

A normal form of your dynamical system

A. J. Roberts, University of Adelaide
<http://orcid.org/0000-0001-8930-1552>

8:29am, October 2, 2021

Generally, the lowest order, most important, terms are near the end of each expression.

Specified dynamical system

$$\dot{x}_1 = y_1 \varepsilon$$

$$\dot{y}_1 = w_1 \sigma - x_1 \omega^2 \varepsilon - y_1$$

off echo;

Time dependent normal form coordinates

$$\begin{aligned} y_1 = & X_1(-1430\omega^{18}\varepsilon^{17} - 429\omega^{16}\varepsilon^{15} - 132\omega^{14}\varepsilon^{13} - 42\omega^{12}\varepsilon^{11} - 14\omega^{10}\varepsilon^9 - \\ & 5\omega^8\varepsilon^7 - 2\omega^6\varepsilon^5 - \omega^4\varepsilon^3 - \omega^2\varepsilon) + Y_1 + \\ & \sigma(e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16}\varepsilon^{16} + \\ & 8e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16}\varepsilon^{16} + \\ & e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14}\varepsilon^{14} + \\ & 36e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16}\varepsilon^{16} + \\ & 7e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14}\varepsilon^{14} + \\ & e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12}\varepsilon^{12} + \\ & 120e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16}\varepsilon^{16} + \\ & 28e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14}\varepsilon^{14} + \\ & 6e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12}\varepsilon^{12} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{10} \varepsilon^{10} + \\
& 330 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{16} + \\
& 84 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{14} + \\
& 21 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12} \varepsilon^{12} + \\
& 5 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{10} \varepsilon^{10} + \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^8 \varepsilon^8 + \\
& 792 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{16} + \\
& 210 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{14} + 56 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12} \varepsilon^{12} + \\
& 15 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{10} \varepsilon^{10} + 4 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^8 \varepsilon^8 + \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^6 \varepsilon^6 + 1716 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{16} + \\
& 462 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{14} + 126 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12} \varepsilon^{12} + \\
& 35 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{10} \varepsilon^{10} + 10 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^8 \varepsilon^8 + \\
& 3 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^6 \varepsilon^6 + e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^4 \varepsilon^4 + \\
& 3432 e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{16} + 924 e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{14} + \\
& 252 e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12} \varepsilon^{12} + 70 e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{10} \varepsilon^{10} + \\
& 20 e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^8 \varepsilon^8 + 6 e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^6 \varepsilon^6 + 2 e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^4 \varepsilon^4 + \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^2 \varepsilon^2 + 6435 e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{16} + 1716 e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{14} + \\
& 462 e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12} \varepsilon^{12} + 126 e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{10} \varepsilon^{10} + 35 e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^8 \varepsilon^8 + \\
& 10 e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^6 \varepsilon^6 + 3 e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^4 \varepsilon^4 + e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^2 \varepsilon^2 + e^{-1t} \star w_1 \quad)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 = & X_1 + Y_1 (-1430 \omega^{16} \varepsilon^{17} - 429 \omega^{14} \varepsilon^{15} - 132 \omega^{12} \varepsilon^{13} - 42 \omega^{10} \varepsilon^{11} - \\
& 14 \omega^8 \varepsilon^9 - 5 \omega^6 \varepsilon^7 - 2 \omega^4 \varepsilon^5 - \omega^2 \varepsilon^3 - \varepsilon) + \sigma (- \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{17} - \\
& 9 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{17} - \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{15} - \\
& 45 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{17} - \\
& 8 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{15} - \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12} \varepsilon^{13} - \\
& 165 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{17} - \\
& 36 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{15} - \\
& 7 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12} \varepsilon^{13} - \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{10} \varepsilon^{11} - \\
& 495 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{17} - \\
& 120 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{15} - \\
& 28 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12} \varepsilon^{13} - \\
& 6 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{10} \varepsilon^{11} - \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^8 \varepsilon^9 - \\
& 1287 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{16} \varepsilon^{17} - \\
& 330 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{14} \varepsilon^{15} - 84 e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \quad \omega^{12} \varepsilon^{13} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 21e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^{10} \varepsilon^{11} - 5e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^8 \varepsilon^9 - \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^6 \varepsilon^7 - 3003e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^{16} \varepsilon^{17} - \\
& 792e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^{14} \varepsilon^{15} - 210e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^{12} \varepsilon^{13} - \\
& 56e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^{10} \varepsilon^{11} - 15e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^8 \varepsilon^9 - \\
& 4e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^6 \varepsilon^7 - e^{-1t} \star e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^4 \varepsilon^5 - \\
& 6435e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^{16} \varepsilon^{17} - 1716e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^{14} \varepsilon^{15} - \\
& 462e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^{12} \varepsilon^{13} - 126e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^{10} \varepsilon^{11} - \\
& 35e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^8 \varepsilon^9 - 10e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^6 \varepsilon^7 - 3e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^4 \varepsilon^5 - \\
& e^{-1t} \star e^{-1t} \star w_1 \omega^2 \varepsilon^3 - 12870e^{-1t} \star w_1 \omega^{16} \varepsilon^{17} - 3432e^{-1t} \star w_1 \omega^{14} \varepsilon^{15} - \\
& 924e^{-1t} \star w_1 \omega^{12} \varepsilon^{13} - 252e^{-1t} \star w_1 \omega^{10} \varepsilon^{11} - 70e^{-1t} \star w_1 \omega^8 \varepsilon^9 - \\
& 20e^{-1t} \star w_1 \omega^6 \varepsilon^7 - 6e^{-1t} \star w_1 \omega^4 \varepsilon^5 - 2e^{-1t} \star w_1 \omega^2 \varepsilon^3 - e^{-1t} \star w_1 \varepsilon)
\end{aligned}$$

Result normal form DEs

$$\dot{Y}_1 = Y_1(1430\omega^{18}\varepsilon^{18} + 429\omega^{16}\varepsilon^{16} + 132\omega^{14}\varepsilon^{14} + 42\omega^{12}\varepsilon^{12} + 14\omega^{10}\varepsilon^{10} + 5\omega^8\varepsilon^8 + 2\omega^6\varepsilon^6 + \omega^4\varepsilon^4 + \omega^2\varepsilon^2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 = & w_1\sigma(12870\omega^{16}\varepsilon^{17} + 3432\omega^{14}\varepsilon^{15} + 924\omega^{12}\varepsilon^{13} + 252\omega^{10}\varepsilon^{11} + \\
& 70\omega^8\varepsilon^9 + 20\omega^6\varepsilon^7 + 6\omega^4\varepsilon^5 + 2\omega^2\varepsilon^3 + \varepsilon) + X_1(-1430\omega^{18}\varepsilon^{18} - 429\omega^{16}\varepsilon^{16} - \\
& 132\omega^{14}\varepsilon^{14} - 42\omega^{12}\varepsilon^{12} - 14\omega^{10}\varepsilon^{10} - 5\omega^8\varepsilon^8 - 2\omega^6\varepsilon^6 - \omega^4\varepsilon^4 - \omega^2\varepsilon^2)
\end{aligned}$$