

# 一千种装箱方法 - 二维矩形装箱的实用方法

Jukka Jylanki

2010 年 2 月 27

目

## 摘要

我们回顾了几种可用于解决将矩形打包成二维有限分箱问题的算法。大多数提出的算法都在文献中得到了很好的研究，但有些变体鲜为人知，有些显然被视为“民间传说”，以前没有参考资料。呈现并比较了不同的变体。本次调查的主要贡献是从解决有限装箱问题的角度对这些变体进行了原始分类。这项工作侧重于对矩形正交放置并可以旋转 90 度的问题变体的实证研究。综合测试用作主要基准，解决生成纹理图集的实际问题用于测试每种方法的实际性能。作为相关贡献，提出了关于直线多边形内最大正交矩形数量的原始证明。

关键词：二维装箱，优化，启发式算法，在线算法，NP-hard

## 内容

1 简介	4
2 算法	5
2.1 货架算法	5
2.1.1 下一个适合的货架 (SHELF-NF)。	6
2.1.2 货架先装 (SHELF-FF)。	7
2.1.3 货架最佳宽度适合 (SHELF-BWF)。	8
2.1.4 货架最佳高度适合 (SHELF-BHF)。	8
2.1.5 货架最佳区域适合 (SHELF-BAF)。	8
2.1.6 货架最差宽度适合 (SHELF-WWF)。	8
2.1.7 货架地板-天花板。	9
2.1.8 废物地图改进 (-WM)。	9
2.2 断头台算法。	11
2.2.1 断头台最佳区域拟合 (GUILLotine-BAF)。	13
2.2.2 断头台最佳短侧适合 (断头台-BSSF)	13
2.2.3 Guillotine Best Long Side Fit (GUILLotine-BLSF)。	13
2.2.4 断头台最不适合规则	13
2.2.5 矩形合并改进 (-RM)。	14
2.3 分裂 断头台算法的规则。	15
2.3.1 较短/较长轴拆分规则 (-SAS, -LAS)。	15
2.3.2 较短/较长的剩余轴拆分规则 (-SLAS, -拉)。	15
2.3.3 最大/最小区域分割规则 (-MAXAS, -MINAS)。	15
2.4 最大矩形算法。	16
2.4.1 最大矩形左下角 (MAXRECTS-BL)。	18
2.4.2 最大矩形最佳区域拟合 (MAXRECTS-BAF)	19
2.4.3 最大矩形最佳短边贴合 (MAXRECTS-BSSF)。	19
2.4.4 最大矩形最佳长边贴合 (MAXRECTS-BLSF)。	19
2.4.5 MAXRECTS 的效率。	19
2.4.6 最大矩形接触点 (MAXRECTS-CP)	22
2.5 天际线算法。	22
2.5.1 天际线左下角 (SKYLINE-BL)。	23
2.5.2 天际线最适合 (SKYLINE-BF)。	23
2.5.3 废物地图改进 (-WM)。	24

3	一般改进方法	24
3.1	选择目标箱 .....	24
3.2	排序输入 .....	25
3.3	全球最佳选择 .....	26
4	综合基准	27
4.1	矩形类别和概率分布 .....	28
4.2	结果 .....	30
4.3	货架算法 .....	30
4.4	断头台算法 .....	30
4.5	MAXRECTS 算法 .....	31
4.6	天际线算法。 .....	31
5	结论和未来工作	32
6	附录：总结和结果	35

## 1 介绍

二维矩形装箱是组合优化中的经典问题。在这个问题中, 给定一系列矩形  $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ ,  $(w_i, h_i)$  和任务是找到将这些项目打包到最小数量的大小为  $(W, H)$  的箱子中。任何两个矩形都不能相交或包含在彼此内部。这个问题有几个现实世界的应用, 并且通过从 2-partition 问题 [2] 的简化证明是 NP-hard [1]。甚至不存在渐近多项式时间近似方案 (APTAS), 但它是 APX-hard [3]。已经做了大量工作来开发近似最优解的有效启发式算法。在本次调查中, 我们介绍了其中几种算法, 并在实际水平上比较了它们的性能。通过仅更改算法启发式决策中的一个小规则, 可以在生成的包装中获得非常不同的结果。大多数进行的研究都集中在渐近性能比上, 并且通常忽略了这些微妙之处, 因为它们通常不会在算法的理论属性中发挥作用。我们欢迎这些变化, 并在实践中测试它们如何影响生产的填料质量。

二维装箱问题是一维装箱问题的推广, Csirik 和 Woeginger [4] 对此进行了很好的调查。对于二维问题, 存在多种变体。在一个版本中, 该过程被建模为好像一次从某个输入接收矩形一样, 并且必须立即将它们放入其中一个箱中, 而无需了解即将到来的项目。这种变体称为在线矩形装箱。与此变体相反的是离线矩形装箱问题, 其中预先知道要装箱的整个序列。我们检查了两种变体的算法。

在装箱问题的一种表述中, 可能存在多个同时打开的箱, 算法可以在它们之间选择当前矩形的目的地。在更严格的变体中, 在任何给定时间可以打开的垃圾箱数量都有限制, 要打开一个新的垃圾箱, 必须关闭现有的垃圾箱。我们将介绍的 BNF 算法可用于最严格的情况, 即一次只能打开一个 bin, 但其他变体利用了对打开 bin 数量没有限制的情况。

如果放置的矩形的所有边都是与 bin 边缘平行。我们只考虑正交的填充, 我们允许每个矩形可以旋转 90 度。这称为可旋转矩形装箱。也就是说, 打包算法可以选择

对于输入  $R(w, h)$  是否打包矩形  $R^i(h, w)$  代替。在装箱问题的某些公式中，这是不允许的。这绝不是任何启发式方法工作的关键属性，并且它们中的每一个都可以适用于非定向矩形箱包装情况。

在一些实际应用中，要求生产的填料是可断头的。如果包装  $P$  可以被分成两部分  $P_1$  和  $P_2$ ，并且具有不与包装中的任何矩形交叉的单个直线水平或垂直切割，并且  $P_1$  和  $P_1$  和  $P_2$  或者也可以断头台，或者每个最多只包含一个矩形。并非本次调查中介绍的所有算法都能产生可断头台的包装，但我们会提到哪些可以。Lodi、Martello 和 Vigo [5] 提供了具有和不具有断头台性或可旋转性特性的变体的概述和比较。

作为一个实际的方面，我们仅限于解决具有所有整数值的问题。也就是说，bin 和矩形的尺寸以及可以放置矩形的坐标都必须是整数。

## 2 算法

在本章中，我们介绍了评论中包含的每个数据结构和算法。这些算法根据用于表示打包过程和 bin 中剩余空间的底层数据结构进行分组。我们从最简单的开始，然后进行更复杂的。

### 2.1 货架算法

Shelf 算法（或级别算法）无疑是可以用来生成包装的最简单的方法。我们将一个架子定义为 bin 的子矩形，宽度为  $w_b$ ，高度为  $h_b$ 。随着包装的进行，垃圾箱的空闲区域被组织成自下而上的架子，其中矩形从左到右放置。最后一个架子（最上面的架子）称为开放式架子。由于矩形是自下而上放置的，开放式搁板上方的区域始终未使用。这允许无论何时将矩形放置在该架子上，都可以调整开放架子的高度。对于开放式货架下方的货架，我们没有这种自由，这些货架称为封闭式货架。

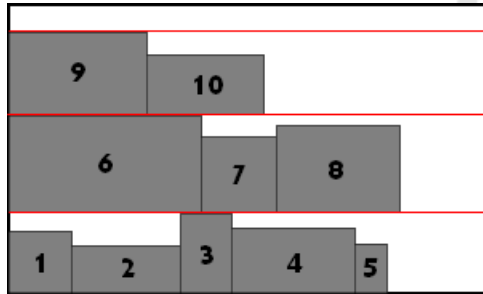


图 1: 由 Shelf 算法生成的样本包装。

将一个矩形  $(w, h)$  装到货架  $(W_b, h_s)$  上时, 我们要选择是否旋转矩形, 即矩形是否直立存放 ( $\text{store}(\min(w, h), \max(w, h))$ ) 或侧向 ( $\text{存储}(\max(w, h), \min(w, h))$ ) 方向。在我们实现的所有变体中, 选择按以下顺序进行:

1. 如果矩形是新打开的架子上的第一个矩形, 请将其侧放。这是为了尽量减少新架子的高度。
2. 如果矩形适合直立, 即如果  $\max(w, h) < h_s$ , 则存储它。这旨在最大限度地减少矩形顶面和货架天花板之间浪费的表面积。
3. 否则, 如果可能, 将矩形存放在侧面。

图 2.1 显示了由货架算法生成的样本包装。矩形按照它们在垃圾箱中的顺序编号, 红线表示货架天花板。货架算法的所有变体生成的包装与此图中显示的包装非常相似。

### 2.1.1 下一个适合的货架 (SHELF-NF)

在本文介绍的所有算法及其变体中, Shelf Next Fit 绝对是最简单的包装方法。它有一个特殊的属性, 这里讨论的其他算法没有共享, 即它只需要恒定数量的工作内存。可以看出, 所有其他算法都使用某种数据结构, 该结构至少与已打包的矩形数量呈线性关系。对于 SHELF-NF, 仅

需要三个临时寄存器。此属性在某些应用程序中可能很有用。不幸的是，由 SHELF-NF 生产的填料可能与论文中提出的最佳方法相去甚远。

---

算法 1: SHELF-NF。

---

```
初始化:
设置  $y \leftarrow 0$ 。
设置  $x \leftarrow 0$ 。设置  $h_s \leftarrow 0$ 。包:
foreach Rectangle  $R(w, h)$  在序列中做确定合适的方向。
    尝试将矩形放入当前打开的架子上。
    如果不适合，请关闭当前架子并打开一个新架子。如果没有
    新架子的空间，则终止。
结尾
```

---

命题 1. 可以实现 SHELF-NF 算法以在  $8(n)$  时间和  $O(1)$  空间中运行。

□

### 2.1.2 货架优先 (SHELF-FF)

打开新架子时忘记旧架子上的空闲空间有点浪费。因此，SHELFNF 算法的所有变体都维护一个所有先前关闭的架子的列表，以便在可能的情况下仍然可以放置矩形。但是，如果矩形适合的架子不止一个，我们应该选择哪一个？做出此选择的策略会产生多种变体。在 Shelf First Fit 中，我们总是将矩形放入其适合的最低索引的货架中。这很简单，但请注意，现在算法的运行时间和内存消耗都与当前 bin 中的货架数量成线性关系。

使用 SHELF-FF，我们设法将一个矩形安装到封闭的架子上，从而节省了在开放式架子中使用的空间。与SHELFNF相比，SHELF-FF如果能够以这种方式打包一个矩形，偶尔还能得到一份“免费的午餐”。所以有人可能认为 SHELF-FF 的表现不会比 SHELF-NF 差，但事实并非如此。原因是因为打包决定首先是启发式的，所以不能保证

SHELF-FF 所做的这种更智能的包装会更加优化。在实践中, SHELF-FF 比 SHELF-NF 表现得更好, 但对于某些序列, 看起来 SHELF-FF 在试图超越 SHELF-NF 时只是遇到了一些坏运气, 最终得到了更糟糕的包装。在比较其他算法时, 这种影响也是反复出现的。

命题 2。可以实现 SHELF-FF 算法以在  $O(n \log n)$  时间和  $O(n)$  空间中运行。

证明。额外的  $O(n)$  空间来自必须存储货架列表的数据结构, 这与 SHELF-NF 算法不同, 后者只跟踪最后一个货架。通过线性搜索找到适合矩形的第一个架子的实现需要  $O(n^2)$  时间, 但使用二分法也可以在  $\log n$  时间内找到架子, 从而给出  $O(n \log n)$  时间算法。

### 2.1.3 货架最佳宽度适合 (SHELF-BWF)

□

可以看作是 SHELF-FF 的一个缺点, 它没有将所有可能的货架作为一个整体考虑, 而只是贪婪地将矩形放在它适合的第一个货架上。也许最好先查看所有可能的货架, 然后再从中挑选一个最好的。在 Shelf Best Width Fit 中, 我们采用了一个规则来选择货架空间的剩余宽度最小的货架。

### 2.1.4 货架最佳高度适合 (SHELF-BHF)

由于分隔货架的边缘是直线, 因此包装高度小于货架高度的矩形只会在矩形顶面和货架天花板之间产生一条浪费的空间。为了最大限度地减少浪费的区域, 货架最佳高度适合选择将每个矩形打包到货架上, 以最大限度地减少剩余高度  $h_i - h$ 。

### 2.1.5 货架最佳区域适合 (SHELF-BAF)

以上两种方法各有优势。为了尝试将它们结合起来, 我们可以尝试最大化使用的货架总面积。这导致了货架最佳区域拟合算法。



### 2.1.6 货架最差宽度适合 (SHELF-WWF)

虽然 SHELF-BWF 试图尽可能地填充每个架子的宽度, 但架子最差宽度拟合算法试图做完全相反的事情, 并尽可能保持每个架子的宽度仍然可用。这是启发式算法的另一个好奇心。SHELF-WWF 和 SHELF-BWF 是完全对立的, 但即便如此, 仍然不能声称一个比另一个更好。

在 SHELF-WWF 中, 我们采用了一个额外的规则, 如果我们正在打包一个宽度为  $w$  的矩形, 并且我们发现一个只剩下  $w$  个单位空间的架子, 我们会立即选择那个架子来打包这个矩形。

按照相同的模式, 可以定义 Shelf Worst Height Fit 和 Shelf Worst Area Fit 算法。但是由于货架算法浪费了每个包装矩形和货架天花板之间的空间, 试图最大化这种差异将对应于最大化浪费的区域, 因此这些变体很可能是次优的。如果与 Floor-Ceiling 变体或 Waste Map Improvement (参见接下来的两个小节) 共同使用, 情况可能并非如此, 但我们仍然没有测试这些变体。

命题 3. SHELF-BWF、SHELF-BHF、SHELF-BAF、SHELF-WWF 算法中的每一个都可以实现在  $O(n^2)$  时间和  $O(n)$  空间中运行。

证明。对于要包装的每个矩形, 我们检查每个货架以找到其中最好的。货架数量的增长率为  $O(n)$ 。□

### 2.1.7 货架地板-天花板

上述所有变体仍然存在相同的问题, 即当矩形高度与货架高度不匹配时, 它们无法回收它们浪费的空闲区域。为了解决这个问题, Lodi、Martello 和 Vigo

[6] 提出了 Shelf Floor-Ceiling 变体, 其中输入首先通过减少长边进行排序, 然后沿着货架底部从左到右正常包装到货架中。一旦我们关闭一个架子并因此固定了该架子的高度, 我们也开始沿着架子天花板从右到左包装矩形。由于输入是按高度递减排序的, 因此通过使用简单的数据结构跟踪将矩形放入的有效天花板位置是可行的。作者表明, 这提高了 Shelf 算法的性能。

我们没有实现 Shelf Floor-Ceiling, 主要是因为我们觉得它与 Skyline 算法非常相似, 并且可能优于 Skyline 算法, 但我们无法验证这一说法。

### 2.1.8 废物地图改进 (-WM)

另一种尝试利用 Shelf 算法中过度浪费空闲区域的方法是使用我们所说的浪费地图。由于下一小节中介绍的 Guillotine 算法是一种存储垃圾箱空闲区域的简单而有效的方法, 因此我们利用它来跟踪否则会浪费的所有区域。

对于 Shelf 算法, 过程如下。我们通过像往常一样初始化 Shelf 算法来开始打包, 并将 Guillotine 打包器算法的实例初始化为子结构。关于 Guillotine 数据结构和相关算法的描述, 请参见下面的第 2.2 章。

这个数据结构最初有  $F = \emptyset$ 。每当我们关闭一个架子时, 我们找到那个架子上所有不相交的空闲区域的矩形并将它们添加到  $F$ 。当打包一个矩形时, 我们首先检查 Guillotine 打包机是否可以放置

矩形, 如果没有, 我们照常使用 Shelf 算法。那么问题是我们应该使用断头台封隔器的哪个变体? 由于有如此多的组合并且为了减少要测试的组合数量, 我们只考虑一些表现最佳的组合。

命题 4. 算法 SHELF-x-WM 可以实现在  $O(n^2)$  时间和  $O(n)$  空间中运行。

证明。对于每个矩形, 我们首先检查它是否可以打包到 GUILLOTINE 数据结构中 (参见下一节)。这可以在线性时间内完成。如果它不适合, 我们再进行一次线性搜索以找到合适的货架。SHELF 和 GUILLOTINE 数据结构的更新都是在恒定时间内执行的。因此, 总运行时间为  $O(n^2)$  时间, 需要  $O(n)$  空间。  $\square$

请注意, SHELF-FF-WM 算法的时间复杂度是  $O(n^2)$  而不是  $O(n \log n)$ , 因为在找到目标货架时, Guillotine 放置步骤在二分搜索步骤中占主导地位。

图 1 总结了本章中介绍的算法。

## 2.2 断头台算法

无论使用什么样的调整来改进 Shelf 方法, 在最坏的情况下仍然会浪费大量空间。在本章中, 我们选择一个

算法名称	时间复杂度	空间复杂度
货架NF	$O(n)$	$O(l)$
货架-FF	$O(n \log n)$	$O(n)$
货架-BWF	$O(n^2)$	$O(n)$
货架-BHF	$O(n^2)$	$O(n)$
货架-BAF	$O(n^2)$	$O(n)$
世界自然基金会	$O(n^2)$	$O(n)$
货架-x-WM	$O(n^2)$	$O(n)$

表 1: 不同 SHELF 变体及其算法复杂性的总结。

解决问题的方法完全不同。该算法基于一个我们称之为断头台分割放置的操作，它是将一个矩形放置到 bin 的一个空闲矩形的一个角上，然后将剩余的 L 形空闲空间再次分割成两个不相交的空闲空间的过程。矩形。此过程和可能的拆分选择如图 2.2 所示。然后将多个矩形的实际打包过程建模为断头台拆分放置操作的迭代应用。

基于这种拆分规则的算法是众所周知的并被广泛使用。例如，它出现在 3D 游戏，第 2 卷 [7] 一书中，还有几位网络作者，如 Jim Scott [8] 和 John Ratcliff [9]。但是，我们找不到引用此方法原始作者的来源，甚至无法找到该算法的名称。因此，我们将此方法命名为 Guillotine 算法，因为它产生的包装很容易被认为是可以断头台的。

Guillotine 算法本身的工作原理如下。我们维护一个矩形列表  $F = \{F_1, \dots, F_n\}$  表示 bin 的可用空间。这些矩形是成对不相交的，即  $F_i \cap F_j = \emptyset$  对于所有  $i \neq j$  和总

可以使用  $L_{jn}$  计算 bin 的空闲未使用区域  $F_i$ 。算法以单个自由矩形  $F = \{F_1(W, H)\}$  开头。在每个包装步骤，我们首先选择一个空闲的矩形  $F_i$  来放置下一个矩形  $R(w, h)$  进入。将矩形  $R$  放置在  $F_i$  的左下角，然后使用断头台分割规则将其分割以产生两个较小的自由矩形  $F^I$  和  $F^{II}$ ，然后将  $F_i$  替换为自由矩形列表。这个过程一直持续到没有空闲矩形可以容纳下一个矩形，然后在一个新的空箱上再次开始这个过程。该算法在图 2 中进行了概述。

Guillotine 算法非常受欢迎，因为它可以准确跟踪

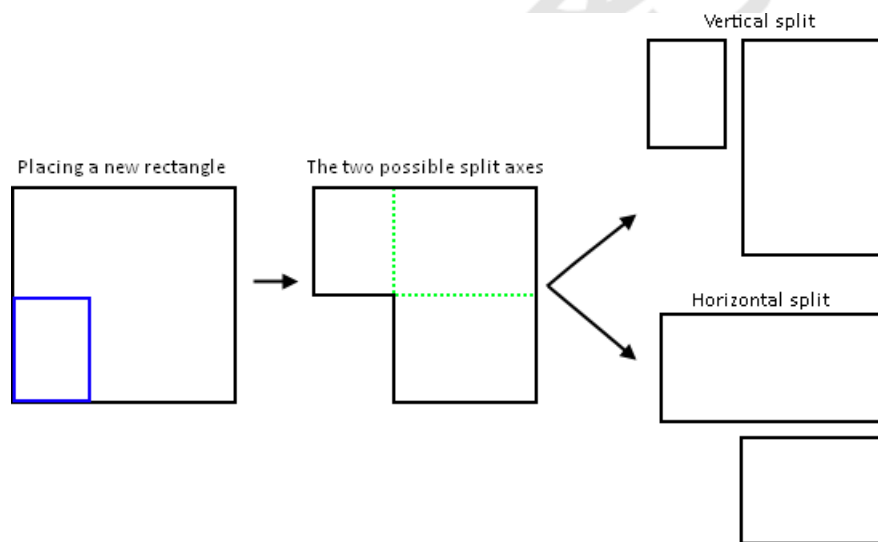


图 2：断头台拆分放置过程。放置矩形后，有两种方法可以存储剩余的空闲区域。

---

#### 算法 2：断头台算法。

---

初始化：

设置  $F = \{(W, H)\}$ 。

盒：

foreach Rectangle  $R(w, h)$  在序列中做

    确定自由矩形  $F \in F$  将矩形打包到其中。

    如果没有找到这样的矩形，用一个新的 bin 重新启动。

    确定矩形的方向并将其放置在  $F_i$  的左下角。

    使用断头台拆分方案将  $F_i$  细分为  $I$  和  $II$ 。设置  $F \leftarrow F \cup \{I, II\} \setminus F_i$ 。

结尾

---



图 3: 由 Guillotine 算法生成的样本包装。红线表示拆分选项。

与 Shelf 算法不同, 垃圾箱的可用区域永远不会“忘记”任何可用空间。这里的缺点是该算法只考虑矩形  $R$  完全适合单个自由矩形  $F_i$  的位置。它从不试图将  $R$  打包到一个跨越分割线的位置。

换句话说, 如果  $R$  对于所有  $i$ , 则无法打包  $R$ , 但  $R \leq \bigcup_{i=1}^{L_j n} F_i$ .

Guillotine 算法生成的样本包装如图所示

图 2.2。红线表示用于切割空闲区域的分割线, 以便可以使用一组不相交的矩形来表示它。在这个阶段, 一组自由矩形  $F$  由 8 个矩形组成, 它们对应于图像的白色区域。

为了完成算法, 我们仍然需要定义两个规则。首先, 我们必须想出一个规则, 如何选择放置矩形的  $F_i$ 。其次, 我们必须选择用于拆分的两个可能方向中的哪一个。我们找到了六种不同的方法来做到这两点。这些选择可以独立进行, 因此这给出了 36 种不同的算法变体。一种约定是否优于另一种约定并不明显, 因此我们对它们全部进行测试。

在回顾该算法的已发布实现时, 我们发现其中一些 [8] [7] 构建了复杂的数据结构, 利用  $kD$  树、二元分区或递归来选择自由矩形。我们之前发布的实现 [10] 也以类似的方式运行。我们觉得这过于复杂、不必要且完全是次优的, 因为这些数据结构通常不允许人们为选择下一个空闲矩形定义一个有效的规则。在为本次审查编写的实现中, 我们已切换到使用可调整大小的数组来存储空闲矩形。出于优化目的,

数组可以按排序顺序存储以允许循环提前优化，但在观察到足够好的实际性能后，我们并没有为这些细节而烦恼。

在接下来的章节中，我们展示了我们用于审查的不同启发式选择规则。

### 2.2.1 断头台最佳区域适合 (GUILLOTINE-BAF)

与 SHELF-BAF 非常相似，Guillotine Best Area Fit 选择下一个矩形适合的最小区域的自由矩形  $F_i$ 。这是尝试最小化浪费空间的狭窄条带的自然规则。

### 2.2.2 断头台最佳短侧适合 (断头台-BSSF)

当我们将一个矩形  $R(w, h)$  放入一个自由矩形  $(w_i, h_i)$  中时，我们可以考虑这两个矩形的边长差异。Guillotine Best Short Side Fit 规则选择将  $R$  打包到  $F_i$  中，使得  $\min(w_i - w, h_i - h)$  最小。换句话说，我们最小化了较短的剩余边的长度。

### 2.2.3 Guillotine 最佳长边剪裁 (GUILLOTINE-BLSF)

我们使用 Guillotine Best Long Side Fit 得到另一个规则，其中将  $R$  打包到  $F_i$  中，使得  $\max(w_i - w, h_i - h)$  是最小的。也就是说，我们最小化了较长的剩余边的长度。

### 2.2.4 断头台最不适合规则

由于 Shelf 算法的 Worst Fit 变体并不是完全失败，我们可以在这里尝试相同的方法。这些 Worst Fit 规则类似于上一小节中的 Best Fit 规则。Guillotine 最坏区域拟合 (GUILLOTINE-WAF) 算法将  $R$  打包到  $F_i$  中，以便最大化剩余区域。请注意，对于此变体以及所有其他断头台变体，我们有特殊的放置规则，即如果某些  $i$  为  $R \subseteq F_i$ ，则立即选择  $F_i$ ，因为它是完美匹配。

Shelf 算法的最差宽度拟合变体可以通过两种不同的方式引入 Guillotine 算法。在 Guillotine Worst Short Side Fit (GUILLOTINE-WSSF) 中，我们最大化了较短的剩余边的长度。最后，第三种可能的变体是 Guillotine Worst Long Side Fit (GUILLOTINE-WLSF)，我们将剩余的较长边的长度最大化。

所有 Worst Fit 变体的基本动机与 Shelf Worst Fit 变体相同 - 尽量在空闲矩形中保留大空间, 并尽量避免非常小的无用空间条。

命题 5. 算法 GUILLOTINE-BAF、-BSSF、-BLSF、-WAF、-WSSF 和 -WLSF 可以实现在  $O(n^2)$  时间和  $O(n)$  空间中运行。

证明。这些算法的区别仅在于它们如何比较  $F$  的两个元素, 这在每种情况下都是恒定时间操作。自由矩形结构 IFI 的大小具有  $O(n)$  的增长率, 因为在每个打包步骤我们最多添加一个新的自由矩形到  $F$ 。对于每个矩形, 我们检查  $F$  中的每个自由矩形一个时间, 这会产生运行时间  $O(n^2)$ 。

### 2.2.5 矩形合并改进 (-RM) □

Guillotine 算法的最大问题是矩形不能放置在矩形跨越现有分割线的空闲区域的任何位置。如果可用空间足够碎片化, 算法可能会错误地报告没有可用空间来放置矩形, 即使有。因此, 我们假设如果我们可以最小化划分自由区域的分割线的数量, 我们会得到更好的填充。然而, 由于我们坚持使用一组不相交的矩形来表示空闲区域, 因此是否可以做很多事情来解决这个问题并不明显。有一个简单的过程, 我们简称为矩形合并改进。它的工作方式是在打包一个矩形之后, 我们遍历所有的空闲矩形, 看看是否存在一对相邻的矩形  $F_i, F_j$  使得  $F_i \cup F_j$  可以是完全由一个更大的矩形表示。如果是这样, 我们将这两者合二为一, 通过去除  $F_i$  和  $F_j$  之间存在的单个分割线, 有效地去除了自由区域的碎片。John Ratcliff 在他的在线博客中写道 [9] 暗示这个过程对于健壮性很重要, 所以我们测试了所有有和没有这种改进的变体。

命题 6. 算法 GUILLOTINE-x-RM 可以实现在  $O(n^3)$  时间和  $O(n)$  空间中运行。

证明。打包每个矩形后, 我们通过检查每对  $F_i, F_j \in F$  来执行矩形合并步骤。有  $8(n^2)$  个这样的对, 这一步上升到主导整体复杂性。□

### 2.3 Guillotine 算法的拆分规则

由于分割轴决定了自由矩形的大小，并且因为矩形的放置可能不会跨越分割线，所以重要的是要注意分割的执行方式。在本小节中，我们将介绍选择水平拆分还是垂直拆分的不同方法。在下面，让  $F_i(w_i, h_i)$  是矩形  $R(w, h)$  刚刚被打包在其中的自由矩形。

由于以下所有拆分规则仅进行本地恒定时间选择分裂的方向，它们不影响主算法的复杂度。

#### 2.3.1 较短/较长轴拆分规则 (-SAS、-LAS)

作为最简单的约定，我们可以确定与  $R$  维度无关的分割轴，如果  $w_i < h_i$  则水平分割，否则垂直分割。这称为短轴拆分规则 (-SAS)。作为相反的规则，如果  $w_i > h_i$  则长轴拆分规则 (-LAS) 水平拆分，否则垂直拆分。

#### 2.3.2 较短/较长的剩余轴拆分规则 (-SLAS、-LLAS)

我们还可以检查自由矩形的剩余长度  $w_i - w$  和  $h_i - h$ 。在 Shorter Leftover Axis Split Rule (-SLAS) 中，如果  $w_i - w < h_i - h$ ，我们水平拆分，否则垂直拆分。同样，我们也可以采用相反的约定，在更长的剩余轴分割规则 (-LLAS) 中，如果  $w_i - w > h_i - h$ ，我们将水平分割，否则垂直分割。

#### 2.3.3 最大/最小区域分割规则 (-MAXAS、-MINAS)

除了查看边长之外，我们还可以检查在此过程中形成的四个子矩形的表面积。图 Y 显示了此设置。在最大面积分割规则 (-MAXAS) 中，我们尽量保持矩形  $A_1$  和  $A_2$  的大小尽可能均匀，并将  $A_3$  与这两个中较小的一个连接起来。使用最小面积分割规则 (-MINAS)，我们将  $A_3$  与  $A_1$  和  $A_2$  中的较大者连接起来，以产生一个更大的自由矩形。

我们使用形式为 GUILLOTINERECT -SPLIT 的名称来指代每个 Guillotine 变体，其中 RECT 是字符串 BAF、BSSF、BLSF、WAF、WSSF 或 WLSF 之一，而 SPLIT 是字符串 SAS、LAS、SLAS、LLAS 之一，马克斯，米纳斯。如果使用矩形合并改进，我们附加



算法名称	GUILLLOTINE-RECT -	时间复杂度 $(n^2)$	空间复杂度 $O(n)$
	SPLIT	$(n^3)$	$O(n)$
	断头台-RECT -SPLIT -RM		

表 2: 不同 GUILLLOTINE 变体及其算法复杂性的总结。

名称的后缀 -RM。为了完成本章，表 2 显示了这些算法的摘要。

## 2.4 最大矩形算法

上一节介绍的 Guillotine 算法是对 Shelf 算法的较大改进，但分割线边界仍然会导致实际性能出现问题。为了尝试完全消除所有这些问题，我们引入了最大矩形算法。该算法在某种意义上是基于 Guillotine Split Placement 规则的扩展。与 Guillotine 算法一样，Maximal Rectangles 算法存储了一个空闲矩形列表，这些矩形代表了 bin 的空闲区域。但与选择两个分割轴之一的断头台算法不同，最大矩形算法执行的操作基本上对应于同时选择两个分割轴。

这个拆分过程如图 2.4 所示。当我们将输入矩形  $R$  放置在自由矩形  $F$  的左下角时，我们计算覆盖  $F \setminus R$  的 L 形区域的两个矩形  $F_1$  和  $F_2$  并更新  $F \leftarrow (F \cup \{F_1, F_2\}) \setminus \{F\}$ 。算法名称中的“最大值”指的是这些新矩形  $F_1$  和  $F_2$  成为每个方向的最大长度。也就是说，在每一侧，它们接触垃圾箱边缘或已经放入垃圾箱的某个矩形。以这种方式执行拆分为我们提供了列表  $F$  的以下特殊属性。

命题 7. 令  $F = \{F_1, \dots, F_n\}$  是最大空闲矩形的集合，表示在最大矩形算法的某个打包步骤中留在箱中的空闲区域。然后对于任何矩形  $R$

$$\exists_{i=1}^n F_i, \text{ 存在 } F_i \in F \text{ 使得 } R \subseteq F_i.$$

□

上述命题保证在考虑放置矩形的潜在位置时，我们可以只考虑每个空闲矩形  $F_i$

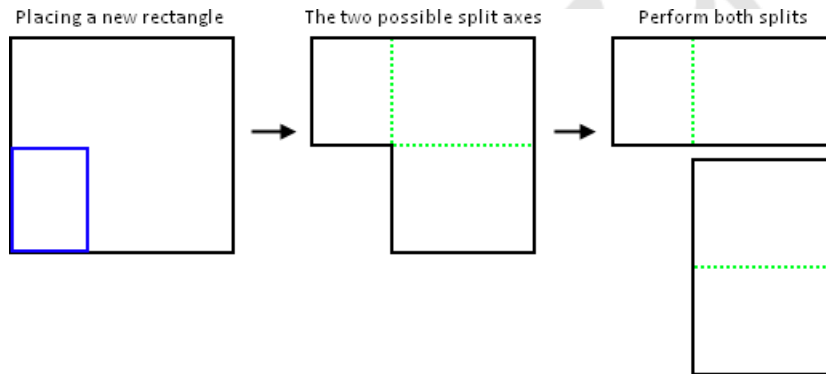


图 4: MAXRECTS 数据结构的矩形放置规则。右边的两个矩形都存储在  $F$  中。

反过来并确保如果矩形适合垃圾箱，我们不会错过有效的位置。

失去自由矩形  $F_i$  成对不相交的属性会在放置矩形时产生问题。这是因为在我们将  $R$  打包成一些  $F_i$  之后，我们必须检查并更新所有其他矩形  $F_j \in F$  对于其中  $R \cap F_j \neq \emptyset$ ，或者我们的数据结构变得不一致。我们的确是这只是通过循环每个自由矩形  $F_j$  并与它相交

使用  $R$ ，生成一组新的自由矩形。在这一步之后，我们可能会在集合  $F$  中留下退化和/或非最大矩形，因此我们再次遍历每个空闲矩形  $F_i \in F$ ，如果存在另一个矩形  $F_j \in F$ ， $i < j$ ，则删除它  $F_i \rightarrow F_j$ 。

---

**算法 3: 最大矩形算法。**

---

初始化:

设置  $F \leftarrow \{(W, H)\}$ 。

盒:

foreach Rectangle  $R(w, h)$  在序列中做

    确定自由矩形  $F_i \in F$  来将矩形  $R$  打包到其中。

    如果没有找到这样的矩形, 用一个新的 bin 重新启动。

    确定矩形的方向并将其放置在

$F_i$  的左下角。用  $B$  表示  $R$  在定位后在 bin 中的边界框。

    使用 MAXRECTS 拆分方案将  $F_i$  细分为  $I$  和  $II$ 。设置  $F \leftarrow F \cup \{I, II\} \setminus \{F_i\}$ 。

    foreach 自由矩形  $F \in F$  do

        计算  $F \setminus B$  并将结果细分为最多四个

        新的矩形  $G_1, \dots, G_4$ 。

        设置  $F \leftarrow F \cup \{G_1, \dots, G_4\} \setminus \{F\}$ 。

    结尾

    foreach 有序的一对自由矩形  $F_i, F_j \in F$  do 如果  $F_i$  包含

$F_j$  那么

        | 设置  $F \leftarrow F \setminus \{F_j\}$

        结束

    结

束 结

束

---

#### 2.4.1 左下角的最大矩形 (MAXRECTS-BL)

与前几节中定义的算法截然不同的变体是所谓的 Bottom-Left 算法或俄罗斯方块算法。该算法使用的启发式规则非常简单: 将每个矩形定位并放置到矩形顶部  $y$  坐标最小的位置, 如果有多个这样的有效位置, 则选择最小的一个  $x$  坐标值。我们可以使用 Maximal Rectangles 数据结构来实现这个算法, 它被称为 Maximal Rectangles Bottom-Left 算法。请参阅 Bernard Chazelle 的论文 [11], 了解该算法的更有效实现。

图 2.4.1 显示了 MAXRECTS-BL 算法生成的示例输出。自由区域内的最大矩形用红色、绿色和蓝色着色, 并为了清晰起见略微缩小。

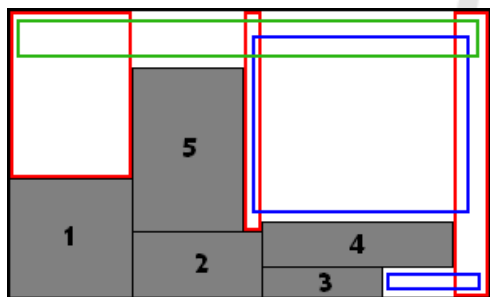


图 5：由 MAXRECTS-BL 算法生成的样本包装。F 的最大矩形以颜色显示。

#### 2.4.2 最大矩形最佳区域拟合 (MAXRECTS-BAF)

在选择最大矩形数据结构中的自由矩形时，我们可以使用与断头台算法相同的启发式规则。在最大矩形最佳区域拟合中，我们选择面积最小的  $F_i \in F$  来放置下一个矩形  $R$ 。如果有平局，我们使用最佳短边适合规则来打破它。

#### 2.4.3 最大矩形最佳短边贴合 (MAXRECTSBSSF)

同样，我们还可以考虑  $R$  和  $F_i$  的边长差异。与 GUILLOTINE-BSSF 一样，Maximal Rectangles Best Short Side Fit 规则选择将  $R$  打包到  $F_i$  中，使得  $\min(w_{F_i} - w, h_{F_i} - h)$  最小。换句话说，我们最小化了较短的剩余边的长度。

#### 2.4.4 最大矩形最佳长边贴合 (MAXRECTS-BLSF)

最大矩形最佳长边拟合规则完全类似。我们将  $R$  打包到  $F_i$  中，使得  $\max(w_{F_i} - w, h_{F_i} - h)$  是最小的。也就是说，我们最小化了较长的剩余边的长度。

#### 2.4.5 MAXRECTS 的效率

分析基于 MAXRECTS 数据结构的算法的效率并不像本节中看到的那样简单。

命题 8. 算法 MAXRECTS-BL、-BAF、-BSSF、-BLSF 可以实现在  $O(IFI^2n)$  时间内运行。它们消耗  $O(IFI)$  空间。

证明。在打包每个矩形并将其与  $F$  的元素相交并生成新的潜在最大矩形集之后，我们遍历  $F$  中的每对元素以从列表中修剪冗余的空闲矩形。这是算法中最耗时的步骤，产生  $O(IFI^2n)$  的时间复杂度。

基于上述，了解  $IFI$  的增长率对于估计这些算法的实际复杂度非常重要。我们不知道关于这个问题的任何先前的结果，但仍然能够解决这个问题。据我们所知，下面给出的结果是原始的，除了  $IFI$  下界的证明，这是对 [12] 发表的类似问题的证明的直接改编。我们先做一些准备工作。

定义直线多边形是仅由水平线和垂直线组成的二维连接的、封闭的、非自相交的多边形。

很明显，在每个打包步骤中， $bin$  的自由空间形成一个或多个直线多边形。这些多边形中的顶点数在  $n$  中呈线性，即我们已打包的矩形数。当自由空间未断开连接而仅形成单个直线多边形时，最坏的情况也会立即发生，称为  $P$ 。用  $p_1, \dots, p_k$  表示这个多边形的顶点。

设  $M$  是  $P$  的最大矩形， $m$  是  $M$  的边。如果  $m$  不接触  $P$  的任何顶点，我们说  $m$  是边支撑的。否则， $P$  的一个或多个顶点接触  $m$ ，我们说  $m$  是顶点支持的。我们可以进行以下观察。

命题 9. 对于每个最大矩形  $M$ ，存在  $M$  的两个相对边，它们都是顶点支持的。

证明。如果  $M$  的所有边都是顶点支撑的，则该陈述自然成立。所以假设  $M$  的边  $m$  是边支撑的。如果与  $m$  相邻的边也是边支撑的，则  $P$  必须自相交，这是不允许的。因此，与  $m$  相邻的两条边都必须是顶点支持的，而且  $M$  的两个相对边也必须是顶点支持的。

□

上述引理为我们提供了一种构造方法，用于根据  $P$  的两个支持顶点以及这些顶点支持最大矩形的水平边还是垂直边的知识来定义  $P$  的任何最大矩形。

命题 10. 三元组  $(p_i, p_j, o)$ ，其中  $p_i$  和  $p_j$  是  $P$  的顶点，而  $o \in \{H, V\}$  是表示选择扩展方向（水平或垂直），唯一构造  $P$  的最大矩形。

证明。将  $p_i(x_i, y_i)$  和  $p_j(x_j, y_j)$  固定为  $P$  的两个顶点。设  $R$  为具有左下角坐标  $(\min(x_i, x_j), \min(y_i, y_j))$  和右上角坐标  $(\max(x_i, x_j), \max(y_i, y_j))$  的矩形。 $R$  不能与  $P$  相交，或者  $p_i$  和  $p_j$  不“兼容”，并且不形成最大矩形。那么，如果  $o = H$ ，则最大矩形的高度为  $|y_i - y_j|$  并且只有一种方法可以扩展  $R$  的左右边以形成最大矩形。等效地，如果  $o = V$ ，则最大矩形的宽度为  $|x_i - x_j|$  并且再次只有一种方法可以扩展  $R$  的顶边和底边以形成最大矩形。

由于每个最大矩形都由上述形式的三元组表征，我们可以给出可以存在的不同最大矩形数量的上限。因此，我们得到了以下结果。

推论 2.1。具有  $n$  个顶点的直线多边形中的最大矩形数最多为  $2n^2$ 。

□

如果边界是松散的，那么具有最大矩形数量的上限就没有那么有用了。下一个结果表明，实际上这个界限是渐近紧的。该证明是对 [12] 中示例的直接改编。

命题 11. 2.1 中给出的上限在最坏情况下是渐近紧的。

证明。我们通过给出一个具有  $n$  个顶点的直线多边形的实例来证明这一点，其中最大矩形的数量与  $n^2$  成正比。

该实例如图 2.4.5 所示。在这个多边形中，存在两个“楼梯”，它们都有许多与  $n$  成直线的角。这些楼梯经过特殊定位（参见辅助虚线），以便多边形左上角的每个角与

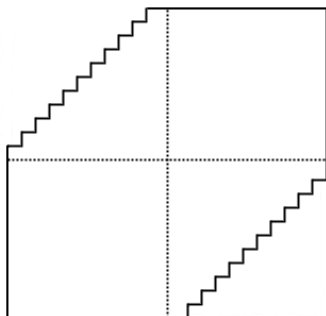


图 6: 产生  $O(n^2)$  个最大矩形的最坏情况配置示例。

左下角的所有角，给出许多与  $n$  平方的最大矩形。

□

结合上面的结果 8 和 2.1, MAXRECTS 算法的时间复杂度为  $O(n^5)$ 。命题 11 表明, 如果我们考虑任意直线多边形, 这个界限是紧的, 但实际上, 在打包过程中形成的多边形表现得更好。在我们的测试中, 我们观察到  $F$  的大小在  $n$  中是线性的, 这表明整个算法的平均时间为  $O(n^3)$  和空间复杂度为  $O(n)$ 。尽管如此, MAXRECTS-BL 变体仍被 Chazelle 出色的  $O(n^2)$  时间和  $O(n)$  空间实现 [11] 击败, 该实现基于通过使用双向链表树来表示空闲空间。

#### 2.4.6 最大矩形接触点 (MAXRECTS-CP)

Lodi、Martello 和 Vigo [5] 描述了一个有趣的变体, 该变体对于已经提出的变体来说是独一无二的。在“最大矩形接触点”中, 我们希望将  $R$  放置到一个位置, 在该位置,  $R$  的周长与 bin 边缘或先前填充的矩形接触的长度最大化。在这个算法中, 我们只考虑了左下角的稳定矩形放置。在 [5] 中, 这种算法被称为 Touching Perimeter 算法。

命题 12. 算法 MAXRECTS-CP 可以实现在  $O(IFI^2n)$  时间和  $8(IFI)$  空间中运行。

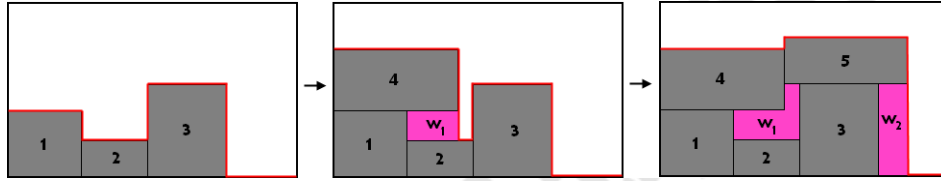


图 7：由 SKYLINE-BL 算法生成的样本包装。

证明。与其他 MAXRECTS-x 算法相比，唯一的问题在于 MAXRECTS-CP 的评分过程，它涉及遍历所有先前打包的矩形的列表。这是对每个要打包的矩形执行的线性步骤。然而，由于剪枝  $F$  的时间复杂度为  $8(|F|)^2$ ，所以相比之下，这个线性步骤所花费的时间可以忽略不计。该算法的空间消耗与 MAXRECTS-x 完全相同。

## 2.5 天际线算法

□

由于最大矩形算法涉及一些繁琐的操作来维护最大自由矩形列表，我们提出了一种简化的数据结构，也可用于实现左下角启发式算法。Skyline 算法中的数据结构是“有损的”，就像 Shelf 算法一样，即它不能完美地跟踪 bin 的空闲区域，并且可能会将一些未使用的空间标记为已使用。作为权衡，Skyline 算法比使用最大矩形数据结构算法生成包装快得多。

Skyline 数据结构的工作方式是它只维护由已经打包的矩形的最顶部边缘形成的地平线或“天际线”边缘的列表。这个列表非常易于管理，并且随着已经打包的矩形数量线性增长。

魏等人。[13]描述了一种非常相似的方法。在他们的方法中，他们称天际线为信封。数据结构基本相同，但它们选择放置位置的规则不同。

### 2.5.1 天际线左下角 (SKYLINE-BL)

Skyline 数据结构允许我们实现与 MAXRECTS-BL 相同的左下角启发式方法，只是为了运行时性能而牺牲了一点打包效率。在天际线左下角，我们打包



矩形  $R$  左对齐在该天际线水平的顶部，导致  $R$  的顶部位于最底部的位置。由于  $R$  可以旋转，因此这可能不是位于最低位置的天际线级别。

### 2.5.2 天际线最适合 (SKYLINE-BF)

由于 Skyline 数据结构容易丢失有关空闲区域的信息，因此我们可以强制作为启发式尝试尽可能减少这种情况的发生。这将产生 Skyline Best Fit 变体。在这个变体中，对于将下一个矩形打包到其中的每个候选位置，我们计算如果矩形被放置在那里将会丢失的 bin 的总面积。然后我们选择最小化这个损失的位置。如果有平局，我们使用左下角规则来决定。

### 2.5.3 废物地图改进 (-WM)

由于计算在孔顶部填充矩形时将丢失的自由矩形非常容易，因此我们可以利用 Guillotine 数据结构来存储该空间并将其用作辅助数据结构。这与 Shelf 算法使用的想法完全相同。

命题 13. 算法 SKYLINE- $x$  和 SKYLINE- $x$ -WM 可以实现在  $O(n^2)$  时间和  $O(n)$  空间中运行。

## 3 一般改进方法

在本节中，我们考虑提高包装性能的方法，而这些方法与我们用于生成包装的实际算法无关。上述所有算法的共同点是它们都可以使用在线输入。他们按照给定的顺序放置所有矩形，并且从不移动已经放置的矩形。做出选择时不涉及回溯或任何类型的搜索。这些限制极大地简化了算法的复杂性以及实现它们所需的工作量。当然，缺点是在最坏的情况下填料的质量可能相当差。在本节中，我们考虑一些可用于大大改善这种情况的技巧。

### 3.1 选择目标箱

我们还没有讨论当矩形不适合单个 bin 并且必须使用多个 bin 时算法如何工作。这些规则与我们在货架算法中挑选目标货架时使用的启发式非常相似。在 Bin Next Fit (-BNF) 中，我们只有一个打开的 bin，矩形被装入其中。当下一个输入矩形不适合该 bin 时，该 bin 将关闭并完全被遗忘，并打开一个新 bin。实际上，我们之前讨论的所有算法都属于 -BNF 类型，因为它们只处理了一个 bin。

在 Bin First Fit (-BFF) 中，我们按照打开的顺序考虑 bin，并将输入矩形打包到它适合的最低索引的 bin 中。当使用 Bin Best Fit (-BBF) 规则时，矩形被打包到 bin 中，该 bin 为算法用来决定可能的放置位置的任何标准提供最佳分数。与货架选择案例类似，人们也可以定义 Bin Worst Fit，但在本次调查中并未实施该变体，因为它被认为是次优的。

命题 14. -BFF 变体为相应的 -BNF 算法的复杂性增加了  $\log n$  的因子。比如 SHELF-FF-BNF 的运行时间是  $O(n \log n)$ ，而 SHELF-FF-BFF 的运行时间是  $O(n \log^2 n)$ 。

证明。由于每个 bin 可以容纳的矩形数量与  $n$  无关，因此打包  $n$  个项目所需的 bin 数量为  $8(n)$ 。就像 SHELF-FF 与 SHELF-NF 一样，我们可以使用二分法（二分搜索）在  $\log n$  时间内找到矩形的目标 bin。

□

在上面的证明中，通过用线性搜索代替二分搜索步骤，我们还得到以下结果。

命题 15. -BBF 变体为相应的 -BNF 算法的复杂性增加了  $n$  倍。比如 SHELF-FF-BNF 的运行时间是  $O(n \log n)$ ，而 SHELF-FF-BBF 的运行时间是  $O(n^2 \log n)$ 。

□

### 3.2 排序输入

提高任何在线打包算法性能的一种简单方法是在生成序列之前根据某个标准简单地对序列进行排序

包装。由于这只是一个预处理步骤，因此不需要对现有的装箱程序进行任何更改，因此非常实用。当然，这只有在我们事先知道整个序列的情况下才能考虑。

我们可以想到几种不同的方法来用作排序例程的比较函数。如果我们有二个矩形  $R_a(w_a, h_a)$  和  $R_b(w_b, h_b)$ ，其中  $w_a < h_a$  和  $w_b < h_b$ ，我们至少可以从以下几个方面进行比较：

1. 按地区排序。  $R_a \text{---} R_b$  如果  $w_a h_a < w_b h_b$ 。这个变体将被称为 -ASCA。我们当然可以颠倒条件以获得变体 -德斯卡。
2. 先按短边排序，然后比较长边。  $R_a \text{---} R_b$  如果  $w_a < w_b$  或如果  $w_a w_b$  和  $h_a < h_b$ 。这些变体将被称为 -ASCSS 和 -DESCSS。
3. 先按长边排序，然后比较短边。  $R_a \text{---} R_b$  如果  $h_a < h_b$  或如果  $h_a h_b$  和  $w_a < w_b$ 。这些变体将被称为 -ASCLS 和 -DESCLS。
4. 按周长排序。  $R_a \text{---} R_b$  如果  $w_a + h_a < w_b + h_b$ 。这些变体将被称为 -ASCPERIM 和 -DESCPERIM。
5. 按边长差异排序。  $R_a \text{---} R_b$  如果  $|w_a - h_a| < |w_b - h_b|$ 。这些变体将被称为 -ASCDIFF 和 -DESCDIFF。
6. 按边长的比例排序。  $R_a \text{---} R_b$  如果  $\frac{w_a}{h_a} < \frac{w_b}{h_b}$  这些变体将被称为 -ASCRATIO 和 -DESCRATIO。

排序步骤需要  $O(n \log n)$  时间。除算法 SHELFNF-BNF 外，排序时间主要由产生实际包装所花费的时间决定，因此总体运行时间不受影响。

### 3.3 全球最佳选择

我们考虑过的大多数变体都有一个可以表示如下的结构。给定输入矩形序列  $R$  中的下一个输入矩形  $R^i$ ，我们有一组选择  $S$  来放置  $R^i$  和一个评分函数  $C : S \times R \text{---} R$  由启发式规则定义变体。然后找到  $S'_{\max_S} C(S, R^i)$  并根据选择  $S'$  打包  $R$ 。集合  $S$  可以解释如下：

1. 对于架子算法,  $S$  是可以有效放置  $R'$  的架子集。
2. 对于 Guillotine 算法,  $S$  是一组自由矩形  $F$  乘以用于定向  $R'$  的两个选择, 它们是有有效放置。我们考虑过甚至扩展  $S$  以涵盖选择分割轴的可能选择, 但这被认为会减慢搜索速度。
3. 对于最大矩形算法,  $S$  是最大矩形的集合乘以用于定向  $R'$  的两个选择, 这些选择是有效的放置。
4. 对于天际线算法,  $S$  是天际线级别的集合乘以作为有效放置的两个定向  $R'$  选择。

这个优化规则有一个自然的扩展, 可以导致更好的包装。不是只搜索集合  $\{(S, R) \mid S \in S\}$  其中  $R$  是固定的, 而是考虑  $R$  的所有元素, 即搜索整个集合

$\{(S, R) \mid S \in S, R \in R\}$ 。然后, 在每个包装步骤, 我们发现  $(S'', R'')$   $\max_{S \in S, R \in R} C(S, R)$  并根据选择  $S''$  打包  $R''$ 。

换句话说, 在每个打包步骤中, 我们遍历每个未打包的矩形和该矩形的每个可能位置, 并计算该特定位置的分数。然后我们选择使我们正在考虑的启发式规则的价值最大化的那个。因为我们不是选择序列中的下一个矩形, 而是在所有剩余的矩形中选择全局最好的一个, 所以我们给这个变体后缀 -GLOBAL。当然, 有了这条规则, 输入矩形序列的顺序不再重要 (如果没有决胜局, 则忽略评分函数中的任何关系), 因此不使用此变体执行排序。

命题 16. -GLOBAL 变体为算法的相应在线版本的复杂性增加了一个线性因素。例如, 算法 SKYLINE-BL 可以实现运行时间为  $O(n^2)$ , 因此变体 SKYLINE-BL-GLOBAL 可以实现运行时间为  $O(n^3)$ 。空间复杂度没有改变。

证明。我们可以这样想这个过程。在每个打包步骤中, 我们并行打包输入序列中仍然存在的所有矩形, 然后将我们的选择固定为打包一个为评分函数提供最佳值的矩形。然后忘记其他平行路径。这些平行路径的数量在  $n$  中当然是线性的, 因此打包单个矩形所做的工作乘以  $n$ , 从而为整体复杂性提供了额外的线性因素。

□

将这些改进应用于前几章的所有算法变体，我们获得了最终的算法列表以供审查。表 6 总结了所有这些。

## 4 综合基准

我们实现了前面部分中介绍的规则变体的大多数可能组合，除了我们明确提到的算法已被省略。我们测试的变体数量总计为 2619 种不同的算法，这个数字太大，无法以单个表格形式呈现。因此，我们首先从每个类别中手工挑选不同的变体来展示结果，然后在最终审查中展示“最佳竞争者”的集合。

由于所有这些算法的核心都包含一个启发式规则，因此对于某些输入，一种算法可能比另一种更好，但对于另一种输入序列，结果却相反。根据我们的测试，这种现象比人们想象的更为普遍，这使得挑选出一种最佳算法几乎是不可能的。尽管如此，我们所描述的一些变体显然不是最理想的，并且不太可能存在这些变体可以显示其“全部潜力”并优于其他算法的输入序列。此外，已经观察到一些算法无论输入什么都能始终产生相对较好的包装，而其他算法似乎对特定输入序列更敏感。

由于这种不稳定性，为了尝试正确估计不同算法的相对性能，我们使用不同的均匀概率分布选择来构建输入序列。以下部分介绍了该方法。

### 4.1 矩形类别和概率分布

首先，我们将矩形的可能边长划分为不同的类别。这些类别如表 3 所示。为了从给定类别生成边长，我们使用随机均匀采样。

然后我们使用这些边长类别组合可能的矩形大小的类别。我们使用的矩形类别如表 4 所示。由于我们对允许旋转矩形的问题变体感兴趣，因此矩形类别列表不包含  $h > w$  的情况。

分类名称	长度分布
小短中 长	$\left[ \frac{1}{4}, \frac{2}{4} \right)$ $\frac{1}{4}B, \frac{2}{4}B,$ $\frac{2}{4}B, \frac{3}{4}B,$ $\frac{3}{4}B,$

表 3：矩形边长相对于箱边 B 的类别。

	微小的	短的	中等的	长
小短	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$
中号		$R_5$	$R_6$	$R_7$
长			$R_8$	$R_9$
				电阻率

表 4：矩形大小的类别 (w、h)。

分配	A	B	C	分配	A	B	C
$D_1$	90%	10%	-	分界线	40%	30%	30%
$D_2$	70%	30%	-	$D_{11}$	60%	-	40%
$D_3$	50%	50%	-	$D_{12}$	40%	20%	40%
$D_4$	80%	10%	10%	$D_{13}$	40%	10%	50%
$D_5$	60%	30%	10%	$D_{14}$	40%	-	60%
$D_6$	80%	-	20%	$D_{15}$	20%	20%	60%
$D_7$	60%	20%	20%	$D_{16}$	20%	10%	70%
$D_8$	40%	40%	20%	$D_{17}$	20%	-	80%
$D_9$	60%	10%	30%	$D_{18}$	-	-	100%

表 5：从类别 A、B 和 C 中选择矩形的分布。

为了生成实际的输入序列，我们需要定义概率分布，根据这些分布，我们从每个类  $R_i$  中选择矩形。...， $R_{10}$ 。由于即使概率被量化，也有很多方法可以做到这一点，我们选择以下方案。我们选择两个矩形类别  $A$  和  $B$ ，让  $C = \{R_1, \dots, R_{10}\} \setminus \{A, B\}$ 。为了生成一个实际的问题实例，我们根据表 5 所示的均匀分布从  $A$ 、 $B$  和  $C$  中绘制矩形。特别说明，如果  $B$  列中的概率标有“-”，则可以理解为我们只选择一个矩形类别  $A$ ，让  $C$  包含所有其余的。我们还通过使用  $S_1100$ 、 $S_2500$  和  $S_31000$  三种不同的输入大小测试了不同输入大小的影响。实际测试实例如下。对于  $(A, R_i)$  的每个组合， $B, R_j, D_k, S_l$ ，我们生成了 20 个随机问题实例，并通过每种算法运行每个实例。有 45 种选择  $A$  和  $B$  的方式，18 种选择分布的方式和 3 种不同的大小类，所以每个算法解决的实例总数为 48600。从结果我们分析了

每种算法的平均和最坏情况性能。

## 4.2 结果

所有运行的结果在附录的表格中给出。在每个问题实例中，算法使用的平均 bin 数除以打包矩形所需的最广为人知的 bin 数。这意味着 1.0 的分数对应于所有其他算法的完美性能，但这并不一定意味着该算法使用了最佳数量的 bin。在每个单元格中，该值对应于平均情况性能，括号中的值显示发生的最差情况性能。

## 4.3 货架算法

任何 Shelf 算法的性能都不足以推荐使用这些算法，除非需要快速的运行时性能。在在线实例中，Shelf 算法在最坏的情况下可以消耗两倍的 bin 数量，平均约为 1.5 倍。在离线情况下，按降序区域排序并同时打包到多个箱中（-BFF）看起来是最好的选择，在平均情况下提供 1.077 性能，但在最坏情况下仍然是最好的 1.571 倍。

#### 4.4 断头台算法

平均而言，矩形合并在所有情况下都被视为改进了结果，因此忽略了没有 -RM 改进的变体的结果。

此外，与最佳拟合规则相比，所有不同的最差拟合规则都表现不佳，因此在离线情况下忽略了最差拟合规则。使用 GUILLOTINE-MINAS-RM-BNF-BAF 算法在在线打包问题中获得了最佳的平均案例性能，平均产生了 1.445 的打包因子。最好的最坏情况性能是使用 GUILLOTINE-LAS-RM-BNF-BSSF 算法获得的，其得分为 1.773。

在离线情况下，Guillotine 算法表现非常好。使用 GUILLOTINE-BSSF-SAS-RM-DESCSS-BFF 算法获得最佳平均和最差情况性能，得分分别为 1.016 和 1.111。

#### 4.5 MAXRECTS 算法

性能最好的算法是 MAXRECTS 变体。在生产在线包装时，MAXRECTS-BSSF-BNF 的得分为 1.408(1.788)。如果允许我们一次打包到多个 bin 中，MAXRECTS-BSSFBBF 的得分为 1.041(1.130)。

在离线包装情况下，MAXRECTS-BSSF-BBF-GLOBAL 算法产生最终最佳包装，得分为 1.005(1.068)。另一个表现非常出色且速度稍快的工具是 MAXRECTSBSSF-BBF-DESCSS，它的得分为 1.009(1.087)。

#### 4.6 天际线算法。

从 SKYLINE 变体获得的结果非常有趣。在在线打包问题中，SKYLINE-BL-WM-BNF 是所有打包程序中最好的，得分为 1.392(1.654)。当装入多个 bin 时，SKYLINE-BL-WM-BFF 的得分为 1.056(1.158)，仅略输给性能最佳的 MAXRECTS 变体。

在离线情况下，性能最好的封隔器是 SKYLINE-MWWM-BFF-DESCSS，得分为 1.013(1.090)。这比最好的离线 GUILLOTINE 变体略好，但不如最好的 MAXRECTS 变体。需要注意的是，SKYLINE 变体的运行时性能比 MAXRECTS 算法要好一些。



## 5 结论和未来工作

结果的总体排行榜在表 21 和 22 中给出。很明显 MAXRECTS 算法表现最好。SKYLINE 算法在一次仅在线对一个 bin (-BNF) 执行打包时表现最佳。GUILLOTINE 变体比 MAXRECTS 算法渐进快, 但性能也稍差。只有在考虑实现简单性时, 才应青睐 SHELF 算法。

该调查仅包括评估不同的直接启发式规则。在文献中, 存在几种基于元启发式 [14] [15]、基于代理的方法 [16] 和迭代搜索 [17] 的求解器。此外, 还出现了展示其他新颖启发式方法的出版物。这些使用了诸如占角动作和塌陷度 [18] [19]、较少灵活性优先 [20] 和最少浪费优先 [13] 等概念。将来, 将这些算法与本次调查中呈现的最佳性能变体进行比较会很有趣。

## 参考文献

- [1] M. R. Garey 和 D. S. Johnson, 计算机与难处理性: NP 完备性理论指南。W.H. 弗里曼, 1979。
- [2] R. M. Karp, “组合问题中的可还原性”, 《计算机计算的复杂性》(R. E. Miller 和 J. W. Thatcher 编辑), 第 85-103 页, Plenum Press, 1972 年。
- [3] N. Bansal 和 M. Sviridenko, “二维装箱的新近似性和不可近似性结果”, 在 SODA 04: 第十五届年度 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集, (美国宾夕法尼亚州费城), 第 196 页-203, 工业与应用数学学会, 2004。
- [4] J. Csirik 和 G. J. Woeginger, “在线打包和覆盖问题”, 1996 年 6 月在线算法研讨会的发展, (英国伦敦), 第 147-177 页, Springer-Verlag, 1998 年。
- [5] A. Lodi, S. Martello 和 D. Vigo, “一类二维装箱问题的启发式和元启发式方法”, INFORMS J. on Computing, 第一卷。11, 没有。4, 第 345-357 页, 1999 年。

- [6] A. Lodi、S. Martello 和 D. Vigo, “二维装箱问题的最新进展”, 离散应用. 数学, 卷. 123, 没有. 1-3, 第 379-396 页, 2002.
- [7] A. Watt 和 F. Policarpo, 3D 游戏, 卷. 2: 动画和高级实时渲染. 美国马萨诸塞州波士顿: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 2003 年.
- [8] J. Scott, “包装光照贴图”. <http://www.blackpawn.com/texts/lightmaps/default.html>.” 网。
- [9] J. Ratcliff, “博主: John Ratcliff 的代码栓剂 - 纹理包装: 用于计算纹理图集的代码片段.” <https://www.bloogger.com/comment.g?blogID=23430315&postID=2174708613887775411>.” 博客, 2009 年 4 月.
- [10] J. Jylanki, “矩形垃圾箱包装.” <http://clb.demon.fi/rectangle-bin-包装>.” 网。
- [11] B. Chazelle, “左下角装箱启发式: 一种有效的实现”, IEEE 计算机交易, 卷. 32, 没有. 8, 第 697-707 页, 1983 年.
- [12] A. Naamad、D. T. Lee 和 W. L. Hsu, “关于最大空矩形问题”, 离散应用数学, 卷. 8, 没有. 3, 第 267 页 - 277, 1984.
- [13] L. Wei、D. Zhang 和 Q. Chen, “用于矩形包装问题的最少浪费的第一个启发式算法”, Comput. 操作. 研究, 卷. 36, 没有. 5, 第 1608-1614 页, 2009 年.
- [14] E. Hopper 和 B. C. H. Turton, “元启发式算法在二维条带包装问题中的应用回顾”, Artif. 英特尔. 牧师, 卷. 16, 没有. 4, 第 257-300 页, 2001 年.
- [15] E. Hopper 和 B. C. H. Turton, “针对 2d 包装问题的元启发式和启发式算法的实证研究”, 欧洲运筹学杂志, 第一卷. 128, 第 34-57 页, 2000 年.
- [16] S. Polyakovsky 和 R. M'Hallah, “基于代理的解决二维断头台装箱问题的方法”, 欧洲运筹学杂志, 第一卷. 192, 第 767-781 页, 2009 年 2 月.

- [17] D. Beltran-Cano、B. Melian-Batista 和 J. M. Moreno-Vega, “通过迭代混合启发式解决矩形包装问题”, 第 673-680 页, 2009 年。
- [18] W. Huang、D. Chen 和 R. Xu, “矩形打包的新启发式算法”, Comput. 操作. 研究, 卷. 34, 没有. 11, 第 3270-3280 页, 2007。
- [19] W. Huang 和 D. Chen, “矩形包装问题的有效启发式算法”, 仿真建模实践与理论, 卷. 15, 第 1356-1365 页, 2007 年 11 月。
- [20] Y. -L. Wu、W. Huang、S. chung Lau、C. K. Wong 和 G. H. Young, “解决矩形堆积问题的有效准人类启发式方法”, 欧洲运筹学杂志, 第一卷. 141, 没有. 2, 第 341 - 358 页, 2002 年。

## 6 附录：总结和结果

算法名称	时间复杂度	空间复杂度	输入
货架-NF-BNF	$O(n)$	$O(1)$	在线的
SHELF-NF-排序-BNF	$8 (n \log n)$	$O(1)$	离线
货架-NF-BFF	$8 (n \log n)$	$O(1)$	在线的
SHELF-NF-排序-BFF	$8 (n \log n)$	$O(1)$	离线
货架-FF-BNF	$0 (n \log n)$	$O(n)$	在线的
SHELF-FF-排序-BNF	$0 (n \log n)$	$O(n)$	离线
货架-FF-BFF	$0 (n \log^2 n)$	$O(n)$	在线的
货架-FF-排序-BFF	$0 (n \log^2 n)$	$O(n)$	离线
货架选择-BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	在线的
货架选择 - 排序 - BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	离线
货架选择 -BFF	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	在线的
货架选择 - 排序 - BFF	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	离线
货架-NF-WM-BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	在线的
<b>SHELF-NF-WM-sort -BNF</b>	$O(n^2)$	$O(n)$	离线
货架-NF-WM-BFF	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	在线的
货架 - Nf - wm 排序 - Bff	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	离线
货架-FF-WM-BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	在线的
货架 - FF - Wm 排序 - Bnf	$O(n^2)$	$O(n)$	离线
货架-FF-WM-BFF	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	在线的
货架 - Ff - wm 排序 - Bff	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	离线
货架选择-WM-BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	在线的
货架选择 - 排序 - WM - BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	离线
货架选择-WM-BFF	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	在线的
货架选择 - 排序 - WM-BFF	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	离线
断头台-rect -split -BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	在线的
断头台-rect -split-sort -BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	离线
断头台-rect -split -BFF	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	在线的
断头台-rect -split-sort -BFF	$0 (n^2 \log n)$	$O(n)$	离线
断头台-rect -split -GLOBAL	$O(n^3)$	$O(n)$	离线
断头台-rect -split -RM-BNF	$O(n^3)$	$O(n)$	在线的
断头台-rect -split -RM-sort -BNF	$O(n^3)$	$O(n)$	离线
断头台-rect -split -RM-BFF	$0 (n^3 \log n)$	$O(n)$	在线的
断头台-rect -split -RM-sort -BFF	$0 (n^3 \log n)$	$O(n)$	离线
断头台-rect -split -RM-GLOBAL	$O(n^4)$	$O(n)$	离线

算法名称	时间复杂度	空间复杂度	输入
马克斯雷茨 - x - bnf	$O(IFI^2n)$	$O(国际)$	在线的
马克斯雷茨 - x - 排序 - Bnf	$O(IFI^2n)$	$O(国际)$	离线
马克斯雷茨 - x - 全球 - Bnf	$O(IFI^2n^2)$	$O(国际)$	离线
马克斯雷茨 - x - 布夫	$O(IFI^2n \log n)$	$O(国际)$	在线的
马克斯雷茨 - x - 排序 - Bff	$O(IFI^2n \log n)$	$O(国际)$	离线
马克斯雷茨 - x - 全球 - Bff	$O(IFI^2n^2 \log n)$	$O(国际)$	离线
马克斯雷茨 - x - Bbf	$O(IFI^2n^2)$	$O(国际)$	在线的
马克斯雷茨 - x - 排序 - Bbf	$O(IFI^2n^2)$	$O(国际)$	离线
马克斯雷茨 - x - 全球 - Bbf	$O(IFI^2n^3)$	$O(国际)$	离线
天际线-x -BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	在线的
天际线 - x - 排序 - Bnf	$O(n^2)$	$O(n)$	离线
天际线-x -BFF	$O(n^2 \log n)$	$O(n)$	在线的
SKYLINE-x -black -BFF	$O(n^2 \log n)$	$O(n)$	离线
天际线-x -全球	$O(n^3)$	$O(n)$	离线
天际线-x-WM-BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	在线的
天际线 - x - 排序 - WM - BNF	$O(n^2)$	$O(n)$	离线
天际线-x-WM-BFF	$O(n^2 \log n)$	$O(n)$	在线的
天际线 - x - 排序 - Wm - bff	$O(n^2 \log n)$	$O(n)$	离线

表 6：调查中考虑的算法类的最终列表。

	-BNF公司	-布夫	-WM-BNF公司	-WM-BFF公司
货架NF	1.53815(2.29835)	1.15465(1.85651)	1.4911(2.01266)	1.07304(1.21877)
货架-FF	1.52317(2.27066)	1.11645(1.71695)	1.4911(2.01266)	1.07304(1.21877)
货架-BWF	1.52382(2.27066)	1.11651(1.71695)	1.49106(2.01266)	1.073(1.21877)
货架-BHF	1.52552(2.27066)	1.11627(1.71695)	1.49106(2.01266)	1.073(1.21877)
货架-BAF	1.52395(2.27066)	1.11632(1.71695)	1.49106(2.01266)	1.073(1.21877)
世界自然基金会	1.52738(2.27066)	1.11644(1.71695)	1.49106(2.01266)	1.073(1.21877)
货架-WAF	1.52718(2.27066)	1.11671(1.71695)	1.49106(2.01266)	1.073(1.21877)

表 7：在线 Shelf 算法在 1000 个矩形实例上的平均和最坏情况结果。

	架子- 法国试验 标准	架子- FF'	架子- 世界羽联	架子- 高频头	架子- 巴夫	架子- 世界自然 基金会	架子- 瓦夫
-德克莱斯-BNF	1.440 (2.033)	1.425 (1.954)	1.425 (1.954)	1.425 (1.960)	1.424 (1.955)	1.429 (1.983)	1.429 (1.979)
-德克斯-英国	1.455 (2.086)	1.445 (2.076)	1.446 (2.076)	1.447 (2.076)	1.447 (2.076)	1.446 (2.076)	1.446 (2.076)
-阿西迪夫 - 布夫	1.462 (2.004)	1.452 (1.950)	1.453 (1.950)	1.454 (1.950)	1.453 (1.950)	1.456 (1.950)	1.455 (1.950)
-德塞佩里姆-本夫	1.464 (2.123)	1.454 (2.033)	1.455 (2.037)	1.455 (2.047)	1.455 (2.037)	1.457 (2.066)	1.456 (2.059)
-德斯卡-英国	1.465 (2.277)	1.455 (2.181)	1.456 (2.198)	1.456 (2.191)	1.456 (2.198)	1.456 (2.198)	1.456 (2.195)
-德克拉蒂奥 - 布夫	1.465 (2.086)	1.456 (2.076)	1.457 (2.076)	1.457 (2.076)	1.457 (2.076)	1.457 (2.076)	1.456 (2.076)
-德塞迪夫 - 布夫	1.474 (2.099)	1.463 (2.043)	1.463 (2.043)	1.465 (2.044)	1.463 (2.043)	1.466 (2.048)	1.466 (2.048)
-阿斯克莱斯 - Bnf	1.471 (2.022)	1.468 (1.988)	1.467 (1.989)	1.467 (1.989)	1.468 (1.989)	1.469 (1.998)	1.469 (1.987)
-阿塞佩里姆-本夫	1.497 (2.143)	1.493 (2.098)	1.493 (2.098)	1.493 (2.098)	1.493 (2.098)	1.493 (2.098)	1.493 (2.098)
-阿斯卡-英国	1.516 (2.383)	1.511 (2.305)	1.511 (2.305)	1.512 (2.327)	1.512 (2.307)	1.512 (2.353)	1.512 (2.354)
-阿克拉蒂奥 - 布夫	1.514 (2.248)	1.513 (2.218)	1.513 (2.218)	1.513 (2.218)	1.513 (2.218)	1.513 (2.219)	1.513 (2.219)
-阿斯克斯-英国	1.515 (2.235)	1.514 (2.217)	1.514 (2.217)	1.515 (2.229)	1.515 (2.229)	1.514 (2.229)	1.514 (2.217)

表 8：离线 SHELF-BNF 变体。

	架子- 法国试验 标准	架子- FF	架子- 世界羽联	架子- 高频头	架子- 巴夫	架子- 世界自然 基金会	架子- 瓦夫
-德斯卡-布夫	1.118 (1.837)	1.077 (1.571)	1.077 (1.571)	1.077 (1.571)	1.077 (1.571)	1.077 (1.571)	1.077 (1.571)
-德塞佩里姆-布夫	1.119 (1.772)	1.081 (1.589)	1.081 (1.589)	1.081 (1.589)	1.081 (1.589)	1.081 (1.589)	1.081 (1.589)
-德克斯-布夫	1.124 (1.758)	1.083 (1.652)	1.083 (1.652)	1.083 (1.652)	1.083 (1.652)	1.083 (1.652)	1.083 (1.652)
-德克拉蒂奥-布夫	1.125 (1.758)	1.085 (1.652)	1.085 (1.652)	1.085 (1.652)	1.085 (1.652)	1.085 (1.652)	1.085 (1.652)
-德克斯-布夫	1.132 (1.806)	1.106 (1.637)	1.106 (1.637)	1.106 (1.637)	1.106 (1.637)	1.107 (1.637)	1.107 (1.637)
-阿西迪夫-布夫	1.152 (1.808)	1.131 (1.672)	1.131 (1.677)	1.131 (1.659)	1.131 (1.677)	1.132 (1.664)	1.132 (1.657)
-阿斯科斯-布夫	1.255 (1.832)	1.254 (1.818)	1.253 (1.818)	1.253 (1.818)	1.253 (1.818)	1.254 (1.813)	1.254 (1.813)
-德西迪夫-布夫	1.278 (1.944)	1.263 (1.885)	1.263 (1.885)	1.264 (1.885)	1.263 (1.885)	1.264 (1.885)	1.264 (1.885)
-阿塞佩里姆-布夫	1.386 (1.975)	1.382 (1.928)	1.382 (1.928)	1.382 (1.928)	1.382 (1.928)	1.382 (1.928)	1.382 (1.928)
-阿斯卡-布夫	1.453 (2.216)	1.446 (2.208)	1.446 (2.182)	1.447 (2.198)	1.446 (2.191)	1.447 (2.208)	1.447 (2.188)
-阿克拉蒂奥-布夫	1.491 (2.166)	1.490 (2.139)	1.490 (2.139)	1.490 (2.152)	1.490 (2.152)	1.490 (2.152)	1.490 (2.139)
-阿斯科斯-布夫	1.498 (2.167)	1.498 (2.155)	1.498 (2.155)	1.498 (2.168)	1.498 (2.168)	1.498 (2.168)	1.498 (2.155)

表 9：离线 SHELF-BFF 变体。



	架子— 法国试验 标准	架子— FF	架子— 世界羽联	架子— 高频头	架子— 巴夫	架子— 世界自然 基金会	架子— 瓦夫
-德克斯-WM-BNF	1.362 (1.653)	1.362 (1.653)	1.362 (1.653)	1.362 (1.653)	1.362 (1.653)	1.362 (1.653)	1.362 (1.653)
-德克斯-WM-BNF	1.398 (1.745)	1.398 (1.745)	1.398 (1.745)	1.398 (1.745)	1.398 (1.745)	1.398 (1.745)	1.398 (1.745)
-德塞佩里姆-WM-BNF	1.400 (1.744)	1.400 (1.744)	1.400 (1.744)	1.400 (1.744)	1.400 (1.744)	1.400 (1.744)	1.400 (1.744)
-德斯卡-WM-BNF	1.403 (1.749)	1.403 (1.749)	1.403 (1.749)	1.403 (1.749)	1.403 (1.749)	1.403 (1.749)	1.403 (1.749)
- 德斯科蒂奥 - Wm - bnf	1.408 (1.737)	1.408 (1.737)	1.408 (1.737)	1.408 (1.737)	1.408 (1.737)	1.408 (1.737)	1.408 (1.737)
-德塞迪夫-WM-BNF	1.414 (1.678)	1.414 (1.678)	1.414 (1.678)	1.414 (1.678)	1.414 (1.678)	1.414 (1.678)	1.414 (1.678)
- 阿西迪夫 - Wm - bnf	1.417 (1.676)	1.417 (1.676)	1.417 (1.676)	1.417 (1.676)	1.417 (1.676)	1.417 (1.676)	1.417 (1.676)
-阿塞佩里姆-WM-BNF	1.442 (1.800)	1.442 (1.800)	1.442 (1.800)	1.442 (1.800)	1.442 (1.800)	1.442 (1.800)	1.442 (1.800)
-阿斯卡-WM-BNF	1.448 (1.860)	1.448 (1.860)	1.448 (1.860)	1.448 (1.860)	1.448 (1.860)	1.448 (1.860)	1.448 (1.860)
- 阿克拉蒂奥 - Wm - bnf	1.455 (2.003)	1.455 (2.003)	1.455 (2.003)	1.455 (2.003)	1.455 (2.003)	1.455 (2.003)	1.455 (2.003)
-阿斯克斯-WM-BNF	1.456 (2.072)	1.456 (2.072)	1.456 (2.072)	1.456 (2.072)	1.456 (2.072)	1.456 (2.072)	1.456 (2.072)
- 阿斯克斯 - Wm - bnf	1.457 (1.964)	1.457 (1.964)	1.457 (1.964)	1.457 (1.964)	1.457 (1.964)	1.457 (1.964)	1.457 (1.964)

表 10：离线 SHELF-WM-BNF 变体。

	架子— 法国试验 标准	架子— FF	架子— 世界羽联	架子— 高频头	架子— 巴夫	架子— 世界自然 基金会	架子— 瓦夫
-德塞佩里姆-WM-Bff	1.040 (1.177)	1.040 (1.177)	1.040 (1.177)	1.040 (1.177)	1.040 (1.177)	1.040 (1.177)	1.040 (1.177)
-德斯卡-WM-Bff	1.042 (1.265)	1.042 (1.265)	1.042 (1.265)	1.042 (1.265)	1.042 (1.265)	1.042 (1.265)	1.042 (1.265)
- 德克斯 - Wm - bff	1.049 (1.248)	1.049 (1.248)	1.049 (1.248)	1.049 (1.248)	1.049 (1.248)	1.049 (1.248)	1.049 (1.248)
- 德斯科蒂奥 - Wm - bff	1.051 (1.251)	1.051 (1.251)	1.051 (1.251)	1.051 (1.251)	1.051 (1.251)	1.051 (1.251)	1.051 (1.251)
- 德克斯 - Wm - bff	1.072 (1.371)	1.072 (1.371)	1.072 (1.371)	1.072 (1.371)	1.072 (1.371)	1.072 (1.371)	1.072 (1.371)
- 阿西迪夫 - Wm - bff	1.105 (1.389)	1.105 (1.389)	1.105 (1.384)	1.105 (1.384)	1.105 (1.384)	1.105 (1.384)	1.105 (1.384)
- 德西迪夫 - Wm - bff	1.194 (1.507)	1.194 (1.507)	1.194 (1.507)	1.194 (1.507)	1.194 (1.507)	1.194 (1.507)	1.194 (1.507)
- 阿斯克 - Wm - bff	1.246 (1.780)	1.246 (1.780)	1.246 (1.788)	1.246 (1.788)	1.246 (1.788)	1.246 (1.788)	1.246 (1.788)
- 阿塞佩里姆 - Wm - bff	1.320 (1.648)	1.320 (1.648)	1.320 (1.648)	1.320 (1.648)	1.320 (1.648)	1.320 (1.648)	1.320 (1.648)
-阿斯卡-WM-Bff	1.364 (1.693)	1.364 (1.693)	1.364 (1.693)	1.364 (1.693)	1.364 (1.693)	1.364 (1.693)	1.364 (1.693)
- 阿斯科拉蒂奥 - Wm - bff	1.401 (1.732)	1.401 (1.732)	1.401 (1.732)	1.401 (1.732)	1.401 (1.732)	1.401 (1.732)	1.401 (1.732)
- 阿克斯 - Wm - bff	1.408 (1.744)	1.408 (1.744)	1.408 (1.744)	1.408 (1.744)	1.408 (1.744)	1.408 (1.744)	1.408 (1.744)

表 11：离线 SHELF-WM-BFF 变体。

	-巴夫	-布尔斯夫	BSSF公司	-瓦夫	-WLSF公司	-WSSF
断头台-米纳斯-RM-BNF	1.445 (2.301)	1.447 (2.132)	1.454 (2.849)	1.511 (2.892)	1.510 (3.385)	1.517 (2.803)
断头台-米纳斯-BNF	1.446 (2.320)	1.449 (2.156)	1.455 (2.859)	1.513 (2.915)	1.512 (3.411)	1.520 (2.864)
断头台-LAS-RM-BNF	1.467 (1.836)	1.473 (2.004)	1.483 (1.773)	1.558 (3.569)	1.561 (2.587)	1.552 (3.636)
断头台-LAS-BNF	1.468 (1.852)	1.474 (2.049)	1.484 (1.783)	1.561 (3.620)	1.564 (2.619)	1.554 (3.696)
断头台-SLAS-RM-BNF	1.468 (2.709)	1.474 (2.765)	1.461 (2.837)	1.544 (3.388)	1.517 (3.386)	1.560 (3.524)
断头台-SLAS-BNF	1.470 (2.727)	1.475 (2.771)	1.462 (2.853)	1.547 (3.416)	1.519 (3.412)	1.563 (3.562)
断头台-SAS-RM-BNF	1.614 (3.433)	1.643 (3.460)	1.594 (3.357)	1.690 (3.519)	1.644 (3.616)	1.739 (3.655)
断头台-SAS-BNF	1.615 (3.451)	1.645 (3.467)	1.596 (3.377)	1.693 (3.537)	1.648 (3.661)	1.743 (3.673)
断头台-LLAS-RM-BNF	1.616 (2.861)	1.634 (2.891)	1.616 (2.791)	1.715 (3.493)	1.676 (3.010)	1.713 (3.536)
断头台-拉拉斯-BNF	1.617 (2.872)	1.635 (2.894)	1.617 (2.801)	1.717 (3.558)	1.678 (3.018)	1.715 (3.588)
断头台-MAXAS-RM-BNF	1.634 (3.060)	1.658 (3.327)	1.623 (2.814)	1.732 (3.249)	1.689 (3.030)	1.751 (3.576)
断头台-MAXAS-BNF	1.635 (3.070)	1.659 (3.330)	1.625 (2.830)	1.735 (3.266)	1.692 (3.037)	1.754 (3.586)

表 12: 在线 GUILLOTINE 变体。

	- 德塞克 SS -BFF	- 德塞克 比率 -布夫	-坠落 -布夫	- 德塞克 佩里姆 -布夫	-全球的	- 德塞克 LS -BFF
断头台-BSSF-SAS-RM	1.016 (1.111)	1.017 (1.111)	1.019 (1.128)	1.021 (1.148)	1.036 (1.142)	1.043 (1.396)
断头台-BAF-SAS-RM	1.017 (1.112)	1.018 (1.112)	1.020 (1.135)	1.022 (1.159)	1.020 (1.135)	1.044 (1.396)
断头台-BSSF-LLAS-RM	1.019 (1.125)	1.019 (1.125)	1.023 (1.144)	1.026 (1.172)	1.035 (1.141)	1.043 (1.396)
断头台-BSSF-MAXAS-RM	1.019 (1.125)	1.020 (1.125)	1.023 (1.144)	1.025 (1.172)	1.035 (1.141)	1.043 (1.396)
断头台-BLSF-SAS-RM	1.019 (1.136)	1.020 (1.136)	1.021 (1.149)	1.023 (1.173)	1.024 (1.164)	1.046 (1.396)
断头台-BAF-LLAS-RM	1.020 (1.125)	1.021 (1.125)	1.025 (1.144)	1.028 (1.172)	1.025 (1.145)	1.048 (1.396)
断头台-BAF-MAXAS-RM	1.021 (1.127)	1.022 (1.127)	1.024 (1.144)	1.027 (1.172)	1.024 (1.145)	1.047 (1.396)
断头台-BLSF-LLAS-RM	1.023 (1.125)	1.024 (1.125)	1.026 (1.151)	1.030 (1.173)	1.032 (1.181)	1.052 (1.396)
断头台-BLSF-MAXAS-RM	1.024 (1.127)	1.025 (1.127)	1.026 (1.151)	1.028 (1.173)	1.030 (1.181)	1.052 (1.396)
断头台-BSSF-SLAS-RM	1.026 (1.155)	1.026 (1.155)	1.023 (1.163)	1.023 (1.160)	1.020 (1.156)	1.046 (1.396)
断头台-BSSF-MINAS-RM	1.027 (1.168)	1.028 (1.168)	1.024 (1.173)	1.025 (1.169)	1.020 (1.156)	1.047 (1.396)
断头台-BSSF-LAS-RM	1.027 (1.311)	1.028 (1.317)	1.031 (1.309)	1.035 (1.329)	1.019 (1.133)	1.048 (1.396)
断头台-BLSF-SLAS-RM	1.029 (1.210)	1.030 (1.215)	1.027 (1.223)	1.027 (1.222)	1.040 (1.330)	1.045 (1.396)
断头台-BAF-SLAS-RM	1.029 (1.215)	1.029 (1.211)	1.027 (1.227)	1.027 (1.222)	1.027 (1.223)	1.045 (1.396)
断头台-BLSF-MINAS-RM	1.037 (1.371)	1.038 (1.370)	1.035 (1.340)	1.036 (1.332)	1.044 (1.412)	1.046 (1.396)
断头台-BAF-MINAS-RM	1.037 (1.372)	1.037 (1.371)	1.034 (1.340)	1.036 (1.332)	1.035 (1.339)	1.046 (1.396)
断头台-BAF-LAS-RM	1.048 (1.479)	1.049 (1.484)	1.050 (1.495)	1.052 (1.484)	1.050 (1.494)	1.051 (1.396)
断头台-BLSF-LAS-RM	1.048 (1.479)	1.049 (1.484)	1.049 (1.495)	1.051 (1.484)	1.049 (1.471)	1.052 (1.396)

表 13：离线 GUILLOTINE 变体。

	-阿西克 差异化 -布夫	- 德塞克 差异化 -布夫	- 阿斯克 斯 -布夫	-阿西克 佩里姆 -布夫	- 口袋 - 布夫	-阿西克 比率 -布夫	- 阿斯克 斯 -布夫
断头台-BSSF-SAS-RM	1.084 (1.344)	1.158 (1.465)	1.222 (1.506)	1.294 (1.567)	1.324 (1.593)	1.385 (1.739)	1.391 (1.739)
断头台-BAF-SAS-RM	1.086 (1.353)	1.161 (1.472)	1.225 (1.509)	1.299 (1.560)	1.333 (1.610)	1.399 (1.769)	1.405 (1.776)
断头台-BSSF-LLAS-RM	1.087 (1.348)	1.161 (1.467)	1.221 (1.497)	1.295 (1.558)	1.336 (1.625)	1.407 (1.776)	1.413 (1.786)
断头台-BSSF-MAXAS-RM	1.086 (1.348)	1.161 (1.468)	1.227 (1.498)	1.298 (1.558)	1.336 (1.612)	1.402 (1.771)	1.408 (1.782)
断头台-BLSF-SAS-RM	1.088 (1.364)	1.164 (1.478)	1.235 (1.522)	1.312 (1.595)	1.341 (1.617)	1.406 (1.776)	1.412 (1.783)
断头台-BAF-LLAS-RM	1.092 (1.371)	1.166 (1.473)	1.230 (1.513)	1.302 (1.560)	1.345 (1.633)	1.420 (1.807)	1.426 (1.819)
断头台-BAF-MAXAS-RM	1.092 (1.372)	1.165 (1.472)	1.236 (1.527)	1.306 (1.560)	1.346 (1.625)	1.414 (1.795)	1.420 (1.806)
断头台-BLSF-LLAS-RM	1.095 (1.388)	1.170 (1.477)	1.239 (1.541)	1.311 (1.605)	1.348 (1.633)	1.424 (1.821)	1.430 (1.831)
断头台-BLSF-MAXAS-RM	1.095 (1.388)	1.169 (1.478)	1.245 (1.533)	1.317 (1.593)	1.349 (1.630)	1.418 (1.803)	1.424 (1.811)
断头台-BSSF-SLAS-RM	1.084 (1.332)	1.161 (1.477)	1.166 (1.571)	1.286 (1.601)	1.308 (1.598)	1.362 (1.695)	1.367 (1.701)
断头台-BSSF-MINAS-RM	1.084 (1.332)	1.165 (1.480)	1.158 (1.565)	1.282 (1.597)	1.307 (1.599)	1.363 (1.696)	1.368 (1.701)
断头台-BSSF-LAS-RM	1.090 (1.428)	1.173 (1.503)	1.160 (1.503)	1.282 (1.599)	1.326 (1.615)	1.387 (1.726)	1.392 (1.732)
断头台-BLSF-SLAS-RM	1.091 (1.340)	1.171 (1.551)	1.171 (1.514)	1.308 (1.636)	1.327 (1.634)	1.378 (1.714)	1.383 (1.719)
断头台-BAF-SLAS-RM	1.090 (1.341)	1.170 (1.548)	1.168 (1.494)	1.304 (1.635)	1.324 (1.638)	1.374 (1.709)	1.379 (1.714)
断头台-BLSF-MINAS-RM	1.095 (1.457)	1.184 (1.660)	1.158 (1.497)	1.306 (1.717)	1.333 (1.731)	1.388 (1.742)	1.393 (1.742)
断头台-BAF-MINAS-RM	1.094 (1.458)	1.184 (1.660)	1.157 (1.490)	1.304 (1.717)	1.331 (1.731)	1.386 (1.742)	1.391 (1.742)
断头台-BAF-LAS-RM	1.106 (1.562)	1.203 (1.697)	1.164 (1.489)	1.315 (1.708)	1.354 (1.736)	1.411 (1.810)	1.416 (1.810)
断头台-BLSF-LAS-RM	1.107 (1.567)	1.203 (1.697)	1.164 (1.499)	1.314 (1.708)	1.353 (1.736)	1.410 (1.810)	1.416 (1.810)

表 14: 离线 GUILLOTINE 变体。

	-BNF公司	-布夫	-BBF公司
马克斯雷茨 - 布斯夫	1.408 (1.788)	1.047 (1.134)	1.041 (1.130)
马克斯雷茨 - 巴夫	1.420 (1.817)	1.047 (1.134)	1.043 (1.132)
马克斯雷茨 - 布尔 斯夫	1.436 (1.708)	1.051 (1.155)	1.052 (1.181)
马克斯雷茨 - Cp	1.411 (1.669)	1.049 (1.142)	1.062 (1.206)
马克斯雷茨 - 布尔	1.388 (1.648)	1.051 (1.157)	1.280 (1.486)

表 15: 在线 MAXRECTS 变体。

	- 德塞克 不锈钢	- 德塞克 比率	-坠落	- 德塞克 佩里姆	-全球的	- 德塞克 LS公司
马克斯雷茨 - 布尔 - 布夫	1.008 (1.091)	1.009 (1.091)	1.013 (1.120)	1.015 (1.125)		1.041 (1.396)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - Bbf	1.009 (1.087)	1.010 (1.087)	1.010 (1.106)	1.012 (1.111)	1.005 (1.068)	1.035 (1.396)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 布夫	1.009 (1.087)	1.010 (1.087)	1.012 (1.106)	1.014 (1.111)		1.040 (1.396)
马克斯雷茨 - Cp - bff	1.009 (1.087)	1.009 (1.087)	1.012 (1.109)	1.014 (1.111)		1.042 (1.396)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 布夫	1.009 (1.088)	1.010 (1.088)	1.012 (1.108)	1.014 (1.111)		1.041 (1.396)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 布夫	1.010 (1.086)	1.011 (1.090)	1.014 (1.102)	1.017 (1.119)		1.045 (1.396)
马克斯雷茨 - 巴夫 - Bbf	1.010 (1.088)	1.010 (1.088)	1.011 (1.107)	1.012 (1.111)	1.010 (1.083)	1.036 (1.396)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - Bbf	1.011 (1.087)	1.012 (1.094)	1.014 (1.103)	1.016 (1.117)	1.011 (1.089)	1.042 (1.396)
马克斯雷茨 - Cp - bbf	1.011 (1.116)	1.012 (1.122)	1.012 (1.100)	1.014 (1.109)	1.012 (1.121)	1.040 (1.395)
马克斯雷茨 - 布尔 - Bbf	1.030 (1.186)	1.031 (1.183)	1.062 (1.161)	1.096 (1.335)	1.480 (1.862)	1.198 (1.592)
马克斯雷茨 - 布尔 - 布夫	1.360 (1.696)	1.360 (1.697)	1.365 (1.692)	1.355 (1.686)	1.343 (1.666)	1.329 (1.585)
马克斯雷茨 - Cp - bnf	1.374 (1.717)	1.375 (1.715)	1.375 (1.697)	1.358 (1.680)	1.010 (1.120)	1.325 (1.577)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - Bnf	1.384 (1.732)	1.385 (1.732)	1.389 (1.729)	1.367 (1.676)	1.005 (1.068)	1.311 (1.556)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 布夫	1.389 (1.737)	1.390 (1.736)	1.398 (1.734)	1.389 (1.790)	1.010 (1.083)	1.316 (1.557)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 布夫	1.390 (1.738)	1.391 (1.739)	1.396 (1.706)	1.397 (1.767)	1.011 (1.089)	1.338 (1.602)

表 16：离线 MAXRECTS 变体。

	-阿西克 差异化	- 德塞克 差异化	- 阿斯克 斯	-阿西克 佩里姆	-阿斯卡	-阿西克 比率	- 阿斯克 斯
马克斯雷茨 - 布尔 - 布夫	1.050 (1.311)	1.152 (1.466)	1.125 (1.483)	1.237 (1.524)	1.290 (1.565)	1.350 (1.694)	1.355 (1.694)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - Bbf	1.043 (1.317)	1.147 (1.456)	1.122 (1.488)	1.235 (1.532)	1.279 (1.554)	1.346 (1.675)	1.351 (1.681)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 布夫	1.052 (1.323)	1.150 (1.456)	1.127 (1.488)	1.239 (1.531)	1.282 (1.554)	1.348 (1.677)	1.353 (1.682)
马克斯雷茨 - Cp - bff	1.051 (1.324)	1.151 (1.460)	1.126 (1.474)	1.236 (1.516)	1.285 (1.547)	1.345 (1.670)	1.350 (1.675)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 布夫	1.052 (1.323)	1.151 (1.465)	1.130 (1.491)	1.243 (1.536)	1.286 (1.571)	1.350 (1.673)	1.355 (1.678)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 布夫	1.056 (1.338)	1.154 (1.459)	1.138 (1.526)	1.249 (1.571)	1.295 (1.581)	1.359 (1.681)	1.364 (1.686)
马克斯雷茨 - 巴夫 - Bbf	1.049 (1.323)	1.150 (1.463)	1.126 (1.490)	1.239 (1.538)	1.284 (1.577)	1.349 (1.673)	1.354 (1.677)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - Bbf	1.055 (1.340)	1.157 (1.463)	1.135 (1.533)	1.245 (1.577)	1.292 (1.581)	1.358 (1.680)	1.363 (1.686)
马克斯雷茨 - Cp - bbf	1.069 (1.410)	1.158 (1.477)	1.161 (1.498)	1.261 (1.642)	1.302 (1.675)	1.353 (1.728)	1.359 (1.728)
马克斯雷茨 - 布尔 - Bbf	1.176 (1.472)	1.322 (1.731)	1.410 (1.920)	1.459 (1.848)	1.462 (1.835)	1.480 (1.868)	1.487 (1.874)
马克斯雷茨 - 布尔 - 布夫	1.363 (1.677)	1.342 (1.691)	1.338 (1.590)	1.352 (1.687)	1.369 (1.694)	1.374 (1.710)	1.373 (1.709)
马克斯雷茨 - Cp - bnf	1.375 (1.686)	1.368 (1.697)	1.337 (1.585)	1.357 (1.685)	1.382 (1.698)	1.392 (1.740)	1.392 (1.744)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - Bnf	1.411 (1.848)	1.374 (1.694)	1.327 (1.565)	1.352 (1.672)	1.397 (1.746)	1.418 (1.775)	1.418 (1.776)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 布夫	1.413 (1.887)	1.379 (1.698)	1.335 (1.569)	1.361 (1.675)	1.408 (1.756)	1.449 (1.912)	1.449 (1.912)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 布夫	1.432 (1.865)	1.392 (1.727)	1.354 (1.608)	1.382 (1.705)	1.407 (1.715)	1.446 (1.871)	1.445 (1.871)

表 17: 离线 MAXRECTS 变体。

	-BNF公司	-布夫
天际线-BL-WM	1.392 (1.654)	1.056 (1.158)
天际线-BL	1.398 (1.658)	1.069 (1.235)
天际线-MW-WM	1.413 (1.659)	1.054 (1.141)
天际线-MW	1.416 (1.751)	1.064 (1.187)

表 18: 在线 SKYLINE 变体。

	天际线-BL-WM-BNF	天际线-MW-WM-BNF
- 德斯克斯	1.329 (1.583)	1.330 (1.586)
- 阿斯克斯	1.337 (1.588)	1.342 (1.596)
- 德塞迪夫	1.344 (1.691)	1.348 (1.689)
- 阿斯佩里姆	1.355 (1.689)	1.362 (1.688)
- 德塞佩里姆	1.358 (1.687)	1.367 (1.683)
- 德克斯	1.361 (1.697)	1.369 (1.705)
- 德斯克拉蒂奥	1.361 (1.698)	1.369 (1.706)
- 坠落	1.369 (1.697)	1.381 (1.698)
- 阿斯卡	1.373 (1.700)	1.389 (1.708)
- 阿西迪夫	1.362 (1.675)	1.390 (1.704)
- 阿斯克斯	1.374 (1.710)	1.407 (1.772)
- 阿斯科拉蒂奥	1.374 (1.710)	1.408 (1.772)

表 19: 离线 SKYLINE-BNF 变体。

	天际线-BL-WM-BFF	天际线-MW-WM-BFF
- 德克斯	1.013 (1.094)	1.013 (1.090)
- 德斯克拉蒂奥	1.013 (1.094)	1.013 (1.090)
- 坠落	1.017 (1.123)	1.017 (1.112)
- 德塞佩里姆	1.019 (1.125)	1.019 (1.111)
- 德斯克斯	1.041 (1.396)	1.041 (1.396)
- 阿西迪夫	1.051 (1.313)	1.054 (1.323)
- 阿斯克斯	1.126 (1.485)	1.127 (1.489)
- 德塞迪夫	1.154 (1.466)	1.154 (1.456)
- 阿斯佩里姆	1.239 (1.530)	1.238 (1.526)
- 阿斯卡	1.294 (1.571)	1.289 (1.568)
- 阿斯科拉蒂奥	1.352 (1.681)	1.352 (1.675)
- 阿斯克斯	1.356 (1.683)	1.357 (1.680)

表 20: 离线 SKYLINE-BFF 变体。



马克斯雷茨 - 布斯夫 - Bbf	1.04063 (1.13026)
马克斯雷茨 - 巴夫 - Bbf	1.04256 (1.13231)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 布夫	1.04669 (1.13411)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 布夫	1.04728 (1.13409)
马克斯雷茨 - Cp - bff	1.04911 (1.142)
马克斯雷茨 - 布尔 - 布夫	1.05065 (1.15721)
马克斯雷茨 - 布尔斯夫 - 布夫	1.05144 (1.15477)
马克斯雷茨 - 布尔斯夫 - Bbf	1.05181 (1.18114)
天际线-MW-WM-BFF	1.05391 (1.14136)
天际线-BL-WM-BFF	1.05569 (1.15824)
马克斯雷茨 - Cp - bff	1.06154 (1.20645)
断头台-BSSF-SAS-RM-BFF	1.06222 (1.15781)
断头台-BSSF-SAS-BFF	1.06273 (1.15781)
断头台-BSSF-SLAS-RM-BFF	1.06275 (1.20376)
断头台-WLSF-SAS-RM-BFF	1.06349 (1.16027)
断头台-BSSF-SLAS-BFF	1.0639 (1.20679)
断头台-WLSF-SLAS-RM-BFF	1.06401 (1.20328)
天际线-MW-BFF	1.06403 (1.18656)
断头台-WLSF-SAS-BFF	1.06408 (1.16039)
断头台-BSSF-MINAS-RM-BFF	1.0642 (1.23088)
断头台-WLSF-SLAS-BFF	1.06509 (1.20681)
断头台-BSSF-MINAS-BFF	1.06529 (1.23549)
断头台-WLSF-MINAS-RM-BFF	1.06532 (1.23439)
断头台-BAF-SAS-RM-BFF	1.06549 (1.17989)
断头台-BAF-SAS-BFF	1.06593 (1.17996)
断头台-WLSF-MINAS-BFF	1.06651 (1.23544)
断头台-WAF-SAS-RM-BFF	1.06654 (1.17853)
断头台-WAF-SAS-BFF	1.06705 (1.17834)
断头台-BLSF-SAS-RM-BFF	1.06725 (1.1804)
断头台-BLSF-SAS-BFF	1.06761 (1.1804)
断头台-BAF-SLAS-RM-BFF	1.06873 (1.30024)
断头台-WSSF-SAS-RM-BFF	1.06882 (1.18171)
断头台-WSSF-SAS-BFF	1.06932 (1.18171)
天际线-BL-BFF	1.06948 (1.23466)
断头台-BSSF-MAXAS-RM-BFF	1.06963 (1.17194)
断头台-BSSF-MAXAS-BFF	1.06984 (1.17162)
断头台-BLSF-SLAS-RM-BFF	1.07008 (1.29906)

表 21：整体在线变体。

马克斯雷茨 - 布斯夫 - 全球 - Bbf	1.00466 (1.06773)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 全球 - Bnf	1.00466 (1.06773)
马克斯雷茨 - 布尔 - 德克斯 - 布夫	1.00849 (1.0909)
马克斯雷茨 - Cp - 德克斯 - 布夫	1.00858 (1.08664)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 德克斯 - Bbf	1.00898 (1.08718)
马克斯雷茨 - 布尔 - 德克拉蒂奥 - 布夫	1.00907 (1.0909)
马克斯雷茨 - Cp - 德克拉蒂奥 - 布夫	1.00912 (1.08664)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 德克斯 - 布夫	1.00922 (1.08699)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 德克斯 - 布夫	1.00949 (1.08754)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 德克拉蒂奥 - Bbf	1.00952 (1.08718)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 德克斯 - Bbf	1.00957 (1.08754)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 德克拉蒂奥 - 布夫	1.0098 (1.08699)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 德克拉蒂奥 - 布夫	1.01006 (1.08754)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 全球 - Bbf	1.01013 (1.08258)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 全球 - Bnf	1.01013 (1.08258)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 德克拉蒂奥 - 布夫	1.01021 (1.08754)
马克斯雷茨 - Cp - 全球 - Bnf	1.01045 (1.1199)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 德斯卡 - Bbf	1.01045 (1.10625)
马克斯雷茨 - 布尔斯夫 - 德克斯 - 布夫	1.01046 (1.08601)
马克斯雷茨 - 布尔斯夫 - 德克斯 - Bbf	1.0107 (1.08674)
马克斯雷茨 - 布尔斯夫 - 德克拉蒂奥 - 布夫	1.0111 (1.09038)
马克斯雷茨 - 布尔斯夫 - 全球 - Bnf	1.01121 (1.08929)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 德斯卡 - bbf	1.01127 (1.10651)
马克斯雷茨 - 布尔斯夫 - 全球 - Bbf	1.01129 (1.08929)
马克斯雷茨 - Cp - 德克斯 - Bbf	1.01138 (1.11591)
马克斯雷茨 - 布尔斯夫 - 德克拉蒂奥 - bbf	1.0115 (1.09397)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 德斯卡 - 布夫	1.01163 (1.10553)
马克斯雷茨 - Cp - 德斯卡 - 布夫	1.01167 (1.10924)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 德斯卡 - 布夫	1.01182 (1.10771)
马克斯雷茨 - Cp - 德克拉蒂奥 - bbf	1.01193 (1.1219)
马克斯雷茨 - Cp - 德斯卡 - Bbf	1.01221 (1.09965)
马克斯雷茨 - 布斯夫 - 德塞佩里姆 - Bbf	1.01237 (1.11109)
马克斯雷茨 - Cp - 全球 - Bbf	1.01243 (1.12094)
马克斯雷茨 - 巴夫 - 德塞佩里姆 - bbf	1.01246 (1.11109)
马克斯雷茨 - 布尔 - 德斯卡 - 布夫	1.01269 (1.12007)
天际线-MW-DESCSS-WM-BFF	1.01281 (1.08979)

表 22: 整体离线变体。