quad x \in E$$

故由 Beppo Levi 定理知

$$\int_E |f(x)|dx = \lim_{k\to\infty} \int_E |f(x)|\chi_{E_k}(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx < +\infty$$

故 $f \in L(E)$. 又因为在 $E$ 上有

$$\lim_{k\to\infty} f(x)\chi_{E_k}(x) = f(x), |f(x)\chi_{E_k}(x)| \le |f(x)|, \quad k = 1, 2, \cdots$$

故由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

笔记 在上述定理中, 特别当 $E_k$ 是矩体 $I_k$, 且 $f(x)$ 在每个 $I_k$ 上都是 Riemann 可积函数, 条件

$$\lim_{k\to\infty} \int_{I_k} |f(x)|dx < +\infty$$

成立时, 就可以通过计算 Riemann 积分 $\int_{I_k} f(x)dx$ 得到 Lebesgue 积分

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f(x)dx$$

的值.

在 [9] 中对于无穷区间反常积分有下述定理, 为了区分 Lebesgue 积分与 (反常意义下的)Riemann 积分, 在这个定理中还是用 $\int_{[a,+\infty)} f(x)dx$ 表示前者, 而用 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 表示后者.

**定理 4.4.4**

$f \in R[a, +\infty) \cap L[a, +\infty) \Leftrightarrow |f| \in R[a, +\infty)$, $f$ 在 $[a, +\infty)$ 上可测, 且

$$\int_{[a,+\infty)} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

证明

当 $f \in R[a, +\infty) \cap L[a, +\infty)$, 知 $|f| \in L[a, +\infty)$ 且 $f$ 在 $[a, +\infty)$ 上可测. 又因为 $f \in R[a, +\infty)$, 知对任意的 $b > a$, 有

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_{[a,b]} |f(x)|dx \le \int_{[a,+\infty)} |f(x)|dx < +\infty$$

再令 $b \to \infty$ 得到

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \le \int_{[a,+\infty)} |f(x)|dx$$

也即 $|f| \in R[a, +\infty)$.

当 $f$ 在 $[a, +\infty)$ 上可测, $|f| \in R[a, +\infty)$ 且题等式成立, 考虑对任意的 $b_n > a, b_n \nearrow \infty, n \to \infty$, 令 $E_n = [a, b_n]$,

作

$$f_n(x) = f(x)\chi_{E_n}(x)$$

则由 $\{E_n\}$ 是渐升列知 $|f_n(x)| \nearrow |f(x)|$, 注意到:

$$\int_{[a,+\infty)} |f_n(x)|dx = \int_{[a,b_n]} |f_n(x)|dx = \int_a^{b_n} |f_n(x)|dx \le \int_a^{+\infty} |f_n(x)|dx < \infty$$

这说明 $|f_n| \in L[a,+\infty)$. 根据 Beppo Levi 定理知

$$\int_{[a,+\infty)} |f(x)|dx = \int_{[a,+\infty)} \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,+\infty)} |f_n(x)|dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} |f_n(x)|dx \le \lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$$

故 $|f| \in L[a,+\infty)$. 又因为 $|f_n| \le |f|$, 故由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\int_{[a,+\infty)} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,+\infty)} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b_n]} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

命题即证. □

笔记 现在回过头看看 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系, 大致可以得到两者相等的两个条件: 其一是积分区域有界, 其二是被积函数同时 Riemann 可积与 Lebesgue 可积.

### 4.4.2 例子整理

**例题 4.9** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界可测函数, 且不恒为零. 若有

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

则 $f(x) = e^{ax}(x \in \mathbb{R})$.

**例题 4.10** 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则它在 $[0,+\infty)$ 上的反常积分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

但同时

$$\int_0^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|dx = +\infty$$

这说明 $f \notin L[0,+\infty)$.

### 4.4.3 思考题

**练习 4.29** 函数 $f(x) = \sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不可积.

证明

此即证明

$$\int_0^{+\infty} |\sin x^2|dx = +\infty$$

## 4.5 重积分与累次积分的关系

### 4.5.1 知识梳理

首先给出符号约定: 令 $n = p + q$, 其中 $p, q$ 是正整数,

$$\mathbb{R}^p, \quad \boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$$

$$\mathbb{R}^q, \quad \boldsymbol{y} = (\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \cdots, \xi_{p+q})$$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\xi_1, \cdots, \xi_p, \xi_{p+1}, \cdots, \xi_n)$$

并记定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f$ 的积分为

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}.$$

现在希望知道等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^p} d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

何时成立, 为此先分析一下上式的意义. 上式左端是 $f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分, 故要求 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测; 上式右端称作累次积分, 表示 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 先对 $\boldsymbol{y}$ 在 $\mathbb{R}^q$ 上积分, 再对关于 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $\int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ 作 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上的积分. 要让这两步积分都有意义, 需要保证 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 作为 $\boldsymbol{y}$ 的函数在 $\mathbb{R}^q$ 上可测, 且 $\int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ 作为 $\boldsymbol{x}$ 的函数在 $\mathbb{R}^p$ 上可测.

综合这些分析, 对于非负可测函数可以提出下述定理.

**定理 4.5.1 (Tonelli(非负可测函数))**

设 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数, 则有:

1. 对于几乎处处的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p$, $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 作为 $\boldsymbol{y}$ 的函数是 $\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数;
2. 记 $F_f(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$, 则 $F_f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数;
3. $\int_{\mathbb{R}^p} F_f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^p} d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$.

♡

因为非负可测函数本身是非负可测简单函数渐升列的极限, 所以可以先从简单函数类出发证明定理, 这便需要研究定理(4.5.1)中三个条件所成的函数类是否对加法, 数乘与极限封闭. 为此记满足定理(4.5.1)的三个条件的非负可测函数全体为 $\mathscr{F}$(显见 $\mathscr{F}$ 非空), 先考虑下面的引理.

**引理 4.5.1**

1. 若 $f\in\mathscr{F}$, 且 $a\geq 0$, 则 $af\in\mathscr{F}$;
2. 若 $f_1,f_2\in\mathscr{F}$, 则 $f_1+f_2\in\mathscr{F}$;
3. 若 $f,g\in\mathscr{F}$, $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq 0$, 且 $g\in L(\mathbb{R}^n)$, 则 $f-g\in\mathscr{F}$;
4. 若 $f_k\in\mathscr{F}(k=1,2,\cdots)$, $f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leq f_{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(k=1,2,\cdots)$, 且有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, 则 $f\in\mathscr{F}$.

♡

证明

1., 2. 根据可测函数类对加法与数乘的封闭性与积分的线性性立得.

对 3., 因为 $g\in\mathscr{F}$ 可积, 故根据 $\mathscr{F}$ 中函数满足的定理(4.5.1)的第三个条件 (下简称 T3), 知

$$\int_{\mathbb{R}^p} F_g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}<\infty$$

这说明 $F_g(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^q} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上几乎处处有限, 再根据 T2 知, 对几乎处处的 $\boldsymbol{x}$ 都有

$$F_g(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^q} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}<\infty$$

这说明对几乎处处的 $\boldsymbol{x}$, 固定 $\boldsymbol{x}$ 后 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 作为 $\boldsymbol{y}$ 的函数在 $\mathbb{R}^q$ 上几乎处处有限. 进而从等式 •[8]

$$(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\quad \text{a.e. } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

可知 $f-g\in\mathscr{F}$.

对 4., 对 $f$ 逐一验证三个条件.

T1: 这是因为可测函数类对极限的封闭性.

T2: 这是因为根据 Beppo Levi 定理(4.1.7)有:

$$\int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^q} f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

而每一个 $\int_{\mathbb{R}^q} f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ 根据 T2 都是非负可测函数, 故由可测函数类对极限的封闭即得.

[8] 这里没弄清楚.

T3: 这是因为既然 $f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le f_{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 得 $F_{f_k}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^q} f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \le \int_{\mathbb{R}^q} f_{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = F_{f_{k+1}}(\boldsymbol{x})$, 从而 $\{F_{f_k}(\boldsymbol{x})\}$ 也是非负可测函数渐升列, 且本身由 Beppo Levi 定理知 $\lim\limits_{k\to\infty} F_{f_k}(\boldsymbol{x}) = F_f(\boldsymbol{x})$. 故一方面:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

另一方面:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} F_{f_k}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

又因为 $f_k \in \mathscr{F}(k = 1, 2, \cdots)$, 根据 T3 知对每个 $f_k$ 都有:

$$\int_{\mathbb{R}^p} F_{f_k}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

综上即得

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^p} F_{f_k}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

同理可证

$$\int_{\mathbb{R}^p} d\boldsymbol{x} \int_{\mathbb{R}^q} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}.$$

□

现在着手证明定理(4.5.1).

证明

根据前面的记号, 定理(4.5.1)可改述为: 非负可测函数类在 $\mathscr{F}$ 中. 其次, 因为非负可测函数是非负可测简单函数渐升列的极限, 而引理(4.5.1)第四条 (下简称 L4) 说明 $\mathscr{F}$ 对单调渐升列的极限封闭, 故只需说明非负可测简单函数类在 $\mathscr{F}$ 中. 又因为 L2, 知非负可测简单函数本身是由诸特征函数相加而成, 故只需证明任一可测集 $E$ 上的特征函数 $\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 都属于 $\mathscr{F}$ 即可. 下面就对 $E$ 的性质进行讨论.

(i) $E = I_1 \times I_2$, 其中 $I_1, I_2$ 分别为 $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ 中的矩体. 显见[9]

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = m(E) = |I_1| \times |I_2|$$

此外, 对每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$, $\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 显然是 $\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数[10], 且

$$F_\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} |I_2|, & \boldsymbol{x} \in I_1 \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin I_1 \end{cases}$$

故 $F_\chi(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数, 且根据 $F_{chi}(\boldsymbol{x})$ 的定义立得

$$\int_{\mathbb{R}^p} F_\chi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = |I_1| \times |I_2|$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}^p} F_\chi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

同理可证

$$\int_{\mathbb{R}^p} d\boldsymbol{x} \int_{\mathbb{R}^q} \chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

验证条件 T1-T3 即得 $\chi_E \in \mathscr{F}$.

(ii) 如果 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则根据开集构造知 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, 其中 $I_k$ 是互不相交的半开闭矩体. 令 $E_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, 根据 (i) 与 L2 知 $\chi_{E_k} \in \mathscr{F}$, 进而由 $\lim\limits_{k\to\infty} \chi_{E_k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 与 L4 知 $\chi_E \in \mathscr{F}$.

(iii) 如果 $E$ 是有界闭集, 则 $E$ 可被表成两个有界开集的差集[11], 从而由 (ii) 与 L3 可知 $\chi_E \in \mathscr{F}$.

---

[9] 其实这一步不那么显见, 涉及了乘积测度, 不过这里" 想想也是", 既然 $E = I_1 \times I_2$, 符合直觉的乘积测度就应该满足 $m(E) = |I_1| \times |I_2|$.

[10] 这一步对一般的 $E$ 并不显然, 需要证明可测集的截口依旧可测. 不过在这里, 因为对每个固定的 $\boldsymbol{x}$, $E$ 的截口总是 $I_1$, 而 $I_1$ 可测, 就没有什么问题了.

[11] 因为 $E$ 有界, 故总存在开球 $B$ 包含 $E$. 易知 $B\backslash E$ 是开集, 故 $E = B\backslash(B\backslash E)$.

(iv) 设 $\{E_k\}$ 是递减可测集合列, 且 $m(E_1)<\infty$, 记 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$. 若 $\chi_{E_k}\in\mathscr{F}$, 知 $\lim_{k\to\infty}\chi_{E_k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 又因为 $m(E_1)<\infty$, 由非负可积渐降列的单调收敛定理 (或 Lebesgue 控制收敛定理) 可推知 $\chi_E\in\mathscr{F}$.

(v) 若 $E$ 是零测集, 知此时存在递减开集列 $\{G_k\}$ 满足 $G_k\supset E, k=1,2,\cdots$, 且

$$\lim_{k\to\infty}m(G_k)=0$$

令 $H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$, 则由 (iv) 与 (ii) 知 $\chi_H\in\mathscr{F}$. 又因为 $E\subset H$, 且 $m(H)=0$, 有

$$0\le\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\le\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}\chi_H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0$$

及

$$\int_{\mathbb{R}^n}\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=m(E)=0$$

得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0$$

同理可证

$$\int_{\mathbb{R}^n}\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0$$

这说明 $\chi_E$ 满足 T3. 同时, 既然 $\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0$, 而 $F_{\chi_E}(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^p}\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ 非负, 故 $F_{\chi_E}(\boldsymbol{x})=0$ a.e. $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p$. 这进而说明对几乎处处的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p$, 有 $\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ a.e. $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^q$, 故 $\chi_E$ 同样满足 T1, T2, 从而 $\chi_E\in\mathscr{F}$.

结合这些命题, 终于可以对可测集讨论了:

(vi) 若 $E\in\mathscr{M}$, 则 $\chi_E\in\mathscr{F}$.

因为 $E\in\mathscr{M}$, 根据等测核的定理(2.3.3)知, 存在 $F_\sigma$ 集 $K$ 与零测集 $Z$ 使得 $E=K\cup Z$, 特别设 $K=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 其中每个 $F_k$ 都是有界闭集. 由 (iii) 与类似 (ii) 的方法可证 $\chi_K\in\mathscr{F}$, 再根据

$$\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\chi_K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\chi_Z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

与 (v), L2 结合即知 $\chi_E\in\mathscr{F}$. □

**笔记** 若 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 $E$ 上的非负可测函数, 则可用 $f(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 代替定理(4.5.1)中的 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 得到

$$\int_E f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\chi_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

将 Tonelli 定理中的非负可测函数进行拓展, 对一般的可积函数而言, 就有下述定理.

**定理 4.5.2 (Fubini(可积函数))**

若 $f\in L(\mathbb{R}^n),(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, 则

1. 对于几乎处处的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p$, $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可积函数;
2. 积分
$$\int_{\mathbb{R}^q}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$
是 $\mathbb{R}^p$ 上的可积函数;
3. $\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^q}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^q}d\boldsymbol{y}\int_{\mathbb{R}^p}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}$.

证明

令

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-f^-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

根据非负可测函数的 Tonelli 定理知, $f^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和 $f^-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 均满足定理(4.5.2)的三个条件. 注意到所有的积分值均有限, 故根据积分的线性性即得结论. □

下面通过 Fubini 定理与 Tonelli 定理讨论低维欧氏空间点集与高维欧氏空间的测度关系.

**定义 4.5.1 (截口)**

设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 中的点集, 对任意的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$, 令

$$E(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^q : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E\},$$

称它为点集 $E$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的截口.

♣

**定理 4.5.3**

若 $E$ 是可测集, 则对几乎处处的 $\boldsymbol{x}$, $E(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^q$ 中的可测集, $m(E(\boldsymbol{x}))$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上 (几乎处处有定义) 的可测函数, 且

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^p} m(E(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}.$$

♡

证明

在 Tonelli 定理(4.5.1)中令 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \chi_E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. 根据 Tonelli 定理知:

1. 对几乎处处的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$, $\chi_E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 作为 $\boldsymbol{y}$ 的函数是 $\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数.
2. $F_f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^q} \chi_E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数.
3. $\int_{\mathbb{R}^p} F_f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^p} d\boldsymbol{x} \int_{\mathbb{R}^q} \chi_E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$.

现在 1. 对应 $E(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^q)$, 2. 对应 $m(E(\boldsymbol{x}))$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上 (几乎处处有定义) 的可测函数, 3. 对应最后的积分式.

□

**定理 4.5.4**

若 $E_1$ 和 $E_2$ 是 $\mathbb{R}^p$ 和 $\mathbb{R}^q$ 中的可测集, 则 $E_1 \times E_2$ 是 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 中的可测集, 且有

$$m(E_1 \times E_2) = m(E_1) \cdot m(E_2).$$

♡

证明

因为

$$\chi_{E_1}(\boldsymbol{x}) \cdot \chi_{E_2}(\boldsymbol{y}) = \chi_{E_1 \times E_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

故如果能证明 $E_1 \times E_2$ 是 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 中的可测集, 则由 Tonelli 定理立知

$$m(E_1 \times E_2) = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} \chi_{E_1 \times E_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^p} \chi_{E_1}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \int_{\mathbb{R}^q} \chi_{E_2}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = m(E_1) \cdot m(E_2)$$

下面证明 $E_1 \times E_2 \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$. 因为 $E_1, E_2$ 本身可测, 根据等测核的定理(2.3.3)知存在 $F_\sigma$ 集 $K_1, K_2$ 与零测集 $Z_1, Z_2$ 使得

$$E_1 = K_1 \cup Z_1, \quad E_2 = K_2 \cup Z_2$$

根据 $F_\sigma$ 集的定义, 设 $K_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{1n}, K_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{2n}$, 其中 $\{G_{1n}\} \subset \mathbb{R}^p, \{G_{2n}\} \subset \mathbb{R}^q$ 是闭集列, 不妨设为递增闭集列 (这是因为对有限的 $n$ 而言, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{in}(i = 1, 2)$ 也是闭的). 又因为可设递增闭球列

$$B_{1n} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p : |\boldsymbol{x}| \le n\}, B_{2n} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q : |\boldsymbol{x}| \le n\} \Rightarrow \mathbb{R}^p = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1n}, \mathbb{R}^q = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2n}$$

得到[12]:

$$E_1 = (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{1n}) \cup Z_1 \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_{1n} \cap B_{1n}) \cup Z_1$$

$$E_2 = (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n}) \cup Z_2 \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_{2n} \cap B_{2n}) \cup Z_2$$

[12] 参考练习 1.2([**1**]pg.8 思考题 2.)

故不妨就记

$$E_1=(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{1n})\cup Z_1,\quad E_2=(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{2n})\cup Z_2$$

其中 $A_{1n}\subset\mathbb{R}^p, A_{2n}\subset\mathbb{R}^q$ 是有界闭集, 而 $Z_1\subset\mathbb{R}^p, Z_2\subset\mathbb{R}^q$ 是零测集. 故

$$\begin{aligned}E_1\times E_2&=((\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{1n})\cup Z_1)\times((\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{2n})\cup Z_2)\\&=(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{1n}\times A_{2n}))\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{1n}\times Z_2))\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{2n}\times Z_1))\cup(Z_1\times Z_2)\end{aligned}$$

可以证明至少在欧氏空间中, 有界闭集的 Cartesian 积依旧是有界闭集[13]. 从而 $E_1\times E_2$ 可以表示成可数个点集 $A\times B$ 的并集, 其中 $A,B$ 是有界闭集或者零测集. 故只需说明 $A\times B$ 的可测性即可, 下面证明这件事情.

当 $A,B$ 中有一个零测集, 不妨设 $A$ 是零测集, 此时根据零测集的定义知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^p$ 中的开矩体列 $\{I_k\}$ 满足

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\le\varepsilon$$

因为 $B$ 是有界闭集, 根据有界性知存在 $\mathbb{R}^q$ 中的开矩体列 $\{J_i\}$, 使得

$$B\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}J_i,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|J_i|<+\infty$$

现在知 $A\times B$ 被 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 中的开矩体列 $\{I_k\times J_i\}$ 所覆盖, 因此

$$m^*(A\times B)\le m(\bigcup_{k,i=1}^{\infty}(I_k\times J_i))\le\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|J_i|<\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}|J_i|$$

故 $A\times B$ 是 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 中的零测集, 因而可测.

当 $A,B$ 都是有界闭集, 知 $A\times B$ 是 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 中的闭集, 因而可测.

综上, $E_1\times E_2$ 在 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 中可测. □

**笔记** 本章末会引用 **[10]** 中的内容重新介绍一次 Fubini 定理的建立, 不过彼时是先得到了测度上的乘法公式, 再推出 Fubini 定理. 在整理这部分内容之前我一直以为 **[1]** 中有循环论证的谬误: 先默认了上述测度乘法公式成立推出的 Fubini 定理, 又反过来用 Fubini 定理推乘法公式. 但其实并非如此, 这是因为在欧氏空间与 Lebesgue 测度下本身对矩体有 $m(I_1\times I_2)=m(I_1)\cdot m(I_2)$, 后面的 Fubini 定理与乘积公式都是基于这个式子来的; 而 **[10]** 中是直接对抽象测度空间讨论, 彼时并不知道乘积空间的测度, 乃至乘积空间的拓扑也不知道, 所以需要重新规定 $\sigma$ 代数, 乘积测度等等一大堆" 繁琐" 的东西.

**推论 4.5.1 (可测函数图形的测度)**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负实值可测函数, 作点集

$$G_E(f)=\{(\boldsymbol{x},y)\in\mathbb{R}^{n+1}:\boldsymbol{x}\in E, y=f(\boldsymbol{x})\},$$

称它为 $y=f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上的图形[a]. 有

$$m(G_E(f))=0.$$

[a]注意 $E\subset\mathbb{R}^n$, 而 $G_E(f)\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

证明

当 $m(E)<+\infty$, 对任给的 $\delta>0$, 作分点:

$$0,\delta,2\delta,\cdots,k\delta,(k+1)\delta,\cdots,$$

[13]从拓扑的观点看, 这是因为有界闭集的 Cartesian 积所在的空间依据欧氏距离已经有拓扑了, 所以可以利用这个已经存在的拓扑来验证闭集.

令 $E_k = \{\boldsymbol{x} : k\delta \le f(\boldsymbol{x}) \le (k+1)\delta\}(k = 0, 1, \cdots)$, 显见

$$G_E(f) = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{E_k}(f), \quad E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$$

得到

$$m^*(G_E(f)) \le \sum_{k=0}^{\infty} m^*(G_{E_k}(f)) \le \sum_{k=0}^{\infty} \delta m(E_k) = \delta m(E).$$

由 $\delta$ 的任意性即得

$$m^*(G_E(f)) = 0$$

□

**定义 4.5.2 (下方图形)**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负实值函数, 记

$$\underline{G}(f) = \underline{G}_E(f) = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \boldsymbol{x} \in E, 0 \le y \le f(\boldsymbol{x})\},$$

称它为 $y = f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上的下方图形[a].

[a]这是 Riemann 积分中曲边梯形面积意义的推广.

♣

**定理 4.5.5 (积分的几何意义)**

1. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 是可测函数, 则 $\underline{G}(f)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的可测集, 且

$$m(\underline{G}(f)) = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

2. 若 $E$ 是可测集, $\underline{G}(f)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的可测集, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 是可测函数, 且

$$m(\underline{G}(f)) = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

♡

证明

1. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 是一个可测集上的特征函数, 结论显然成立. 注意到在互不相交子集的并集上的下方图形, 等于在每个子集上的下方图形的并, 故结论对非负可测简单函数也成立. 故对可测函数 $f(\boldsymbol{x})$, 作非负可测简单函数渐升列 $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$ 收敛到 $f(\boldsymbol{x})$, 可以证明

$$\lim_{k\to\infty} \underline{G}(\varphi_k) \cup Z = \underline{G}(f), \quad Z = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) : \boldsymbol{x} \in E\} \subset G_E(f)$$

因为 $f$ 的图形集 $G_E(f)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的零测集, 故 $\underline{G}(f)$ 不仅是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的零测集, 而且

$$m(\underline{G}(f)) = \lim_{k\to\infty} m(\underline{G}(\varphi_k)) = \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

2. 设 $H = \underline{G}(f)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的可测集, 根据 Tonelli 定理(4.5.1)知, 对几乎处处的 $y \in \mathbb{R}$, 截口 $H(y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集. 但同时

$$H(y) = \{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}) \ge y\}$$

故在除零测集的 $y$ 之外, $\{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}) \ge y\}$ 是可测集, 这便证明了在 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子集上对任意的 $y$ 有 $\{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}) \ge y\}$ 可测, 故 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 根据前述结论知

$$m(\underline{G}(f)) = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

□

下面顺便讨论一下卷积, 其在涉及算子的理论中扮演着至关重要的角色.

**定义 4.5.3 (卷积)**

设 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

存在, 则称此积分为 $f$ 与 $g$ 的卷积, 记为 $(f*g)(\boldsymbol{x})$.

笔记 回忆推论(3.3.3), 非奇异线性变换是保可测的, 所以 $f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 是 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

**定理 4.5.6 (卷积的存在性, 可积性有界性)**

若 $f,g\in L(\mathbb{R}^n)$, 则 $(f*g)(\boldsymbol{x})$ 对几乎处处的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 存在, $(f*g)(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数, 且有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|(f*g)(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}\le(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x})(\int_{\mathbb{R}^n}|g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}).$$

证明

首先不妨设 $f(\boldsymbol{x})\ge 0, g(\boldsymbol{x})\ge 0$. 因为 $f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})g(\boldsymbol{t})$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 故根据非负可测函数的 Tonelli 定理知

$$\int_{\mathbb{R}^n}d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})g(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}=\int_{\mathbb{R}^n}d\boldsymbol{t}\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})g(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}g(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}=\int_{\mathbb{R}^n}g(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}<+\infty$$

这说明 $(f*g)(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})g(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数, 进而其几乎处处有限, 当然几乎处处存在, 且

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}g(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

其次, 对于一般情形, 注意

$$|(f*g)(\boldsymbol{x})|=|\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})g(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}|\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})|\cdot|g(\boldsymbol{t})|d\boldsymbol{t}=(|f|*|g|)(\boldsymbol{x})$$

故

$$\int_{\mathbb{R}^n}|(f*g)(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}\le\int_{\mathbb{R}^n}(|f|*|g|)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}\int_{\mathbb{R}^n}|g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<+\infty.$$

□

**定理 4.5.7 (卷积的连续性)**

设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, $g(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界可测, 则 $F(\boldsymbol{x})=(f*g)(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一致连续函数.

证明

设 $|g(\boldsymbol{x})|\le M, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned}|F(x+h)-F(x)|&=|\int_{\mathbb{R}^n}f(x+h-t)g(t)dt-\int_{\mathbb{R}^n}f(x-t)g(t)dt|\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-t+h)-f(x-t)|\cdot|g(t)|dt\\&\le M\int_{\mathbb{R}^n}|f(t+h)-f(t)|dt\to 0,\quad h\to 0\end{aligned}$$

命题即证. □

特别可以注意下面的命题, 它阐明了卷积这个运算在 $L$ 中不存在单位.

**命题 4.5.1 ($L$ 中不存在卷积单位)**

$LL(\mathbb{R})$ 中不存在函数 $u(x)$, 使得对一切 $f\in L(\mathbb{R})$, 有

$$(u*f)(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

证明

用反证法, 假设存在 $u \in L(\mathbb{R})$ 满足上式, 根据积分的绝对连续性知存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_{-2\delta}^{2\delta} |u(x)|dx < 1.$$

取 $L(\mathbb{R})$ 中的函数 $f(x) = \chi_{[-\delta,\delta]}(x)$, 知

$$f(x) = (u * f)(x) = \int_{-\delta}^{\delta} u(x-y)dy = \int_{x-\delta}^{x+\delta} u(t)dt, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}$$

故必有 $x_0 \in [-\delta, \delta]$ 满足

$$f(x_0) = 1 = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} u(t)dt$$

1 另一方面注意 $-2\delta \le x_0 - \delta < x_0 + \delta \le 2\delta$, 故

$$1 = |\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} u(t)dt| \le \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |u(t)|dt \le \int_{-2\delta}^{2\delta} |u(t)|dt < 1$$

矛盾! 命题即证. □

可积性与可测集的可求和关系可以通过下面介绍的分布函数进一步论述, 它可以用来估算积分.

**定义 4.5.4**

设 $f(x)$ 在 $E$ 上可测, 则称

$$f_*(\lambda) = m(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}), \quad \lambda > 0$$

为 $f(x)$ 在 $E$ 上的分布函数.

♣

显见 $f_*(\lambda)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的递减函数.

**定理 4.5.8**

设 $f(x)$ 在 $E$ 上可测, 则对 $1 \le p < +\infty$, 有

$$\int_E |f(x)|^p dx = p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} f_*(\lambda)d\lambda$$

♡

证明

作函数

$$F(\lambda, x) = \begin{cases} 1, & |f(x)| > \lambda \\ 0, & |f(x)| \le \lambda \end{cases}$$

显见 $F(\lambda, x)$ 本身作为 $x$ 的函数是 $\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}$ 上的特征函数, 进而由 Tonelli 定理知

$$\int_E |f(x)|^p dx = \int_E dx \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda = \int_E dx \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} F(\lambda, x)d\lambda = \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} d\lambda \int_E F(\lambda, x)dx = p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} f_*(\lambda)d\lambda$$

□

### 4.5.2 例子整理

**例题 4.11(函数的累次积分存在且相等, 但重积分不存在)** 设 $E = [-1, 1]^2$, 作

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

易知 $f(x, y)$ 在 $E$ 上可测, 且若将 $x, y$ 中的一个固定, 则 $f(x, y)$ 是关于另一个变量的连续函数, 进而积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy, \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx$$

均存在. 因为被积函数都是奇函数, 故上述积分均为 0, 得到:

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy = 0$$

但 $f(x,y) \notin L(E)$. 这是因为如若 $f(x,y) \in L(E)$, 必有 $f$ 在 $[0,1]^2 \subset E$ 上可积, 进而根据 Fubini 定理知

$$\int_{[0,1]^2} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy dx = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy$$

应存在. 但 $x \neq 0$ 时有

$$\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+1)}$$

其在 $[0,1]$ 上并不可积, 矛盾! □

**笔记** 在初见这个例子的时候自己的疑惑在于: 为什么既说 $\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy$ 作为 $x$ 的函数在 $[0,1]$ 上不可积, 又在前面说 $\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy = 0$? 这是否偷偷用了类似 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$ 的主值积分? 经助教点拨得到解释: 在计算累次积分 $\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy$ 时, 顺序当然是先计算 $\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy$, 后计算它对 $x$ 的积分. 而在计算这个内层积分时, $x$ 是固定的, 且无论是在 Lebesgue 意义还是在 Riemann 意义下, 都可以忽略 $x = 0$ 这一个作为零测集的单点. 所以现在对非零的 $x$, 这个积分当然可以存在, 而且因为 $\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ 关于 $y$ 是奇函数, 所以这个积分正是 0, 因而再对 $x$ 积分结果也是 0. 在讨论的过程中感觉这中间蕴含的思想有点像一致性那块: 是否可以把 $x$ 固定? 还是说 $x$ 是可以随便动的?

**例题 4.12(Tonelli 定理对 Riemann 积分不真)** 可取 $E$ 是 $[0,1]^2$ 上的稠密集, 且任一平行于坐标轴的直线至多交 $E$ 于一个点, 作函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in E \\ 0, & (x,y) \notin E \end{cases}$$

因为在 $[0,1]^2$ 上 $f(x)$ 处处不连续, 当然有 $f \notin \mathcal{R}[0,1]^2$. 但如果给定一个变量, $f(x)$ 对另一个变量仅在一点处取 1, 其余处均取 0, 自然其积分为 0, 所以在 Riemann 积分的意义下:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx = 0 = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy.$$

□

**笔记** 关于这样的 $E$ 的存在性, **[5]** 中花了些许篇幅来说明[14]. 更进一步, 下面说明单位正方形 $I = [0,1]^2$ 中存在一个子集 $E$, 其在 $I$ 内稠密, 且与 $I$ 相交的每一条平行于坐标轴的直线, 都恰好交 $E$ 于一点.

重新审视一下这个集合的特点, 如果没有稠密这件事, $f(x) = x$ 的图像就是个很好的例子. 加上稠密后同样可以尝试构造一个 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 一一映射 $f(x)$, 使得它的图形在 $I$ 中稠密. 提起稠密的例子自然想起有理数, 所以先考虑在 $(0,1] \cap \mathbb{Q}$ 上定义这样的函数 $f(x)$. 设 $B = ((0,1] \cap \mathbb{Q})^2$ 中的点已经被排成序列[15]:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),\cdots$$

先定义 $f(x_1) = y_1$, 再把 $B$ 等分成四个不相交的部分:

$$((0,\frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q})^2, ((0,\frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q}) \times ((\frac{1}{2},1] \cap \mathbb{Q}), ((\frac{1}{2},1] \cap \mathbb{Q}) \times ((0,\frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q}), ((\frac{1}{2},1] \cap \mathbb{Q})^2$$

第一阶段: 将这四个部分分别记作 $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}$, 不妨就设 $(x_1,y_1) \in B_{14}$. 用 $(x_{11},y_{11})$ 表示序列 $\{(x_n,y_n)\}$ 中第一个属于 $B_{11}$, 又满足 $x_{11} \neq x_1, y_{11} \neq y_1$, 即与 $(x_1,y_1)$ 不在同一条水平或铅直线上的点, 取 $f(x_{11}) = y_{11}$. 下一步, 用 $(x_{12},y_{12})$ 表示序列 $\{(x_n,y_n)\}$ 中第一个属于 $B_{12}$, 又能使 $(x_{12},y_{12})$ 与 $(x_1,y_1),(x_{11},y_{11})$ 都不在一条水平或铅直线上的点, 取 $f(x_{12}) = y_{12}$. 同样这么取 $(x_{13},y_{14})$ 并令 $f(x_{13}) = y_{13}$ 之后, 用 $(x_{14},y_{14})$ 表示序列 $\{(x_n,y_n)\}$ 中第一个属于 $B_{14}$, 又能使 $(x_{14},y_{14})$ 与 $(x_1,y_1),(x_{1k},y_{1k})(k=1,2,3)$ 均不在同一水平或铅直线上的点, 令 $f(x_{14}) = y_{14}$.

第二阶段: 这一阶段的取点方法和第一阶段大同小异. 把 $B$ 进一步分割成 $4^2$ 份:$B_{21}, B_{22}, \cdots, B_{2,16}$, 在这

[14] **[5]** 中的构造过程有点小瑕疵, 在后面会用蓝字提示这个瑕疵.

[15] 这就是 $(0,1]^2$ 中的全体有理点, 进而 $B$ 是可列的.

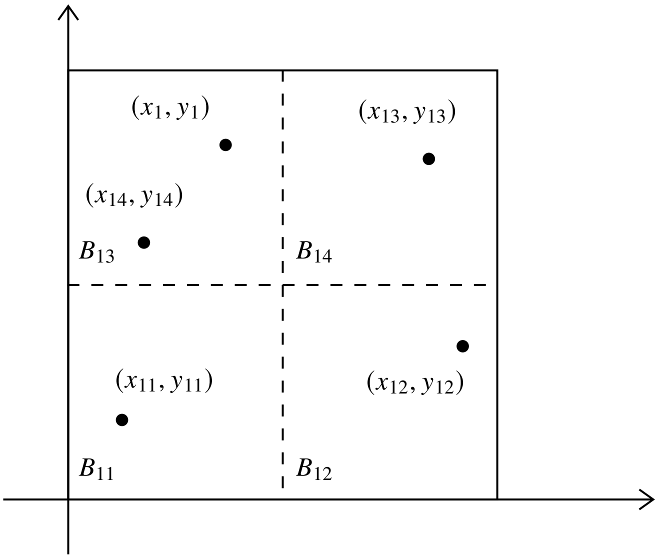


图 **4.2:** 第一阶段分解 $B$ 取点示意图

些部分的每一块, 都取一个点, 这个点满足它与先前出现过的所有点都不在同一水平或铅直线上. 记这些点为 $(x_{2k}, y_{2k})(k = 1, 2, \cdots, 16)$, 并令 $f(x_{2k}) = y_{2k}$.

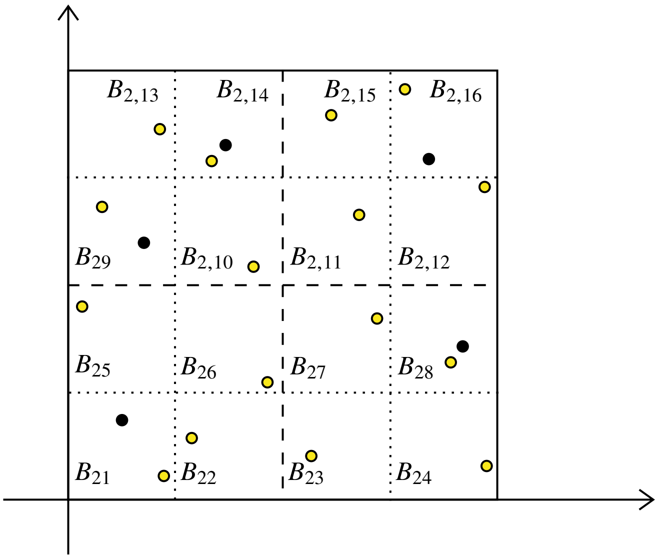


图 **4.3:** 第二阶段分解 $B$ 取点示意图

一直这样下去, 第 $n$ 阶段把 $B$ 分成了 $4^n$ 个相同的部分, 并令了 $4^n$ 个 $f$ 的值. 现在说明此时 $f$ 的图像在 $[0, 1]^2$ 中就已经是稠密的了: 这是因为在 $[0, 1]^2$ 中任取一点, 总会有这么一列矩形 $\{B_{ki}\}(k = 1, 2, \cdots)$ 一直包含该点. 而这个矩形列中的每个矩形内都至少包含一个 $f(x)$ 图像中的点, 故 $f(x)$ 的图像中总有一列点趋于目标点.

这里其实已经找到符合上述例题的 $E$, 就令之为 $f(x)$ 的图像就可以了, 但现在还不能保证与 $I$ 相交的" 每一条" 平行于坐标轴的直线, 都恰与 $f(x)$ 的图像交于一点. 比如全体形如 $x = r, r$ 是无理数的直线, 甚至是在上述过程中 $I_n$ 中, 在构造时可能没取到的一些有理点对应的直线. 为了弥补这些点, 记 $D = \{a \in [0, 1] : x = a, y = a$均与 $f(x)$ 的图像不交$\}$, 并补充 $f(x) = x, x \in D$. 这样得到的 $f(x)$ 对应的图像就是要求的集合. □

下面这个例子主要注意反常重积分中先设有限区间的方法.

**例题 4.13** 设 $f \in L[0, +\infty), a > 0$, 则有等式

$$\int_0^{+\infty} \sin ax dx \int_0^{+\infty} f(y)e^{-xy} dy = a \int_0^{+\infty} \frac{f(y)dy}{a^2 + y^2}$$

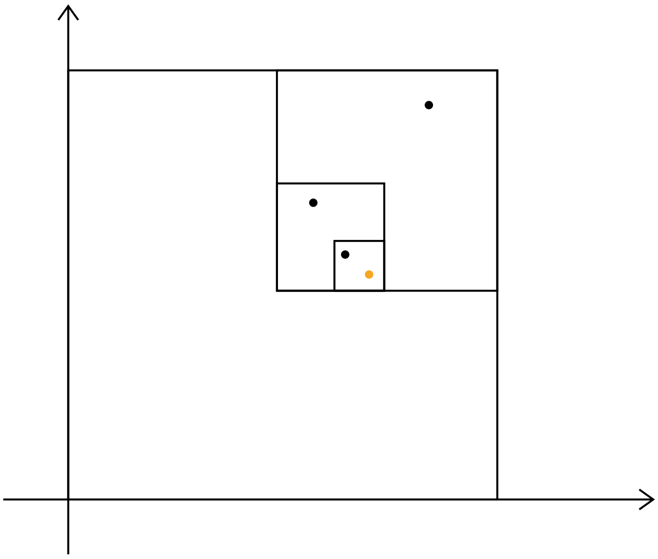

图 4.4: $f(x)$ 图像在 $[0,1]^2$ 中稠示意图

证明

既然

$$\int_0^{+\infty} \sin axe^{-xy}dx = \frac{a}{a^2+y^2}, \quad x>0$$

故只需证明原等式积分可交换次序. 考察二元可测函数 $\sin axf(y)e^{-xy}$, 因为它并不是非负的, 故要应用 Fubini 定理需要考察它的可积性. 取其绝对值并将 $x$ 的积分范围限制在 $[\delta, X], 0<\delta<X<+\infty$, 有[16]:

$$\int_\delta^X\int_0^{+\infty} |\sin ax\cdot f(y)e^{-xy}|dxdy \le \int_\delta^X\int_0^{+\infty} |f(y)|e^{-\delta y}dxdy \le (X-\delta)\int_0^{+\infty}|f(y)|dy$$

这说明 $\sin axf(y)e^{-xy}$ 在 $[\delta, X]\times[0,+\infty)$ 上可积, 因而

$$\int_\delta^X \sin axdx\int_0^{+\infty} f(y)e^{-xy}dy = \int_0^{+\infty} f(y)dy\int_\delta^X \sin axe^{-xy}dx$$

根据积分第二中值定理[17]知

$$|\int_\delta^X e^{-xy}\sin axdx| = |e^{-\delta y}\int_\delta^\xi \sin axdx| \le \frac{2}{a}, \quad 0<\delta<X<+\infty$$

进而由控制收敛定理:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin axdx\int_0^{+\infty} f(y)e^{-xy}dy &= \lim_{\substack{\delta\to0\\X\to+\infty}}\int_\delta^X \sin axdx\int_0^{+\infty} f(y)e^{-xy}dy\\ &= \lim_{\substack{\delta\to0\\X\to+\infty}}\int_0^{+\infty} f(y)dy\int_\delta^X \sin axe^{-xy}dx = \int_0^{+\infty} f(y)dy\int_0^{+\infty}\sin axe^{-xy}dy.\end{aligned}$$

□

下面这个例子给出了除极坐标代换法外另一种求 Gauss 积分的方法.

**例题 4.14** 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证明

因为 $f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$ 在 $[0,+\infty)^2$ 上非负可测, 故根据 Tonelli 定理有

$$\int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}dy)dx = \int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}dx)dy$$

---

[16]这里并不是累次积分运算, 对这个反常重积分可以看做先在一个长条上作积分, 再把长条扩到全平面.

[17]如果 $f, g\in\mathcal{R}[a,b]$, 而 $g$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的非负不增函数, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $\int_a^b(f\cdot g)(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx$.

注意上式左端有

$$\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}dy = \frac{1}{2(1+x^2)}\int_0^{+\infty} e^{-(1+x^2)y^2}d((1+x^2)y^2) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$
$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}dy)dx = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{2(1+x^2)} = \frac{\pi}{4}$$

而右端有

$$\int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}dx)dy = \int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}e^{-x^2y^2}dx)dy = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}d(xy) = (\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx)^2$$

比对即得命题. □

### 4.5.3 思考题

**练习 4.30** 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]^2$ 上可积, 试证明

$$\int_0^1(\int_0^x f(x,y)dy)dx = \int_0^1(\int_y^1 f(x,y)dx)dy.$$

证明

考虑

$$\int_0^1(\int_0^x f(x,y)dy)dx = \int_0^1(\int_0^1 \chi_{\{(x,y):y\le x\}}(x,y)f(x,y)dy)dx$$

注意 $\chi_{[0,x]}(y)f(x,y)$ 在 $[0,1]^2$ 上可积, 故根据 Fubini 定理知

$$\int_0^1(\int_0^1 \chi_{\{(x,y):y\le x\}}(x,y)f(x,y)dy)dx = \int_0^1 dy\int_0^1 \chi_{\{(x,y):y\le x\}}(x,y)f(x,y)dx = \int_0^1 dx\int_y^1 f(x,y)dx$$

命题即证.

•

**练习 4.31** 设 $A,B$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} m((A-\{\boldsymbol{x}\})\cap B)d\boldsymbol{x} = m(A)\cdot m(B).$$

证明

知

$$\int_{\mathbb{R}^n} m((A-\{\boldsymbol{x}\})\cap B)d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A-\{\boldsymbol{x}\}}(\boldsymbol{x})\chi_B(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

## 4.6 补充: 乘积空间与乘积测度

本节主要选自 [10], 相较于 [1], 这本书对乘积空间作出了更详细的介绍, 不过这里是按照二维 (仅有两个测度空间相乘) 情况来说的.

设 $X,Y$ 是任意两个集合, 一切有序点对 $(x,y), x\in X, y\in Y$ 全体组成的集合, 记为 $X\times Y$, 称它为空间 $X,Y$ 的乘积空间 (又称为 Cartesian 乘积). 设 $A\subset X, B\subset Y$, 称 $A\times B$ 是 $X\times Y$ 中的" 矩形", $A,B$ 称为矩形 $A\times B$ 的" 边".

**定理 4.6.1**

如果 $\mathscr{S},\mathscr{T}$ 分别是 $X,Y$ 的某些子集构成的环[a], 那么, 由各式各样有限个互不相交的矩形 $A\times B(A\in\mathscr{S}, B\in\mathscr{T})$ 的并集所组成的 $X\times Y$ 的子集类 $\mathscr{R}$ 是环.

[a] $X$ 是一个集, $\mathscr{R}$ 是 $X$ 上的集类, 如果对任何 $E_1,E_2\in\mathscr{R}$, 都有 $E_1\cup E_2\in\mathscr{R}, E_1\backslash E_2\in\mathscr{R}$, 就称 $\mathscr{R}$ 是 $X$ 上的环. 如果还有 $X\in\mathscr{R}$, 就称 $\mathscr{R}$ 是 $X$ 上的代数, 或称为域.

证明

根据 $\mathscr{R}$ 的定义, 知 $\mathscr{R}$ 中任意有限个互不相交的集之并在 $\mathbb{R}$ 中, 从而只需证明 $\mathscr{R}$ 中任意两集的差集也在 $\mathbb{R}$ 中即可. 记 $\mathscr{P}=\{A\times B: A\in\mathscr{S}, B\in\mathscr{T}\}$, 对任意的 $E_i=A_i\times B_i\in\mathscr{P}(i=1,2)$, 因为 $\mathscr{S},\mathscr{T}$ 是环, 且

$$E_1\cap E_2=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$$

可知 $E_1\cap E_2\in\mathscr{R}$, 故 $\mathscr{R}$ 中任何两个集合的交在 $\mathscr{R}$ 中, 从而对 $\mathscr{R}$ 中的集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n}F_j$, 它们的交集 $\bigcup\limits_{i,j}^{m,n}(E_i\cap F_j)\in\mathscr{R}$, 进一步知道 $\mathscr{R}$ 中有限个元素的交也在 $\mathscr{R}$ 中.

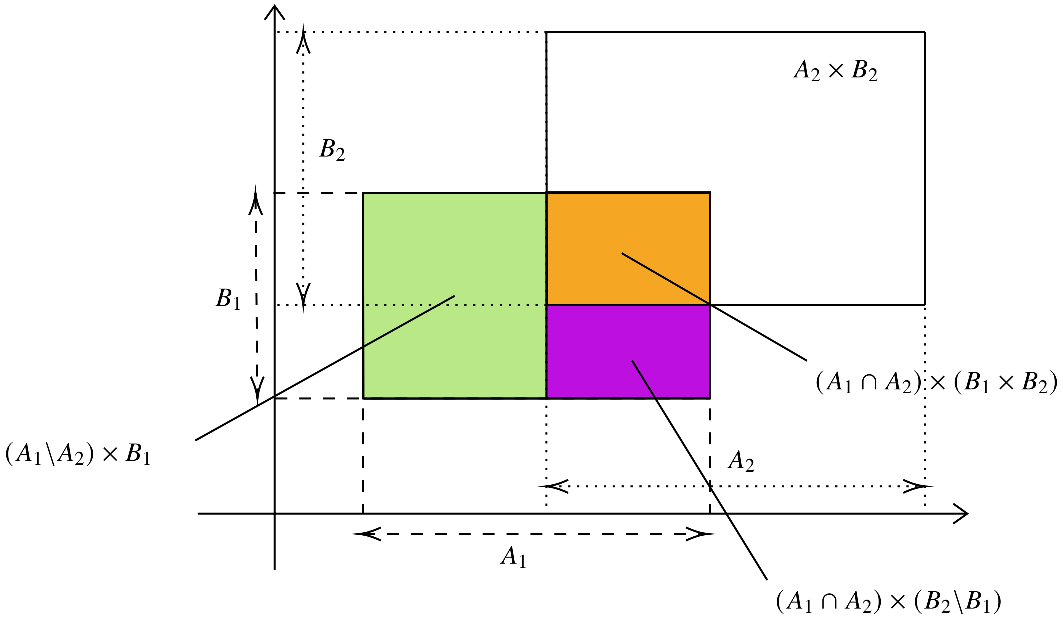


图 4.5: 集合分解示意图

又因为

$$(A_1\times B_1)\backslash(A_2\times B_2)=[(A_1\cap A_2)\times(B_1\backslash B_2)]\cup[(A_1\backslash A_2)\times B_1]$$

故 $\mathscr{P}$ 中任意两个集合的差集在 $\mathscr{R}$ 中. 现在对 $\mathscr{R}$ 中任意两个元素 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i(E_i\cap E_j=\varnothing, i\neq j, E_i\in\mathscr{P})$ 与 $\bigcup\limits_{j=1}^{n}F_j(F_j\cap F_k=\varnothing, j\neq k, F_j\in\mathscr{P})$, 有

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m}E_i\right)\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{n}F_j\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}(E_i\backslash F_j).$$

因为 $E_i\backslash F_j\in\mathscr{R}$, 故有限个 $\bigcap\limits_{j=1}^{m}(E_i-F_j)\in\mathscr{R}$, 且 $\{\bigcap\limits_{j=1}^{m}(E_i-F_j)\}$ 互不相交, 故 $(\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i)\backslash(\bigcup\limits_{j=1}^{n}F_j)\in\mathscr{R}$. □

把定理(4.6.1)中的环记作 $\widehat{\mathscr{S}\times\mathscr{T}}$.

**定义 4.6.1 (乘积空间)**

设 $(X,\mathscr{S}),(Y,\mathscr{T})$ 是两个可测空间, 记 $\mathscr{P}=\{A\times B: A\in\mathscr{S}, B\in\mathscr{T}\}$, 用 $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ 表示包含 $\mathscr{P}$ 的最小 $\sigma-$环, 称 $(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T})$ 为 $(X,\mathscr{S})$ 与 $(Y,\mathscr{T})$ 的乘积 (可测) 空间, 称 $\mathscr{P}$ 中的集合为可测矩形. ♣

如果用 $\mathscr{S}(E)$ 表示由集类 $E$ 张成的 $\sigma-$ 环, 用 $\mathscr{F}(E)$ 表示由集类 $E$ 张成的 $\sigma-$ 代数, 则有:

$$\mathscr{S}(\widehat{\mathscr{S}\times\mathscr{T}})=\mathscr{S}(\mathscr{P})=\mathscr{S}\times\mathscr{T}.$$

**定义 4.6.2 (空间的截口)**

设 $(X,\mathscr{S}),(Y,\mathscr{T})$ 是可测空间, $(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T})$ 是它们的乘积空间. 如果 $E$ 是 $X\times Y$ 的一个子集, 称集 $E_x=\{y:(x,y)\in E\}$ 为被 $x$ 决定的 $E$ 的截口, 有时也记之为 $S_xE$[a]. $E_x$ 有时称为 $x$-截口. 同理, 集 $S^yE=E^y=\{x:(x,y)\in E\}$ 是 $y$-截口.

[a]注意, 对每个 $x$ 而言, $E_x(S_xE)$ 是 $Y$ 的子集, 并非 $X\times Y$ 的子集.

**定义 4.6.3 (函数的截口)**

如果 $f$ 是定义在 $X\times Y$ 的子集 $E$ 上的函数, 当固定 $x\in X$ 时, 如果 $E_x$ 非空, 就称定义在 $E_x$ 上的函数

$$f_x(y)=f(x,y)$$

为 $f$(被 $x$ 决定) 的截口. 类似当固定 $y\in Y$, 如果 $E^y$ 非空, 则称定义在 $E^y$ 上的函数 $f^y(x)=f(x,y)$ 为 $f$(被 $y$ 决定) 的截口.

**定理 4.6.2**

在乘积可测空间 $(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T})$ 上, 可测集的截口是可测的, 可测函数的截口是可测的.

证明

令 $\mathscr{E}$ 是由 $X\times Y$ 中每个 $x-$ 截口和 $y-$ 截口都可测的集 $E$ 所组成的一个类. 注意求截口的运算满足:

1. 对任何一族集 $\{E_\lambda:\lambda\in\Lambda\}(E_\lambda\subset X\times Y)$, 以及任何 $x_0\in X$:
$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda)_{x_0}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_{\lambda x_0}.$$
2. 对任何 $E,F\subset X\times Y$, 以及任何 $x_0\in X$:
$$(E\backslash F)_{x_0}=E_{x_0}\backslash F_{x_0}$$

故可证 $\mathscr{E}$ 是 $\sigma-$ 环. 因为 $\mathscr{P}=\{A\times B:A\in\mathscr{S},B\in\mathscr{T}\}$ 中 $A,B$ 均可测, 故 $\mathscr{P}\subset\mathscr{E}$, 进而 $\mathscr{S}\times\mathscr{T}\subset\mathscr{E}$, 这说明 $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ 中每个元素的截口都可测.

设 $E\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$, $f$ 是 $E$ 上的可测函数, 对任意 $c\in\mathbb{R}$ 和任意给定的 $x_0\in X$, 知:

$$\begin{aligned}\{y\in E_{x_0}:f_{x_0}(y)>c\}&=\{y\in E_{x_0}:f(x_0,y)>c,(x_0,y)\in E\}\\&=\{y\in E_{x_0}:(x_0,y)\in\{(x,y)\in E:f(x,y)>c\}\}=S_{x_0}\{(x,y)\in E:f(x,y)>c\}\end{aligned}$$

因为 $f$ 可测, 故 $\{(x,y)\in E:f(x,y)>c\}$ 可测, 进而 $S_{x_0}\{(x,y)\in E:f(x,y)>c\}$ 作为可测集的截口可测, 也即 $f_{x_0}$ 在 $E_{x_0}$ 上可测. 同理可证 $f^y$ 在 $E^y$ 上可测. □

下面介绍乘积测度.

**引理 4.6.1**

设 $(X,\mathscr{S},\mu),(Y,\mathscr{T},\nu)$ 是两个全有限[a]的测度空间, 如果 $E$ 是 $(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T})$ 的可测子集, 那么 $\nu(E_x)$ 和 $\mu(E^y)$ 分别是 $(X,\mathscr{S},\mu),(Y,\mathscr{T},\nu)$ 上的可测函数, 且

$$\int_X\nu(E_x)d\mu=\int_Y\mu(E^y)d\nu.$$

[a]设 $\mathscr{R}$ 是由集 $X$ 的某些子集所成的环, $\mu$ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度. 如果存在 $E\in\mathscr{R}$ 使得 $\mu(E)<\infty$, 则称 $E$ 有有限测度. 如果任何 $E\in\mathscr{R}$ 都有有限测度, 那么称 $\mu$ 是有限的. 如果 $\mathscr{R}$ 是代数 $(X\in\mathscr{R})$ 且 $\mu(X)<\infty$, 则称 $\mu$ 是全有限的.

证明

设 $\mathscr{M}$ 是使得 $\nu(E_x),\mu(E^y)$ 可测, 且题式成立的 $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ 中的可测集 $E$ 的全体组成的类, 往证 $\mathscr{M}=\mathscr{S}\times\mathscr{T}$.

当 $E=A\times B\in\mathscr{P}$, 因为

$$E_x=\begin{cases}B, & x\in A\\\varnothing, & x\notin A\end{cases}$$

显见 $\nu(E_x)=\nu(B)\chi_A(x)$, 这里 $\chi_A$ 是 $A$ 的特征函数. 类似有 $\mu(E^y)=\mu(A)\chi_B(y)$. 因为 $\mu,\nu$ 全有限, 故 $\mathscr{S},\mathscr{T}$ 必为

$\sigma$-代数, 故 $\nu(E_x).\mu(E^y)$ 分别是 $(X,\mathscr{S}),(Y,\mathscr{T})$ 的可测函数, 且:

$$\int_X \nu(E_x)d\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_Y \mu(E^y)d\nu$$

因此 $E\in\mathscr{M}$, 故 $\mathscr{P}\subset\mathscr{M}$.

再证 $\mathscr{M}$ 是包含环 $\mathscr{R}$ 的单调类[18]: 如果 $E_1,\cdots,E_n\in\mathscr{M},E_i\cap E_j=\varnothing,i\neq j$, 记 $E=\bigcup\limits_{j=1}^n E_j$, 显见 $E_x=\bigcup\limits_{j=1}^n E_{jx},E_{jx}\cap E_{ix}=\varnothing,i\neq j$, 因此

$$\nu(E_x)=\sum_{j=1}^n \nu(E_{jx}).$$

同理有 $\mu(E^y)=\sum\limits_{j=1}^n \mu(E_j^y)$. 根据积分的线性性知 $E\in\mathscr{M}$, 再根据 $\mathscr{P}\subset\mathscr{M}$, 即得 $\mathscr{R}\subset\mathscr{M}$[19].

下面证明 $\mathscr{M}$ 是单调类. 设 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$ 是 $\mathscr{M}$ 中一列单增集, 记 $E=\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n$, 由于 $E_{1x}\subset E_{2x}\subset\cdots\subset E_{nx}\subset\cdots$, $E_x=\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_{nx}$, 故 $\nu(E_x)=\lim\limits_{n\to\infty}\nu(E_{nx})$. 又因为 $\{\nu(E_{nx}):n=1,2,\cdots\}$ 本身是 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 上的可积函数单调序列, 且

$$\int_X \nu(E_{nx})d\mu \le \int_X \nu(Y)d\mu = \nu(Y)\mu(X) < +\infty$$

故根据 Beppo Levi 引理知 $\nu(E_x)$ 是可积函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \nu(E_{nx})d\mu = \int_X \nu(E_x)d\mu$$

类似有

$$\lim_{n\to\infty}\int_Y \mu(E_n^y)d\nu = \int_Y \mu(E^y)d\nu.$$

因为对每个 $n$, 既然 $E_n\in\mathscr{M}$, 知

$$\int_X \nu(E_{nx})d\mu = \int_Y \mu(E_n^y)d\nu$$

根据上两式即有

$$\int_X \nu(E_x)d\mu = \int_Y \mu(E^y)d\nu$$

因此 $E\in\mathscr{M}$. 类似知当 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$ 时, 集 $\bigcap\limits_{n=1}^\infty E_n\in\mathscr{M}$. 故 $\mathscr{S}\times\mathscr{T}\subset\mathscr{M}$[20]. 从而 $\mathscr{S}\times\mathscr{T}=\mathscr{M}$. □

**推论 4.6.1**

设 $(X,\mathscr{S},\mu),(Y,\mathscr{T},\nu)$ 是两个测度空间, $E_0=A_0\times B_0(A_0\in\mathscr{S},B_0\in\mathscr{T})$, 且 $\mu(A_0)<\infty,\nu(B_0)<\infty$. 那么, 当 $E\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$, 且 $E\subset E_0$ 时, 函数 $\nu(E_x),\mu(E^y)$ 分别是 $A_0,B_0$ 上的可测函数, 且

$$\int_{A_0}\nu(E_x)d\mu = \int_{B_0}\mu(E^y)d\nu.$$

♡

这个推论需要用的测度论知识太多, 这里还是略过好了, 我们的重头戏在于乘积测度, 也即下面的定义.

**定义 4.6.4 (乘积测度)**

设 $(X,\mathscr{S},\mu),(Y,\mathscr{T},\nu)$ 是两个 $\sigma-$ 有限的测度空间, 作乘积可测空间 $(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T})$ 上的集函数如下: 如

[18] 设 $\mathscr{M}$ 是由 $X$ 的某些子集所成的集类. 如果对 $\mathscr{M}$ 中任何单调的序列 $\{E_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\mathscr{M}$, 则称 $\mathscr{M}$ 是单调类.

[19] 因为 $\mathscr{R}$ 中的每个集必可表示成 $\mathscr{P}$ 中有限个互不相交集之并.

[20] 这一步涉及单调类定理, 这里就默认算了.

果 $E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$, 且有矩形 $A \times B \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}, \mu(A) < \infty, \nu(B) < \infty$ 使得 $E \subset A \times B$ 时, 规定

$$\lambda(E) = \int_A \nu(E_x) d\mu = \int_B \mu(E^y) d\nu,$$

对一般的 $E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$, 必有一列矩形 $E_n \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}, E_n = A_n \times B_n, \mu(A_n) < \infty, \nu(B_n) < \infty, E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$, 使得 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 此时定义

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E \cap E_n)$$

则 $\lambda$ 是 $(X \times Y, \mathscr{S} \times \mathscr{T})$ 上的 $\sigma-$ 有限测度, 称之为 $\mu$ 和 $\nu$ 的乘积测度, 记为 $\mu \times \nu$.

现在出于几何上的直觉, 希望对大多数的 $A, B$ 满足 $m(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$. 下面的定理就说明具有这种性质的测度是唯一的, 不过其证明过于繁杂, 仅作为乘积测度的小介绍, 就不列出证明了.

**定理 4.6.3 (乘积测度的唯一性)**

设 $(X, \mathscr{S}, \mu), (Y, \mathscr{T}, \nu)$ 是 $\sigma-$ 有限测度空间, 那么定义(4.6.4)中规定的集函数 $\lambda$ 是 $(X \times Y, \mathscr{S} \times \mathscr{T})$ 上的 $\sigma-$ 有限测度, 且是在 $(X \times Y, \mathscr{S} \times \mathscr{T})$ 上满足条件

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \in \mathscr{S}, B \in \mathscr{T}$$

的唯一的 $\sigma-$ 有限测度.

在定义乘积测度之后, 终于可以用测度的语言来抽象重述重积分了.

**定义 4.6.5 (重积分与累次积分)**

设 $(X, \mathscr{S}, \mu), (Y, \mathscr{T}, \nu)$ 是两个 $\sigma-$ 有限测度空间, $(X \times Y, \mathscr{S} \times \mathscr{T}, \mu \times \nu)$ 是它们的乘积测度空间. 假设 $E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}, E = A \times B, A \in \mathscr{S}, B \in \mathscr{T}$. 又设 $f$ 是定义在 $E$ 上的函数, 如果 $f$ 在 $E$ 上关于 $\mu \times \nu$ 是可积的, 则积分

$$\int_E f(x, y) d\mu \times \nu(x, y)$$

就称作 $f$ 在 $E$ 上的重积分. 其中 $d\mu \times \nu(x, y)$ 简记为 $d\mu \times \nu$. 如果存在一个 $\nu-$ 零测集 $B_0 \subset B$, 当 $y \in B \backslash B_0$ 时, $f^y(x)$ 在 $A$ 上关于 $\mu$ 可积, 则记

$$h(y) = \int_A f^y(x) d\mu(x), \quad y \in B \backslash B_0$$

如果又存在 $B$ 上关于 $\nu$ 可积的函数 $\tilde{h}(y)$, 使得关于 $\nu$ 有 $\tilde{h}(y) = h(y)$, a.e. $y \in B \backslash B_0$, 则称 $h(y) = \int_A f^y(x) d\mu(x)$ 是 $B$ 上的可积函数, 并规定 $\int_B h(y) d\nu(y) = \int_B \tilde{h}(y) dy$, 也即

$$\int_B \tilde{h}(y) d\nu(y) = \int_B d\nu \int_A f d\mu = \int_B (\int_A f(x, y) d\mu(x)) d\nu(y)$$

积分 $\int_B d\nu \int_A f d\mu$ 称作 $f$ 在 $E$ 上的累次积分, 同理

$$\int_A d\mu \int_B f d\nu = \int_A (\int_B f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x)$$

也是累次积分.

现在可以在测度空间的高度重述 Fubini 定理了.

**定理 4.6.4 (Fubini)**

设 $E$ 是 $(X \times Y, \mathscr{S} \times \mathscr{T}, \mu \times \nu)$ 上的 $\sigma-$ 有限的可测矩形 $E = A \times B$, $f$ 是 $E$ 上的有限函数, 则:

1. 当 $f$ 是 $E$ 上关于 $\mu \times \nu$ 的可积函数时, $f$ 在 $E$ 上的两个累次积分存在, 且

$$\int_E f d\mu \times \nu = \int_A d\mu \int_B f d\nu = \int_B d\nu \int_A f d\mu$$

2. 如果 $f$ 是 $E$ 上关于 $(X \times Y, \mathscr{S} \times \mathscr{T})$ 的可测函数, 且 $|f|$ 的两个累次积分 $\int_A d\mu \int_B |f| d\nu, \int_B d\nu \int_A |f| d\mu$

中有一个存在, 则其另一个累次积分与重积分 $\int_E f d\mu\times\nu$ 也存在, 并且累次积分与重积分相等.

证明

先证明 1., 首先对 $\mu(A)<\infty,\nu(B)<\infty$ 的情况, 也即常义重积分的情况证明. 反常重积分的情况自然可由常义重积分的积分区域逼近来得到. 不妨就设 $A=X,B=Y$, 这是因为若非如此, 考虑 $(A,\mathscr{A}\cap A,\mu_A),(B,\mathscr{T}\cap B,\nu_B)$ 的乘积空间 $(A\times B,(\mathscr{S}\cap A)\times(\mathscr{T}\cap B),\mu_A\times\nu_B)$ 即可, 其中 $\mu_A,\nu_B$ 分别是把 $\mu,\nu$ 分别限制在 $A,B$ 上的测度.

(i) 首先对特征函数证明这件事. 设 $f$ 是 $(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T})$ 上某个可测集 $E$ 的特征函数 $\chi_E$. 根据 $\mu\times\nu$ 的定义知

$$\int_{X\times Y}\chi_E d\mu\times\nu(E)=\mu\times\nu(E)=\int_X\nu(E_x)d\mu=\int_X d\mu(x)\int_Y\chi_{E_x}(y)d\nu(y)=\int_X d\mu(x)\int_Y\chi_E(x,y)d\nu(y)$$

同理可证其重积分等于另一个累次积分.

(ii) 再通过简单函数逼近定理考察非负可积函数. 设 $f$ 是 $(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T},\mu\times\nu)$ 上的非负可积函数. 此时取 $\{\varphi_k\}$ 是非负可测简单函数渐升列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x,y)=f(x,y)$. 根据 Beppo Levi 定理知

$$\int_{X\times Y}f d\mu\times\nu=\lim_{k\to\infty}\int_{X\times Y}\varphi_k d\mu\times\nu.$$

根据特征函数情况的结论与积分的线性性, 知当 $x$ 固定时, $\varphi_{kx}(y)=\varphi_k(x,y)$ 是 $(Y,\mathscr{T},\nu)$ 上的可积函数, $\psi_k(x)=\int\varphi_k(x,y)d\nu(y)$ 是 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 上的可积函数, 且

$$\int_{X\times Y}\varphi_k d\mu\times\nu=\int_X d\mu\int_Y\varphi_k d\nu=\int_X\psi_k d\mu.$$

因为 $\{\psi_k\}$ 是非负有界的渐升列, 且

$$\lim_{k\to\infty}\int_X\psi_k d\mu=\lim_{k\to\infty}\int_{X\times Y}\varphi_k d\mu\times\nu=\int_{X\times Y}f d\mu\times\nu$$

故根据 Beppo Levi 定理知 $\{\psi_k\}$ 关于 $\mu$ 几乎处处收敛到可积函数 $\psi(x)$, 且

$$\int_X\psi d\mu=\int_{X\times Y}f d\mu\times\nu$$

设 $E=\{x\in X:\psi(x)<\infty\}$, 知固定 $x\in E$ 时, $\varphi_{kx}=\varphi_k(x,y)(k=1,2,\cdots)$ 是 $(Y,\mathscr{T},\nu)$ 上的非负可积函数渐升列, 且 $\int_Y\varphi_{kx}(y)d\nu(y)=\psi_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 有上确界 $\psi(x)<\infty$, 因此由 Beppo Levi 定理知 $\{\varphi_{kx}(y)\}$ 的极限函数 $f_x(y)=f(x,y)$ 在 $(Y,\mathscr{T},\nu)$ 上可积, 且

$$\int f(x,y)d\nu(y)=\lim_{k\to\infty}\int\varphi_k(x,y)d\nu(y)=\psi(x)$$

故 $\int f(x,y)d\nu(y)$ 几乎处处等于 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 上的可积函数 $\psi(x)$, 进而

$$\int_{X\times Y}f d\mu\times\nu=\int_X\psi d\mu=\int_X d\mu\int_Y f d\nu.$$

(iii) 现在对于一般可积函数, 知其正部负部均为非负可积函数, 根据前述结论与积分的线性性即得结论. 同理可证 $\int_X f(x,y)d\mu(x)$ 是 $(Y,\mathscr{T},\nu)$ 上的可积函数, 且

$$\int_{X\times Y}f d\mu\times\nu=\int_Y d\nu\int_X f d\mu$$

现在就完成了 1. 的证明, 下面看 2.. 设 $\mu(x)<\infty,\nu(Y)<\infty$, 如果非负二元可测函数 $f$ 的一个累次积分, 比如 $\int_Y d\nu\int_X f d\mu$ 存在, 此时对任何自然数 $N$, 作 $[f]_N=\min(N,f)$, 它便是有界二元可测函数. 因为 $\mu\times\nu(X\times Y)<\infty$, 故其重积分存在, 且由前述结论与 $[f]_N\le f$ 知:

$$\int_{X\times Y}[f]_N d\mu\times\nu=\int_Y d\nu\int_X[f]_N d\mu\le\int_Y d\nu\int_X f d\mu$$

这说明 $\{[f]_N\}$ 的重积分序列有上界, 进而对而二元函数列 $\{[f]_N\}$ 应用 Beppo Levi 定理, 知 $[f]_N(x,y)$ 的极限函数 $f(x,y)$ 的重积分存在. 再由前述结论即得另一个累次积分的存在性与它们之间的相等性.

对一般的二元可积函数, 同样可以分成正部负部来讨论. 这便完成了定理的证明. $\square$

## 4.7 章末习题

✍ **练习 4.32** 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足 $\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0$, 试证明 $m(E) = 0$.

证明

用反证法, 假设 $m(E) > 0$, 则既然 $f(\boldsymbol{x}) > 0$, a.e. $\boldsymbol{x} \in E$, 可设

$$E_k = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) \geq \frac{1}{k}\} \subset E, \quad k = 1, 2, \cdots$$

知

$$m(E \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$$

由 $E, E_k$ 均可测知

$$m(E \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = m(E) - m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0 \Rightarrow m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = m(E) > 0$$

知必存在 $E_{k_0}$ 使得 $m(E_{k_0}) > 0$, 否则 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k) = 0$ 矛盾. 进而因为 $E_{k_0} \subset E$, 有:

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \geq \int_{E_{k_0}} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \geq \frac{m(E_{k_0})}{k} > 0$$

这与 $\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0$ 矛盾! 命题即证.

✍ **练习 4.33** 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非负可积, $f(0) = 0$, 且 $f'(0)$ 存在, 试证明存在积分

$$\int_{[0,+\infty)} \frac{f(x)}{x} dx.$$

证明

既然 $f'(0)$ 存在, 知

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$$

根据定义此即

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (0, \delta)(|\frac{f(x)}{x} - f'(0)| < \varepsilon)$$

固定 $\varepsilon$, 进而 $\delta$ 得到固定, 不妨设 $\delta < 1$, 此时有

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty)} \frac{f(x)}{x} dx &= \int_{[0,\delta)} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{[\delta,1)} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{[1,+\infty)} \frac{f(x)}{x} dx \\ &< \delta(f'(0) + \varepsilon) + \frac{1}{\delta} \int_{[\delta,1)} f(x)dx + \int_{[1,+\infty)} f(x)dx < +\infty \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{\delta} \int_{[\delta,1)} f(x)dx + \int_{[1,+\infty)} f(x)dx < +\infty$ 是出于 $f(x)$ 的可积性, 命题即证.

✍ **练习 4.34** 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 若存在 $E_k \subset E, m(E \backslash E_k) < \frac{1}{k}(k = 1, 2, \cdots)$, 使得极限

$$\lim_{k \to \infty} \int_{E_k} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

存在, 试证明 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上可积.

证明

因为若 $E_k \subset E, E_{k+1} \subset E, m(E \backslash E_k) < \frac{1}{k}, m(E \backslash E_{k+1}) < \frac{1}{k+1}$, 则 $m(E \backslash (E_k \cup E_{k+1})) < \min\{\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}\} = \frac{1}{k+1}, k = 1, 2, \cdots$, 故可将满足条件的 $\{E_k\}$ 视作渐升列. 注意到 $m(E \backslash E_k) \to 0, k \to \infty$, 故可设 $\lim\limits_{k \to \infty} E_k = E_1, E_2 = E \backslash E_1$, 根据测度论中的 Fatou 引理得到

$$m(E_2) = m(E \backslash E_1) = m(E \backslash \lim_{k \to \infty} E_k) = m(\lim_{k \to \infty} E \backslash E_k) \leq \lim_{k \to \infty} m(E \backslash E_k) = 0$$

因为 $f(\boldsymbol{x})$ 本身是非负可测函数, 故出于 $E_k$ 的渐升性知 $\{f(\boldsymbol{x})\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})\}$ 是非负渐升列, 根据 Beppo Levi 定理有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x})\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\chi_{E_1}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}<+\infty$$

最后知

$$\begin{aligned}\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}&=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\chi_E(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\le\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\chi_{E_1\cup E_2}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\le\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})(\chi_{E_1}(\boldsymbol{x})+\chi_{E_2}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}\\&=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\chi_{E_1}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\chi_{E_2}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\chi_{E_1}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}<\infty\end{aligned}$$

故 $f\in L(E)$, 命题得证.

† 订正

上面的过程有致命错误, 主要体现在" 故可将满足条件的 $\{E_k\}$ 视作渐升列" 一句上. 诚然根据题目所给的集合条件确实可以构造出这样的渐升列, 这里的想法也是取并集, 但取完之后需要思考, 新的渐升列与原来题目条件中的积分区域可以等价吗? 应该如何用新的渐升列来表示原来的题式? 在意识到这些漏洞后, 可以选择下面用 Riesz 定理的方法来解决, 而这个方法相比之下也更加简洁.

容易验证函数列 $\{f(x)\chi_{E_k}(x)\}$ 至少是依测度收敛到 $f(x)$ 的, 故根据 Riesz 定理(3.2.7)知存在子列 $\{f(x)\chi_{E_{k_n}}(x)\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x)\chi_{E_{n_k}}(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in E$$

现在因为 $f(x)$ 与 $f(x)\chi_{E_{k_n}}(x)$ 均非负可测, 由 Fatou 引理:

$$\int_E f(x)dx=\int_E\lim_{n\to\infty} f(x)\chi_{E_{n_k}}(x)dx\le\lim_{n\to\infty}\int_E f(x)\chi_{E_{k_n}}(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{E_{k_n}} f(x)dx<+\infty$$

故 $f\in L(E)$.

**练习 4.35** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上非负可积函数, 令

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]} f(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

若 $F\in L(\mathbb{R})$, 试证明 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=0$.

证明

既然 $f(x)$ 非负, 显见 $F(x)$ 非负. 用反证法, 设 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx>0$, 则知必存在 $k_0\in\mathbb{N}$ 使得在 $E_{k_0}=(-\infty,k_0]\subset\mathbb{R}$ 上有 $\int_{E_{k_0}} f(x)dx>0$. 这是因为如若不然, 则有 $\int_{E_k} f(x)dx=0,\forall k\in\mathbb{N}$. 注意到 $\mathbb{R}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, 且 $\{E_k\}$ 显然是渐升列, 故 $\{f(x)\chi_{E_k}(x)\}$ 是非负渐升列, 由 Beppo Levi 定理知

$$0=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{k\to\infty} f(x)\chi_{E_k}(x)dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{\mathbb{R}}(x)dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)dx>0$$

矛盾!

现在, 当 $x>k_0$, 知

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]} f(t)dt\ge\int_{(-\infty,k_0]} f(t)dt:=l_{k_0}>0$$

任取 $M>0$, 根据 Archimedes 原理, 总存在 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $(n-1)l_{k_0}<M\le nl_{k_0}$, 进而因为 $(k_0,n+k_0)\subset\mathbb{R}$, 有:

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)dx\ge\int_{(k_0,n+k_0)} F(x)dx\ge m(k_0,n+k_0)\cdot l_{k_0}=nl_{k_0}>M$$

故只能有 $\int_{\mathbb{R}} F(x)dx=+\infty$, 这与 $F\in L(\mathbb{R})$ 矛盾! 故 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=0$, 命题得证.

**练习 4.36** 设 $f_k(\boldsymbol{x})(k=1,2,\cdots)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负可积函数列. 若对任一可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 都有

$$\int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\le\int_E f_{k+1}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

**证明**

首先证明 $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ 几乎处处单调递增: 如果存在 $k_0, E_{k_0}$ 使得 $m(E_{k_0}) > 0$ 且 $f_{k_0}(\boldsymbol{x}) > f_{k_0+1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in E_{k_0}$, 则

$$\int_{E_0} f_{k_0}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} > \int_{E_0} f_{k_0+1}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

这与题意矛盾! 故对每个 $k$ 至多存在零测集 $E_k$ 使得 $f_k(\boldsymbol{x}) > f_{k+1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in E_k$, 进而记 $E_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, 知

$$m(E_0) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = 0$$

现在在 $H := E\backslash E_0$ 中有 $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ 单调递增, 且由诸集合可测性知 $m(H) = m(E) \Rightarrow m(E\backslash H) = 0$.

下面确定极限函数, 设

$$C_1 = \{\boldsymbol{x} \in H : \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}) = +\infty\}, \quad C_2 = \{\boldsymbol{x} \in H : \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}) < +\infty\}$$

因为 $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ 本身可积, 故 $m(C_1) = 0$. 在点态意义上, 对 $C_2$ 中的每个点 $\boldsymbol{x}_0$, 知 $\{f_k(\boldsymbol{x}_0)\}$ 是单调有界数列, 进而极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}_0)$ 存在, 记之为 $f(\boldsymbol{x}_0)$, 得到极限函数

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in C_2$$

而因为在 $H$ 上 $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ 单调递增, 在广义实数的意义下就取

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}) = +\infty, \quad \boldsymbol{x} \in C_1$$

这便定义了 $H$ 上 $\{f_k(\boldsymbol{x})\}$ 的极限函数 $f(\boldsymbol{x})$.

下面证明极限函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $H$ 上可积, 首先说明 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $C_2$ 上可积, 这是因为由 Fatou 引理:

$$\int_{C_2} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{C_2} \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \le \lim_{k\to\infty}\int_{C_2} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

后者作为单调有界序列有极限, 故 $\int_{C_2} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} < +\infty$. 注意 $H = C_1 \cup C_2$, 进而在 $H$ 上有:

$$\int_H f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{C_1\cup C_2} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \le \int_{C_1} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_{C_2} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0 + \int_{C_2} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} < +\infty$$

这说明 $f \in L(H)$.

最后回到题式, 根据 Beppo Levi 定理知:

$$\int_H \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\int_H f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

对左式有

$$\begin{aligned}\int_E \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_{E\backslash H} \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_H \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ &= 0 + \int_H \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_H \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

对右式, 知每个 $\int_H f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ 都有:

$$\int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{E\backslash H} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_H f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0 + \int_H f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_H f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\int_H f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

综上得到

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_H \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\int_H f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

命题即证.

✍ **练习 4.37** 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}$ 上的非负可测函数, 且 $m(E)=1$. 若有 $f(x)g(x)\geq 1, x\in E$, 试证明

$$(\int_E f(x)dx)(\int_E g(x)dx)\geq 1$$

证明

既然 $f,g$ 均为非负可测函数, 知 $\sqrt{f},\sqrt{g}$ 有意义, 现在定义 $h(x)=\sqrt{f(x)}+\lambda\sqrt{g(x)}$, 知 $h^2(x)\geq 0,\forall\lambda\in\mathbb{R}$. 下面首先证明对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$, $h^2\in L(E)$, 这是因为:

$$h^2(x)=f(x)+\lambda^2 g(x)+2\lambda\sqrt{f(x)g(x)}\leq f(x)+\lambda^2 g(x)+|\lambda|(f(x)+g(x))$$

只要 $\lambda<+\infty$, 则知 $h^2\in L(E)$, 进而

$$0\leq\int_E h^2(x)dx=\int_E(f(x)+\lambda^2 g(x)+2\lambda\sqrt{f(x)g(x)})dx=\lambda^2\int_E g(x)dx+2\lambda\int_E\sqrt{f(x)g(x)}dx+\int_E f(x)dx$$

故因为 $\forall\lambda\in\mathbb{R}(\lambda^2\int_E g(x)dx+2\lambda\int_E\sqrt{f(x)g(x)}dx+\int_E f(x)dx\geq 0)$, 考察判别式有:

$$(2\int_E\sqrt{f(x)g(x)}dx)^2-4(\int_E g(x)dx)(\int_E f(x)dx)\leq 0$$
$$\Rightarrow(\int_E f(x)dx)(\int_E g(x)dx)\geq(\int_E\sqrt{f(x)g(x)}dx)^2\geq(\int_E 1dx)^2=(m(E))^2=1$$

命题即证.

**笔记** 从范数的角度考虑, $\int_E f(x)dx, \int_E g(x)dx$ 分别是 $f(x),g(x)$ 的 $L^1$ 范数, 进而根据 $L^1$ 范数的 Cauchy-Schwarz 不等式即得命题. 上面的过程核心正是 Cauchy-Schwarz 不等式的证明.

✍ **练习 4.38** 假设有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(\boldsymbol{x})$. 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $g,h\in L(\mathbb{R}^n)$, 满足 $g(\boldsymbol{x})\leq f(\boldsymbol{x})\leq h(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$, 并且使得 $\int_{\mathbb{R}^n}(h(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}<\varepsilon$, 试证明 $f\in L(\mathbb{R}^n)$.

证明

知

$$\int_{\mathbb{R}^n}(h(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}(h(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}<\varepsilon$$

又因为 $g(\boldsymbol{x})\leq f(\boldsymbol{x})\leq h(\boldsymbol{x})$, 故有

$$0\leq\int_{\mathbb{R}^n}(h(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}<\varepsilon,\quad 0\leq\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}<\varepsilon$$

现在, 因为

$$|f(\boldsymbol{x})|=|h(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})-h(\boldsymbol{x})|\leq|h(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|+|h(\boldsymbol{x})|$$

而根据 $h\in L(\mathbb{R}^n)$ 可知

$$\int_{\mathbb{R}^n}|h(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}(h(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}<\varepsilon,\int_{\mathbb{R}^n}|h(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<+\infty$$

得到 $\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<+\infty$, 也即 $f\in L(\mathbb{R}^n)$.

✍ **练习 4.39** 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的可测集列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=0,$$

试证明存在可测集 $E$, 使得 $f(\boldsymbol{x})=\chi_E(\boldsymbol{x})$, a.e. $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

证明

设

$$M_{1k}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\geq 0\},\quad M_{2k}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})<0\},\quad k=1,2,\cdots$$

知

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=\int_{M_{1k}}(\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}+\int_{M_{2k}}(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}$$

为简便起见,不妨就设 $\{E_k\}$ 本身是递增列,进而 $\{\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\}$ 在 $M_{1k}$ 上是非负可测渐升列,进一步 $\{(\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{1k}}(\boldsymbol{x})\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是非负可测渐升列. 同理 $\{f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})\}$ 在 $M_{2k}$ 上是非负渐降列,进一步 $\{(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{2k}}(\boldsymbol{x})\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是非负渐降列,这说明至少 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{M_{2k}}(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}$ 存在. 记 $E=\lim\limits_{k\to\infty}E_k$,现在根据 Beppo Levi 定理有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}&=\lim_{k\to\infty}\int_{M_{1k}}(\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}+\lim_{k\to\infty}\int_{M_{2k}}(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty}(\chi_{E_k}(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{1k}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{2k}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\&=\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))\chi_{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\geq0\}}d\boldsymbol{x}+\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{2k}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0\end{aligned}$$

注意 $(\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))\chi_{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\geq0\}}\geq0$, $(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{2k}}(\boldsymbol{x})\geq0$, 这说明:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))\chi_{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\geq0\}}d\boldsymbol{x}\geq0,\ \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{2k}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\geq0$$

故只能有

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))\chi_{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\geq0\}}d\boldsymbol{x}=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{2k}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0$$

上第一个积分等于零说明

$$f(\boldsymbol{x})=\chi_E(\boldsymbol{x}),\quad \text{a.e. } \boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\geq0\}$$

上第二个积分等于零,由 Fatou 引理知

$$0\leq\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x})-\chi_E(\boldsymbol{x}))\chi_{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:f(\boldsymbol{x})-\chi_E(\boldsymbol{x})\geq0\}}d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty}(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{2k}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\leq\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x})-\chi_{E_k}(\boldsymbol{x}))\chi_{M_{2k}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0$$

进而只能有

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f(\boldsymbol{x})-\chi_E(\boldsymbol{x}))\chi_{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:f(\boldsymbol{x})-\chi_E(\boldsymbol{x})\geq0\}}d\boldsymbol{x}=0$$

得到

$$f(\boldsymbol{x})=\chi_E(\boldsymbol{x}),\quad \text{a.e. } \boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:f(\boldsymbol{x})-\chi_E(\boldsymbol{x})\geq0\}$$

又因为

$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:f(\boldsymbol{x})-\chi_E(\boldsymbol{x})\geq0\}\cup\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\chi_E(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\geq0\}=\mathbb{R}^n$$

故 $f(\boldsymbol{x})=\chi_E(\boldsymbol{x})$, a.e. $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$. 命题得证.

**练习 4.40** 设 $f(x)$ 是 [0,1] 上的递增函数,试证明对 $E\subset[0,1]$, $m(E)=t$, 有 $\int_{[0,t]}f(x)dx\leq\int_E f(x)dx$.

证明

设 $E_1=[0,t]\backslash E$, $E_2=E\backslash[0,t]$, 既然 $f(x)$ 是闭区间上递增函数,必有 $f\in L[0,1]$, 从而 $\int_{[0,t]}f(x)dx,\int_E f(x)dx<+\infty$. 知

$$\int_{[0,t]}f(x)dx=\int_{E_1}f(x)dx+\int_{[0,t]\cap E}f(x)dx,\quad \int_E f(x)dx=\int_{[0,t]\cap E}f(x)dx+\int_{E_2}f(x)dx$$

故只需证明

$$\int_{E_1}f(x)dx\leq\int_{E_2}f(x)dx$$

注意

$$m(E_1)=m(E_2)=t-m([0,t]\cap E),\quad E_1\cap E_2=\varnothing$$

**练习 4.41** 设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, $E\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集,试证明

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_{E+\{y\}}|f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}=0.$$

**练习 4.42** 证明下列等式:

1. $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{(0,\infty)}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha},\alpha>1.$
2. $\int_{(0,+\infty)}\frac{\sin ax}{e^x-1}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2},a>0.$

**练习 4.43** 设 $f\in L(\mathbb{R}),a>0$, 试证明级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(\frac{x}{a}+n)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处绝对收敛, 且其和函数 $S(x)$ 以 $a$ 为周期, 且 $S\in L([0,a])$.

**练习 4.44** 设 $f\in L(\mathbb{R}),p>0$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}n^{-p}f(nx)=0,\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

证明

要证明

$$\lim_{n\to\infty}n^{-p}f(nx)=0,\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}$$

只需说明

$$\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}n^{-p}|f(nx)|dx=0$$

由 Fatou 引理知

$$0\le\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}n^{-p}|f(nx)|dx\le\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}n^{-p}|f(nx)|dx=\lim_{n\to\infty}n^{-p-1}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx$$

因为 $f\in L(\mathbb{R})$, 故 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx<+\infty$, 进而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-p-1}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx=0$, 故

$$\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}n^{-p}|f(nx)|dx=0$$

命题即证.

† 订正

上面的过程在 $\int_{\mathbb{R}}\lim\limits_{n\to\infty}n^{-p}|f(nx)|dx\le\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}n^{-p}|f(nx)|dx$ 这一处有问题, 这里忽略了 $f(nx)$ 可能出现的震荡导致极限不存在的情况. 可以用级数解这一题.

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-p}f(nx)$, 只需证明级数几乎处处收敛即可. 由非负可测函数的逐项积分定理知

$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{f(nx)}{n^p}|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(nx)|}{n^p}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+p}}\cdot\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx$$

因为 $p>0,f\in L(\mathbb{R})$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+p}}<\infty,\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx<\infty$, 得到 $\int_{\mathbb{R}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{f(nx)}{n^p}|dx<\infty$. 这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{f(nx)}{n^p}|$ 作为非负可测函数在 $\mathbb{R}$ 上可积, 因而其几乎处处有限, 也即级数几乎处处收敛, 命题即证.

**练习 4.45** 设 $x^sf(x),x^tf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可积, 其中 $s<t$, 试证明积分

$$\int_{[0,+\infty)}x^uf(x)dx,\quad u\in(s,t)$$

存在且是 $u\in(s,t)$ 的连续函数.

证明

注意到

$$0\le x^u|f(x)|\le x^s|f(x)|,\quad x\in(0,1]$$

$$0\le x^u|f(x)|\le x^t|f(x)|,\quad x\in(1,+\infty)$$

得到

$$\int_{(0,1]} x^u|f(x)|dx \le \int_{(0,1]} x^s|f(x)|dx \le \int_{(0,+\infty)} x^s|f(x)|dx < +\infty$$

$$\int_{(1,+\infty)} x^u|f(x)|dx \le \int_{(1,+\infty)} x^t|f(x)|dx \le \int_{(0,+\infty)} x^t|f(x)|dx < +\infty$$

故

$$\int_{[0,+\infty)} x^u|f(x)|dx = \int_{(0,+\infty)} x^u|f(x)|dx = \int_{(0,1]} x^u|f(x)|dx + \int_{(1,+\infty)} x^u|f(x)|dx < +\infty, \quad u \in (s,t)$$

也即

$$\int_{[0,+\infty)} x^u f(x)dx, \quad u \in (s,t)$$

存在. 再证明连续性, 取 $\varepsilon > 0$, 根据 $x^s f(x), x^t f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的可积性知, 存在 $1 > \delta > 0, N > 1$, 使得

$$\int_{(0,\delta)} x^s|f(x)|dx < \varepsilon, \quad \int_{(N,+\infty)} x^t|f(x)|dx < \varepsilon$$

现固定 $u_0 \in (s,t)$, 对 $u \in (s,t)$ 考虑

$$|\int_{(0,+\infty)} (x^{u_0} - x^u)f(x)dx| \le |\int_{(0,\delta)} (x^{u_0} - x^u)f(x)dx| + |\int_{[\delta,N]} (x^{u_0} - x^u)f(x)dx| + |\int_{(N,+\infty)} (x^{u_0} - x^u)f(x)dx| \quad (4.5)$$

对(4.5)右式第一项, 有:

$$|\int_{(0,\delta)} (x^{u_0} - x^u)f(x)dx| \le \int_{(0,\delta)} x^{u_0}|f(x)|dx + \int_{(0,\delta)} x^u|f(x)|dx \le 2\int_{(0,\delta)} x^s|f(x)|dx < 2\varepsilon$$

对(4.5)右式第三项, 有:

$$|\int_{(N,+\infty)} (x^{u_0} - x^u)f(x)dx| \le \int_{(N,+\infty)} x^{u_0}|f(x)|dx + \int_{(N,+\infty)} x^u|f(x)|dx \le 2\int_{(N,+\infty)} x^t|f(x)|dx < 2\varepsilon$$

对(4.5)右式第二项, 根据中值定理有

$$x^{u_0} - x^u = (u_0 - u)x^{\xi}\ln x \Rightarrow |x^{u_0} - x^u| = |u_0 - u| \cdot x^{\xi} \cdot |\ln x| \le |u_0 - u| \cdot x^{\xi} \cdot \max\{\ln N, \ln\frac{1}{\delta}\}, \xi\text{在 } u, u_0 \text{ 之间}$$

记 $\max\{\ln N, \ln\frac{1}{\delta}\} = V(\varepsilon)$, 故可取

$$\delta'(\varepsilon) = (\int_{[\delta,1]} x^s|f(x)|dx + \int_{(1,N]} x^t|f(x)|dx)^{-1} \cdot \frac{1}{V(\varepsilon)} \cdot \varepsilon$$

并限定 $u \in U(u_0, \delta') \cap (s,t)$, 则:

$$\begin{aligned}
&|\int_{[\delta,N]} (x^{u_0} - x^u)f(x)dx| \\
\le &\int_{[\delta,1]} |u_0 - u| \cdot x^{\xi} \cdot V(\varepsilon) \cdot |f(x)|dx + \int_{(1,N]} |u_0 - u| \cdot x^{\xi} \cdot V(\varepsilon) \cdot |f(x)|dx \\
< &V(\varepsilon) \cdot (\int_{[\delta,1]} x^{\xi}|f(x)|dx + \int_{(1,N]} x^{\xi}|f(x)|dx) \cdot (\int_{[\delta,1]} x^s|f(x)|dx + \int_{(1,N]} x^t|f(x)|dx)^{-1} \cdot \frac{1}{V(\varepsilon)} \cdot \varepsilon \le \varepsilon
\end{aligned}$$

综上知

$$|\int_{(0,+\infty)} (x^{u_0} - x^u)f(x)dx| < 5\varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性即得命题.

✍ **练习 4.46** 设 $f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的正值可测函数. 若存在常数 $c$, 使得

$$\int_{[0,1]} (f(x))^n dx = c, \quad n = 1, 2, \cdots$$

试证明存在可测集 $E \subset (0,1)$, 使得 $f(x)$ 几乎处处等于 $\chi_E(x)$. 再问: 若 $f(x)$ 不是非负的又如何?

✍ **练习 4.47** 设 $f \in L([0,1])$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} n\ln(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2})dx = 0.$$

✍ **练习 4.48** 设 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots, E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k, f \in L(E_k)(k=1,2,\cdots)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx = \int_E f(x)dx$$

证明

届于 $\{E_k\}$ 是递降列, 得到

$$|f(x)\chi_{E_k}(x)| \le |f(x)\chi_{E_1}(x)| \in L(E_1), \quad x \in E_1, k=1,2,\cdots$$

故根据 Lebesgue 控制收敛定理:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E_1} f(x)\chi_{E_k}(x)dx = \int_{E_1} \lim_{k\to\infty} f(x)\chi_{E_k}(x)dx = \int_{E_1} f(x)\chi_E(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

命题即证.

✍ **练习 4.49** 设 $f \in L(E)$, 且 $f(x) > 0(x \in E)$, 试说明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E (f(x))^{\frac{1}{k}} dx = m(E).$$

证明

既然 $f \in L(E)$, 知其首先几乎处处有限, 又因为仅在零测集上不同的函数积分相同, 不妨就设 $f(x) < +\infty, \forall x \in E$. 下面开始就 $m(E)$ 进行讨论.

当 $m(E) < +\infty$, 考虑

$$g(x) = \max\{f(x), 1\} > 0, E_1 = \{x \in E : f(x) < 1\}, E_2 = \{x \in E : f(x) \ge 1\}, \quad E_1, E_2 \subset E$$

知当 $k \in \mathbb{N}$, 必有 $f(x) \le g(x)$, 而

$$\int_E |g(x)|dx = \int_E g(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} 1dx \le \int_E f(x)dx + \int_E 1dx < +\infty$$

这说明 $g \in L(E)$. 显见 $(f(x))^{\frac{1}{k}} \to 1, k \to \infty, x \in E$. 故根据 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E (f(x))^{\frac{1}{k}} dx = \int_E \lim_{k\to\infty} (f(x))^{\frac{1}{k}} dx = \int_E dx = m(E).$$

当 $m(E) = +\infty$, 注意到 $(f(x))^{\frac{1}{k}} \to 1, k \to \infty, x \in E$, 根据 Fatou 引理:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E (f(x))^{\frac{1}{k}} dx \ge \int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} (f(x))^{\frac{1}{k}} dx = \int_E 1dx = m(E) = +\infty$$

故只能有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E (f(x))^{\frac{1}{k}} dx = +\infty = m(E)$$

综上, 命题得证.

✍ **练习 4.50** 设 $\{f_n(x)\}$ 是 [0,1] 上的非负可积函数列, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 [0,1] 上依测度收敛于 $f(x)$. 若有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)dx$$

试证明对 [0,1] 的任意可测子集 $E$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

✍ **练习 4.51** 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可积函数列, 且 $f_k(x)$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x) \equiv 0$. 若有

$$\int_E \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}dx \le M, \quad k=1,2,\cdots$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = 0.$$

证明

取

$$g_k(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}, \quad x \in E, k = 1, 2, \cdots$$

因为 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可积函数列, 故 $\{g_k(x)\}$ 是递增列, 进而 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)$ 存在, 记为 $g(x)$. 根据极限的保号性知:

$$\forall k \in \mathbb{N}(\int_E g_k(x)dx \leq M) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)dx \leq M$$

又由 Fatou 引理:

$$\int_E |g(x)|dx = \int_E g(x)dx = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)dx \leq \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)dx \leq M$$

这说明 $g \in L(E)$, 且 $|f_k(x)| \leq g_k(x) \leq g(x)$. 故由 Lebesgue 控制收敛定理得到:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int_E 0dx = 0$$

命题得证.

**练习 4.52(依测度收敛型的 Fatou 引理)** 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列, 试证明:

$$\int_E f(x)dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

证明

考虑先证明依测度收敛型 Beppo Levi 非负渐升列积分定理:

**命题 4.7.1**

设有定义在 $E$ 上的非负可测函数渐升列:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_k(x) \leq \cdots$$

且 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

证明

因为 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛到 $f$, 故由 Riesz 引理知存在几乎处处收敛到 $f$ 的子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 进而根据 Beppo Levi 定理本身有:

$$\lim_{i\to\infty} \int_E f_{k_i}(x)dx = \int_E f(x)dx$$

又因为 $\{f_k(x)\}$ 是渐升列, 故

$$\int_E f_k(x)dx \leq \int_E f_{k+1}(x)dx, \quad k = 1, 2, \cdots$$

这说明 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx$ 有定义, 故

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \lim_{i\to\infty} \int_E f_{k_i}(x)dx = \int_E f(x)dx$$

□

现在回到原题. 令 $g_k(x) = \inf\{f_j(x) : j \geq k\}$, 既然 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛到 $f(x)$, 根据定义知

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists K = K(\varepsilon, \delta) > 0 \forall k \geq K(m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \delta)$$

下面证明 $g_k(x)$ 在 $E$ 上同样依测度收敛到 $f(x)$, 考虑

$$\begin{aligned}|g_K(x) - f(x)| > \varepsilon &\Leftrightarrow g_K(x) > f(x) + \varepsilon \vee g_K(x) < f(x) - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \inf_{k\geq K} f_k(x) > f(x) + \varepsilon \vee \inf_{k\geq K} f_k(x) < f(x) - \varepsilon\end{aligned}$$

要想 $\inf\limits_{k\geq K} f_k(x) < f(x) - \varepsilon$, 知只需存在 $K' \geq K$ 使得 $f_{K'}(x) < f(x) - \varepsilon$, 而要想 $\inf\limits_{k\geq K} f_k(x) > f(x) + \varepsilon$, 便至少需要对

任意的 $k \geq K$ 都有 $f_k(x) > f(x)+\varepsilon$, 当然也有 $f_{K'}(x) > f(x)+\varepsilon$. 故

$$\forall k > K \exists K' > k > K(\{x \in E : |g_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset \{x \in E : |f_{K'}(x) - f(x)| > \varepsilon\})$$

进而

$$0 \leq m(\{x \in E : |g_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq m(\{x \in E : |f_{K'}(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \delta$$

故 $g_k(x)$ 在 $E$ 上依测度收敛到 $f(x)$, 且 $\{g_k(x)\}$ 是 $E$ 上的非负可测函数渐升列, 故由依测度收敛型 Beppo Levi 定理:

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx = \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx \leq \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx$$

命题即证.

† 订正

上面所写的过程有致命错误! 下面的命题并不成立.

**命题 4.7.2**

若 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛到 $f(x)$, 令 $g_k(x) = \inf\{f_j(x) : j \geq k\}$, 则 $\{g_k(x)\}$ 也在 $E$ 上依测度收敛到 $f(x)$.

反例

反例正是依测度收敛但不几乎处处收敛的函数时取用的例子:

$$f_1(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, f_2(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1]}$$

$$f_3(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, f_4(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(x), f_5(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(x), \cdots$$

可知 $f_k$ 依测度收敛到 $\chi_{[0,1]}(x)$, 但 $g_k(x) = 0$.

**笔记** 这一题最初的想法自然是利用 Riesz 定理回到几乎处处收敛的情况. 自己之前在写过程的时候一直认为 Riesz 定理放缩过头了, 但实际上依旧可以做, 下面用 Riesz 定理再证一次该题.

根据下极限的定义, $\{f_k(x)\}$ 中存在子列 $\{f_{k_n}(x)\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_{k_n}(x)dx = \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx$$

既然 $\{f_{k_n}(x)\}$ 是 $\{f_k(x)\}$ 的子列, 而后者依测度收敛于 $f(x)$, 故 $\{f_{k_n}(x)\}$ 也依测度收敛于 $f(x)$, 因而其为依测度 Cauchy 列. 根据 Riesz 定理, 存在 $\{f_{k_n}(x)\}$ 的子列 $\{f_{k_{n_i}}(x)\}$ 几乎处处收敛于可测函数 $g(x)$. 又因为 $\{f_{k_{n_i}}(x)\}$ 自然也依测度收敛到 $f(x)$, 故 $f(x) = g(x)$, a.e. $x \in E$. 从而可以借 $g(x)$ 来应用正常意义的 Fatou 引理:

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx \leq \underline{\lim}_{i\to\infty}\int_E f_{k_{n_i}}(x)dx = \lim_{i\to\infty}\int_E f_{k_{n_i}}(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_{k_n}(x)dx = \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx$$

命题即证.

**练习 4.53** 试证明: $\int_{[0,+\infty)} e^{-x^2}\cos 2xtdt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}, t \in \mathbb{R}$.

**练习 4.54** 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f_k \in L(\mathbb{R}^n)(k = 1,2,\cdots)$, 且对于任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leq \int_E f_{k+1}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad k = 1,2,\cdots$$

且

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

**练习 4.55(加强的 Lebesgue 控制收敛定理)** 设 $\{f_k(\boldsymbol{x})\}, \{g_k(\boldsymbol{x})\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有 $|f_k(\boldsymbol{x})| \leq$

$g_k(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in E$. 若

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \lim_{k\to\infty} g_k(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_E g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} < +\infty$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

证明

知

$$|f(\boldsymbol{x})| = |\lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})| \le \lim_{k\to\infty} |f_k(\boldsymbol{x})| \le \lim_{k\to\infty} |g_k(\boldsymbol{x})| = g(\boldsymbol{x})$$

故由 $g \in L(E)$ 知 $f \in L(E)$. 作函数列

$$h_k(\boldsymbol{x}) = |f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})|, \quad k = 1, 2, \cdots$$

则 $h_k \in L(E)$, 且 $0 \le h_k(\boldsymbol{x}) \le |g_k(\boldsymbol{x})| + |g(\boldsymbol{x})|$, a.e. $\boldsymbol{x} \in E(k = 1, 2, \cdots)$.

由 Fatou 引理知

$$\int_E \lim_{k\to\infty} (|g_k(\boldsymbol{x})| + |g(\boldsymbol{x})| - h_k(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E (|g_k(\boldsymbol{x})| + |g(\boldsymbol{x})| - h_k(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}$$

因为 $g, g_k, h_k \in L(E)(k = 1, 2, \cdots)$, 故由 $\lim_{k\to\infty} g_k(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$, $\lim_{k\to\infty} \int_E g_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_E g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ 知:

$$2\int_E |g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} - \int_E \lim_{k\to\infty} h_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \le 2\int_E |g(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x} - \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E h_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

得到

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E h_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \le \int_E \lim_{k\to\infty} h_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

又因为 $\lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, 故 $\lim_{k\to\infty} h_k(\boldsymbol{x}) = 0, \boldsymbol{x} \in E$, 得到

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E h_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0.$$

最后, 从不等式

$$|\int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}| \le |\int_E (f_k(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}| \le \int_E h_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

即得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

**练习 4.56** 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 其不连续点集记为 $D$. 若 $D$ 只有可列个极限点, 证明 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.

**练习 4.57** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数. 若对于每一点 $x \in \mathbb{R}$, 存在极限 $\lim_{h\to 0} f(x+h)$, 试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的.

**练习 4.58** 设 $E \subset [0, 1]$, 试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是 $m(\overline{E} \backslash E^\circ) = 0$.

**练习 4.59** 设 $f \in R[0, 1]$, 试证明 $f(x^2) \in R[0, 1]$.

**练习 4.60** 假设 $f(x), g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数且 $m(E) < +\infty$, 若 $f(x) + g(y)$ 在 $E \times E$ 上可积, 试证明 $f(x), g(x)$ 都是 $E$ 上的可积函数.

**练习 4.61** 计算下列积分.

1. $\int_{x>0} \int_{y>0} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$;
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.

解

1. 显见 $\frac{\chi_{\{x:x>0\}}(x,y)\chi_{\{y:y>0\}}(x,y)}{(1+y)(1+x^2y)}$ 满足 Tonelli 定理的条件, 进而:

$$\int_{x>0}\int_{y>0}\frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}=\int_{y>0}dy\int_{x>0}\frac{dx}{(1+y)(1+x^2y)}=\int_{y>0}\frac{\pi}{2\sqrt{y}(1+y)}dy=\frac{\pi^2}{2}$$

2. 知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx$$

对上右式第二项换元: $x=\frac{1}{t}$, 得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx=\int_0^1\frac{\ln t}{t^2-1}dt=\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}dx$$

进而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx=2\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{x-1}dx-\int_0^1\frac{\ln x}{x+1}dx$$

对 $\int_0^1\frac{\ln x}{x-1}dx$, 知

$$\frac{\ln x}{x-1}=-\frac{\ln x}{1-x}=-\ln x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^k=-\sum_{k=0}^{\infty}x^k\ln x$$

且

$$\int_0^1 x^k\ln xdx=\frac{1}{k+1}\int_0^1\ln xdx^{k+1}=-\frac{1}{k+1}\int_0^1 x^kdx=-\frac{1}{(k+1)^2}$$

故

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^k\ln xdx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}<+\infty$$

根据逐项积分定理知

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x-1}dx=-\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^k\ln xdx=\frac{\pi^2}{6}$$

再考虑 $\int_0^1\frac{\ln x}{x+1}dx$, 知

$$\frac{\ln x}{x+1}=\ln x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k\ln x$$

且

$$\int_0^1(-x)^k\ln xdx=-\frac{1}{k+1}\int_0^1\ln xd(-x)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\int_0^1 x^kdx=\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2}$$

故

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1(-x)^k\ln xdx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi}{k^2}$$

而对 $f(x)=\frac{(\pi-x)^2}{4},x\in[0,2\pi]$ 作 Fourier 展开有:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$$

故代入 $x=\pi$ 得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

且

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1|(-x)^k\ln x|dx=\frac{\pi^2}{6}<+\infty$$

根据逐项积分定理知

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (-x)^k \ln x dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

最后得到:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}dx = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4}$$

**练习 4.62** 设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $m(E) > 0$, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可测函数. 若函数

$$F(x) = \int_E f(x-t)dt$$

在 $\mathbb{R}$ 上可积, 试证明 $f \in L(\mathbb{R})$.

证明

因为 $F \in \mathbb{L}(\mathbb{R})$, 故

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_E f(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\chi_E(t)dt < +\infty$$

因为 $f(x-t)\chi_E(t)$ 是非负可测函数, 故由 Tonelli 定理知

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\chi_E(t)dt = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(t)\chi(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x-t)dx = m(E)\int_{\mathbb{R}} f(t)dt < +\infty$$

根据 $m(E) > 0$ 知 $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt < +\infty$, 再根据 $f(t)$ 的非负性知 $f \in L(\mathbb{R})$.

**练习 4.63** 设 $f \in L(\mathbb{R})$, 且 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 令

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

若有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$, 试证明 $F \in L(\mathbb{R})$.

证明

要说明 $F \in L(\mathbb{R})$, 不妨分别说明 $F \in L((-\infty, 0])$ 与 $F \in L([0, +\infty))$.

先说明 $F \in L([0, +\infty))$. 因为 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 故

$$\int_0^{+\infty} |xf(x)|dx = \int_0^{+\infty} x|f(x)|dx = \int_0^{+\infty} (\int_0^x dt)|f(x)|dx = \int_0^{+\infty} dt \int_t^{+\infty} |f(x)|dt < +\infty$$

因为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$, 故 $F(x) = -\int_x^{+\infty} f(t)dt$, 得到

$$\int_0^{+\infty} |F(x)|dx \le \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$$

即 $F \in L([0, +\infty))$.

再说明 $F \in L((-\infty, 0])$. 知

$$\int_{-\infty}^0 |xf(x)|dx = -\int_{-\infty}^0 x|f(x)|dx = \int_{-\infty}^0 (\int_x^0 dt)|f(x)|dx = \int_{-\infty}^0 dt \int_{-\infty}^t |f(x)|dx < +\infty$$

故

$$\int_{-\infty}^0 |F(x)|dx \le \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^x |f(t)|dt < +\infty$$

即 $F \in L((-\infty, 0])$.

综上, 知

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x)|dx = \int_{-\infty}^0 |F(x)|dx + \int_0^{+\infty} |F(x)|dx < +\infty$$

得 $F \in L(\mathbb{R})$.

**练习 4.64** 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \arctan(nx)dx$ 的值.

✍ **练习 4.65** 设 $f \in L(0,a), g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt (a > x > 0)$, 试证明 $g \in L(0,a)$, 且有

$$\int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

证明

要证明 $g \in L((0,a))$, 即证明 $\int_0^a dx \int_x^a \frac{|f(t)|}{t} dt < +\infty$. 知:

$$\int_0^a dx \int_x^a \frac{|f(t)|}{t} dt = \int_0^a dt \int_0^t \frac{|f(t)|}{t} dx = \int_0^a |f(t)| dt < +\infty$$

其中最后一步是因为 $f \in L((0,a))$. 这便说明了 $g \in L((0,a))$, 同样得到

$$\int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

# 第五章 微分与不定积分

## 5.1 单调函数的可微性

### 5.1.1 知识梳理

[1] 指出适当的集合覆盖定理为深入研究函数的可微性提供了恰当方法, 这便是下面介绍的 Vitali 覆盖定理引入的动机.

**定义 5.1.1 (Vitali 覆盖)**

设 $E \subset \mathbb{R}, \Gamma = \{I_\alpha\}$ 是一个区间族. 若对任意的 $x \in E$ 以及 $\varepsilon > 0$, 存在 $I_\alpha \in \Gamma$, 使得 $x \in I_\alpha, |I_\alpha| < \varepsilon$, 则称 $\Gamma$ 是 $E$ 在 Vitali 意义下的一个覆盖, 简称为 $E$ 的 Vitali 覆盖.

笔记 简单来说, 集合的 Vitali 覆盖满足取集合的任意一点, 都能找到 Vitali 覆盖中的元素作为它的任意小邻域.

**定理 5.1.1 (Vitali 覆盖定理)**

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $m^*(E) < +\infty$. 若 $\Gamma$ 是 $E$ 的 Vitali 覆盖, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在有限个互不相交的 $I_j \in \Gamma(j = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$m^*(E \backslash \bigcup_{j=1}^{n} I_j) < \varepsilon.$$

证明

只需讨论 $\Gamma$ 是闭区间族的情形, 作开集 $G$, 使得 $G \supset E$, 且因为 $m^*(E) < +\infty$, 根据外测度定义总可以使 $m(G) < +\infty$. 因为 $\Gamma$ 是 $E$ 的 Vitali 覆盖, 故不妨设 $\Gamma$ 中的每个区间 $I$ 都含于 $G$[1]. 下面挑选这样的有限互不相交区间.

首先从 $\Gamma$ 中任选一区间记作 $I_1$, 再用归纳法逐步挑选后继区间: 设已经选出了互不相交的区间 $I_1, I_2, \cdots, I_k$. 若 $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j$, 则定理已明. 否则这说明至少还有某小区间含于 $E \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j$, 于是令

$$\delta_k = \sup\{|I| : I \in \Gamma, I \cap I_j = \varnothing (j = 1, 2, \cdots, k)\}$$

显见 $\delta_k \le m(G) < +\infty$. 根据上确界的定义, 总可以从 $\Gamma$ 中选取一个区间 $I_{k+1}$, 使得

$$|I_{k+1}| > \frac{1}{2}\delta_k, I_{k+1} \cap I_j = \varnothing, \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

继续这一过程, 可得互不相交的闭区间列 $\{I_j\}$ 满足

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||I_j| \le m(G) < +\infty$$

因为级数收敛, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N$ 使得 $\sum\limits_{j=N+1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon$. 令

$$S = E \backslash \bigcup_{j=1}^{N} I_j$$

下面估计 $m^*(S)$, 这主要是通过把 $S$ 和前述的 $\sum\limits_{j=N+1}^{\infty} |I_j|$ 扯上关系来得到的. 任取 $x \in S$, 因为 $\bigcup\limits_{j=1}^{N} I_j$ 是闭集, 且 $x \notin \bigcup\limits_{j=1}^{N} I_j$, 故存在小邻域 $I \in \Gamma$ 使得

$$x \in I, I \cap I_j = \varnothing, \quad j = 1, 2, \cdots, N.$$

[1] 这是因为 Vitali 覆盖着重的是小邻域, 当然可以取其元素" 足够小".

显见 $|I| \leq \delta_n < 2|I_{n+1}|$, 且 $j \to \infty$ 时 $|I_j| \to 0$. 这说明如果 $I$ 一直满足 $I \cap I_j = \oslash$, 则因为 $|I|$ 本身是确定的, 知 $I$ 一直是集合 $\{I : I \in \Gamma, I \cap I_j = \oslash(j = 1, 2, \cdots, N)\}$ 的成员, 从而总是有

$$\delta_n \geq |I|, \quad n = 1, 2, \cdots$$

但根据前文 $\delta_n < 2|I_{n+1}|$, 这与 $|I_{n+1}| \to 0$ 矛盾! 进而 $I$ 总会与 $\{I_j\}$ 中的某个区间相交. 记 $n_0$ 是使得 $I \cap I_{n_0} \neq \oslash$ 的最小下标, 则显然 $n_0 > N$, 且

$$|I| \leq \delta_{n_0-1} < 2|I_{n_0}|.$$

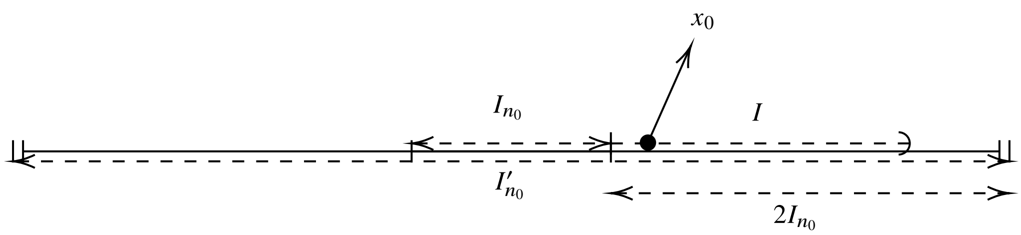


图 5.1: 某个可能的 $x$ 与 $I$ 选择的示意图

现在如果作区间 $I'_{n_0}$, 其与 $I_{n_0}$ 同心, 而长度为其 5 倍, 则就算 $I_{n_0}$ 与 $I$ 仅仅交于端点, 因为 $|I| < 2|I_{n_0}|$, 依旧必然有 $I'_{n_0} \supset I$, 进而 $x \in I'_{n_0}$(可参看示意图). 现在对一切的 $n > N$ 都作相应的 $I'_n$, 回忆前面是先令 $x \in S$, 后推出 $x \in I'_{n_0}$, 故

$$S \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} I'_n$$

故

$$m^*(S) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |I'_n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} 5|I_n| < 5\varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性即得命题. □

$\mathbb{R}^n$ 中当然也有类似的概念与结论.

**定义 5.1.2**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族闭方体. 若对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$ 以及 $\varepsilon > 0$, 都存在 $Q \in \mathscr{F}$, 使得 $\boldsymbol{x} \in Q$, 且有 $\mathrm{diam}Q < \varepsilon$, 则称 $\mathscr{F}$ 是 $E$ 的一个 Vitali 覆盖. ♣

**命题 5.1.1**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有界可测集, $\mathscr{F}$ 是 $E$ 的一个 Vitali 覆盖, 则存在互不相重 (内部互不相交) 的可数列 $\{Q_k\}$, 使得 $m(E \backslash \bigcup\limits_{k \geq 1} Q_k) = 0$. ♠

下面推广导数的概念.

**定义 5.1.3 (Dini 导数)**

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 中点 $x_0$ 的一个邻域上的实值函数, 令

$$D^+f(x_0) = \varlimsup_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$D_+f(x_0) = \varliminf_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$D^-f(x_0) = \varlimsup_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$D_-f(x_0) = \varliminf_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

分别称它们为 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的右上导数, 右下导数, 左上导数, 左下导数, 总称为 Dini 导数. ♣

显见

$$\begin{gathered} D^+f(x_0) \geq D_+f(x_0), D^-f(x_0) \geq D_-f(x_0) \\ D^+(-f) = -D_+(f), D^-(-f) = -D_-(f) \end{gathered} \tag{5.1}$$

如果这四个 Dini 导数在 $x_0$ 处均等于同一个值, 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微.

**定理 5.1.2 (Lebesgue 定理)**

若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的递增 (实值) 函数, 则 $f(x)$ 的不可微点集为零测集, 且有

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b)-f(a).$$

♡

证明

要说明 $f(x)$ 的不可微点集是零测集, 即说明对 $(a,b)$ 中几乎处处的 $x$ 都有

$$D_-f(x) = D^-f(x) = D_+f(x) = D^+f(x)$$

根据前述大小关系(5.1), 知 Dini 导数的大小排列只可能是下述两种:

$$D^+f(x_0) \geq D_+f(x_0) \geq D^-f(x_0) \geq D_-f(x_0)$$
$$D^-f(x_0) \geq D_-f(x_0) \geq D^+f(x_0) \geq D_+f(x_0)$$

从而只需说明

$$E_1 = \{x \in [a,b] : D^+f(x) > D_-f(x)\}$$
$$E_2 = \{x \in [a,b] : D^-f(x) > D_+f(x)\}$$

均为零测集即可, 下面先证明 $m(E_1) = 0$.

记 $\mathbb{Q}_+$ 是正有理数集[2], 分解 $E_1$ 如下:

$$E_1 = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} \{x \in [a,b] : D^+f(x) > r > s > D_-f(x)\}$$

记

$$A = A_{r,s} = \{x \in [a,b] : D^+f(x) > r > s > D_-f(x)\}$$

则只要能证明 $m(A) = 0$, 自然根据次可加性有 $m(E_1) = 0$.

根据外测度作为上确界的定义知, 取定 $\varepsilon > 0$, 总存在开集 $G \supset A$, 使得 $m(G) < (1+\varepsilon)m^*(A)$. 任取 $x \in A$, 根据 $A$ 的构造, 因为 $D_-f(x) < s$, 根据左下导数作为下极限的性质知存在 $h > 0$, 使得

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} < s \tag{5.2}$$

其中 $h$ 充分小, 届于 $G$ 是开集, 不妨设 $[x-h,x] \subset G$. 显见这种区间 $[x-h,x]$ 的全体构成 $A$ 的一个 Vitali 覆盖,

[2]这是为了方便用外测度的次可加性, 事实上用任何在 $[a,b]$ 中稠密的可列集都可以证明这件事.

因而根据 Vitali 覆盖定理(5.1.1)知对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在有限个互不相交的区间组

$$[x_1 - h_1, x_1], [x_2 - h_2, x_2], \cdots, [x_p - h_p, x_p]$$

使得

$$m^*(A \cap \bigcup_{j=1}^{p}[x_j - h_j, x_j]) > m^*(A) - \varepsilon \tag{5.3}$$

又因为

$$\bigcup_{j=1}^{p}[x_j - h_j, x_p] \subset G$$

故

$$m^*(\bigcup_{j=1}^{p}[x_j - h_j, x_p]) = \sum_{j=1}^{p} h_j \le m(G) < (1+\varepsilon)m^*(A) \tag{5.4}$$

因为 $[x_j - h_j, x_j]$ 都是由式(5.2)所确定的, 故将它们代入该式得

$$\frac{f(x_j - h_j) - f(x_j)}{-h_j} < s \Rightarrow f(x_j) - f(x_j - h_j) < sh_j, \quad j = 1, 2, \cdots, p$$

结合式(5.4)有

$$\sum_{j=1}^{p}[f(x_j) - f(x_j - h_j)] < s\sum_{j=1}^{p} h_j < s(1+\varepsilon)m^*(A) \tag{5.5}$$

记 $B = A \cap \bigcup\limits_{j=1}^{p}(x_j - h_j, x_j)$, 根据 $A$ 的构造知对任意的 $y \in B$ 都有 $D^+f(y) > r$, 故根据右上导数的上确界性质知存在 $k > 0$, 使得 $[y, y+k]$ 含于某个 $(x_j - h_j, x_j)$ 内[3], 且

$$\frac{f(y+k) - f(y)}{k} > r \tag{5.6}$$

注意 $k$ 可以充分小, 故区间 $[y, y+k]$ 的全体构成 $B$ 的 Vitali 覆盖, 根据 Vitali 覆盖定理值存在有限个互不相交的区间组

$$[y_1, y_1 + k_1], [y_2, y_2 + k_2], \cdots, [y_q, y_q + k_q]$$

使得

$$m^*(B \cap \bigcup_{i=1}^{q}[y_i, y_i + k_i]) > m^*(B) - \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{q} k_i > m^*(B) - \varepsilon \tag{5.7}$$

因为 $[y_i, y_i + k_i]$ 都是由式(5.6)所确定的, 故将它们代入该式得

$$\frac{f(y_i + k_i) - f(y_i)}{k_i} > r \Rightarrow f(y_i + k_i) - f(y_i) > rk_i$$

代入式(5.7)有

$$\sum_{i=1}^{q}[f(y_i + k_i) - f(y_i)] > r\sum_{i=1}^{q} k_i = r(m^*(B) - \varepsilon) \tag{5.8}$$

注意 $B$ 与 $A \cap \bigcup\limits_{j=1}^{p}[x_j - h_j, x_j]$ 之间仅相差一个零测集, 故根据式(5.3)有:

$$m^*(B) = m^*(A \cap \bigcup_{j=1}^{p}[x_j - h_j, x_j]) > m^*(A) - \varepsilon \tag{5.9}$$

结合式(5.8)-(5.9)知

$$\sum_{i=1}^{q}[f(y_i + k_i) - f(y_i)] > r(m^*(B) - \varepsilon) > r(m^*(A) - 2\varepsilon) \tag{5.10}$$

[3]因为后者是开集, 注意与前面取开集 $G$ 两个操作之间的比较.

注意 $f(x)$ 本身是递增函数, 且每个 $[y_i, y_i+k_i]$ 都是含于某个 $(x_j-h_j, x_j)$ 内的, 故

$$\sum_{i=1}^{q}(f(y_j+k_j)-f(y_j)) \le \sum_{j=1}^{p}(f(x_j)-f(x_j-h_j))$$

代入式(5.5),(5.10)有

$$r(m^*(A)-2\varepsilon) < s(1+\varepsilon)m^*(A)$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知 $rm^*(A) \le sm^*(A)$, 这说明 $m^*(A)=0$, 否则与 $r>s$ 矛盾了. 故 $m(A)=0$, 得到

$$m^*(E_1) = m^*(\bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} A_{r,s}) \le \sum_{r,s\in\mathbb{Q}} m^*(A_{r,s}) = 0$$

故 $m^*(E_1)=m(E_1)=0$. 证明 $m(E_2)=0$ 的步骤是完全类似的.

下面证明

$$\int_a^b f'(x)dx \le f(b)-f(a)$$

根据上述结论知 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有定义. 根据 $f(x)$ 的递增性知 $f'(x)\ge 0$, a.e. $x\in[a,b]$. 现在令

$$f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n})-f(x)), \quad x\in[a,b]$$

且当 $x>b$ 时就取 $f(x)=f(b)$. 易知

$$f_n(x)\ge 0, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x), \quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

故由 Fatou 引理:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)dx &\le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \le \underline{\lim}_{n\to\infty} n\int_a^b (f(x+\frac{1}{n})-f(x))dx \\
&= \underline{\lim}_{n\to\infty} n(\int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x+\frac{1}{n})dx + \int_{b-\frac{1}{n}}^{b} f(x+\frac{1}{n})dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx + \int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)dx) \\
&= \underline{\lim}_{n\to\infty} n(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx) = \underline{\lim}_{n\to\infty}(f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx) \le f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

此即欲证式, 由此可知 $f'(x)$ 几乎处处有限, 因而 $f(x)$ 几乎处处可微. □

笔记 几乎处处可微的结论无法改进, 这会在例子中作进一步阐述.

**定理 5.1.3 (Fubini 逐项微分定理)**

设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 则

$$\frac{d}{dx}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x), \quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

证明

首先, 既然 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数列, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 作为关于 $x$ 的函数在 $[a,b]$ 上也是递增的, 因而根据 Lebesgue 定理(5.1.2)知其几乎处处可微. 其次, 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) + R_N(x), \quad R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$$

且 $R_N(x)$ 也几乎处处可微, 得到

$$\frac{d}{dx}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) = \sum_{n=1}^{N}\frac{d}{dx}f_n(x) + \frac{d}{dx}R_N(x)$$

故只需指出

$$\lim_{N\to\infty} R_N'(x) = 0, \quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

即可. 根据递增性注意到 $f_n'(x) \geq 0 (n = 1, 2, \cdots)$, a.e. $x \in [a, b]$, 故

$$R_N'(x) = f_{N+1}'(x) + R_{N+1}'(x) \geq R_{N+1}'(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, b]$$

这说明 $\{R_N'(x)\}$ 作为关于 $N$ 的函数列递降, 因而存在

$$\lim_{N\to\infty} R_N'(x) =: R(x) \geq 0, \quad \text{a.e. } x \in [a, b]$$

根据 Lebesgue 定理给出的式子与非负可积递降列的单调收敛定理知:

$$\int_a^b \lim_{N\to\infty} R_N'(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b R_N'(x)dx \leq \lim_{N\to\infty} (R_N(b) - R_N(a)) = 0$$

其中最后一步是因为 $R_N(x)$ 本身作为收敛的函数列级数的余项, 就满足 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(x) = 0, x \in [a, b]$. 由此即得

$$\lim_{N\to\infty} R_N'(x)dx = 0, \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

□

**笔记** 上述逐项微分定理的条件自然是比数学分析中 Riemann 积分意义下的逐项微分定理宽松了许多, 但这里的结论只能到几乎处处成立, 无法改进为点态成立. 特别注意就算每个 $f_n(x)$ 都是可微的递增函数, 其和函数也可微, 也不能保证对一切 $x$ 都有

$$\frac{d}{dx}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

### 5.1.2 例子整理

**例题 5.1(函数的四个 Dini 导数全部不相等)** 设 $a < b, a' < b'$, 作函数

$$f(x) = \begin{cases} ax \sin^2 \frac{1}{x} + bx \cos^2 \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ a'x \sin^2 \frac{1}{x} + b'x \cos^2 \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

由于在 $[\frac{1}{(2n+2)\pi}, \frac{1}{2n\pi}]$ 内, $\cos \frac{1}{x}$ 与 $\sin \frac{1}{x}$ 可取到 $-1$ 到 $1$ 之间的一切值, 故

$$D^+ f(0) = \sup_{\theta}(a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta) = b$$

类似有

$$D_+ f(0) = a, D_- f(0) = a', D^- f(0) = b'.$$

**例题 5.2** 设 $f \in C[a, b]$, 则存在 $x_0 \in (a, b)$ 与常数 $k$, 使得

$$D_- f(x_0) \geq k \geq D^+ f(x_0) \text{或} D^- f(x_0) \leq k \leq D_+ f(x_0)$$

证明

记

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

考察 $F(x) = f(x) - kx$. 显见 $F \in C[a, b]$, 且

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a = \frac{1}{b - a}(bf(a) - af(b))$$

$$F(b) = \frac{1}{b - a}(bf(a) - af(b)) = F(a)$$

因为连续函数在闭区间内可取极大极小值, 故存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $F(x_0)$ 是 $[a, b]$ 上 $F(x)$ 的最大值或最小值, 得到

$$D_- F(x_0) \geq 0, D^+ F(x_0) \leq 0 \quad (x_0 \text{ 为最大值点})$$

$$\text{或} D_+ F(x_0) \geq 0, D^- F(x_0) \leq 0 \quad (x_0 \text{ 为最小值点})$$

进而

$$D_-f(x_0) \geq k \geq D^+f(x_0) \quad (x_0 \text{ 为最大值点})$$

$$\text{或} D_+f(x_0) \geq k \geq D^-f(x_0) \quad (x_0 \text{ 为最小值点})$$

□

笔记

1. 若 $\psi'(x_0)$ 存在, 且 $g(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, 则

$$D^{\pm}g(x_0) = D^{\pm}\varphi(x_0) + \psi'(x_0)$$

$$D_{\pm}g(x_0) = D_{\pm}\varphi(x_0) + \psi'(x_0)$$

2. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数, 则其 Dini 导函数可测.
3. Dini 导数可能不满足分配律. 如

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad g(x) = -f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

则 $D^+f(0) = 1, D^+g(0) = 1, D^+(f+g)(0) = 0$, 因而

$$D^+(f+g)(0) \neq D^+f(0) + D^+g(0).$$

### 5.1.3 思考题

**练习 5.1** 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的非负函数. 若 $f \notin L[a,b]$, 试问: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数吗?

解

没有原函数. 用反证法, 如果存在 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi'(x) = f(x), x \in (a,b)$, 则根据 Lebesgue 定理知 $f(x)$ 应当在 $(a,b)$ 上几乎处处有界, 但 $f \notin L[a,b]$ 已经否定了这一性质, 矛盾.

**练习 5.2** 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $G(x)$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $F'(x) \geq 0 (a \leq x \leq b)$, 试证明 $h(x) = F(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

证明

**练习 5.3** Vitali 覆盖定理的结论可改为: 存在可数个 $\{I_j\}$, 使得

$$m^*(E \setminus \bigcup_{j \geq 1} I_j) = 0.$$

## 5.2 有界变差函数

### 5.2.1 知识梳理

**定义 5.2.1 (变差, 全变差, 有界变差函数)**

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数, 作分划 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 以及相应的和

$$v_{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

称之为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的变差; 作

$$\bigvee_a^b(f) = \sup\{v_{\Delta} : \Delta \text{为 } [a,b] \text{ 的任一分划}\},$$

并称它为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差. 若

$$\bigvee_a^b(f) < +\infty$$

则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数 (即全体变差形成有界数集). $[a,b]$ 上有界变差函数的全体记作 $BV([a,b])$.

根据定义可知下述性质.

**定理 5.2.1**

1. 若 $f\in BV([a,b])$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界函数;
2. $BV([a,b])$ 构成一个线性空间.

证明

对 1., 用反证法, 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 当 $|f(a)|=\infty$ 或 $|f(b)|=\infty$ 时结论自明, 下设 $|f(a)|,|f(b)|<+\infty$, 根据定义知

$$\forall M>0\exists x_0\in[a,b](|f(x_0)|>M)$$

这说明

$$\bigvee_a^b(f)\geq|f(x_0)-f(a)|+|f(b)-f(x_0)|\geq 2M-|f(a)|-|f(b)|$$

令 $M\to+\infty$ 即得矛盾.

对 2., 数乘易证, 现在任取 $f,g\in BV([a,b])$, 考虑

$$|f(x_1)+g(x_1)-(f(x_2)+g(x_2))|\leq|f(x_1)-f(x_2)|+|g(x_1)-g(x_2)|$$

这说明

$$\bigvee_a^b(f+g)\leq\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g)<+\infty$$

因而 $f+g\in BV([a,b])$. □

有界变差函数存在几何意义, 为此特别回忆可求长曲线的概念:

**定义 5.2.2**

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 对 $[a,b]$ 作分划

$$\triangle: a=_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

若把依次联结点组 $\{(x_i,f(x_i))\}(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的折线长记为

$$l_\triangle(f)=\sum_{i=1}^n\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

则定义曲线段即点集 $\{(x,y):a\leq x\leq b,y=f(x)\}$ 的长度为

$$l_f=\sup_\triangle\{l_\triangle(f)\}(\text{也即对一切分划取上确界})$$

若 $l_f<+\infty$, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的曲线弧段是可求长的.

从有界变差的角度看, 因为对 $[a,b]$ 的任一分划 $\triangle: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 有

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leq\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}\leq(x_i-x_{i-1})+|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

对 $i=1,2,\cdots,n$ 求和得:

$$\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leq l_\triangle(f)\leq(b-a)+\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

故在有界区间 $[a,b]$ 上, $f(x)$ 的弧段可求长与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界变差是等价的.

**定理 5.2.2**

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数, $a<c<b$, 则

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

证明

不妨设 $\bigvee_a^c(f)$ 与 $\bigvee_c^b(f)$ 均有限, 否则欲证式已成 $+\infty=+\infty$ 自明. 考虑 $[a,b]$ 的一个分划 $\Delta$. 若 $c$ 是分点: $a=x_0<x_1<\cdots<x_r=c<\cdots<x_n=b$, 则

$$\begin{aligned}v_\Delta&=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^r|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{i=r+1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\le\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)\end{aligned}$$

若 $c$ 不是分划 $\Delta$ 的分点, 将 $c$ 作为分点插入分划 $\Delta$, 记得到的新分划为 $\Delta'$, 显见 $v_\Delta\le v_{\Delta'}$[4], 故

$$\bigvee_a^b(f)\le\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

另一方面, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 根据全变差作为上确界的性质, 必存在 $\Delta':a=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=c$, 使得

$$\sum_{i=1}^n|f'(x_i)-f'(x_{i-1})|>\bigvee_a^c(f)-\varepsilon$$

同样也存在 $[c,b]$ 的分划 $\Delta'':c=x_0''<x_1''<\cdots<x_n''=b$ 使得

$$\sum_{j=1}^n|f(x_j'')-f(x_{j-1}'')|>\bigvee_a^b(f)-\varepsilon$$

现在记 $\Delta'\cup\Delta''$ 为 $\Delta'$ 与 $\Delta''$ 中分点合并而成的 $[a,b]$ 的分划, 且合并后的分点用 $\{x_k\}$ 记之, 有:

$$\sum_{k=1}^{m+n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{i=1}^m|f(x_i')-f(x_{i-1}')|+\sum_{j=1}^n|f(x_j'')-f(x_{j-1}'')|>\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)-\varepsilon$$

根据 $\varepsilon$ 的任意性知

$$\bigvee_a^b(f)\ge\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$$

命题即证. □

下面介绍的 Jordan 分解定理有时是证明函数为有界变差函数的利器 (见习题), 同时其与 Hahn 分解定理一道, 在 **[11]** 中以测度的形式再次出现, 具体可参见补充部分.

**定理 5.2.3 (Jordan 分解定理)**

$f\in BV([a,b])$ 当且仅当 $f(x)=g(x)-h(x)$, 其中 $g(x)$ 与 $h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增 (实值) 函数.

证明

当 $f\in BV([a,b])$, 令

$$g(x)=\frac{1}{2}\bigvee_a^x(f)+\frac{1}{2}f(x),\quad h(x)=\frac{1}{2}\bigvee_a^x(f)-\frac{1}{2}f(x)$$

[4] 可回忆 Darboux 积分与此处的类似点.

得 $f(x)=g(x)-h(x)$. 注意当 $a\le x\le y\le b$ 时:

$$\begin{aligned}h(y)-h(x)&=\frac{1}{2}((\bigvee_a^y(f)-f(y))-(\bigvee_a^x(f)-f(x)))\\&=\frac{1}{2}(\bigvee_x^y(f)+f(x)-f(y))\ge\frac{1}{2}(\bigvee_x^y(f)-|f(y)-f(x)|)\ge 0\end{aligned}$$

其中最后一个不等号成立是因为 $x,y$ 两点同样是 $[x,y]$ 的一个分划. 类似对 $g(x)$ 有:

$$\begin{aligned}g(y)-g(x)&=\frac{1}{2}((\bigvee_a^y(f)+f(y))-(\bigvee_a^x(f)+f(x)))\\&=\frac{1}{2}(\bigvee_x^y(f)+f(y)-f(x))\ge\frac{1}{2}(\bigvee_x^y(f)-|f(y)-f(x)|)\ge 0\end{aligned}$$

因而 $g(x),h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数.

当 $f(x)=g(x)-h(x)$, 其中 $g(x),h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增实值函数, 显见 $g,h\in BV([a,b])$, 故根据 $BV([a,b])$ 为线性空间知 $f\in BV([a,b])$. □

注意在上面的证明过程中出现了一个新的数量: $\bigvee_a^b(f)$. 当 $f$ 是一个固定的函数时, 这个数量仅与 $[a,b]$ 有关. 故当 $f\in BV([a,b])$ 时, 可得一个新型函数:

$$\bigvee_a^x(f),\quad x\in[a,b]$$

其性质如下.

**命题 5.2.1**

*若 $f\in BV([a,b])$, 则函数 $\bigvee_a^x(f)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数, 且若 $f\in C([a,b])$, 则 $\bigvee_a^x(f)\in C([a,b])$.* ♠

证明

首先证明 $\bigvee_a^x(f)$ 在 $[a,b]$ 上递增. 任取 $a\le x\le y\le b$, 知

$$\bigvee_a^y(f)-\bigvee_a^x(f)=\bigvee_x^y(f)\ge 0$$

当 $f\in C([a,b])$, 知

$$\forall x_0\in[a,b]\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0\forall x\in U(x_0;\delta)\cap[a,b](|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

当 $\delta>0$, 根据 $\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f)$ 作为上确界的性质知存在 $[x_0,x_0+\delta]$ 的 (依赖于 $\varepsilon$ 的) 分划:

$$\triangle: x_0<x_1<\cdots<x_n<=x_0+\delta$$

使得

$$\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f)<\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\varepsilon$$

知

$$\bigvee_{x_0}^{x_1}(f)=\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f)-\bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)<\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\varepsilon-\sum_{i=2}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|=|f(x_1)-f(x_0)|+\varepsilon<2\varepsilon$$

进而 $\bigvee_{x_0}^x(f)$ 右连续.

当 $\delta<0$, 对 $\bigvee_{x_0-\delta}^{x_0}(f)$ 同理知存在 $[x_0-\delta,x_0]$ 的 (依赖于 $\varepsilon$ 的) 分划:

$$\triangle': x_0-\delta=x_0'<x_1'<\cdots<x_n'=x_0$$

使得

$$\bigvee_{x_0-\delta}^{x_0}(f) < \sum_{i=1}^{n}|f(x_i') - f(x_{i-1}')| + \varepsilon$$

知

$$\bigvee_{x_{n-1}'}^{x_0}(f) = \bigvee_{x_0-\delta}^{x_0}(f) - \bigvee_{x_0-\delta}^{x_{n-1}'}(f) < \sum_{i=1}^{n}|f(x_i') - f(x_{i-1}')| + \varepsilon - \sum_{i=1}^{n-1}|f(x_i') - f(x_{i-1}')| = |f(x_{n-1}') - f(x_0)| + \varepsilon < 2\varepsilon$$

进而 $\bigvee_{x_0}^{x}(f)$ 左连续.

综上, $\bigvee_{x_0}^{x}(f)$ 在 $x_0$ 处连续, 而 $x_0$ 是 $[a,b]$ 中的任一点, 命题即证. □

下面这个定理阐明闭区间上的有界变差函数几乎处处可微.

**定理 5.2.4**

若 $f \in BV([a,b])$, 则 $f(x)$ 几乎处处可微, 且

$$\frac{d}{dx}(\bigvee_{a}^{x}(f)) = |f'(x)|, \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

♡

**证明**

根据全变差作为上确界的性质知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在分划

$$\triangle : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

使得

$$\bigvee_{a}^{b}(f) - \sum_{i=1}^{k}|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$$

现在, 对 $x \in [a, x_1]$, 令

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(a_0), & f(x_1) \ge f(a) \\ -f(x) + f(a_0), & f(x_1) < f(a) \end{cases}$$

其次, 用归纳法. 若在 $[a, x_i](i < k)$ 上已经定义了 $g(x)$, 则对 $x \in (x_i, x_{i+1}]$ 定义

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + (g(x_i) - f(x_i)), & f(x_{i+1}) \ge f(x_i) \\ -f(x) + (g(x_i) + f(x_i)), & f(x_{i+1}) < f(x_i) \end{cases}$$

对这样构造的 $g(x)$, 可知对每个 $[x_{i-1}, x_i]$, $g(x) - f(x)$ 与 $g(x) + f(x)$ 中总有一个是常数, 且 $|g'(x)| = |f'(x)|$, a.e. $x \in [a,b]$[5]. 根据 $g(x)$ 的构造知

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = g(x_i) - g(x_{i-1}), \quad f(a) = g(a)$$

故

$$\bigvee_{a}^{b}(f) - \sum_{i=1}^{k}|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \bigvee_{a}^{b}(f) - g(b) < \varepsilon$$

[5] 为什么?

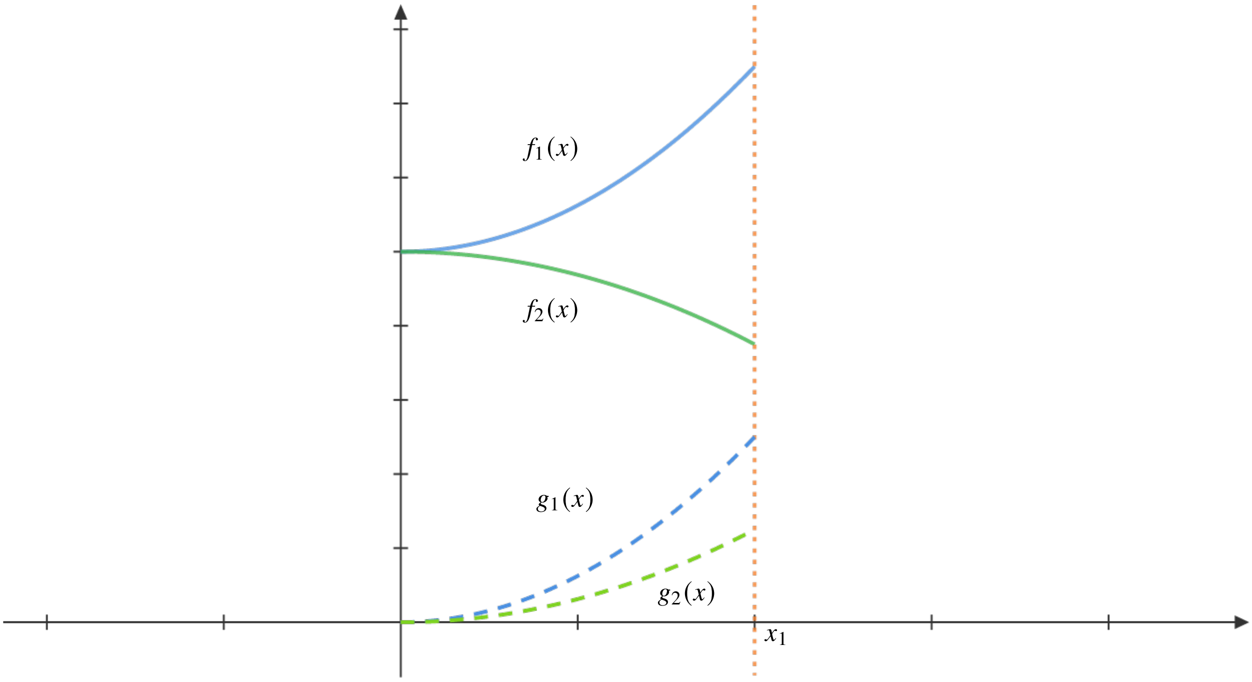


图 5.2: 第一步构造示意图, 其中 $f_1, f_2$ 分别是不同的两种可能情况

现在对每一段 $(x_{i-1}, x_i]$, 考虑证明 $h(x) := \bigvee\limits_{x_{i-1}}^{x}(f) - g(x)$ 递增. 知对 $x_{i-1} \le x \le y \le x_i$ 有

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= (\bigvee_{x_{i-1}}^{y}(f) - g(y)) - (\bigvee_{x_{i-1}}^{x}(f) - g(x)) \\ &= \bigvee_{x}^{y}(f) - (g(y) - g(x)) \ge \bigvee_{x}^{y}(f) - |f(y) - f(x)| \ge 0 \end{aligned}$$

故 $\bigvee\limits_{x_{i-1}}^{x}(f) - g(x)$ 在 $(x_{i-1}, x_i]$ 上递增, 从而其在 $[a, b]$ 上递增, 因而几乎处处可微.

现在, 取 $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, 知存在 $[a, b]$ 上的函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

### 5.2.2 例子整理

**例题 5.3(闭区间上单调函数必为有界变差函数)** 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的单调函数, 则对任一分划 $\triangle$, 都有 $v_\triangle = |f(b) - f(a)|$, 因而

$$\bigvee_{a}^{b}(f) = |f(b) - f(a)| < +\infty$$

也即 $f \in BV([a, b])$.

**例题 5.4** 若 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的可微函数, 且 $|f'(x)| \le M(a \le x \le b)$, 则 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

证明

对于任一分划

$$\triangle : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

由微分中值定理知

$$v_\triangle = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) = M(b - a)$$

故

$$\bigvee_a^b(f) \leq M(b-a) < +\infty.$$

□

**例题 5.5(连续函数不一定为有界变差函数)** 若在 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & 0<x\leq 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 不是有界变差函数. 事实上, 作分划

$$\triangle: 0<\frac{2}{2n-1}<\frac{2}{2n-3}<\cdots<\frac{2}{3}<1$$

则

$$v_\triangle=\frac{2}{2n-1}+(\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-3})+\cdots(\frac{2}{5}+\frac{2}{3})+\frac{2}{3}=2\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{2k-1}$$

故 $n\to\infty \Rightarrow v_\triangle\to\infty$, 即 $\bigvee\limits_a^b(f)=+\infty$.

### 5.2.3 思考题

✍ **练习 5.4** 计算 $\bigvee_{-1}^{1}(x-x^3)$.

✍ **练习 5.5** 试证明 $\bigvee\limits_a^b(f)=0$ 当且仅当 $f(x)=C$(常数).

✍ **练习 5.6** 设 $f\in BV([a,b]), g\in BV([a,b])$, 试证明

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

证明

任取 $[a,b]$ 上的分划:

$$\triangle: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

考虑到

$$M(x)=\frac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2}$$

知

$$\begin{aligned}|M(x_i)-M(x_{i-1})| &= \frac{1}{2}||f(x_i)-g(x_i)|-|f(x_{i-1})-g(x_{i-1})|+f(x_i)+g(x_i)-f(x_{i-1})-g(x_{i-1})| \\ &\leq \frac{1}{2}|f(x_i)-f(x_{i-1})+g(x_{i-1})-g(x_i)|+|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|g(x_i)-g(x_{i-1})| \\ &\leq |f(x_i)-f(x_{i-1})|+|g(x_i)-g(x_{i-1})|\end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}|M(x_i)-M(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n}(|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|g(x_i)-g(x_{i-1})|) \leq \bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g)$$

再由 $f\in BV([a,b]), g\in BV([a,b])$ 得到

$$\bigvee_a^b(M) \leq \bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g) < +\infty$$

命题即证.

练习 5.7 设 $f \in BV([a,b])$, 试证明 $|f| \in BV([a,b])$, 但反之不然.

证明

任取 $[a,b]$ 上的分划:

$$\triangle : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

知

$$||f(x_i)| - |f(x_{i-1})|| \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})|, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

故

$$\sum_{i=1}^{n} ||f(x_i)| - |f(x_{i-1})|| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^b (f)$$

根据 $f \in BV([a,b])$ 得

$$\bigvee_a^b (|f|) \leq \bigvee_a^b (f) < +\infty$$

故 $|f| \in BV([a,b])$.

反例如定义在 $[0,1]$ 上的函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1, & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

取分划

$$\triangle : 0 = r_1 < q_1 < r_2 < q_2 < \cdots < r_{n-1} < q_{n-1} < r_n = 1$$

其中 $r_i \in \mathbb{Q}, q_j \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}, i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,n-1$, 得

$$|f(q_1) - f(r_1)| + |f(r_2) - f(q_1)| + \cdots + |f(r_n) - f(q_{n-1})| = 4(n-1)$$

故

$$\bigvee_0^1 (f) \geq 4(n-1), \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigvee_0^1 (f) = +\infty$$

即 $f \notin BV([0,1])$, 与此同时显见 $\bigvee\limits_0^1 (|f|) = 0$.

练习 5.8 设 $f, g \in BV([a,b])$, 试证明

$$\bigvee_a^b (fg) \leq \sup_{[a,b]} \{f(x)\} \bigvee_a^b (f) + \sup_{[a,b]} \{g(x)\} \bigvee_a^b (f).$$

练习 5.9 设 $f \in BV([a,b])$, $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上属于 Lip1, 试证明 $\varphi(f) \in BV([a,b])$.

练习 5.10 设 $f \in \mathrm{Lip1}([a,b])$, 试证明 $\bigvee\limits_a^x (f)$ 也是.

练习 5.11 试证明 $f \in BV([a,b])$ 当且仅当存在 $[a,b]$ 上的递增函数 $F(x)$, 使得

$$|f(x') - f(x'')| \leq F(x'') - F(x') \quad (a \leq x' \leq x'' \leq b).$$

练习 5.12 设 $f \in BV([a,b])$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数, 试问: $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数吗?

练习 5.13 设 $f \in BV([a,b])$. 若有 $\bigvee\limits_a^b (f) = f(b) - f(a)$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增.

练习 5.14 设 $f_n \in BV([a,b])(n \in \mathbb{N})$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), \sum\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_a^x (f_n)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 试证明 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界变差函数.

## 5.3 不定积分的微分

### 5.3.1 知识梳理

在 Riemann 积分中, 至少当 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续时, 记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 必有

$$F'(x)=f(x)$$

现在讨论当 $f\in L[a,b]$ 时上述关系是否依旧成立. 因为积分值在除去零测集的意义下是相等的, 故只能期望有

$$F'(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

本节就来说明这个结论是正确的. 根据导数的定义, 可记

$$F_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

则问题归结为证明

$$\lim_{h\to 0} F_h(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

注意此时 $F_h(x)$ 可以看做 $f$ 在 $[x,x+h]$ 上的 $L^1$ 平均, 故可以证明 $F_h(x)$ 是 $L^1$ 收敛到 $f$ 的. 此即下述引理.

**引理 5.3.1**

设 $f\in L([a,b])$, 记

$$F_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

且当 $x\notin[a,b]$ 时, 令 $f(x)=0$. 则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |F_h(x)-f(x)|dx=0.$$

证明

不妨设 $h>0$. 因为

$$F_h(x)-f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt-f(x)=\frac{1}{h}\int_0^h f(t+x)dt-\frac{1}{h}\int_0^h f(x)dt=\frac{1}{h}\int_0^h (f(x+t)-f(x))dt$$

故

$$\begin{aligned}\int_a^b |F_h(x)-f(x)|dx&=\int_a^b \left|\frac{1}{h}\int_0^h (f(x+t)-f(x))dt\right|dx\le\int_a^b \left(\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt\right)dx\\&\le\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt\right)dx=\int_0^h \frac{1}{h}dt\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|dx\end{aligned}$$

根据条件中的延拓知 $f\in L(\mathbb{R})$, 故由积分的平均连续性定理(4.3.3)知[6], 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|t|<\delta$ 时, 有

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|dx<\varepsilon$$

故当 $h<\delta$ 时:

$$\int_0^h \frac{1}{h}dt\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{h}\int_0^h dt=\varepsilon$$

$h<0$ 时同理可证. 这说明对任给的 $\varepsilon>0$, 当 $|h|<\delta$ 时有

$$\int_a^b |F_h(x)-f(x)|dx<\varepsilon.$$

□

[6]特意拉到 $\mathbb{R}$ 上讨论正是为了应用平均连续性定理.

**定理 5.3.1**

设 $f \in L[a,b]$, 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

则

$$F'(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

证明

不妨设 $x \notin [a,b]$ 时 $f(x) = 0$, 记

$$F_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

既然 $f \in L[a,b]$, 显见 $F(x)$ 是有界变差函数, 因而根据定理(5.2.4)知 $F(x)$ 几乎处处可微, 这说明 $F_h(x)$ 当 $h \to 0$ 时的极限在 $[a,b]$ 上几乎处处存在. 从而可设

$$\lim_{h\to\infty} F_h(x) = g(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b]$$

其中 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数. 根据引理(5.3.1)知 $F_h(x)$ 在 $h \to 0$ 时是 $L^1$ 收敛于 $f(x)$ 的, 因而根据 Fatou 引理:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_a^b \lim_{h\to 0} |f(x) - F_h(x)|dx \le \varliminf_{h\to 0} \int_a^b |f(x) - F_h(x)|dx = 0$$

这说明 $g(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a,b]$, 命题即证. □

到此我们就说明了若 $f \in L[a,b]$, 则有

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

**推论 5.3.1**

若 $f \in L([a,b])$, 则对 $[a,b]$ 中几乎处处的点 $x$, 都有

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|dt = 0.$$

称满足上式的点 $x$ 为 $f(x)$ 的 Lebesgue 点.

证明

对于任意取定的 $r \in \mathbb{Q}$ 有

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - r|dt = |f(x) - r|, \quad \text{a.e. } x \in [a,b]$$

记 $[a,b]$ 中不满足上式的 $x$ 的全体为 $Z_r$, 则 $m(Z_r) = 0$, 令

$$Z = (\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} Z_r) \cup \{x \in [a,b] : |f(x)| = +\infty\}$$

则 $m(Z) = 0$.

现在设 $x$ 为 $[a,b]$ 中不属于 $Z$ 的任意一点, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 根据有理数的稠密性知存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得

$$|f(x) - r| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.11}$$

得到

$$||f(t) - r| - |f(t) - f(x)|| \le |(f(t) - r) - (f(t) - f(x))| = |f(x) - r| < \frac{\varepsilon}{3}$$

这说明

$$-\frac{\varepsilon}{3} < |f(t) - r| - |f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

考虑左边的不等号, 移项得

$$|f(t)-f(x)|<|f(t)-r|+\frac{\varepsilon}{3}$$

两边积分并乘以 $\frac{1}{h}$ 得 (因为如果 $h<0$, $\int_x^{x+h}$ 有负号, $\frac{1}{h}$ 也有负号, 二者抵消了, 所以无需考虑 $h$ 的正负是否导致此处不等号反向)

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt<\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt+\frac{\varepsilon}{3} \tag{5.12}$$

因为 $x\notin Z$, 这说明 $x$ 满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt=|f(x)-r|,\quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

根据极限定义知存在 $\delta>0$, 当 $0<|h|<\delta$ 时有

$$|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt-|f(x)-r||<\frac{\varepsilon}{3}$$

得到

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt<|f(x)-r|+\frac{\varepsilon}{3} \tag{5.13}$$

把(5.11),(5.13)式代入(5.12)得到

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt<\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt+\frac{\varepsilon}{3}<|f(x)-r|+\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

命题即证. □

**笔记** 涉及 Lebesgue 点, Lebesgue 集的定理在 [**11**] 中是通过 Hardy-Littlewood 极大函数来研究的, 参见补充部分.

### 5.3.2 例子整理

### 5.3.3 思考题

**练习 5.15** 设 $E\subset[0,1]$. 若存在 $l: 0<l<1$, 使得对 $[0,1]$ 中任意的子区间 $[a,b]$, 均有 $m(E\cap[a,b])\geq l(b-a)$, 试证明 $m(E)=1$.

**练习 5.16** 对于 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, 试问: $[0,1]$ 中的 Lebesgue 点是什么?

解

$[0,1]$ 中的全体无理点即为欲求.

## 5.4 绝对连续函数与微积分基本定理

本节探讨的核心问题在于, 当 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数时, 等式

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt,\quad x\in[a,b]$$

何时成立?

首先可知, 如果该等式成立, 则 $f(x)$ 必为有界变差连续函数, 这是因为从 $f'(t)$ 在 $[a,b]$ 上存在且有界, 根据例(5.4)可知 $f\in BV[a,b]$, 连续由可微推知; 其次, 如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差连续函数, 则此时 $f'\in L[a,b]$, 令

$$h(x)=f(x)-\int_a^x f'(t)dt$$

两边求导知

$$h'(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

同时 $h(a)=f(a)$. 注意既然 $h'(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处为零, $h(x)$ 理应为一个常数. 但回忆 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数 $\Phi(x)$, 其为 $[0,1]$ 上的递增函数, 在 Cantor 集构造过程中挖去的那些区间上为常数, 知 $\Phi'(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$, 但

$\Phi(x)$ 并非常数, 这是因为 $\Phi(0)=0, \Phi(1)=1$. 所以有界变差连续的条件并不充分, 需要额外加上一些条件.

**引理 5.4.1**

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微, 且 $f'(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是常数函数, 则必存在 $\varepsilon>0$, 使得对任意的 $\delta>0$, $[a,b]$ 内存在有限个互不相交的区间:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$$

使得其长度总和小于 $\delta$, 同时

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|>\varepsilon$$

证明

因为 $f(x)$ 不是常数, 故不妨设存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(a)\neq f(c)$. 作点集 $E_c=\{x\in(a,c): f'(x)=0\}$, 对任意的 $x\in E_c$, 因为 $f'(x)=0$, 根据导数的定义知:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

这说明对任意的 $r>0$, 只要 $h$ 充分小, 且 $[x,x+h]\subset(a,c)$, 就有

$$|f(x+h)-f(x)|<rh$$

于是对固定的 $r$, 这样的 $[x,x+h]$ 全体就构成 $E_c$ 的一个 Vitali 覆盖. 根据 Vitali 覆盖定理, 可知对任意的 $\delta>0$, 存在互不相交的区间组:

$$[x_1,x_1+h_1],[x_2,x_2+h_2],\cdots,[x_n,x_n+h_n]$$

使得

$$m(E_c\backslash\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,x_i+h_i])=m([a,c)\backslash\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,x_i+h_i)]<\delta$$

不妨设这些区间的端点可排列为

$$a=x_0<x_1<x_1+h_1<x_2<x_2+h_2<\cdots<x_n+h_n<x_{n+1}=c$$

令 $h_0=0$, 并取 $\varepsilon>0$ 满足 $\varepsilon<|f(c)-f(a)|$, 有

$$\begin{aligned}\varepsilon<|f(c)-f(a)|&\leq\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|+\sum_{i=1}^{n}|f(x_i+h_i)-f(x_i)|\\&\leq\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|+r\sum_{i=1}^{n}h_i\leq\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|+r(b-a)\end{aligned}$$

因为 $r$ 任取, 故可以令 $r(b-a)<\frac{1}{2}\varepsilon$, 得到

$$\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|>\varepsilon$$

且

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-(x_i+h_i))=m(E_c\backslash\bigcup_{i=1}^{n}(x_i,x_i+h_i))<\delta$$

命题即证. □

针对引理描述的特征, 下面引进绝对连续函数的概念.

**定义 5.4.1 (绝对连续函数)**

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开

区间 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \delta$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

则称 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数, 其全体记为 $AC([a, b])$.

从定义立得下述性质.

**定理 5.4.1**

1. 绝对连续函数必为连续函数;
2. 在 $[a, b]$ 上绝对连续函数的全体构成一个线性空间.

**定理 5.4.2**

若 $f \in L[a, b]$, 则其不定积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数.

证明

对任意的 $\varepsilon > 0$, 因为 $f \in L[a, b]$, 故根据积分的绝对连续性知存在 $\delta > 0$, 当 $e \subset [a, b]$ 且 $m(e) < \delta$ 时总有

$$\int_e |f(x)|dx < \varepsilon$$

现在, 对于 $[a, b]$ 中任意有限个互不相交的区间:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

当其长度总和小于 $\delta$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{x_i}^{y_i} f(x)dx\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{y_i} |f(x)|dx = \int_{\bigcup_{i=1}^{n}(x_i, y_i)} |f(x)|dx < \varepsilon$$

□

**定理 5.4.3**

若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数, 则 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

证明

在函数绝对连续的定义中, 取 $\varepsilon = 1$, 知存在 $\delta > 0$, 当 $[a, b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \delta$$

时, 必有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < 1$$

现作分划

$$\triangle : a = c_0 < c_1 < \cdots < c_k = b$$

使得

$$c_{k+1} - c_k < \delta, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

得到

$$\bigvee_{c_k}^{c_{k+1}}(f) \leq 1, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

故

$$\bigvee_{a}^{b}(f) \leq n$$

□

**推论 5.4.1**

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微, 且 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数.

**定理 5.4.4**

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 且 $f'(x) = 0$, a.e. $x \in [a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上等于一个常数.

下面介绍微积分基本定理.

**定理 5.4.5 (微积分基本定理)**

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 则

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

证明

令

$$g(x) = \int_a^x f'(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

根据定理(5.4.2)知 $g \in AC([a,b])$, 且由定理(5.3.1)知

$$g'(x) = f'(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b]$$

另有 $g(a) = 0$. 再令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则届于 $AC([a,b])$ 是线性空间, 知 $h \in AC([a,b])$, 且

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [a,b]$$

故根据定理(5.4.4)知 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数. 又因为 $h(a) = f(a)$, 得到

$$f(x) = h(x) + g(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

□

**笔记** 综合来看, 一个定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 形如

$$f(x) = f(a) + \int_x^a g(t)dt, \quad g(t) \in L[a,b]$$

的充要条件是 $f \in AC([a,b])$, 此时有 $g(x) = f'(x)$, a.e. $x \in [a,b]$.

**定理 5.4.6**

设 $g_k(x)(k = 1, 2, \cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 若

1. 存在 $c, a \leq c \leq b$, 使得级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(c)$ 收敛;
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_a^b |g_k'(x)|dx < +\infty$.

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上是收敛的. 设其极限函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 且有

$$g'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x), \quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

证明

根据逐项积分定理(4.2.5), 条件 2 说明函数

$$G(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x), \quad x\in[a,b]$$

是 $[a,b]$ 上的可积函数, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^x \sum_c^x \sum_{k=1}^{n} g_k'(x)dx=\int_c^x G(t)dt$$

因为每个 $g_k(x)$ 都绝对连续, 根据微积分基本定理知

$$g_k(x)=\int_c^x g_k'(x)dx+g_k(c), \quad x\in[a,b]$$

因而

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x)=\int_c^x \sum_{k=1}^{n} g_k'(x)dx+\sum_{k=1}^{n} g_k(c), \quad n=1,2,\cdots$$

令 $n\to\infty$, 得

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)=\int_c^x G(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty} g_k(c), \quad x\in[a,b]$$

令上式左端为 $g(x)$, 则

$$g(x)=\int_c^x G(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty} g_k(c)=\int_c^x G(t)dt+g_(c)$$

故根据微积分基本定理, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 且

$$g'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x), \quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

□

**命题 5.4.1 (绝对连续函数把零测集映成零测集)**

设 $f\in AC([a,b])$, 则对 $[a,b]$ 中的零测集 $Z$, 必有 $m(f(Z))=0$.

证明

根据绝对连续函数的定义知: 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 及满足 $\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-x_i)<\delta, \bigcup \liminf_{i=1}^{\infty}(x_i,y_i)\supset Z\backslash\{a,b\}$ 的互不相交的开区间列 $(x_i,y_i)(i\in\mathbb{N})$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$$

因为连续函数在闭区间上必取得最大最小值, 在每个区间 $[x_i,y_i]$ 中均可选取两点 $c_i,d_i$, 使得 $f([x_i,y_i])=[f(c_i),f(d_i)]$, 从而

$$m(f(Z))=m(f(Z\backslash\{a,b\}))\le m(f(\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,y_i)))\le\sum_{i=1}^{\infty}|f(c_i)-f(d_i)|\le\varepsilon$$

□

**命题 5.4.2**

设 $f\in C([a,b])\cap BV([a,b])$. 如果对 $[a,b]$ 中任意零测集 $Z$, 必有 $m(f(Z))=0$, 则 $f\in AC([a,b])$.

**证明**

用反证法. 设 $f\notin AC([a,b])$, 根据定义知存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对每个 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $[a,b]$ 的子区间组 $I_{n,k}=[a_{n,k},b_{n,k}](k=1,2,\cdots,j_n)$ 满足

$$\sum_{k=1}^{j_n}(b_{n,k}-a_{n,k})\leq\frac{1}{2^n},\quad\sum_{k=1}^{j_n}|f(b_{n,k})-f(a_{n,k})|\geq\varepsilon_0$$

作点集 $E_i=\bigcup\limits_{n=i}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{j_n}I_{n,k}(i\in\mathbb{N})$, 有

$$m(E_i)\leq\sum_{n=i}^{\infty}\sum_{k=1}^{j_n}(b_{n,k}-a_{n,k})\leq\sum_{n=i}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{i-1}}$$

故 $m(E_i)\to 0,i\to\infty$. 因为 $f\in C([a,b])$, 故 $f(E_i)$ 是紧集的并集, 又因为 $[a,b]\supset E_i\supset E_{i+1}\supset\cdots$ 知

$$m(E)=0,E=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\Rightarrow m(f(E))=0$$

从而由 $f([a,b])\supset f(E_i)\supset f(E_{i+1})\supset\cdots$ 知

$$m(f(E))=\lim_{i\to\infty}m(f(E_i))=0$$

另一方面, 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增, 知

$$f(I_{i,k})=[f(a_{i,k}),f(b_{i,k})],\quad m(f(E_i))\geq\sum_{k=1}^{j_i}|f(b_{i,k})-f(a_{i,k})|\geq\varepsilon_0$$

矛盾! 命题即证. □

### 5.4.1 例子整理

### 5.4.2 思考题

## 5.5 分部积分公式与积分中值公式

**定理 5.5.1 (分部积分公式)**

设 $f(x),g(x)$ 皆为 $[a,b]$ 上的可积函数, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 令

$$F(x)=\alpha+\int_a^x f(t)dt,\quad G(x)=\beta+\int_a^x g(t)dt$$

则

$$\int_a^b G(x)f(x)dx+\int_a^b g(x)F(x)dx=F(b)G(b)-F(a)G(a).$$

**证明**

为了利用微积分基本定理, 首先希望证明 $F(x)G(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 设 $A,B$ 各为 $|F(x)|,|G(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 知

$$|F(y)G(y)-F(x)G(x)|\leq A|G(y)-G(x)|+B|F(y)-F(x)|$$

进而 $F(x)G(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 因而根据微积分基本定理知 $F(x)G(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微, 且

$$(F(x)G(x))'=F(x)G'(x)+F'(x)G(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

同时知 $G'(x)=g(x), F'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$, 因而

$$\int_a^b G(x)f(x)dx=\int_a^b F(x)g(x)dx=\int_a^b G(x)F'(x)dx+\int_a^b F(x)G'(x)dx=\int_a^b (F(x)G(x))'dx=F(b)G(b)-F(a)G(a)$$

□

**笔记** 注意绝对连续函数和不定积分的关系, 上述定理可改述为:

**定理 5.5.2**

设 $f(x),g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx+\int_a^b f'(x)g(x)dx=f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

**定理 5.5.3 (积分第一中值公式)**

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

证明

设 $f([a,b])=[c,d]$, 易知

$$cg(x)\le f(x)g(x)\le dg(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

上式积分有

$$c\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le d\int_a^b g(x)dx$$

若 $I=\int_a^b g(x)dx>0$, 则用它除上式两端有

$$c\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{I}\le d$$

由 $f(x)$ 的连续性可知, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

此即欲证.

若 $I=0$, 则根据 $g(x)$ 的非负性知只能有 $g(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$, 从而欲证式两端皆为零, $\xi$ 任取. □

**定理 5.5.4 (积分第二中值公式)**

若 $f\in L[a,b]$, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

证明

不妨设 $g(x)$ 递增 (否则考察 $-g(x)$), 下面首先按 $g\in AC[a,b]$ 的情况研究, 之后用逼近来研究一般情况.

当 $g\in AC[a,b]$ 递增, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b]$$

由分部积分公式知

$$\int_a^b F'(x)g(x)dx+\int_a^b F(x)g'(x)dx=F(b)g(b)-F(a)g(a)$$

代入 $F'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$ 得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=F(b)g(b)-F(a)g(a)-\int_a^b F(x)g'(x)dx \tag{5.14}$$

因为 $F(x)$ 连续, 且由 $g(x)$ 递增知 $g'(x) \geq 0$, a.e. $x \in [a,b]$, 故根据积分第一中值公式(5.5.3)知存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)(g(b)-g(a))$$

将上式代入(5.14)式知

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)(F(\xi)-F(a)) + g(b)(F(b)-F(\xi)) = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

现在当 $g(x)$ 是一般的递增函数, 考虑作一列递增且绝对连续的函数 $\{g_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$: 将 $[a,b]n$ 等分, 令 $h_n = \frac{b-a}{n}$, 并记 $x_{n,k} = a+kh, 0 \leq k \leq n$, 作函数列

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & x = x_{n,k}, k = 0,1,\cdots,n \\ \text{线性联结}, & x \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}], k = 1,2,\cdots,n \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

当 $x$ 是 $g$ 的连续点时, 根据递增性有

$$|g(x)-g_n(x)| \leq |g(x_{n,k-1})-g(x_{n,k})|, \quad x_{n,k-1} \leq x \leq x_{n,k}$$

这说明当 $n \to \infty$ 时有 $g_n(x) \to g(x)$, a.e. $x \in [a,b]$. 对于固定的 $n$, 因为线性联结的部分仅有有限个, 故 $g_n(x)$ 满足 Lipschitz 条件, 因而是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 显见 $g_n(a) = g(a), g_n(b) = g(b)(n=1,2,\cdots)$. 对于 $g_n(x)$, 由前述结论知存在 $\xi_n \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g_n(x)dx = g_n(a)\int_a^{\xi_n} f(x)dx + g_n(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

不妨设 $\{\xi_n\}$ 以 $\xi \in [a,b]$ 为极限 (否则因为 $\{\xi_n\}$ 本身的有界性, 总可以取其存在极限的子列), 再令 $n \to \infty$ 即得欲证. □

## 5.6 ℝ 上的积分换元公式

本节主要探讨的问题在于, 如果 $g:[a,b] \to [c,d]$ 是几乎处处可微的函数, 则公式

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt, \quad [\alpha,\beta] \subset [a,b]$$

是否成立?

**定理 5.6.1 (绝对连续函数将可测集映为可测集)**

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, $E$ 是 $[a,b]$ 中的可测集, 则 $f(E)$ 是可测集.

证明

既然 $E$ 是可测集, 由定理(2.3.3)知存在 $F_\sigma$ 集 $K = \bigcup\limits_{k=1}^\infty F_k$(其中 $F_k(k=1,2,\cdots)$ 是闭集) 与零测集 $Z$ 使得 $E = K \cup Z$. 易知

$$E = K \cup Z = \bigcup_{k=1}^\infty F_k \cup Z \Rightarrow f(E) = \bigcup_{k=1}^\infty f(F_k) \cup f(Z)$$

由 $E$ 的有界性显见 $F_k \subset E(k=1,2,\cdots)$ 有界, 进而 $F_k(k=1,2,\cdots)$ 是紧集. 因为 $f \in AC([a,b]) \subset C([a,b])$, 故 $f(F_k)$ 是紧集. 同理由 $Z$ 的紧性可知 $f(Z)$ 是紧集. 这说明 $f(E)$ 是可列个紧集之并, 当然是可测集. □

**引理 5.6.1**

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数, $E \subset [a,b]$. 如果 $f'(x)$ 在 $E$ 上存在且 $|f'(x)| \leq M$, 则

$$m^*(f(E)) \leq Mm^*(E)$$

证明

考虑到条件中 $|f'(x)| \le M$, 将其表成极限即

$$\lim_{y\to x}|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| \le M, \quad x\in E$$

根据定义此即

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall y\in U_\delta(x)\cap[a,b](\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\le M+\varepsilon)$$

受此启发将点集 $E$ 作如下分解: 任给 $\varepsilon>0$, 作

$$E_n=\{x\in E:\forall y\in[a,b]\cap U_{\frac{1}{n}}(x)(|f(y)-f(x)|\le(M+\varepsilon)|x-y|)\}$$

显见 $E_n\subset E_{n+1}$, 故 $f(E_n)\subset f(E_{n+1})$, 且[7]

$$\lim_{n\to\infty}m^*(E_n)=m^*(E), \quad \lim_{n\to\infty}m^*(f(E_n))\le m^*(f(E))^{8}$$

根据 $\varepsilon$ 的任意性, 只需证明对每个 $n$ 有

$$m^*(f(E_n))<(M+\varepsilon)(m^*(E_n)+\varepsilon)$$

为此在 $(a,b)$ 中区覆盖 $E_n$ 的开区间列 $\{I_{n,k}\}$, 根据外测度作为上确界的定义知

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_{n,k}|<m^*(E_k)+\varepsilon, |I_{n,k}|<\frac{1}{n}, \quad k=1,2,\cdots$$

显见若 $s,t\in E_n\cap I_{n,k}$, 根据 $E_n$ 的构造即知, 则

$$|f(s)-f(t)|<(M+\varepsilon)|I_{n,k}|$$

进而因为 $\{I_{n,k}\}$ 覆盖 $E_n$, 知 $E_n=E_n\cap\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_{n,k}$, 进而

$$\begin{aligned}m^*(f(E_n))&=m^*(f(E_n\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{n,k}))\le\sum_{k=1}^{\infty}m^*(f(E_n\cap I_{n,k}))\le\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{diam}(f(E_n\cap I_{n,k}))\\&\le(M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}|I_{n,k}|<(M+\varepsilon)(m(E_n)+\varepsilon)\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{diam}(A)$ 表示点集 $A$ 的直径. □

**推论 5.6.1**

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数, $E\subset[a,b]$ 是可测集, 且 $f(x)$ 在 $E$ 上可微, 则

$$m^*(f(E))\le\int_E|f'(x)|dx.$$

♡

证明

首先说明 $f'(x)$ 是 $E$ 上的可测函数, 这是因为若定义 $f_h(x)=\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$, 由 $f$ 可测知 $f_h$ 可测, 又根据 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}f_h(x)$ 与可测函数空间的完备性知 $f'(x)$ 可测.

现在分割 $E$, 对任给的 $\varepsilon>0$ 作集列

$$E_n=\{x\in E:(n-1)\varepsilon<|f'(x)|<n\varepsilon\}, \quad n=1,2,\cdots,$$

显见任意两个 $E_i,E_j$ 不相交. 由引理(5.6.1)知

$$m^*(f(E_n))\le n\varepsilon m(E_n)=(n-1)\varepsilon m(E_n)+\varepsilon m(E_n)\le\int_{E_n}|f'(x)|dx+\varepsilon m(E_n)$$

故

$$m^*(f(E))\le\sum_{n=1}^{\infty}m^*(f(E_n))\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f'(x)|dx+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)=\int_E|f'(x)|dx+\varepsilon m(E)$$

[7]注意这里并不一定有 $E_n\to E, n\to\infty$.

[8]为什么?

由 $\varepsilon$ 的任意性即得 $m^*(f(E)) \le \int_E |f'(x)|dx$. □

**定理 5.6.2**

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数, 在 $[a,b]$ 的子集 $E$ 上是可微的, 则

1. 如果 $f'(x) = 0$, a.e. $x \in E$, 那么 $m(f(E)) = 0$;
2. 如果 $m(f(E)) = 0$, 那么 $f'(x) = 0$, a.e. $x \in E$.

证明

1. 令 $E_n = \{x \in E : n-1 \le |f'(x)| < n\}(n \in \mathbb{N})$, 则

$$m^*(f(E)) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(f(E_n)) \le \sum_{n=1}^{\infty} nm^*(E_n)$$

故由 $m^*(E_n) = 0$ 知 $m(f(E)) = 0$.

2. 考虑点集

$$B_n \equiv \{x \in E : |y-x| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \ge \frac{|y-x|}{n}\}$$

显见

$$B \equiv \{x \in E : |f'(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

故只需证明对全体 $n$ 均有 $m(B_n) = 0$ 即可, 又只需指出对于任意一个长度小于 $\frac{1}{n}$ 的区间 $I$, 总有 $m(I \cap B_n) = 0$.

记 $A = I \cap B_n$, 根据假设知 $0 \le m(f(A)) \le m(f(E)) = 0 \Rightarrow m(f(A)) = 0$, 故根据外测度定义, 对任意的 $\varepsilon$ 存在区间列 $\{I_k\}$, 使得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset f(A), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon$$

现令 $A_k = A \cap f^{-1}(I_k)$, 因为

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \subset I \cap B_n$$

且显见 $f(A_k) \subset I_k$, 故

$$m^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{diam}(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} n \cdot \mathrm{diam}(f(A_k)) \le n \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \le n\varepsilon.$$

根据 $\varepsilon$ 的任意性即得 $m(A) = 0$. □

**定理 5.6.3 (复合函数的微分)**

设 $g : [a,b] \to [c,d]$ 是几乎处处可微的函数, $F(x)$ 是 $[c,d]$ 上的几乎处处可微的函数且 $F'(x) = f(x)$ a.e, $F(g(t))$ 在 $[a,b]$ 上是几乎处处可微的. 若对于 $[c,d]$ 中的任意零测集, 总有 $m(F(Z)) = 0$, 则

$$(F(g(t)))' = f(g(t))g'(t), \quad \text{a.e. } t \in [a,b]$$

证明

取 $Z = \{x \in [c,d] : F$在 $x$ 处不可微$\}$, $A = g^{-1}(Z)$, $B = [a,b] \backslash A$[9]. 对于 $B$ 中使 $g$ 可微的点 $t$, 根据 $g$ 在 $t$ 处的连续性与 $F'(g(t)) = f(g(t))$, 由中值定理有:

$$F(g(t+h)) - F(g(t)) = f(g(\xi))(g(t+h) - g(t)) = (f(g(t)) + \delta(h))(g(t+h) - g(h)), \quad \xi\text{在 } t \text{ 和 } t+h \text{ 之间}$$

其中 $h \to 0, \delta(h) \to 0$, 且若 $g(t+h) = g(t)$, 则令 $\delta(h) = 0$. 上式两端乘 $\frac{1}{h}$ 并令 $h \to 0$ 即得:

$$(F(g(t)))' = f(g(t))g'(t), \quad \text{a.e. } t \in B$$

现在说明上述结果在 $[a,b]$ 上也是几乎处处成立的, 注意 $g(A) \subset Z \Rightarrow m(g(A)) \le m(Z) = 0$, 根据条件有

[9]这里注意尽管 $m(Z) = 0$, 但未必有 $m(A) = 0$.

$m(F(g(A)))=0$, 从而由定理(5.6.2)知

$$g'(t)=0,(F(g(t)))'=0,\quad \text{a.e. } t\in A$$

这说明

$$(F(g(t)))'=f(g(t))g'(t)=0,\quad \text{a.e. } t\in A$$

从而综上

$$F(g(t))'=f(g(t))g'(t),\quad \text{a.e. } t\in[a,b].$$

□

**笔记** 上述定理中 $F$ 把零测集映成零测集的条件必不可少. 这是因为如果记 $(0,1)\cap\mathbb{Q}=\{r_n\}$, 作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<r_n\\ \frac{1}{2^n}, & r_n\le x\le 1\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots$$

显见 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 递增, $f_n'(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$, 可取

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),\quad 0\le x\le 1$$

可以推知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增, 且 $f'(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$.

现在说明 $f(x)$ 把某个正测集映成零测集, 可取 $f(x)$ 的可微点集 $D\subset[0,1]$, 由 $f'(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$ 显见 $m(D)>0$, 根据定理(5.6.2)知 $m(f(D))=0$, 于是 $D$ 便是要求的正测集.

取 $F=f^{-1}$, 则 $F$ 将某个零测集映成某个正测集, 根据 $f$ 的构造可知 $F$ 单调且几乎处处可微, 注意

$$F(f(t))=t\Rightarrow(F(f(t)))'=1,\quad t\in[a,b]$$

但与此同时

$$F(f(t))f'(t)=t\cdot 0=0,\quad \text{a.e. } t\in[a,b]$$

结论并不成立!

**推论 5.6.2**

设 $g(t)$ 以及 $f(g(t))$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微, 其中 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上绝对连续, $g([a,b])\subset[c,d]$, 则

$$(f(g(t)))'=f'(g(t))g'(t),\quad \text{a.e. } t\in[a,b]$$

**定理 5.6.4 (换元积分法)**

设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微, $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 且 $g([a,b])\subset[c,d]$, 记

$$F(x)=\int_c^x f(t)dt$$

则下述两个命题等价:

1. $F(g(t))$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数;
2. $f(g(t))g'(t)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 且有

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt,$$

其中 $\alpha,\beta\in[a,b]$.

证明

当 2. 成立, 则由推论(5.6.2)知, 对一切 $\alpha,\beta\in[a,b]$, 有

$$F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

进而由积分的绝对连续性知 $F(g(t))$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

当 1. 成立, 则由定理(5.6.3)知 $(F(g(t)))' = f(g(t))g'(t)$, a.e. $t \in [a,b]$. 由 $F(g(t))'$ 在 $[a,b]$ 上可积知 $f(g(t))g'(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 因而

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} (F(g(t)))'dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

□

**笔记** 在上述定理中并没有要求 $g(t)$ 绝对连续, 这个条件也不必要, 但如果加上这个条件可以得到推论.

**推论 5.6.3**

设 $g:[a,b]\to[c,d]$ 是绝对连续函数, $f\in L[c,d]$, 则下述条件任满足其一均可推得

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

1. $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数;
2. $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上是有界函数[a];
3. $f(g(t))g'(t)$ 在 $[a,b]$ 上是可积函数.

[a]用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 构造即可给出 Lebesgue 可积但无界的例子.

证明

1. 当 $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 取

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

只需证明 $F(g(t))$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 根据定义此即证明

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)((x_i,y_i)\cap(x_j,y_j)=\varnothing, i\neq j\wedge\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}|F(g(y_k))-F(g(x_k))|<\varepsilon)$$

注意

$$|F(g(y_k))-F(g(x_k))| = |\int_{g(x_k)}^{g(y_k)} f(t)dt| \le \int_{g(x_k)}^{g(y_k)} |f(t)|dt$$

按照条件 $g(t)$ 首先是绝对连续函数, 因而

$$\forall\varepsilon'>0\exists\delta'>0\forall(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)((x_i,y_i)\cap(x_j,y_j)=\varnothing, i\neq j\wedge\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta'\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}|g(y_k)-g(x_k)|<\varepsilon')$$

不妨设 $g(t)$ 单增, 因而区间 $(g(x_k),g(y_k))(k=1,2,\cdots,n)$ 两两不交, 得到

$$\sum_{k=1}^{n}|F(g(y_k))-F(g(x_k))| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{(g(x_k),g(y_k))}|f(t)|dt = \int_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}(g(x_k),g(y_k))}|f(t)|dt$$

根据积分的绝对连续性(4.2.12)知, 对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$, 只要 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{n}(g(x_k),g(y_k)))<\delta$, 就有

$$\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}(g(x_k),g(y_k))}|f(t)|dt<\varepsilon$$

令 $\varepsilon'<\delta$ 即可, 命题因而得证.

2. 与 1. 的思路类似, 既然 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上有界, 设 $|f|\le M, x\in[c,d]$, 考虑

$$|F(g(y_k))-F(g(x_k))| = |\int_{g(x_k)}^{g(y_k)} f(t)dt| \le \int_{g(x_k)}^{g(y_k)}|f(t)|dt \le M|g(y_k)-g(x_k)|$$

得到

$$\sum_{k=1}^{n}|F(g(y_k))-F(g(x_k))| \le M\sum_{k=1}^{n}|g(y_k)-g(x_k)| < M\varepsilon'$$

由 $\varepsilon'$ 的任意性即得命题.

3. 考虑用简单可测函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 逼近 $f$, 设

$$|\varphi_k(x)| \le |f(x)|, \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x) = f(x), \quad x \in [c,d]$$

显见

$$|\varphi_k(g(t))g'(t)| \le |f(g(t))g'(t)|, \lim_{k\to\infty}\varphi_k(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

对每一个固定的 $k$, 显见 $\varphi_k$ 在 $[c,d]$ 上有界, 因而根据 2. 有

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}\varphi_k(x)dx = \int_\alpha^\beta \varphi_k(g(t))g'(t)dt$$

因为 $f(g(t))g'(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 由控制收敛定理知[10]

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt &= \int_\alpha^\beta \lim_{k\to\infty}\varphi_k(g(t))g'(t)dt = \lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta \varphi_k(g(t))g'(t)dt \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}\varphi_k(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}\lim_{k\to\infty}\varphi_k(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)dt\end{aligned}$$

### 5.6.1 例子整理

### 5.6.2 思考题

## 5.7 补充: 符号测度与微分

本节摘选自 [**11**], 其突出特点在于从测度论的角度介绍了有界变差函数, 并在其中给出了 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理. 据 [**1**] 所言, 此为" 经典测度论的最高成就".

### 5.7.1 符号测度

**定义 5.7.1 (符号测度)**

设 $(X,\mathscr{M})$ 是测度空间. 如果一个函数 $\nu:\mathscr{M}\to[-\infty,\infty]$ 满足

1. $\nu(\emptyset)=0$;
2. 对同一个 $A\in\mathscr{M}$, $\nu(A)$ 最多只可能在 $\pm\infty$ 中取到一个.
3. 如果 $\{E_j\}$ 是 $\mathscr{M}$ 中的一列互不相交集, 则 $\nu(\bigcup_{j=1}^\infty E_j) = \sum_{j=1}^\infty \nu(E_j)$, 其中后者在 $\nu(\bigcup_{j=1}^\infty E_j)$ 有限时作为级数绝对收敛.

则称 $\nu$ 是 $(X,\mathscr{M})$ 上的一个符号测度.

♣

回忆前面用集函数定义的测度, 不难发现所有的测度都是符号测度. 因而为了强调它们之间的不同, 下文中" 测度" 一词就特指正测度.

符号测度有两个简单例子. 其一, 如果 $\mu_1,\mu_2$ 都是 $\mathscr{M}$ 上的测度, 且它们中至少有一个是有限的, 则 $\nu=\mu_1-\mu_2$ 就是一个符号测度. 其二, 如果 $\mu$ 是 $\mathscr{M}$ 上的一个测度, 且 $f:X\to\mathbb{R}$ 是可测函数, 满足 $\int_{\mathbb{R}} f^+d\mu, \int_{\mathbb{R}} f^-d\mu$ 中至少有一个有限 (这种情况下称 $f$ 是广义 $\mu-$ 可积函数), 则通过式子

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

定义的集函数 $\nu(E)$ 就是一个符号测度. 事实上, 马上我们将说明这就是唯二的符号测度: 任意符号测度总能被表成这两者之一.

[10] 最后一步是因为 $g$ 值域有限, 但 $g$ 值域无限的时候还有类似结论吗?

**命题 5.7.1**

设 $\nu$ 是 $(X,\mathscr{M})$ 上的符号测度. 如果 $\{E_i\}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的递增列, 则

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\lim_{i\to\infty}\nu(E_i)$$

如果 $\{E_i\}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的递降列, 且 $\nu(E_1)$ 有限, 则

$$\nu(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i)=\lim_{i\to\infty}\nu(E_i).$$

这与 Lebesgue 测度的上下连续性证明是一样的. □

**定义 5.7.2 (正集, 负集, 零集)**

如果 $\nu$ 是 $(X,\mathscr{M})$ 上的符号测度, 则

1. 集合 $E\in\mathscr{M}$ 是正集, 如果对任意的 $E\supset F\in\mathscr{M}$ 都有 $\nu(F)\geq 0$;
2. 集合 $E\in\mathscr{M}$ 是负集, 如果对任意的 $E\supset F\in\mathscr{M}$ 都有 $\nu(F)\leq 0$;
3. 集合 $E\in\mathscr{M}$ 是零集, 如果对任意的 $E\supset F\in\mathscr{M}$ 都有 $\nu(F)=0$.

在 $\nu(E)=\int_E fd\mu$ 的例子中, $E$ 是正集, 负集, 零集就对应了 $f(x)\geq 0, f(x)\leq 0, f(x)=0$ a.e. $x\in E$.

**引理 5.7.1**

正集的任意可测子集均为正, 正集的可数并依旧正.

**证明**

第一个命题根据定义即得, 下面说明第二个命题.

设 $P_1,P_2,\cdots$ 是正集, 记 $Q_n=P_n\backslash\bigcup_{i=1}^{n-1}P_i$, 则 $Q_n\subset P_n$, 进而根据 $P_n$ 的正测性知 $Q_n$ 是正测集. 因而任取 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}P_j$, 则根据测度的可加性有

$$\nu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E\cap Q_i)\geq 0$$

命题即证. □

**定理 5.7.1 (Hahn 分解定理)**

若 $\nu$ 是 $(X,\mathscr{M})$ 上的符号测度, 则存在关于 $\nu$ 的正集 $P$ 与负集 $N$, 使得

$$P\cup N=X,\quad P\cap N=\varnothing$$

如果 $P',N'$ 也是这样的集合, 则

$$\nu(P\triangle P')=\nu(N\triangle N')=0$$

**证明**

不失一般性, 设 $\nu<+\infty$, 进而取 $m$ 为当 $E$ 遍历全体正集时, $\nu(E)$ 的上确界. 根据上确界的性质知存在一列正集 $\{P_j\}$ 满足 $\nu(P_j)\to m, j\to\infty$. 记 $P=\bigcup_{j=1}^{\infty}P_j$. 根据引理(5.7.1)与命题(5.7.1)知, $P$ 作为正集之并是正集, 且 $\nu(P)=m$, 特别有 $m<\infty$. 下面说明 $N=X\backslash P$ 是负集, 用反证法, 下设 $N$ 并非负集.

首先, 注意到 $N$ 不能包含任何非零正集, 因为如果 $E\subset N$ 是非零正集 (即 $\nu(E)>0$), 则 $E\cup P$ 是正集, 且 $\nu(E\cup P)=\nu(E)+\nu(P)>m$, 这与 $m$ 作为全体正集测度的上确界矛盾!

其次, 如果 $A\subset N, \nu(A)>0$, 则存在 $B\subset A$ 使得 $\nu(B)>\nu(A)$. 这是因为既然 $A$ 不能是正集, 必存在 $C\subset A$ 使得 $\nu(C)<0$. 因而取 $B=A\backslash C$ 即得 $\nu(B)=\nu(A)-\nu(A)>\nu(A)$.

如果 $N$ 不是负集, 则可按下述过程确定 $N$ 的一列子集 $\{A_j\}$ 与一列正整数 $\{n_j\}$: $n_1$ 是满足存在 $B\subset N$ 使得

$\nu(B) > \frac{1}{n_1}$ 的最小正整数, $A_1$ 就定义为这个存在的 $B$. 归纳地定义 $n_j$ 是满足存在 $B \subset A_{j-1}$ 使得 $\nu(B) > \nu(A_{j-1})+\frac{1}{n_j}$ 的最小正整数, $A_j$ 定义为这个存在的 $B$.

令 $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, 则

$$\infty > \nu(A) = \lim_{j\to\infty} \nu(A_j) > \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j}$$

故根据收敛性知 $n_j \to \infty, j \to \infty$. 但同时, 存在 $B \subset A$ 与正整数 $n$ 满足 $\nu(B) > \nu(A) + \frac{1}{n}$. 对于充分大的 $j$, 必有 $n < n_j$, 故 $B \subset A_{j-1}$, 但这与 $A_j, n_j$ 的构造矛盾! 故 $N$ 不是负集这个条件并不成立, 也即 $N$ 必为负集.

最后, 如果 $P', N'$ 是另一对满足条件的集合, 知

$$P \backslash P' \subset P, \quad P \backslash P' \subset N'$$

这说明 $\nu(P\backslash P') \geq 0$ 与 $\nu(P\backslash P') \leq 0$ 同时成立, 因而只能有 $\nu(P\backslash P') = 0$. 对 $P'\backslash P$ 同理, 因而 $\nu(P \triangle P') = 0$. □

把 $X$ 分成正集与负集的不交并的分解 $X = P \cup N$ 就称作 $\nu$ 下的 Hahn 分解. 一般来说这个分解并不唯一, 但它导出了 $\nu$ 作为两个正测度之差的典型表示. 要说明这一点, 我们需要引入一个新的概念: 称 $(X, \mathscr{M})$ 上的两个符号测度 $\mu, \nu$ 互相奇异, 如果存在 $E, F \in \mathscr{M}$ 使得 $E \cap F = \varnothing, E \cup F = X$, 且 $E$ 在 $\mu$ 下是零集, $F$ 在 $\nu$ 下是零集. 粗略来说, 互相奇异说明 $\mu$ 和 $\nu$" 活在不交集上". 符号上我们用垂直来表示这个关系:

$$\mu \perp \nu.$$

**定理 5.7.2 (Jordan 分解定理)**

*若 $\nu$ 是符号测度, 则存在唯一的正测度 $+$ 与 $\nu^-$ 使得 $\nu = \nu^+ - \nu^-, \nu^+ \perp \nu^-$.* ♡

证明

设 $X = P \cup N$ 是 $\nu$ 的一个 Hahn 分解, 定义[11]

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P), \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap N)$$

则显见

$$\nu = \nu^+ - \nu^-, \quad \nu^+ \perp \nu^-$$

下面证明唯一性, 如果同时有

$$\nu = \mu^+ - \mu^-, \quad \mu^+ \perp \mu^-$$

则根据互相奇异的定义, 取 $E, F \in \mathscr{M}$ 满足 $E \cap F = \varnothing, E \cup F = X$, 且 $\mu^+(E) = \mu^-(F) = 0$. 故 $X = E \cup F$ 是 $\nu$ 的另一个 Hahn 分解, 因而根据 Hahn 分解定理知 $P \triangle E$ 是零集. 因此, 对任意的 $A \in \mathscr{M}$, 考虑到 $\mu^+ \perp \mu^-$ 与 $\nu = \mu^+ - \mu^-$, 有

$$\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \nu(A \cap E) = \nu(A \cap P) = \nu^+(A)$$

这说明 $\mu^+ = \nu^+$, 同理 $\mu^- = \nu^-$. □

测度 $\nu^+, \nu^-$ 分别称为 $\nu$ 的正变差和负变差, 分解 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 称为 $\nu$ 的 Jordan 分解, 后面会看到这与 $\mathbb{R}$ 上有界变差函数为两递增函数之差是对应的. 更进一步, $\nu$ 的总变差 $|\nu|$ 也是测度, 其定义为

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

易证 $E \in \mathscr{M}$ 是 $\nu-$ 零集当且仅当 $|\nu|(E) = 0$, 且

$$\nu \perp \mu \Leftrightarrow |\nu| \perp \mu \Leftrightarrow \nu^+ \perp \mu \wedge \nu^- \perp \mu.$$

观察知如果 $\nu$ 不取 $+\infty$, 则 $\nu^+(X) = \nu(P) < +\infty$, 进而 $\nu^+$ 是有限测度, $\nu$ 的一个上界是 $\nu^+(X)$. 当 $\nu$ 不取 $-\infty$ 时情况类似. 特别地, 如果 $\nu$ 的值域就落在 (狭义的) 实数域 $\mathbb{R}$ 中, $\nu$ 就是有界的.

[11] 写到这里发现似乎有点像 Carathéodory 条件.

同时可以观察到当 $\nu$ 具有形式 $\nu(E) = \int_E f d\mu$, 其中 $\mu = |\nu|, f = \chi_P - \chi_N$ 时, $X = P \cup N$ 就是 $\nu$ 的一个 Hahn 分解.

符号测度下的积分定义如下:

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-)$$

$$\int_E f d\nu = \int_E f d\nu^+ - \int_E df\nu^-, \quad f \in L^1(\nu).$$

最后提一嘴, 符号测度 $\nu$ 称为有限 (或 $\sigma-$ 有限), 如果 $|\nu|$ 有限 (或 $\sigma-$ 有限.)

### 5.7.2 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理

**定义 5.7.3 (绝对连续)**

设在 $(X, \mathscr{M})$ 上 $\nu$ 是符号测度, $\mu$ 是正测度. 称 $\nu$ 在 $\mu$ 下绝对连续, 记作

$$\nu \ll \mu$$

如果对任意的 $E \in \mathscr{M}, \mu(E) = 0$, 都有 $\nu(E) = 0$. ♣

显见

$$\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu \Leftrightarrow \nu^+ \ll \mu \wedge \nu^- \ll \mu.$$

绝对连续是互相奇异的对立概念. 更春却来说, 如果 $\nu \perp \mu$ 且 $\nu \ll \mu$, 则 $\nu = 0$. 这是因为如果 $E, F$ 是不交集, 且满足 $E \cup F = X, \mu(E) = |\nu|(F) = 0$, 则 $\nu \ll \mu$ 表明 $|\nu|(E) = 0$, 因而 $|\nu| = 0 \Rightarrow \nu = 0$. 绝对连续的记号可以被延拓到 $\mu$ 是符号测度的情形 ($\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu \ll |\mu|$), 不过这个更广义的定义在这里没有什么用处.

**定理 5.7.3**

设在 $(X, \mathscr{M})$ 上 $\nu$ 是有限符号测度, $\mu$ 是正测度. 则 $\nu \ll \mu$ 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 满足

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow |\nu(E)| < \varepsilon$$

♡

证明

既然 $\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu$, 且 $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$, 可设 $\nu = |\nu|$ 是正测度. 显见 $\varepsilon - \delta$ 条件已经明确了 $\nu \ll \mu$. 另一方面, 如果 $\varepsilon - \delta$ 条件不成立, 则存在 $\varepsilon > 0$, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 都能找到 $E_n \in \mathscr{M}$ 满足 $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}, \nu(E_n) \geq \varepsilon$. 记

$$F_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n, F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

则

$$\mu(F_k) < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow \mu(F) \leq \mu(F_k) \to 0, k \to \infty$$

但对全体 $k$ 都有 $\nu(F_k) \geq \varepsilon$, 因而既然 $\nu$ 有限, $\nu(F) = \lim_{k \to \infty} \nu(F_k) \geq \varepsilon$, 这与 $\nu \ll \mu$ 矛盾! □

如果 $\mu$ 是测度, $f$ 是广义 $\mu-$ 可积函数, 则由 $\nu(E) = \int_E f d\mu$ 定义的符号测度 $\nu$ 显然在 $\mu$ 下绝对连续. 其为有限测度当且仅当 $f \in L^1(\mu)$. 对任何复值函数 $f \in L^1(\mu)$, 前面的定理能被应用到 $\mathrm{Re} f$ 和 $\mathrm{Im} f$ 上, 进而可得下述有用的推论:

**推论 5.7.1 (积分的绝对连续性)**

若 $f \in L^1(\mu)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\mu(E) < \delta$ 时有 $|\int_E f d\mu| < \varepsilon$. ♡

为了表示 $\nu(E) = \int_E f d\mu$ 中的积分关系, 考虑下述记号

$$d\nu = f d\mu$$

有时可以不严谨地就称" 符号测度 $fd\mu$".

下面就来介绍本节的核心理论, 其阐明了一个基于给定正测度的符号测度的结构. 首先引入一个技术上的引理.

**引理 5.7.2**

设 $\nu,\mu$ 都是 $(X,\mathscr{M})$ 上的有限测度. 则下述断言有且仅有一个成立.

1. $\nu\perp\mu$.
2. 存在 $\varepsilon>0, E\in\mathscr{M}$ 满足 $\mu(E)\geq 0$, 且在 $E$ 上有 $\nu\geq\varepsilon\mu$(也即 $E$ 是 $\nu-\varepsilon\mu$ 下的正集).

♡

证明

设 $X=P_n\cup N_n$ 是 $\nu-\frac{1}{n}\mu$ 的一个 Hahn 分解, 取 $P=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P_n, N=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}N_n=P^c$. 则对全体 $n\in\mathbb{N}$ 而言, $N$ 都是 $\nu-\frac{1}{n}\mu$ 下的负集, 也即 $0\leq\nu(N)\leq\frac{1}{n}\mu(N),\forall n\in\mathbb{N}$. 故 $\nu(N)=0$. 如果 $\mu(P)=0$, 则 $\nu\perp\mu$. 如果 $\mu(P)>0$, 则存在 $n$ 使得 $\mu(P_n)>0$, 进而 $P_n$ 是 $\nu-\frac{1}{n}\mu$ 下的正集. □

**定理 5.7.4 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**

设在 $(X,\mathscr{M})$ 上 $\nu$ 是 $\sigma-$ 有限符号测度[a], $\mu$ 是 $\sigma-$ 有限正测度, 则在 $(X,\mathscr{M})$ 上存在唯一的 $\sigma-$ 有限符号测度 $\lambda,\rho$ 使得

$$\lambda\perp\mu,\rho\ll\mu,\nu=\lambda+\rho$$

进一步, 存在广义 $\mu-$ 可积函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 满足 $d\rho=fd\mu$, 且任意两个这样的函数都在 $\mu$ 下几乎处处相等.

[a]如果 $X=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j$, 其中 $E_j\in\mathscr{M}$, 且 $\mu(E_j)<\infty$ 对任意 $j$ 都成立, 则称 $\mu$ 是 $\sigma-$ 有限测度.

♡

证明

第一种情况: $\nu$ 和 $\mu$ 都是有限正测度. 取

$$\mathcal{F}=\{f:X\to[0,+\infty]:\int_E fd\mu\leq\nu(E),\forall E\in\mathscr{M}\}$$

既然 $0\in\mathcal{F}$, 知 $\mathcal{F}$ 非空. 同样, 如果 $f,g\in\mathcal{F}$, 则 $h=\max\{f,g\}\in\mathcal{F}$, 这是因为取 $A=\{x:f(x)>g(x)\}$, 对任意 $E\in\mathscr{M}$ 有

$$\int_E hd\mu=\int_{E\cap A}fd\mu+\int_{E\backslash A}gd\mu\leq\nu(E\cap A)+\nu(E\backslash A)=\nu(E)$$

现在设 $a=\sup\{\int_X fd\mu:f\in\mathcal{F}\}$, 根据定义立得 $a\leq\nu(X)<\infty$, 进而存在函数列 $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ 使得 $\int_X f_nd\mu\to a$. 设 $g_n=\max\{f_1,\cdots,f_n\}, f=\sup\limits_n f_n$, 则 $g_n\in\mathcal{F}$, 且 $g_n$ 点态收敛到 $f$, 同时 $\int_X g_nd\mu\geq\int_X f_nd\mu$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_nd\mu=a$$

从而根据单调收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_nd\mu=a=\int_X\lim_{n\to\infty}g_nd\mu=\int_X\lim_{n\to\infty}f_nd\mu=\int_X fd\mu=a$$

特别注意 $f<\infty$, a.e., 所以可取 $f$ 处处实值.

下面说明测度 $d\lambda=d\nu-fd\mu$(当 $f\in\mathcal{F}$ 时是正测度) 与 $\mu$ 互相奇异. 若非如此, 根据引理(5.7.2)知存在 $E\in\mathscr{M}$ 与 $\varepsilon>0$ 使得 $\mu(E)>0$, 且在 $E$ 上有 $\lambda\geq\varepsilon\mu$. 但此时

$$\varepsilon\chi_E d\mu\leq d\lambda=d\nu-fd\mu\Rightarrow(f+\varepsilon\chi_E)d\mu\leq d\nu$$

故 $f+\varepsilon\chi_E\in\mathcal{F}$, 且 $\int_X(f+\varepsilon\chi_E)d\mu=a+\varepsilon\mu(E)>a$, 这与 $a$ 作为全体满足条件 $f$ 的积分上确界的定义矛盾! 故 $\lambda\perp\mu$.

现在, $\lambda,f$ 与 $d\rho=fd\mu$ 的存在性皆得证. 对于唯一性, 如果还存在 $d\nu=d\lambda'+f'd\mu$, 知

$$d\lambda-d\lambda'=(f'-f)d\mu$$

但 $\lambda-\lambda'\perp\mu,(f'-f)d\mu\ll d\mu$, 故 $d\lambda-d\lambda'=(f'-f)d\mu=0$, 因而 $\lambda=\lambda', f=f'$ 在 $\mu$ 下 a.e., 唯一性得证.

综上, $\mu,\nu$ 是有限测度的情况得证.

第二种情况: $\mu$ 和 $\nu$ 都是 $\sigma-$ 有限测度, 则根据定义 $X$ 可以同时表成 $\mu-$ 有限集的不交并与 $\nu-$ 有限集的不交并. 通过对它们取交集可得不交集列 $\{A_j\}\subset\mathscr{M}$ 满足对任意的 $j$, $\mu(A_j),\nu(A_j)$ 均有限, 且 $X=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$. 定义

$$\mu_j(E)=\mu(E\cap A_j),\quad \nu_j(E)=\nu(E\cap A_j)$$

根据有限测度的结论, 对每个 $j$ 存在 $d\nu_j=d\lambda_j+f_jd\mu_j$, 其中 $\lambda_j\perp\mu_j$. 既然 $\mu_j(A_j^c)=\nu_j(A_j^c)=0$, 知

$$\lambda_j(A_j^c)=\nu_j(A_j^c)-\int_{A_j^c}f_jd\mu_j=0$$

不妨就设在 $A_j^c$ 上 $f_j=0$. 令 $\lambda=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j, f=\sum_{j=1}^{\infty}f_j$, 则

$$d\nu=d\lambda+fd\mu,\quad \lambda\perp\mu$$

且 $d\lambda, fd\mu$ 都是 $\sigma-$ 有限的. 唯一性与前述证明类似.

一般情况: 如果 $\nu$ 是符号测度, 则可将前述结论应用到 $\nu^+,\nu^-$ 上得到结论. □

分解 $\nu=\lambda+\rho,\lambda\perp\mu,\rho\ll\mu$ 称作 $\nu$ 在 $\mu$ 下的 Lebesgue 分解. 当 $\nu\ll\mu$, Lebesgue-Radon-Nikodym 定理则表明存在 $f$ 使得 $d\nu=fd\mu$. 这个结果一般被称作 Radon-Nikodym 定理, $f$ 称作 $\nu$ 在 $\mu$ 下的 Radon-Nikodym 导数, 记之为 $\frac{d\nu}{d\mu}$:

$$d\nu=\frac{d\nu}{d\mu}d\mu.$$

严格来说, $\frac{d\nu}{d\mu}$ 应该被视作 $\mu$–a.e. 相等的函数类. 通常情况下成立的导数公式在这里一般都对, 比方说

$$\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu}=\frac{d\nu_1}{d\mu}+\frac{d\nu_2}{d\mu}$$

同时有链式法则:

**命题 5.7.2**

设在 $(X,\mathscr{M})$ 上 $\nu$ 是 $\sigma-$ 有限符号测度, $\mu,\lambda$ 是 $\sigma-$ 有限测度, 满足 $\nu\ll\mu,\mu\ll\lambda$, 则:

1. 若 $g\in L^1(\nu)$, 则 $g(\frac{d\nu}{d\mu})\in L^1(\mu)$, 且
$$\int_E gd\nu=\int_E g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu,\quad E\in\mathscr{M}$$
2. $\mu\ll\lambda$, 且
$$\frac{d\nu}{d\lambda}=\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda},\quad \lambda-\text{a.e.}$$

♠

证明

分别考虑 $\nu^+,\nu^-$, 可设 $\nu\geq 0$. 当 $g=\chi_E$ 时, 根据 $\frac{d\nu}{d\mu}$ 的定义知

$$\int_X gd\nu=\int_X g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$$

进而欲证式对于简单函数均成立, 进而根据简单函数逼近定理与单调收敛定理对非负可测函数均成立, 最后根据积分的线性性对 $L^1(\nu)$ 中的函数均成立. 现在分别把 $\nu,\mu$ 换成 $\mu,\lambda$, 取 $g=\chi_E(\frac{d\nu}{d\mu})$, 得到

$$\nu(E)=\int_E\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int_E\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}d\lambda,\quad \forall E\in\mathscr{M}$$

这说明

$$\frac{d\nu}{d\lambda}=\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda},\quad \lambda-\text{a.e.}$$

□

### 5.7.3 欧氏空间中的微分

Radon-Nikodym 定理给出了符号测度 $\nu$ 关于测度 $\mu$ 的" 导数" 的抽象记号. 在本节中我们更深入的了解欧氏空间下的特例: $(X,\mathscr{M})=(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$, 且 $\mu=m$ 是 Lebesgue 测度. 我们可以定义 $\nu$ 关于 $m$ 的点态导数如下: 设 $B(r,\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以 $\boldsymbol{x}$ 为球心, $r$ 为半径的开球, 进而当极限

$$F(\boldsymbol{x})=\lim_{r\to0}\frac{\nu(B(r,\boldsymbol{x}))}{m(B(r,\boldsymbol{x}))}$$

存在时, 就定义该极限为 $\nu$ 关于 $m$ 在 $\boldsymbol{x}$ 的点态导数[12]. 如果 $\nu\ll m$, 则 $d\nu=f\,dm$, 因而 $\frac{\nu(B(r,\boldsymbol{x}))}{m(B(r,\boldsymbol{x}))}$ 就是 $f$ 在 $B(r,\boldsymbol{x})$ 上的均值, 进而希望 $F=f$, $m-$a.e. 这至少需要 $\nu(B(r,\boldsymbol{x}))$ 对全体 $r,\boldsymbol{x}$ 有限. 从函数 $f$ 的角度看, 这可以看作微积分基本定理的一个版本: $f$ 的不定积分 $(\nu)$ 的导数为 $f$.

为了不引起歧义, 若无特别说明, 本节中" 积分" 与" 几乎处处" 都是 Lebesgue 意义下的. 我们从一个引理入手.

**引理 5.7.3**

*设 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族开球, 记 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$, 若有 $0<\lambda<m(G)$, 则存在有限个互不相交的开球 $B_{\alpha_1},B_{\alpha_2},\cdots,B_{\alpha_m}$, 使得*

$$\sum_{k=1}^{m}m(B_{\alpha_k})>\frac{\lambda}{3^n}$$

证明

首先显见 $G\in\mathscr{M}$, 故对任意的 $\varepsilon>0$ 都存在含于 $G$ 的闭集 $K$, 使得 $m(G\backslash K)>\varepsilon$. 根据可测性知 $m(G\backslash K)=m(G)-m(K)>\varepsilon$, 故对任意的 $\varepsilon$ 都存在闭集 $K$ 使得 $m(K)>m(G)-\varepsilon$, 而 $\lambda<m(G)$, 故存在含于 $G$ 的闭集 $K$ 使得 $m(K)>\lambda$, 且容易把该 $K$ 取成紧集, 从而 $G$ 作为 $K$ 的开覆盖, 应存在 $K$ 的有限子覆盖 $\{B_{\alpha_k}\}$. 现在在 $\bigcup\limits_{k=1}^{m}B_{\alpha_k}\supset K$ 中选直径最大的开球, 记之为 $B_{\alpha_{k_1}}$. 再取 $\{B_{\alpha_k}\}_{k\neq k_1}$ 中与 $B_{\alpha_{k_1}}$ 不相交的半径最大的开球, 记之为 $B_{\alpha_{k_2}}$. 因为 $m$ 有限, 故这个选取过程在有限步内可以结束, 设选出的开球为 $B_{\alpha_{k_1}},\cdots,B_{\alpha_{k_p}}$.

现在说明如果 $B$ 是一个未被选出的开球, 记 $r(B)$ 表示开球 $B$ 的半径, 则总存在 $B_{\alpha_{k_q}}$ 使得 $B\cap B_{\alpha_{k_q}}\neq\varnothing$ 且 $r(B)\le r(B_{\alpha_q})$. 可对 $B$ 分类: 如果不存在 $i$ 使得 $B\cap B_{\alpha_{k_i}}\neq\varnothing$, 根据选取方法 $B$ 就应被选取到, 矛盾. 故至少存在 $B_{\alpha_{k_q}}$ 使得 $B\cap B_{\alpha_{k_q}}\neq\varnothing$. 如果 $r(B)>r(B_{\alpha_{k_q}})$, 当 $B$ 另与某个 $B_{\alpha_{k_{q'}}},q'<q$ 相交, 且 $r(B)\le r(B_{\alpha_{k_{q'}}})$, 命题已经成立; 如果对所有这样可能的 $B_{\alpha_{k_{q'}}}$, 都有 $r(B)>r(B_{\alpha_{k_{q'}}})$, 则在某步时就应选取 $B$, 矛盾! 而 $r(B)\le r(B_{\alpha_q})$ 时恰为命题, 故命题成立.

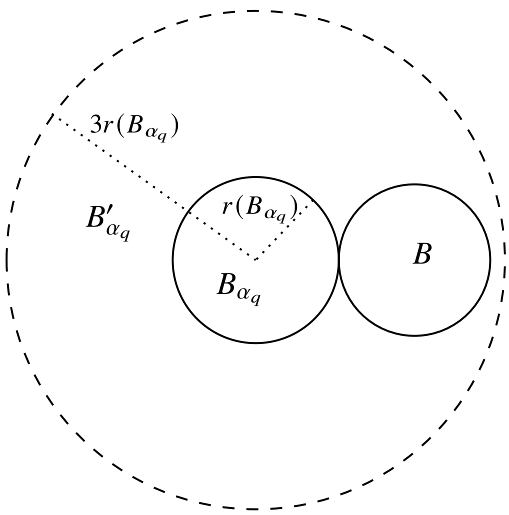


图 5.3: 放缩部分示意图

[12] 定义中的开球也可以换成其他集合, 只要这个集合可以正则收敛到 $x$, 后面会证明这一点.

最后, 对每个没有被选出的球 $B$, 考虑其满足上述命题的 $B_{\alpha_{k_q}}$, 新作 $B'_{\alpha_{k_q}}$ 是以 $B_{\alpha_{k_q}}$ 的心为心, 以 $3r(B_{\alpha_{k_q}})$ 为半径的开球, 可以验证 $B \subset B'_{\alpha_{k_q}}$. 这说明如果对每个选取的球作上述等心的扩张, 得到的新开球列 $\{B'_{\alpha_{k_i}}\}|_{i=1}^{p}$ 是 $K$ 的开覆盖, 进而:

$$\sum_{k=1}^{m} m(B'_{\alpha_k}) = \sum_{k=1}^{m} 3^n m(B_{\alpha_k}) > m(K) = \lambda$$

这便是

$$\sum_{k=1}^{m} m(B_{\alpha_k}) > \frac{\lambda}{3^n}$$

□

**定义 5.7.4 ((Lebesgue 意义下的) 局部可积)**

可测函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 称作 (Lebesgue 意义下) 局部可积, 如果对全体有界可测集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 都有

$$\int_K |f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} < \infty.$$

记局部可积函数的全体为 $L^1_{loc}$.

♣

**定义 5.7.5 (均值)**

若 $f \in L^1_{loc}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, r > 0$, 则定义 $A_r(\boldsymbol{x})$ 为 $f$ 在 $N(r, \boldsymbol{x})$ 上的均值:

$$A_r f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{m(B(r, \boldsymbol{x}))} \int_{B(r,\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

♣

**引理 5.7.4**

若 $f \in L^1_{loc}$, 则 $A_r f(\boldsymbol{x})$ 关于 $r > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 连续.

♡

证明

易知

$$m(B(r, \boldsymbol{x})) = cr^n, \quad c = m(B(1, 0))$$

记

$$S = \{\boldsymbol{y} : |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| = r\}$$

显见 $m(S(r, \boldsymbol{x})) = 0$. 现在在 $\mathbb{R}^n \backslash S(r_0, \boldsymbol{x}_0)$ 中点态意义下有

$$\chi_{B(r,\boldsymbol{x})} \to \chi_{B(r_0,\boldsymbol{x}_0)}, \quad r \to r_0, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$$

因此 $r \to r_0, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ 时有

$$\chi_{B(r,\boldsymbol{x})} \to \chi_{B(r_0,\boldsymbol{x}_0)} \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

又注意到当 $r < r_0 + \frac{1}{2}, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \frac{1}{2}$ 时有[13]

$$|\chi_{B(r,\boldsymbol{x})}| \leq \chi_{B(r_0+1,\boldsymbol{x}_0)}$$

从而根据控制收敛定理:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{r\to r_0\\ \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}} \int_{B(r,\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} &= \lim_{\substack{r\to r_0\\ \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) \chi_{B(r,\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) \lim_{\substack{r\to r_0\\ \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}} \chi_{B(r,\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) \chi_{B(r_0,\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \int_{B(r_0,\boldsymbol{x}_0)} f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

进而 $\int_{B(r,\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$ 关于 $r, \boldsymbol{x}$ 连续, 因而 $A_r f(\boldsymbol{x})$ 关于 $r, \boldsymbol{x}$ 连续. □

[13] 这一步是为了应用控制收敛定理, 说明被积函数是被控制的.

**定义 5.7.6 (Hardy-Littlewood 极大函数)**

若 $f \in L^1_{loc}$, 定义 $f$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数 $Hf$ 为

$$Hf(\boldsymbol{x}) = \sup_{r>0} A_r|f|(\boldsymbol{x}) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(r,\boldsymbol{x}))} \int_{B(r,\boldsymbol{x})} |f(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y}$$

♣

显见 $Hf$ 可测. 下面给出 Hardy-Littlewood 极大函数的最大值定理.

**定理 5.7.5 (最大值定理)**

存在常数 $C > 0$ 满足对全体 $f \in L^1, \alpha > 0$ 有

$$m(\{\boldsymbol{x} : Hf(\boldsymbol{x}) > \alpha\}) \le \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}$$

♡

## 5.8 章末习题

**练习 5.17** 设 $E$ 是 $\mathbb{R}$ 中一族 (开, 闭与半开闭) 区间的并集, 试证明 $E$ 是可测集.

# 第六章 $L^p$ 空间

## 6.1 $L^p$ 空间的定义与不等式

### 6.1.1 知识梳理

**定义 6.1.1** ($L^p$ 空间, 本性有界, 本性上确界)

1. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 记

$$\| f \|_p = \left(\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < +\infty$$

用 $L^p(E)$ 表示使 $\| f \|_p < +\infty$ 的 $f$ 的全体, 称其为 $L^p$ 空间.

2. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, $m(E) > 0$. 若存在 $M$, 使得 $|f(\boldsymbol{x})| \le M$, a.e. $\boldsymbol{x} \in E$, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上本性有界, $M$ 称为 $f(\boldsymbol{x})$ 的本性上界. 再对一切本性上界取下确界, 记为 $\| f \|_\infty$, 称它为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上的本性上确界. 此时用 $L^\infty(E)$ 表示在 $E$ 上本性有界的函数的全体.

♣

**命题 6.1.1**

若 $0 < m(E) < +\infty$, 则

$$\lim_{p\to\infty} \| f \|_p = \| f \|_\infty .$$

♠

证明

设 $M = \| f \|_\infty$, 则根据本性上确界的定义知对任一满足 $M' < M$ 的 $M'$, 点集

$$A = \{\boldsymbol{x} \in E : |f(\boldsymbol{x})| > M'\}$$

有正测度. 故由

$$\| f \|_p = \left(\int_E |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\int_E M'^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} = M'(m(E))^{\frac{1}{p}}$$

知 $\underline{\lim}_{p\to\infty} \| f \|_p \ge M'$. 再令 $M' \to M$ 得 $\underline{\lim}_{p\to\infty} \| f \|_p \ge M$.

另一方面, 知

$$\| f \|_p \le \left(\int_E M^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = M(m(E))^{\frac{1}{p}}$$

得 $\overline{\lim}_{p\to\infty} \| f \|_p \le M$, 夹逼即得欲证. □

**定理 6.1.1** ($L^p$ 是线性空间)

若 $f, g \in L^p(E), 0 < p \le +\infty, \alpha, \beta$ 是实数, 则

$$\alpha f + \beta g \in L^p(E).$$

♡

证明

当 $0 < p < \infty$, 注意首先有

$$\left|\frac{\alpha f(x) + \beta g(x)}{2}\right|^p \le |\max\{\alpha f(x), \beta g(x)\}|^p \le |\alpha f(x)|^p + |\beta g(x)|^p$$

得到

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^p \le 2^p(|\alpha|^p|f(x)|^p + \beta^p|g(x)|^p)$$

两边积分得到

$$\int_E |\alpha f(x) + \beta g(x)|^p dx \le \int_E 2^p(|\alpha|^p|f(x)|^p + \beta^p|g(x)|^p)dx < +\infty$$

因而 $\alpha f+\beta g\in L^p(E)$.

当 $p=\infty$, 有

$$|\alpha f(x)+\beta g(x)|\leq|\alpha|\cdot\parallel f\parallel_\infty+|\beta|\cdot\parallel g\parallel_\infty,\quad \text{a.e. } x\in E$$

根据本性上确界的定义知

$$\parallel\alpha f(x)+\beta g(x)\parallel_\infty\leq|\alpha|\cdot\parallel f\parallel_\infty+|\beta|\cdot\parallel g\parallel_\infty,\quad \text{a.e. } x\in E$$

因而 $\alpha f+\beta g\in L^p(E)$. □

注意研究 $L^p(E)$ 时, 主要的兴趣都在 $p\geq 1$ 的情形, 故下面若无特殊说明, 均默认 $p\geq 1$.

**定义 6.1.2 (共轭指标)**

若 $p,p'>1$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, 则称 $p$ 与 $p'$ 为共轭指标. 若 $p=1$, 则规定共轭指标 $p'=\infty$; 若 $p=\infty$, 则规定共轭指标 $p'=1$. ♣

**定理 6.1.2 (Hölder 不等式)**

设 $p$ 与 $p'$ 为共轭指标, 若 $f\in L^p(E), g\in L^{p'}(E)$, 则

$$\parallel fg\parallel_1\leq\parallel f\parallel_p\cdot\parallel g\parallel_{p'},\quad 1\leq p\leq\infty$$

也即

$$\int_E|f(x)g(x)|dx\leq\left(\int_E|f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g(x)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}},\quad 1<p<+\infty$$

以及

$$\int_E|f(x)g(x)|dx\leq\parallel g\parallel_\infty\int_E|f(x)|dx,\quad p=1$$

与

$$\int_E|f(x)g(x)|dx\leq\parallel f\parallel_\infty\int_E|g(x)|dx,\quad p=\infty.$$

♡

证明

当 $p=1$ 或 $\infty$ 时, 欲证式显然成立.

当 $\parallel f\parallel_p=0$ 或 $\parallel g\parallel_{p'}=0$, 知 $f(x)g(x)=0$, a.e. $x\in E$, 欲证式进而成立.

当 $\parallel f\parallel_p>0, \parallel g\parallel_{p'}>0, p,p'<+\infty$, 注意 Young 不等式

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{p'}}\leq\frac{a}{p}+\frac{b}{p'},\quad a>0, b>0$$

代入 $a=\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p}, b=\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}}$ 得到

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\parallel f\parallel_p\cdot\parallel g\parallel_{p'}}\leq\frac{1}{p}\cdot\frac{|f(x)|^p}{\parallel f\parallel_p^p}+\frac{1}{p'}\cdot\frac{|g(x)|^{p'}}{\parallel g\parallel_{p'}^{p'}}$$

两边积分有

$$\frac{\parallel fg\parallel_1}{\parallel f\parallel_p\cdot\parallel g\parallel_{p'}}\leq\frac{1}{p}\cdot\frac{\parallel f\parallel_p^p}{\parallel f\parallel_p^p}+\frac{1}{p'}\cdot\frac{\parallel g\parallel_{p'}^{p'}}{\parallel g\parallel_{p'}^{p'}}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

因而

$$\parallel fg\parallel_1\leq\parallel f\parallel_p\cdot\parallel g\parallel_{p'}.$$

□

**推论 6.1.1 (Cauthy-Bunyakowsky-Schwarz 不等式)**

若 $f,g\in L^2(E)$, 则

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \le (\int_E |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_E |g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

证明

在 Hölder 不等式中代入 $p=p'=2$ 即可. □

下面的定理在泛函分析中有广泛用途.

**定理 6.1.3**

若 $m(E)<+\infty$, 且 $0<p_1<p_2\le\infty$, 则 $L^{p_2}(E)\subset L^{p_1}(E)$, 且有

$$\| f \|_{p_1}\le (m(E))^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \| f \|_{p_2}$$

证明

当 $p_2=+\infty$, 知 $\frac{1}{p_2}=0$, 有

$$(\int_E |f(x)|^{p_1} dx)^{\frac{1}{p_1}} \le (\int_E \| f \|_\infty^{p_1} dx)^{\frac{1}{p_1}} = (m(E))^{\frac{1}{p_1}} \| f \|_\infty$$

当 $p_2<+\infty$, 针对 $\int_E |f(x)|^{p_1}dx$, 考虑 $r=\frac{p_2}{p_1}, r'=\frac{p_2}{p_2-p_1}, \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, 由 Hölder 不等式得

$$\int_E |f(x)|^{p_1} dx \le (\int_E |f(x)|^{p_1 r} dx)^{\frac{1}{r}}(\int_E 1 dx)^{\frac{1}{r'}} = (\int_E |f(x)|^{p_2} dx)^{\frac{p_1}{p_2}}\cdot (m(E))^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}$$

两边同取 $\frac{1}{p_1}$ 次幂得到

$$\| f \|_{p_1}\le (m(E))^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \| f \|_{p_2}$$

□

**定理 6.1.4**

若 $f\in L^r(E)\cap L^s(E)$, 且令 $0<r<p<s\le+\infty$ 以及

$$0<\lambda<1, \frac{1}{p}=\frac{\lambda}{r}+\frac{1-\lambda}{s}$$

则

$$\| f \|_p \le \| f \|_r^{\lambda}\cdot \| f \|_s^{1-\lambda}.$$

证明

当 $r<s<\infty$, 注意 $1=\frac{\lambda p}{r}+\frac{(1-\lambda)p}{s}$, 由 Hölder 不等式, 针对 $\int_E |f(x)|^p dx$ 有

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^p dx &= \int_E |f(x)|^{\lambda p}\cdot |f(x)|^{(1-\lambda)p} dx \le (\int_E (|f(x)|^{\lambda p})^{\frac{r}{\lambda p}} dx)^{\frac{\lambda p}{r}}(\int_E (|f(x)|^{(1-\lambda)p})^{\frac{s}{(1-\lambda)p}} dx)^{\frac{(1-\lambda)p}{s}}\\ &= (\int_E |f(x)|^r dx)^{\frac{\lambda p}{r}}(\int_E |f(x)|^s dx)^{\frac{(1-\lambda)p}{s}}\end{aligned}$$

两边同取 $\frac{1}{p}$ 次幂得到

$$\| f \|_p \le \| f \|_r^{\lambda}\cdot \| f \|_s^{1-\lambda}.$$

# 参考文献


[1] 周民强. 实变函数论 (第 3 版)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2016.

[2] 尤承业. 基础拓扑学讲义 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1997.

[3] 那汤松. 实变函数论 (第 5 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[4] Robert A.Adams, John J.F.Fournier. Sobolev Spaces[M]. Amsterdam: Academic Press., 2003.

[5] 汪林. 实分析中的反例 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[6] Walter Rudin. Real and Complex Analysis[M]. New York: McGraw-Hill., 1987.

[7] Elias M.Stein, Rami Shakarchi. Real Analysis[M]. Princeton: Princeton University Press., 2005.

[8] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边. 数学分析习题课讲义 (下册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[9] 匡继昌. 实分析与泛函分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[10] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌. 实变函数论与泛函分析 (上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[11] Gerald B.Folland. Real Analysis: modern techniques and their applications[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 1999.