LOGIKA MATEMATIKA

- Logika : Suatu studi kasus penalaran
- Penalaran: cara berpikir atau menyimpulkan sesuatu berdasarkan akal budi (bukan dengan perasaan)
- Logika matematika berfokus pada pernyataan
- Logika matematika merupakan salah satu bagian dari matematika yang membahas teori dan aplikasi dari logika formal dengan pendekatan matematis.
- Penerapan logika matematika terdapat pada:
 - a) Pembuatan sirkuit digital,
 - b) Kecerdasan buatan (artificial intelligence),
 - c) Desain dan analisis algoritma,
 - d) Metode formal dalam rekayasa perangkat lunak (formal methods in software engineering),
 - e) dll

Metode Formal dan Ariane 5



Gambar diambil dari https://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/ariane.html.

On 4 June 1996, the maiden flight of the Ariane 5 launcher ended in a failure. Only about 40 seconds after initiation of the flight sequence, at an altitude of about 3700 m, the launcher veered off its flight path, broke up and exploded.

The failure of the Ariane 501 was caused by the complete loss of guidance and altitude information 37 seconds after start of the main engine ignition sequence (30 seconds after lift-off). This loss of information was due to specification and design errors in the software of the inertial reference system.

Contoh Aplikasi: Masalah Spesifikasi Sistem

Seorang software engineer diminta oleh manajernya untuk membuat suatu sistem informasi dengan spesifikasi berikut:

- Ketika system software di-upgrade, user tidak dapat mengakses file system;2
- Jika user dapat mengakses file system, maka user dapat menyimpan file baru;
- Jika user tidak dapat menyimpan file baru, maka system software tidak sedang di-upgrade.

Apakah sistem informasi dengan spesifikasi di atas dapat dibuat?

1. Pernyataan

Kalimat adalah rangkaian kata yang disusun menurut aturan bahasa yang mengandung arti.

Pernyataan adalah kalimat yang mempunyai nilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar dan salah (pernyataan disebut juga preposisi, kalimat deklaratif).

Benar diartikan ada kesesuaian antara apa yang dinyatakan dengan keadaan yang sebenarnya.

Contoh:

- 3 adalah bilangan ganjil , (kalimat ini adalah benar)
- Nilai x yang memenuhi 3x +1 = 7 adalah 2 , (kalimat ini adalah benar)

Kalimat-kalimat pada contoh diatas hanya bernilai benar saja atau salah saja,akan tetapi tidak sekaligus benar dan salah pada saat yang sama. Kalimat-kalimat seperti itu disebut pernyataan .

Dengan demikian kita dapat mengatakan :

Pernyataan adalah kalimat yang hanya benar saja atau salah saja, akan tetapi tidak sekaligus benar dan salah.

Berdasarkan uraian tersebut jelas bahwa setiap pernyataan adalah suatu kalimat. Akan tetapi, suatu kalimat belum tentu suatu pernyataan.

Perhatikan kalimat-kalimat pada contoh berikut :

- Berapa jumlah mahasiswa USB ?
- Jangan melecehkan sesama teman

Kalimat-kalimat diatas tidak menerangkan sesuatu (bukan kalimat deklaratif), sehingga kalimat-kalimat itu bukan merupakan pernyataan.

Kalimat-kalimat yang dapat digolongkan sebagai pernyataan adalah kalimat-kalimat yang menerangkan sesuatu (disebut : kalimat deklaratif).

Meskipun demikian tidak semua kalimat deklaratif merupakan pernyataan. Untuk itu perhatikan kalimat-kalimat deklaratif pada contoh berikut ini.

Contoh:

- a) Baju itu bagus
- b) Ani anak yang lucu
- c) Kue itu enak sekali.

Kalimat-kalimat diatas dapat bernilai benar saja atau bernilai salah saja, tetapi bersifat relatif atau tergantung pada keadaan. Jadi, kalimat -kalimat seperti itu tidak dapat disebut sebagai pernyataan.

2. Lambang Pernyataan:

Dalam matematika, pernyataan-pernyataan dilambangkan dengan huruf kecil, seperti a, b, p dan q dan seterusnya.

Contoh:

- Pernyataan " 2 adalah bilangan genap " dapat dilambangkan dengan huruf p,
 Sehingga jadi p: 2 adalah bilangan genap.
- Pernyataan "Bandung adalah ibu kota provinsi Jawa Barat" dapat dilambangkan dengan huruf q, Sehingga jadi *q : Bandung adalah ibu kota provinsi Jawa Barat*.

3. Pembuktian Pernyataan:

Untuk menunjukkan bahwa sebuah pernyataan itu benar atau salah dapat dilakukan dengan dua cara yaitu:

Dasar Empiris

Yaitu menunjukkan benar atau salahnya sebuah pernyataan berdasarkan fakta yang kita jumpai dalam kehidupan sebari-hari.

Contoh:

- a) Matahari terbit di Barat (merupakan pernyataan yang salah)
- b) Gedung Sate ada di Bandung (merupakan pernyataan yang benar)

Dasar tak Empiris

Yaitu menunjukkan benar salahnya sebuah pernyataan melalui bukti-bukti atau perhitungan-perhitungan dalam matematika.

Contoh:

- a) Dalam sebuah segitiga jumlah sudut dalamnya sama dengan 180°. (merupakan pernyataan yang benar)
- b) Hasil dari Akar 9 adalah 2. (merupakan pernyataan yang salah)

Selanjutnya terhadap yang benar dikatakan mempunyai nilai kebenaran B (Benar), sedangkan terhadap pernyataan yang salah dikatakan mempunyai nilai kebenaran S (Salah).

4. Kalimat Terbuka

- Kalimat Terbuka adalah kalimat yang belum tentu bernilai benar atau salah.
- Kalimat terbuka biasanya ditandai dengan adanya variabel (peubah).
- Jika variabelnya diganti dengan konstanta dalam semesta yang sesuai maka kalimat itu akan menjadi sebuah pernyataan.
- Variabel (Peubah) adalah lambang yang menunjukkan anggota yang belum tentu dalam semesta pembicaraan, sedangkan konstanta adalah lambang yang menunjukkan anggota tertentu dalam semesta pembicaraan.
- Pengganti variabel yang menyebabkan kalimat terbuka menjadi pernyataan yang bernilai benar, disebut selesaian atau penyelesaian.

Contoh:

- a) x + 6 = 10, Jika variabelnya diganti dengan 4 maka 4 + 6 = 10 (pernyataan benar)
- b) Jika variabelnya diganti dengan 5 maka 5 + 6 = 11 (Pernyataan salah)

5. Pernyataan Majemuk

- Apabila suatu pernyataan terdiri lebih dari satu pernyataan maka diantara satu pernyataan dengan pernyataan lainnya dibutuhkan suatu kata penghubung sehingga diperoleh suatu pernyataan majemuk.
- Logika merupakan sistem matematika artinya memuat unsur-unsur yaitu pernyataan-pernyataan dan operasi-operasi yang didefinisikan.
- Operasi-operasi yang ada berupa kata sambung logika (conective logic), yaitu :
- " : Merupakan lambang operasi untuk negasi (tidak)
- ^: Merupakan lambang operasi untuk konjungsi (dan)
- V: Merupakan lambang operasi untuk disjungsi (atau)
- ⇒ : Merupakan lambang operasi untuk implikasi (jika...maka...)
- ⇔: Merupakan lambang operasi untuk biimplikasi (jika dan hanya jika)

5.1 Negasi / ingkaran / penyangakalan

- Operasi ini merupakan operasi monar (operasi yang dikenakan pada satu pernyataan) yang dilambangkan dengan "~".
- Ingkaran/Negasi dari suatu pernyataan adalah pernyataan lain yang diperoleh dengan menambahkan kata "tidak" atau menyisipkan kata "bukan" pada pernyataan semula.
- Ingkaran dari suatu pernyataan p disajikan dengan lambang –p atau ~p, dan dibaca: "tidak p" atau "bukan p". Bila peryataan p bernilai benar, maka ingkarannya bernilai salah dan sebaliknya.

Tabel kebenaran:

р	~p
Т	F
F	Т

Contoh:

p: Bandung adalah ibu kota Jawa Barat

~p: Tidak benar Bandung adalah ibu kota Jawa Barat atau Bandung adalah bukan ibu kota Jawa Barat

5.2 Konjungsi (dan)

 Operasi konjungsi merupakan operasi biner (operasi yang dikenakan pada dua pernyataan) yang dilambangkan dengan tanda " ^". Dengan operasi ini dua pernyataan dihubungkan dengan kata " dan ".

Tabel kebenaran:

р	q	p^q
Т	T	T
Т	F	F
F	Т	F
F	F	F

Contoh:

p: Bandung adalah ibu kota Jawa Barat

q : Bandung merupakan kota metropolitan

p^q : bandung adalah ibu kota Jawa Barat dan Bandung merupakan kota metropolitan

5.3 Disjungsi (atau)

Operasi disjungsi juga merupakan operasi binary yang dilambangkan dengan tanda "v". Operasi ini menggabungkan dua pernyataan menjadi satu dengan kata hubungan "atau".

Tabel kebenaran:

р	q	pvq
Т	T	T
Т	F	T
F	Т	Т
F	F	F

Contoh:

p: Bandung adalah ibu kota Jawa Barat

q : Bandung merupakan kota metropolitan

pvq : Bandung adalah ibu kota Jawa Barat atau Bandung merupakan kota metropolitan

5.4 Implikasi (jika ... maka....)

- Operasi implikasi (kondisional) adalah operasi penggabungan dua pernyataan yang menggunakan kata hubung " jika ,... Maka" Yang dilambangkan dengan " ⇒ ".
- Implikasi dari pernyataan p dan q ditulis $p \Rightarrow q$ dan dibaca "jika p maka q". Pernyataan bersyarat $p \Rightarrow q$ juga dapat dibaca "p hanya jika q" atau "p adalah syarat cukup bagi q atau "q adalah syarat perlu bagi p".
- $\not\vdash$ Dalam pernyataan p \Rightarrow q, p disebut hipotesa / anteseden / sebab, q disebut konklusi / konsequen / akibat.
- **■** Tabel kebenaran :

р	q	$p \Rightarrow q$
Т	Т	Т
Т	F	F
F	Т	Т
F	F	Т

Contoh:

p:6 habis dibagi 2 (T)

q: 6 adalah bilangan genap (T)

 $p \Rightarrow q$: Jika 6 habis dibagi 2 maka 6 adalah bilangan genap (T)

5.5 Biimplikasi (...jika dan hanya jika...)

- Biimplikasi yaitu pernyataan majemuk yang menggunakan kata hubung "...jika dan hanya jika ..." dinotasikan " ⇔ ".
- Biimplikasi dari pernyataan p dan q ditulis p \Leftrightarrow q dibaca p jika dan hanya jika q.
- Pernyataan p \Leftrightarrow q dapat juga dibaca p equivalent q atau p adalah syarat perlu dan cukup bagi q

Tabel kebenaran:

р	q	p ⇔ q
Т	Т	Т
Т	F	F
F	Т	F
F	F	Т

Contoh:

$$p:2+3=6$$
 (F)

q: 6 adalah bilangan genap (T)

 $p \Leftrightarrow q: 2+3=6$ jika dan hanya jika 6 adalah bilangan genap (F)

Thank You