Matematički fakultet

Projekat iz predmeta konstrukcija i analiza algoritama 2

Školska 2018/2019

Grejemov algoritam

Student:
Uroš Poznan 269/2013

Mentori:
dr Vesna Marinković
Mirko Spasić

Januar, 2019

1 Problem

Sam problem koji je postavljen pred nas je iz oblasti geometrije, a sam algoritam tj. rešenje našeg problema spada u grupu geometrijskih algoritama. Prvo, definisaćemo i razjasniti neke osnovne pojmove kako bi čitaocu bila jasna cela problematika, a potom i rešenje. Objekti sa kojima radimo su tačke, vektori, duži i mnogouglovi.

Tačka je predstavljena svojim koordinatama u ravni, odnosno, u kodu, strukturom point koja sadrži koordinate x i y. **Vektor** je, takodje, svojim koordinatama i za to, u kodu, koristimo istu strukturu point koja sadrži koordinate x i y.**Duž** se zadaje parom tačaka koje predstavljaju njegove krajeve. **Put** P je niz tačaka $p_1, p_2 \dots p_k$ i duži $p_1 - p_2, p_2 - p_3, \dots, p_{k-1} - p_k$ koje ih povezuju.

Prost mnogougao je takav mnogougao kod koga odgovarajući put nema preseka sa samim sobom; odnosno, jedine ivice koje imaju zajedničke tačke su susedne ivice sa njihovim zajedničkim temenom.

Konveksni mnogougao je mnogougao za koji važi da, ma koje dve tačke iz unutrašnjosti mnogougla spojimo u duž, sve tačke te duži će ostati u unutrašnjosti mnogougla. **Konveksni omotač** datog skupa tačaka definiše se kao najmanji konveksni mnogougao koji sadrži sve tačke datog skupa . [4]

Zadatak: *Dato je n tačaka u ravni. Konstruisati konveksni omotač za njih.*

---

2 Rešenje

Algoritam koji će biti prikazan nalazi se u literaturi pod imenom *Grejemov algoritam*. Naziv nosi po *Ronaldu Grejemu*(eng. Ronald Graham) koji je ovaj algoritam objavio 1972. godine. Ovaj algoritam nam daje rešenje nalaženja konveksnog omotača sa najboljim performansama.

Zadatak možemo preformulisati na sledeći način: *odrediti podskup zadatog skupa tačaka tako da taj podskup predstavlja najmanji konveksni mnogougao,*

a sve tačke zadatog skupa tačaka koje nisu elementi tog podskupa se nalaze u unutrašnjosti tog mnogougla. [3]

Ulaz za Grejemov algoritam je skup od n tačaka za koje se traži konveksni omotač, a izlaz je skup od k tačaka ($n \geq 3, k \geq 3, k \leq n$) koje, kada se spoje, redom, predstavljaju mnogougao koji čini konveksni omotač.

ulaz: $p_1, p_2, ...p_n$ (skup tačaka u ravni)
izlaz: $q_1, q_2, ...q_k$ (konveksni omotač tačaka $p_1, p_2, ...p_n$)

2.1 Prost mnogougao

Prvo što radimo je uređivanje tačaka već poznatim algoritmom **Prost_mnogougao** [1], koji zadati niz tačaka reorganizuje tako da tačke, respektivno, predstavljaju susedna temena konveksnog mnogougla.

Jednim prolaskom kroz niz nalazimo tačku koja ima najmanju y koordinatu, u slučaju da ima više takvih, biramo onu sa najvećom x koordinatom, i označavamo tako da nam to bude tačka p_1 tj. stavljamo je na prvo mesto u nizu.

Zatim sortiramo ostale tačke p_i u nizu rastuće prema uglovima koji prava $p_1 - p_i$ zaklapa sa nekom proizvoljnom pravom, u našem slucaju, sa apscisom (u grupi tačaka sa istim uglom, sortiramo ih prema rastojanju od p_1). Tačnije, za tačke p_1 i p_i pravimo vektor $\overrightarrow{p_1p_i}$ i računamo uglove sa apscisom (vektor $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$) iz formule za skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{p_1p_i}$ i $\overrightarrow{e_1}$. Sada imamo niz sortiran tako da, idući od p_1 do p_n dobijamo prost mnogougao. ♠

Potom inicijalizujemo rezultujući skup tačaka i u njega ubacujemo tačke p_1, p_2 i p_3 tj. dobijamo prve tri tačke našeg konveksnog omotača q_1, q_2 i q_3.

Ideja je da, u nastavku, redom, u rezultujući skup (u kodu - struktura *vector*) ubacujemo tačku po tačku p_i uz proveru da li nam neka od prethodno ubačenih tačaka kvari uslov konveksnosti. Ukoliko je poslednja tačka koju smo dodali u skup(q_m) ta koja nam kvari uslov konveksnosti, nju izbacujemo iz rezultujućeg skupa. Može nam se desiti da nam neke od prethodno ubačenih tačaka nisu kvarile ovaj uslov, ali da nam za tačku koju trenutno razmatramo (p_k) i planiramo da ubacimo u skup kvare uslov konveksnosti. Tako u petlji u svakom koraku proveravamo da li je pokvaren uslov konveksnosti, uzimajući jednu po jednu tačku s kraja rezultujućeg vektora

i izbacujući ih ukoliko je potrebno u svakom koraku petlje. U toj petlji se nalazimo sve dok ne dodjemo do tačke koja nam ne kvari uslov konveksnosti. Zatim u skup ubacujemo tekuću tačku p_i i prelazimo na sledeću tačku u nizu.

Uslov konveksnosti nam se kvari ukoliko je ugao u unutrašnjosti mnogougla izmedju dve susedne stranice veći ili jednak π, u geometrijskom smislu.

Utvrđivanje da li 3 tačke formiraju "levi" ili "desni zaokret" ne zahteva stvarno računanje ugla izmedju dve duži i može biti izvedeno samo korišćenjem proste aritmetike. Za tri tačke $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$ i $p_3 = (x_3, y_3)$, dovoljno je naći vektorski proizvod $\overrightarrow{p_1p_2}$ i $\overrightarrow{p_1p_3}$, koji se određuje izrazom $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$. [2]

Ako je rezultat 0, tačke su kolinearne; ako je pozitivan, tri tačke formiraju "levi zaokret" ili direktnu orijentaciju, u suprotnom, formira se "desni zaokret" ili obrnuta orijentacija (za tačke koje redom numerišemo u direktnoj orijenataciji).

Kao što je prethodno pomenuto, u rezultujući skup tačaka ubacujemo tačke p_1, p_2 i p_3. Ukoliko je ugao izmedju pravih $p_i - q_m$ i $q_m - q_{m-1} > 0$, znamo da ti kraci u unutrasnjosti mnogougla zaklapaju ugao veći ili jednak π i iz rezultujućeg skupa izbacujemo tačku q_m. Kao što je već pomenuto u prethodnom pasusu, za jedno p_i se nalazimo u petlji i proveravamo ispunjenost ovog uslova za tačke prethodno ubačene u skup(*vektor*). To postižemo tako što smanjujemo vrednost promenljive m (`m := m-1;`) i time omogućujemo da nam u narednom koraku petlje vrednost tačke q_m bude vrednost tačke q_{m-1} iz prethodnog koraka, i nova vrednost tačke q_{m-1} je vrednost tačke q_{m-2} iz prethodnog koraka.

Ukoliko, pak, to nije slučaj, postojeći rezultujući skup samo proširujemo tekućom tačkom p_i, bez prethodnih brisanja i inkrementiramo vrednost promenljive m.

Nije zgoreg napomenuti da nam promenljiva m u svakom trenutku sadrži broj tačaka koji se trenutno nalazi u konveksnom omotaču umanjen za 1 (jer smo indeksiranje rezultujućeg vektora započeli od broja 0, a ne od 1).

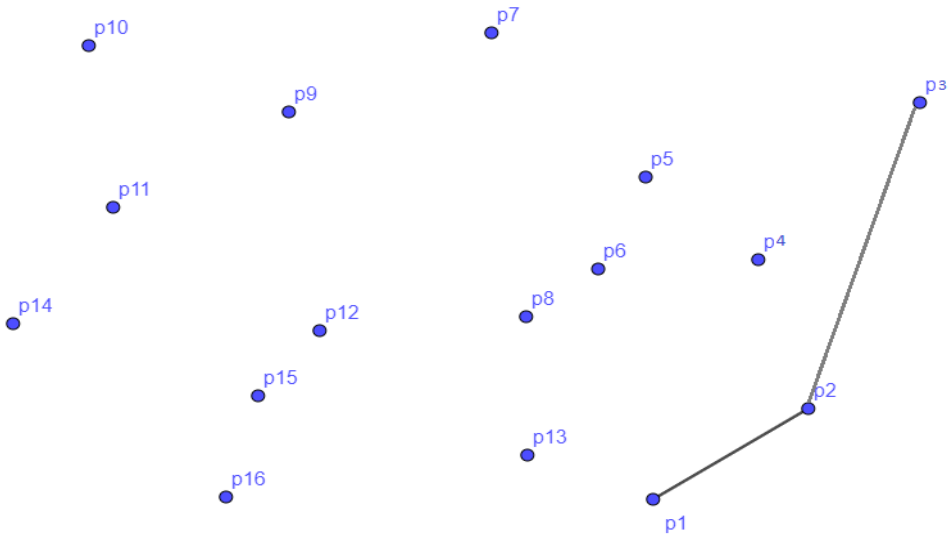
Kada zatvorimo krug, tj kada nam tekuća tačka postane p_1, to nam ujedno predstavlja i poslednju iteraciju.

U nastavku sledi pseudokod Grejemovog algoritma.

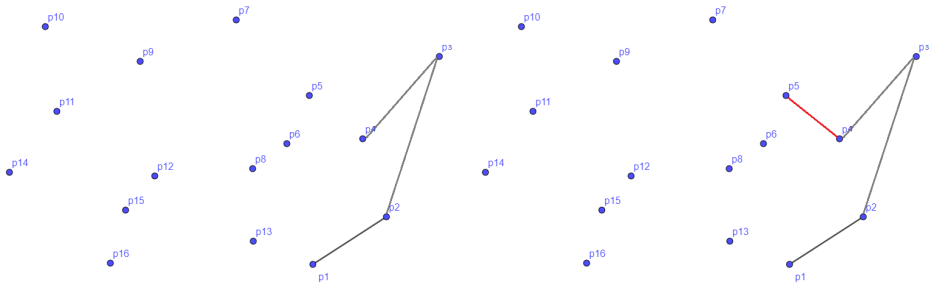
```
Algoritam: Grejemov_algoritam(p_1, p_2, ..., p_n)
Ulaz: p_1, p_2, ..., p_n (skup tačaka u ravni)
Izlaz: q_1, q_2, ..., q_m (konveksni omotač tačaka p_1, p_2, ..., p_n)
begin
    neka je p_1 tačka sa minimalnom y koordinatom
    // ako ih ima više onda biramo onu sa maksimalnom
    // x koordinatom
    uređujemo tačke algoritmom Prost_mnogougao(p_1, p_2, ..., p_n)
    q_1 := p_1;
    q_2 := p_2;
    q_3 := p_3;
    m := 3;
    for k := 4 to n do
        while ugao između (−q_{m−1} − q_m−, −q_m − p_k−) ≥ π do
        // ugao se meri iz unutrašnjosti mnogougla
            m := m − 1;
        m := m + 1;
        q_m := p_k;
end
```

2.2 Vizuelni prikaz algoritma za proizvoljan skup tačaka

U nastavku će biti vizuelno prikazani koraci izvršavanja algoritma. Crvenom bojom se boji duž koja se trenutno razmatra, odnosno čiji je početak tačka koja je poslednja ubačena u rezultujući skup, a kraj tekuća tačka p_i. Isprekidane linije se sustiču u tački koja je upravo izbačena iz rezultujućeg skupa tačaka, dok su crnom linijom povezane one tačke koje su trenutno u rezultujućem skupu.



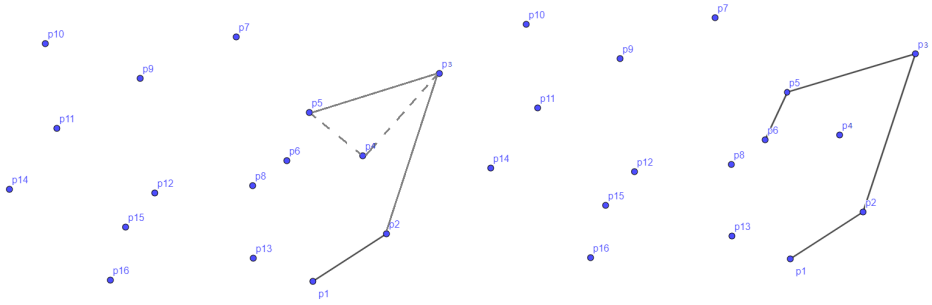
Slika 1: Početno stanje, pre ulaska u petlju



(a) p4 je ubačena u skup

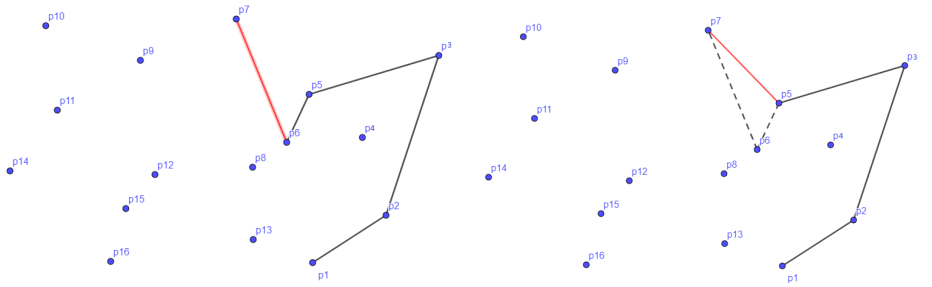
(b) Razmatra se duž p4-p5

Slika 2: Trenutno stanje



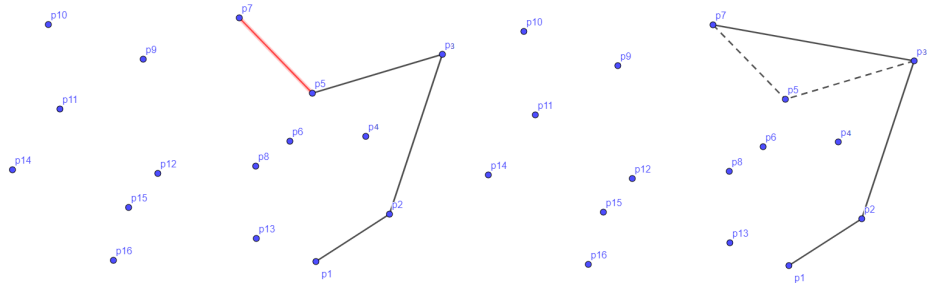
(a) p5 ubačena, a p4 izbačena (b) p6 je ubačena u skup

Slika 3: Trenutno stanje



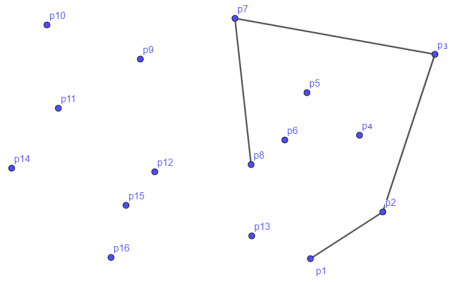
(a) razmatra se duž p6-p7 (b) p6 izbačena

Slika 4: Trenutno stanje

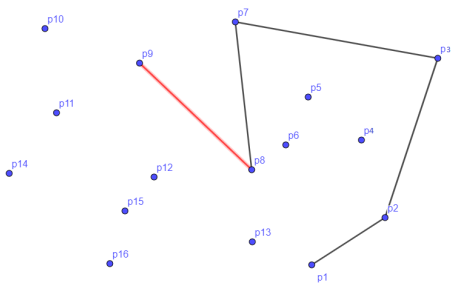


(a) razmatra se p7-p5 (b) p5 izbačena iz skupa

Slika 5: Trenutno stanje

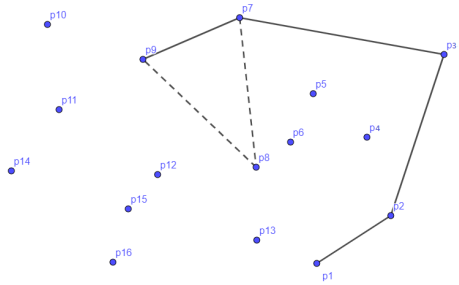


(a) p8 ubačena u skup

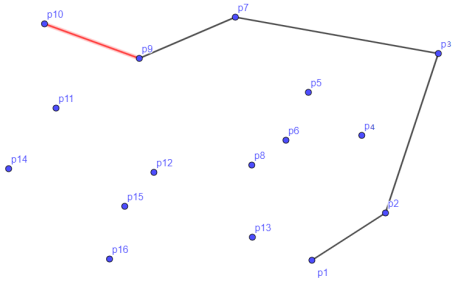


(b) razmatra se p8-p9

Slika 6: Trenutno stanje

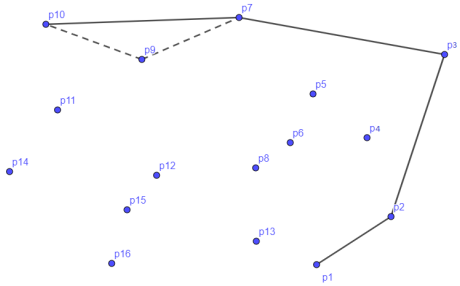


(a) p8 izbačena iz skupa

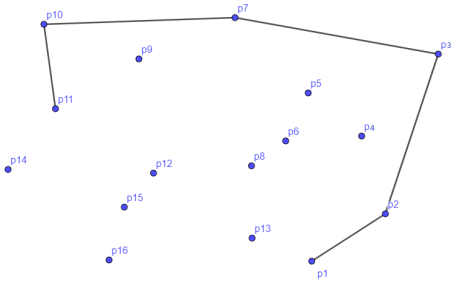


(b) razmatra se p9-p10

Slika 7: Trenutno stanje

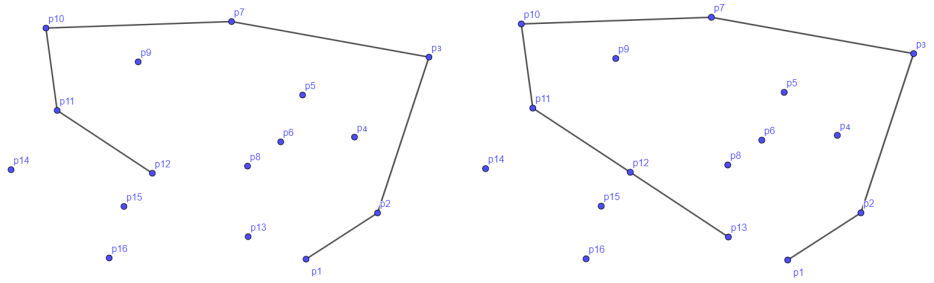


(a) p9 izbačena iz skupa



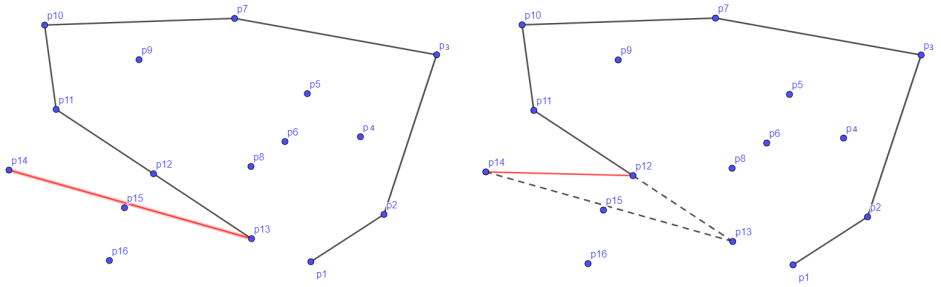
(b) p11 ubačena u skup

Slika 8: Trenutno stanje



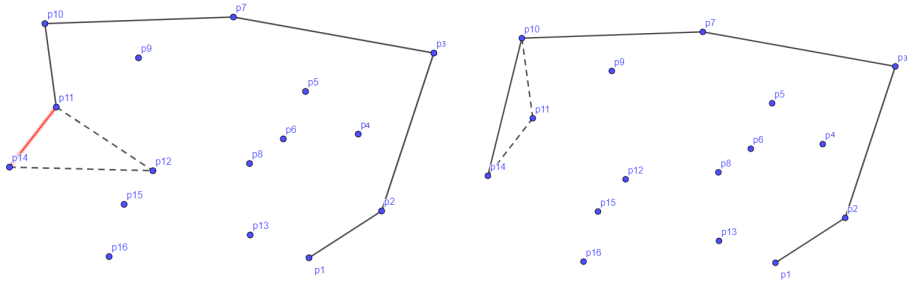
(a) p12 ubačena u skup (b) p13 ubačena u skup

Slika 9: Trenutno stanje



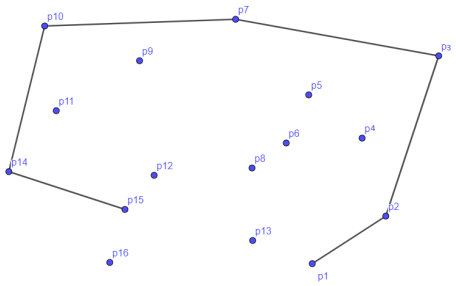
(a) razmatra se p13-p14 (b) izbačena p13,razmatra se p12-p14

Slika 10: Trenutno stanje

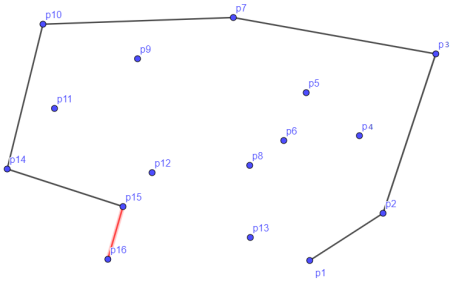


(a) izbačena p12,razmatra se p11-p14 (b) izbačena p11

Slika 11: Trenutno stanje

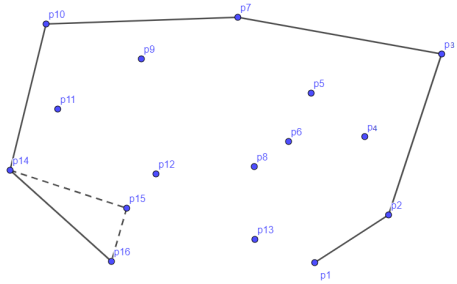


(a) ubačena p15

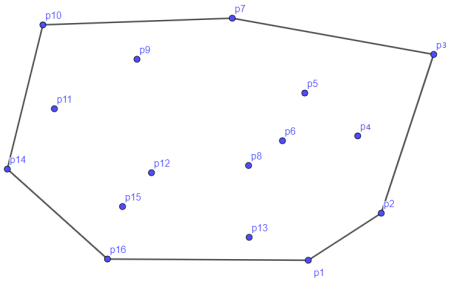


(b) razmatra se p15-p16

Slika 12: Trenutno stanje



(a) izbačena p15



(b) Završeno formiranje omotača

Slika 13: Trenutno stanje

3 Složenost

Prvi deo algoritma, u kome se formira prost mnogougao, ima složenost $O(n \cdot \log n)$. Imamo jedan prolazak kroz sve tačke, u potrazi za tačkom p_1, što nam je složenosti O(n). Zatim, imamo sortiranje niza algoritmom sortiranja (u našem kodu *Qsort*) koje je prosečne složenosti $O(n \cdot \log n)$, a sortiranje obavljamo prema uglovima koje računamo u konstantnom vremenu. Dakle $O(n + n \cdot \log n) = O(n \cdot \log n)$.

U nastavku, iako se, na prvi pogled, čini da je složenost petlje $O(n^2)$, jer se za svaku tačku vraćamo unazad kako bismo proverili da li ona sa nekim od prethodnih obrazuje desni zaokret, vremenska složenost je zapravo $O(n)$, jer se svaka tačka razmatra samo jednom (ili se kod nje završava izvršavanje unutrašnje petlje ili se izbacuje iz daljeg razmatranja), tačnije ubacuje se, odnosno izbacuje iz rezultujućeg vektora najviše jednom. Prema tome, sveukupna vremenska složenost je $O(n \cdot \log n)$, jer ova vrednost početnog sortiranja preovlađuje nad operacijama za stvarno određivanje konveksnog omotača.

4 Rezultati

U ovom poglavlju predstavićemo rezultate merenja brzine algoritma tj. našeg programa za različite ulaze, odnosno za ulaze različitih veličina. Time želimo da potvrdimo složenost algoritma koju smo procenili u prethodnom poglavlju i koja iznosi $O(n \cdot \log n)$.
Ono što znamo za složenost $O(n \cdot \log n)$ je da sa povećanjem ulaza raste nešto brže od linearne složenosti $O(n)$, a mnogo sporije od kvadratne složenosti $O(n^2)$.
Kako vidimo iz naše tablice i test primera, osetna razlika u promeni vremena pri povećanju ulaza, vidi se na tri poslednje vrste u Tabeli 4. Gde vidimo da se sa dupliranjem broja tačaka vreme izvršavanja povećava malo više od 2 puta. Te na ovom malom skupu primera vidimo da je rast malo brži od linearnog. Naravno, kada bismo testirali za mnogo veće ulaze, ta razlika bi bila sve uočljivija (kako $n \to \infty$), ali nikada ne bismo došli do kvadratne složenosti.
Nažalost, kako nas bibliotečka funkcija *qsort*, koju smo iskoristili i koja za najveću dužinu niza koji sortira uzima vrednost koja staje u *int*, sprečava da povećamo broj tačaka i tako testiramo algoritam, moraćemo da se zadovoljimo ovim rezultatima.

Tačke	Milisekunde
1 000	54.06
2 000	56.88
4 000	66.99
8 000	90.38
16 000	154.9
32 000	225.5
64 000	373.1
128 000	715.563
256 000	1470.30
512 000	2706
1 024 000	6074.12
2 048 000	12 075

Tabela 1: Tabela odnosa veličine ulaza i brzine izvršavanja programa

Naravno, iako se podrazumeva, nije na odmet pomenuti da rezultati merenja mogu da variraju u zavisnosti od koordinata tačaka koje smo uzeli za testiranje i zato skaliranje koje dobijemo pri povećanju ulaza ne može precizno da se prikaže. Naime, u ovoj tablici su uzete tačke koje obrazuju pravougaonu mrežu i njihove koordinate su generisane uniformno.

Pored prethodnih merenja koja su nam služila za potvrđivanje složenosti, predstavićemo i rezultate izvršavanja algoritma za različite instance ulaza istih dimenzija. Tačnije, merimo vreme za isti broj, ali različitu prirodu ulaznih tačaka. Tako u tabeli imamo rezultate merenja za skup tačaka koji u potpunosti pripada konveksnom omotaču (nema tačaka unutar omotača) i skup iz kog samo četiri tačke pripadaju konveksnom omotaču(sve ostale tačke su unutar omotača). Kao i skup tačaka generisan na slučajan način.

Tačke	Milisekunde
128 000	700.4
256 000	1 429
512 000	2 649
1 024 000	5 820
2 048 000	11 820

Tabela 2: Kvadrat - samo 4 tačke pripadaju konveksnom omotaču

Tačke	Milisekunde
128 000	685
256 000	1 387.43
512 000	2 301
1 024 000	5 430.32
2 048 000	11 542.57

Tabela 3: Krug - sve tačke pripadaju konveksnom omotaču

Tačke	Milisekunde
128 000	705.47
256 000	1 400
512 000	2 356.78
1 024 000	5 674.88
2 048 000	11 746.89

Tabela 4: Proizvoljan izbor tačaka

5 Literatura

[1] Nikola Ajzenhamer. Konstrukcija i analiza algoritama 2. http://nikolaajzenhamer.rs/pdf/kiaa2-v.pdf. (Accessed on 12/17/2018).

[2] Vukmirović Srdjan. Geometrija1. http://poincare.matf.bg.ac.rs/~vsrdjan/geometrija1.pdf. (Accessed on 12/17/2018).

[3] Miodrag Zivkovic. Algoritmi. *Matematicki fakultet, Beograd*, 316, 2000.

[4] Miodrag Zivkovic and Vesna Marinkovic. Konstrukcija i analiza algoritama 2. http://poincare.matf.bg.ac.rs/~vesnap/kaa2/kaa2.pdf. (Accessed on 12/17/2018).