A slow manifold of your dynamical system

A. J. Roberts, University of Adelaide
http://orcid.org/0000-0001-8930-1552

11:05am, August 9, 2023

Generally, the lowest order, most important, terms are near the end of each expression.

Specified dynamical system

$$\dot{u}_1 = \sigma w_1 + \varepsilon^4 u_2^3 u_1^2 \gamma + \varepsilon^2 \left(-u_2^3 \gamma + u_2^3 \right) - \varepsilon u_1^2$$

$$\dot{u}_2 = -c u_2 + \sigma w_2 - \varepsilon u_2 u_1 + u_1$$

off echo;

Time dependent slow manifold parametrisation

$$u_1 = c^{-3} s_1^3 \sigma \varepsilon^3 \left(-3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right) \gamma + 3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right) \right) + c^{-4} s_1^3 \sigma \varepsilon^3 (3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \right) \gamma - 3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \right) - 3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \gamma + 3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_2)) + c^{-5} s_1^3 \sigma \varepsilon^3 (3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \gamma - 3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_1)) + c^{-3} s_1^2 \sigma \varepsilon^2 (3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \gamma - 3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_2)) + c^{-4} s_1^2 \sigma \varepsilon^2 \left(-3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \gamma + 3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \right) + s_1 + O(\varepsilon^4, \sigma^2)$$

$$u_2 = c^{-6} s_1^4 \varepsilon^3 (2\gamma - 2) + c^{-3} s_1^3 \sigma \varepsilon^3 \left(-\mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right) \right) \gamma + \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right) \right) \right) + c^{-4} s_1^3 \sigma \varepsilon^3 (\mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \right) \right) \gamma - \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \right) \right) - 3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right) \gamma + 3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right)) + c^{-5} s_1^3 \sigma \varepsilon^3 \left(-3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \gamma + 3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right) + c^{-5} s_1^3 \varepsilon^2 (\gamma - 1) + c^{-6} s_1^3 \sigma \varepsilon^3 \left(-5 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \gamma + 5 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \right) + c^{-3} s_1^2 \sigma \varepsilon^2 (3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right) \gamma - 3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right)) + c^{-4} s_1^2 \sigma \varepsilon^2 \left(-3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \right) \gamma + 3 \mathrm{e}^{-ct} \star \left(\mathrm{e}^{-ct} \star (w_1) \right) + 3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \gamma - 3 \mathrm{e}^{-ct} \star (w_2) \right) + c^{-5} s_1^2 \sigma \varepsilon^2 (-$$

$6\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,\gamma + 6\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,) - s_1\sigma\varepsilon\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big) +$
$c^{-1}s_1\sigma\varepsilon\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)+c^{-1}s_1+\sigma\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)+O(\varepsilon^4,\sigma^2)-c^{-1}\sigma\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)$

Result slow manifold DEs

$\dot{s}_1 = c^{-3}s_1^5\varepsilon^4\gamma + c^{-7}s_1^5\varepsilon^4\big(-3\gamma^2+6\gamma-3\big) + 3c^{-3}s_1^4\sigma\varepsilon^4 w_2\gamma -$
$3c^{-4}s_1^4\sigma\varepsilon^4 w_1\gamma + c^{-5}s_1^4\sigma\varepsilon^4\big(-6w_2\gamma+6w_2\big) + c^{-6}s_1^4\sigma\varepsilon^4(6w_1\gamma-6w_1) +$
$c^{-7}s_1^4\sigma\varepsilon^4\big(-18w_2\gamma^2+36w_2\gamma-18w_2\big) + c^{-8}s_1^4\sigma\varepsilon^4(27w_1\gamma^2-54w_1\gamma +$
$27w_1) + 3c^{-2}s_1^3\sigma^2\varepsilon^4\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2\gamma + c^{-3}s_1^3\sigma^2\varepsilon^4\big(-$
$3/2\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_2\gamma + 3/2\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_2 + 9\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1\gamma -$
$3\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2\gamma\big) + c^{-3}s_1^3\varepsilon^2\big(-\gamma+1\big) + c^{-4}s_1^3\sigma^2\varepsilon^4\big(-$
$15/2\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_1\gamma + 15/2\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_1 +$
$3/2\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_2\gamma - 3/2\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_2 - 3/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2\gamma +$
$3/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2 - 9\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1\gamma\big) + c^{-4}s_1^3\sigma\varepsilon^3(3w_2\gamma - 3w_2) +$
$c^{-5}s_1^3\sigma^2\varepsilon^4\big(-9\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_2\gamma^2 + 18\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_2\gamma -$
$9\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_2 + 15/2\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_1\gamma -$
$15/2\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_1 - 45/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1\gamma + 45/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1 +$
$3/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2\gamma - 3/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2\big) + c^{-5}s_1^3\sigma\varepsilon^3\big(-3w_1\gamma+3w_1\big) +$
$c^{-6}s_1^3\sigma^2\varepsilon^4\big(-9\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_1\gamma^2 + 18\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_1\gamma -$
$9\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_1 + 9\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_2\gamma^2 -$
$18\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_2\gamma + 9\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_2 - 24\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2\gamma^2 +$
$48\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2\gamma - 24\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2 + 45/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1\gamma -$
$45/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1\big) + c^{-7}s_1^3\sigma^2\varepsilon^4(9\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_1\gamma^2 -$
$18\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_1\gamma + 9\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_1 - 39\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1\gamma^2 +$
$78\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1\gamma - 39\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1 + 33\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2\gamma^2 -$
$66\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2\gamma + 33\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2) + c^{-8}s_1^3\sigma^2\varepsilon^4(48\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1\gamma^2 -$
$96\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1\gamma + 48\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1) - s_1^2\varepsilon +$
$c^{-2}s_1^2\sigma^2\varepsilon^3(3\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_2\gamma - 3\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_2) +$
$c^{-3}s_1^2\sigma^2\varepsilon^3(3\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_1\gamma - 3\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\big)\,w_1 -$
$3\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_2\gamma + 3\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_2 + 3/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2\gamma -$
$3/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2) + c^{-3}s_1^2\sigma\varepsilon^2\big(-3w_2\gamma+3w_2\big) + c^{-4}s_1^2\sigma^2\varepsilon^3\big(-$
$3\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_1\gamma + 3\mathrm{e}^{-ct}\star\big(\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\big)\,w_1 + 15/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1\gamma -$
$15/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1 - 3/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2\gamma + 3/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2) +$
$c^{-4}s_1^2\sigma\varepsilon^2(3w_1\gamma-3w_1) + c^{-5}s_1^2\sigma^2\varepsilon^3\big(-15/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1\gamma +$
$15/2\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1) + c^{-2}s_1\sigma^2\varepsilon^2\big(-3\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2\gamma + 3\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_2) +$
$c^{-3}s_1\sigma^2\varepsilon^2\big(-3\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1\gamma + 3\mathrm{e}^{-ct}\star(w_2)\,w_1 + 3\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2\gamma -$
$3\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_2) + c^{-4}s_1\sigma^2\varepsilon^2(3\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1\gamma - 3\mathrm{e}^{-ct}\star(w_1)\,w_1) + \sigma w_1 +$

$O(\varepsilon^5, \sigma^3)$