LOGIKA MATEMATIKA

Pembuktian Matematika

By Gunawansyah

Pembuktian Matematika - Pendahuluan

- Hampir semua rumus dan hukum yang berlaku tidak tercipta dengan begitu saja sehingga diragukan kebenarannya. Biasanya rumus-rumus dapat dibuktikan berdasarkan definisi-definisi maupun rumus atau hukum lain yang sudah pernah dibuktikan kebenarannya.

- Ada banyak cara untuk membuktikan suatu teorema dan kadang-kadang suatu teorema dapat dibuktikan dengan beberapa cara berbeda.

- Secara umum, terdapat 2 jenis metode pembuktian yaitu Metode Pembuktian Langsung dan Metode Pembuktian Tidak Langsung.

- Biasanya pada saat akan membuktikan suatu teorema terdapat banyak kesulitan, bagi yang tidak terbiasa melakukan pembuktian maka kesulitan biasanya muncul pada langkah pertama yaitu pada waktu menentukan darimana pembuktian harus dimulai.

Pembuktian

- **Langkah-langkah melakukan pembuktian :**

1) Tulislah teorema yang akan dibuktikan.
2) Tuliskan hipotesa awal (mana yang pertama kali diketahui) dan apa yang akan dibuktikan. Biasanya yang terjadi adalah kita menggunakan hal-hal yang justru seharusnya dibuktikan.
3) Tandailah permulaan pembuktian dengan kata **BUKTI**, sebagai pemisah antara teorema dan pembuktian yang dilakukan. Sehingga akan membantu untuk tidak menggunakan hal-hal yang seharusnya dibuktikan.
4) Buktikan secara lengkap dan menyeluruh
5) Pembuktian dengan dilengkapi keterangan-keterangan akan memudahkan kita untuk membaca/menggunakan nya kembali.

Induksi Matematika (Guidance)

1. Menuliskan variabel dan tipenya yang akan digunakan.

Contoh :

"Misalkan x dan y adalah bilangan bulat positif " atau

" Misalkan x adalah bilangan real > 0

Penulisan ini mirip dengan deklarasi variabel yang digunakan di source code.

2. Apabila ditengah pembuktian akan menyatakan suatu sifat tertentu maka tuliskan sifat tersebut dengan jelas.

Contoh :

Misalkan ingin dinyatakan bahwa y adalah bilangan genap. Hal ini berarti y sama dengan dua kali suatu bilangan bulat, maka dapat dituliskan :

"Karena y adalah bilangan genap maka y = 2*x dimana x adalah bilangan bulat"

3. Apabila menggunakan sifat-sifat tertentu (komutatif, distributif, dsb) tuliskanlah sifat-sifat tersebut.

4. Tandailah akhir suatu pembuktian, agar diketahui dengan jelas bahwa apa yang akan dibuktikan jelas terbukti. Contoh TERBUKTI

Induksi Matematika (Guidance - Kesalahan yang biasa terjadi dalam pembuktian)

1. Mengambil kesimpulan berdasarkan suatu atau beberapa contoh kasus saja. Kadang-kadang suatu teorema terlalu abstrak sehingga sulit ditangkap logikanya. Untuk itu kadangkala dilakukan pemberian satu atau beberapa contoh kasus untuk membantu memahami teorema tersebut. Tetapi adalah suatu kesalahan apabila menganggap bahwa statemen tersebut benar dan berlaku umum berdasarkan satu atau beberapa kasus saja. Karena ada banyak statemen yang benar dengan hanya mengambil satu atau beberapa kasus tetapi salah untuk kasus-kasus yang lain.

Contoh :

Misalkan akan dibuktikan bahwa jumlah 2 buah bilangan genap menghasilkan bilangan genap juga. Suatu pembuktian yang salah adalah

“ Ambil $x = 4$ dan $y = 2$, maka $x + y = 4 + 2 = 6$.

Jadi jumlah bilangan genap adalah bilangan genap.”

Induksi Matematika (Guidance - Kesalahan yang biasa terjadi dalam pembuktian)

Dalam hal ini pembuktian hanya dengan nilai $x = 4$ dan $y = 2$ belum cukup untuk membuktikan bahwa dua bilangan genap bila dijumlahkan akan menghasilkan bilangan genap. Untuk itu dilakukan :

“Ambil sembarang x dan y dimana x dan y adalah bilangan genap dan x + y akan menghasilkan bilangan genap juga”

Jadi intinya adalah kita tidak menyebutkan nilai angkanya, karena terdapat tak berhingga banyak bilangan genap.

Induksi Matematika (Guidance - Kesalahan yang biasa terjadi dalam pembuktian)

2. **Menggunakan simbol yang sama untuk merepresentasikan dua hal yang berbeda.**

Contoh :

"Misal x dan y adalah bilangan ganjil. Maka menurut definisi bilangan ganjil $x = 2k + 1$ dan $y = 2k + 1$ untuk semua bilangan bulat k"

Hal yang menjadi salah adalah simbol k digunakan ganda untuk keperluan ekspresi yang berbeda (walaupun didapatkan kesimpulan akhir benar).

Jika k menyatakan hal yang sama berarti $x = 2k + 1 = y$, padahal tidak dinyatakan bahwa $x = y$.

sehingga sebaiknya dituliskan :

"Misal x dan y adalah bilangan ganjil. Maka menurut definisi bilangan ganjil $x = 2k_1 + 1$ dan $y = 2k_2 + 1$ untuk semua bilangan bulat k_1 dan k_2"

Induksi Matematika (Guidance - Kesalahan yang biasa terjadi dalam pembuktian)

3. **Melompat langsung kepada kesimpulan**

Pembuktian harus dilakukan tahap demi tahap secara urut tanpa melompat-lompat. Pengurangan langkah akan mengakibatkan bukti menjadi tidak kuat.

Contoh :

“Misalkan x dan y bilangan genap. Berdasarkan definisi bilangan genap maka x = 2m dan y = 2n untuk suatu bilangan bulat m dan n. Maka x + y = 2m + 2n. Oleh karena itu, x + y adalah bilangan genap”

Dalam pembuktian diatas, ada satu yang terlewati yaitu berdasarkan pernyataan

$x + y = 2m + 2n$ maka disimpulkan $x + y$ adalah bilangan genap .

Hal ini tidak jelas, seharusnya dituliskan bahwa :

$x + y = 2m + 2n$

$= 2(m+n)$ *distributif*

Sehingga menurut definisi bilangan genap maka $x + y$ adalah bilangan genap.

Induksi Matematika (Guidance - Kesalahan yang biasa terjadi dalam pembuktian)

4. Menggunakan apa yang akan dibuktikan.

Contoh :

“Misal x dan y adalah bilangan genap. Jika <u>x + y adalah bilangan genap</u> maka x + y = 2m untuk sembarang bilangan bulat m”

Kesalahan terletak pada penggunaan asumsi bahwa x + y adalah bilangan genap, padahal itulah yang akan dibuktikan.

Memilih Metoda Pembuktian

1) Untuk memilih metoda mana yang paling tepat dalam pembuktian suatu pernyataan sangatlah sulit karena masing-masing metode memiliki ciri, kemampuan, keindahan, dan kekhususan tersendiri.

2) Ada kalanya suatu pernyataan dapat dibuktikan dengan suatu metode tertentu saja, atau ada kalanya juga suatu pernyataan dapat dibuktikan dengan beberapa metode yang berbeda dengan sama baiknya.

3) Untuk membuktikan suatu pernyataan diperlukan suatu “feeling”. “feeling” yang tajam tersebut dapat dicapai dengan melatih dan membiasakan diri dalam membuktikan pernyataan-pernyataan. Semakin sering dilakukan, maka semakin kuat “feeling” yang dapat dimiliki.

.: Metode Pembuktian :.

Terdapat beberapa cara dalam metode pembuktian, yaitu :

1. Pembuktian langsung,
2. Pembuktian tidak langsung,
3. Pembuktian dengan Induksi Matematika.

Pembuktian Langsung
(Direct Proof)

A. Pembuktian Langsung (Direct Proof)

Dalam metoda ini, hal-hal yang diketahui tentang suatu teorema diturunkan secara langsung dengan teknik-teknik tertentu sampai tercapai kesimpulan yang diinginkan.

Contoh :

1. Metode Pengecekan Satu per Satu

Buktikan bahwa untuk semua bilangan genap x antara 4 sampai 20, x dapat dinyatakan sebagai penjumlahan 2 bilangan prima.

Bukti

Dengan melakukan pengecekan satu per Satu, maka didapatkan :

4 = 2+2   6 = 3+3   8 = 3+5   10 = 5+5   12 = 5+7

14=3+11 16=5+11 18=7+11 20=7+13

Terlihat bahwa semua bilangan genap n ($4 \leq x \leq 20$) dapat dinyatakan sebagai penjumlahan 2 bilangan prima.

A. Pembuktian Langsung (Direct Proof)

Suatu bilangan bulat n disebut bilangan GENAP jika terdapat suatu bilangan bulat k, sehingga $n = 2k$.

Contoh

6 adalah genap, sebab terdapat 3 sehingga $6 = 2(3)$

Suatu bilangan bulat n disebut bilangan GANJIL jika terdapat suatu bilangan bulat k, Sehingga $n = 2k + 1$.

Contoh

3 adalah ganjil, sebab terdapat 1 sehingga $3 = 2(1) + 1$

A. Pembuktian Langsung (Direct Proof)

2. Metode Pengecekan secara umum

Buktikan bahwa jumlah 2 bilangan genap adalah genap.

Bukti

Ambil sembarang x dan y, dimana x dan y adalah bilangan genap. Akan dibuktikan bahwa x+y adalah bilangan genap(juga)

Karena x dan y adalah bilangan-bilangan genap , maka $x = 2m$ dan $y = 2n$

untuk bilangan-bilangan bulat m dan n, sehingga :

$x + y = 2m + 2n$

$ = 2(m+n)$ distributif

Misal $k = m + n$

Karena m dan n adalah bilangan-bilangan bulat juga maka k adalah bilangan bulat, sehingga $(x + y) = 2k$ untuk semua bilangan bulat k.

Berdasarkan definisi bilangan genap berarti bahwa $(x + y)$ merupakan bilangan genap karena merupakan hasil kali 2 bilangan bulat. Terbukti bahwa jumlah 2 bilangan bulat genap adalah bilangan genap (juga).

A. Pembuktian Langsung (Direct Proof)

3. Pembuktian dengan kasus-kasus

Untuk sembarang bilangan riil x,buktikan bahwa jika |x|>4, maka x^2 >16

Bukti

Misal x adalah bilangan riil yang memenuhi $|x| > 4$

$|x| > 4$ berarti bahwa $x > 4$ atau $x < -4$

Jika $x > 4$ maka $x^2 > 4^2 = 16$

Jika $x < -4$ berarti $-x > 4$, sehingga $(-x)^2 > 4^2$ atau $x^2 > 16$

Jadi, baik $x > 4$ maupun $x < -4$, $x^2 > 16$

Terbukti bahwa jika $|x| > 4$, maka $x^2 > 16$

Latihan 1 :

- Jika diketahui n adalah genap, maka buktikan bahwa n^2 adalah genap.

Bukti.

Diketahui bahwa x bilangan genap maka bilangan ini dapat dituliskan sebagai $x = 2m$ untuk suatu bilangan bulat m.

Dengan mengkuadratkan diperoleh bahwa $x^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$.

Karena m suatu bilangan bulat maka berdasarkan sifat ketertutupan bilangan bulat terhadap operasi perkalian maka diperoleh bahwa $2m^2$ juga merupakan bilangan bulat.

Dengan demikian x^2 merupakan bilangan genap dan dapat dituliskan sebagai $x^2 = 2n$ untuk suatu bilangan bulat $n = 2m^2$.

Dari persamaan terakhir ini dapat disimpulkan bahwa x^2 adalah bilangan genap.

Latihan 2 :

- Jika diketahui n adalah ganjil, maka buktikan bahwa n^2 adalah ganjil.

Jawab

Diketahui n adalah ganjil, artinya terdapat suatu bilangan bulat k sehingga $n = 2k + 1$.

Akan ditunjukkan bahwa n^2 ganjil.

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Karena k adalah bilangan bulat, maka $(2k^2 + 2k)$ juga pasti bilangan bulat,

sehingga n^2 adalah ganjil.

Pembuktian Tak Langsung (Undirect Proof)

B. Pembuktian Tak Langsung (Undirect Proof)

Dalam metode ini, hal-hal atau fakta-fakta yang diketahui tidak digunakan secara langsung untuk menuju pada kesimpulan. Biasanya bukti dimulai dari hal-hal lain.

1. Pembuktian Dengan Kontradiksi

Dilakukan dengan cara mengasumsikan bahwa negasi kalimat yang akan dibuktikan bernilai benar. Jadi, jika kebenaran p ingin dibuktikan, langkah yang dilakukan adalah dengan mengasumsikan bahwa (not p) adalah benar, kemudian berusaha menunjukkan bahwa asumsi tersebut akan menyebabkan terjadinya kontradiksi. Dengan demikian, disimpulkan bahwa asumsi (not p) bernilai salah atau p bernilai benar.

2. Pembuktian Dengan Kontraposisi

Suatu pernyataan akan selalu ekivalen (mempunyai nilai kebenaran yang sama) dengan kontraposisinya. Dengan demikian, untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan dapat pula dinyatakan dengan membuktikan kebenaran kontraposisinya.

- Telah dikenal dengan baik bahwa dua buah pernyataan dikatakan ekivalen bila kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama. Dengan demikian sebuah pernyataan terkadang perlu dirubah formulasinya ke dalam bentuk pernyataan lain namun kedua pernyataan tersebut ekivalen.
- Telah diketahui bahwa p $\Rightarrow$ q adalah ekivalen dengan pernyataan . ~q $\Rightarrow$ ~ p Hal ini bisa dilihat pada tabel kebenaran berikut.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
b	b	s	s	b	b
b	s	s	b	s	s
s	b	b	s	b	b
s	s	b	b	b	b

Karena pernyataan tersebut ekivalen maka membuktikan pernyataan yang pertama sama halnya dengan membuktikan pernyataan yang kedua dan demikian sebaliknya.

Contoh :

Buktikan, bila x^2 bilangan ganjil maka x juga bilangan ganjil.
Jawab :

Misal x adalah bilangan ganjil maka x dapat dituliskan sebagai $x = 2n + 1$ untuk suatu bilangan bulat n.
Dengan demikian $x^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2+2n)+1$.

Hal ini juga bisa dituliskan sebagai $x^2 = 2m+1$, dimana $m = 2n^2+2n$ dan m adalah bilangan bulat.

Jadi x^2 adalah bilangan ganjil. Dengan demikian dapat disimpulkan pernyataan kedua di atas adalah benar. Karena pernyataan pertama ekivalen dengan pernyataan kedua maka pernyataan pertama juga bernilai benar.

Terbukti bahwa jika x^2 bilangan ganjil maka x juga bilangan ganjil.

Induksi Matematika

C. Induksi matematika – Ide Awal

Ada sebuah rahasia besar di kampus yang selama ini hanya diketahui oleh si A. A berkata pada B: “aku punya rahasia besar, aku akan memberitahumu, dgn syarat kamu harus jaga rahasia ini”. B kemudian berkata pada C: “aku punya sebuah rahasia besar, aku akan memberitahumu, dgn syarat kamu harus jaga rahasia ini, jika tidak, A bisa marah”. C berkata pada D: “aku punya sebuah rahasia besar, aku akan memberitahumu, dgn syarat kamu harus jaga rahasia ini, jika tidak, B bisa marah”, dst.

Pada akhirnya satu kampus jadi tahu rahasia itu. Ini disebabkan karena dua hal:

1. A tahu rahasia itu dan memulai menyebarkan

2. Proses menyebarkan terus dilanjutkan.

Jika salah satu dari 1 atau 2 tidak ada, maka rahasia tidak akan tersebar.

C. Induksi matematika

- Induksi Matematika merupakan suatu teknik yang dikembangkan untuk membuktikan pernyataan. Pernyataan yang dimaksudkan dibatasi hanya pada pernyataan yang menyangkut bilangan bulat.

- Induksi Matematika digunakan untuk mengecek hasil proses yang terjadi secara berulang sesuai dengan pola tertentu.

- Induksi Matematika digunakan untuk membuktikan pernyataan yang khusus menyangkut bilangan bulat positif. Dengan menggunakan Induksi Matematika akan mengurangi pembuktian bahwa semua bilangan bulat positif termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan jumlah langkah terbatas.

Induksi matematika

Contoh :

Misalkan p(n) adalah pernyataan yang menyatakan :

“jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah n(n+1)/2”

Misal untuk n = 6, p(6) adalah jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai 6 adalah 6(6+1)/2. Terlihat bahwa 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = 6(7)/2.

Tetapi pembuktian hanya dengan mengambil contoh p(6) saja tidak berlaku sebagai bukti bahwa p(n) benar untuk seluruh n.

Walaupun pengambilan contoh n = 6 menghasilkan nilai dibawah himpunan kebenaran p(n), tetapi n = 6 bukan satu-satunya bilangan bulat positif karena bilangan bulat positif tidak berhingga banyaknya.

Prinsip Induksi matematika

Misalkan p(n) adalah pernyataan bilangan bulat positif dan akan membuktikan bahwa p(n) adalah benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan pernyataan ini, hanya perlu menunjukkan bahwa :

1. p(1) adalah benar

2. Untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$, jika p(n) benar maka p(n+1) adalah juga benar.

Langkah 1 dinamakan ***basis induksi*** sedangkan langkah 2 dinamakan ***langkah induksi***. Selain itu asumsi yang digunakan pada langkah 2 yang menyatakan bahwa pernyataan adalah benar untuk p(n) disebut hipotesis induksi.

Induksi matematika – contoh 1

Tunjukkan bahwa $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$ melalui induksi matematika

Jawab :

Langkah 1 :

Untuk $n = 1$, maka $1 = 1(1+1)/2$ adalah benar.

$$\begin{aligned} 1 &= 1\,(1+1)/2 \\ &= 1\,(2)/2 \\ &= 2/2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Langkah 2 : Misalkan untuk $n \geq 1$

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n + 1)\,/2$ adalah benar (hipotesis induksi) maka akan ditunjukkan bahwa

$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = (n+1)\,((n + 1) + 1)/\,2$ adalah benar juga. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) &= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n+1) \\ &= (\,n(n+1)/2)\,) + (n+1) \\ &= (\,(n^2 + n)/2\,) + (2n+2)/2 \\ &= (n^2 + 3n + 2)/2 \\ &= (n+1)(n+2)/2 \\ &= (n+1)\,((n+1) + 1)\,/\,2 \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan langkah 2 keduanya telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, TERBUKTI bahwa $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n + 1)\,/2$

Induksi matematika – contoh 2

Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2

Jawab

Langkah 1.

Untuk $n = 1$ jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1 = 1^2$

Langkah 2.

Misalkan untuk $n \geq 1$

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ adalah benar, maka akan ditunjukkan bahwa

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2$

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n+1) = (n+1)^2$ adalah benar juga. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) &= (1+3+5+\ldots+(2n-1)) + (2n+1) \\
&= n^2 + (2n+1) \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2

Induksi matematika – contoh 3

Untuk $n \geq 1$, Tunjukkan bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

Jawab

Langkah 1.

Untuk $n = 1$, didapat $1^3 + 2(1) = 3$ adalah benar kelipatan 3

Langkah 2.

Misalkan untuk $n \geq 1$, maka $n^3 + 2n$ adalah benar kelipatan 3

Akan ditunjukkan bahwa :

$(n+1)^3 + 2(n+1)$ adalah juga benar kelipatan 3. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2) \\
&= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 \\
&= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)
\end{aligned}
$$

adalah benar kelipatan 3.

Terlihat bahwa : $(n^3 + 2n)$ adalah kelipatan 3 dari langkah 1

Sedangkan bahwa : $3(n^2 + n + 1)$ jelas merupakan kelipatan 3 juga, sehingga $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 terbukti benar.

Terima Kasih