LOGIKA MATEMATIKA

SESSION 4

By Gunawansyah

Tautologi, Ekivalen dan Kontradiksi

Tautologi

Perhatikan bahwa beberapa pernyataan selalu bernilai benar.

Contoh : pernyataan *"Asep masih mahasiswa atau Asep bukan mahasiswa"*

Pernyataan diatas akan selalu bernilai benar tidak bergantung pada apakah Asep benar-benar masih mahasiswa atau bukan mahasiswa.

Jika p : Asep masih mahasiswa, dan ~p : Asep bukan mahasiswa, maka pernyataan diatas berbentuk $p \vee \sim p$. (coba periksa nilai kebenarannya dengan menggunakan tabel kebenaran).

Tautologi yaitu :

Setiap pernyataan yang bernilai benar, untuk setiap nilai kebenaran komponen-komponennya

Atau

Suatu proposisi majemuk yang nilai kebenarannya selalu ***True*** apapun nilai-nilai kebenaran proposisi atomiknya.

Contoh Tautologi :

- **p v ~ p**

p	~p	P v ~ p
T	F	T
F	T	T

- **p v (~p v q)**

p	q	~p	~p v q	p v (~p v q)
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Buktikan Pernyataan berikut apakah tautologi :

- ❑ $((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q))$
- ❑ $P \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

Ekivalen

- Dua buah pernyataan dikatakan ekivalen (berekivalensi logis) jika kedua pernyataan itu mempunyai nilai kebenaran yang sama.
- Proposisi majemuk P(p,q) dikatakan setara/ekivalen dengan proposisi majemuk Q(p,q) jika p dan q mempunyai tabel kebenaran yang identik

Contoh : ~(pvq) $\equiv$ ~p^~q

p	**q**	**~p**	**~q**	**pvq**	**~(pvq)**	**~p^~q**
T	T	F	F	T	***F***	***F***
T	F	F	T	T	***F***	***F***
F	T	T	F	T	***F***	***F***
F	F	T	T	F	***T***	***T***

Buktikan Pernyataan berikut identik :

- ~(p^q) $\equiv$ ~p v ~ q
- p $\Rightarrow$ q $\equiv$ ~p v q

Kontradiksi

- Setiap pernyataan yang selalu bernilai salah, untuk setiap nilai kebenaran dari komponen-komponen disebut kontradiksi.
- Karena kontradiksi selalu bernilai salah, maka kontradiksi merupakan ingkaran dari tautologi dan sebaliknya.

Contoh Kontradiksi :

- **p ^ ~ p**

p	~p	P ^ ~ p
T	F	F
F	T	F

Beberapa sifat yang bisa digunakan untuk membuktikan kesetaraan 2 buah proposisi majemuk, selain dengan menggunakan tabel kebenaran :

- **Nullitas**
  a) p v T ⇔ T
  b) p ^ F ⇔ F
- **Identitas**
  a) p ^ T ⇔ p
  b) p v F ⇔ p
- **Negasi**
  a) p v ~p ⇔ T
  b) p ^ ~p ⇔ F
- **involusi**
  a) ~(~p) ⇔ p
- **Komutatif**
  a) p v q ⇔ q v p
  b) p ^ q ⇔ q ^ p
- **Asosiatif**
  a) p v (q v r) ⇔ (p v q) v r
  b) p ^ (q ^ r) ⇔ (p ^ q) ^ r
- **Penyerapan**
  a) p v (p ^ q) ⇔ p
  b) p ^ (p v q) ⇔ p
- **Distributif**
  a) p v (q ^ r) ⇔ (p v q) ^ (p v r)
  b) p ^ (q v r) ⇔ (p ^ q) v (p ^ r)
- **De morgan**
  a) ~ (p v q) ⇔ ~p ^ ~q
  b) ~ (p ^ q) ⇔ ~p v ~q

Buktikan p v ~ (p v q) ≡ p v ~ q

Dengan Tabel Kebenaran :

p	q	~p	~q	(pvq)	~(pvq)	pv~q	Pv~(pvq)
T	T	F	F	T	F	***T***	***T***
T	F	F	T	T	F	***T***	***T***
F	T	T	F	T	F	***F***	***F***
F	F	T	T	F	T	***T***	***T***

Dengan sifat :

p v ~ (p v q)	⇔	p v (~p ^ ~q)	(de morgan)
	⇔	(p v ~p) ^ (p v ~q)	(distributif)
	⇔	T ^ (p v ~q)	(negasi)
	⇔	p v ~ q	(identitas)

Latihan :

Dengan menggunakan cara yang ada pada sifat-sifat tadi buktikan hal dibawah ini :

- $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
- Tunjukkan bahwa pernyataan berikut merupakan tautologi :
  a) $p \wedge q \Rightarrow (p \vee q)$
  b) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
  c) $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
  d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$