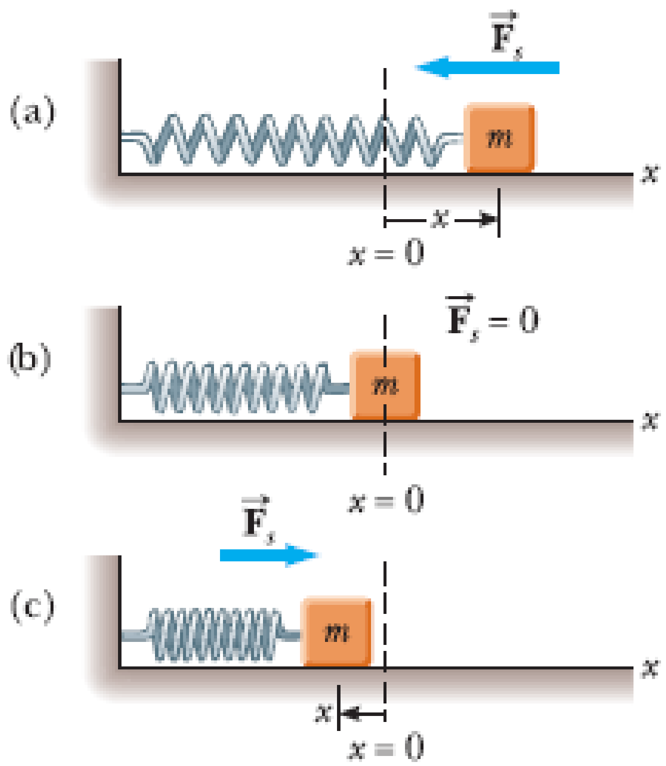
진동과 파동
(oscillation and wave) (ch15 ~ ch18 요약)

1 분석 모형: 단조화 운동을 하는 입자
(Analysis Model: Particle in Simple Harmonic Motion)



뉴턴 법칙: $$F_s = -kx = ma\left(= m\frac{dv}{dt}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x \qquad \left(\omega^2 \equiv \frac{k}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x \equiv \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

이 **2차(2계) 미분방정식**의 일반해는 다음과 같다.

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

이 일반해에서 진폭 A, 위상 상수(처음 위상) ϕ 는 상수이며, 문제에 주어진 조건(주로, 처음 조건)을 만족하는 값들을 구하면 문제 해결.

이 일반해를 두 번 미분하면 미분방정식의 풀이임을 확인할 수 있다.

$$(v_x =)\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$(a_x =)\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

$$\boxed{\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}}$$ (**각진동수**),

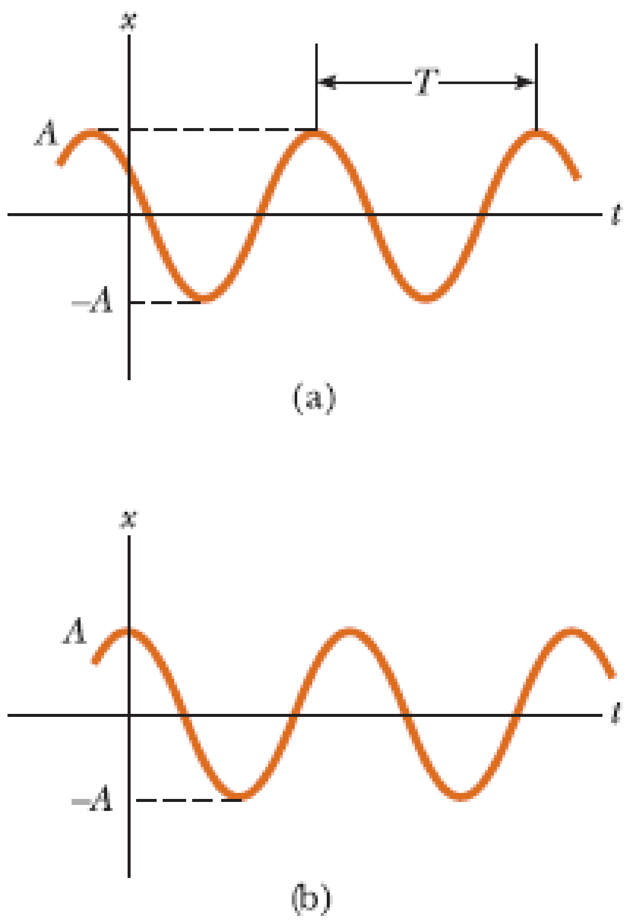
A (**진폭**)

ϕ (**위상 상수**)

이 진동의 주기 T ? (코사인 함수의 주기는 2π)

$$[\omega(t+T)+\phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

⇨ $\omega T = 2\pi$, $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ (**주기**)



$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

(**진동수;** 단위 **Hz 또는 s**$^{-1}$)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

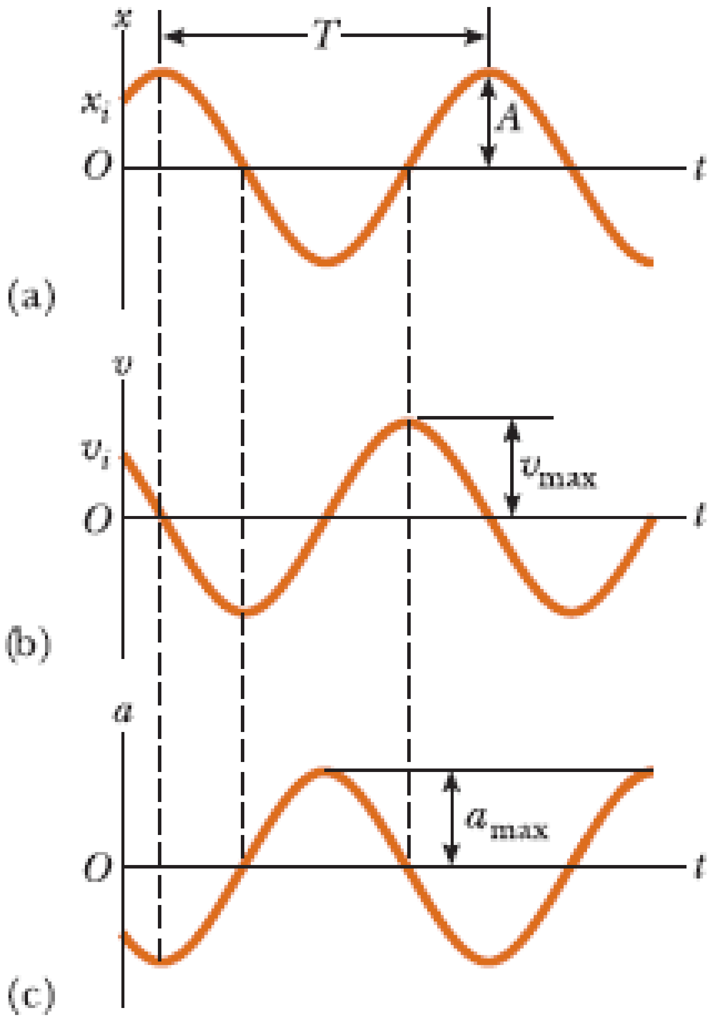
단조화 운동을 하고 있는 입자의 속도, 가속도 그래프

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

($a = -\omega^2 x$: 변위와 180º 위상)



속도와 가속도의 최댓값

$$v_{\max} = \omega A = A\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad a_{\max} = \omega^2 A = A\frac{k}{m} = \frac{F_{\max}}{m}$$

입자를 평형 위치로부터 변위 A만큼 당긴 후 (정지 상태로부터) 운동시킬 때 변위와 속도는? (처음 조건으로 구하기)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$x(0) = A\cos\phi = A$$

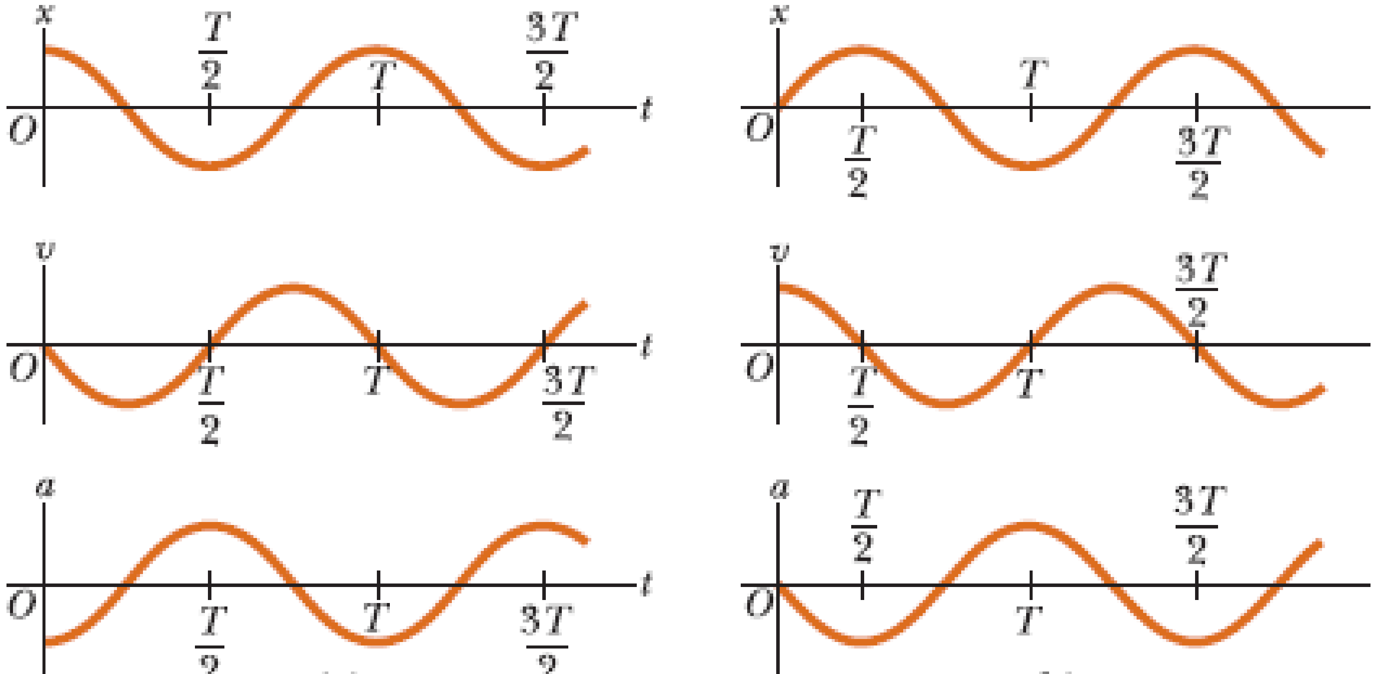
$$v(0) = -\omega A\sin\phi = 0$$

$$\cos\phi = 1,\ \sin\phi = 0$$

$$\therefore \phi = 0$$

$$\boxed{x(t) = A\cos\omega t}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t$$



(a) (b)

2 진자
(The Pendulum)

▶ 단진자(simple pendulum)

각 θ가 작은 경우를 고려하자. 중력의 접선성분이 가장 낮은 평형 위치로 돌아가려는 복원력의 역할을 한다. 구심 방향과 접선 방향의 운동방정식 성분들은,

$$F_c = T - mg\cos\theta = mL\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad [\ a_c = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\ \frac{d\theta}{dt}: \text{각속도},\ \ r = L\ ]$$

$$F_t = -mg\sin\theta = ma_t = m\frac{dv_{(t)}}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2},\ \left(s = L\theta,\ v_{(t)} = L\frac{d\theta}{dt}\right)$$

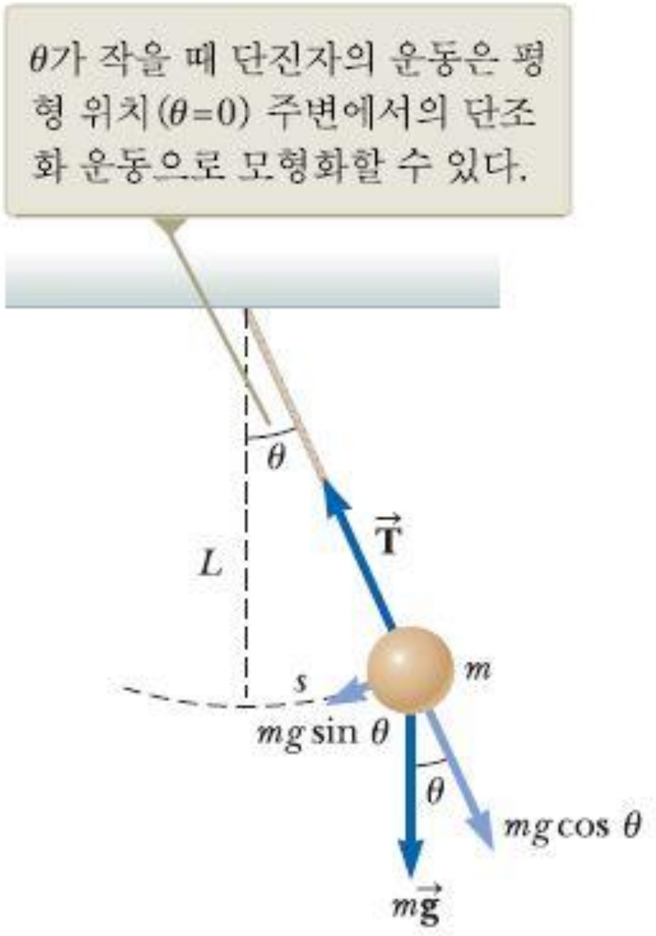
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \approx -\frac{g}{L}\theta,$$ ($\theta \ll 1$: 작은 각 근사)

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \equiv -\omega^2\theta, \qquad \therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$ (각 θ가 작을 때)

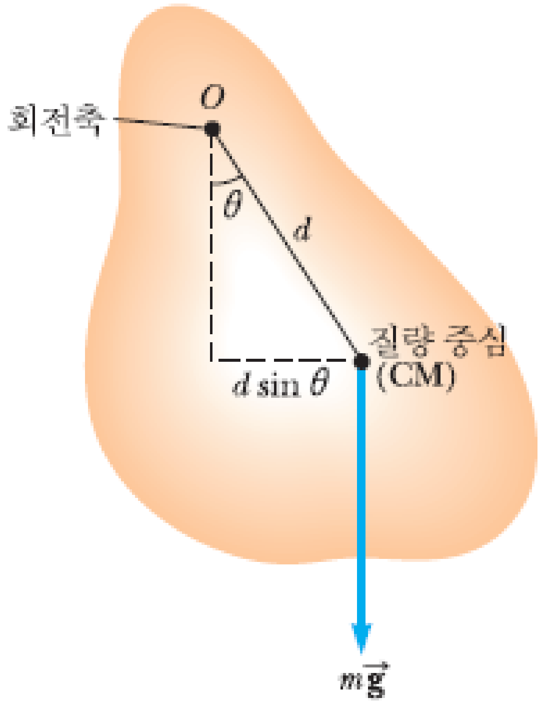
$$\theta = A\cos(\omega t + \phi)$$

Note: 진자의 각진동수 ω는 각속도 $\frac{d\theta}{dt}$와 다름



▶ 물리 진자(Physical Pendulum)

강체가 점 O를 지나는 축에 대해 진동하는 경우를 물리진자라고 한다. 그림에서 O축에 대해 강체에 작용하는 중력에 의한 돌림힘을 고려하자.



$$\tau = -(mg)\underbrace{(d\sin\theta)}_{\text{모멘트 팔}} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}, \qquad (\leftarrow \tau = I\alpha)$$

음(-)의 부호는 O축에 대한 돌림힘이 시계방향 즉, 각 θ를 감소시키는 방향으로 작용함을 나타낸다. (중력에 의한 복원 돌림힘)

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\sin\theta \approx -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta \qquad \text{(작은 } \theta\text{에 대해서)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

▶ 비틀림 진자(Torsional Pendulum)

강체가 어떤 작은 각 θ로 비틀릴 때 비틀린 철사는 각변위에 비례하는 복원 돌림힘을 강체에 작용한다

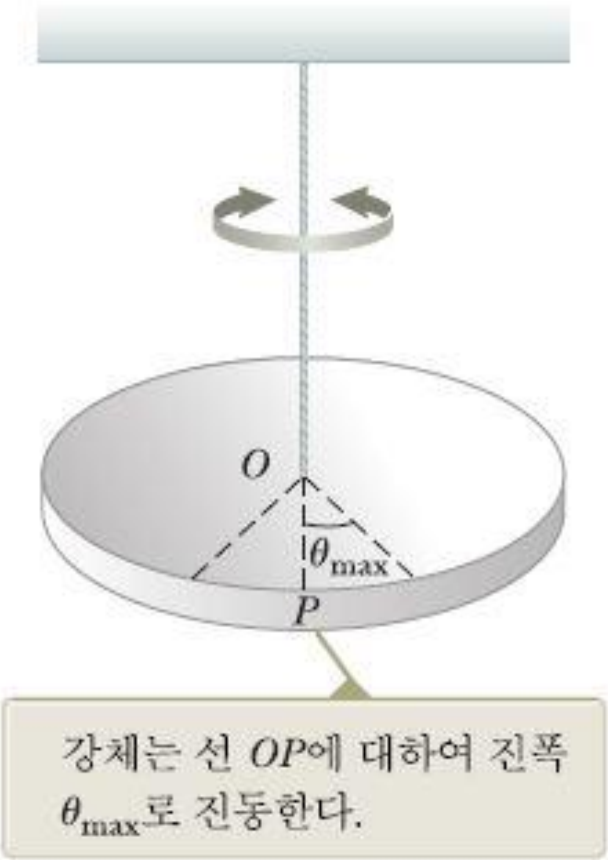
$$\tau = -\kappa\theta \qquad (\kappa\text{: 비틀림 상수})$$

$$\tau = -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta = -\omega^2\theta$$

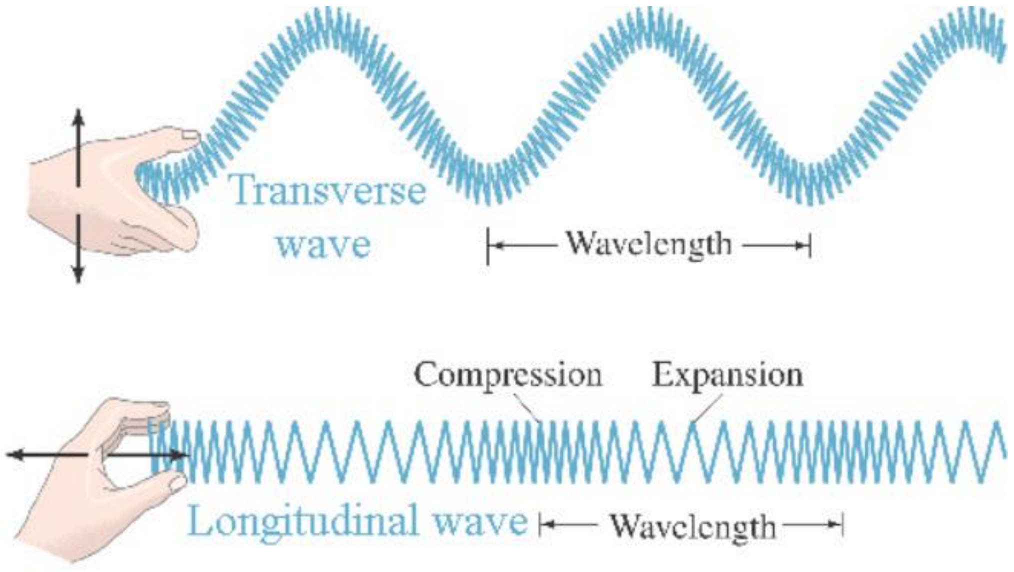
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$



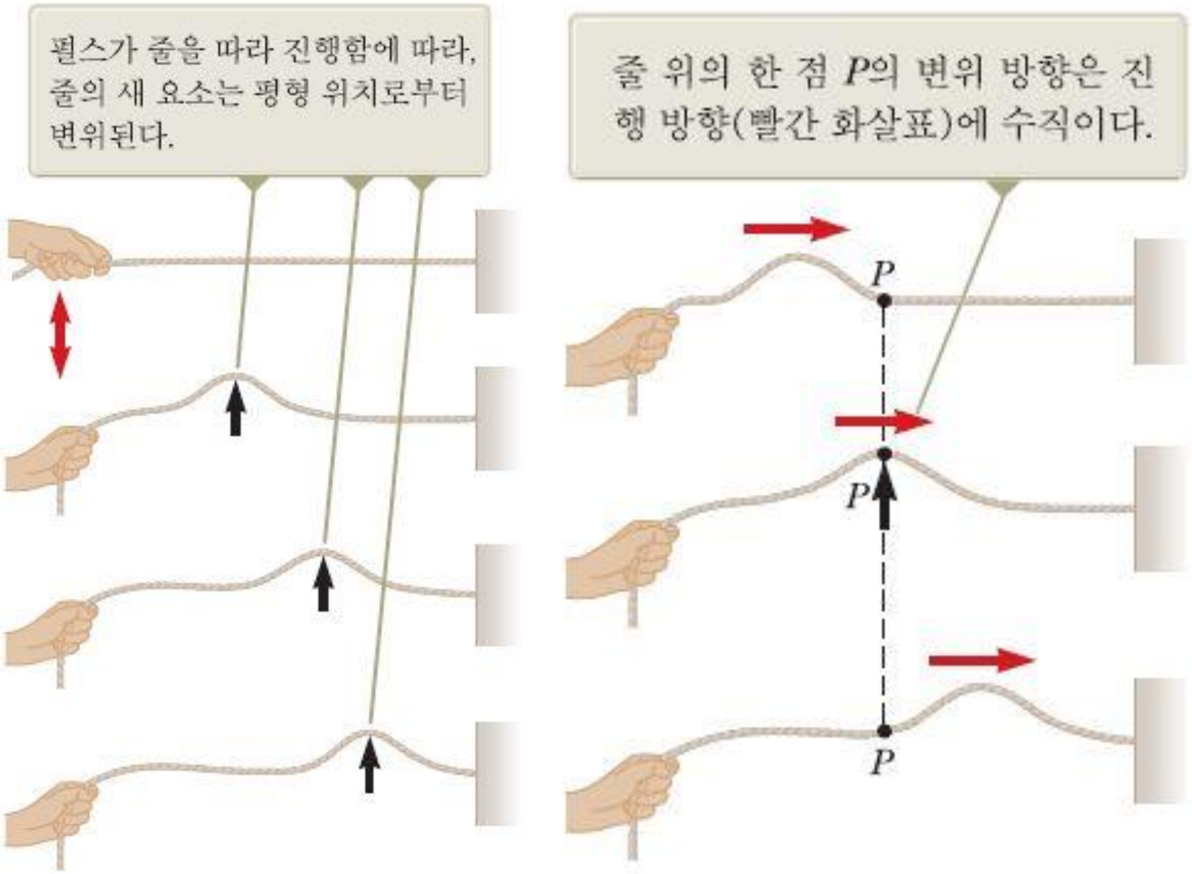
파동이란?

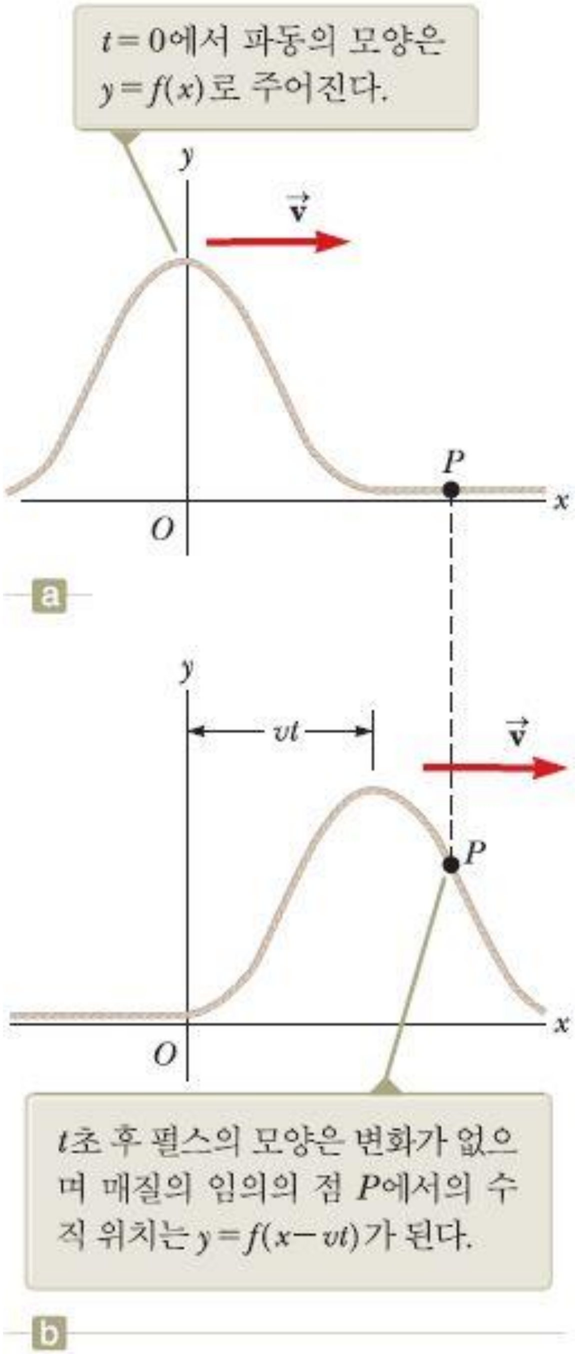
- 매질이 있는 경우: 매질의 어느 한 부위에 생긴 교란(disturbance)이 퍼져 나가는 현상
- 에너지의 전달이 일어난다.
- 매질 요소(유체에서 배운 입자; 분자, 원자가 아니고 많은 수의 분자들로 이루어짐)의 질량중심의 이동은 없다.
- 진공에서도 퍼져 나갈 수 있는 전자기파는 2학기에 공부함. 그런데 역학에서 배운 파동의 성질과 수학적인 방법은 전자기학에서도 다르지 않다.



3 파동의 전파
(Propagation of a Disturbance)

횡파(transverse wave): 매질 요소들이 파동의 진행 방향과 수직인 방향으로 움직이는 파동
종파(longitudinal wave): 매질 요소들이 파동의 운동 방향과 같은 방향으로 움직이는 파동





$$y(x,0) = f(x)$$

파동의 형태가 변하지 않는다고 가정하면,

$$y(x,t) = y(x - vt, 0)$$

(파동함수: wave function)

$v > 0$이라 둘 때

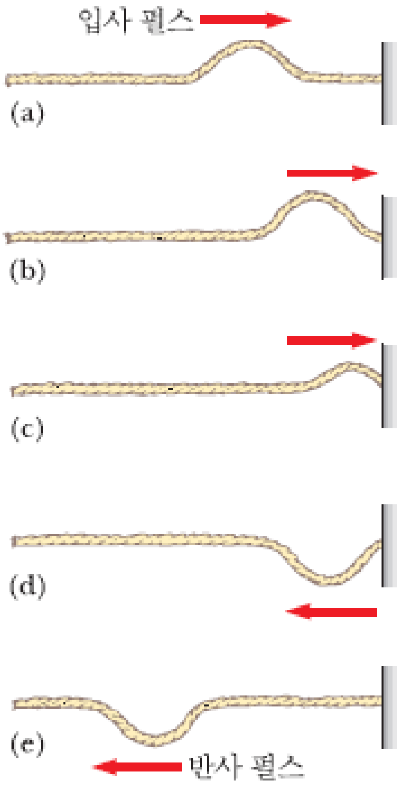
오른쪽으로 진행하는 펄스▶ $y(x,t) = f(x - vt)$

왼쪽으로 진행하는 펄스▶ $y(x,t) = f(x + vt)$

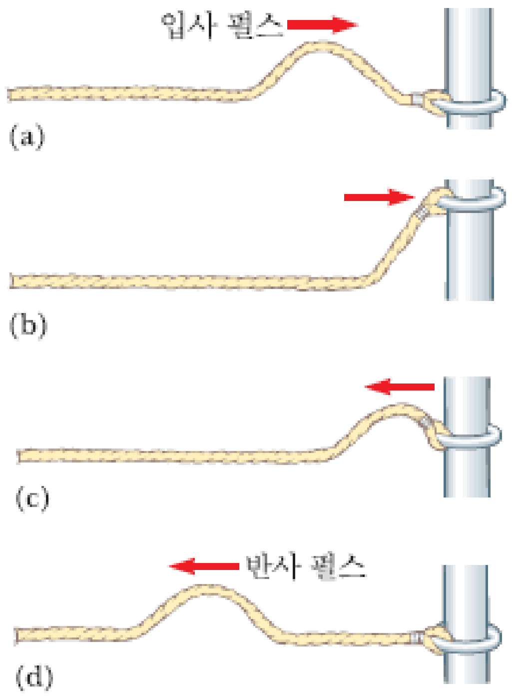
반사와 투과
(Reflection and Transmission)

진행파가 경계면에 도달하면, 파동의 일부 또는 전부가 반사된다.

줄의 경우 끝의 형태에 따라 다르다.

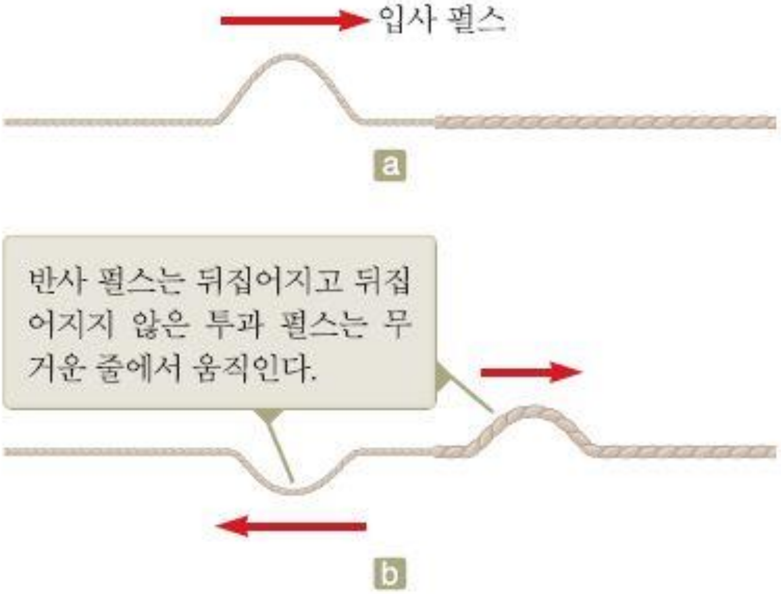


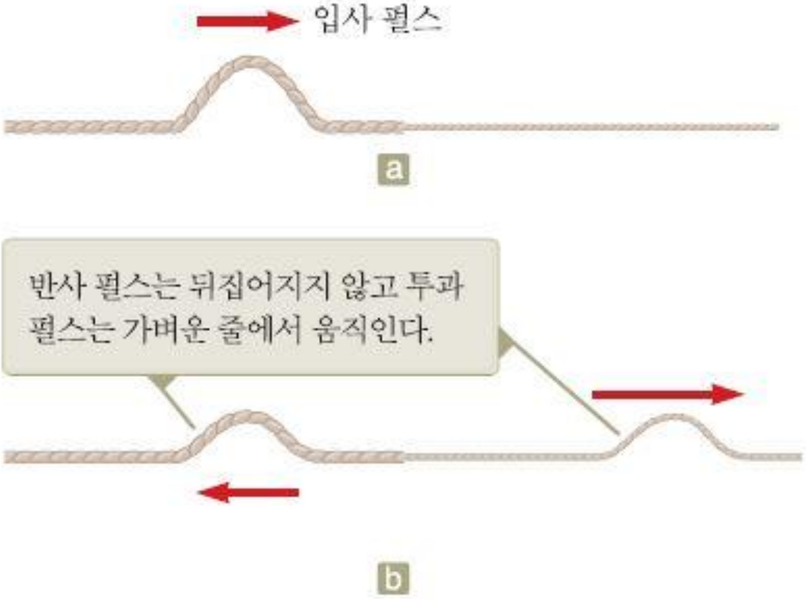
한 끝이 고정된 줄의 경우



한 끝이 자유롭게 움직이는 경우

반사 펄스는 입사 펄스보다 진폭이 작다. 펄스가 무거운 줄을 진행해서 가벼운 줄과의 경계면에 도달했을 때도 일부는 반사하고 일부는 투과한다. 그러나 이 경우에 반사 펄스는 뒤집어지지 않는다. 어느 경우나 반사 펄스와 투과 펄스의 상대적인 진폭은 두 줄의 상대적인 밀도에 의존한다. 만일, 줄이 경계면에서 동일하다면 경계면에서 불연속이 없고 반사도 일어나지 않는다.

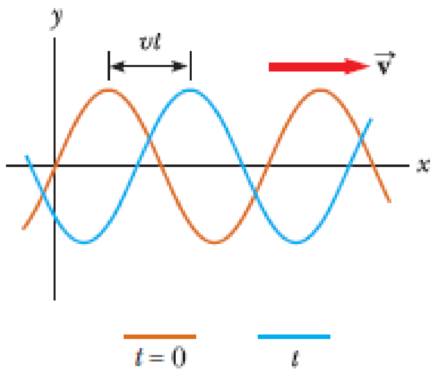




파동이 매질 A에서 매질 B로 진행하고 $v_A > v_B$인 경우(B가 A보다 밀한 경우: 관습적 표현임), 반사 파동은 뒤집어진다. 파동이 매질 A에서 매질 B로 진행하고 $v_A < v_B$인 경우(A가 B보다 밀한 경우), 반사 파동은 뒤집어지지 않는다.

4 진행파
(Traveling Wave)

사인형 파동(sinusoidal wave) :
파동의 모양이 사인(sine) 함수 모양인 파동



마루(crest): 평형 위치로부터 매질 요소의 변위가 최대

골(trough): 매질 요소의 변위가 최소
(마루와 반대방향; 변위 크기 최대)

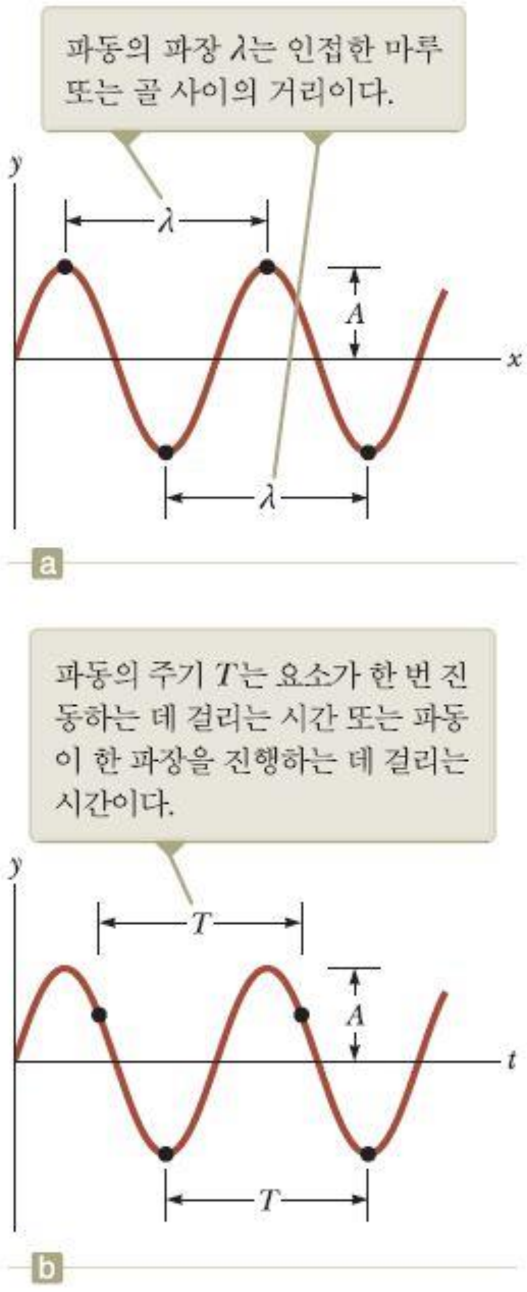
파장(wavelength) λ : 마루에서 마루까지의 거리

진폭(amplitude) A : 매질 요소의 평형으로부터의 최대 변위

주기(period) T : 한 파장을 이동하는데 걸리는 시간

진동수(frequency) f : 단위 시간당 주어진 점을 지나가는 마루의 수(단위 Hz).
한 지점에서 매질 요소의 진동수와 같다.

$$f = \frac{1}{T}$$



오른쪽 그림에서, t=0일 때 $y(x,0) = A\sin ax$

$x = 0, x = \lambda/2$ 에서 y는 0이다.

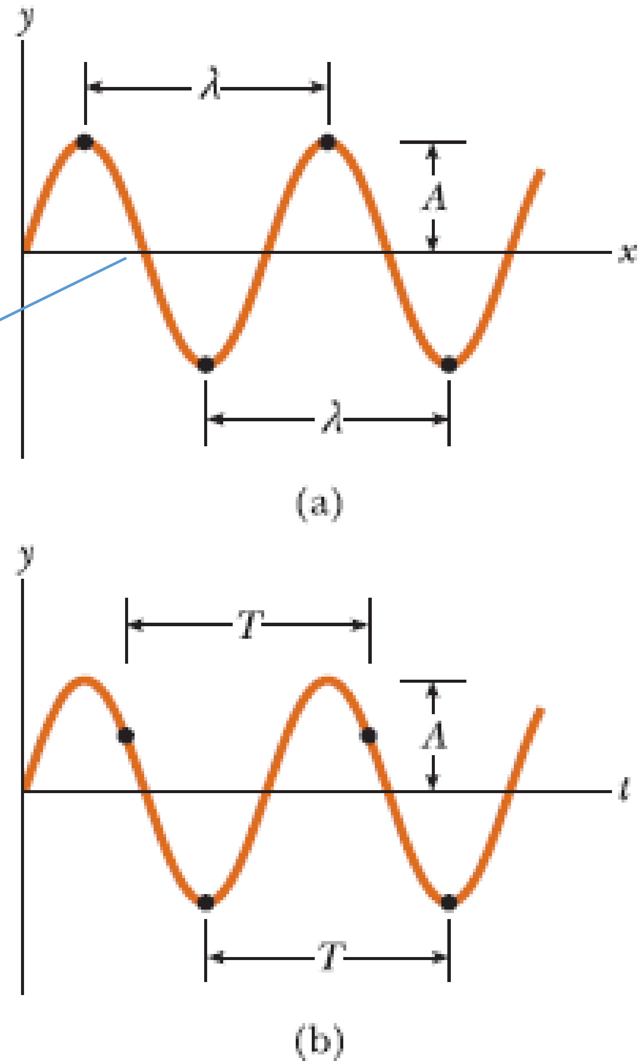
$$y(0,0) = A\sin(a \cdot 0) = 0$$

$$y\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right) = A\sin\left(a\frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

$$a(\lambda/2) = \pi$$

$$y(x,0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\therefore y(x,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$



$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} \quad \Rightarrow \quad \therefore y = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{T}t\right) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

파수(wave number) *k*

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

각진동수(angular frequency) *ω*

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\therefore y = A\sin(kx - \omega t)$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)(2\pi f) = \frac{\omega}{k}$$

$$y = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

◀**사인형 파동의 일반적 형태**

5 선형 파동 방정식
(The Linear Wave Equation)

$y = A\sin(kx - \omega t)$: wave function

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(kA\cos(kx - \omega t))$$

$$= -k^2 A\sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(-\omega A\cos(kx - \omega t))$$

$$= -\omega^2 A\sin(kx - \omega t)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \leftarrow \quad \frac{\omega}{k} = v$$

$$= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Linear Wave Equation

6 파동의 간섭
(Waves in Interference)

중첩의 원리(superposition principle) :

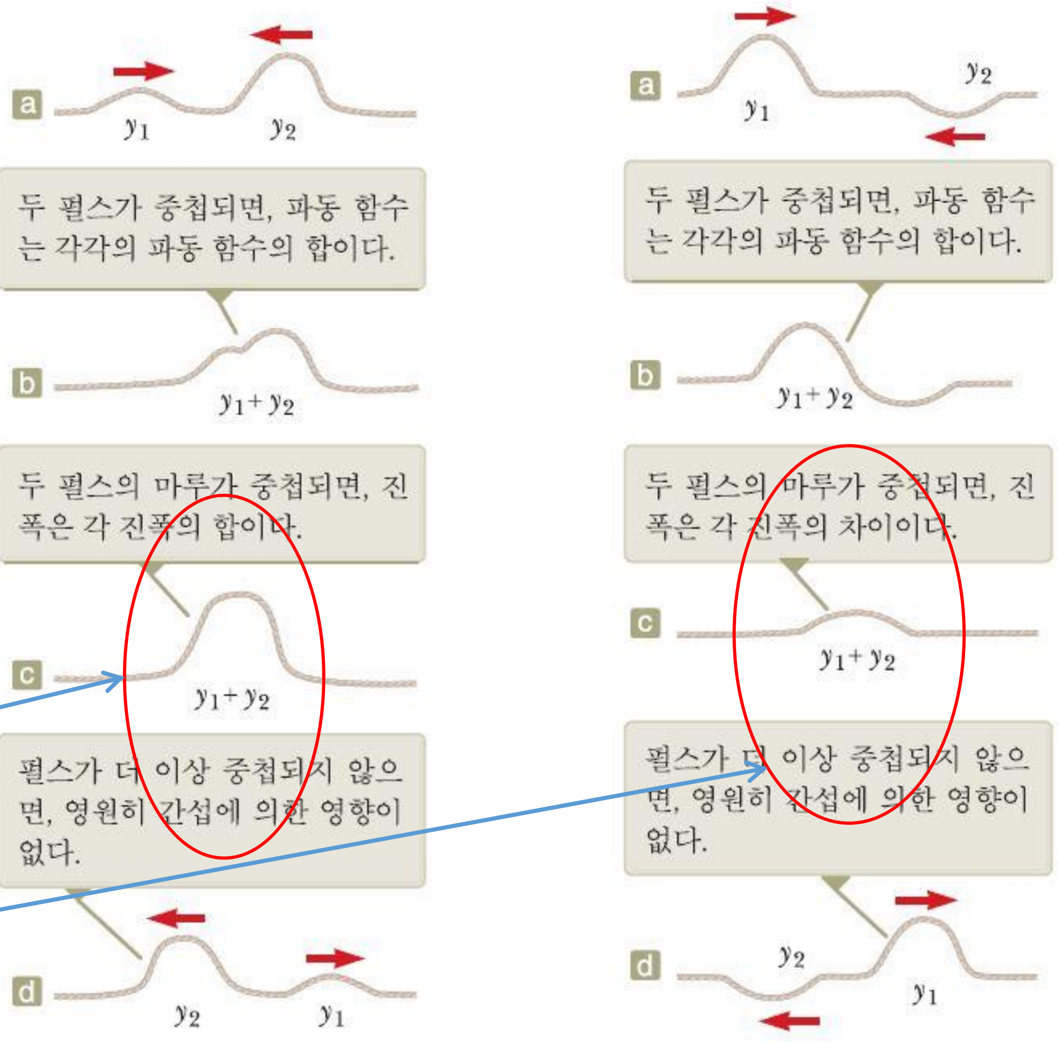
선형 파동에 대해서만 적용

두 개 이상의 진행 파동이 매질을 통해 움직일 때, 임의의 한 점에서 합성파동의 파동 함수 값은 각 파동의 파동 함수 값의 (대수적) 합이다.

두 개의 진행 파동은 서로를 변화시키거나 파괴시키지 않고 서로 지나간다.

보강 간섭(constructive interference)

상쇄 간섭(destructive interference)



▶ 사인형 파동의 중첩(Superposition of Sinusoidal Waves)

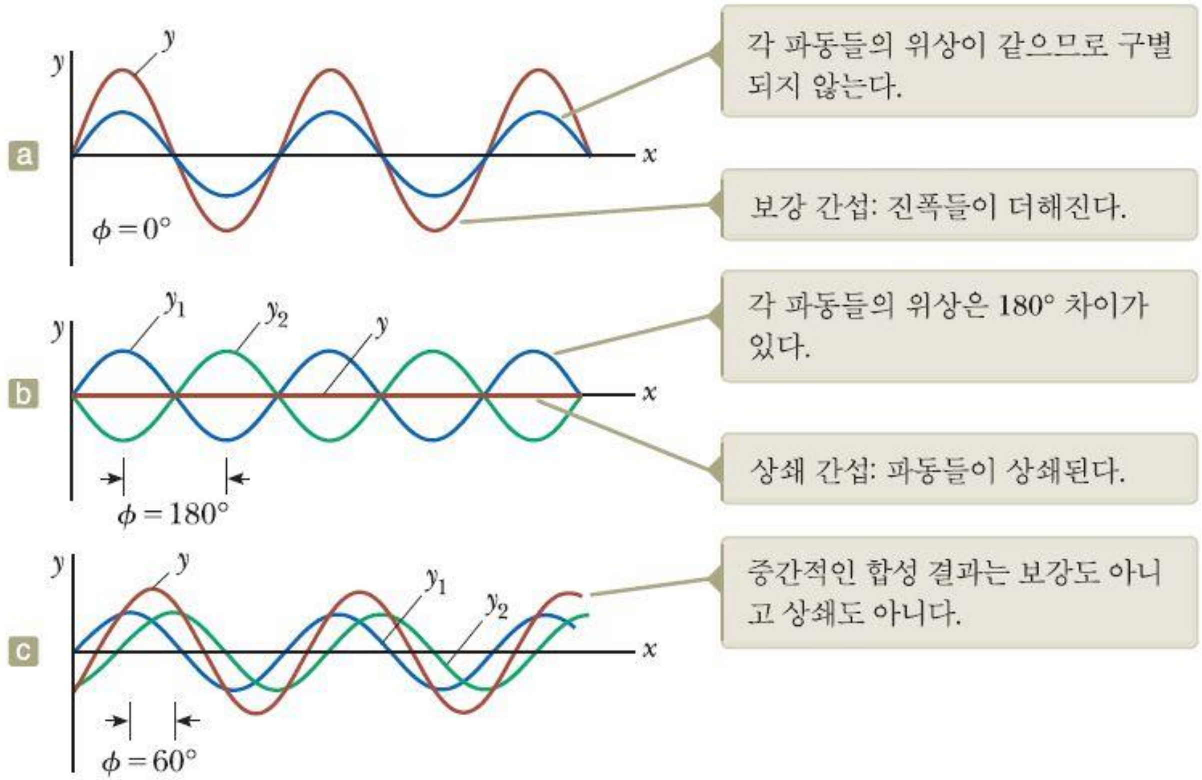
선형 매질에서 서로 같은 방향으로 진행하는 (파장과 진동수가 서로 같은) 두 사인형 파동의 중첩

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t) \quad y_2 = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi)]$$

식 $\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 에 의해

$$\therefore y = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$



중첩된 파동 함수 y도 사인형이며, 각각의 파동과 동일한 진동수와 파장을 갖는다.

두 파동의 위상차 ϕ에 따라 보강 또는 상쇄간섭이 일어난다.

7 정상파
(Standing Waves)

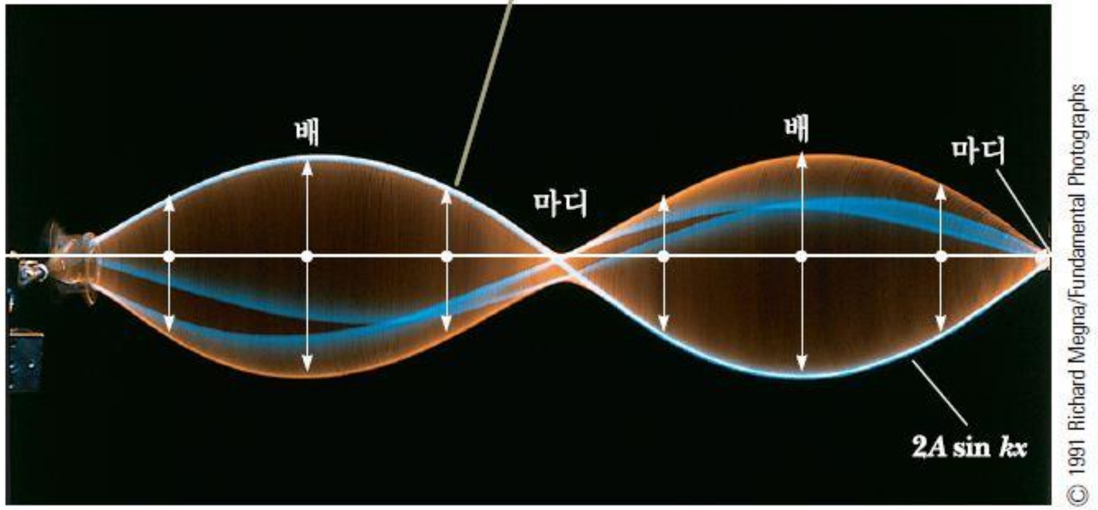
동일한 매질에서 같은 진폭, 진동수 및 파장을 가지면서 서로 반대 방향으로 진행하는 두 사인형 횡파의 파동 함수를 고려하자.

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$$
$$y_2 = A\sin(kx + \omega t)$$
$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$$

식 $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ 사용하면

$$\therefore y = (2A\sin kx)\cos\omega t$$ **정상파의 파동 함수**

각 요소의 수직 진동 진폭은 그 수평 위치에 따라 다르다. 각 요소는 둘러싸고 있는 포락선 함수 $2A\sin kx$의 한계 이내에서 진동한다.



마디(node): $kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$ ➡ $x = 0,\ \frac{\lambda}{2},\ \lambda,\ \frac{3\lambda}{2},\ \cdots = \frac{n\lambda}{2}$ $\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

배(antinode): $kx = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \cdots$ ➡ $x = \frac{\lambda}{4},\ \frac{3\lambda}{4},\ \frac{5\lambda}{4},\ \cdots = \frac{n\lambda}{4}$ $\quad n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

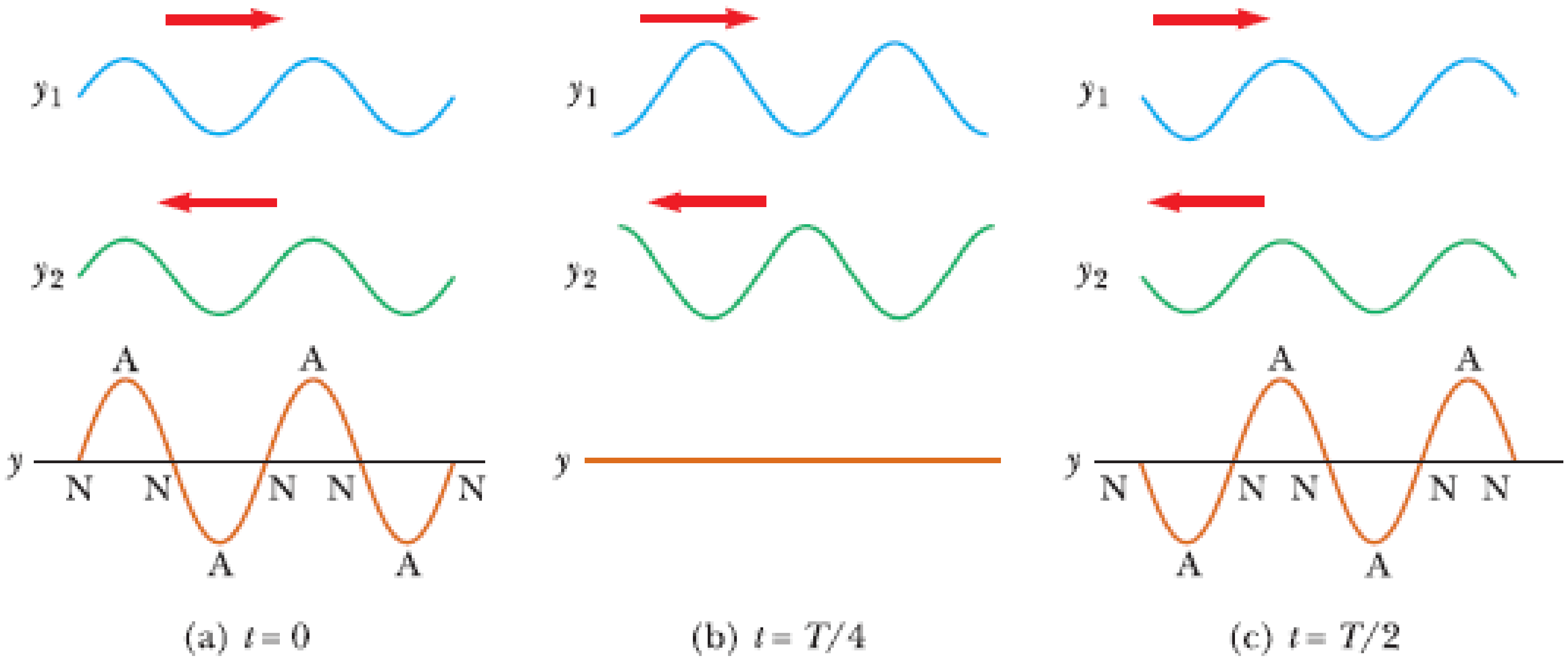
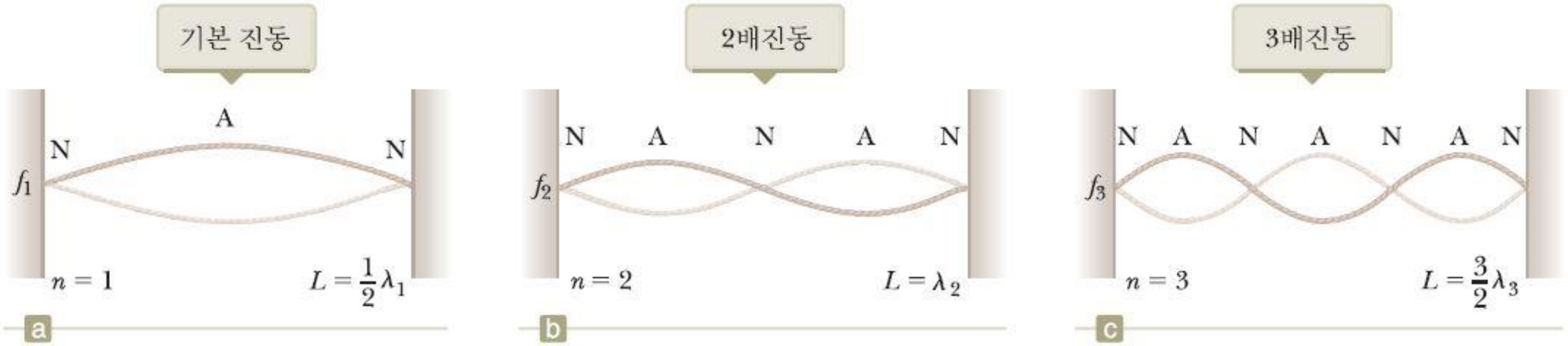


그림: 세 시간에서의 정상파

- 양쪽 끝이 고정된 길이 L인 줄에서, 양쪽 끝으로 입사하고 반사하는 파동들의 연속적인 중첩으로 인하여 줄에 **정상파**가 생긴다.
- 줄의 양쪽 끝은 고정되어 있기 때문에 양쪽 끝에서의 변위는 영이고, 그러므로 양 끝은 마디가 된다.
- 이런 **경계 조건**은 줄에 많은 수의 불연속적인 고유 진동 모양을 생기도록 하며, 이들을 **정규모드(normal mode: '배진동'이라고도 부름)**라고 하고 각각의 정규모드는 쉽게 계산할 수 있는 특성 진동수를 가진다.
- 특정한 진동수의 진동만이 허용되는 이러한 상황을 **양자화(quantization)**라고 한다.



$$L = \frac{1}{2}\lambda_1 \qquad L = \lambda_2 \qquad L = \frac{3}{2}\lambda_3$$

양쪽 끝이 열린 관에서, 자연 진동수는 기본 진동수의 정수배를 모두 포함하는 조화열을 이룬다.

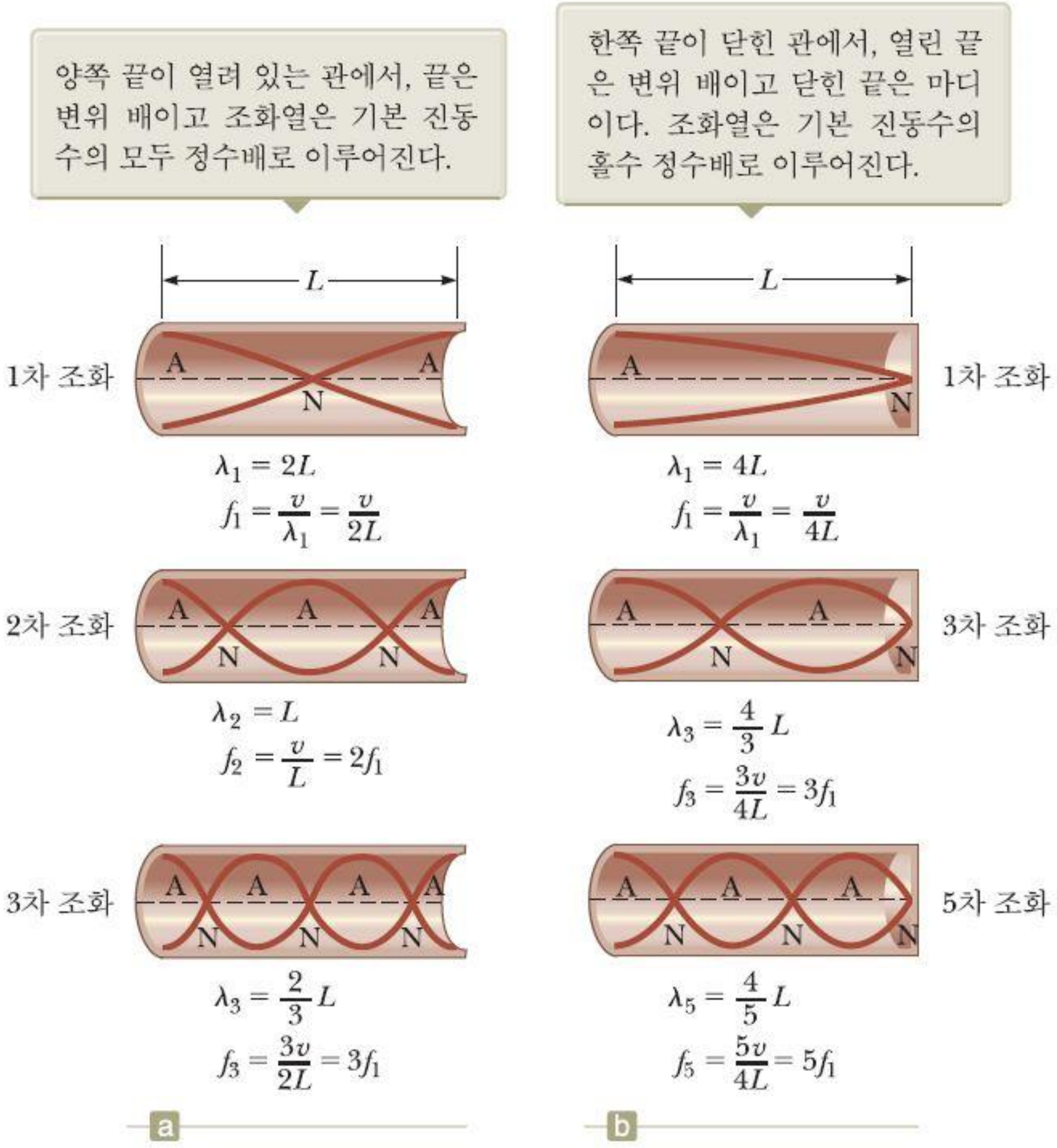
$$f_n = n\frac{v}{2L} \quad n = 1,2,3,\cdots$$

양 끝이 열려 있는 관의 자연 진동수

한쪽 끝이 닫힌 관에서, 진동의 자연 진동수는 기본 진동수의 홀수 정수배만을 포함하는 조화열을 이룬다.

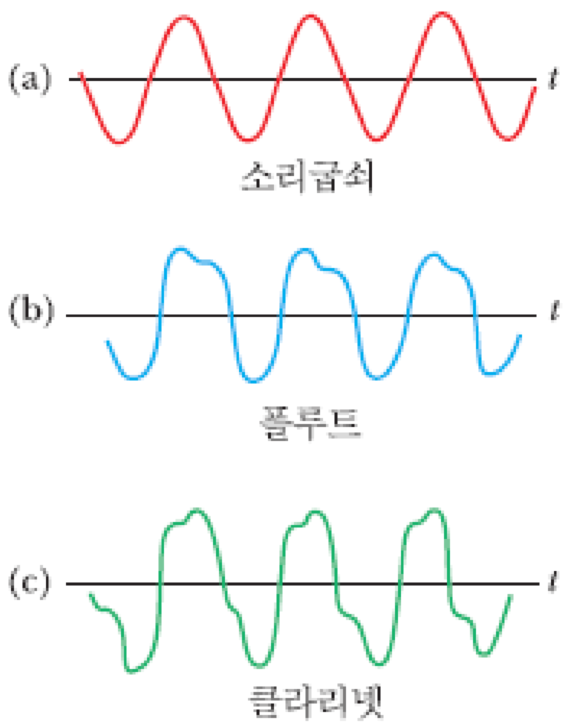
$$f_n = n\frac{v}{4L} \quad n = 1,3,5,\cdots$$

한쪽 끝만 열려 있는 관의 자연 진동수



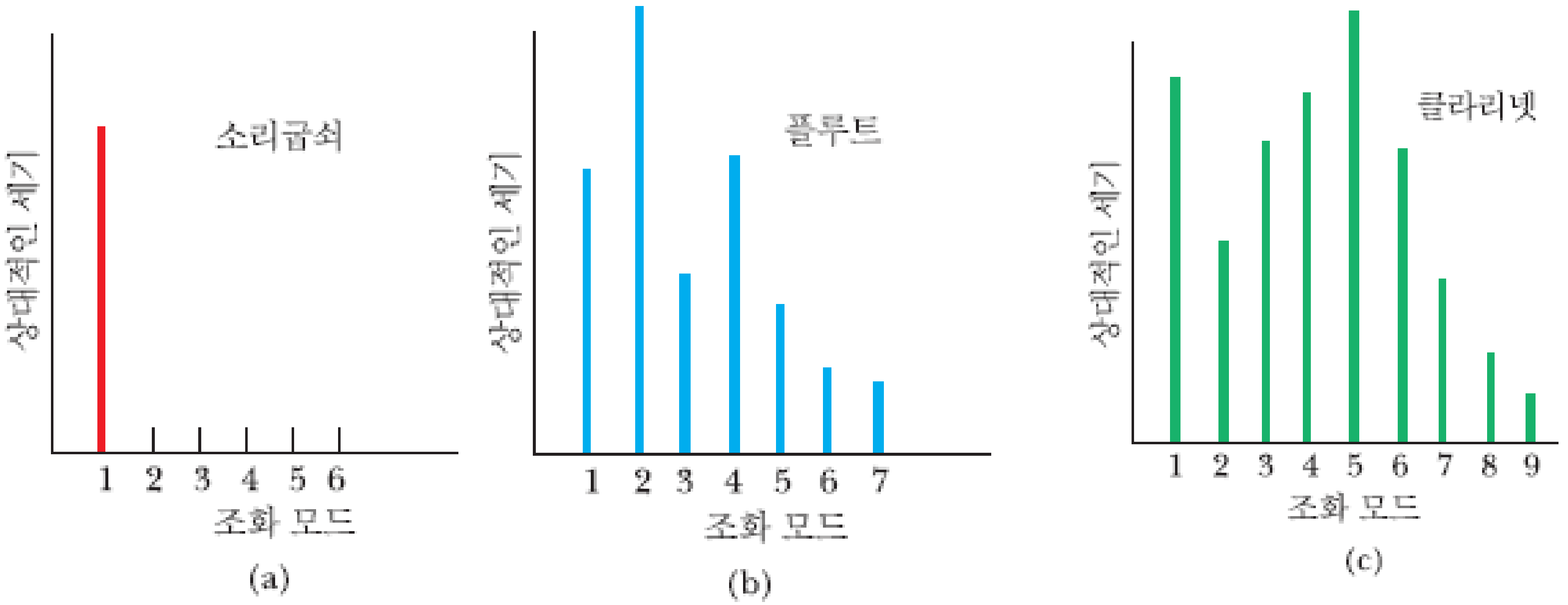
(참고) 비사인형 파동 모양
(Nonsinusoidal Wave Patterns)

- 악기에 의해 생성된 파동 모양은 기본 진동수들의 정수배인 진동수들의 파동이 중첩된 결과이다. 이런 중첩의 다양함은 음색(tone)의 차이를 준다.
  - ✓ 조화 진동의 다양한 혼합과 관련된 사람의 지각적 반응은 음질(quality) 또는 음색(timbre)이다.
- 비사인형 파동 모양을 분석할 때, 파동 모양이 주기적이라면, 조화열을 이루는 수 많은 사인형 파동을 조합함으로써 원하는 만큼 최대한 근접하게 표현할 수 있다.



$$y(t) = \sum_n (A_n \sin 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t)$$

◀푸리에 정리



푸리에 합성(Fourier synthesis)

다양한 조화 진동들을 서로 합하여 합성 파동 모양을 만들 수 있다.