BAB I

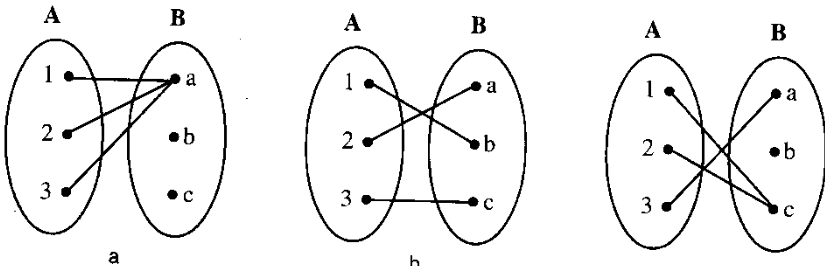
FUNGSI

A. Fungsi

1. Fungsi atau Pemetaan

a. Pengertian Fungsi

Fungsi atau pemetaan adalah suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B yang mana setiap x∊A dipasangkan (dihubungkan) dengan ***satu dan hanya satu*** y∊B



Gambar 1. Pemetaan/Fungsi

Dapat disimpulkan bahwa suatu relasi merupakan fungsi:

1) Jika relasi dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut, maka *tidak boleh ada dua atau lebih pasangan terurut* yang mempunyai unsur pertamanya sama.
2) Jika relasi dinyatakan dengan diagram panah, maka *tidak boleh ada hubungan bercabang* dari suatu x∊A ke y∊B.
3) Jika relasi dinyatakan dengan grafik Cartesius, maka *tidak boleh ada satupun garis vertikal (// sumbu y) yang menotong grafik* di dua titik atau lebih.

Untuk lebih jelasnya amati contoh berikut:

a. Himpunan pasangan terurut

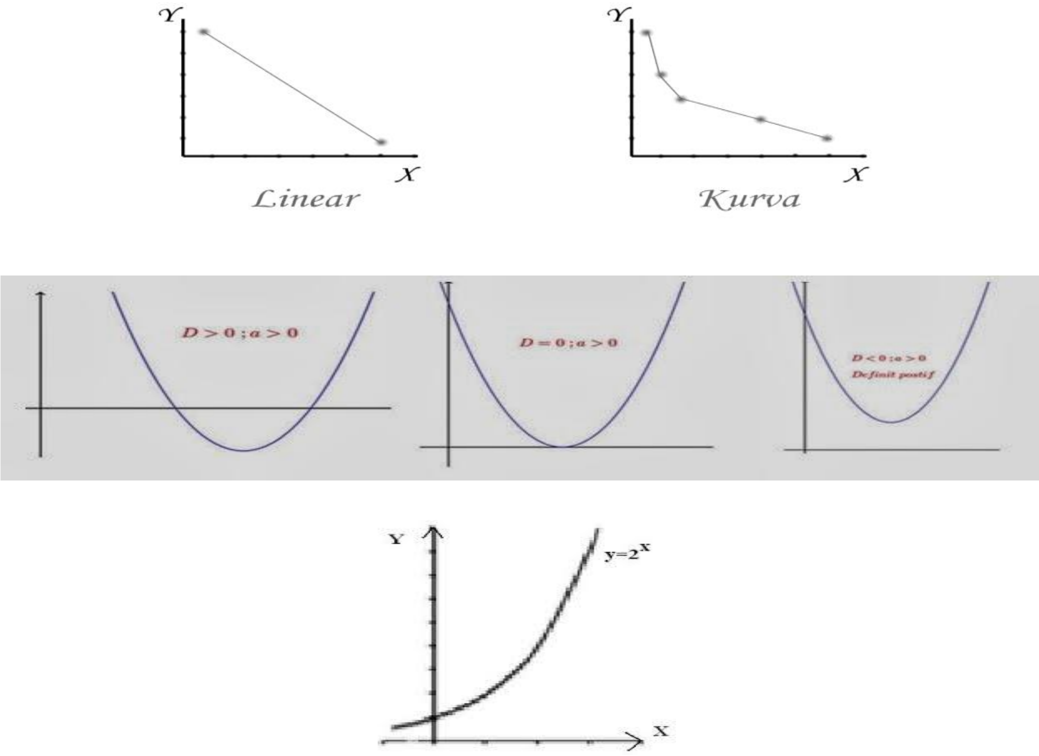
- P = { (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (0, 4) }

  Adalah *suatu fungsi* sebab tidak ada pasangan terurut yang unsur pertamanya sama.

- Q = { (1, 3), (2, 4), (3, 5), (1, 5) }

  Adalah *bukan fungsi* sebab ada dua pasangan terurut yang unsur pertamanya sama yaitu (1, 3) dan (1, 6) dimana unsur pertamanya adalah 1.

Jika daerah asal suatu relasi dinyatakan dengan suatu interval atau selang, maka grafik Cartesius dari relasi tersebut akan berbentuk kurva, kurva yang terbentuk dapat berupa garis lurus atau garis lengkung atau busur.



Gambar 2. Macam-macam grafik fungsi

Suatu fungsi biasanya dinyatakan dengan huruf tunggal misalnya f, g, h, dan sebagainya.

Untuk menyatakan bahwa f adalah suatu fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dilambangkan dengan $f : A \rightarrow B$

Jika $x \in A$ dan $y \in B$ maka lambang pernyataan fungsi tersebut dapat diganti dengan:

$$f : x \rightarrow y$$

"y" adalah peta dari x oleh f atau "y" adalah fungsi dari x dan pada umumnya digunakan lambang

$$y = f\ (x)$$

Bentuk terakhir ini yang disebut ***rumus fungsi***.

x disebut *variabel bebas* dan **y** disebut *variabel tak bebas*, karena nilainya tergantung pada x.

b. Nilai Fungsi (Harga Fungsi)

Yang dimaksud dengan nilai fungsi adalah suatu nilai y yang diperoleh apabila variabel x diberi harga tertentu. Misal diberikan rumus fungsi $y = f(x) = x^2 - 2$, maka:

Nilai fungsi untuk :

$x = -3$ adalah $f(-3) = (-3)^2 - 2 = 9 - 2 = \mathbf{7}$

$x = -1$ adalah $f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

$x = 0$ adalah $f(0) = (0)^2 - 2 = 0 - 2 = -2$

$x = 2$ adalah $f(2) = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$x = a$ adalah $f(a) = (a)^2 - 2 = a^2 - 2$

$x = k+1$ adalah $f(k + 1) = (k + 1)^2 - 2$

$= k^2 + 2k + 1 - 2$

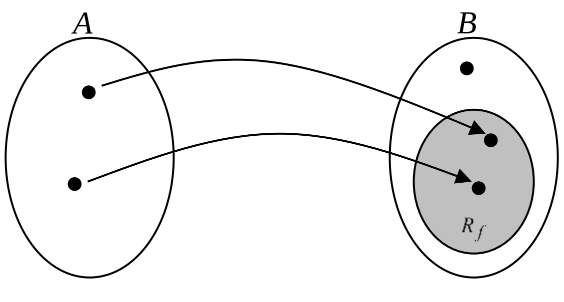
$= k^2 + 2k - 1$

c. Daerah Asal Fungsi

Apabila f merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B, maka dituliskan: $f : A \to B$ Dalam hal ini, himpunan A dinamakan *domain* atau *daerah definisi* atau *daerah asal*, sedangkan himpunan B dinamakan *kodomain* atau *daerah kawan* fungsi f. Domain fungsi f ditulis dengan notasi D_f, dan apabila tidak disebutkan maka disepakati bahwa domain fungsi f adalah himpunan terbesar di dalam R sehingga f terdefinisikan atau ada. Jadi:

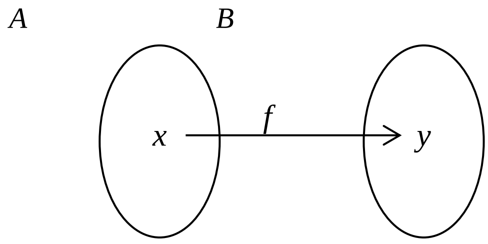
$$D_f = \{x \in R : \; f(x) \text{ ada (terdefinisikan)}\}$$

Himpunan semua anggota B yang mempunyai kawan di A dinamakan *range* atau *daerah hasil* fungsi f, ditulis R_f atau Im(f) (Perhatikan Gambar 2.1.2).



Gambar 3.

Jika pada fungsi $f : A \to B$, sebarang elemen $x \in A$ mempunyai kawan $y \in B$, maka dikatakan "*y* merupakan bayangan *x* oleh *f* " atau "*y* merupakan nilai fungsi *f* di *x*" dan ditulis $y = f(x)$.



Gambar 4. *f* fungsi dari himpunan *A* ke *B*.

Selanjutnya, *x* dan *y* masing-masing dinamakan *variable bebas* dan *variabel tak bebas*. Sedangkan $y = f(x)$ disebut *rumus fungsi f*.

Contoh 1: Tentukan domainnya.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ b. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ c. $f(x) = \dfrac{1}{x+5} + \ln(x^2 - x - 6)$

Penyelesaian:

a. Suatu hasil bagi akan memiliki arti apabila penyebut tidak nol. Oleh karena itu,

$$D_f = \left\{ x \in R : \frac{1}{x+2} \text{ terdefinisikan} \right\} = \{x \in R : x + 2 \neq 0\} = R - \{-2\}$$

b. Karena akar suatu bilangan ada hanya apabila bilangan tersebut tak negatif, maka:

$$D_f = \left\{ x \in R : \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \text{ ada} \right\} = \left\{ x \in R : \frac{x}{x^2-1} \geq 0 \right\}$$
$$= \{x \in R : -1 < x \leq 0 \text{ atau } x > 1\} = (-1,0] \cup (1,\infty).$$

c. Suatu jumlahan memiliki arti apabila masing-masing sukunya terdefinsikan. Sehingga:

$$D_f = \left\{ x \in R : \frac{1}{x+5} + \ln(x^2 - x - 6) \text{ ada} \right\}$$
$$= \left\{ x \in R : \frac{1}{x+5} \text{ ada dan } \ln(x^2 - x - 6) \text{ ada} \right\}$$
$$= \{x \in R : x + 5 \neq 0 \text{ dan } (x^2 - x - 6) > 0\}$$
$$= \{x \in R : x \neq -5 \text{ dan } (x < -2 \text{ atau } x > 3)\}$$
$$= \{x \in R : x \neq -5 \text{ dan } x < -2\} \text{ atau } \{x \in R : x \neq -5 \text{ dan } x > 3)\}$$
$$= (-\infty,-5) \cup (5,-2) \cup (3,\infty).$$

Contoh 2: Diberikan suatu fungsi f dengan rumus f (x) = x^2 – 4 dengan daerah asal 3 < x < 2

a. Gambarkan grafik fungsi tersebut

b. Tentukan nilai dari f (0), f (1), f (–2), f (-3), f (–), f (), f (2)

c. Tentukan daerah hasilnya (Rf)

Jawab:

b. f (0) = $(0)^2$ – 4 = –4

f (1) = $(1)^2$ – 4 = 1 – 4 = -3

f (-2) = $(–2)^2$ - 4 = 4 – 4 = 0

f (–3) = $(–3)^2$ – 4 = 9 – 4 = 5

f (–) = $(–)^2$ – 4 = – 4 = –3

f () = $()^2$ – 4 = – 4 =

f (2) = tak terdefinisi sebab;

D_f = (x | 3 < x < 2) dan x = 2 bukan anggota D_f.

Tapi untuk membantu penggambaran grafik tidak perlu melihat D_f.

c. Dari grafik yang dihasilkan dapat dilihat bahwa nilai f(x) paling kecil adalah –4, dan paling besar adalah 5. Jadi daerah hasilnya adalah R_f = (y | –4 < y< 5)

Tentukan daerah asal fungsi-fungsi berikut.

a. f(x) = 2x – 3

b. f(x) = x^2 – 90(x + 3) (x – 3)

c. f(x) = x^2 + 2x – 15 = (x + 5) (x – 3)

Catatan:

Yang dimaksud mencari daerah asal pada contoh di atas adalah menentukan himpunan bilangan x seluas-luasnya yang memungkinkan f(x) bernilai riil atau terdefinisi. Daerah asal yang sifatnya demikian disebut *Daerah asal alami*.

Jawab:

a. f(x) = 2x + 3 Dapat diamati bahwa untuk x bilangan riil berapapun nilainya, maka f (x) akan bernilai riil atau terdefinisi. Jadi daerah asalnya adalah $x \in R$, D_f = (x | $x \in R$).

b. f(x) = x^2 – 90(x + 3) (x – 3)=0, f(x) akan terdefinisi jika bilangan di bawah tanda akar lebih atau sama dengan nol. sehingga:

x^2 – 90(x + 3) (x – 3)=0

Dan nilai-nilai x yang memenuhi pertidaksamaan terakhir adalah x – 3 atau x3.

Jadi daerah asalnya adalah D_f = { x | x<–3 atau x>3}

c. f(x) = x^2 + 2x – 15 = (x + 5) (x – 3)=0

Analog dengan soal b.

x^2 + 2x – 15 = (x + 5) (x – 3)=0

D_f = { x | x<–5 atau x>3 }

Kerjakan soal-soal berikut ini di buku tugasmu.

1. Himpunan-himpunan pasangan terurut bi bawah ini adalah beberapa relasi dari himpunan P = (–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3) ke himpunan Q = (0, 1, 3, 4, 9). Gambarkan diagram panahnya kemudian tentukan relasi mana saja yang merupakan fungsi. Tentukan pula daerah asal dan daerah hasilnya.

a. F = { (–3, 0), (–2, 3), (0, 1), (1, 4) }

b. G = { (1, 0), (–2, 3), (1, 4), (2, 9) }

c. H = { (–2, 4), (–1, 4), (0, 4), (2, 4) }

d. K = { (–3, 9), (–2, 4), (–1, 1), (0, 0), (1, 1(, (2, 4), (3, 9) }

e. M = { (3, 3), (3, 9), (0, 0), (0, 3) }

2. Diberikan suatu fungsi dengan rumus f(x) = $-x^2$ + 4x

a. Tentukan nilai-nilai dari : f (–1), f (0), f(1), f(2), f(3), f(4), dan f(5).

b. Tentukan nilai dari: f (3 + k),

c. Tentukan nilai-nilai k jika f(k) = 3

d. Tentukan nilai k agar f (k – 3) = 4

e. Gambarkan fungsi grafik tersebut.

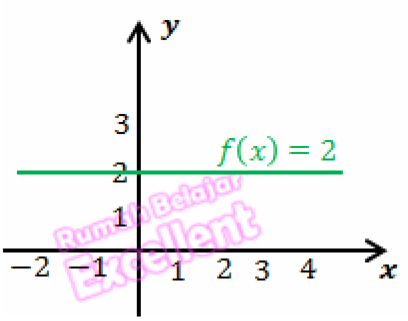
d. Macam-Macam Fungsi

Berikut adalah fungsi-fungsi khusus dan penjelasannya.

1) Fungsi Konstan

Fungsi konstan adalah sebuah fungsi yang dirumuskan dengan f(x) = k, dengan k adalah konstanta riil. Grafiknya berupa sebuah garis mendatar yang berjarak k satuan dari sumbu x (gambar 10).

Jika k > 0 maka garis berada di atas sumbu x. Jika k < 0, maka garis berada di bawah sumbu x dan jika k = 0 maka f(x) = 0, garis berimpit dengan sumbu **x**.



Gambar 5. Fungsi Konstan

2) Fungsi Identitas

Fungsi identitas adalah sebuah fungsi yang dirumuskan dengan f(x) = x. Grafiknya berupa sebuah garis yang melalui titik asal dengan gradien (tanjakan)

Dari kedua fungsi tersebut di atas dapat dibentuk atau dibangun banyak fungsi. Sembarang fungsi yang dapat dibangun dari fungsi konstan dan fungsi identitas dengan memakai operasi-operasi penambahan, pengurangan, dan perkalian disebut *fungsi Polinom*.

Bentuk umum fungsi polinom adalah:

$$\mathbf{f(x) = a_n \cdot x^n \,;\, a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a \cdot x + a}$$

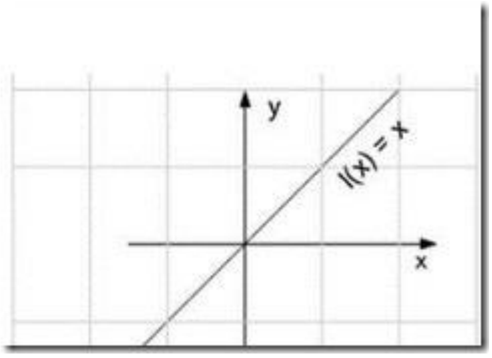
Dimana koefisien a adalah bilangan riil dan n adalah bilangan bulat tak negatif (0, 1, 2, 3, . . .n)

Jika a_n 0, maka **n** adalah **derajat** dari fungsi polinom.

3) Fungsi Linear

Fungsi linear adalah fungsi **polinom berderajat satu**. Bentuk umum fungsi linear adalah:

f(x) = ax + b; a dan b adalah konstanta riil. Grafiknya berupa garis yang melalui titik-titik (a, 0) dan (0, b).



Gambar 6. Grafik Fungsi Linier

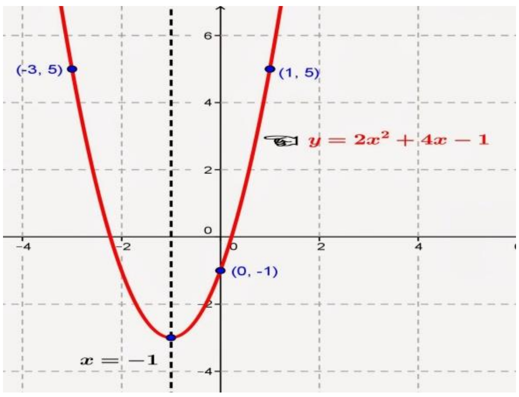
4) Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah fungsi **polinom berderajat dua**. Bentuk umumnya adalah:

f(x) = ax^2 + bx + c

Grafiknya berbentuk parabola.

Parabola terbuka ke atas jika a > 0 dan terbuka ke bawah jika a < 0



Gambar 7. Grafik Fungsi Kuadrat jika a>0

Ditinjau dari kesimetrisan kurva, fungsi terbagi menjadi:

- **Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil**

  Suatu fungsi yang didefinisikan oleh y = f(x) dikatakan:

1. **Fungsi Genap**, jika dipenuhi: **$f(-x) = f(x)$**

2. **Fungsi Ganjil**, jika dipenuhi: **$f(-x) = -f(x)$**

Jika 1 dan 2 tidak dipenuhi dikatakan bahwa fungsi tak genap dan tak ganjil.

Periksalah apakah fungsi-fungsi berikut ini genap, ganjil, atau tak genap ganjil.

a. $f(x) = x$ **b.** $f(x) = x^2-4$ **c.** $f(x) = x^3$

Jawab:

a. $f(x) = x$

$f(x) = -x = -f(x)$

Jadi **f ganjil**

b. $f(x) = x^2 - 4$

$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$

Jadi **f genap**

c. $f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Jadi **f ganjil**

Periksalah apakah fungsi-fungsi berikut adalah genap, ganjil, atau tak genap dan tak ganjil.

a. $f(x) = -3x$

b. $f(x) = x^2 + 2$

c. $f(x) = 3x^3 - 6x$

d. $f(x) = 5x^4 + x2$

e. $f(x) = 4^2 - 6x$

f. $f(x) =$

g. $f(x) = x^2 - 4x - 2$

h. $f(x) =$

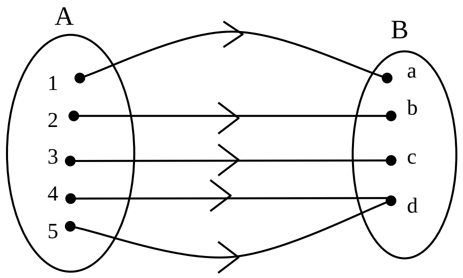
3. Sifat-sifat Fungsi

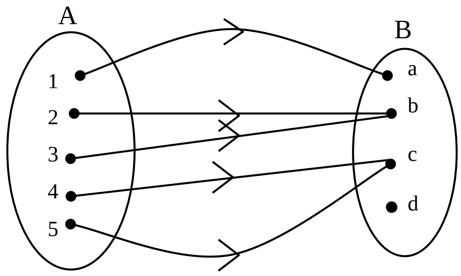
a. Fungsi Surjektif

- Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kepada jika dan hanya jika daerah fungsi f sama dengan himpunan B atau $R_f = B$
- Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi into atau fungsi ke dalam jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f merupakan himpunan bagian murni dari himpunan B atau R_f atau $R_f \subset B$.

Contoh :

Himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5} dan B = {a, b, c,





Fungsi f adalah fungsi into

Gambar 8. Pemeraan Fungsi

$R_f = \{a, b, c\}$

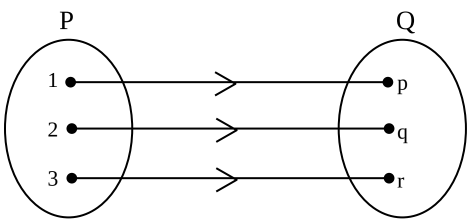
$R_f \subset B$

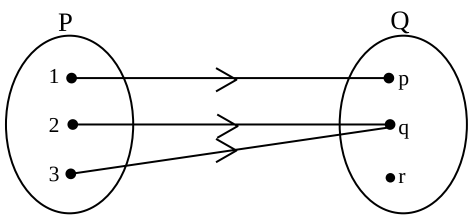
b. Fungsi Injektif

Fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk tiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$

Contoh :

Himpunan P = {1, 2, 3} dan Q = {p, q, r}.





Fungsi f adalah fungsi injektif

Fungsi f bukan fungsi injektif

Untuk mengetahui fungsi injektif atau bukan, dapat dilihat melalui grafik

1) Gambarlah grafik fungsi y = f(x) pada bidang Cartesius
2) Ambillah nilai-nilai x_1, x_2 anggota daerah asal dan $x_1 \neq x_2$
   a) Jika $f(x_1) \neq f(x_2)$ maka f merupakan fungsi injektif
   b) Jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka f bukan fungsi injektif

Contoh :

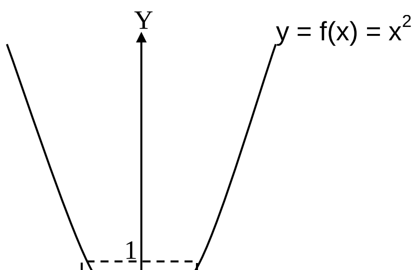
1. Manakah yang merupakan fungsi injektif di bawah ini :

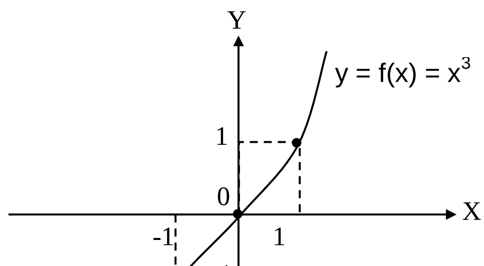
   a) $y = f(x) = x^2, x \in R$ b) $y = f(x) = x^3, x \in R$

   Jawab :

a

b





bukan fungsi injektif

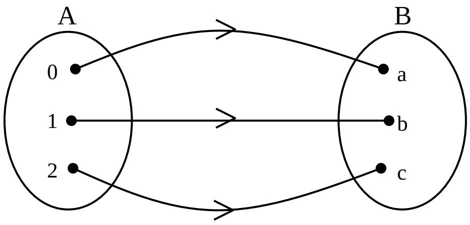
fungsi injektif

c. Fungsi Bijektif

Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut sebagai fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f sekaligus merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.

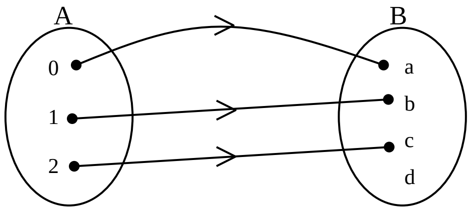
Contoh :

Fungsi f : A $\rightarrow$ B
A = {0, 1, 2} dan B = {a, b, c}



fungsi f bijektif

Fungsi f : A $\rightarrow$ B
A = {0, 1, 2} dan B = {a, b, c, d}



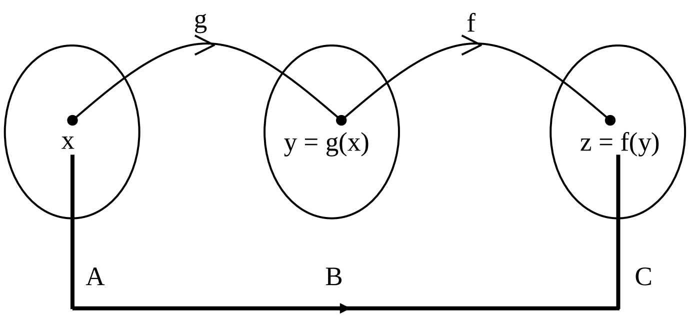
fungsi f bukan bijektif

d. Fungsi Komposisi

Operasi komposisi dilambangkan dengan o (dibaca : komposisi)

Fungsi baru dapat dibentuk dengan operasi komposisi

a. (f $_o$ g) (x), dibaca: f komposisi g x atau f g x



b. (g $_o$ f) (x), dibaca, g komposisi fx atau g f x

Fungsi g : A $\rightarrow$ B

Tiap x $\in$ A dipetakan ke y $\in$ B

Sehingga g : x $\rightarrow$ y ditentukan dengan rumus : y = g(x)

h = f o g

Fungsi $f : B \rightarrow C$.

Tiap $y \in B$ dipetakan ke $z \in C$, sehingga $f : y \rightarrow z$ ditentukan dengan rumus :

$z = f(y)$

Fungsi $h : A \rightarrow C$.

Tiap $x \in A$ dipetakan ke $z \in C$, sehingga $h : x \rightarrow z$ ditentukan dengan rumus :

$z = h(x)$

Fungsi h disebut komposisi dari fungsi f dan fungsi g.

Komposisi fungsi f dan g ditulis dengan notasi $h = f_o g$ atau $h(x) = (f_o g)(x)$

Contoh :

1. Fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ ditentukan $f(x) = 4x - 1$ dan $g(x) = 2x$.

   Tentukan :

   a) $(f_o g)(x)$
   b) $(g_o f)(x)$

   Jawab :

   a) $f(x) = 4x - 1$
      $f(g(x)) = 4.g(x) - 1$
      $(f_o g)(x) = 4(2x) - 1$
      $= 8x - 1$

   b) $g(x) = 2x$
      $g(f(x)) = 2.f(x)$
      $(g_o f)(x) = 2(4x - 1)$
      $= 8x - 2$

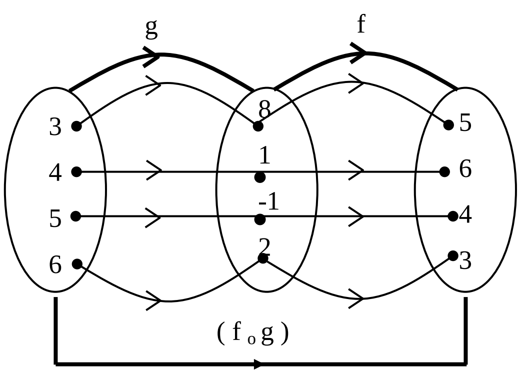
2. Fungsi-fungsi f dan g dinyatakan dengan pasangan-terurut

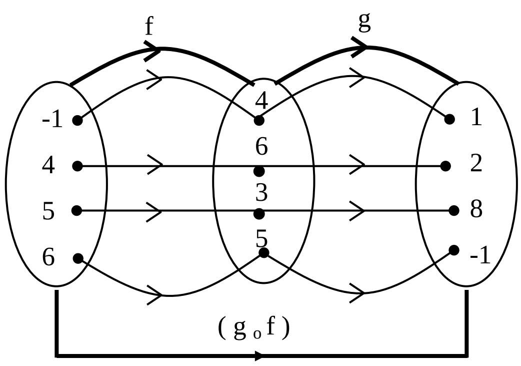
   f = {(-1, 4), (1, 6), (2, 3), (8, 5)}
   g = {(3, 8), (4, 1), (5, –1), (6, 2)}

   Tentukan :

a)	$(f_o g)$	d)	$(f_o g)(1)$
b)	$(g_o f)$	e)	$(g_o f)(1)$
c)	$(f_o g)(4)$	f)	$(g_o f)(4)$

   Jawab :





$(f_o\, g) = \{(3, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 3)\}$ $\quad$ $(g_o\, f) = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 8), (8, -1)\}$

a) $(f_o\, g)$ (4) = 6

b) $(f_o\, g)$ (1) tidak ada

c) $(g_o\, f)$ (1) = 2

d) $(g_o\, f)$ (4) tidak ada

e) $(g_o\, f$ (1) = 2

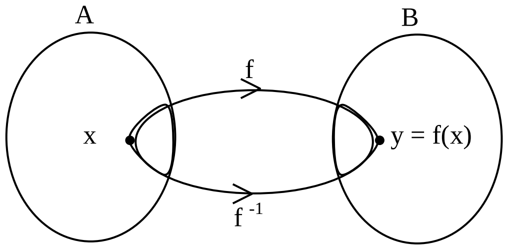
f) $(g_o\, f)$ (4) tidak terdefinisi

5. Fungsi Invers

Suatu fungsi $f : A \to B$ mempunyai fungsi invers $f^{-1} : B \to A$ jika dan hanya jika f merupakan fungsi bijektif atau himpunan A dan B mempunyai korespondensi satu-satu.

Jika fungsi $f : A \to B$ pasangan terurut $f : \{(a, b)\ I\ a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Maka invers fungsi f adalah $f^{-1} : B \to A$ adalah $f^{-1} = \{(b, a)\ I\ b \in B \text{ dan } a \in A\}$



Contoh :

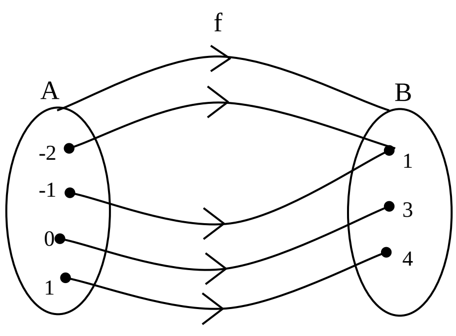
1. A = {– 2, –1, 0, 1} dan B = {1, 3, 4}.

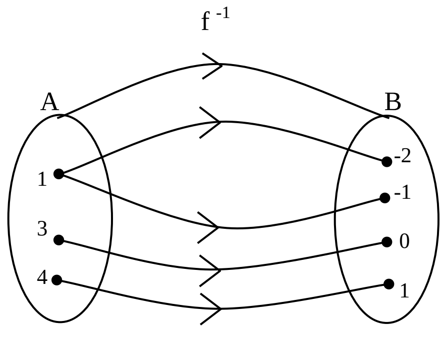
Fungsi : $A \to B$ ditentukan oleh f = {(– 2, 1), (–1, 1), (0, 3), (1, 4)}

Carilah invers fungsi f, kemudian selidikilah apakah invers fungsi f itu merupakan fungsi

Jawab :

$f^{-1}: B \to A$ ditentukan oleh $f^{-1} = \{(1, -2), (1, -1), (3, 0), (4, 1)\}$





Dari gambar terlihat f^{-1} adalah relasi biasa (bukan fungsi) sebab terdapat dua pasangan terurut yang mempunyai ordinat sama yaitu (1, – 2) dan (1, –1)

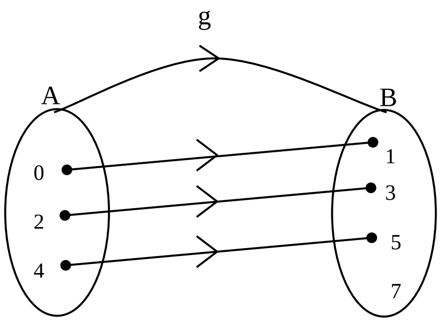
2. A = {0, 2, 4} dan B = {1, 3, 5, 7}.

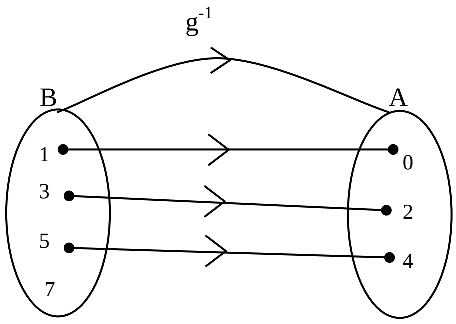
Fungsi : A $\rightarrow$ B ditentukan oleh g = {(0, 1), (2, 3), (4, 5)}

Carilah invers fungsi g, kemudian selidikilah apakah invers fungsi g itu merupakan fungsi

Jawab :

g^{-1} : B $\rightarrow$ A ditentukan oleh g^{-1} = {(1, 0), (3, 2), (5, 4)}





Dari gambar terlihat g^{-1} adalah relasi biasa (bukan fungsi) sebab ada sebuah anggota di B yang tidak dipetakan ke A, yaitu 7

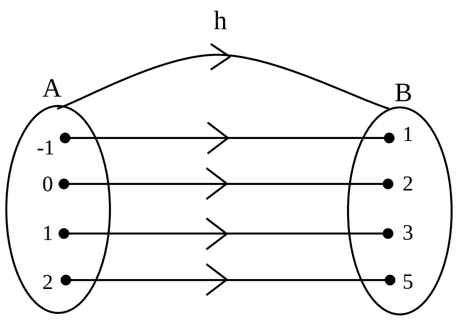
3. A = {–1, 0, 1, 2} dan B = {1, 2, 3, 5}.

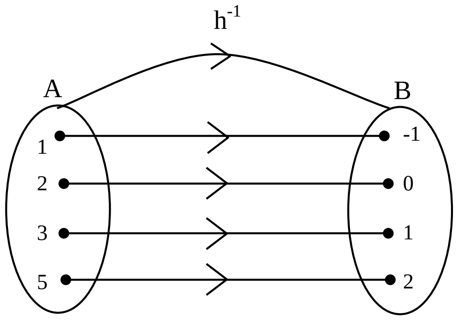
Fungsi h: A $\rightarrow$ B ditentukan oleh h = {(–1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 5)}.

Carilah invers fungsi h, kemudian selidikilah apakah invers fungsi h itu merupakan fungsi.

Jawab :

h^{-1} : B $\rightarrow$ A ditentukan oleh h^{-1} = {(1, –1), (2, 0), (3, 1), (5, 2)}





Dari gambar tampak bahwa h^{-1} merupakan suatu fungsi.

Jadi, h^{-1} adalah fungsi invers.

4. Carilah fungsi inversnya

a) f(x) = x + 1

b) f(x) = x^2 – 1

Jawab :

a) y = x + 1

$x = y - 1$

$\boxed{x = f^{-1}(y)}$

$f^{-1}(y) = y - 1$

$f^{-1}(x) = x - 1$

b) $y = x^2 - 1$

$x^2 = y + 1$

$x = \sqrt{y+1}$

$\boxed{x = f^{-1}(y)}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y+1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

5. Fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Carilah $f^{-1}(x)$

Jawab :

$y = \dfrac{x}{x+1}$

$y(x + 1) = x$

$yx + y = x$

$(y - 1)x = -y$

$x = \dfrac{-y}{y-1}$

$\boxed{x = f^{-1}(y)}$

$f^{-1}(y) = \dfrac{-y}{y-1}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{-x}{x-1}$

B. Operasi Aljabar pada Fungsi

Seperti halnya pada bilangan riil maka operasi aljabar yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan dapat diterapkan pada fungsi.

Andai diberi fungsi-fungsi f dan g dengan rumus:

$f(x) = 2x \quad 4$; $g(x) =$

Dari f dan g tersebut dapat dibentuk fungsi baru f + g, yaitu :

$(f + g) = f(x) + g\,(x) = 2x + 4 +$

Daerah asal fungsi baru ini yaitu D_{f+g} adalah himpunan bilangan x yang mana harus memenuhi f juga memenuhi g. Jadi daerah asal f + g adalah *irisan* dari daerah asal f dan g. (gambar 28, 29)

Dari contoh di atas dapat ditentukan bahwa:

D_f = (x | x R) ; D_g = (x | x 1)

D_f = D_f D_g = (x | x 1)

Dapat dilihat dengan jelas bahwa untuk x 1, f(x) terdefinisi, g(x) terdefinisi, dan (f + g) (x) terdefinisi. tapi untuk x = –2 (misalnya). f(x) terdefinisi, tapi g(–2) tak terdefinisi jadi –2 D_{f+g}

Fungsi-fungsi baru yang lain yaitu **f – g**, **f · g**, dan diperoleh dengan cara yang sama.

2. Sifat-Sifat Fungsi Komposisi

Operasi komposisi antara dua fungsi tidak bersifat komutatif.

Andai diberikan dua buah fungsi f dan g sebagai berikut:

f (x) = 2x + 3 dan **g (x) = x^2** , maka

(fg) (x) = f (g(x)) = f (x^2) = 2 (x^2) + 3 = **$2x^2$ + 3** dan

(gf) (x) = g (f(x)) = g (x + 3) = $(2x + 3)^2$ = **$4x^2$ + 12x + 9**

Tampak jelas bahwa: **(fg) (x) (gf) (x)**

Sifat komutatif akan berlaku pada operasi komposisi dua fungsi f dan g, bila:

1. Salah Satu dari f atau g adalah Fungsi Identitas

Misalnya f (x) = 2x + 3 dan g (x) = x = I (x)

maka

(fg) (x) = f (g (x)) = f (x) = 2x + 3

(gf) (x) = g (f (x)) = g (2x + 3) = 2x + 3

Tampak bahwa (fg) (x) = (gf) (x) atau

(fk) (x) = (kf) (x)

2. Fungsi f dan Fungsi g Sama

Misalnya f (x) = 3x + 1 dan g (x) = 3x + 1

maka

(fg) (x) = f (g (x)) = f (3x + 1) = 3 (3x + 1) + 1 = 9x + 4

(gf) (x) = g (f (x)) = g (3x + 1) = 3 (3x + 1) + 1 = 9x + 4

Jadi (fg) (x) = (gf) (x)

Catatan

Karena f (x) = g (x) maka (fg) (x) dapat kita ganti dengan (ff) (x) atau dengan (gg) (x) yang mana komposisi fungsi demikian disebut komposisi diri.

3. Fungsi g Merupakan Fungsi Kebalikan (Invers) dari f atau Sebaliknya.

Hal ini akan dijelaskan pada sub bab C yaitu tentang fungsi invers.

Komposisi tiga fungsi atau lebih *bersifat asosiatif.* Diberikan tiga buah fungsi f, g, dan h maka selalu berlaku:

(f(gh)) (x) = ((fg)h) (x) . . . (•)

Perhatikan ruas kiri : (f(gh)) (x) = f ((gh) (x)) = f (g (h (x))

dan ruas kanan : ((fg)h)) (x) = (fg) (h(x)) = f (g (h (x))

Menurut definisi, ruas kiri sama dengan ruas kanan, jadi persamaan (•) selalu benar.

Misal diberikan tiga fungsi:

f (x) = 2x + 3 ; **g (x)** = x^2 ; dan **h (x)** =
maka

fg (gh) = (f(gh)) (x) = f ((gh) (x)) = f (g (h (x))

= f (g ())

= f $(()^2)$

= 2 $((–)^2)$ + 3

= **+ 3**

Komposisi dari tiga fungsi di atas diagram panahnya adalah sebagai berikut.

x dipetakan oleh h ke h (x), h (x) dipetakan oleh g ke g(h (x)), dan terakhir g (h (x)) dipetakan oleh f ke f (g(h(x))

h : x y y = h (x)

g : y z z = g (y) = g [h (x)]

f : z v v = f (z) = f [g [h (x)]

Latihan

1. Andaikan f dan g adalah fungsi-fungsi yang dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut yaitu:

f = {(–2, 0), (–1, 2), (0, 4), (3, 5)} dan

g = {(4, 6), (5, –2), (2, –1), (0, 3)}

a. Tentukan f (0), f (3), g (5), g (z), f (5), g (3)

b. Tentukan D_f, R_f, D_g, R_g

c. Tentukan R_f D_g dan R_g D_f

d. Tentukan (fg) dan (gf)

e. Tentukan (fg) (4), (fg) (2), (fg) (3), (fg) (0), (gf) (–2), (gf) (0).

2. Ditentukan fungsi-fungsi f, g, dan h dengan rumus f (x) = 3x – 1, g (x) = , dan h (x) = x^2 + 2.

Tentukan

a. f (x), f (4), g (2), g (9), g (0), g (-3), h (2), h (–2)

b. (fg) (x), (fh) (x), (ff) (x), gf) (x), (hg) (x)

c. (f (gh)) (x), ((fg) h) (x)

d. (fg) (4), (fg) (2), (fg) (–2), (hg) (3), (hg) (–3)

3. Seperti pada soal nomor 2 untuk fungsi-fungsi f, g, dan h berikut:

a. **f (x)** = 4 – x^2 ; **g (x)** = ; **h (x)** = –x + 3

b. **f (x)** = ; **g (x)** = ; **h (x)** = x^2

3. Menentukan Fungsi Bila Komposisinya dan Fungsi Lain Diketahui

Ada empat kemungkinan kondisi permasalahan. Komposisi dua fungsi yang diketahui dan satu fungsinya diketahui, yaitu:

a. **fg** dan **f** diketahui, **g** dicari

b. **fg** dan **g** diketahui, **f** dicari

c. **gf** dan **g** diketahui, **f** dicari

d. **gf** dan **f** diketahui, **g** dicari

Dari empat kondisi di atas sebenarnya hanya ada dua kondisi yang umum dimana (a) dan (c) adalah identik, juga (b) dan (d) identik dari segi proses pencarian.

Untuk memahaminya simaklah contoh-contoh berikut:

1. Fungsi f : RR dan g : gR, jika **f (x) = x + 1** dan **(fg) (x)** = **$3x^2$ + 4**, tentukanlah **g (x)**.

Jawab: *(kondisi 1)*

(fog) (x) = $3x^2 + 4$

f [g (x)] = $3x^2 + 4$ . . .(•)

Karena f(x) = x + 1, maka f [g (x)] = g (x) + 1 . . . (••)

dari (•) dan (••) diperoleh:

g (x) + 1 = $3x^2 + 4$

g (x) = $3x^2 + 4 - 1$

Jadi g (x) = $3x^2 + 3$

2. Fungsi f : R R dan g : R R, jika g (x) = $x^2 - 1$ dan (gf) (x) = $4x^2 + 4x$, tentukanlah **f (x)**.

Jawab:

(gf) (x) = $4x^2 + 4x$

g (f (x)) = $4x^2 + 4x$ . . .(•)

Karena g (x) = $x^2 - 1$, maka g (f (x)) = $(f(x))^2 - 1$ . . .(••)

dari (•) dan (••) diperoleh:

$(f(x))^2 - 1 = 4x^2 + 4x$

$(f(x))^2 = 4x^2 + 4x + 1$

$= (2x + 1)^2$

Jadi **f (x) = 2x + 1**

Catatan

Contoh 1 dan 2 adalah kondisi (a) atau (b), prosesnya sama saja. Untuk contoh 3 dan 4, yang akan diberikan adalah kondisi (b) atau (d), yang mana proses pencariannya berbeda dengan kondisi (a) atau (c).

3. Fungsi f : R-R dan g : R-R

Misalnya, g (x) = x – 2 dan (fg) (x) = 3x + 1, tentukan rumus untuk **f (x)**.

Jawab: *(kondisi 2)*

f (g (x)) = 3x + 1

f (x – 2) = 3x + 1 . . .(•)

Untuk mencari f (x) dari persamaan (•) dapat diperoleh dengan dua cara

Cara 1

f (x – 2) = 3x + 1 . . .(•)

Pada ruas kanan harus berbentuk suku atau faktor (x – 2)

f (x – 2) = 3x + 1

= 3 (x – 2) + 6 + 1 ***3x = 3 (x – 2) + 6***

= 3 (x – 2) + 7

Jadi **f (x)** = 3 (x) = 3 (x) + 7 = **3x + 7**

Pada kedua ruas (x – 2) diganti dengan x

Cara 2

f (x – 2) = 3x + 1

Perubah ruas kiri adalah x – 2 dan perubah ruas kanan adalah x

maka: x – 2 bersesuaian dengan x

x – 2 x

x x + 2 ***Kedua ruas + 2***

Jadi jika (x – 2) diruas kiri dirubah menjadi x, maka x diruas kanan berubah menjadi x + 2

Jadi:

f (x) = 3 (x + 2) + 1

= 3x + 6 + 1

= **3x + 7**

4. fungsi f : R- R dan g : R-R, jika f (x) =

dan (gf) (x) = x – 2 tentukan rumus g (x)

Jawab: *(kondisi 4)*

(gf) (x) = g (f (x)) = x – 2

g () = x – 2 . . .(•)

Cara 1

Pada ruas kanan dari persamaan (•) harus terbentuk suatu suku atau faktor .

g () = x – 2 . . .(•) ***Ruas kanan ditambah –5 + 5***

= x – 5 + 3 ***x – 5 = ()^2***

= ()^2 + 3

Jadi **g (x)** = **x^2 + 3** . . . .(•) ***Pada kedua ruas diganti dengan x***

Cara 2

g () = x – 2 . . . . .(•)

Peubah ruas kiri adalah

Peubah ruas kanan adalah x

Jadi bersesuaian dengan x

()^2 x^2 ***Kedua ruas dikuadratkan.***

x – 5 x^2

x x^2 + 5 ***Kedua ruas ditambah 5.***

Jika peubah ruas kiri menjadi x, maka peubah ruas kanan menjadi x^2 + 5 sehingga diperoleh:

g (x) = (x^2 + 5) – 2

g (x) **= x^2 + 3**

5. Fungsi g : R-R ditentukan oleh g (x) = x^2 – 3x + 1 dan fungsi f : R-R. Sehingga (fg) (x) = $2x^2$ – 6x – 1 maka f (x) = . . .

Jawab: *(Kondisi 2)*

Cara 1

(fg)(x) = $2x^2$ – 6x – 1

f(g(x)) = $2x^2$ – 6x – 1 . . .(•)

Pada ruas persamaan (•) harus terbentuk suku atau faktor g(x) = x^2 – 3x +1

f[g(x)] = $2x^2$ – 6x – 1

$= 2 (x^2 – 3x) – 1$

$= 2 (x^2 – 3x + 1) – 2 – 1$

$= 2 (x^2 – 3x + 1) – 3$

$= 2 [g (x)] – 3$

Jadi **f (x) = 2x – 3**

Cara 2

Peubah ruas kiri dari persamaan (•) adalah $g(x) = x^2 – 3x + 1$. Peubah ruas kanan dari persamaan (x) adalah x, sehingga:

$x^2 – 3x + 1$ x . . .(•)

Pada ruas kiri (••) dibentuk bentuk kuadrat sempurna.

$x^2 – 3x + ()^2 – ()^2 + 1$ x

$(x –)^2 – + 1$ x

$(x –)^2$ x + – 1

$(x –)^2$ x +

x –

x +

Jadi jika peubah di ruas kiri diubah dari $(x^2 – 3x + 1)$ x maka peubah di ruas kanan harus diubah dari x + sehingga diperoleh

$f (g(x))$ $= 2x^2 – 5x –1$ . . .(•)

f (x) $= 2 (+)^2 – 6 (+) – 1$

$= 2 \{(x +) + 2 () ( ) + \} – 6 () – 6 () – 1$

$= 2x + + 6 + – 6 – 9 – 1$

$= 2x + – – 1$

= **2x – 3**

Dari contoh 6 dapat disimpulkan bahwa:

- Persoalan seperti keadaan (a) atau (c), tidak ada kesulitan untuk menentukan fungsi yang dicari.
- Persoalan seperti kondisi (b) atau (d) yaitu pada contoh 3, 4, dan 5, ada dua cara untuk mendapatkan fungsi yang dicari. Pada contoh 3 dan 4 cara (1) dan cara (2) sama-sama relatif mudah, tetapi pada contoh 5, cara 1 lebih sederhana daripada cara 2 yang terlihat lebih rumit. Jadi jika fungsi lain yang diketahui berbentuk linear atau $ax^2 + c$, cara 2 pada kondisi (b) atau (d) relatif mudah, tapi jika berbentuk $ax^2 + bx + c$ atau mungkin lebih bervariasi lagi maka cara 1 akan lebih sederhana dan cara 2 akan terasa lebih sulit.

1. Tentukan rumus untuk g(x) jika diketahui:

   a. (fg) (x) = $3x^2 - 2$ dan f (x) = x + 4

   b. (fg) (x) = x2 + 6x dan f (x) = $x^2 - 9$

2. Tentukan rumus untuk f (x) jika diketahui

   a. (gf) (x) = $8x^2 - 11$ dan g (x) = 4x – 1

   b. (gf) (x) = $-4x^2 - 12x - 8$ dan g (x) = $-x^2 + 1$

Fungsi Trigonometri

Bentuk dasar dari fungsi trigonometri diberikan berikut

- f(x) = sin x ; f(x) = csc x
- f(x) = cos x ; f(x) = sec x
- f(x) = tan x ; f(x) = cot x

Sedangkan beberapa persamaan atau identitas yang berlaku pada fungsi trigonometri diberikan :

1. sin (-x) = - sin x
2. cos (-x) = cos x
3. tan (-x) = - tan x
4. csc (-x) = - csc x
5. sec (-x) = sec x
6. cot (-x) = cot x
7. sin (π/2 - x) = cos x
8. cos (π/2 - x) = sin x
9. tan (π/2 - x) = cot x
10. sin (x + y) = sin x cos y + sin y cos x

11. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

12. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

13. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$

14. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

15. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

16. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

17. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

18. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

19. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

20. $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

21. $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

22. $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

23. $\sin x \sin y = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$

24. $\sin x \cos y = \dfrac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

25. $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$

Fungsi Periodik

Fungsi f(x) disebut **fungsi periodik** jika ada bilangan real positif p sehingga berlaku f(x+p) = f(x) untuk setiap x di domain f(x). Nilai p terkecil disebut **periode** dari f(x). Fungsi dasar trigonometri merupakan fungsi periodik dengan periode,

- $f(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi) = f(x + 2\pi)$
- $f(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi) = f(x + 2\pi)$
- $f(x) = \tan x = \tan(x + \pi) = f(x + \pi)$

Translasi (Pergeseran)

Bila grafik fungsi f(x) digeser ke kanan (searah atau sejajar sumbu x) sepanjang k maka hasil pergeseran merupakan grafik dari fungsi f(x - k). Bila grafik fungsi f(x) digeser ke atas (searah atau sejajar sumbu y) sepanjang a maka hasil pergeseran merupakan grafik fungsi f(x) + a.

Fungsi Komposisi

Komposisi dari fungsi f(x) dan g(x) didefinisikan sebagai

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

BAB II
PERSAMAAN

Grafik Persamaan

Penggunaan koordinat untuk titik-titik pada bidang memungkinkan kita untuk memberikan suatu kurva (obyek geometri) dengan memakai suatu persamaan (obyek aljabar). Kita melihat bagaimana ini dilakukan untuk lingkaran-lingkaran dan garis-garis dalam pasal sebelumnya. Sekarang kita ingin memandang proses kebalikannya : yaitu menggambarkan suatu persamaan. **Grafik suatu persamaan** dalam x dan y terdiri atas titik-titik di bidang yang koordinat-koordinat (x,y)-nya memenuhi persamaan — artinya, membuatnya suatu persamaan yang benar.

PROSEDUR PENGGAMBARAN GRAFIK Untuk menggambar suatu persamaan — misalnya, $y = 2x^3 - x + 19$ — kita ikuti prosedur sederhana tiga langkah:

Langkah 1 Dapatkan koordinat-koordinat beberapa titik yang memenuhi persamaan.

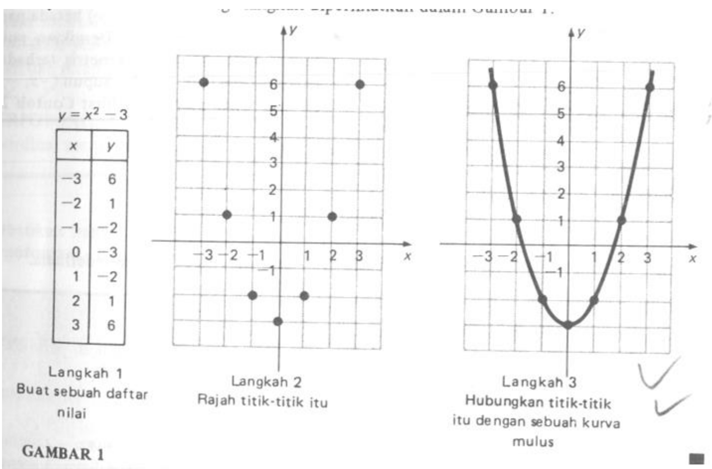
Langkah 2 Rajah titik-titik tersebut di bidang.

Langkah 3 Hubungkan titik-titik tersebut dengan sebuah kurva mulus.

Cara terbaik untuk melakukan Langkah 1 adalah membuat sebuah tabel nilai-nilai. Berikan nilai-nilai pada salah satu varabel, seperti misalnya x, dan tentukan nilai-nilai yang berpadanan dari lainnya, dengan mendaftarkan hasil-hasil yang tersusun dalam tabel.

CONTOH 1Gambar Grafik persamaan $y = x^2 – 3$

Penyelesaiannya. Prosedur tiga langkah diperlihatkan dalam gambar 1



GAMBAR 1

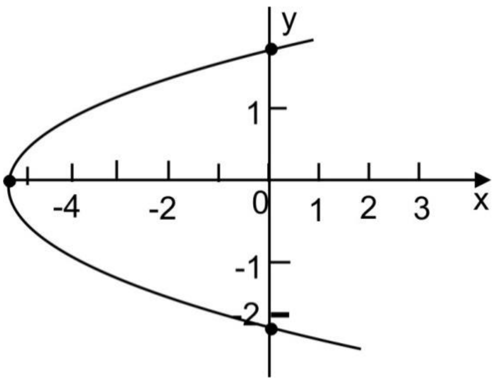
PERPOTONGAN Titik-titk di mana grafik suatu persamaan memotc koordinat memainkan peranan penting dlam banyak hal. Misalnya, pandang

$$Y = x^2 – 2x^2 – 5x + 6 = (x + 2)(x – 1)(x – 3)$$

Perhatikan bahwa y = 0 bilamana x = -2.1.3 Bilangan-bilangan -2, 1 dan 3 disebut perpotongan –x serupa, x = 0 bilamana y = 6, sehingga 6 disebut perpotongan –y

CONTOH 3 Sketsakan grafik dari y2 x + y – 6 = 0, dengan memeprlihatkan semua perpotongan secara jelas.

Penyelesaian. Dengan meletakan y = 0 dalam persmaan yang diberikan, diperoleh x = **-** 6 sehingga perpotongan –x adalah -6. Dengan meletakan x = 0 dalam persamaan, diperoleh y2 + y – 6 = 0, atau (y + 3)(y – 2) = 0; perpotongan – y adalah – 3 dan 2. Pemeriksaan kesimetrian menunjukan bahwa grafik tidak mempunyai salah satu dari tiga tipe simetri yang dibahas sebelumnya.Grafik diperagakan dalam gambar 5.



PERPOTONGAN ANTAR GRAFIK Adakalanva kita perlu mengetahui titik-titik potong antara dua grafik. Titik-titik ini diperoleh dengan memcahkan kedua persamaan grafik tersebut secara bersamaan

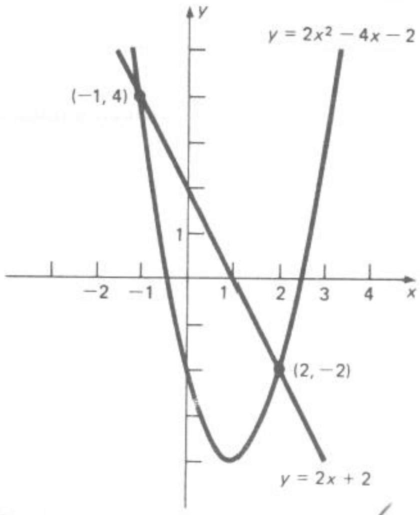
CONTOH 4. Cari titik-titik perpotongan garis y = 2x + 2 dan parabol y = $2x^2$-4x -2 dan sketsakan kedua grafik tersebut pada bidang koordinat yang sama.

Penyelesaian. Kita harus menyelesaikan dua persamaan itu secara serentak. Ini mudah dilakukan dengan penggantian ungkapan untuk y dari persamaan pertama ke dalam persamaan kedua dan kemudian menyelesaikan persamaan yang dihasilkan untuk x.

$$-2x + 2 = 2x^2 — 4x — 2$$
$$0 \quad = 2x^2—2x—4$$
$$0 \quad = 2(x — 2)(x + I)$$
$$x = 1, \qquad x = 2$$

Melalui substitusi, kita temukan nilai-nilai y yang berpadanan adalah 4 dan -2; karena itu titik-titik perpotongan adalah (-1,4) dan (2,-2).

Dua grafik tersebut diperlihatkan dalam Gambar 7.



GAMBAR 7

BAB III
LIMIT

PENDAHULUAN LIMIT

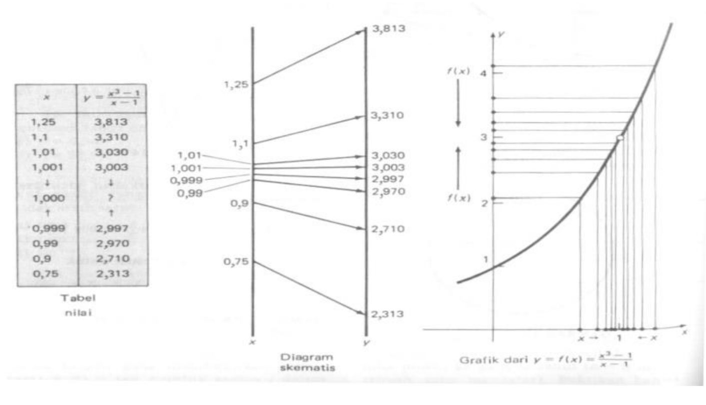
Topik yang dibahas sedemikian jauh merupakan bagian dari apa yang disebut prakalkulus. Topik ini menyediakan dasar-dasar untuk kalkulus, tetapi ini bukan kalkulus. Sekarang kita siap untuk suatu gagasan baru yang penting, yaitu pengertian limit. Gagasan inilah yang membedakan kalkulus dari cabang-cabang matematika lainnya. Memang, kita dapat mendefinisikan kalkulus sebagai pengkajian tentang limit.

Tentu saja, perkataan limit dipergunakan dalam bahasa sehari-hari seperti misalnya seseorang berkata, "Saya mendekati batas kesabaran saya." Pemakaian yang demikian mempunyai hubungan dengan kalkulus, tetapi tidak banyak.

PEMAHAMAN SECARA INTUISI. Pandang fungsi yang ditentukan oleh rumus

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Perhatikan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisikan pada x = 1 karena di titik ini f(x) berbentuk o , yang tanpa anti. Tetapi kita masih dapat. menanyakan apa yang terjadi pada f(x) bilamana x mendekati 1. Secara lebih tepat, apakah f(x) mendekati beberapa bilangan tertentu bilamana x mendekati 1? Untuk sampai pada pertanyaan ini, kita telah melakukan tiga bal. Kita telah menghitung beberapa nilai f(x) untuk x dekat 1, kita telah menunjukkan nilai-nilai ini dalam sebuah diagram skematis, dan kita telah mensketsakan grafik y = f(x) (Gambar 1)



Semua informasi yang telah kita rakit kelihatannya menunjuk ke kesimpulan yang sama: f(x) mendekati 3 bilamana x mendekati 1. Dalam lambang matematis, kita tuliskan

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Ini dibaca “limit dari (x3-1)(x-1) untuk x mendekati 1 adalah 3.”

Dengan menjadi seorang ahli aljabar yang baik (jadi mengetahui bagaimana menguraikan selisih pangkat tiga), kita dapat menyediakan fakta-fakta yang lebih banyak dan lebih baik.

$$\lim_{x->1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3 \qquad = \lim_{x->1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - x}$$

$$= l\ im_{x->1} (x^2 + x + 1) = 1^2 1 + 1 + 1 = 3$$

Perhatikan bahwa (x-1)/(x -1) = 1 selama x ≠ 1. Ini membenarkan langkah yang ke-dua.

Agar yakin bahwa kita berada pada jalur yang benar, kita perlu mempunyai pengertian yang jelas tentang arti perkataan limit. Berikut percobaan kita yang pertama pada sebuah definisi.

Definisi

(Pengertian limit secara intuisi). Untuk mengatakan bahwa $l\ im_{x->c}\ f(x)$ = L . berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka f(x) dekat ke L

Perhatikan bahwa kita tidak mensyaratkan sesuatu agar tepat benar di c. Fungsi f bahkan tidak perlu terdefinisi di c, juga tidak dalam contoh f (x) = $(x^3-1)/(x-1)$ yang baru saja ditinjau. Pemikiran tentang limit dihubungkan dengan perilaku suatu fungsi dekat c, bukannya di c.

Pembaca yang kritis pasti menentang penggunaan perkataan dekat. Apa sebenarnya makna dekat? Seberapa dekat adalah dekat? Untuk jawab-jawab yang persis, beberapa contoh lebih lanjut akan membantu memperjelas pemikiran tersebut.

LEBIH BANYAK CONTOH-CONTOH. Contoh pertama kita kelihatannya remeh, tetapi penting.

CONTOH 1. Cari $\lim_{x->3} (4x - 5)$

Penyelesaian Bilamana x dekat 3; maka 4x -5 dekat terhadap 4 . 3 — 5 = 7. Kita tuliskan

$$\lim_{x->3} (4x - 5) = 7$$

Teorema Limit :

Kebanyakan pembaca akan setuju bahwa membuktikan adanya limit dengan memakai definisi ε -δ dari pasal didepan, disamping memakan waktu juga sukar. Itulah sebabnya mengapa teorema-teorema dalam pasal ini disambut dengan baik. Teorema kita yang pertama sangat penting dengan teorema ini kita dapat menangani hampir semua masalah limit yang akan kita hadapi nanti

Teorema A

(Teorema Limit Utama). Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta dan f dan g adalah fungsi yang mempunyai limit di c. maka

1. $\lim_{x \to c} k = k$

2. $\lim_{x \to c} x = c$

3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$

4. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

5. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

6. $\lim_{x \to c} [f(x) . g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x)$

7. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x->c} f(x)}{\lim_{x->x} g()}$ *asalkan* $\lim_{x->c} g(x) \neq 0;$

8. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n;$

9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x), asalkan \quad \lim_{x \to c} f(x)} > 0$ bilamana n genap.

Fungsi f(x) = $\frac{x^3-1}{x-1}$, x $\neq$1

Contoh ;

1. $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

$= \lim \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$

$= \lim_{x \to 1}$ x2+x+1

$= 1^2 + 1 + 1 = 3$

2.lim$_{x\to 5}$ $(x^2+2+1) = 5^2 + 2.5 + 1 = 36$

3.lim$_{x\to 1}$ $\frac{\sqrt{x-l}}{x-l}$ = lim$_{x\to 1}$ $\frac{\sqrt{x-l}}{\left(\sqrt{x+l}\right)\left(\sqrt{x-l}\right)} = \lim x \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

4.lim$_{x\to\sim}$ $\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$ =lim$_{x\to\sim}$ $\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

=lim$_{x\to\sim}$ $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{\sim + \sim}$

$= \frac{1}{\sim}$

$= 0$

Hasil-hasil yang penting ini akan mudah diingat jika kita pelajari dalam kata-kata.misalnya, pernyataan 4 diterjemahkan sebagai; Limit suatu jumlah dari limit-limit

Tentu saja, Teorema A perlu dibuktikan. Kita tunda pekerjaan tersebut sampai akhir pasal ini, denga pertama-tama memilih untuk memperlihatkan kepada anda bagaimana teorema besar ini dipakai.

PENERAPAN TEOREMA LIMIT UTAMA. Dalam contoh-contoh berikut , nomor-nomor yang dilingkari mengacu kepada pernyataan-pernyataan beromor dari daftar yang diberikan terdahulu. Setiap kesamaan dibenarkan oleh pernyataan yang ditunjuk.

CONTOH : Carilah $\lim_{x\to 3} 2x^4$

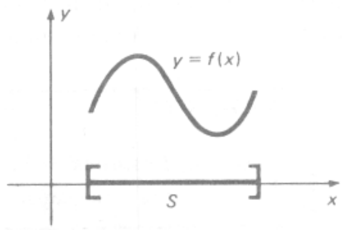
Penyelesaian

$$\lim 2x^4 \overset{3}{=} 2\lim x^4 \overset{8}{=} 2[\lim x]^4 \overset{2}{=} 2[3]^4 = 162$$

Maksimum dan Minimum

Dalam hidup ini, kita sering menghadapi masalah guna mendapatkan jalan terbaik untuk melakukan sesuatu. Sebagai contoh, seorang petani ingin memilih kombinasi hasil panen yang dapat menghasilkan keuntungan terbesar. Seorang dokter akan menentukan dosis obat yang terkecil untuk menyembuhkan suatu penyakit. Seorang kepala pabrik akan menekan sekecil mungkin biaya pendistribusian produknya. Kadangkala salah satu dari masalah di atas dapat dirumuskan sehingga akan melibatkan memaksimumkan dan meminimumkan fungsi tertentu. Bila demikian, metode kalkulus menyediakan sarana yang ampuh untuk memecahkan masalah seperti itu

Andaikan kita mengetahui fungsi f dan do-main (daerah asal) S seperti pada Gambar 1. Tugas kita yang pertama adalah menentukan apakah f memiliki nilai maksimum atau mini-mum pada S. Anggap bahwa nilai-nilai tersebut ada, kita ingin mengetahui lebih lanjut di mana dalam S nilai-nilai itu berada. Akhirnya, kita dapat menentukan nilai-nilai maksimum dan minimum.



GAMBAR 1

Menganalisis ketiga tugas ini merupakan tujuan pokok pada bagian ini.

Kita mulai dengan memperkenalkan suatu kosakata yang tepat.

Definisi

Andaikan S, daerah asal f, memuat titik c. Kita katakan bahwa:

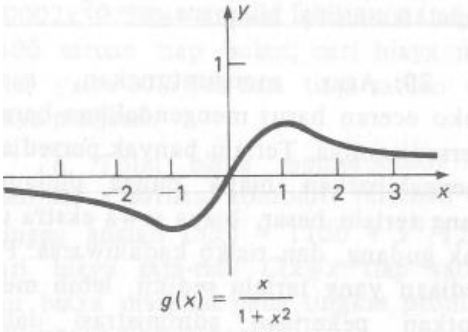
(i). f(c) adalah nilai maksimum f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S;

(ii). f(c) adalah nilai minimum f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S;

(iii). f(c) adalah nilai ekstrim f pada S jika is adalah nilai maksimum atau nilai minimum.

Limit di Ketakhinggaan, Limit Tak Terhingga

Konsep "tak terhingga" telah mengilhami dan menggoda para matematikawan sejak jaman dulu. Masalah yang paling dalam dan paradoks besar dari matematika seringkali jalin-menjalin dengan pemakaian perkataan ini, kemajuan matematika sebagian dapat diukur dalam bentuk peranan dari ketakhinggan. Kita telah memakai lambang-lambang ∞ dan - ∞ dalam notasi kita untuk selang tertentu. Jadi $(3, \infty)$ adalah cara kta untuk menyatakan himpunan bilangan riil yang lebih besar daripada 3. silahkan mencatat bahwa kita tidak pernah menambahkannya pada suatu bilangan atau membaginya oleh suatu bilangan. Kita akan memakai lambang ∞ dan - ∞ dalam suatu cara baru dalam pasal ini, tetapi tetap tidak akan mewakili bilangan-bilangan



GAMBAR.1

x	$\frac{x}{1+x^2}$
10	0,099
100	0,010
1000	0,001
10000	0,0001
↓	↓
∞	?

GAMBAR 2

Sebuah Contoh Pandang fungsi g(x) = x/(1+x^2) digrafikan secara agak cermat dalam pasal 4.; sebuah versi grafik itu yang lebih kecil diperlihatkan dalam gambar 1. kita menanyakan pertanyaan ini : Apa yang terjadi pada g(x) bila x menjadi semakin lama semakin besar? Dalam lambang, kita menanyakan nilai lim g(x).

x → ∞

Bilamana kita menuliskan x → ∞, kita tidak mengatakan bahwa pada suatu tempat jauh, jauh diarah kanan pada sumbu x, terdapat sebuah bilangan – lebih besar dari pada semua bilangan lain – yang didekati oleh x, melainkan, kita memakai x → ∞ sebagai cara singkat untuk mengatasi bahwa x menjadi semakin besar tanpa batas

Dari tabel dalam gambar 2, kita telahmendaftarkan nilai-nilai g(x) = x(1+x^2) untuk beberapa nilai x. kelihatan bahwa g(x) menjadi semakin kecil bilamana x menjadi semakin besar. Kita tuliskan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Dari pengalaman dengan bilangan-bilangan negatif besar akan mengantar kita untuk menuliskan

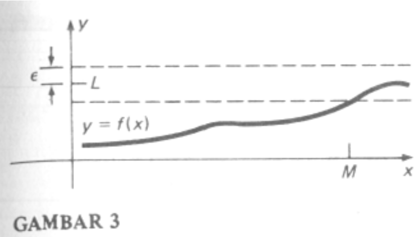
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

DFINISI-DEFINISI CERMAT LIMIT BILA X → ± ∞ Dalam analogi dengan definisi, a untuk limit-limit biasa, kita membuat definisi berikut.

Definisi

(Limit bila x →∞). Andaikan f terdefinisi pada [c, ∞) untuk suatu bilangan c. Kita katakan bahwa $\lim_{\chi\to\infty} f(x)$ = L jika untuk masing-masing ε > 0, terdapat bilangan M yang berpadanan sedemikian sehingga

X > M ⇒ |f(x) – L + < ε



GAMBAR 3

anda akan memperhatikan bahwa M dapat tergantung pada. Umumnya, semakin kecil ε, maka M harus semakin besar. Grafik dalam Gambar 3 mungkin membantu anda memahami apa-apa yang telah kita dikatakan

Definisi

(Limit bila x → ∞). Andaikan f terdefinisi pada (- ∞, c] untuk suatu bilangan c. kita katakan bahwa $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ Jika untuk masing-masing ε > 0, terdapat suatu bilangan M yang berpadanan sedemikian sehingga.

X < M ⇒ |f(x) – L| < ε

Contoh 1 Buktikan bahwa jika k bilangan bulat positif maka

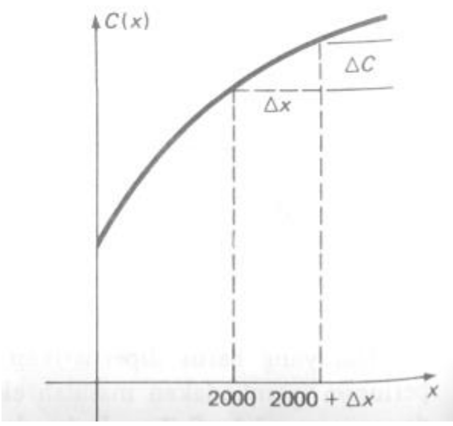
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad dan \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Penyelesaian andaikan diberikan ε > 0. pilih M = $\sqrt[k]{1/\varepsilon}$. Maka x > memenuhi

$$\left| \frac{1}{x^k} - 0 \right| = \frac{1}{x^k} < \frac{1}{M^k} = \varepsilon$$

Bukti pernyataan kedua adalah serupa.

PENGGUNAAN KATA MARJINAL Andaikan ABC mengetahui fungsi biayanya C(x) dan untuk sementara direncanakan memproduksi 2000 satuan tahun ini. Direktur Utama Badirun ingin menetapkan biaya tambah tiap satuan jika ABC memperbesar produksinya sedikit. Misalnya, apakah itu akan lebih sedikit dari pendapatan tambahan tiap satuan? Jika demikian, akan merupakan pertimbangan ekonomi yang baik untuk memperbesar produksinya.



Jika fungsi biaya adalah seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 2, Direktur Utama Badirun menanyakan nilai ΔC/ Δx pada saat Δx=1, Tetapi kita mengharapkan bahwa ini akan sangat dekat terhadap nilai.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

Pada saat x = 2000, ini disebut biaya marjinal. Kita para matematikawan mengenalinya sebagai d/C/dx, turunan c terhadap x.

Dengan nafas serupa, kita definisikan harga marjinal sebagai dp/dx, pendapatan marjinal sebagai dR/dx, dan keuntungan marjinal sebagai dP/dx.

CONTOH-CONTOH Sekarang kita gambarkan bagaimana menyelesaikan aneka ragam masalah ekonomi.

CONTOH 1. Andaikan C(x) = 8300 + 3.25x + 40 $\sqrt[3]{x}$ rupiah. Cari biaya rata-rata tiap satuan dan biaya marjinal dan hitung mereka bilamana x = 1000.

Penyelesaian

$$\text{Biaya rata-rata : } \frac{C(x)}{x} = \frac{8300 + 3.25 + 40x^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$\text{Biaya marjinal : } \frac{dC}{dx} = 3.25 + \frac{40}{3}x^{2/3}$$

Pada x = 1000, ini masing-masing mempunyai nilai-nilai 11.95 dan 3.38. ini berarti bahwa rata-rata biaya tiap satuan adalah Rp. 11.950 untuk memproduksi 1000 satuan yang pertama; untuk memproduksi 1000 satuan tambahan diatas 1000 hanya memerlukan biaya Rp.3.380.

Andaikan f dengan daerah definisi yang mencakup interval (a-δ, a+δ), dimana δ> 0, dan a suatu bilangan tertentu. Bila untuk tiap bilangan positif ε selalu ada bilangan positif δ, dengan demikian sehingga |f(x) – A| < ε , jikalau 0< |x-a| < δ; maka dikatakan bahwa f atau f (x) konvergen ke A bila x menuju a (x → a). Bilangan A disebut limit f jika harga x mendekati harga a sedekat-dekatnya. Konvergennya f ke A ini ditulis dengan lambang:

f (x) → A, (x → a), atau

lim f (x) = A
x → a

Suatu perubahan x mungkin mendekati dari pihak yang lebih besar dari a, yang diberi tanda a. Jika limit a diperoleh hanya dari pihak yang lebih kecil dari a, ditulis x → a.

Misalnya : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (-1) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (+1) = +1$

Cara pendekatan ini harus memberi limit yang sama, jika tidak, dikatakan mempunyai limit. (ingat:pembagian dengan nol tidak didefinisikan).

Jika limit itu $-\infty$ atau $+\infty$ dikatakan bahwa limit itu tak sebenarnya dan dikatakan bahwa fungsi itu tidak mempunyai limit. Nyatakan bahwa:

$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to \infty} c = c, \text{ dimana c konstanta}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x} = 0, \text{ dimana c konstanta}$$

Kaidah-kaidah limit

1. lim c f(x) = c lim f(x), dimana c konstanta
2. lim (f(x) + g(x)) = lim f(x) + lim g(x)
3. lim (f(x) - g(x)) = lim f(x) - lim g(x)
4. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ dimana lim g(x) $\neq$ 0
5. lim (f(x) . g(x)) = (lim f(x)) . (lim g(x))
6. $\lim c^{f(x)} = c^{\lim f(x)}$ dimana c konstanta
7. $\lim (f(x))^{g(x)} = (\lim f(x))^{\lim g(x)}$
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sin x} = 1$
9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{tg\ x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{tg\ x} = 1$
10. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + x) = 2{,}7182 = e$
11. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = 2{,}7182 = e$

Contoh :

1. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^3 - x^2 + 5) = \lim\limits_{x \to 2} 3x^3 - \lim x^2 + \lim 5 = 3.2^3 - 2^2 + 5 = 25.$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{5}{3} = 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{x+1}+1\right)$

$= 1 + 1 = 2$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos c}{x \cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x.x^2 \cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x}{2\left(\frac{1}{2}x\right)^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Latihan

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$ (a>0)

3. $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x}$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$

5. $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{5}}{x - 5}$

BAB III
DETERMINAN MATRIKS BUJUR SANGKAR

Misalkan suatu persamaan :

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

memiliki sebuah solusi nontrivial (x,y dan Z tidak sama dengan nol), maka untuk mengetahui keberadaan solusi tersebut digunakan metode yang menempatkan koefisien x,y, dan z dalam sebuah matriks metode ini dinamakan dengan determinan.

Pada setiap matriks bujur sangkar A berorde n, determinan dari metriks itu dilambangkan dengan sebuah bilangan det (A) atau (aij). Sebelum membahas penentuan besarnya determinan ini terlebih dahulu menelaah kedua besaran berikut.

a. Determinan Minor

Determinan minor adalah determinan yang elemen-elemennya adalah elemen yang tidak terpotong oleh garis horizontal dan vertikal dari sebuah elemen pada sebuah determinan yang diketahui.

Determinan minor dari a_{ij} pada determinan A adalah determinan yang diperoleh dengan menghilangkan baris i dan kolom j pada determinan A tersebut.

Jadi, dituliskan determinan minor $a_{ij} = m_{ij}$ yang elemen-elemennya adalah elemen yang tidak terpotong oleh garis horizontal dan vertikal yang melelui a_{ij}.

Sebetulnya, jika kita mau, kita boleh menguraikan determinan atas sembarang baris atau kolom dengan cara serupa, yaitu kita kalikan masing-masing dengan minornya, asal saja pada masing-masing perkalian kita berikan tanda + atau – yang sesuai. “tanda tempat” untuk elemen a_{ij} $= (-1)^{i+j}$, sehingga diperoleh urutan tanda sebagai berikut:

Determinan $\longrightarrow$ skalar $\longrightarrow$ punya nilai

ORDE KEDUA

Sebuah determinan orde kedua mempunyai 2 baris dan kolom, ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Yang menyatakan $a_1b_2 - a_2b_1$ berarti kita mengalikan elemen –elemennya secara diagonal untuk memperoleh bentuk perkalian seperti dalam uraiannya; kita kalikan $\begin{pmatrix} a_1 & \\ & b2 \end{pmatrix}$ dan kemudian kita kurangi dengan hasil kali $\begin{pmatrix} & b_1 \\ a_2 & \end{pmatrix}$, yaitu $a_1b_2 - a_2 b_1$.

ORDE KETIGA

Untuk menghitung determinan orde ketiga , kita tuliskan elemen – elemen dari baris yang di atas kemudian masing – masing kita kalikan dengan minornya dan kita berikan tanda plus minus bergantian pada suku- sukunya.

Untuk determinan 3x3 keatas ada beberapa cara yaitu :

a. Sarrus (khusus untuk 3x3)
b. Kofaktor / minor
c. OBE (Operasi Baris Elementer)

Metode Sarrus

Misal: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, maka determinannya dengan cara Sarrus adalah:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

karena nilai determinan orde ketiga ini merupakan jumlah perkalian setiap elemen diagonal utama dan sejajarnya dikurangi dengan jumlah perkalian elemen diagonal samping dan sejajarnya maka cara ini dikenal dengan perkalian diagonal.

Sebetulnya, kalau kita mau, kita boleh menguraikan determinan atas sembarang baris atau kolom dengan cara serupa, yaitu kita kalikan masing- masing dengan minornya, asal saja pada masing-masing perkalian kita berikan tanda + atau – yang sesuai. “ Tanda tempat “ untuk elemen $a_{ij} = (-1)^{i+j}$, sehingga diperoleh urutan tanda sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Elemen kunci adalah elemen a_{11} (elemen pada baris 1 kolom 1) sehimgga tanda tempatnya $(-1)^{1+1}$ selalu + . yang lainnya bergantian + atau – bila kita bergerak sepanjang baris atau turun sepanjang kolom.jadi dalam determinan.

Catatan

1. Sifat-sifat determinan ini, berlaku umum, dapat diterapkan tidak hanya pada determinan berorde sembarang.
2. Untuk menghitung sebuah determinan orde n lakukan dengan cara determinan minor. Hati-hati, menghitungdeterminan dengan cara perkalian diagonal hanya berlaku untuk determinan orde kedua dan orde ketiga.

Metode Kofaktor

Jika A = [a_{ij}] adalah matrik bujur sangkar, kita dapat membentuk determinan yang elemen-elemennya adalah:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

masing–masing elemen memberikan *kofaktor*, yang tida lain dari minor elemen dalam determinan bersama-sama dengan "tanda tempatnya" sebelumnya.

Kofaktor dari $a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

untuk masing- masing elemen, minornya diperoleh dengan menghilangkan baris dan kolom yang memuat elemen yang bersangkutan dan kemudian dibentuk determinan dari elemen- elemen yang tersisa.

Metode OBE (Operasi Baris Elementer)

Selain cara Sarrus dan Kofaktor ada cara lain yaitu cara OBE yaitu dengan mengalikan baris kedua dan baris selanjutnya dengan baris pertama sebagai patokan sehingga diperoleh angka nol pada kolom baris kedua, ketiga dan seterusnya. Setelah itu, kita bisa mencari determinan dari suatu soal (ad-bc).

Contoh :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \infty \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \infty \ 1 \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} -0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}$$

B2=b2-4b1 dan b3 = b3 – 2b1

Maka determinannya = ad – bc = -7 . 4 – (-1) . (-2)

= -28-2

= -30

Sifat- sifat determinan

Menjabarkan determinan yang elemen-elemen sangat banyak akan sangat menjemukan, tetapi bila kita mengetahui sifat-sifat determinan, kita dapat menyederhanakan perhitungannya. Sifat-sifat yang berlakun untuk suatu determinan adalah :

1. harga suatu determinan tidak akan berubah jika garis diganti menjadi kolom dan kolom menjadi baris ;

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2. harga suatu determinan tidak akan berubah jika garis diganti menjadi kolom dan kolom menjadi baris ;

$$\begin{vmatrix} a1 & b2 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a2 & b2 \\ a1 & b1 \end{vmatrix}$$

3. harga suatu determinan tidak akan berubah jika garis diganti menjadi kolom dan kolom menjadi baris ;

$$\begin{vmatrix} a1 & a2 \\ a1 & a2 \end{vmatrix} = 0$$

4. harga suatu determinan tidak akan berubah jika garis diganti menjadi kolom dan kolom menjadi baris ;

$$k \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a2 & kb1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$$

5. jika elemen- elemen salah satu baris (atau kolom) ditambah (atau dikurangi) dengan kelipatan elemen-elemen baris (atau kolom) yang lain yang bersesuaian, maka harga determinannya tidak akan berubah ;

$$k \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka1 & kb1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$$

KESEJALANAN PADA SUATU SISTEM PERSAMAAN

Bentuk umum :

A1x by +d1=0.....................(i)

A2x+b2y+d2=0...................(ii)   3 persamaan dengan dua dan (x,y)

A3x+b3y+d3=0..................(iii)

Pers (ii) dan (iii)

A1x + b2y+d2=0

Diperoleh x = -y = 1 dimana

A3x+b3y+d3=0

$\Delta 1$ = b2 d2 $\Delta 2$ = a2 d2 $\Delta 0$ = a2 b2

b3 d2   a3 d3   a3 b3

sehingga x = $\Delta 1$ dan y = - $\Delta 2$

Jika hasil ini memenuhi persamaan (i) maka:

a. a1 $\Delta 1$ + b1 -$\Delta 2$ + A1 = 0   y=$\Delta 0$
b. a1$\Delta 1$ — b1 Δ 2 + d1 $\Delta 0$ = 0
c. a1 b2 d2 -b1 a2 d2 + d1 a2 b2 = 0

   b3 d2   a3 d3   a3 b3 = 0

$$\begin{vmatrix} a1 & b1 & d1 \\ a2 & b2 & d3 \\ a3 & b3 & d3 \end{vmatrix} = 0$$

hasil terakhir ini merupakan syarat agar ketiga persamaan yang diberikan sejalan,jadi tiga persamaan simulasikan dengan dua bilangan yang akan sejalan jika determinan dari semua koefesiennya sana dengan nol .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

Tanda tempat untuk elemen 9 adalah (-) karena elemen 9 terletak pada baris 4 kolom 3, maka ‘tanda tempat’ nya = $(-1)^{4+3}$ = (-)

KAIDAH CREAMER

Cara lain untuk memecahkan sistem persamaan linier, selain dengan metode eliminasi Gauss seperti yang telah kita pelajari adalah ***kaidah Creamer***:

Perhatikan persamaan linier serempak berikut:

a_1b_2 x + b_1b_2 y = $c_1b_2 – c_1b_2$

$a_2b_1\, x + b_1b_2\, y = c_2b_1$

jika persamaan yang di atas dikurangi dengan persamaan yang di bawah , akan di dapat $a_1b_2 - a_2b_1 = c_1b_2 - c_2b_1$

Jadi

$$X = \frac{c1b2 - c2b1}{a1b2 - a2b1}$$

Jika kita mengingat pada definisi determinan ordekedua maka x dapat ditulis sebagai:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Dengan cara yang serupa maka kita dapat mengeliminasi x dengan menyamakan koefisien x pada kedua persamaan. Jika ini dilakukan maka akan didapat

$$Y = \frac{a1c2 - a2c1}{(\ a1b2 - a2b1)}$$

Dan jika kitra mengingat pada definisi determinan orde kedua maka y dapat ditulis sebagai berikut :

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}}$$

Matriks –definisi

Matriks adalah sekumpulan bilangan rill (atau *elemen*) atau kompleks yang disusun menurut baris dan kolom sehinggga membentuk jajaran (*array*).

Persegi panjang

Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$ (yaitu 'm kali n') atau matriks *berorde* $m \times n$.

Suatu matriks ditunjuukan dengan menuliskan jajarannya diantara kurung siku, misalnya $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ adalah matriks 2×3, yaitu matriks '2×3', dengan 5, 7, 2, 6, 8, adalah elemen-elemennya.

Perhatikan bahwa dalam menyatakan matriks, yang pertama disebutkan adalah banyaknya baris dan yang kedua adalah banyaknya kolom.

$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 7 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ adalah matriks berorde 4 x 3, yaitu matriks dengan 4 baris dan tiga kolom.

Jadi matriks $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ berorde …………

Dan matriks $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ berorde ………. 3 x2; 2x4 .

Matriks hanyalah sekedar jajaran sekumpulan bilangan : tidak ada hubungan aritmetis antar elemen-elemennya. Matriks berbeda dari determinan, karena tidak ada harga numeric suatu matriks yang diperoleh dari perkalian antar elemennya. Juga, pada umumnya baris dan kolom tidak dapat dipertukarkan seperti dalam determinan.

Matriks baris (*line matrix*) : Suatu matriks baris hanya terdiri dari satu baris saja.

Contoh,[4 3 7 2] adalah matriks baris berorde 1 x 4

Matriks kolom (colom matrix) : Suatu matriks kolom hanya terdiri dari satu kolom saja.

Contoh, $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ adalah matriks kolom berorde 3 x 1 .

Untuk menghemat tempat, matriks kolom seringkali dituliskan dalam satu garis, tetapi diberi kurung kurawal. Contoh, {6 3 8} menyatakan matriks yang sama dengan matriks kolom berorde 3 x 1.

Lanjutkan ke bingkai berikut.

Jadi berdasarkan pembahasan di atas :

(a) $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks …………berorde …………

(b) [4 0 7 3] adalah matriks ……………berorde…………….

(c) {2 6 9} adalah matriks …………….berorde………………

(a) kolom, 2 x 1 ; (b) baris 1 x 4;   (c) kolom, 3 x 1

Untuk menyatakan koordinat *x* dan *y* sebuah titik relatif terhadap *x* dan *y*, kita menggunakan matriks baris sederhana, walaupun dalam hal ini biasanya kita menggunakan kurung biasa. Sebagai contoh, jika P, adalah titik (3,5) maka angka 3 menyatakan koordinat *x* dan angka 5 menyatakan koordinat *y*. Tetapi dalam matriks pada umumnya tanda koma yang memisahkan elemen-elemennya tidak dicantumkan.

Matriks berelemen tunggal : Sebuah bilangan dapat dipandang sebagai matriks berukuran 1 x 1, yaitu matriks yang hanya mempunyai 1 baris dan 1 kolom saja.

Notasi dua indeks : Masing-masing elemen suatu matriks memiliki ‘alamat’ atau tempat yang dapat ditentukan dengan menggunakan system dua-indeks, indeks pertama menyatakan baris dan indeks kedua menyatakan kolom. Dengan demikian :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

* a_{23} menunjukkan elemen yang terletak pada baris kedua dan kolom ke tiga.

Jadi, dalam matriks $\begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 8 & 3 \\ 4 & -7 & -6 & 5 \\ -2 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

letak (a) elemen 3 dapat dinyatakan dengan…………….

(b) elemen –1 dapat dinyatakan dengan……………

(c) elemen 9 dapat dinyatakan dengan…………….

(a) a_{24} ; (b) a_{44} ; (c) a_{42}

Notasi matriks : Jika menimbulkan keragua-raguan, keseluruhan matriks dapat dinyatakan dengan sebuah elemen umum yang dituliskan dalam kurung siku, atau dengan sebuah huruf yang dicetak tebal. Penulisan ini singkat dan rapih, dan juga menghemat banyak huruf dan tempat. Sebagai contoh,

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ dapat dinyatakan dengan [a_{ii}] atau [a] atau dengan A saja serupa dengan itu, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dapat dinyatakan dengan [x_i] atau [x] atau dengan x saja.

Untuk menyatakan matriks (*m x n*) akan kita gunakan huruf besar tebal, misalnya **A**. untuk matriks baris atau kolom kita gunakan huruf kecil tebal, misalnya **x**.(Dalam *tulisan tangan,* cetak tebal dapat digantikan dengan garis bergelombang di bawah huruf yang bersangkutan, misalnya **A** atau **x**).

Jadi, jika **B** menyatakan matriks 2 x 3, dituliskan elemen-elemen *b* dalam matriks tersebut dengan menggunakan notasi dua indeks. Hasilnya ……… $\boxed{\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}}$

Kesamaan Matriks : Menurut definisinya, dua matriks dikatakan sama jika semua elemen yang bersesuaian letak sama. Karena itu kedua matriks tersebut harus pula berorde sama.

Jadi, jika $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

Maka $a_{11} = 4$; $a_{12} = 6$; $a_{13} = 5$; $a_{21} = 2$; dan seterusnya

Dengan demikian, jika [a_{ij}] = [x_{ij}] maka $a_{ij} = x_{ij}$ untuk semua harga *i*dan *j*.

Sehingga,jika $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Maka *d* = ………, *b* =……….; *a – k* = ………….

$$\boxed{d = 1;\ b = -7;\ a - k = -3}$$

Penjumlahan dan pengurangan matriks: Agar dua matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan, maka orde keduanya haruslah sama. Selanjutnya jumlah atau selisihnya diperoleh dengan menambahkan atau mengurangkan elemen-elemennya yang bersesuaian.

Contoh : $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 2+8 & 3+9 \\ 5+3 & 7+5 & 6+4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 8 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

dan $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 9 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-3 & 5-7 & 12-1 \\ 9-2 & 4-10 & 8+5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 7 & -6 & 13 \end{bmatrix}$$

sehingga, (a) $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = ...$

(b) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = ...$

$$\boxed{(a)\begin{bmatrix} 7 & 9 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & -7 & 13 \end{bmatrix}; (b)\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -6 & -8 & -5 \end{bmatrix}}$$

Perkalian Matriks:

(a) *Perkalian dengan skalar*: Mengalikan matriks dengan sebuah bilangan
(yaitu skalar) berarti mengalikan masimg-masing elemennya dengan bilangan tesebut.

Contoh $4 \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 20 \\ 24 & 4 & 28 \end{bmatrix}$

yaitu, secara umum $k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$,

Kebalikkannya juga berlaku, yaitu kita dapat mengeluarkan faktor yang sama dari setiap elemen - bukan hanya dari satu, baris atau kolom dalam determinan.

Karena itu, $\begin{bmatrix} 10 & 25 & 45 \\ 35 & 15 & 50 \end{bmatrix}$ dapat dituliskan sebagai………………..

$$\boxed{5 \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 10 \end{bmatrix}}$$

(b) *Perkalian dua buah matriks*: Dua buah matriks dapat dikalikan, satu terhadap yang lain, hanya jika banyaknya kolom dalam matriks yang pertama sama dengan banyaknya baris dalam matriks yang kedua.

Contoh $A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ $\quad dan\ b = \left[b_i\right] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

Maka $A \cdot b = \overrightarrow{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\Big\downarrow$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \end{bmatrix}$$

yaitu masing-masing elemen matriks **A** dalam baris yang atas dikalikan dengan elemen yang bersesuaian dalam kolom pertama matriks **b** dan kemudian semua hasil-kalinya dijumlahkan. Serupa dengan itu, baris kedua dari hasil kedua matriks diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen dalam baris kedua matriks **A** dengan elemen yang bersesuaian dalam kolom pertama matriks **b**.

contoh 1

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 + 7.5 + 6.9 \\ 2.8 + 3.5 + 1.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 + 35 + 54 \\ 16 + 15 + \ \ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121 \\ 40 \end{bmatrix}$$

serupa dengan itu, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} = ...$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 6 + 12 + 10 + 9 \\ 12 + 24 + 0 + 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 99 \end{bmatrix}}$$

dengan jalan yang sama, jika A = $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan b = $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ maka $A \cdot b = ...$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 85 \\ 17 \end{bmatrix}}$$

Cara yang sama.berlaku juga untuk baris dan kolom yang lain.

Contoh 2

Jika $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad$ *dan* $B\left[b_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

maka $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1.8+5.2 & 1.4+5.5 & 1.3+5.8 & 1.1+5.6 \\ 2.8+7.2 & 2.4+7.5 & 2.3+7.8 & 2.1+7.6 \\ 3.8+4.2 & 3.4+4.5 & 3.3+4.8 & 3.1+4.6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+10 & 4+25 & 3+40 & 1+30 \\ 16+14 & 8+35 & 6+56 & 2+42 \\ 24+8 & 12+20 & 9+32 & 3+24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 29 & 43 & 31 \\ 30 & 43 & 62 & 44 \\ 32 & 32 & 41 & 27 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa perkalian matriks (3 × 2) dengan matriks (2 × 4) menghasilkan matriks berorde (3 × 4).

yaitu orde (3 × 2) x orde (2 × 4) → orde (3 × 4),

(sama)

Secara umum, perkalian matriks ($l \times m$) dengan matriks ($m \times n$) akan menghasilkan matriks berorde ($l \times n$).

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

maka **A • B** =………………

$$\boxed{\begin{bmatrix} 30 & 56 \\ 23 & 99 \end{bmatrix}}$$

karena $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 14- & 8+24 & 2+36+18 \\ 21- & 18+20 & 3+81+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 56 \\ 23 & 99 \end{bmatrix}$$

Contoh 3

Jelaslah bahwa suatu matriks hanya dapat dikuadratkan jika matriks tersebut merupakan matriks bujur sangkar, yaitu matriks dengan banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya.

Jika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16+35 & 28+14 \\ 20+10 & 35+\ \ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 & 42 \\ 30 & 39 \end{bmatrix}$$

Ingatlah bahwa perkalian matriks hanya didefinisikan jika ………..

Banyaknya kolom dalam matriks pertama = banyaknya baris dalam matriks kedua

Benar. Jadi $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ tidak ada artinya.

Jika **A** adalah matriks (*m x n*)
Jika **B** adalah matriks (*n x m*)

Maka perkalian **A• B** dan **B •A** keduanya mungkin dilakukan

Contoh :

Jika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{B} \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

maka $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7+16+27 & 10+22+36 \\ 28+40+54 & 40+55+72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 68 \\ 122 & 167 \end{bmatrix}$$

dan $\mathbf{B} \bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7+40 & 14+50 & 21+60 \\ 8+44 & 16+55 & 24+66 \\ 9+48 & 18+60 & 27+72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 64 & 81 \\ 52 & 71 & 90 \\ 57 & 78 & 99 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa, dalam perkalian matriks, $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \bullet \mathbf{A}$, yaitu perkalian matriks non-komutatif. Urutan faktor dalam perkalian sangatlah penting!

Dalam perkalian **A** • **B**, **B** *dikalikan-kiri* (*pre-multiplied*) dengan **A** dan **A** *dikalikan-kanan* (*post-multiplied*) dengan **B**

Jadi, jika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

maka **A** • **B** =………………. Dan **B** • **A**=………………….

$$\boxed{A \bullet B = \begin{bmatrix} 41 & 16 & 32 \\ 55 & 52 & 52 \\ 25 & 9 & 18 \end{bmatrix} \quad ; \quad B \bullet A = \begin{bmatrix} 71 & 30 \\ 29 & 14 \end{bmatrix}}$$

Transpose matriks: Jika baris dan kolom suatu matriks dipertukarkan,

maksudnya: baris pertama menjadi kolom pertama,

baris kedua menjadi kolom kedua,

baris ketiga menjadi kolom ketiga, dan seterusnya.

maka matriks baru yang terbentuk disebut *transpose* dari matriks semula.

Jika matriks semula adalah **A**, maka transposenya dinyatakan dengan **Ã** atau A^T. Kita akan menggunakan notasi yang terakhir, A^T .

$$\therefore \quad \text{Jika } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ maka } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Karena itu, Jika diberikan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

maka **A • B** =……………… dan $(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})^T$……………….

$$\boxed{A \bullet B = \begin{bmatrix} 35 & 79 \\ 20 & 32 \end{bmatrix} \quad ; \quad (A \bullet B)^T = \begin{bmatrix} 35 & 20 \\ 79 & 32 \end{bmatrix}}$$

Matriks-matriks khusus:

(a) *Matriks bujur sangkar* adalah matriks berorde $m \times m$.

Contoh: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks 3×3

Matriks bujur sangkar $[a_{ij}]$ disebut *simetrik* jika $a_{ij} = a_{ji}$,

Contoh: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ yaitu matriks tersebut simetris terhadap diagonal utamanya.

Perhatikan bahwa di sini beriaku $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Matriks bujur sangkar $[a_{ij}]$

disebut anti-simetrik jika $a_{ij} = -a_{ji}$, contoh $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 9 \\ -5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$

Dalam hal ini, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$

(b) *Matriks diagonal* adalah matriks bujur sangkar yang semua elemennya sama dengan nol, kecuali elemen pada diagonal utamanya, jadi

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(c) *Matriks satuan* adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya sama dengan satu, yaitu

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ atriks satuan dinyatakan dengan **I**.

$$jika\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix} dan\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} maka\ A.I = ...$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix} yaitu\ A.I = A}$$

Serupa dengan itu, jika kita bentuk perkalian I • A kita peroleh

$$I \bullet A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+0+0 & 2+0+0 & 4+0+0 \\ 0+1+0 & 0+3+0 & 0+8+0 \\ 0+0+7 & 0+0+9 & 0+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix} = A.$$

$$\therefore \mathrm{A} \bullet \mathrm{I} = \mathrm{I} \bullet \mathrm{A} = \mathrm{A}$$

Jadi sifat matriks satuan I sangat mirip dengan bilangan satu dalam ilmu hitung dan aljabar biasa.

(d) Matriks nol: Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya sama dengan nol,

yaitu $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan dinyatakan dengan 0 atau cukup 0 saja.

Jika **A • B = 0**, kita tidak dapat menarik kesimpulan bahwa **A = 0** atau **B = 0**

Karena jika $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$ *dan* $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Maka

$$\mathrm{A} \bullet \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+4-6 & 18-6-12 \\ 6+12-18 & 54-18-36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa **A • B = 0,** tetapi **A ≠ 0** dan **B ≠ 0.**

Berikut ini adalah ulangan pendek. Kerjakanlah tanpa melihat lagi ke depan

1. jika $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

   tentukan (a) A + B dan (b) A - B.

2. jika $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ *dan* $B\begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

   tentukan (a) 5A; (b) A • B; (c) B • A.

3. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ *dan* $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ maka A • B = ………

4. Jika diberikan tentukanlah (a) $\mathbf{A^T}$ dan (b) $\mathbf{A \bullet A^T}$

Jika anda telah menyelesaikannya, periksa/ah hasil pekerjaan anda dengan bingkai berikut.

Inilah pemecahannya. Periksalah pekerjaan anda.

(d) $(a) \quad A + B = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 8 & 6 \\ 8 & 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}; (b) \quad A - B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 8 \\ -2 & -1 & 13 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $(a) \quad 5A = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 35 \\ 30 & 5 \end{bmatrix}; \quad (b) \quad A \bullet B = \begin{bmatrix} 32 & 36 & 32 \\ 38 & 18 & 60 \\ 34 & 54 & 20 \end{bmatrix}; \quad (c) \quad B \bullet A = \begin{bmatrix} 50 & 80 \\ 64 & 20 \end{bmatrix}.$

$A \bullet B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *tidak mungkin dikalikan, karena banyaknya*

(f) *kolom dalam matriks yang pertama harus sama dengan banyaknya baris dalam matriks yang kedua.*

(g) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \therefore A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$A \bullet A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+4+36 & 4+16+42 \\ 4+16+42 & 1+64+49 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 56 & 62 \\ 62 & 114 \end{bmatrix}$$

sekarang pindahkan kebingkai selanjutnya.

Determinan matriks bujur sangkar. Determinan matriks bujur-sangkar adalah determinan yang mempunyai elemen-elemen yang sama-dengan matrik

tersebut. Sebagai contoh,

determinan $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ *adalah* $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

dan harga determinan ini dalah

5(42 - 12) - 2(0 - 24) + 1(0 - 48)

= 5(30)-2(-24)+1(-48)=150+48-48=150

Perhatikan bahwa matriks transpose-nya adalah $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ dan determinan dari transpose ini adalah

$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ yang harganya sama dengan

5(42 - 12) - 0(14 - 4) + 8(6 - 6)=5(30) = 150.

Hal ini menunjukkan bahwa determinan suatu matriks bujur-sangkar memiliki harga yang.sama dengan determinan matriks transposenya.

Suatu matriks yang determinannya sama dengan nol disebut matriks singular.

Harga determinan matriks $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ adalah ....

Dan harga determinan matriks diagonal $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ adalah

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 3(-30) - 2(15) + 5(25) = 5.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(20) + 0 + 0 = 40$$

Kofaktor. Jika **A** = [a_{ij}] adalah matriks bujur-sangkar, kita dapat membentuk determinan yang elemen-elemennya adalah

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{3n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Masing-masing elemen memberikan kofaktor, yang tidak lain daripada minor elemen dalam determinan bersama-sama dengan 'tanda tempat'-nya,yang rinciannya telah dijelaskan dalam program sebelum ini.

sebagai contoh, determinan matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ adalah

det $\mathrm{A} = |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ yang harganya sama dengan 45.

Minor elemen 2 adalah $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 - 24 = - 24.

Tanda tempatnya +. Jadi kofaktor elemen 2 adalah + (- 24) yaitu – 24.

Serupa dengan itu, minor elemen 3 adalah $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 - 6 = - 6

Tanda tempatnya -. Jadi kofaktor elemen 3 adalah - (- 6) = 6.

Untuk masing-masing elemen, minornya diperoleh dengan menghilangkan baris dan kolom yang memuat elemen yang bersangkutan dan kemudian dibentuk deteminan dari elemen-elemen yang tersisa. Tanda tempat yang sesuai diberikan oleh

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \bullet & \bullet & \bullet \\ - & + & - & + & & & \\ + & - & + & & & & \\ \bullet & & & & & & \\ \bullet & & & & & & \\ \bullet & & & & & & \end{vmatrix}$$

tanda plus dan minus bergantian, dimulai dengan tempat di sudut kiri atas yang memuat tanda +. Jadi, dalam contoh di atas, minor elemen 6 adalah $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ yaitu 8 – 3 = 5. Tanda tempatnya -. Sehingga kofaktor elemen 6 adalah – 5.

Dengan demikian, untuk matriks $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, kofaktor elemen 3 adalah ……… dan kofaktor elemen 4 adalah ………

Kofaktor 3 adalah 4 - (- 10) = 14
Kofaktor 4 adalah - (56 - 3) = - 53

Adjoin matriks bujur sangkar:

Jika kita mulai dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, determinannya adalah

$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ dari sini kita dapat membentuk matriks baru **C** yang elemen-elemennya kofaktor.

$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ dengan A_{11} adalah kofaktor a_{11}

A_{ij} adalah kofaktor a_{ij} dst,

$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ = + (0 - 24) = - 24.

$A_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ = - (0 - 6) = 6

$A_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ = + (16 - 1) = 15

$A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ = - (0 - 20) = 20.

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = + (0 - 5) = -5$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = - (8 - 3) = - 5$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = + (18 - 5) = 13.$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = + (12 - 20) = 8$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = + (2 - 12) = - 10.$$

$\therefore$ Matriks kofaktornya adalah $C = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{bmatrix}$

dan transpose dari **C**, yaitu $C^T = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$ Matriks ini

disebut matriks *adjoin* dan matriks **A** semula dan dituliskan adj. **A**

Jadi untuk memperoleh adjoin suatu matriks bujur sangkar **A** kita harus

(a) membentuk matriks kofaktor **C**

(b) menuliskan transpose **C**, yaitu $\mathbf{C^T}$.

Dengan demikian adjoint dari matriks $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ adalah ....

$$\boxed{adj\ \mathrm{A} = C^T = \begin{bmatrix} -21 & 0 & 7 \\ 7 & 11 & -17 \\ 14 & -22 & -1 \end{bmatrix}}$$

Invers matriks bujur sangkar

Adjoin suatu matriks bujur sangkar sangatlah penting, karena matrikini memungkinkan kita untuk membentuk invers matriks yang bersangkutan.

Jika masing-masing elemen dari matriks adjoin **A** dibagi dengan harga determinan **A**, yaitu | **A** |, (asal saja [A] ≠ 0), maka diperoleh matriks baru yang disebut ***invers*** dari matriks **A** dan dituliskan sebagai A^{-1}.

Untuk matriks yang kita gunakan dalam bingkai yang lalu, yaitu, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ = 2 (0 - 24) – 3 (0 - 6) + 5 (16 - 1) = 45.

matriks kofaktornya adalah $C = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & -8 & -10 \end{bmatrix}$

dan matriks adjoin dari **A**, yaitu $C^T = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

Maka invers dari **A** diberikan oleh $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-24}{45} & \frac{20}{45} & \frac{13}{45} \\ \frac{6}{45} & \frac{-5}{45} & \frac{8}{45} \\ \frac{15}{45} & \frac{-5}{45} & \frac{-10}{45} \end{bmatrix} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

jadi, untuk membentuk invers dari matriks bujur-sangkar **A**:

(a) hitung determinan **A**, yaitu |**A** |.

(b) Bentuk matriks C yang elemen-elemennya adalah kofaktor eiemen | A I

(c) Tuliskan transpose matriks C, yaitu C^T, untuk memperoleh adjoin A.

(d) Bagilah masing-masing eiemen C1 dengan lAl

(e) Matriks terakhir yang diperoleh adalah matriks invers A^{-1} dari matriks A semula.

Marilah kita lihat pelaksanaannya secara terinci melalui sebuah contoh.

untuk memperoleh invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

(a) pertama-tama kita hitung determinan A, yaitu 1 A |. A|=……………

$$\boxed{|A| = 28}$$

karena $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-0) - 2(8-30) + 3(0-6) = 28$

(b) Sekarang kita bentuk matriks kofaktomya. C =…………….

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} 2 & 22 & -6 \\ -4 & -16 & 12 \\ 7 & 7 & -7 \end{bmatrix}}$$

karena

A_{11} = +(2 – 0) = 2; A_{12}= –(8–30) = 22; A_{13} = +(0–6) = –6

A_{21} = –(4 – 0) = –4; A_{22}= –(2–18) = –16; A_{23} = –(–12) = 12

A_{31} = +(10 – 3) = 7; A_{32}= –(5–12) = 7; A_{33} = +(1–8) = –7

(c) Kemudian kita tuliskan transpose matriks **C** untuk memperoleh adjoin matriks **A**.

adj **A = C$^{\mathbf{T}}$** = …………

$$adjA = C^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

(d) Akhirnya, elemen-elemeri adj **A** kita bagi dengan harga |**A**|, yaitu 18, untuk memperoleh **A**$^{-1}$, invers matrik **A**.

$\therefore$ **A**$^{-1}$ = ...

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{28} & \frac{-4}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{22}{28} & \frac{-16}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{-6}{28} & \frac{12}{28} & \frac{7}{28} \end{bmatrix} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix}}$$

untuk matriks lain pun dapat dicari dengan jalan yang sama. Kerjakanlah soal yang berikut ini sendiri.

Tentukanlah invers matriks **A** = $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}^{-1}$ = ………………..

$$A^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 8 & -56 & 38 \\ 6 & -4 & 0 \\ -5 & 35 & -19 \end{bmatrix}$$

inilah penyelesaian lengkapnya.

2 7 4

det **A** = | **A** | = $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ =2(8) –7(–6) + 4(–5) = 38

Kofaktor :

A_{11} = +(8 – 0) = 8; A_{12}= –(24–30) = 6; A_{13} = +(0–5) = –5

A_{21} = –(56 – 0) = –56; A_{22}= –(16–20) = –4; A_{23} = –(0–35) = 35

A_{31} = +(42 – 4) = 38 A_{32}= –(12–12) = 0; A_{33} = +(2–21) = –19

$$\therefore \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -5 \\ -56 & -4 & 35 \\ 38 & 0 & -19 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad C^T = \begin{bmatrix} 8 & -56 & 38 \\ 6 & -4 & 0 \\ -5 & 35 & -19 \end{bmatrix}$$

jadi $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 8 & -56 & 38 \\ 6 & -4 & 0 \\ -5 & 35 & -19 \end{bmatrix}$

Sekarang marilah kita lihat beberapa penggunaan invers.

Perkalian matriks bujur sangkar dengan inversnya

Dari contoh sebelum ini telah kita lihat bahwa jika **A** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Maka $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix}$

Sehingga $\mathbf{A}^{-1} \cdot A = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2-16+422 & 4-4+0 & 6-20+14 \\ 22-64+42 & 44-16+0 & 66-80+14 \\ -6+48-42 & -12+12+0 & -18+60-14 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$ $\therefore$ **<u>A^{-1} · A=I</u>**

Dan juga A • A^{-1}= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 22 & -16 & 7 \\ -6 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

=……………….Selesaikan

$$\boxed{A \cdot A = \tfrac{1}{28}\begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I}$$

$\therefore$ **A · A^{-1}= A^{-}1 · A=I**

BAB IV
DERET McLAURIN

Bentuk unum Deret Mclaurin beasal dari fungsi polinomial:

$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$ .... (1)

untuk fungsi di atas jika kita cari turunan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya, kemudian dicari masing-masing untuk x=0, maka akan diperoleh sebagai berikut.

Jika x = 0, maka f(0) = a + 0 + 0 + 0......... $\therefore$ <u>a = f(0).</u>

F(x) diturunkan diperoleh: $f'(x) = b + c.2x + d.3x^2 + e.4x^3 + f.5x^4 +$.........

Masukan x = 0, $\therefore f'(0) = b + 0 + 0 \ldots \therefore \underline{b = f'(0)}$

Diturunkan lagi terhadapa x diperoleh : $f''(x) = c.2.1 + d.3.2x + e.4.3x^2 + f.5.4x^3$.......

Masukan $x = 0$, . $\therefore f''(0) = c.2! + 0 + 0 \ldots . \therefore c = \dfrac{f''(0)}{2!}$

Jika dicoba anda teruskan, maka akan diperoleh *d* dan *e* dan yang lainnya.

$$d = \frac{f'''(0)}{3!}; \quad e = \frac{f^{iv}(x)}{4!}$$

Jadi, $a = f(0)$; $b = f'(0)$; $c = \dfrac{f''(0)}{2!}$; $d = \dfrac{f'''(0)}{3!}$; $e = \dfrac{f''''(0)}{4!}$ ...., dst.

Dengan mensubstitusikan a, b, c, d, e, dst ke persamaan (1) akan diperoleh:

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}.x^3 + \ldots$$

Ini adalah bentuk umum dari deret McLaurin

Deret McLaurin

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}.f''(0) + \frac{x^3}{3!}.F'''(0) + \ldots.$$

Sekarang kita akan menggunakan deret McLaurin ini untuk menentukan deret dari sinh *x*. Kita harus mencari koefesien deferensial sinh *x* berurutan dan kemudian kita masukan $x = 0$ kedalamnya. Seperti ini :

$f(x) = \sinh x$ $\quad f(0) = \sinh 0 = 0$

$f'(x) = \cosh x$ $\quad f(0) = \cosh 0 = 1$

$f''(x) = \sinh x$ $\quad f''(0) = \sinh 0 = 0$

$f'''(x) = \cosh x$ $\quad f'''(0) = \cosh 0 = 1$

$f^{iv}(x) = \sinh x$ $\quad f^{iv}(0) = \sinh 0 = 0$

$f^v(x) = \cosh x$ $\quad f^v(0) = \cosh 0 = 1$ dan seterusnya

$\therefore \sinh x = 0 + x.\ 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$

$\therefore \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Contoh : Jabarkanlah sin x^2 dalam deret pangkat x dengan pangkat yang semakin bertambah.

Deret Mclaurin :

$$f(x) = f(0) + x.\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\,.\,F''(0) + \frac{x^3}{3!}\,.\,F'''(0) + \ldots$$

$\therefore f(x) = \sin^2 x$ $\quad f(0) \quad = \quad ....$

$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ $\quad f'(0) \quad = \quad ....$

$f''(x) = 2 \cos 2x$ $\quad f''(0) \quad = \quad ....$

$f'''(x) = -4 \sin 2x$ $\quad f'''(0) \quad = \quad ....$

$f^{iv}(x) = ...$ $\quad f^{iv}(0) \quad = \quad ....$

Demikianlah! Selesaikanlah : carilah tiga suku deret pertama yang tidak sama dengan nol.

$$\text{Sin}^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45}$$

Karena :

$\therefore f(x) = \sin^2 x$ $\quad f(0) \quad = \quad 0$

$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ $\quad f'(0) \quad = \quad 0$

$f''(x) = 2 \cos 2x$ $\quad f''(0) \quad = \quad 2$

$f'''(x) = -4 \sin 2x$ $\quad f'''(0) \quad = \quad 0$

$f^{iv}(x) = -8 \cos 2x$ $\quad f^{iv}(0) \quad = \quad -8$

$f^{v}(x) = 16 \sin 2x$ $\quad f^{v}(0) \quad = \quad 0$

$f^{vi}(x) = 32 \cos 2x$ $\quad f^{vi}(0) \quad = \quad 32$ dan setyerusnya

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}\,.\,F''(0) + \frac{x^3}{3!}\,.\,F'''(0) + \ldots$$

$$\therefore \sin^2 x = 0 + x(0)\ \frac{x^2}{2!}(2) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(-8) + \frac{x^5}{5!}(0) + \frac{x^6}{6!}(32)$$

$$\therefore \sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} \ldots.$$

BAB V
VEKTOR

Besaran vektor dan besaran skalar

a. Besaran *vektor* baru terdefinisi dengan lengkap jika di samping besar (dengan satuan)-nya juga diketahui arah kemana ia beroperasi, misalnya gaya, kecepatan, dan percepatan.

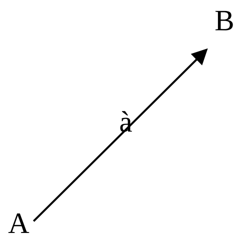
b. Besaran *skalar* adalah besaran yang cukup dinyatakan oleh sebuah bilangan dengan satuannya yang sesuai, misalnya panjang, luas, volume, dan waktu.

Penggambaran Vektor

Suatu besaran vektor secara grafis dapat dinyatakan dengan sebuah garis yang digambarkan sedemikian rupa sehingga :

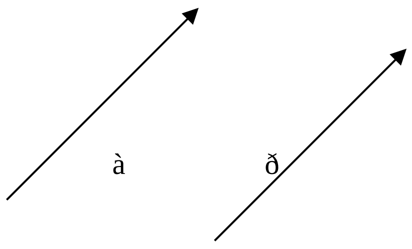
- Panjang garis tersebut menyatakan besaran vektor yang dimaksud, menurut skala vektor yang ditetapkan terlebih dahulu.
- Arah garis tersebut menunjukan ke arah mana besaran vector itu bekerja. Penunjukan arah ini dinyatakan dengan kepala anak panah.

Sebagai contoh, sebuah gaya horizontal sebesar 35 N yang berarah ke kanan dinyatakan dengan garis . Bila dipilih skala vektor 1 cm = 10 N, maka panjang garis tersebut haruslah 3,5 cm. Besaran vektor AB dituliskan sebagai AB atau α besaran vektor tersebut dituliskan sebagai $|\overline{AB}|$, atau $|\overline{a}|$, atau cukup dengan AB, atau α saja



Kesamaan dua vektor

Jika dua buah vektor à dan ð, dikatakan sama, maka kedua vektor tersebut memiliki besar dan arah yang sama.



jika à = ð maka (i) à = ð (besar sama)

(ii) arah à = arah ð, yaitu kedua vektor tersebut sejajar dan searah.

Serupa dengan itu,jika dua vektor à dan ð memiliki hubungan ð = - à, apa yang akan dikatakan tentang (i) besarnya

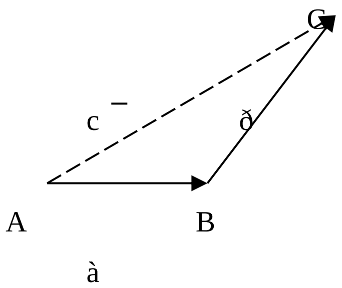
(ii) arahnya

Jenis-Jenis vektor

1. vektor posisi $\overline{AB}$ terjadi jika titik A tetap
2. vektor garis yaitu vektor yang boleh digeserkan sepanjang garis kerjanya, misalnya gaya mekanik yang bekerja pada suatu benda
3. vektor bebas tidak dibatasi oleh apapun. Vektor ini terdefinisi sepenuhnya oleh besar dan arahnya dan dapat digambarkan sebagai sekumpulan garis sejajar yang sama panjang.

Penjumlahan Vektor

Hasil penjumlahan dua buah vektor, $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$, didefinisikan sebagai vektor resultan $\overline{AC}$ atau vektor yang setara dengan $\overline{AC}$.



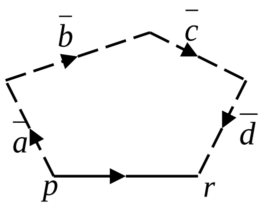
yaitu : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

atau : à + ð = $\bar{c}$

Komponen – komponen sebuah vektor

Seperti halnya $\overline{AB}$ + $\overline{BC}$ + $\overline{CD}$ + $\overline{DE}$ dapat digantikan oleh $\overline{AE}$, maka sembarang vektor $\overline{PT}$ dapat digantikan dengan sejumlah vektor komponen asalkan komponen – komponen tersebut membentuk rantai diagram vektor yang berpangkal di P dan berakhir di T.

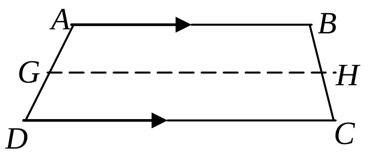
Yaitu:



$\overline{PT} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$

Contoh 1 :

ABCD adalah sebuah segi empat. Titik G terletak di tengah – tengah DA dan titik H berada di tengah –tengah BC. Tunjukanlah bahwa $\overline{AB} + \overline{DC} = 2\,\overline{GH}$.

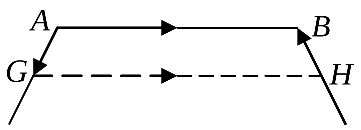


Vektor $\overline{AB}$ dapat diganti dengan rangkaian vektor apa saja asalkan dimulai di A dan berakhir di B.

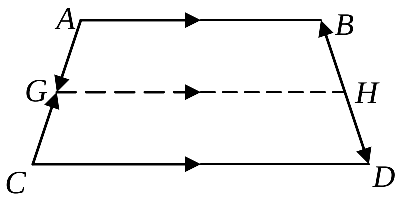
Jadi dapat kita katakan vektor $\overline{AB} = \overline{AG} + \overline{GH} + \overline{HB}$

Serupa dengan itu, dapat kita katakan juga

$\overline{DC}$ = ...



sehingga kita peroleh



$$\overline{DC} = \overline{DG} + \overline{GH} + \overline{HC}$$

$$\overline{AB} = \overline{AG} + \overline{GH} + \overline{HB}$$

$$\overline{DC} = \overline{DG} + \overline{GH} + \overline{HC}$$

$$\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AG} + \overline{GH} + \overline{HB} + \overline{DG} + \overline{GH} + \overline{HC}$$

$$= 2\,\overline{GH} + (\overline{AG} + \overline{DG}) + (\overline{HB} + \overline{HC})$$

G adalah titik tengah AD, karena itu vektor $\overline{AG}$ dan $\overline{DG}$ sama panjang, tetapi berlawanan arah.

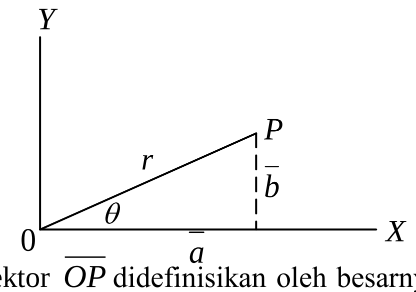
$$\overline{DG} = -\,\overline{AG}$$

Serupa dengan itu, $\overline{HC} = -\,\overline{HB}$

$$\Rightarrow \overline{AB} + \overline{DC} = 2\,\overline{GH} + (\overline{AG} - \overline{AG}) + (\overline{HB} - \overline{HB})$$

$$= 2\,\overline{GH}$$

Komponen – komponen vektor dinyatakan dalam vektor satuan



Vektor $\overline{OP}$ didefinisikan oleh besarnya (r) dan arahnya (θ). Vektor ini dapat pula dinyatakan dalam kedua komponennya dalam arah OX dan OY.

Maksudnya, $\overline{OP}$ setara dengan sebuah vektor $\overline{a}$ dalam arah OX + sebuah vektor $\overline{b}$ dalam arah OY,

Yaitu $\overline{OP} = \overline{a}$ (sepanjang OX) + $\overline{b}$ (sepanjang OY)

Jika kita didefinisikan $\overline{i}$ sebagai vektor satuan dalam arah OX,

Maka $\overline{a} = a\overline{i}$

Demikian juga, jika kita didefinisikan $\overline{j}$ sebagai vektor satuan dalam arah OY

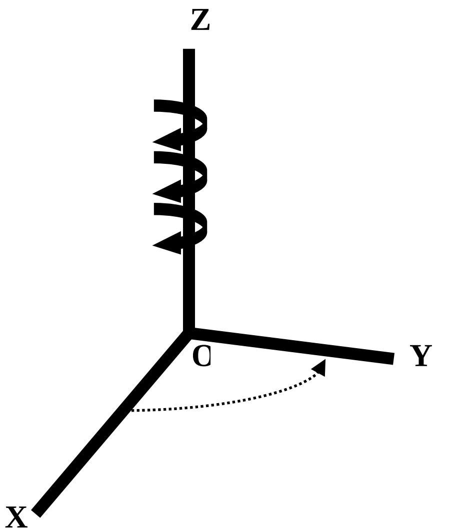
$$\text{Maka } \overline{b} = b\overline{j}$$

Dengan demikian vektor $\overline{OP}$ dapat dituliskan sebagai

$$\overline{r} = a\overline{i} + b\overline{j}$$

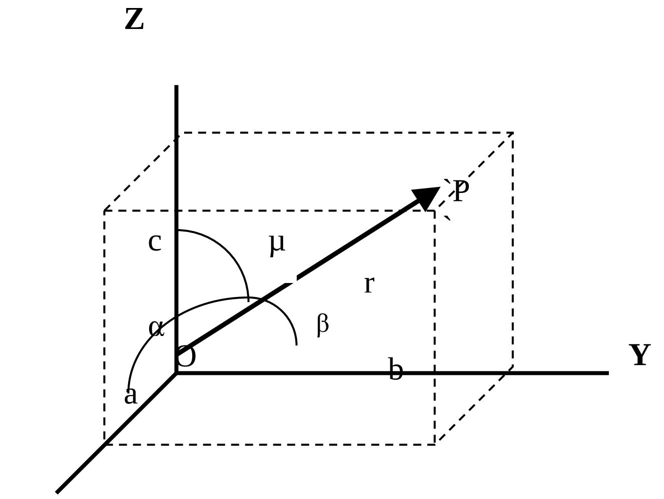
Dengan $\overline{i}$ dan $\overline{j}$ adalah vektor satuan dalam arah OX dan OY

Vektor Dalam Ruang



Sumbu – sumbu kerangka acuan didefenisikan menurut kaidah tangan kanan, OX, OY, OZ membentuk sistem koordinat jika rotasi (putaran) dari OX ke OY menyebabkan sekrup kanan bergerak kearah OZ positif.

Cosinus Arah



Arah suatu ve am tiga dimensi ditentukan oleh sudut yang dibentuk dengan ketiga sumbu kerangka acuan.

Misalkan $\overline{OP} = \overline{r} = ai + bj + ck$

Maka

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha$$

$$\frac{b}{r} = \cos\beta$$

$$\frac{c}{r} = \cos\gamma$$

$$\therefore a = r\cos\alpha$$

$$b = r\cos\beta$$

$$c = r\cos\gamma$$

Juga $\qquad a^2 + b^2 + c^2 = r^2$

$$\therefore r^2 \cos^2\alpha + r2 \cos^2\beta + r^2 \cos^2\gamma = r^2$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Jika $l = \cos\alpha$

$m = \cos\beta$

$n = \cos\gamma$

maka $\qquad \underline{\underline{l^2 + m^2 + n^2 = 1}}$

catatan : [l, m, n] dituliskan kurung siku disebut cosinus arah vektor OP, masing –masing menyatakan harga cosinus dari sudut yang dibentuk oleh vektor tersebut dengan ketiga sumbu acuan.

Jadi untuk vektor r = ai + bj + ck

$$l = \frac{a}{r}\ ;\ m = \frac{b}{r}\ ;\ n = \frac{c}{r} \text{ dan } r = \sqrt{\ }\ (a^2 + b^2 + c^2)$$

Contoh : Tentukanlah, cosinus arah [l, m, n] dari vektor $\overline{r} = 3i - 2j + 6k$?

Jawab :

$r = 3i - 2j + 6k$

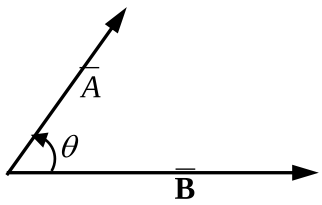
$\therefore$ a = 3, b = -2, c = 6 $\quad$ r = $\sqrt{\ }$ (9 + 4 + 36)

$\therefore$ r = $\sqrt{\ }$ 49 = 7

$$\therefore l = \frac{3}{7}\ ;\ m = \frac{2}{7}\ ;\ n = \frac{6}{7}$$

Perkalian Skalar Antara Dua Vektor

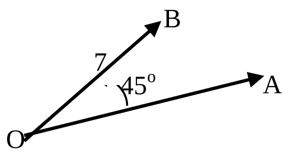
Jika A dan B adalah dua buah vektor, maka perkalian skalar antara $\overline{A}$ dan $\overline{B}$ didefinisikan sebagai AB cos θ, dengan A dan B adalaha besar vektor $\overline{A}$ dan $\overline{B}$, dan θ adalah sudut yang diapit oleh kedua vektor tersebut.



Perkalian skalar dinyatakan dengan $\overline{A} \bullet \overline{B}$`(perkalian titik).

$$\therefore \overline{A}\,.\,\overline{B} = AB \cos\theta$$

Contoh :



$\overline{OA}\,.\,\overline{OB}$?

$\overline{OA}\,.\,\overline{OB}$ = OA . OB cos θ

= 5 . 7 . cos 45°

$$= 35.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{35\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\overline{A}.\overline{B} = \; a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}$$

Karena $\overline{A}..\overline{B} = a_{1.}a_2 1 + a\ _1 b_2 0 + a_1 c_2 0 + b_1 a_2 0 + b_1 b_2 1 + b_1 c_2 0 + c_1 a_2 0 + c_1 b_2 0 + c_1 c_2 1\ _1$

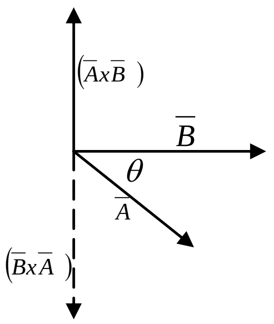
Contoh : jika $\overline{A}$ =2i + 3j +5k dan $\overline{B}$ = 4i +1j +6k

Maka $\overline{A}.\overline{B} = 2.4 + 3.1 + 5.6$

= 8 + 3 + 30 = 41

Perkalian vektor antara dua vektor

Perkalian vektor antara vektor $\overline{A}$ dan $\overline{B}$ dituliskan sebagai $\overline{A}$ X $\overline{B}$ (kadang-kadang disebut juga perkalian silang) dan didefinisikan sebagai vektor yang mempunyai besar AB sin θ, dengan θ adalah sudut yang diapit oleh kedua vektor semula.



θ = 0°, $\left|(\overline{A} \times \overline{B})\right|$ = 0

θ = 90°, $\left|(\overline{A} \times \overline{B})\right|$ = AB

Jika $\overline{A}$ dan $\overline{B}$ dinyatakan dalam vektor satuan maka

$\overline{A}$ = $a_1 i + b_1 j + c_1 k$ dan $\overline{B} = a_2 i + b_2 j + c_2 k$

Sehingga $\overline{A}$ X $\overline{B}$ = ($a_1 i + b_1 j + c_1 k$) X ($a_2 i + b_2 j + c_2 k$)

= $a_1 a_2\, i$ X i + $a_1 b_2$ i X j + $a_1 c_2$ i X k + $b_1 a_2$ j X j + $b_1 c_2$ j X k + $c_1 a_2$ k X i + $c_1 b_2$ k X j + $c_1 c_2 kX\, k$

Ingat *i X i = 1.1.sin 0^o =0*

i X i = j X j = k X k = 0

i X j = k

j X k = i

k X i = j

i X j = -(j X i)

j X k = -(k X j)

k *X i = -(i X k)*

Maka jawabannya adalah $\overline{A}$ X $\overline{B}$ = ($b_1 c_2$ - $b_2 c_1$)i + ($a_2 c_1 - a_1 c_2$)j + ($a_1 b_2 - a_2 b_1$)k

Contoh: Tentukan perkalian vektor antara $\overline{P}$ dan $\overline{Q}$,jika

$\overline{P}$ = 3i – 4j + 2k dan $\overline{Q}$ = 2i + 5j + 1k

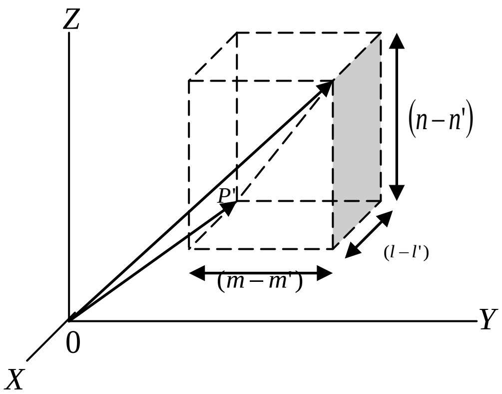
Jawab: $\overline{P} \times \overline{Q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

$= i \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

= i (4 – 10) – j(-3 – 4) + k(15 + 8)

= -6i +7j + 23k

Sudut antara dua vektor



Misalkan $\overline{OP}$ dan $\overline{OP'}$ adalah vektor satuan yang masing-masing sejajar dengan $\overline{A}$ dan $\overline{B}$. Maka koordinat P adalah [*l, m, n*]

Dan koordinat P’ adalah [*l’, m’, n’*]

Sehingga $(PP')^2 = (l - l')^2 + (m - m')^2 + (n - n')^2$

$= l^2 - 2.l.l' + m^2 - 2.m.m' + m^2 + n^2 - 2nn' + n^2$

$= (l^2 + m^2 + n^2) + (l'^2 + m'^2 + n'^2) - 2(ll' + mm' + nn')$

Tetapi $(l^2 + m^2 + n^2) = 1$ *dan* $(l'^2 + m'^2 + n'^2) = 1$

$(PP')^2 = 2 - 2(ll'^2 + mm' + nn')$

$(PP')^2 = OP^2 + OP'^2 - 2.OP.OP'.\cos\theta$

$= 1 + 1 - 2.1.1\cos\theta$

$= 2 - 2.\cos\theta$

Sehingga didapatkan:

$(PP')^2 = 2 - 2(ll' + mm' + nn')$

Dan $(PP')^2 = 2 - 2\cos\theta$

$\cos\theta = ll' + mm' + nn'$

Contoh soal: Tentukan sudut antara vektor

$\overline{P}$ =2i + 3j + 4k dan $\overline{Q}$ = 4i – 3j + 2k

Jawab: $r = \left|\overline{P}\right| = \sqrt{(2^2 + 3^2 + 4^2)} = \sqrt{(4+9+16)} = \sqrt{29}$

$$l = \frac{a}{r} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$m = \frac{b}{r} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$n = \frac{c}{r} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$\text{Jadi } [\, l, m, n \,] = \left[\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}} \right]$$

$$r' = \left|\overline{Q}\right| = \sqrt{(4^2 + 3^2 + 2^2)} = \sqrt{(16+9+4)} = \sqrt{29}$$

$$\text{maka,} [\, l', m', n' \,] = \left[\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}} \right]$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}.\frac{4}{\sqrt{29}} + \frac{3}{\sqrt{29}}.\frac{(-3)}{\sqrt{29}} + \frac{4}{\sqrt{29}}.\frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$= \frac{8}{29} - \frac{9}{29} + \frac{8}{29}$$

$$= \frac{7}{29} = 0{,}241$$

$$\Theta = 76°2'$$

Perbandingan arah

Jika $\overline{OP}$ *= ai + bj + ck, maka kita ketahui bahwa :*

$$\left|\overline{OP}\right| = r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Dan cosinus arah $\overline{OP}$ *diberikan oleh*

$$l = \frac{a}{r},\ m = \frac{b}{r},\ n = \frac{c}{r}$$

Kita lihat bahwa komponen a, b, c masing – masing sebanding dengan cosinus arah l, m, n. Kadang – kadang ketiga komponen itu disebut juga sebagai perbandingan arah vektor $\overline{OP}$.

GRADIEN, DIVERGEN DAN CURL

A. Operasi Diferensial Parsial Vektor

Operasi diferensail parsial vektor deferesial disimbolkan dengan ∇ , didefinisikan oleh:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{k}$$

operator vektor ini memiliki sifat-sifat yang analog dengan vektor-vektor biasa.

B. Gradien

Misalkan Φ(x,y,z) sebuah skalar yang dapat dideferensialkan pada titik-titik (x,y,z) dalam sebuah daerah tertentu dari ruang. *Gradien* Φ, dituliskan ∇ Φ atau *grad* Φ, didefisinikan oleh:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{k} \right)\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathrm{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{k}$$

perhatikan bahwa ∇ Φ mendefisinikan sebuah medan vektor

C. Divergen

Misalkan ύ (x,y,z) = (V_1 i + V_2 j + V_3 k) terdefisinikan dan diferensiabel dalam suatu daerah tertentu dari ruang, naka divergensi ύ dituliskan ∇ ●, didefisinikan oleh :

$$\nabla \bullet ύ = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{k} \right) \bullet (\mathrm{V1 i} + \mathrm{V2 j} + \mathrm{V3 k})$$

$$= \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{V}_3}{\partial \mathrm{z}}$$

perhatikan analoginya dengan $\vec{A} \bullet \vec{B}$ = $A_1 B_1$ + $A_2 B_2$ + $A_3 B_3$. operasi ini menghasilkan besaran skalar.

D. Curl

Jika ύ (x,y,z) = (V_1 i + V_2 j + V_3 k) adalah sebuah medan vektor dideferensiabel, maka Curl atau rotasi dari ύ , dituliskan ∇ x ύ atau Curl ύ atau rot ύ, didefisinikan oleh :

$$\nabla \times ύ = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{k} \right) \bullet (\mathrm{V1 i} + \mathrm{V2 j} + \mathrm{V3 k})$$

$$\nabla \times ύ = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{V}_1 & \mathrm{V}_2 & \mathrm{V}_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times ύ = \left(\frac{\partial \mathrm{V}_3}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial \mathrm{z}} \right) \mathrm{i} + \left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{V}_3}{\partial \mathrm{x}} \right) \mathrm{j} + \left(\frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial \mathrm{y}} \right) \mathrm{k}$$

operasi ini menghasilkan besaran vektor.

Rumus Yang Mengandung ∇

Jika $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah fungsi-fungsi vektor yang diferensiabel, Φ dan ψ fungsi-fungsi skalar dari kedudukan (x,y,z) yang diferensiabel, maka :

1. $\nabla\ (\Phi + \psi) = \nabla \Phi + \nabla \psi$

2. $\nabla \bullet (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \bullet \vec{A} + \nabla \bullet \vec{B}$

3. $\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$

4. $\nabla \bullet (\Phi \vec{A}) = \nabla \Phi \bullet \vec{A} + \Phi (\vec{A} \bullet \nabla)$

5. $\nabla \times (\Phi \vec{A}) = \nabla \Phi \times \vec{A} + \Phi (\vec{A} \times \nabla)$

6. $\nabla \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \bullet (\nabla \bullet \vec{A})$

7. $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \bullet \nabla)\ \vec{A} - \vec{B}\ (\nabla \bullet \vec{A}) - (\vec{A} \bullet \nabla)\vec{B} + \vec{A} (\nabla \bullet \vec{B})$

8. $\nabla \bullet (\vec{A} \bullet \vec{B}) = (\vec{B} \bullet \nabla)\ \vec{A} - (\vec{A} \bullet \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$

9. $\nabla \bullet (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$

   dimana $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ disebut operator Laplacian

10. $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$

11. $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{A}) = 0$

12. $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \bullet \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

1. contoh : Jika $\phi(\mathrm{x, y, z}) = 3\mathrm{x}^2 y - \mathrm{y}^3 2^2$ cari $\nabla\phi$ pada titik $(1,-2,-1)$

$$\mathrm{grad} = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{x}} i \oplus \frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{z}} k \right)$$

$$= \partial \frac{\left(3\mathrm{x}^2 y - \mathrm{y}^3 \mathrm{z}^2\right)}{\partial x} i + \frac{\partial\left(3\mathrm{x}^2 y - \mathrm{y}^2 \mathrm{z}^2\right)}{\partial y} j + \frac{\partial\left(3\mathrm{x}^2 y - \mathrm{y}^3 \mathrm{z}^2\right)}{\partial \mathrm{z}}$$

$$\nabla\phi = 6\mathrm{xyi} + \left(3\mathrm{x}^2 - 3y^2 y^2\right) j + \frac{\left(-2\mathrm{y}^3 zk\right)}{}$$

$$\nabla\phi(1,-2,-1) = \left(6.1(-2)i + 3(1)^2 - 3(-2)^2(-1)\mathrm{j} + -2(-2)^3 - 1\mathrm{k}\right)$$

$$= -12\mathrm{i} - 9\mathrm{j} - 16\mathrm{k}$$

2. Jika $\mathrm{A} = \mathrm{x}^2 zi - 2\mathrm{y}^3 z^2 j + \mathrm{xy}^2 zk, cari$

$\nabla.\mathrm{A}\ (\mathrm{x}\,\nu\mathrm{A})$ pada titik $(1,-1,1)$

$$\nabla.\mathrm{A} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} i + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} k \right)\left(X^2 \mathrm{Z}i - 2y^2 Z^2 j + XY^2 Z.K\right)$$

$$= \frac{\partial\left(\mathrm{X}^2 \mathrm{Z}\right)}{\partial i} - \frac{\partial\left(2y^3 Z^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial}\left(XY^2 Z\right)$$

$$\nabla.A = 2\mathrm{XZ} - 6\mathrm{Y}^2 \mathrm{Z}^2 + XY^2$$

$$\nabla.\mathrm{A} = 2.1.\mathrm{i} - 6(\mathrm{i})^2 (1)^2 + 1\left(-1^2\right)$$

$$2 - 6 + 1 = -3$$

$$3.\nabla xA = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) x\left(x\mathrm{z}^3 i - 2x^2 yzj + 2yz^4 k\right)$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{xz}^3 & -2\mathrm{x}^2\mathrm{yz} & 2\mathrm{xz}^4 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial\left(2yz^4\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(2x^2 yz\right)}{\Im x} \right) i - \left(\frac{\partial\left(2yz^4\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(xz^3\right)}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial\left(2x^2 yz\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(xz^3\right)}{\partial z} k \right)$$

$$\left(2z^4 + 2x^2 y\right) i - \left(0 - 3xz^2\right) j + \left(-4xyz - 0\right) k$$

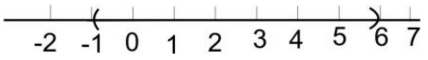
$$\left(2z^4 + 2x^2 y\right) i + \left(3xz^2\right) j - \left(4xyz\right) k$$

Soal dan pembahasan $\nabla xA_{(1,-1,1)} = \left(2(1)^4 + 2(1)^2 - 1\right) i + \left(3(1)(1)^2\right) j - [3.1(-1).1] k$

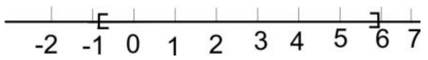
BAB VI
PERTIDAKSAMAAN DAN PERSAMAAN

KETAKSAMAAN

Menyelesaikan suatu persamaan (misalnya, $3x - 17 = 16$ atau $x^2 - x - 6 = 0$) merupakan satu tugas tradisional dalam matematika; hal ini penting dalam kuliah dan kami anggap anda ingat bagaimana mengerjakannya. Tetapi hal yang hampir sama pentingnya dalam kalkulus adalah pengertian penyelesaian ketaksamaan (misalnya, $3x - 17 < 6$ atau $x^2 - x - 6 \geq 0$). Menyelesaikan suatu ketksamaan adalah mencari semua himpunan bilangan riil yang membuat ketaksamaan berlaku. Berbeda dengan persamaan, dimana himpunan pemecahannya secara normal terdiri dari satu bilangan atau mungkin sejumlah bilangan berhingga, himpunan pemecahan suatu ketakamaan biasanya terdiri dari suatu bilangan keseluruhan selang bilanga atau, dalam beberapa kasus, suatu gabungan dari selang-selang yang demikian

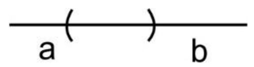
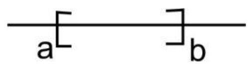


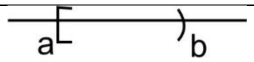
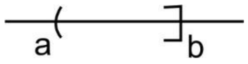
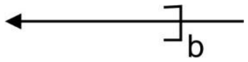
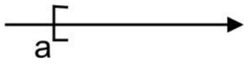
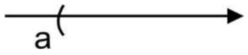
GAMBAR 1



GAMBAR 2

Selang beberapa jenis selang akan muncul dalam pekerjaan kita dan kami akan memperkenalkan istilah dan cara penulisan khusus untuk selang ini. Ketaksamaan ganda $a < x < b$ memberikan selang terbuka yang terdiri dari semua bilangan antara a dan b, tidak termasuk titik-titik ujung a dan b. kita nyatakan ia dengan lambang (a,b) (Gambar 1) Sebaliknya, ketaksamaan $a \leq x \leq b$ memberikan selang tertutup yang berpadanan, yang mencakup titik-titik ujung a dan b. Ini dinyatakan oleh [a,b] (Gambar 2) Tabel 1 berikut menunjukan sejumlah besar kemungkinan dan memperkenalkan cara penulisan kita.

Penulisan Himpunan	Penulisan Selang	Grafik
$\{x : a < x < b\}$	(a,b)	
$\{x : a \leq x \leq b\}$	[a,b]	

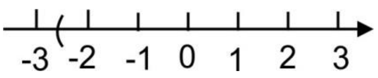
{x : a ≤ x < b }	[a,b)	
{x : a < x < b }	(a,b]	
{x : x ≤ b }	(- ∞, b]	
{x : x < b }	(- ∞, b)	
{x : x ≥ a }	[a, ∞)	
{x : x > a }	(a, ∞]	
R	(-∞,∞)	

MENYELESAIKAN KETAKSAMAAN. Sama halnya seperti dengan persamaan, prosedur untuk menyelesaikan ketaksamaan terdiri atas pengubahan ketaksamaan satu lagkah tiap kali sampai himpunan pemecahan jelas. Alat utama adalah sifat-sifat urutan dari Pasal 1.1 ini berarti bahwa kita dapat melaksanakan operasi-operasi tertentu pada suat ketaksamaan tanpa mengubah himpunan pemecahannya. Khususnya:

1. kita dapat menambahkan bilangan yang sama pada kedua pihak suatu ketaksamaan;
2. kita dapat mengalikan kedua pihak suatu ketaksamaan dengan suatu bilangan positif
3. kita dapat mengalikan kedua pihak dengan suatu bilangan negatif, tetapi kemudian kita harus membalikan arah tanda kesamaan.

CONTOH 1. selesaikanlah ketaksamaan 2x – 7 < 4x – 2 dan perhatikan grafik himpunan peyelesaiannya.

Penyelesaian



$\left(\frac{-5}{2}\infty\right) = \{x : x > \frac{-5}{2}\}$

2x – 7 < 4x – 2

2x < 4x + 5 (tambahkan 7)

-2x < 5 (tambahkan -4x)

X > $-\frac{5}{2}$ (kalikan dengan $-\frac{1}{2}$

BAB VII
TURUNAN

Misal diberikan grafik fungsi y = f(x) dengan P (a, b) terletak pada kurva f(x). Bila Q (x,y) merupakan titik sembarang pada kurva f(x) maka gradien garis PQ dapat dinyatakan dengan :

$$m_{PQ} = \frac{y-b}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Bila titik Q berimpit dengan dengan titik P maka garis PQ akan merupakan garis singgung kurva f(x) di P sehingga gradien :

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Turunan dari fungsi f(x) di titik x = a didefinisikan sebagai gradien dari garis singgung kurva f(x) di x = a dan diberikan:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Bila nilai limit ada maka f(x) dikatakan **diferensiabel** atau **dapat diturunkan** di x = a.

Misal h = x - a . Maka turunan f(x) di x = a dapat dituliskan :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Notasi lain : $f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = \frac{dy(a)}{dx} = y'(a)$

Secara fisis, pengertian dari turunan fungsi f(x) di titik x = a dinyatakan sebagai kecepatan, V(x) benda yang bergerak dengan lintasan f(x) pada saat x = a. Oleh karena itu, didapatkan hubungan $V(a) = f'(a)$ dan percepatan , A(x) , $A(a) = \frac{dV(a)}{dx}$

Bila y = f(x) diferensiabel di x = a maka kontinu di x = a. Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh

Tunjukkan bahwa f (x) = | x | kontinu di x = 0 tetapi tidak diferensiabel di x = 0

Jawab :

Fungsi f (x) kontinu di x = 0 , sebab $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Turunan f (x) di x = 0 dicari menggunakan rumus berikut :

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Karena $-1 = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} \neq \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ maka f(x) = |x| tidak diferensiabel di x = 0.

Untuk menentukan turunan suatu fungsi diberikan rumus sebagai berikut :

1. $\frac{d\left(x^r\right)}{dx} = r\,x^{r-1} \quad ; \quad r \in R$
2. $\frac{d\left(f(x) + g(x)\right)}{dx} = \frac{d\left(f(x)\right)}{dx} + \frac{d\left(g(x)\right)}{dx}$
3. $\frac{d\left(f(x)\,g(x)\right)}{dx} = g(x)\frac{d\left(f(x)\right)}{dx} + f(x)\frac{d\left(g(x)\right)}{dx}$
4. $\frac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx} = \frac{g(x)d\left(f(x)\right) - f(x)d\left(g(x)\right)}{g^2(x)}$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 10) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari :

1. $y = \frac{-12}{2x^6}$

2. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

3. $y = x(x^2 + 1)$

4. $y = \left(x^4 + 2x\right)\left(x^3 + 2x^2 + 1\right)$

5. $y = \left(3x^2 + 2x\right)\left(x^4 - 3x + 1\right)$

6. $y = \frac{1}{3x^2 + 9}$

7. $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$

8. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

9. $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

10. $y = \frac{5x^2 + 2x + 6}{3x - 1}$

(Nomor 11 sd 13) Tentukan nilai a dan b agar fungsi berikut diferensiabel di nilai yang diberikan.

11. $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ;0 \le x < 1 \\ x^2 - bx & ; x \ge 1 \end{cases}$; $x = 1$

12. $f(x) = \begin{cases} ax - b & ;\ x < 2 \\ 2x^2 - 1 & ;\ x \ge 2 \end{cases}$; $x = 2$

13. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ;\ x < 3 \\ 2ax + b & ; x \ge 3 \end{cases}$; $x = 3$

Turunan fungsi implisit

Fungsi dengan notasi y = f(x) disebut **fungsi eksplisit**, yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan fungsi implisit.

Dalam menentukan turunan fungsi implisit bila mungkin dan mudah untuk dikerjakan dapat dinyatakan secara eksplisit terlebih dahulu kemudian ditentukan turunannya. Namun tidak semua fungsi implisit dapat diubah menjadi bentuk eksplisit, oleh karena itu akan dibahas cara menurunkan fungsi dalam bentuk implisit berikut.

Contoh :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ bila $y - 4x + 2xy = 5$

Jawab :

Bentuk fungsi dapat diubah menjadi bentuk eksplisit, $y = \frac{4x+5}{1+2x}$. Digunakan aturan penurunan didapatkan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6}{(1+2x)^2}$$

Contoh :

Tentukan nilai $\frac{dy}{dx}$ di (2,1) bila $y - 4x + 2xy^2 = -3$

Jawab :

Bentuk fungsi dapat diubah menjadi fungsi eksplisit dalam y, $x = \frac{y+3}{4-2y^2}$.

Menggunakan aturan penurunan didapatkan,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y^2 + 2y + 4}{\left(4 - 2y^2\right)^2}$$

Karena $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$ maka $\frac{dy}{dx} = \frac{(4-2y^2)^2}{2y^2+2y+4}$. Nilai turunan di (2,1) atau y = 1, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

Contoh :

Tentukan nilai $\frac{dy}{dx}$ di x = 1 bila $y - 4x + 2x^2 y^2 = -3$

Jawab :

Turunan dari fungsi di atas dicari dengan menggunakan metode penurunan fungsi implisit. Misal turunan dari x dan y berturut-turut dinyatakan dengan dx dan dy. Bila dalam satu suku terdapat dua peubah (x dan y) maka kita lakukan scara bergantian, bisa terhadap x dahulu baru terhadap y atau sebaliknya. Hasil turunan $\frac{dy}{dx}$ akan nampak bila masing-masing ruas dibagi oleh dx.

$y - 4x + 2x^2 y^2 = -3$

$dy - 4dx + 4x\,dx y^2 + 4x^2\, y\, dy = 0$

$\frac{dy}{dx} - 4 + 4x\, y^2 + 4x^2\, y\frac{dy}{dx} = 0$ (ruas kiri dan ruas kanan dibagi dengan dx)

$\frac{dy}{dx} = \frac{4-4x\, y^2}{1+4x^2\, y}$

Substitusi x = 1 ke fungsi didapatkan $2y^2 + y - 1 = 0$ atau y = ½ dan y = -1.

Untuk (1, -1) , $\frac{dy}{dx} = 0$

Untuk (1, ½), $\frac{dy}{dx} = 1$

→Fungsi explisit :y = f(x) = x^{2+5}

y = f(x) = sin x

→Fungsi Implisit : f(x,y) = 0

Contoh : $x^2y+xy^2=25$

Sin xy + Cos xy = 0

ln(x+y) + ln(x-y) = 0

Turunan yang akan di cari : $\frac{dy}{dx}$

$x^2+y^2 = 25$ Tentukan $\frac{dy}{dx}$

$2x\,\frac{dx}{dy} + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0$

$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

Contoh : 1).$xy^2 + x = 0$

1. $y^2 + x.2y\,\frac{dy}{dx} + 1 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y2-1}{2xy}$$

Fungsi invers trigonometri

1). $y = \sin x \rightarrow$ fungsi invers $\rightarrow y = \sin^{-1}x = \text{arc}\sin x$

2). $\text{Sin } 30^o = \frac{1}{2} \rightarrow \text{arc sin } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{180}{6} = 30$

$$\text{Sin } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ atau } \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

V.3. Turunan fungsi invers trigonometri

1).$y = \sin^{-1x} \rightarrow x = \sin y$

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \cos^{-1} x \rightarrow y^1 = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \tan^{-1} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Turunan ke-2

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2y\frac{dy}{dx}.2xy - \left(2y + 2x\frac{dy}{dx}\right).\left(-y^2 - 1\right)}{\left(2xy^2\right)}$$

$$= \frac{-4xy^2.\left(\frac{-y^2-1}{2xy}\right) - \left(2y + 2x\left(\frac{-y^2-1}{2xy}\right)\left(-y^2-1\right)\right)}{(2xy^2)}$$

Contoh :

1).y = f(x) = $(x^2+1)^3$

$$y^2 = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} f^1 = ...$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(x^2+1\right)^2.2x$$

Misal : $U = x^2 + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$

$$y = U^3 \rightarrow \frac{dy}{du} = 3U^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$= 3U^2.2x$$

$$= 3\left(x^2+1\right)^2.2x$$

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi trigonometri (sinus dan cosinus) merupakan fungsi kontinu, sehingga limit fungsi sinus dan cosinus di setiap titik sama dengan nilai fungsinya, yaitu :

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \qquad dan \qquad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

Turunan dari fungsi sinus dapat diperoleh dari definisi, yaitu :

$$\frac{d(\sin a)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$\text{Karena } \lim_{h \to a} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = 1 \text{ maka } \frac{d(\sin a)}{dx} = \cos a$$

Sedangkan untuk turunan fungsi cosinus diperoleh berikut:

$$\frac{d(\cos a)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(a + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\sin a$$

Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan :

$$.\ \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\sin x / \cos x\right)}{dx} = \sec^2 x$$

$$2.\ \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d\left(\cos x / \sin x\right)}{dx} = -\csc^2 x$$

$$3.\ \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d\left(1 / \cos x\right)}{dx} = \sec x \tan x$$

4. $\dfrac{d(\csc x)}{dx} = \dfrac{d\left(1/\sin x\right)}{dx} = -\csc x \ \cot x$

Untuk menentukan / menghitung limit fungsi trigonometri di tak hingga dan limit tak hingga , digunakan sifat atau teorema yang diberikan tanpa bukti berikut.

Teorema

Misal f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) berlaku untuk setiap x di dalam domainnya.

Bila $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = L$ maka $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L$

Contoh

Hitung limit berikut (bila ada)

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

Jawab :

a. Misal $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Dari -1 ≤ sin x ≤ 1 maka $\dfrac{-1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$. Karena $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ maka $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

b. Bila x mendekati nol dari arah kanan maka 1 - cos x mendekati 2, sedangkan nilai sin x akan mengecil atau mendekati nol. Oleh karena itu, bila 2 dibagi dengan bilangan positif kecil sekali (mendekati nol) maka akan menghasilkan bilangan yang sangat besar (mendekati tak hingga). Jadi $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \infty$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 7) Hitung limit fungsi berikut (bila ada)

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{x}\right)$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\sin x\right)$

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

(Nomor 8 sd 10) Tentukan turunan pertama dari:

8. $y = \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

9. $y = \dfrac{\cos x}{x}$

10. $y = \dfrac{\tan x}{\sin x - \cos x}$

11. Persamaan garis singgung kurva y = f(x) di titik (a,b) dengan gradien m dinyatakan dengan : y - b = m (x - a). Sedangkan persamaan garis normal dari y = f (x,y) (garis yang tegak lurus terhadap suatu garis singgung) yang melalui titik (a,b) mempunyai persamaaan : y - b = -1/m (x - a). Tentukan persamaan garis singgung dan normal kurva berikut di titik yang diketahui dengan menghitung gradiennya terlebih dahulu.

    a. $y = x^2 - 2x$ di (0,0)

    b. $y = \tan x$ di $x = \frac{1}{4}\pi$

FUNGSI INVERS TRIGONOMETRI

Fungsi Trigonometri merupakan fungsi periodik sehingga pada daerah R bukan merupakan fungsi satu-satu. Oleh karena itu untuk mendapatkan fungsi inversnya maka domain dari fungsi trigonometri harus dibatasi.

Misal f(x) = sin x. Maka agar f(x) = sin x merupakan fungsi satu-satu maka domainnya diambil :

$$\left[\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\ ;\ -1 \le f(x) \le 1\right]$$

Pada daerah di atas f(x) = sin x merupakan fungsi satu-satu dan oleh karena itu mempunyai invers. Notasi invers : $x = \sin^{-1} f(x) = arc\ \sin f(x)$

Turunan fungsi invers Trigonometri

Misal $y = \sin^{-1} u$ $\left[-1 \le u \le 1\ ;\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right]$ dengan u merupakan fungsi dalam x. Maka turunan $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$ didapatkan sebagai berikut :

$$y = \sin^{-1} u \Leftrightarrow u = \sin y \Leftrightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos y}$$

Bila sin y = u maka $\cos y = \sqrt{1-u^2}$. Oleh karena itu, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

Jadi : $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

Dengan menggunakan anti turunan dari invers sinus didapatkan rumus integral :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$$

Untuk fungsi invers trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan cara sama :

1. $y = \cos^{-1} u \; \left[-1 \le u \le 1 \,;\, 0 \le y \le \pi\right]$

$$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\cos^{-1} u + C$$

2. $y = \tan^{-1} u \left[-\infty < u < \infty \,;\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

3. $y = \cot^{-1} u \left[0 \le u < \infty \,;\, -\frac{\pi}{2} \le y < 0 \vee 0 < y \le \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \tan^{-1} u + C \\ -\cot^{-1} u + C \end{cases}$$

4. $y = \sec^{-1} u \left[|u| \ge 1 \,;\, 0 \le y < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < y \le \pi\right] \Rightarrow y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

5. $y = \csc^{-1} u \left[|u| \ge 1 \,;\, -\frac{\pi}{2} \le y < 0 \;\vee\; 0 < y \le \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

6. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} \sec^{-1} u + C \\ -\csc^{-1} u + C \end{cases}$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 10) Carilah turunan dari :

1. $y = \cos^{-1}(2x+1)$
2. $y = \cot^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$
3. $y = \cos^{-1}\left(\cos x\right)$
4. $y = \sqrt{\tan^{-1} x}$
5. $y = x^2\left(\sin^{-1} x\right)^3$

6. $y = \left(1 + x \sec^{-1} x\right)^2$

7. $y = \sin^{-1}\left(e^{-3x}\right)$

8. $y = \csc^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

9. $y = \tan^{-1}\left(x\, e^{2x}\right)$

10. $y = \sin^{-1}\left(x^2 \ln x\right)$

(Nomor 11 sd 17) Hitung integral berikut :

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$

13. $\displaystyle\int \frac{t\, dt}{t^4+1}$

14. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\; dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

16. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

17. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

FUNGSI LOGARITMA DAN EKSPONEN

Fungsi logaritma dan fungsi eksponen merupakan dua fungsi yang saling invers dan dinyatakan sebagai :

$$y = {}^{b}\log x \Leftrightarrow x = b^{y} \; ; x, b > 0$$

Sifat-sifat logaritma :

1. ${}^{b}\log 1 = 0$
2. ${}^{b}\log b = 1$
3. ${}^{b}\log ac = {}^{b}\log a + {}^{b}\log c$
4. ${}^{b}\log a/c = {}^{b}\log a - {}^{b}\log c$
5. ${}^{b}\log a^{r} = r\,{}^{b}\log a$
6. ${}^{b}\log a = \dfrac{{}^{c}\log a}{{}^{c}\log b}$

Bilangan Natural

Bilangan natural dinotasikan dengan e dan didefinsikan sebagai :

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = 2{,}718\ldots$$

Fungsi logaritma natural didefinisikan sebagai :

$$\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\, dt, \; x > 0$$

$\ln x = {}^{e}\log x$

Turunan fungsi logaritma natural : $D_x[\ln x] = \dfrac{1}{x}$

Jadi secara umum : $D_x[\ln u] = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} \Leftrightarrow \int \dfrac{1}{u}\,du = \ln u + C$.

Eksponen Natural

Fungsi eksponen natural didefinisikan sebagai inverse dari logaritma natural dan dinotasikan :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

Sifat yang dapat diturunkan langsung dari definisi adalah :

1. $e^{\ln y} = y \quad , \forall y > 0$
2. $\ln e^x = x \quad , \forall x \in R$

Turunan dan integral dari eksponen natural:

$$D_x\left(e^u\right) = e^u \frac{du}{dx} \Leftrightarrow \int e^u\,du = e^u + C$$

Misal a > 0 dan x ∈ R. Didefinisikan : $a^x = e^{x \ln a}$. Maka :

(i) $D_x\left[a^u\right] = (\ln a)\; a^u \dfrac{du}{dx}$

(ii) $\int a^u\,du = \dfrac{1}{\ln a} a^u + C$

Misal $y = {}^a\log x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Maka $D_x\left({}^a\log x\right) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Jadi secara umum $D_x\left({}^{a}\log\ u\right) = \dfrac{1}{u\ln a}\ \dfrac{du}{dx}$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 7) Tentukan turunan pertama dari :

1. $y = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$
2. y = x ln x
3. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
4. $y = \dfrac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}}$
5. $y = \dfrac{\left(x^2+3\right)^{2/3}(3x+2)^2}{\sqrt{x+1}}$
6. $y = \ln\left(\sin x\right)$
7. y + ln (xy) = 1

(Nomor 8 sd 13) Selesaikan integral berikut :

8. $\int \dfrac{4}{2x+1}\,dx$
9. $\int \dfrac{4x+2}{x^2+x+5}\,dx$
10. $\int \dfrac{2}{x\left(\ln x\right)^2}dx$
11. $\int \dfrac{x^3}{x^2+1}dx$
12. $\int_1^4 \dfrac{3}{1-2x}dx$
13. $\int_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}dx$

(Nomor 14 sd 16) Carilah y’ dari :

14. $y = 3^{2x^4 - 4x}$
15. $y = {}^{10}\log\left(x^2+9\right)$
16. $y = \sqrt{\log x}$