Ordnungen und Verbände

Diskrete Strukturen

Uta Priss ZeLL, Ostfalia

Sommersemester 2016

Baum-Ordnung

00000

Verbände

000000

Formale Begriffsanalyse

00000

Ordnungsrelation

00000

Klausur

Hausaufgaben

000

Klausur

00

Hausaufgaben

Ordnungsrelation

Baum-Ordnung

Verbände

Formale Begriffsanalyse

Diskrete Strukturen Ordnungen und Verbände Slide 2/28

Nächste Woche: letzte reguläre Vorlesungen

Übernächste Woche.

Hausaufgaben

Mittwoch 1.6, 10:00 - 11:30 Vorbereitung für die Klausur Sie können Fragen stellen. Ausgewählte Ubungsaufgaben werden wiederholt.

Donnerstag 2.6: keine Veranstaltung.

Die Woche danach: keine Veranstaltung. (Es sei denn, es wird eine weitere Übung von Ihnen gewünscht.)

Diskrete Strukturen Ordnungen und Verbände Slide 3/28

Diese Themen werden auf jeden Fall in der Klausur vorkommen:

- ► Logik, Implikation, Äquivalenz, Negation, Wahrheitstabelle, Set Comprehension
- ▶ Relationen und Funktionen, Eigenschaften von Funktionen und Relationen definieren und erkennen
- ► Gruppen: Axiome, Verknüpfungstafel
- ► SetIX: zum Beispiel Relationseigenschaften oder Axiome implementieren, rekursive Funktionen
- ► Graphentheorie: Eigenschaften von Graphen
- ► Geordnete Mengen: Hasse-Diagramme, Eigenschaften
- mathematische Definitionen lesen und verstehen

Weitere Themen sind möglich (z.B. Mengenlehre, Modulo, Kombinatorik, Verbände)

Diese Themen kommen auf keinen Fall dran: Matrizen, komplexe Beweise oder komplexe Algorithmen, DNF, KNF, vollständige Induktion, Hashfunktion, Small-World Networks, Begriffsanalyse.

Formale Begriffsanalyse

LON-CAPA Aufgaben

Die Begriffe "transitiv", "Äquivalenzrelation" und "Ordnungsrelation" sind noch nicht allen klar.

Ordnungsrelation

Wie prüft man, ob eine Relation transitiv ist?

SetIX-Aufgaben

Klausur

Gründe für Fehler:

- Schreibfehler (zB Variablen unterschiedlich geschrieben)
- ▶ vergessen, die nachbarn-Prozedur mithochzuladen
- ► Zusammenhang-Aufgabe: Startmenge anstatt Startknoten

Einige Aufgaben wurden fälschlicherweise als richtig bewertet! (Und zwar wurde eine SetlX-Fehlermeldung von LON-CAPA übersehen. Wir sind dabei das Problem zu beheben.)

Es gab für beide Aufgaben auch einige sehr schöne, sehr kurze Lösungen!

Ihre Fragen

Klausur

- ► Was ist eine Hülle und wozu braucht man dass? (Nicht klausurrelevant)
- ► n-stellige Relationen (Nicht klausurrelevant)
- ► Ist der Unterschied zwischen Total- und Halbordnung, dass die Symmetrie vorhanden ist?
- ► Heißt das, dass Teilbarkeit eine partielle Ordnung ist?
- ► Welche Relationen gibt es neben <= noch? Gibt es auch >=? Wird für eine strikte Ordnung dann hier immer nur das = entfernt?

Formale Begriffsanalyse

Klausur

Zur Erinnerung: Relationseigenschaften

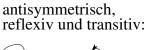
- ▶ antisymmetrisch: $\forall_{a,b \in A} : (a,b) \in R \land (b,a) \in R \Longrightarrow a = b$
- ightharpoonup reflexiv: $\forall_{a \in A} : (a, a)$
- ▶ transitiv: $\forall_{a,b,c \in A}$: $(a,b) \in R \land (b,c) \in R \Longrightarrow (a,c) \in R$

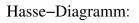
Eine **Ordnungsrelation** ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation.

Eine Menge mit einer Ordnungsrelation nennt man auch geordnete Menge.

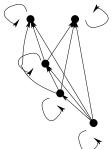
00

antisymmetrisch und transitiv:











Formale Begriffsanalyse

00000

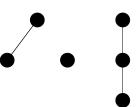
Welches sind Hasse-Diagramme geordneter Mengen?



Klausur

00





Baum-Ordnung

00000

Verbände

000000

Formale Begriffsanalyse

00000

Prüfen Sie, ob < und \le auf $\mathbb N$ Ordnungsrelationen sind.

Ordnungsrelation

00000

Klausur

00

Hausaufgaben

000

Diskrete Strukturen Ordnungen und Verbände Slide 11/28

Beispiele von Ordnungsrelationen

- Flussdiagramme
- ► Java-Klassenhierarchie
- ► Genealogie

Kennen Sie weitere Beispiele?

Klausur

00

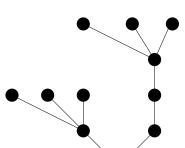
Formale Begriffsanalyse

Baum-Ordnung

Klausur

Eine Baum-Ordnung ist eine geordnete Menge, in der jedes Element genau einen direkten Vorgänger hat. Eine Baum-Ordnung hat eine Wurzel.

In einer Binärbaum-Ordnung hat jedes Element maximal zwei direkte Nachfolger.

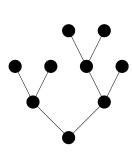


00

Hausaufgaben

000

Binar:



Nennen Sie Anwendungen von Baum-Ordnungen. Zeichnen Sie einige Baum-Ordnungen mit 6 Elementen. Wann sind zwei Baum-Ordnungen äquivalent (isomorph)?

Baum - Graphentheorie

Klausur

In der Graphentheorie ist ein Baum ein zusammenhängender (ungerichteter) Graph ohne Kreise.

Was ist der Zusammenhang zwischen Baum-Ordnungen und Bäumen?

Eine Totalordnung ist eine Ordnungsrelation, bei der gilt $\forall_{a,b \in A} : (a,b) \in R \lor (b,a) \in R$.

Zum Beispiel:

$$A < B < C < D < ... < Z < a < b < ... < z$$

Was sind die Implikationen zwischen Halbordnung, Totalordnung und Baum?

Verbände

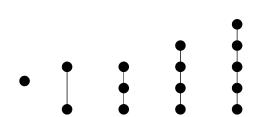
000000

000

Hausaufgaben

Klausur

00



Wie viele Totalordnungen mit n Elementen gibt es (bis auf Isomorphie)?

Verband

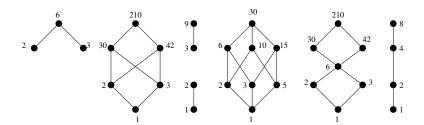
Klausur

Ein Verband ist eine geordnete Menge, bei der je zwei Elemente a, b einen größten gemeinsamen Vorgänger $a \wedge b$ haben und einen kleinsten gemeinsamen Nachfolger $a \vee b$.

Eine äquivalente Definition für einen Verband ist: eine Menge mit zwei Operationen \land und \lor für die die Kommutativ-, Assoziativ- und Absorptivgesetze gelten. Im endlichen Fall gibt es immer ein Finselement und ein Nullelement.

Welche Gesetze fehlen im Vergleich zur booleschen Algebra?

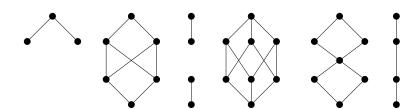
Für welche dieser Hasse-Diagramme gibt es für alle Paare von Elementen ein kgV und einen ggT?



Was ist in diesem Beispiel die Ordnungsrelation \leq ? Was sind \land und \lor ?

Formale Begriffsanalyse

Verband oder geordnete Menge?



Welche Verbände sind Ihnen in diesem Semester schon begegnet?

Klausur

00

Schaltalgebra

Klausur

00

Für den Verband der Schaltalgebra berechnen Sie:

- $1 \wedge 0 =$
- $1 \wedge 1 =$
- $0 \lor 0 =$
- $1 \lor 0 =$



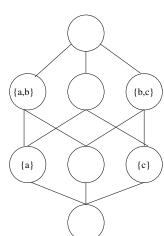
Formale Begriffsanalyse

00000

000

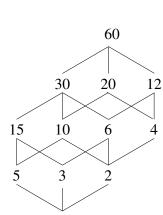
Klausur

00



Wie liest man die Operationen \subseteq, \cup, \cap jeweils im Diagramm?

Diskrete Strukturen Slide 22/28 Ordnungen und Verbände



Gibt es ein Element x mit $x \lor 2 = 60$?

00

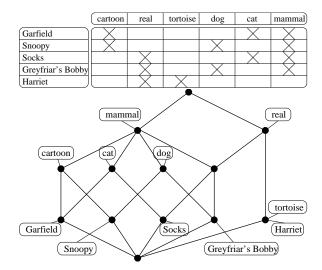
Hausaufgaben

000

Diskrete Strukturen Ordnungen und Verbände Slide 23/28

00

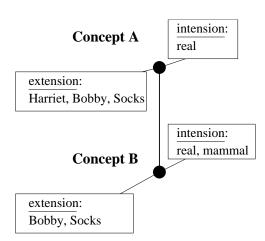
Formaler Kontext und Begriffsverband



Fragen

- ► Warum gibt es ein Element ganz oben und eins ganz unten?
- ▶ Warum gibt es Elemente, die nicht beschriftet sind?
- ► Wie kann man Extension und Intension vom Diagramm ablesen?

00



Anwendungen von Verbänden und Begriffsverbänden in der Informatik

- ▶ Java Klassenhierarchien analysieren
- Code-Abhängigkeiten entdecken (z.B. Sicherheistlücken)
- Code-Restrukturierung beim Kompilieren
- Qualitative Datenanalyse
- ▶ Netzwerkanalyse

Klausur

Übrigens

Sehen Sie sich noch mal die Definition von "inversen" Elementen bei Gruppen und die Definition von "komplementären" Elementen in booleschen Algebren an. Wo ist der Unterschied?