LOGIKA MATEMATIKA

Kuantor

BY GUNAWANSYAH

KUANTOR

KUANTOR

Dalam kegiatan belajar sesi sebelumnya, telah Anda ketahui bahwa apabila suatu kalimat terbuka variabelnya diganti dengan bermakna oleh konstanta, maka didapatkan pernyataan. Selain dengan cara itu, ada suatu cara lain untuk memperoleh suatu pernyatan dari suatu kalimat terbuka, yaitu dengan cara membubuhkan suatu kuantor di depan kalimat terbuka tersebut.

Suatu kuantor ialah suatu ucapan yang jika dibubuhkan pada suatu kalimat terbuka akan dapat mengubah kalimat terbuka tersebut menjadi sebuah kalimat tertutup atau pernyataan.

Pada dasarnya kuantor itu ada dua macam yaitu :

1. Kuantor universal *(universal quantifier)*

Kuantor universal yang disebut pula kuantor umum dilambangkan dengan " ∀ “ yang dibacanya : “setiap“ atau “semua“. Notasi “(∀x)” dibacanya : “untuk setiap x” atau “untuk semua x”.

2. Kuantor khusus *(existensial quantifier)*

Kuantor eksistensial atau ada yang menyebutnya sebagai kuantor khusus dilambangkan dengan “∃” yang dibacanya : “sekurang-kurangnya ada satu” atau “ada beberapa”. Untuk notasi “(∃y)” dibacanya : “ada beberapa y” atau “sekurang-kurangnya ada satu y”.

Contoh 1 :

Misalkan p(x) kalimat terbuka : *x + 3 > 5*

- Apabila pada kalimat ini dibubuhi kuantor universal, maka (∀x) p(x) berarti : (∀x) (x + 3 > 5).

Ini merupakan kalimat tertutup, dan diucapkan : ***"Untuk semua x berlaku x + 3 > 5".***

Pernyataan ini nilai kebenarannya salah, sebab dengan pemisalan untuk x = 0, diperoleh pernyataan yang salah, yaitu 0 + 3 > 5.

- Apabila pada kalimat di atas dibubuhi kuantor eksistensial, maka (∃x) p(x) berarti : (∃x) (x + 3 > 5).

Diucapkannya : ***"Ada x sedemikian sehingga berlaku x + 3 > 5"*** atau ***"Sekurang-kurangnya ada satu harga x sehingga berlaku x + 3 > 5".***

Ini merupakan pernyataan yang benar, sebab dengan mengambil pemisalan x = 4, didapatkan kalimat tertutup yang benar, yaitu x + 3 > 5.

Contoh 2 :

Misalkan $q(x)$ kalimat terbuka : $x + 1 > 0$,

maka $(\forall x)\ p(x)$ berarti : $(\forall x)\ (x + 1 > 0)$. Ini merupakan kalimat tertutup.

Jika $x \in$ { bilangan positif }, maka $(\forall x)\ p(x)$ benar, Tetapi jika $x \in$ { bilangan real }, maka $(\forall x)\ p(x)$ salah.

Dari segi-segi tertentu pemakaian kuantor cukup praktis. Misalnya pernyataan : "Kuadrat setiap bilangan real tidak negatif".Hal ini dapat dilambangkan dengan : $(\forall x \in R)\ (x^2 \geq 0)$. R himpunan bilangan real.

Persamaan yang menghasilkan pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran yang benar setelah dibubuhi kuantor universal, disebut ***identitas***.

Misalnya $(x + a)^2 = x^2 + ax + a^2$, merupakan identitas, sebab $(\forall x)\ [(x + a)^2 = x^2 + ax + a^2]$, merupakan pernyataan yang benar.

Contoh 3 :

- $(\forall x \in R)\ (x^2 \geq 0)$, R = { bilangan real }, adalah pernyataan yang benar, sebab untuk setiap $x \in R$, jika dikuadratkan akan menghasilkan bilangan positif atau nol.
- $(\forall y \in A)\ (y \geq 0)$, A = { bilangan asli }, adalah pernyataan yang salah, sebab bilangan asli memang lebih besar dari nol tetapi tidak ada yang sama dengan nol.
- $(\exists x \in R)(\ x^2 = -1)$ merupakan pernyataan yang salah, sebab tidak ada satupun anggota bilangan real yang jika dikuadratkan sama dengan –1. Kuadrat dari setiap bilangan real adalah positif.
- $(\exists y \in R)(\ y \geq 0)$ merupakan pernyataan yang benar, sebab ada anggota bilangan real yang lebih besar atau sama dengan nol.

Pengkuantoran Kalimat Terbuka dengan Dua Variabel

- Sebuah kalimat terbuka dengan dua variabel, misalnya x dan y dapat dinyatakan dengan p(x , y)
- Untuk mengubah suatu kalimat terbuka dengan dua variabel sehingga menjadi kalimat tertutup yang mempunyai nilai kebenaran, diperlukan dua buah kuantor.

  Misal : $(\forall x)\ (\exists y)\ p(x , y) \Leftrightarrow (\forall x)\ [(\exists y)\ p\ (x , y)]$, dibacanya "*Untuk setiap x ada y sehingga p(x , y)*".

Jika pada kalimat terbuka dengan dua variabel, yaitu p (x , y) hanya dibubuhkan satu kuantor saja, maka bentuk baru itu masih tetap dianggap sebagai kalimat terbuka, tetapi bentuknya berubah menjadi kalimat terbuka dengan satu variabel. Adapun yang dianggap variabelnya adalah variabel yang tidak dibubuhi kuantor. Misalnya :

- $(\forall x)\ p\ (x , y)$, kalimat terbuka dengan satu variabel yaitu y.
- $(\exists y)\ p(x , y)$, kalimat terbuka dengan satu variabel yaitu x.

Negasi Pernyataan Berkuantor

Dua buah kesimpulan di atas dapat pula kita tulis dalam simbol logika berkuantor sebagai berikut :

- $(\forall x)\ p(x)$ negasinya $\sim [\ (\forall x)\ p(x)\ ]$
- $(\exists x)\ p(x)$ negasinya $\sim [\ (\exists x)\ p(x)\ ]$

postulat-postulat yang berhubungan tentang negasi pernyataan yang memuat sebuah

kuantor, yaitu :

- $\sim [\ (\forall x)\ p(x)\ ] \Leftrightarrow (\exists x)\ [\sim p(x)\ ]$

("tidak menerima bahwa p(x) memuat semua x" ekuivalen logis dengan "menerima bahwa ada x yang tidak termuat dalam p(x)".

- $\sim [\ (\exists x)\ p(x)\ ] \Leftrightarrow (\forall x)\ [\sim p(x)\ ]$

Contoh 4 :

a) "Tidak semua orang akan mati "adalah ekuivalen logis dengan "Ada orang yang tidak akan mati".

b) "Tidak semua bunga berwarna merah" berarti "Ada bunga yang tidak berwarna merah".

Jika p(x) adalah manusia tidak kekal atau x tidak kekal, maka "Semua manusia adalah tidak kekal" atau $\forall x\ p(x)$ bernilai benar, dan "Beberapa manusia kekal" atau $\exists x\ \sim p(x)$ bernilai salah.

Pernyataan di atas dapat dituliskan dengan simbol : $\boldsymbol{\sim [\forall x\ p(x)] \equiv \exists x \sim p(x)}$.

Latihan :

Latihan (buatlah negasinya) :

a. $(\exists\, x \in B)\ (x + 3 > 0)$, B = { bilangan bulat }

b. $(\forall\, x \in R)\ (x^2 + 1 \leq 0)$, R = { bilangan real }

c. $(\exists\, x)\ (x^2 = -1)$

d. Tiada kucing mirip anjing

e. Beberapa matriks tidak mempunyai invers perkalian

f. $(\forall\, x)\ (\exists y)\ (2x + y = 4)$, x dan y = { bilangan real }

g. $(\exists\, x)\ (\exists y)\ (x + y \neq y + x)$

h. $(\forall x)\ (\forall y)\ (xy = yx)$

Jawaban :

a. Negasi dari : $(\exists\, x \in B)\,(x + 3 > 0)$

adalah :

- $\sim [\,(\exists\, x \in B)\,(x + 3 > 0)\,]$
- $\Leftrightarrow (\forall\, x \in B) \sim (x + 3 > 0)$
- $\Leftrightarrow (\forall\, x \in B)\,(x + 3 \leq 0)$

b. Negasi dari : $(\forall\, x \in R)\,(x^2 + 1 \leq 0)$

adalah :

- $\sim [\,(\forall\, x \in R)\,(x^2 + 1 \leq 0)\,]$
- $\Leftrightarrow (\exists\, x \in R) \sim (x^2 + 1 \leq 0)\,]$
- $\Leftrightarrow (\exists\, x \in R)\,(x^2 + 1 > 0)\,]$

c. Negasi dari : $(\exists\, x)\,(x^2 = -1)$

adalah :

- $\sim [(\exists\, x)\,(x^2 = -1)\,]$
- $\Leftrightarrow (\forall\, x) \sim (x^2 = -1)$
- $\Leftrightarrow (\forall\, x)\,(x^2 \neq -1)$

d. Negasi dari : "Tiada kucing mirip anjing",

adalah :

- ekuivalen dengan : "Semua kucing tidak mirip anjing".
- Negasinya : "Beberapa kucing mirip anjing"
- Atau : "Ada kucing yang mirip anjing".

e. Negasi dari : "Beberapa matriks tidak mempunyai invers perkalian",

adalah :

- "Semua matriks mempunyai invers perkalian".

Jawaban :

f. Negasi dari $(\forall x)(\exists y)(2x + y = 4)$

Adalah :

- $\sim(\forall x)(\exists y)(2x + y = 4) \Leftrightarrow \sim(\forall x)[(\exists y)(2x + y = 4)]$
- $\Leftrightarrow (\exists x) \sim [(\exists y)(2x + y = 4)]$
- $\Leftrightarrow (\exists x)[(\forall y) \sim (2x + y = 4)]$
- $\Leftrightarrow (\exists x)[(\forall y)(2x + y \neq 4)]$

g. Negasi dari $(\exists x)(\exists y)(x + y \neq y + x)$

Adalah :

- $\sim(\exists x)(\exists y)(x + y \neq y + x) \Leftrightarrow \sim(\exists x)[(\exists y)(x + y \neq y + x)]$
- $\Leftrightarrow (\forall x) \sim [(\exists y)(x + y \neq y + x)]$
- $\Leftrightarrow (\forall x)[(\forall y) \sim (x + y \neq y + x)]$
- $\Leftrightarrow (\forall x)[(\forall y)(x + y = y + x)]$

f. Negasi dari $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$

Adalah :

- $\sim(\forall x)(\forall y)(xy = yx) \Leftrightarrow \sim(\forall x)[(\forall y)(xy = yx)]$
- $\Leftrightarrow (\exists x) \sim (\forall y)(xy = yx)$
- $\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y) \sim (xy = yx)$
- $\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(xy \neq yx)$

Terima Kasih