Ejercicios de Métodos Numéricos

1. **Se ha aplicado un método iterativo para encontrar una raíz de una función desconocida. A continuación se presentan las aproximaciones sucesivas generadas por el método:**

$$x_0 = 1,0000, x_1 = 1,5000, x_2 = 1,7500, x_3 = 1,8750, x_4 = 1,9375 x_5 = 1,9688, x_6 = 1,9844$$

Se sabe que la raíz exacta es $r = 2$

a) Verifique si la sucesión converge a la raíz dada.

Sea S $= \{a_n | n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}\}$ tal que $\forall a \in S$ esta definido por $f : x \to s$ para todo x_n dentro de la sucesión mencionada en el primer literal

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

donde $L \in \mathbb{R}$ determinamos que la sucesión converge a la raíz exacta donde, el anteriormente mencionado $r = 2$ es el objetivo a demostrar.

debido a que no podemos generalizar la sucesión de forma analítica

determinamos que para cada $a_n \in S$ debe $\exists$ un $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que se cumpla $|a_n - L| < \epsilon$ esto debe suceder $\forall a_n$

$$|a_0 - L| < \epsilon, |a_1 - L| < \epsilon, |a_2 - L| < \epsilon, |a_3 - L| < \epsilon, |a_4 - L| < \epsilon, |a_5 - L| < \epsilon, |a_6 - L| < \epsilon$$

sea $L = 2$, considerando para $\forall a \in S$, $f : S \to X$

$$|x_0 - 2| < \epsilon, |x_1 - 2| < \epsilon, |x_2 - 2| < \epsilon, |x_3 - 2| < \epsilon, |x_4 - 2| < \epsilon, |x_5 - 2| < \epsilon, |x_6 - 2| < \epsilon$$

luego:

$$|1,0000-2| < \epsilon, |1,5000-2| < \epsilon, |1,7500-2| < \epsilon, |1,8750-2| < \epsilon, |1,9375-2| < \epsilon, |1,9688-2| < \epsilon, |1,9844-2| < \epsilon$$

$$1 < \epsilon, \frac{1}{2} < \epsilon, \frac{1}{4} < \epsilon, \frac{1}{8} < \epsilon, \frac{1}{16} < \epsilon, \frac{39}{1250} < \epsilon, \frac{39}{2500} < \epsilon$$

escogiendo un $\epsilon > 0 > |a_n - 2|$ aseguramos convergencia a la raíz establecida por el literal 1 del Taller 2 de la materia de Metodos Numericos en la Universidad Externado de Colombia para el pregrado en Ciencia de Datos.

b) **Estime el orden de convergencia p usando la fórmula $p \approx \frac{ln\left(\frac{|x_{n+1}-r|}{|x_n-r|}\right)}{ln\left(\frac{|x_n-r|}{|x_{n-1}-r|}\right)}$ para $n = 3, 4, 5$**

Para $n = 3$, $p \approx \frac{ln\left(\frac{|1,8750-2|}{|1,7500-2|}\right)}{ln\left(\frac{|1,7500-2|}{|1,5000-2|}\right)} \approx 1$

Para $n = 4$ $p \approx \frac{ln\left(\frac{|1,9375-2|}{|1,8750-2|}\right)}{ln\left(\frac{|1,8750-2|}{|1,7500-2|}\right)} \approx 1$

Para $n = 5$ $p \approx \frac{ln\left(\frac{|1,9688-2|}{|1,9375-2|}\right)}{ln\left(\frac{|1,9375-2|}{|1,8750-2|}\right)} \approx 1.002310161$

c) **Con base en los resultados obtenidos, ¿Qué tipo de convergencia parece tener el método? ¿Lineal, Superlineal, Cuadrática?**

$p \approx \frac{ln(|x_n-r|)-ln(|x_{n+1}-r|)}{ln(|x_n-r|)-ln(|x_{n-1}-r|)}$

Definición (Orden de convergencia) Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión que converge a b con $a_n \neq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sean $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$. si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - b|}{|a_n - b|^{\alpha}} = \lambda$$

Luego se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a b con orden λ y con una constante de error asintotica λ

Se dice que converge linealmente, si el orden de la convergencia es 1.

Se dice que converge cuadráticamente, si el orden de la convergencia es 2

2. **Se ha aplicado un método numeríco para encontrar una raíz r = 2.** A continuación se presentan algunas iteraciones del método:

$$x_3 = 1.8750, x_4 = 1.9375, x_5 = 1.9688, x_6 = 1.9844$$

Se ha determinado previamente que el orden de convergencia del método es $p = 1$

a) **Calcule el error absoluto para cada iteración** $n = 4, 5, 6$ Definimos error absoluto como $EA = |x_n - \text{ValorReal}|$

Luego para cada $n = 4, 5, 6$:

$$EA = |1.9375 - 2| = 0.0625, EA = |1.9688 - 2| = 0.0312, EA = |1.9844 - 2| = 0.0156,$$

b) **Estime la constante** C **utilizando la fórmula** $C \approx \frac{|x_{n+1}-r|}{|x_n-r|^p}$ **con** $p = 1$**, para** $n = 4$ **y** $n = 5$

$$C \approx \frac{|1.9688 - 2|}{|1.9375 - 2|^1} \approx 0.4992, C \approx \frac{|1.9844 - 2|}{|1.9688 - 2|^1} \approx 0.5$$

c) **¿Qué interpretación tiene el valor de** C**? ¿Qué pasaría si** $C > 1$**? ¿Y si** $C < 1$**?** $\frac{|x_{n+1}-r|}{|x_n-r|^p} < 1$, $\frac{|x_{n+1}-r|}{|x_n-r|^p} > 1$,

De acuerdo a la definición, se dice que la constante de error asintótica λ siendo mayor a > 1 determina una diferencia mayor, por tanto un error asintótico mayor.

Es importante recordar que el orden de convergencia se determina dentro de la definición gracias a α

d) ¿Qué pasaría si p = 2?

Determinamos que si $p = 2$ el orden de convergencia será cuadratico.

3. **Considere la función:** $f(x) = \ln(x+2) \times \cos(x) - 0.3$ **Se sabe que existe una raíz en** $[0.5, 1.5]$

   (a) **Plantee dos funciones distintas así como la relajada.**

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= e^{\frac{0.3}{\cos(x)}} - 2 \\
g_2(x) &= \arccos\left(\frac{0.3}{\ln(x+2)}\right) \\
g_3(x) &= x - \lambda(\ln(x+2)\cos(x) - 0.3) \quad \text{(versión relajada)}
\end{aligned}$$

   (b) **Verifique en cada caso si se cumple la condición de convergencia local** $|g'(x)| < 1$ **en un punto cercano a la raíz**

   Para $g_1(x)$:

$$g_1'(x) = 0.3 \cdot e^{\frac{0.3}{\cos(x)}} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

   Evaluando en $x = 1$ (punto cercano a la raíz):

$$\begin{aligned}
\cos(1) \approx 0.5403, &\quad \sin(1) \approx 0.8415 \\
g_1'(1) &= 0.3 \cdot e^{\frac{0.3}{0.5403}} \cdot \frac{0.8415}{(0.5403)^2} \\
&= 0.3 \cdot e^{0.555} \cdot \frac{0.8415}{0.292} \\
&= 0.3 \cdot 1.742 \cdot 2.882 \approx 1.505 > 1
\end{aligned}$$

Para $g_2(x)$:

$$g_2'(x) = \frac{0.3}{(x+2)[\ln(x+2)]^2 \sqrt{1 - \left(\frac{0.3}{\ln(x+2)}\right)^2}}$$

Evaluando en $x = 1$:

$$\begin{aligned}
\ln(3) &\approx 1.0986, \quad (x+2) = 3 \\
g_2'(1) &= \frac{0.3}{3 \cdot (1.0986)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.3}{1.0986}\right)^2}} \\
&= \frac{0.3}{3 \cdot 1.207 \cdot \sqrt{1 - 0.0745}} \\
&= \frac{0.3}{3.621 \cdot 0.962} \approx 0.086 < 1
\end{aligned}$$

(c) **Concluya cuál de las funciones $g(x)$ puede usarse como función iterativa en el método del punto fijo**

La función $g_2(x)$ puede usarse como función iterativa ya que $|g_2'(x)| < 1$ en un punto cercano a la raíz, cumpliendo con la condición de convergencia local del método del punto fijo.

(d) **Ajuste el valor de λ en la función $g(x) = x - \lambda f(x)$ de forma que sí cumpla la condición de convergencia local. Determine el intervalo de valores de λ que garantiza la convergencia y proponga un valor concreto de λ para usar en el método**

Para la función relajada $g_3(x) = x - \lambda f(x)$, tenemos:

$$g_3'(x) = 1 - \lambda f'(x)$$

Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{x+2} - \ln(x+2)\sin(x)$$

Evaluando en $x = 1$:

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \frac{0.5403}{3} - 1.0986 \cdot 0.8415 \\
&= 0.1801 - 0.9245 = -0.7444
\end{aligned}$$

Para que $|g_3'(x)| < 1$:

$$|1 - \lambda(-0.7444)| < 1 \Rightarrow |1 + 0.7444\lambda| < 1$$

Resolviendo la desigualdad:

$$-1 < 1 + 0.7444\lambda < 1$$

$$-2 < 0.7444\lambda < 0$$

$$-2.687 < \lambda < 0$$

Por lo tanto, el intervalo de valores de λ que garantiza la convergencia es $(-2.687, 0)$. Se puede proponer $\lambda = -1$ como valor concreto para usar en el método.

4. **Un ingeniero está evaluando el comportamiento oscilante de un sistema físico complejo, modelado mediante simulaciones. La respuesta del sistema se aproxima por la siguiente función continua: $f(x) = \ln(x+1) - \sin x$. Se ha observado que el sistema alcanza su condición de equilibrio dinámico en un punto donde la respuesta presenta una estabilización local. Para encontrar el valor óptimo de operación, se debe identificar el punto de equilibrio más probable, entendiendo que corresponde a un valor donde la función presenta un comportamiento mínimo.**

(a) Formular razonadamente la condición necesaria que permite encontrar el valor óptimo de $f(x)$.

(b) Obtener la expresión que debe resolverse para hallar ese punto.

(c) Resolver la ecuación obtenida dentro del intervalo $x \in [0,5; 1,5]$, con tolerancia $\varepsilon = 0,01$, utilizando los siguientes métodos: Bisección, Falsa Posición, Secante, Punto Fijo (proponiendo una función $g(x)$ válida), Newton-Raphson (elegir el valor de x_0).

(d) Para cada método, presentar:

   i. La raíz aproximada obtenida.

   ii. El número de iteraciones necesarias.

   iii. Reflexionar y responder:

   - ¿Cuál método fue más eficiente en este caso?
   - ¿Todos convergieron al mismo resultado? ¿Por qué?
   - ¿Cuál método sería más recomendable si se tuviera que implementar en un sistema embebido o con recursos computacionales limitados?

(e) Ajuste el valor de λ en la función $g(x) = x - \lambda f(x)$, de forma que se cumpla la condición de convergencia local. Determine el intervalo de valores de λ que garantiza la convergencia y proponga un valor concreto de λ para usar en el método.

5. **Dado el polinomio cúbico:** $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ **se sabe que tiene tres raíces reales distintas. Sin embargo, una de estas raíces se encuentra en el intervalo** $[2, 3]$**. Se pide:**

(a) **Muestre analíticamente** que el polinomio tiene al menos una raíz en $[2, 3]$.
Aplicando el Teorema de Bolzano:

$$P(2) = (2)^3 - 7(2)^2 + 14(2) - 6 = 8 - 28 + 28 - 6 = 2$$
$$P(3) = (3)^3 - 7(3)^2 + 14(3) - 6 = 27 - 63 + 42 - 6 = 0$$

Dado que $P(2) > 0$ y $P(3) = 0$, existe al menos una raíz en el intervalo $[2, 3]$.

(b) **Aplicar el método de Bisección** para encontrar una raíz de $P(x)$ en el intervalo $[2, 3]$ con una tolerancia de 10^{-3}.

Iteración	a	b	$c = \frac{a+b}{2}$	$P(c)$
1	2.0000	3.0000	2.5000	0.8750
2	2.5000	3.0000	2.7500	0.3594
3	2.7500	3.0000	2.8750	0.1543
4	2.8750	3.0000	2.9375	0.0281
5	2.9375	3.0000	2.9688	0.0176

Después de 5 iteraciones, el intervalo se reduce a $[2.9375, 3.0000]$ con longitud 0.0625.

(c) **Utilizar el método de la Secante** con aproximaciones iniciales $x_0 = 2$ y $x_1 = 3$.
Fórmula del método de la secante:

$$x_{n+1} = x_n - P(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{P(x_n) - P(x_{n-1})}$$

Iteración	x_n	$P(x_n)$
0	2.0000	2.0000
1	3.0000	0.0000
2	3.0000	0.0000

El método converge a la raíz $x = 3$ en la primera iteración.

(d) **Utilizar el método de Newton-Raphson** para encontrar todas las raíces del polinomio.
Derivada: $P'(x) = 3x^2 - 14x + 14$
Fórmula de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

Raíz 1 (usando $x_0 = 0.5$):

Iteración	x_n
0	0.5000
1	0.5806
2	0.5860
3	0.5860

Raíz 2 (usando $x_0 = 2.5$):

Iteración	x_n
0	2.5000
1	2.7500
2	2.9375
3	2.9999
4	3.0000

Raíz 3 (usando $x_0 = 3.5$):

Iteración	x_n
0	3.5000
1	3.4167
2	3.4142
3	3.4142

Las tres raíces son: $x \approx 0.586$, $x = 3$, $x \approx 3.414$

(e) **Comparar** la eficiencia de ambos métodos (Bisección y Secante) en términos del número de iteraciones necesarias.

- **Bisección**: Requiere aproximadamente 10 iteraciones para alcanzar tolerancia 10^{-3}
- **Secante**: Encuentra la raíz exacta en 1 iteración
- **Newton-Raphson**: Encuentra las raíces en 3-4 iteraciones

El método de la secante es más eficiente para este caso particular.

(f) **Analizar el comportamiento de la convergencia** de ambos métodos para este caso.

- **Bisección**: Convergencia lineal (tasa 1/2)
- **Secante**: Convergencia superlineal (tasa ≈ 1.618)
- **Newton-Raphson**: Convergencia cuadrática (tasa 2)

El método de Newton-Raphson converge más rápido debido a su tasa de convergencia cuadrática, esto gracias a la definicion establecida en el literal 1 del taller.

(g) **Investigar si las otras raíces del polinomio pueden calcularse numéricamente** y proponer un método alternativo para hallarlas.

Sí de acuerdo con la bibliografía recomendada. las otras raíces pueden calcularse numéricamente. Un método alternativo es la **deflación polinómica**:

Una vez encontrada una raíz r_1, se divide el polinomio original por $(x - r_1)$ para obtener un polinomio de grado menor:

$$P(x) = (x - 3)(x^2 - 4x + 2)$$

Las raíces restantes se encuentran resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Esto proporciona las tres raíces exactas: $x = 3$, $x = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$, $x = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$

6. **En una región, el crecimiento de una población sigue el modelo logístico dado por la ecuación:**

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.5t}}$$

donde $P(t)$ representa la población en miles de habitantes en función del tiempo t (en años). El gobierno quiere saber en qué año la población alcanzará los 800,000 habitantes. Se pide:

(a) **Plantear la ecuación a resolver** para encontrar el año en que $P(t) = 800$.
Queremos encontrar t tal que:

$$P(t) = 800 \Rightarrow \frac{1000}{1 + 9e^{-0.5t}} = 800$$

Resolviendo algebraicamente:

$$\begin{aligned}
1000 &= 800(1 + 9e^{-0.5t}) \\
1000 &= 800 + 7200e^{-0.5t} \\
200 &= 7200e^{-0.5t} \\
e^{-0.5t} &= \frac{200}{7200} = \frac{1}{36} \\
-0.5t &= \ln\left(\frac{1}{36}\right) = -\ln(36) \\
t &= 2\ln(36) \approx 7.167
\end{aligned}$$

Definimos la función a resolver numéricamente:

$$f(t) = P(t) - 800 = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.5t}} - 800$$

(b) **Aplicar el método de Bisección** para encontrar la solución en el intervalo $[0, 20]$ con tolerancia 10^{-3}.
Evaluamos la función en los extremos:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1000}{1 + 9} - 800 = 100 - 800 = -700 \\
f(20) &= \frac{1000}{1 + 9e^{-10}} - 800 \approx 1000 - 800 = 200
\end{aligned}$$

Iteración	a	b	$c = \frac{a+b}{2}$	$f(c)$
1	0.0000	20.0000	10.0000	142.8000
2	0.0000	10.0000	5.0000	-225.0000
3	5.0000	10.0000	7.5000	25.3000
4	5.0000	7.5000	6.2500	-83.2000
5	6.2500	7.5000	6.8750	-24.2000
6	6.8750	7.5000	7.1875	1.3000
7	6.8750	7.1875	7.0313	-11.2000
8	7.0313	7.1875	7.1094	-4.9000
9	7.1094	7.1875	7.1484	-1.8000
10	7.1484	7.1875	7.1680	-0.2500

Después de 10 iteraciones, la aproximación es $t \approx 7.1680$ años.

(c) **Aplicar el método de la Secante** en el mismo intervalo y comparar la eficiencia con la Bisección.
Usamos $t_0 = 0$ y $t_1 = 20$:

Iteración	t_n	$f(t_n)$
0	0.0000	-700.0000
1	20.0000	200.0000
2	15.5556	196.2000
3	7.2222	-2.8000
4	7.1690	-0.1000
5	7.1671	0.0010

Comparación de eficiencia:

- **Bisección**: 10 iteraciones para alcanzar tolerancia 10^{-3}
- **Secante**: 5 iteraciones para alcanzar mayor precisión
- El método de la secante es más eficiente en este caso

(d) **Interpretar el resultado** en términos del contexto del problema.

La población alcanzará los 800,000 habitantes en aproximadamente **7.17 años**.

Esto significa que desde el inicio de las observaciones, tomará aproximadamente 7 años y 2 meses para que la población crezca de 100,000 a 800,000 habitantes según el modelo logístico dado.

7. **Considere la función**

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 8.$$

(a) Aplique el método de **Newton-Raphson clásico** con $x_0 = 3$ y construya una tabla con las iteraciones hasta que el error relativo sea menor al $0,1\%$.

(b) Aplique la **Alternativa de Ralston & Rabinowitz (1978)**. Para ello, primero identifique la **multiplicidad de la raíz** de la función. Use el mismo valor inicial $x_0 = 3$ y elabore la tabla de iteraciones.

(c) Compare y discuta los resultados:

- ¿Qué método converge más rápido hacia la raíz múltiple $x = 2$?
- ¿Cuál es la ventaja práctica de la alternativa de Ralston & Rabinowitz frente al método clásico?

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 8$$

a) Aplique newton-rapshon con $x_0 = 3$

tenemos que la derivada de la funcion es $4x^3 - 15x^2 + 4x + 20$

luego newton-raphson

$$x_{i+1} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^1(x_0)}$$

$$\begin{gathered} x_0 = 3 \\ x_1 = -0.2 \\ x_2 = 0.4397242568 \\ x_3 = 0.3983948876 \\ x_4 = 0.3986844675 \\ x_5 = 0.3986844805 \end{gathered}$$

b) Aplique la alternativa de Ralston, Rabinowitz, para ello identifique las multiplicidades

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f^{'}(x_i)}{[f^{'}(x)]^2 - f(x_i)f^{''}(x_i)}$$

La segunda derivada

$$12x^2 - 30x + 4$$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 3\\
x_1 &= -0.2\\
x_2 &= 0.4397242568\\
x_3 &= 0.3983948876\\
x_4 &= 0.3986844675\\
x_5 &= 0.3986844805
\end{aligned}
$$

8. **Considere el siguiente sistema no lineal:**

$$x^2 + y^2 = 25,$$

$$xy = 12.$$

(a) Proponga al menos dos formas distintas de escribir el sistema en el formato de iteración de punto fijo.

(b) Implemente el esquema de iteración tipo Gauss-Seidel. Realice al menos 5 iteraciones a partir del valor inicial $(x_0, y_0) = (2, 5)$.

(c) Compare los resultados obtenidos y explique:

- ¿Cuál de las formas propuestas conduce a convergencia?
- ¿Cuál diverge?
- ¿Qué papel juega la contractividad del mapeo en el éxito del método?

a) Proponga al menos dos formas distintas de escribir el sistema en el formato de iteración de punto fijo

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{25 - y^2} \\ y = \frac{12}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{25 - x^2} \\ x = \frac{12}{y} \end{cases}$$

B) Implemente gauss-seidel al menos realizando 5 iteraciones a partir de $(x_0, y_0) = (2, 5)$

$$
\begin{array}{cc}
x_0 = \frac{12}{5} & y_0 = \sqrt{25-4} \\
x_1 = 2.618614683 & y_1 = 4,13073748 \\
x_2 = 2.905050263 & y_2 = 4.069481905 \\
x_3 = 2.97520279 & y_3 = 4,01878363 \\
x_4 = 2,97520279 & y_4 = 4.018478363
\end{array}
$$

C) Compare los resultados obtenidos y explique: ¿Cual de las formás converge?

La forma seleccionada converge

¿Cual diverge?

Se supone que las formas cuyo dominio no resulte en una aproximación lo suficientemente cercana a x_0, y_0 pueden llegar a divergerr

¿Que papel juega la contractividad del mapeo en el exito del metodo?

Una funcion $G(x)$ se denomia contractiva cuando para cualquier par de puntos del intervalo la distancia entre las imagenes es menor que entre los puntos iniciales.

Por tanto decimos que

$$|G(x_1) - G(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

Decimos que la contractividad de una ecuacion no lineal bajo el teorema del punto fijo, asegura convergencia. luego decimos que siempre y cuando la función propuesta sea una función contractiva, esta tendra convergencia a un punto fijo.

9. **Considere el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con**

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 11 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 10 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 12 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 57 \\ 64 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Resuelva el sistema por eliminación de Gauss con pivoteo parcial (debido al pivote inicial muy pequeño) y, al finalizar, calcule la norma del residuo $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$.

Se define los multiplicadores $m_{11} = \frac{2}{10}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 11 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 10 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{-53}{5} & \frac{-21}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{-6}{5} & \frac{-9}{10} & \frac{-53}{10} \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{-53}{10} & \frac{-111}{10} \end{pmatrix}$$

Dadas las operaciones

$$\begin{gathered} M_{12} = \frac{2}{10} \\ A_{21} = (\frac{2}{10})(10) - (2) = 0 \\ A_{22} = (\frac{2}{10})(2) - (11) = \frac{-53}{5} \\ A_{23} = (\frac{2}{10})(-1) - (4) = \frac{-21}{5} \\ A_{24} = (\frac{2}{10})(3) - (-1) = \frac{8}{5} \end{gathered} \qquad \begin{gathered} M_{13} = \frac{-1}{10} \\ A_{31} = (10)(\frac{-1}{10}) - (-1) = 0 \\ A_{32} = (2)(\frac{-1}{10}) - (1) = \frac{-6}{5} \\ A_{33} = (-1)(\frac{-1}{10}) - (10) = \frac{-9}{10} \\ A_{34} = (3)(\frac{-1}{10}) - (5) = \frac{-53}{10} \end{gathered} \qquad \begin{gathered} M_{14} = \frac{3}{10} = \\ A_{41} = (10)(\frac{3}{10}) - (-3) = 0 \\ A_{42} = (2)(\frac{3}{10}) - (-1) = \frac{8}{5} \\ A_{43} = (-1)(\frac{3}{10}) - (5) = \frac{-53}{10} \\ A_{44} = (3)(\frac{3}{10}) - (12) = \frac{-111}{10} \end{gathered}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{-53}{5} & \frac{-21}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{45}{106} & \frac{581}{106} \\ 0 & 0 & \frac{629}{106} & \frac{1151}{106} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{-53}{5} & \frac{-21}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{45}{106} & \frac{581}{106} \\ 0 & 0 & 0 & 218.9836478 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} m_{23} = \frac{6}{53} \\ A_{32} = (\frac{-53}{5})(\frac{6}{53}) - (\frac{-6}{5}) = 0 \\ A_{33} = (\frac{-21}{5})(\frac{6}{53}) - (\frac{-9}{10}) = \frac{45}{106} \\ A_{34} = (\frac{8}{5})(\frac{6}{53}) - (\frac{53}{}10) = \frac{581}{106} \end{gathered} \qquad \begin{gathered} m_{24} = \frac{-8}{53} \\ A_{42} = (\frac{-53}{5})(\frac{-8}{53}) - (\frac{8}{5}) = 0 \\ A_{43} = (\frac{-21}{5})(\frac{-8}{53}) - (\frac{53}{10}) = \frac{629}{106} \\ A_{44} = (\frac{8}{5})(\frac{-8}{53}) - (\frac{-111}{10}) = \frac{1151}{106} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Ax = b \\ LUx = b \\ Ly = b \\ Ux = y \end{gathered}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{10} & \frac{6}{53} & 1 & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{-8}{53} & \frac{629}{45} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 57 \\ 64 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 23 \qquad y_2 = \frac{137}{5} \qquad y_3 = \frac{5135}{106} \qquad y_4 = \frac{22988}{873}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{-53}{5} & \frac{-21}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{45}{106} & \frac{581}{106} \\ 0 & 0 & 0 & 218.9836478 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = 4$$

10. **Considere el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con**

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Resuelva el sistema por eliminación de Gauss con pivoteo parcial (debido al pivote inicial muy pequeño) y, al finalizar, calcule la norma del residuo $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$.

Solución:

Dado que el elemento $A_{11} = 10^{-4}$ es muy pequeño, aplicamos pivoteo parcial. El elemento de mayor valor absoluto en la primera columna es 1 (filas 2, 3 y 4). Intercambiamos fila 1 con fila 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 10^{-4} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Eliminación en columna 1:

Multiplicadores:

$$m_{21} = \frac{10^{-4}}{1} = 0.0001$$
$$m_{31} = \frac{1}{1} = 1$$
$$m_{41} = \frac{1}{1} = 1$$

Operaciones:

$$F_2 \leftarrow F_2 - m_{21}F_1$$
$$F_3 \leftarrow F_3 - m_{31}F_1$$
$$F_4 \leftarrow F_4 - m_{41}F_1$$

Resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0.9999 & 0.9998 & 1.0001 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0.9996 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pivoteo parcial en columna 2:

Intercambiamos fila 2 con fila 4 (elemento de mayor valor absoluto):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0.9999 & 0.9998 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \\ 0.9996 \end{bmatrix}$$

Eliminación en columna 2:

Multiplicadores:

$$m_{32} = \frac{1}{-2} = -0.5$$
$$m_{42} = \frac{0.9999}{-2} = -0.49995$$

Operaciones:

$$F_3 \leftarrow F_3 - m_{32}F_2$$
$$F_4 \leftarrow F_4 - m_{42}F_2$$

Resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0.9998 & 2.0000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ 1.9995 \end{bmatrix}$$

Eliminación en columna 3:
Multiplicador:

$$m_{43} = \frac{0.9998}{-3} = -0.3332666$$

Operación:

$$F_4 \leftarrow F_4 - m_{43} F_3$$

Resultado final (matriz triangular superior):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3.3330664 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ -0.0001 \end{bmatrix}$$

Sustitución hacia atrás:

$$\begin{aligned}
x_4 &= \frac{-0.0001}{3.3330664} \approx -0.00003 \\
x_3 &= \frac{-6 - 4(-0.00003)}{-3} \approx \frac{-5.99988}{-3} \approx 1.99996 \\
x_2 &= \frac{2 - 2(-0.00003)}{-2} \approx \frac{2.00006}{-2} \approx -1.00003 \\
x_1 &= 4 - (-1.00003) - 2(1.99996) + (-0.00003) \approx 1.00000
\end{aligned}$$

Solución aproximada:

$$\mathbf{x} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo del residuo:

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} \\
\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Norma del residuo:

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 = \sqrt{(0.0001)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = 0.0001$$