

# Décomposition de domaine

FOUNE Babacar  
Encadrant: M. CARO

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Méthode numérique</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Étude de l'algorithme de Schwarz par échange des valeurs de Dirichlet</b>	<b>4</b>
3.1	Description de l'algorithme de Schwarz . . . . .	4
3.2	Exemple d'exécution du programme . . . . .	6
3.2.1	Graphe de la solution approchée . . . . .	6
3.2.2	Graphe du nombre d'itérations en fonction de la taille du recouvrement . . . . .	8
3.3	Étude théorique de la convergence 1D . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Étude de l'algorithme de Schwarz par échange des valeurs de Fourier</b>	<b>9</b>
4.1	Formulation variationnelle . . . . .	10
4.2	Description de l'algorithme de Schwarz par échange de valeurs de Fourier . . . . .	16
4.3	Exemple d'exécution du programme . . . . .	18
4.3.1	Graphe de la solution approchée . . . . .	19
4.3.2	Graphe du nombre d'itérations en fonction de la taille du recouvrement . . . . .	20
4.3.3	Étude comparative des deux algorithmes de Schwarz . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>22</b>

## 1 Introduction

Les méthodes de décomposition de domaine de types Schwarz consistent à remplacer la résolution d'une EDP posée sur un domaine  $\Omega$  potentiellement gros et compliqué par une succession de résolutions de la même EDP sur des sous-domaines  $\Omega_i$  de  $\Omega$  qui sont à priori plus simples, plus petits, plus structurés, etc. L'objectif de ce TER est d'implémenter et d'étudier la convergence d'algorithmes dits de Schwarz obtenus par décomposition de domaine pour la résolution de l'équation elliptique avec conditions aux limites

de types Dirichlet homogène suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Dans tout ce TER, les algorithmes seront codés en langage fortran90.

## 2 Méthode numérique

On se place en dimension 1 dans le domaine  $[a, b]$ . L'équation devient donc

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = f \text{ dans } [a, b], \\ u(a) = 0, \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , on définit le pas d'espace  $h = \frac{1}{N+1}$ ,  $x_i = ih$ ,  $f_i = f(x_i)$ ,  $u_0 = u(a)$ ,  $u_{N+1} = u(b)$ .

On obtient alors  $N + 2$  points et  $h$  le pas entre ces points puis on cherche la solution aux  $N$  points intérieurs du domaine.

En utilisant le schéma aux différences finis à 3 points, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} + \alpha u_i = f_i \text{ pour } i = 1, \dots, N \\ u_0 = u(a), \\ u_{N+1} = u(b). \end{cases}$$

On obtient alors le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u_0}{h^2} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{u_{N+1}}{h^2} \end{pmatrix}.$$

On remarque que les éléments de la diagonale sont strictement positifs, la matrice est symétrique, à diagonale fortement dominante et elle est irréductible donc elle est définie positive. Ce qui entraîne qu'elle est inversible. Le système linéaire admet donc une unique solution. De plus, on peut utiliser

la méthode du gradient conjugué pour la résolution approchée du problème par le fait que le système linéaire est symétrique.

### 3 Étude de l'algorithme de Schwarz par échange des valeurs de Dirichlet

#### 3.1 Description de l'algorithme de Schwarz

On se donne une décomposition suivante du domaine  $[a,b]$



de recouvrement  $[c,d]$ .

On cherche une première solution  $u_0$  dans  $(a,d)$  de l'équation

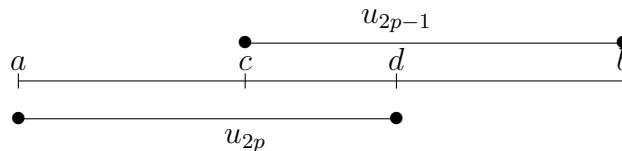
$$\begin{cases} -u_0'' + \alpha u_0 = f & \text{dans } (a, d) \\ u_0(a) = 0 \\ u_0(d) = \mu \end{cases} \quad (1)$$

puis pour tout entier  $p > 0$ , une solution  $u_{2p-1}$  dans  $(c,d)$  et  $u_{2p}$  dans  $(a,d)$  des équations suivantes

$$\begin{cases} -u_{2p-1}'' + \alpha u_{2p-1} = f & \text{dans } (c, d) \\ u_{2p-1}(c) = u_{2p-2}(c) \\ u_{2p-1}(d) = 0 \\ -u_{2p}'' + \alpha u_{2p} = f & \text{dans } (a, d) \\ u_{2p}(a) = 0 \\ u_{2p}(d) = u_{2p-1}(d) \end{cases} \quad (2)$$

Ce procédé itératif permet d'obtenir un algorithme de résolution dit de Schwarz.

Il s'agit donc de résoudre la même EDP dans les deux sous domaines, de réunir les deux solutions et de vérifier la convergence.



Soit  $c = kh$  et  $d = qh$ ,  $k, q \in \{1, \dots, N\}$  et  $k < q$ , le recouvrement est donc  $r = [kh, qh]$ .

On note  $n$  le nombre de points intérieurs au domaine  $[a, d]$  et  $m$  celui de  $[c, b]$ . Si  $p = 0$ , le problème est entièrement déterminé par (1) et on obtient le système linéaire suivante qu'on résoud dans  $[a, d]$  par la méthode de gradient conjugué.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^1 \\ U_0^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\mu}{h^2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} u_0^0 &= u(a) = 0, \\ u_0^{n+1} &= u(d) = \mu \end{aligned}$$

Puis si  $p > 0$ , le point  $c$  est à l'intérieur du domaine  $(a, d)$  et donc on pourra déterminer  $u_{2p-1}(c)$  qui est égal à  $u_{2p-2}(c)$  à l'itération précédente déjà connu. Ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2p-1}^1 \\ U_{2p-1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{2p-1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1+k} \\ f_{2+k} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{m+k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u_{2p-2}(c)}{h^2} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De même, le point  $d$  est à l'intérieur du domaine  $(a, c)$ . On a aussi l'équation suivante à résoudre

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{h^2} + \alpha & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^1 \\ U_0^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{u_{2p-1}(d)}{h^2} \end{pmatrix}$$

Après résolution des deux systèmes linéaires, on obtient  $u_{2p}$  et  $u_{2p-1}$  puis on réunit les deux solutions de la sorte :

$u = (u(0), u_{2p}(1), u_{2p}(2), \dots, u_{2p}(n), u_{2p-1}(q), u_{2p-1}(q+1), \dots, u_{2p-1}(m), u(1))$   
on vérifie la convergence par l'inégalité

$$\frac{\|u_{exc} - u\|}{\|u_{exc}\|} < \varepsilon$$

où  $\varepsilon = 0.02$  est la précision de la solution approchée et  $u_{exc}$  la solution exacte. dès que l'inégalité est vérifiée, il y'a convergence et donc  $u$  approche la solution du problème dans le domaine entier.

Sinon on continue les itérations.

Décrivons l'algorithme d'après ce qui précède :

```

n=q-2
m=N-k+1
epsi= précision pour l'arret de l'iteration
max_iter
call gradconj(A,u_0,y1,kmax,eps,n,cpt)
pour p=1 à max_iter faire
    y2(1)=f1+(x_paire(k-1)/(h**2))
    call gradconj(B,x_impair,y2,kmax,eps,m,cpt)
    y1(n)=fn+(x_impair(q-k)/(h**2))
    call gradconj(A,x_paire,y1,kmax,eps,n,cpt)
    réunir x_paire et x_impair dans Usw
    vérifier convergence avec Uexc
    sortir s'il y'a convergence
fin pour

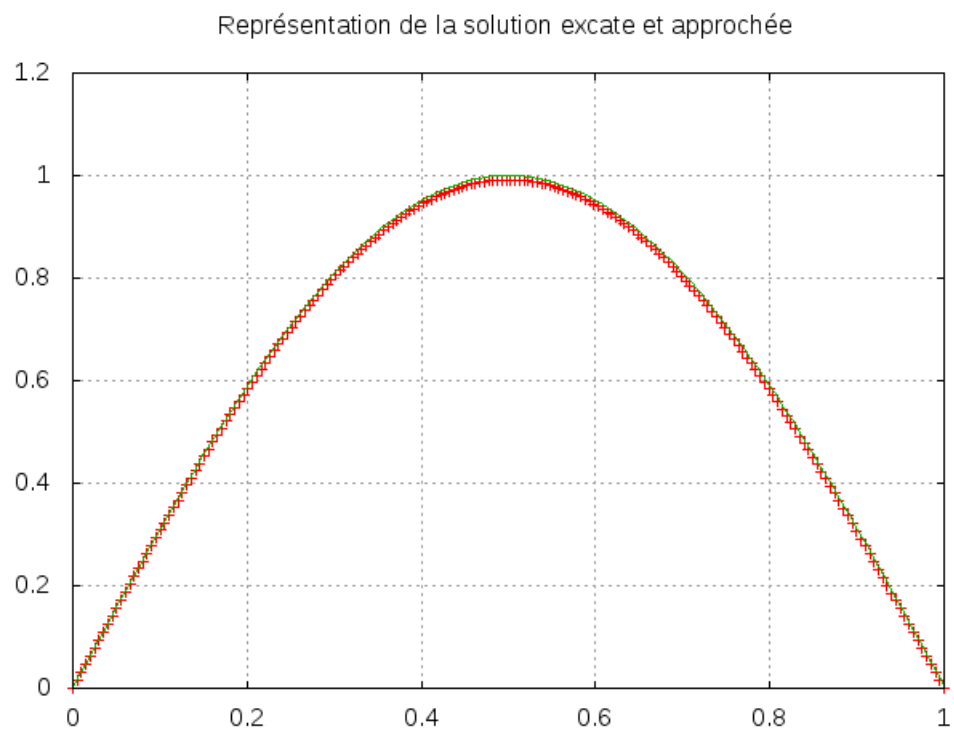
```

## 3.2 Exemple d'exécution du programme

On prend  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $\mu = 0$  et  $\alpha = 1$ . On impose également comme solution  $u = \sin(\pi x)$  ce qui entraine que  $f = (1 + \pi^2) \sin(\pi x)$  en calculant le terme source à l'aide de  $u$

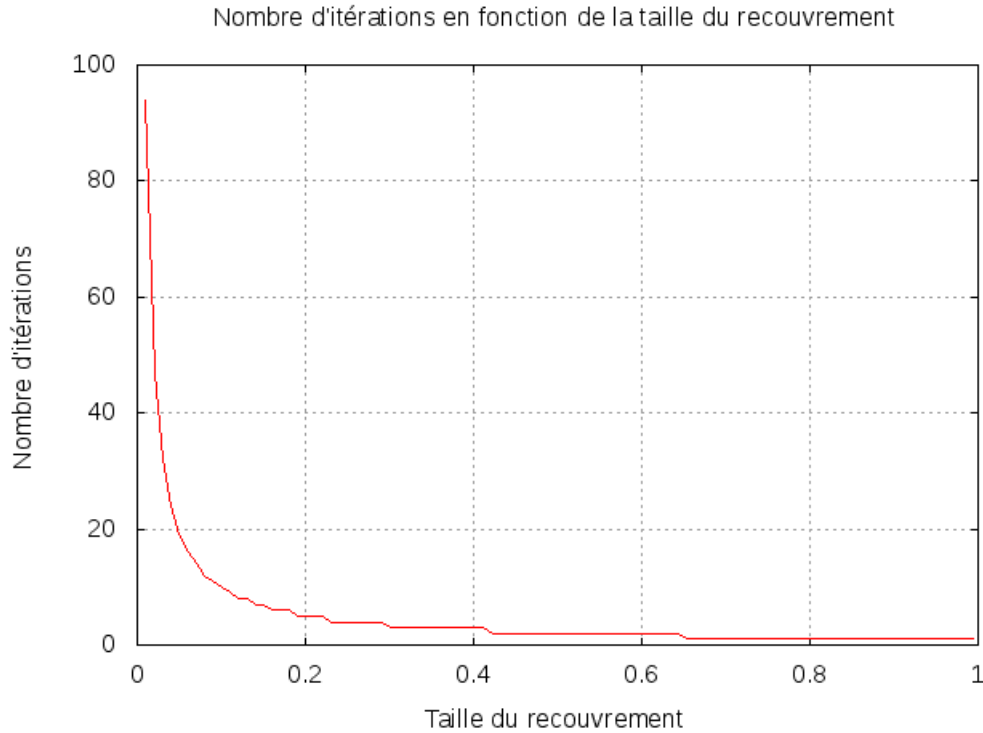
### 3.2.1 Graphe de la solution approchée

On prend le nombre de points du maillage  $N=200$ , et le recouvrement  $r=0.2$ . Après execution du programme, on a tracé le graphe suivant



D'après le graphe, on voit bien la convergence de l'algorithme vers la solution exacte

### 3.2.2 Graphe du nombre d'itérations en fonction de la taille du recouvrement



On remarque ici que le nombre d'itérations pour arriver à une précision donnée diminue quand la taille du recouvrement augmente.

L'étude théorique de la convergence ci-après permettra de comprendre ce comportement.

### 3.3 Étude théorique de la convergence 1D

On se place dans le cas où  $\alpha = 0$ ,  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $u(a)=u(b)=0$  et  $f=0$ .

Nous avons alors  $-u'' = 0$  et donc par suite  $u = qx = r$  et en utilisant les conditions aux limites  $u(a) = u(b) = 0$  on obtient  $u = 0$

Montrons alors que l'algorithme converge vers  $u_{exc} = 0$ .

$$\text{On a } \begin{cases} -u''_{2p-1} = 0 \text{ dans } (c, b) \\ u_{2p-1}(c) = u_{2p-2}(c) \\ u_{2p-1}(b) = 0 \end{cases}$$

$$-u''_{2p-1} = 0 \text{ entraîne que } u_{2p-1} = q_{2p-1}x + r_{2p-1}$$

$$\text{De même } u_{2p} = q_{2p}x + r_{2p}$$

$$u_{2p}(a) = u_{2p}(0) = q_{2p} \times 0 + r_{2p} = r_{2p}$$



et puisque  $u_{2p}(a) = 0$  donc  $r_{2p} = 0$ .

Donc

$$u_{2p}(x) = q_{2p}x \quad (3)$$

$u_{2p-1}(b) = u_{2p-1}(1) = q_{2p-1} \times 1 + r_{2p-1}$ . donc  $u_{2p-1}(b) = q_{2p-1} + r_{2p}$

et puisque  $u_{2p}(b) = 0$  on a  $r_{2p-1} = -q_{2p-1}$

Donc

$$u_{2p-1}(x) = q_{2p-1}(x - 1) \quad (4)$$

d'après l'algorithme on a  $u_{2p-1}(c) = u_{2p-2}(c)$ , on en déduit d'après les relations (3) et (4) que  $q_{2p-1}(c - 1) = q_{2p-2}c$

de façon analogue on a  $q_{2p}d = q_{2p-1}(d - 1)$

On donc les deux relations :

$$q_{2p-1}(c - 1) = q_{2p-2}(c) \text{ et}$$

$$q_{2p}d = q_{2p-1}(d - 1)$$

Ce qui entraîne que  $q_{2p}d = q_{2p-2} \times \frac{c}{c-1} \times (d - 1)$  et donc  $q_{2p} = \frac{c(1-d)}{d(1-c)} \times q_{2p-2}$

En multipliant par  $x$  et d'après l'équation (3) on a :  $u_{2p}(x) = \frac{c(1-d)}{d(1-c)} \times u_{2p-2}(x)$

$\frac{c(1-d)}{d(1-c)} < 1$  donc  $u_{2p}$  converge vers zero.

On montre aussi de façon analogue que  $u_{2p-1}(x) = \frac{c(1-d)}{d(1-c)} \times u_{2p-3}(x)$ .

Et donc  $u_{2p-1}$  converge vers zero. Donc l'Algorithme converge.

Cette convergence est géométrique de raison  $\frac{c(1-d)}{d(1-c)}$  et plus le recouvrement  $[c, d]$  est grande plus la raison est petite et plus la convergence devient plus vite. Ce qui explique le comportement de la courbe ci-dessus. Si le recouvrement est nul c'est-à-dire que  $c = d$ , la raison est égale à 1, la méthode de Schwarz est stationnaire et il n'est pas possible de converger.

## 4 Étude de l'algorithme de Schwarz par échange des valeurs de Fourier

On se place toujours dans le domaine  $[a, b]$  de recouvrement  $[c, d]$ . On utilise l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} -u_0'' + u_0 = f \text{ dans } (a, d) \\ u_0(a) = 0 \\ u_0(d) = \mu \end{cases} \quad (5)$$

puis pour tout entier  $p > 0$ , une solution  $u_{2p-1}$  dans  $(c,d)$  et  $u_{2p}$  dans  $(a,d)$  des équations suivantes

$$\begin{cases} -u_{2p-1}'' + u_{2p-1} = f \text{ dans } (c, b) \\ u_{2p-1}(c) + \gamma_c u_{2p-1}'(c) = u_{2p-2}(c) + \gamma_c u_{2p-2}'(c) \\ u_{2p-1}(b) = 0 \\ -u_{2p}'' + u_{2p} = f \text{ dans } (a, d) \\ u_{2p}(a) = 0 \\ u_{2p}(d) + \gamma_d u_{2p}'(d) = u_{2p}(d) + \gamma_d u_{2p}'(c) \end{cases} \quad (6)$$

#### 4.1 Formulation variationnelle

**Théorème 1** (de trace) Soit  $\Omega$  un ouvert borné 1-régulier de  $\mathbb{R}^n$ . Alors :

- 1-  $D(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$  et
- 2- l'application restriction  $\gamma_0$  définie par :

$$\gamma_0 : \begin{cases} (D(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) \longrightarrow (C^0, \|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}), \\ v \longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}. \end{cases} \quad (7)$$

est linéaire et continue (pour  $D(\bar{\Omega})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  et  $C^0(\partial\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$ ).

On définit ainsi :

$$\gamma_0 : \begin{cases} H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega), \\ v \longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}. \end{cases} \quad (8)$$

et la continuité s'écrit :

$$\exists c > 0, \forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Etablissons la formulation variationnelle.

On fait un produit scalaire  $L^2$ .

$$\int_c^b -u_{2p-1}''(x)v_{2p-1}(x) dx + \int_c^b u_{2p-1}(x)v_{2p-1}(x) dx = \int_c^b f(x)v_{2p-1}(x) dx,$$

puis une intégration par partie

$$\begin{aligned} \int_c^b u_{2p-1}'(x)v_{2p-1}'(x) dx - [u_{2p-1}'(x)v_{2p-1}(x)]_c^b + \int_c^b u_{2p-1}(x)v_{2p-1}(x) dx = \\ \int_c^b f(x)v_{2p-1}(x) dx, \end{aligned}$$

$v_{2p-1}(b) = 0$  pour annuler le terme au point  $b$ .

on a donc la régularité  $v_{2p-1} \in \{v \in H^1([c, b]) / v(b) = 0\}$

$$\int_c^b u'_{2p-1}(x) v'_{2p-1}(x) dx + u'_{2p-1}(c) v_{2p-1}(c) + \int_c^b u_{2p-1}(x) v_{2p-1}(x) dx =$$

$$\int_c^b f(x) v_{2p-1}(x) dx,$$

$$u_{2p-1}(c) + \gamma_c u'_{2p-1}(c) = u_{2p-2}(c) + \gamma_c u'_{2p-2}(c)$$

ce qui entraine

$$u'_{2p-1}(c) = \frac{u_{2p-2}(c) + \gamma_c u'_{2p-2}(c) - u_{2p-1}(c)}{\gamma_c}$$

Donc on a :

$$\int_c^b u'_{2p-1}(x) v'_{2p-1}(x) dx + \frac{u_{2p-2}(c) + \gamma_c u'_{2p-2}(c) - u_{2p-1}(c)}{\gamma_c} v_{2p-1}(c) +$$

$$\int_c^b u_{2p-1}(x) v_{2p-1}(x) dx = \int_c^b f(x) v_{2p-1}(x) dx,$$

On transpose les termes en  $u_{2p-2}$  ce qui donne :

$$\int_c^b -u'_{2p-1}(x) v'_{2p-1}(x) dx - \frac{u_{2p-1}(c)}{\gamma_c} v_{2p-1}(c) + \int_c^b -u_{2p-1}(x) v_{2p-1}(x) dx =$$

$$\int_c^b f(x) v_{2p-1}(x) dx - \frac{u_{2p-2}(c) + \gamma_c u'_{2p-2}(c)}{\gamma_c} v_{2p-1}(c),$$

On pose

$$A_{2p-1}(u_{2p-1}, v_{2p-1}) = \int_c^b u'_{2p-1}(x) v'_{2p-1}(x) dx - \frac{u_{2p-1}(c)}{\gamma_c} v_{2p-1}(c) +$$

$$\int_c^b u_{2p-1}(x) v_{2p-1}(x) dx$$

et

$$L_{2p-1}(v_{2p-1}) = \int_c^b f(x) v_{2p-1}(x) dx - \frac{u_{2p-2}(c) + \gamma_c u'_{2p-2}(c)}{\gamma_c} v_{2p-1}(c)$$

On pose aussi  $V = \{v \in H^1([c, b]) / v(b) = 0\}$

D'où la formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_{2p-1} \in V \text{ telque} \\ A_{2p-1}(u_{2p-1}, v_{2p-1}) = L_{2p-1}(v_{2p-1}) \quad \forall v_{2p-1} \in V \end{array} \right.$$

$V$  est un fermé dans l'espace de Hilbert  $H^1([c, b])$  donc c'est un espace de Hilbert. Vérifions donc les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

Il est clair que  $A_{2p-1}$  est une forme bilinéaire et  $L_{2p-1}$  est une forme linéaire.

$$|A_{2p-1}(u_{2p-1}, v_{2p-1})| \leq \|u_{2p-1}\|_{L^2} \|v_{2p-1}\|_{L^2} + \|u'_{2p-1}\|_{L^2} \|v'_{2p-1}\|_{L^2} + \left| \frac{u_{2p-1}(c)}{\gamma_c} v_{2p-1}(c) \right|$$

D'après le théorème de trace

$$|u_{2p-1}(c)| \leq k_1 \|u_{2p-1}\|_{H^1}$$

et

$$|v_{2p-1}(c)| \leq k_2 \|v_{2p-1}\|_{H^1}$$

donc

$$|A_{2p-1}(u_{2p-1}, v_{2p-1})| \leq \|u_{2p-1}\|_{H^1} \|v_{2p-1}\|_{H^1} + \|u_{2p-1}\|_{H^1} \|v_{2p-1}\|_{H^1} + k_1 k_2 \|u_{2p-1}\|_{H^1} \|v_{2p-1}\|_{H^1}^1$$

donc

$$|A_{2p-1}(u_{2p-1}, v_{2p-1})| \leq \left(2 + \frac{k_1 k_2}{|\gamma_c|}\right) \|u_{2p-1}\|_{H^1} \|v_{2p-1}\|_{H^1}$$

ce qui entraîne la continuité de  $A_{2p-1}$

$$|L_{2p-1}(v_{2p-1})| \leq \|f\|_{L^2} \|v_{2p-1}\|_{L^2} + \left( \frac{u_{2p-2}(c) + \gamma_c u'_{2p-2}(c)}{\gamma_c} \right) |v_{2p-1}(c)|$$

ce qui entraîne que :

$$|L_{2p-1}(v_{2p-1})| \leq \|f\|_{L^2} \|v_{2p-1}\|_{H^1} + \left| \frac{u_{2p-2}(c) + \gamma_c u'_{2p-2}(c)}{\gamma_c} \right| k_2 \|v_{2p-1}\|_{H^1}$$

donc :

$$|L_{2p-1}(v_{2p-1})| \leq (\|f\|_{L^2} + k_2 \left| \frac{u_{2p-2}(c) + \gamma_c u'_{2p-2}(c)}{\gamma_c} \right|) \|v_{2p-1}\|_{H^1}$$

d'où la continuité de  $L_{2p-1}$

$$A_{2p-1}(u_{2p-1}, u_{2p-1}) = \int_c^b u_{2p-1}^2(x) dx - \frac{u_{2p-1}(c)}{\gamma_c} u_{2p-1}(c) + \int_c^b u_{2p-1}^2(x) dx$$

donc :

$$A_{2p-1}(u_{2p-1}, u_{2p-1}) = \|u_{2p-1}\|_{L^2}^2 + \|u'_{2p-1}\|_{L^2}^2 - \frac{u_{2p-1}(c)}{\gamma_c} u_{2p-1}(c) + \int_c^b -u_{2p-1}^2(x) dx$$

donc :

$$A_{2p-1}(u_{2p-1}, u_{2p-1}) = \|u_{2p-1}\|_{H^1}^2 - \frac{u_{2p-1}(c)}{\gamma_c} u_{2p-1}(c)$$

Si  $\gamma_c \leq 0$  on a

$$a(u_{2p-1}, u_{2p-1}) \geq \|u_{2p-1}\|_{H^1}^2$$

d'où la coercivité.

Donc d'après le théoreme de Lax Milgram, il existe une unique solution de l'équation.

On fait à nouveau un produit scalaire  $L^2$  de l'équation à l'indice  $2p$ .

$$\int_a^d -u''_{2p}(x) v_{2p}(x) dx + \int_a^d u_{2p}(x) v_{2p}(x) dx = \int_a^d f(x) v_{2p}(x) dx,$$

puis une intégration par partie

$$\begin{aligned} \int_a^d u'_{2p}(x) v'_{2p}(x) dx - u'_{2p}(d) v_{2p-1}(d) + u'_{2p}(a) v_{2p}(a) + \int_a^d u_{2p}(x) v_{2p}(x) dx = \\ \int_a^d f(x) v_{2p}(x) dx, \end{aligned}$$

$v_{2p}(a) = 0$  pour annuler le terme au point  $a$ .

on a donc la régularité  $v_{2p} \in \{v \in H^1([a, d]) / v(a) = 0\}$

donc on a :

$$\int_a^d u'_{2p}(x) v'_{2p}(x) dx - u'_{2p}(d) v_{2p}(d) + \int_a^d u_{2p}(x) v_{2p}(x) dx = \int_c^b f(x) v_{2p-1}(x) dx,$$

$$u_{2p}(d) + \gamma_d u'_{2p}(d) = u_{2p-1}(d) + \gamma_d u'_{2p-1}(d)$$

ce qui entraîne

$$u'_{2p}(d) = \frac{u_{2p-1}(d) + \gamma_d u'_{2p-1}(d) - u_{2p}(d)}{\gamma_d}$$

Donc on a :

$$\int_a^d u'_{2p}(x)v'_{2p}(x) dx - \frac{u_{2p-1}(d) + \gamma_d u'_{2p-1}(d) - u_{2p}(d)}{\gamma_d} v_{2p}(d) + \int_a^d u_{2p}(x)v_{2p}(x) dx =$$

$$\int_a^d f(x)v_{2p}(x) dx,$$

On transpose les termes en  $u_{2p-1}$  ce qui donne :

$$\int_a^d u'_{2p}(x)v'_{2p}(x) dx + \frac{u_{2p}(d)}{\gamma_d} v_{2p}(d) + \int_a^d u_{2p}(x)v_{2p}(x) dx =$$

$$\int_a^d f(x)v_{2p}(x) dx + \frac{u_{2p-1}(d) + \gamma_d u'_{2p-1}(d)}{\gamma_d} v_{2p}(d),$$

On pose

$$A_{2p}(u_{2p}, v_{2p}) = \int_a^d u'_{2p}(x)v'_{2p}(x) dx + \frac{u_{2p}(d)}{\gamma_d} v_{2p}(d) + \int_a^d u_{2p}(x)v_{2p}(x) dx$$

et

$$L_{2p}(v_{2p}) = \int_a^d f(x)v_{2p}(x) dx + \frac{u_{2p-1}(d) + \gamma_d u'_{2p-1}(d)}{\gamma_d} v_{2p}(d)$$

On pose aussi  $V' = \{v \in H^1([c, b]) / v(b) = 0\}$

D'où la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_{2p} \in V' \text{ telque} \\ A_{2p}(u_{2p}, v_{2p}) = L_{2p}(v_{2p}) \quad \forall v_{2p} \in V' \end{cases}$$

$V'$  est un fermé dans l'espace de Hilbert  $H^1([c, b])$  donc c'est un espace de Hilbert. Vérifions donc les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

Il est clair que  $A_{2p}$  est une forme bilinéaire et  $L_{2p}$  est une forme linéaire.

$$|A_{2p}(u_{2p}, v_{2p})| \leq \|u_{2p}\|_{L^2} \|v_{2p}\|_{L^2} + \|u'_{2p}\|_{L^2} \|v'_{2p}\|_{L^2} - \left| \frac{u_{2p}(d)}{\gamma_d} v_{2p}(d) \right|$$

D'après le théorème de trace

$$u_{2p}(d) \leq q_1 \|u_{2p-1}\|_{H^1}$$

et

$$v_{2p}(d) \leq q_2 \|v_{2p}\|_{H^1}$$

donc

$$|A_{2p}(u_{2p}, v_{2p})| < \|u_{2p}\|_{H^1} \|v_{2p}\|_{H^1} + \|u_{2p}\|_{H^1} \|v_{2p}\|_{H^1} + q_1 q_2 \|u_{2p}\|_{H^1} \|v_{2p}\|_H^1$$

donc

$$|A_{2p}(u_{2p}, v_{2p})| < (2 + \frac{q_1 q_2}{|\gamma_d|}) \|u_{2p}\|_H^1 \|v_{2p}\|_{H^1}$$

ce qui entraine la continuité de  $A$  de même

$$|L_{2p}(v_{2p})| \leq \|f\|_{L^2} \|v_{2p}\|_{L^2} + (\frac{u_{2p}(d) + \gamma_d u'_{2p}}{\gamma_d}) |v_{2p}(d)|$$

ce qui entraine que :

$$|L_{2p}(v_{2p})| \leq \|f\|_{L^2} \|v_{2p}\|_{H^1} + |\frac{u_{2p-1}(c) + \gamma_d u'_{2p-1}}{\gamma_d}| q_2 \|v_{2p}\|_{H^1}$$

donc :

$$|L_{2p}(v_{2p})| \leq (\|f\|_{L^2} + q_2 |\frac{u_{2p}(d) + \gamma_d u'_{2p}}{\gamma_d}|) \|v_{2p}\|_{H^1}$$

d'où la continuité de  $L_{2p}$

$$A_{2p}(u_{2p}, u_{2p}) = \int_a^d u_{2p}^2(x) dx + \frac{u_{2p}(d)}{\gamma_d} u_{2p}(d) + \int_a^d u_{2p}^2(x) dx$$

donc :

$$A_{2p}(u_{2p}, u_{2p}) = \|u_{2p}\|_{L^2}^2 + \|u'_{2p}\|_{L^2}^2 + \frac{u_{2p-1}(d)}{\gamma_d} u_{2p}(d) + \int_a^d -u_{2p}^2(x) dx$$

donc :

$$A_{2p}(u_{2p}, u_{2p}) = \|u_{2p}\|_{H^1}^2 + \frac{u_{2p-1}(d)}{\gamma_d} u_{2p}(d)$$

.

Si  $\gamma_d \geq 0$  on a

$$A_{2p}(u_{2p}, u_{2p}) \geq \|u_{2p}\|_{H^1}^2$$

d'où la coercivité.

Donc d'après le théoreme de Lax Milgram, il existe une unique solution de l'équation.

Finalement le problème est bien posé si  $\gamma_c \leq 0$  et  $\gamma_d \geq 0$

## 4.2 Description de l'algorithme de Schwarz par échange de valeurs de Fourier

On cherche une première solution  $u_0$  dans  $(a, d)$  de l'équation

$$\begin{cases} -u_0'' + u_0 = f \text{ dans } (a, d) \\ u_0(a) = 0 \\ u_0(d) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Puis pour tout  $p > 0$  on pose  $A = u_{2p-2}(c) + \gamma_c u'_{2p-2}(c)$ , on fait l'approximation de  $u'_{2p-1}(c)$  et de  $u'_{2p-2}(c)$  par :

$$u'_{2p-1}(c) = \frac{u_{2p-1}(c+h) - u_{2p-1}(c)}{h} \text{ et}$$

$$u'_{2p-2}(c) = \frac{u_{2p-2}(c) - u_{2p-2}(c-h)}{h}$$

Donc

$$u_{2p-1}(c) + \gamma_c \frac{u_{2p-1}(c+h) - u_{2p-1}(c)}{h} = u_{2p-2}(c) + \gamma_c \frac{u_{2p-2}(c) - u_{2p-2}(c-h)}{h}$$

ce qui entraine que

$$(1 - \frac{\gamma_c}{h})u_{2p-1}(c) + \frac{\gamma_c}{h}u_{2p-1}(c+h) = (1 + \frac{\gamma_c}{h})u_{2p-2}(c) - \frac{\gamma_c}{h}u_{2p-2}(c-h)$$

$u_{2p-1}(c)$  est donc une valeur inconnue de  $u_{2p-1}$  qui sera obtenue après résolution du système linéaire ci-après.

La valeur  $u_{2p-1}(c)$  sera donc la première composante du vecteur  $u_{2p-1}$  donc  $u_{2p-1}(c) = u_{2p-1}^1$  et  $u_{2p-1}(c+h) = u_{2p-1}^2$ .

Le point  $c$  est le  $k^{ieme}$  point dans le domaine entier et le vecteur  $u_{2p-2}$  commence au deuxième point du domaine entier donc  $u_{2p-2}(c) = u_{2p-2}^{k-1}$  et  $u_{2p-2}(c-h) = u_{2p-2}^{k-2}$ .

Si on  $n+1$  la taille du vecteur  $u_{2p-1}$  et en appliquant le schéma aux différences finis à 3 points aux  $n-1$  points restant et intérieurs au domaine  $[c, b]$  on obtient :

$$\begin{cases} (1 - \frac{\gamma_c}{h})u_{2p-1}^1 + \frac{\gamma_c}{h}u_{2p-1}^2 = A \\ \frac{2u_{2p-1}^i - u_{2p-1}^{i-1} - u_{2p-1}^{i+1}}{h^2} + u_{2p-1}^i = f_{i+k} \text{ pour } i = 2, \dots, n \\ u_{2p-1}^{n+1} = u_{2p-1}(b) = 0 \end{cases}$$



Ce qui donne le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma_c}{h} & +\frac{\gamma_c}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & \frac{-1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{h^2} + 1 & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2p-1}^1 \\ U_{2p-1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{2p-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{1+k} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n+k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice est à diagonale strictement dominante donc elle est inversible et on peut utiliser la méthode de Jacobi ou Gauss Seidel pour la résolution du système linéaire.

On obtient alors la solution  $u_{2p-1}$  dans le domaine  $[c, b]$

On pose aussi  $B = u_{2p-1}(d) + \gamma_d u'_{2p-1}(d)$ , on fait l'approximation de  $u'_{2p}(d)$  et de  $u'_{2p-1}(d)$  par :

$$u'_{2p}(d) = \frac{u_{2p}(d) - u_{2p}(d-h)}{h} \text{ et}$$

$$u'_{2p-1}(d) = \frac{u_{2p-1}(d+h) - u_{2p-1}(d)}{h}$$

Donc

$$u_{2p}(d) + \gamma_d \frac{u_{2p}(d) - u_{2p}(d-h)}{h} = u_{2p-1}(d) + \gamma_d \frac{u_{2p-1}(d+h) - u_{2p-1}(d)}{h}$$

ce qui entraine que

$$(1 + \frac{\gamma_d}{h})u_{2p}(d) - \frac{\gamma_d}{h}u_{2p}(d-h) = (1 - \frac{\gamma_d}{h})u_{2p-1}(d) + \frac{\gamma_d}{h}u_{2p-1}(d+h)$$

$u_{2p}(d)$  est donc une valeur inconnue de  $u_{2p}$  qui sera obtenue après résolution du système linéaire ci-après.

La valeur  $u_{2p}(d)$  sera donc la dernière composante du vecteur  $u_{2p}$  donc  $u_{2p}(d) = u_{2p}^m$  et  $u_{2p}(c-h) = u_{2p-1}^{m-1}$  avec  $m+1$  la taille du vecteur  $u_{2p}$ .

Le point  $d$  est le  $q^{ieme}$  point dans le domaine entier et le vecteur  $u_{2p-1}$  commence au  $k^{ieme}$  point du domaine entier donc  $u_{2p-1}(d) = u_{2p-1}^{q-k+1}$  et  $u_{2p-1}(d+h) = u_{2p-1}^{q-k+2}$ .

$m+1$  étant la taille du vecteur  $u_{2p}$ , en appliquant le schéma aux différences finis à 3 points aux  $m-1$  points restant et intérieurs au domaine  $[a, d]$  on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2u_{2p-1}^i - u_{2p-1}^{i-1} - u_{2p-1}^{i+1}}{h^2} + u_{2p-1}^i = f_{i+k} \text{ pour } i = 1, \dots, m-1 \\ u_{2p}^0 = u_{2p}(a) = 0 \\ (1 + \frac{\gamma_d}{h})u_{2p}^m - \frac{\gamma_d}{h}u_{2p}^{m-1} = B \end{array} \right.$$

Ce qui donne le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + 1 & \frac{-1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & \frac{-1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-\gamma_d}{h} & 1 + \frac{\gamma_d}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2p}^1 \\ U_{2p}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{2p}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B \end{pmatrix},$$

La matrice est à diagonale strictement dominante donc elle est inversible et on peut utiliser la méthode de Jacobi ou Gauss Seidel pour la résolution du système linéaire. Ce qui nous donnera aussi la solution  $u_{2p-2}$  dans le domaine  $[a, d]$

On réunit les deux solutions en éliminant la partie dans recouvrement de l'un des vecteurs puis on teste la convergence. On peut maintenant écrire l'algorithme pour la résolution du problème :

```

m=q-1
n=Nbp-k
epsi= précision pour l'arret de l'iteration
max_iter=1000
call gradconj(A,u_0,y2,kmax,eps,n,cpt)
pour p=1 à max_iter faire
    y1(1)=(1+gamaC/h)*x2(k-1)-(gamaC/h)*x2(k-2)
    call jacobi(A,x1,y1,kmax,eps,n,cpt)
    y2(m)=(1-gamaD/h)*x1(q-k+1)+(gamaD/h)*x1(q-k+2)
    call jacobi(B,x2,y2,kmax,eps,m,cpt)
    réunir x_paire et x_impair dans Usw
    vérifier convergence avec Uexc
    sortir s'il y'a convergence
fin pour

```

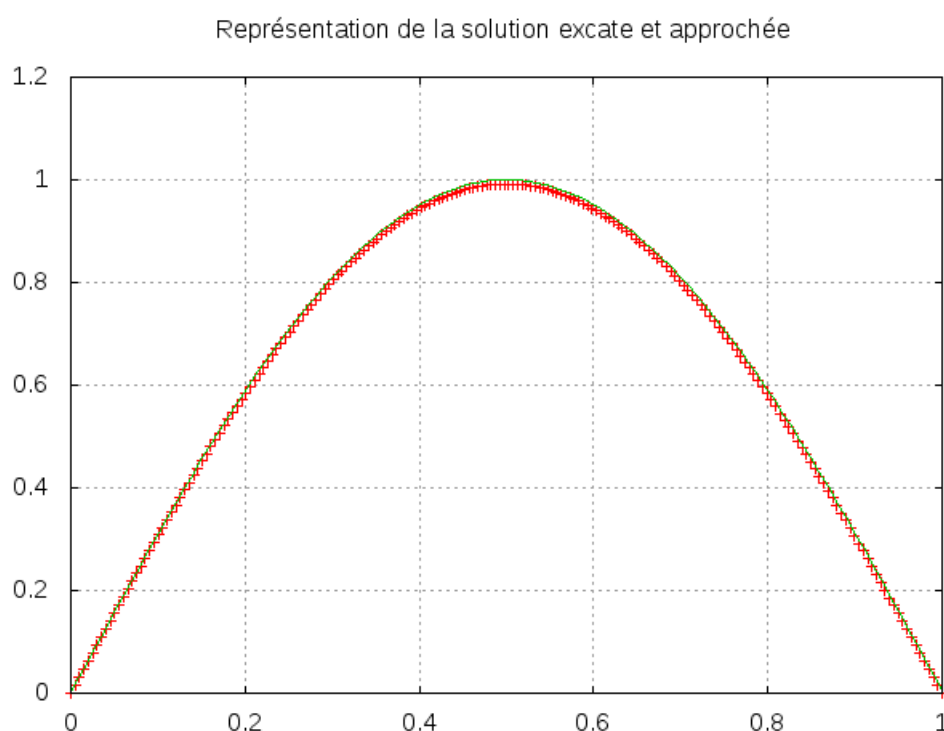
### 4.3 Exemple d'exécution du programme

On prend  $a=0$  ,  $b=1$ . On impose également comme solution  $u = \sin(\pi x)$  ce qui entraîne que  $f = (1 + \pi^2) \sin(\pi x)$ .

Le nombre de points du maillage est de 200 points et la précision est de  $\varepsilon = 2.10^{-2}$  sur l'erreur relative. Contrairement à l'algorithme précédent où l'on ne pouvait pas prendre un recouvrement nul c'est-à-dire  $c = d$ , ici c'est bien possible de prendre  $c = d$ .

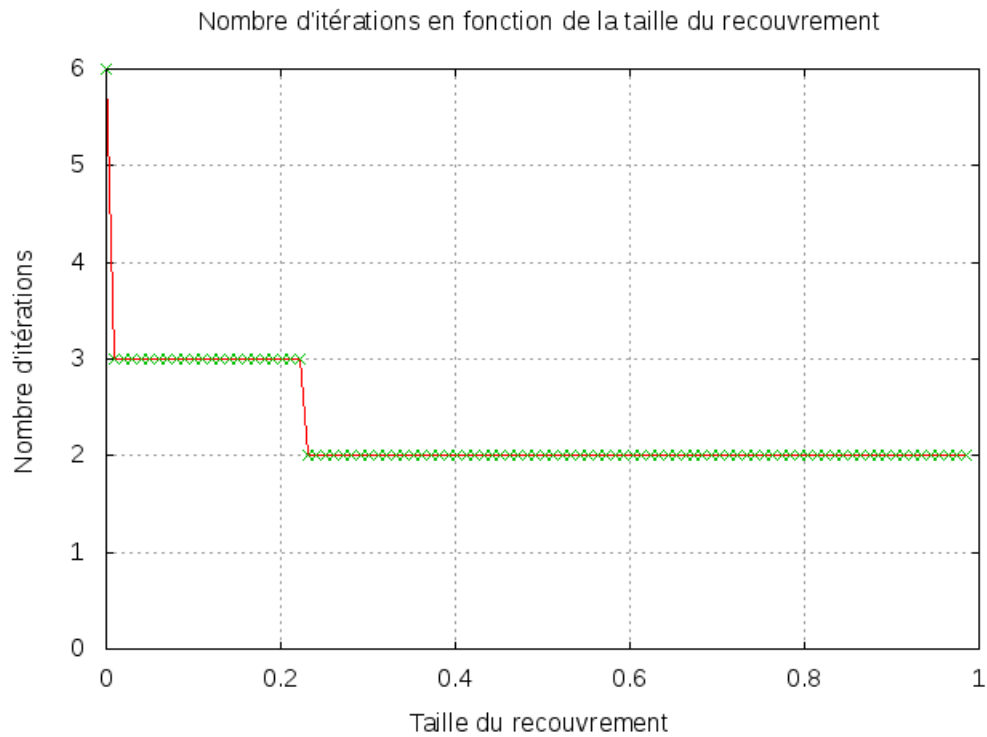
Dans la section suivant on tracera la solution aprochée dans le cas où le recouvrement est nul

#### 4.3.1 Graphe de la solution apprchée



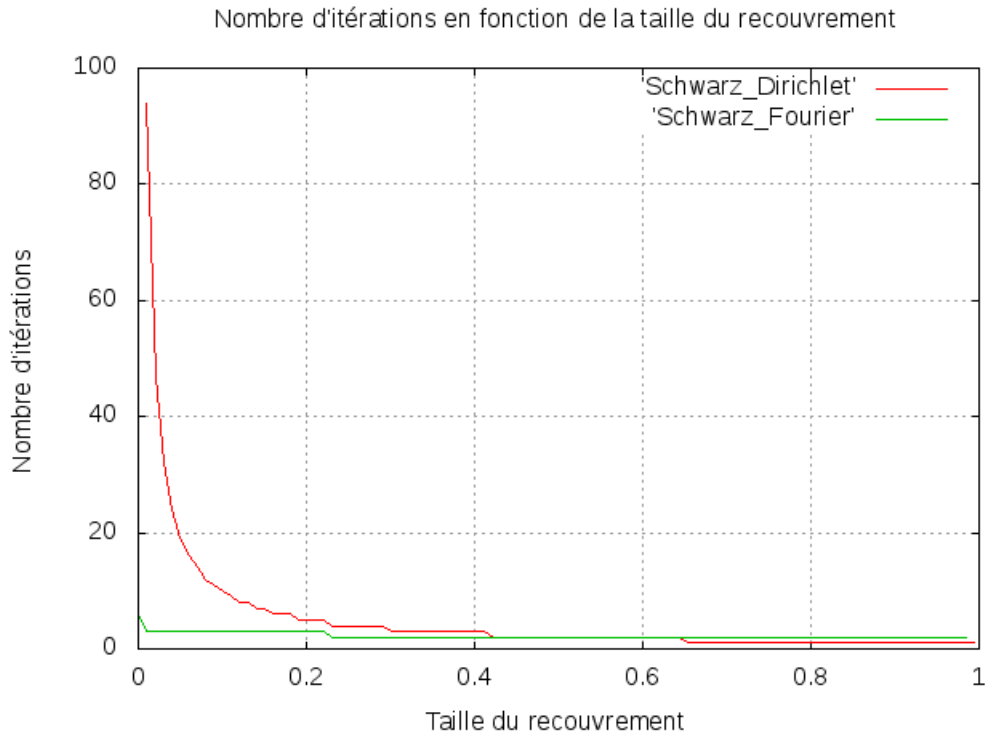
On remarque d'après cette graphe une approximation satisfaisante de la solution exacte par la solution apprchée par l'algorithme de Schwarz par échange des valeurs de Fourier. Ce qui nous permet de vérifier la convergence numérique de l'algorithme. Dans le graphe qui suis nous allons voir la vitesse de convergence en fonction de taille du recouvrement.

#### 4.3.2 Graphe du nombre d'itérations en fonction de la taille du recouvrement



On remarque ici un petit nombre d'itérations pour arriver à la convergence même quand le recouvrement est nul. Le graphe suivant illustre une étude comparative des deux algorithmes

### 4.3.3 Étude comparative des deux algorithmes de Schwarz



On remarque ici une meilleure performance de l'algorithme de Schwarz par échange des valeurs de Fourier que celui par échange des valeurs de Dirichlet. Cette algorithme de Schwarz par échange des valeurs de Fourier converge plus vite d'après le graphe sauf pour une partie où le recouvrement devient grand, ce qui ne présente pas d'intérêt car un découpage qui donne un grand recouvrement ne réduit pas le domaine en de petits sous-domaines de résolutions.

## 5 Conclusion

Ce TER m'a permis de découvrir des méthodes numériques de résolution d'EDP. Il s'agissait de décomposer le domaine et de résoudre de façon itérative la même EDP dans les sous domaines jusqu'à convergence. Ce TER m'a permis aussi acquérir une bonne maîtrise du langage Fortran90, de découvrir le langage Latex et aussi de revoir des domaines mathématiques déjà appris comme les structures matricielles, les espaces de Sobolev et les formulations variationnelles. Ce pendant le travail peut être continué par une étude de domaines plus complexes comme des rectangles découpés et utiliser

des méthodes parallèles pour la résolution de l'EDP. Ces méthodes parallèles permettent, par exemple, une résolution dans chaque sous domaine par un processeur et une communication entre les processeurs pour les échanges de valeurs de Dirichlet dans les sous-domaines. Ceci permettra alors de rendre plus performant les programmes.

## 6 Bibliographie

- [1] [http : //www.math.univ-toulouse.fr/fboyer/media/enseignements/m2ad/poly\\_schwarz](http://www.math.univ-toulouse.fr/fboyer/media/enseignements/m2ad/poly_schwarz)
- [2] [http : //www.icmc.usp.br/gustavo.buscaglia/cursos/mefverao/leborgne.pdf](http://www.icmc.usp.br/gustavo.buscaglia/cursos/mefverao/leborgne.pdf)