

A slow manifold of your dynamical system

A. J. Roberts, University of Adelaide
<http://orcid.org/0000-0001-8930-1552>

5:28am, June 2, 2023

Generally, the lowest order, most important, terms are near the end of each expression.

Specified dynamical system

$$\dot{u}_1 = \sigma w_1 g_1 + u_2 a_2 - u_1 a_1$$

$$\dot{u}_2 = \sigma w_2 g_2 - \varepsilon u_2 b_2 - u_2 a_2 + u_1 a_1$$

off echo;

Time dependent slow manifold coordinates

$$\begin{aligned} u_1 = & \sigma \varepsilon^2 \left(-e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_1^4 a_2^3 b_2^2 g_2 - \right. \\ & 4e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_1^3 a_2^4 b_2^2 g_2 - \\ & 6e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_1^2 a_2^5 b_2^2 g_2 - \\ & 4e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_1 a_2^6 b_2^2 g_2 - \\ & e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_2^7 b_2^2 g_2 + \\ & e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_1 \ a_1^5 a_2^2 b_2^2 g_1 + \\ & 4e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_1 \ a_1^4 a_2^3 b_2^2 g_1 + \\ & 6e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_1 \ a_1^3 a_2^4 b_2^2 g_1 + \\ & 4e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_1 \ a_1^2 a_2^5 b_2^2 g_1 + \\ & e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_1 \ a_1 a_2^6 b_2^2 g_1 + \\ & 2e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_1^4 a_2^2 b_2^2 g_2 + 5e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_1^3 a_2^3 b_2^2 g_2 + \\ & 3e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_1^2 a_2^4 b_2^2 g_2 - e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_1 a_2^5 b_2^2 g_2 - \\ & e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_2 \ a_2^6 b_2^2 g_2 - e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_1 \ a_1^5 a_2 b_2^2 g_1 - \\ & \left. e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_1 \ a_1^4 a_2^2 b_2^2 g_1 + 3e^{-a_1 - a_2 t} \star e^{-a_1 - a_2 t} \star w_1 \ a_1^3 a_2^3 b_2^2 g_1 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^2 a_2^4 b_2^2 g_1 + 2e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 a_2^5 b_2^2 g_1 - \\
& e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^4 a_2 b_2^2 g_2 + 2e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^3 a_2^2 b_2^2 g_2 + 6e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^2 a_2^3 b_2^2 g_2 + \\
& 2e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1 a_2^4 b_2^2 g_2 - e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_2^5 b_2^2 g_2 - 3e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^4 a_2 b_2^2 g_1 - \\
& 3e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^3 a_2^2 b_2^2 g_1 + 3e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^2 a_2^3 b_2^2 g_1 + \\
& 3e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 a_2^4 b_2^2 g_1) / (a_1^7 + 7a_1^6 a_2 + 21a_1^5 a_2^2 + 35a_1^4 a_2^3 + 35a_1^3 a_2^4 + \\
& 21a_1^2 a_2^5 + 7a_1 a_2^6 + a_2^7) + \sigma \varepsilon (e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1 a_2^2 b_2 g_2 + \\
& e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_2^3 b_2 g_2 - e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^2 a_2 b_2 g_1 - \\
& e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 a_2^2 b_2 g_1 - e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1 a_2 b_2 g_2 + \\
& e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_2^2 b_2 g_2 - 2e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 a_2 b_2 g_1) / (a_1^3 + 3a_1^2 a_2 + 3a_1 a_2^2 + a_2^3) + \\
& \sigma (-e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_2 g_2 + e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 g_1) / (a_1 + a_2) + \varepsilon^2 (s_1 a_1^5 a_2 b_2^2 + \\
& 2s_1 a_1^4 a_2^2 b_2^2 - 2s_1 a_1^3 a_2^3 b_2^2 - s_1 a_1 a_2^5 b_2^2) / (a_1^7 + 7a_1^6 a_2 + 21a_1^5 a_2^2 + 35a_1^4 a_2^3 + 35a_1^3 a_2^4 + \\
& 21a_1^2 a_2^5 + 7a_1 a_2^6 + a_2^7) + (\varepsilon s_1 a_1 a_2 b_2) / (a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2) + O(\varepsilon^2, \sigma^2) + s_1 a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 = & \sigma \varepsilon^2 (e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^4 a_2^3 b_2^2 g_2 + \\
& 4e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^3 a_2^4 b_2^2 g_2 + \\
& 6e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^2 a_2^5 b_2^2 g_2 + \\
& 4e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1 a_2^6 b_2^2 g_2 + \\
& e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_2^7 b_2^2 g_2 - \\
& e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^5 a_2^2 b_2^2 g_1 - \\
& 4e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^4 a_2^3 b_2^2 g_1 - \\
& 6e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^3 a_2^4 b_2^2 g_1 - \\
& 4e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^2 a_2^5 b_2^2 g_1 - \\
& e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 a_2^6 b_2^2 g_1 - \\
& 3e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^4 a_2^2 b_2^2 g_2 - 9e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^3 a_2^3 b_2^2 g_2 - \\
& 9e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^2 a_2^4 b_2^2 g_2 - 3e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1 a_2^5 b_2^2 g_2 + \\
& 2e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^5 a_2 b_2^2 g_1 + 5e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^4 a_2^2 b_2^2 g_1 + \\
& 3e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^3 a_2^3 b_2^2 g_1 - e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^2 a_2^4 b_2^2 g_1 - \\
& e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 a_2^5 b_2^2 g_1 + 3e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^4 a_2 b_2^2 g_2 + \\
& 3e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^3 a_2^2 b_2^2 g_2 - 3e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1^2 a_2^3 b_2^2 g_2 - 3e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1 a_2^4 b_2^2 g_2 - \\
& e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^5 b_2^2 g_1 + 2e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^4 a_2 b_2^2 g_1 + 6e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^3 a_2^2 b_2^2 g_1 + \\
& 2e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^2 a_2^3 b_2^2 g_1 - e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 a_2^4 b_2^2 g_1) / (a_1^7 + 7a_1^6 a_2 + 21a_1^5 a_2^2 + \\
& 35a_1^4 a_2^3 + 35a_1^3 a_2^4 + 21a_1^2 a_2^5 + 7a_1 a_2^6 + a_2^7) + \sigma \varepsilon (- \\
& e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1 a_2^2 b_2 g_2 - e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_2^3 b_2 g_2 + \\
& e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^2 a_2 b_2 g_1 + e^{-a_1-a_2t} \star e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 a_2^2 b_2 g_1 + \\
& 2e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_1 a_2 b_2 g_2 - e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1^2 b_2 g_1 + \\
& e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 a_2 b_2 g_1) / (a_1^3 + 3a_1^2 a_2 + 3a_1 a_2^2 + a_2^3) + \sigma (e^{-a_1-a_2t} \star w_2 a_2 g_2 - \\
& e^{-a_1-a_2t} \star w_1 a_1 g_1) / (a_1 + a_2) + \varepsilon^2 (-s_1 a_1^5 a_2 b_2^2 - 2s_1 a_1^4 a_2^2 b_2^2 + 2s_1 a_1^3 a_2^3 b_2^2 + \\
& s_1 a_1 a_2^5 b_2^2) / (a_1^7 + 7a_1^6 a_2 + 21a_1^5 a_2^2 + 35a_1^4 a_2^3 + 35a_1^3 a_2^4 + 21a_1^2 a_2^5 + 7a_1 a_2^6 + \\
& a_2^7) + (-\varepsilon s_1 a_1 a_2 b_2) / (a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2) + O(\varepsilon^2, \sigma^2) + s_1 a_1
\end{aligned}$$

Result slow manifold DEs

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 = & \sigma\varepsilon^2(-2w_2a_1a_2b_2^2g_2 + w_2a_2^2b_2^2g_2 + w_1a_1^2b_2^2g_1 - 2w_1a_1a_2b_2^2g_1)/(a_1^5 + \\ & 5a_1^4a_2 + 10a_1^3a_2^2 + 10a_1^2a_2^3 + 5a_1a_2^4 + a_2^5) + \sigma\varepsilon(-w_2a_2b_2g_2 + w_1a_1b_2g_1)/(a_1^3 + \\ & 3a_1^2a_2 + 3a_1a_2^2 + a_2^3) + \sigma(w_2g_2 + w_1g_1)/(a_1 + a_2) + (\varepsilon^2s_1a_1a_2b_2^2)/(a_1^3 + \\ & 3a_1^2a_2 + 3a_1a_2^2 + a_2^3) + (-\varepsilon s_1a_1b_2)/(a_1 + a_2) + O(\varepsilon^3, \sigma^3)\end{aligned}$$