

1. Funkciji  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sta dani s predpisom

$$f(x) = \log(1+x), \quad g(x) = e^{-x^2}.$$

- (a) Zapišite splošni člen Taylorjeve vrste za funkciji  $f$  in  $g$  pri razvoju okrog točke 0.
- (b) Zapišite peti, deseti in stoti člen Taylorjeve vrste za funkciji  $f$  in  $g$  pri razvoju okrog točke 0.
- (c) Izračunajte, za koliko se razlikuje vrednost  $f$  od vsote prvih 10 členov Taylorjeve vrste za  $f$  za  $x = 0.1$  in za  $x = 0.9$ . Enako za vsoto prvih 100 členov Taylorjeve vrste.
- (d) Izračunajte, za koliko se razlikuje vrednost  $g$  od vsote prvih 10 členov Taylorjeve vrste za  $g$  za  $x = 0.1$  in za  $x = 0.9$ . Enako za vsoto prvih 100 členov Taylorjeve vrste.

2. Funkcija  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je dana s predpisom

$$f(x,y) = -\frac{9}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + 6y - 2xy - x^2y + 2y^2.$$

- (a) Narišite graf funkcije  $f$ .
- (b) Zapišite Hessejevo matriko za funkcijo  $f$ .
- (c) Izračunajte stacionarne točke funkcije  $f$ .
- (d) Določite ekstreme funkcije  $f$ .
- (e) Izračunajte vezani ekstrem funkcije  $f$  pri pogoju  $2x - y = 0$ .

3. Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je dana s predpisom

$$f(x) = \frac{C}{1+2x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- (a) Izračunajte nedoločeni integral funkcije  $f$ .
- (b) Določite vrednost konstante  $C$ , tako da bo vrednost določenega integrala funkcije  $f$  na intervalu  $(-\infty, \infty)$  enaka 1.
- (c) Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

(d) Funkcija  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je dana s predpisom

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Določite vrednost konstante  $M$ , tako da bo  $F(M) = 0.75$ .

- (e) V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij  $f$  in  $F$ .

4. Sistem linearnih enačb je podan v matrični obliki

$$AX = B,$$

pri čemer je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 12 \\ 8 & -13 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -27 \\ 8 & -13 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 258.5 \\ -36.4 \\ -625.2 \\ -123.6 \end{pmatrix} \text{ in } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

- (a) Zapišite sistem v obliki štirih enačb za štiri neznanke.
- (b) Poiščite rešitev sistema.
- (c) Izračunajte determinanto in rang matrike  $A$ .
- (d) Matriko  $A$  zapišite v zgorajtrikotni obliki.
- (e) Določite lastne vrednosti in lastne vektorje matrik  $A$  in  $A^T$ .

5. V nekem mestu 60% polnoletnih odraslih uporablja mobilno banko.
- Anketar pokliče 5 slučajno izbranih polnoletnih odraslih. Kolikšna je verjetnost, da vsaj trije uporabljajo mobilno banko?
  - Anketar mora poklicati dva odrasla, ki ne uporablja mobilne banke. Kolikšna je verjetnost, da bo moral za to opraviti natanko 5 klicev?
  - Med uporabniki mobilne banke jih 50% uporablja tudi kreditno kartico, med neuporabniki pa le 20%. Kolikšna je verjetnost, da slučajno izbrani odrasel uporablja kreditno kartico?
  - Anketar je poklical odraslo osebo. Oseba uporablja kreditno kartico. Kolikšna je verjetnost, da uporablja tudi mobilno banko?
6. Slučajno izberemo tri različna števila od 1 do 10. Naj slučajna spremenljivka  $X$  predstavlja število sodih števil v izboru.
- Določite verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke  $X$ .
  - Narišite graf porazdelitvene funkcije.
  - Izračunajte pričakovano vrednost, varianco in standardni odklon spremenljivke.
  - Naj bo  $Y = \sqrt{X}$ . Izračunajte pričakovano vrednost in varianco spremenljivke  $Y$ .
7. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$ , ki imata gostoti verjetnosti
- $$p_X(x) = 0,2e^{-0,2x}, \quad p_Y(y) = 0,5e^{-0,5y}$$
- za nenegativna  $x$  in  $y$ , ter  $p_X(x) = p_Y(y) = 0$  za  $x, y < 0$ .
- Določite porazdelitveni funkciji za spremenljivki  $X$  in  $Y$ .
  - Določite dvorazsežno gostoto verjetnosti in porazdelitveno funkcijo vektorja  $(X, Y)$ .
  - Narišite graf dvorazsežne gostote verjetnosti.
  - Izračunajte verjetnost dogodka  $((X, Y) \leq (2, 2))$ .
  - Zapišite porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke  $M = \max\{X, Y\}$ .
  - Zapišite gostoto verjetnosti spremenljivke  $M$ .
  - Narišite graf gostote verjetnosti spremenljivke  $M$ .
  - Izračunajte verjetnost dogodka  $(M \leq 2)$ .
8. Dani sta normalno porazdeljeni slučajni spremenljivki  $X: N(3, 2)$ ,  $Y: N(4, 3)$ . Velja še  $\text{cov}(X, Y) = -3$ .
- Določite korelacijski koeficient med spremenljivkama  $X$  in  $Y$ .
  - Zapišite kovariančno matriko vektorja  $(X, Y)$ .
  - Definirajmo  $Z = 3X + XY - 2Y^2$ . Izračunajte pričakovano vrednost slučajne spremenljivke  $Z$ .
  - Definirajmo  $U = 6X - 2Y$ . Izračunajte pričakovano vrednost in varianco slučajne spremenljivke  $U$ .