Simetrija Fizikoje

Paskaitų konspektas. Versija 2024-02-24

2024

SIMETRIJA FIZIKOJE

TEMA

ĮVADAS Į GRUPIŲ TEORIJĄ 1

1.1 Grupės ir jų pavyzdžiai

Apibrėžimas 1.1.1. Grupė

Elementų aibė G vadinama *grupe* jei ant jos elementų yra apibrėžta binarinė operacija, vadinama *grupės daugyba*, tenkinačia šias savybes:

A. Daugyba $*$ yra *uždara*, t.y. $a * b \in G$ visiems $a, b \in G$ (arba $* : G \times G \to G$).

B. Daugyba $*$ yra *asociatyvi*, t.y. $a * (b * c) = (a * b) * c$ visiems $a, b \in G$.

C. Egzistuoja *vienetinis elementas* $e \in G$ toks kad $a * e = a = e * a$ visiems $a \in G$.

D. Kiekvienam $a \in G$ egzistuoja *atvirkštinis elementas* $b \in G$ toks kad $a * b = e = b * a$. Šį elementą žymėsime $b = a^{-1}$.

Apibrėžimas 1.1.2. Abelio grupė

Grupė G vadinama *abelio* grupe, jei $a * b = b * a$ visiems $a, b \in G$.

Mes dažnai praleisime grupės daugybos ženklą ir rašysime ab vietoj $a * b$ ir a^n vietoj $\underbrace{a * \cdots * a}_{n \text{ kartų}}$.

Apibrėžimas 1.1.3. Grupės eilė

Grupės elementų skaičius yra vadinamas *grupės eile*. Eilę žymėsime $n_G = |G|$.
Elemento $a \in G$ *eilė* yra mažiausias skaičius $n \in \mathbb{N}$ toks, kad $a^n = e$.

Pavyzdys 1.1.1. Pati paprasčiausia grupė yra sudaryta iš vienetinio elemento, $C_1 = \{e\}$:

$$\begin{aligned}
\text{Uždarumas:} \quad & e * e = e \\
\text{Asociatyvumas:} \quad & (e * e) * e = e * e = e * (e * e) \\
\text{Vienetinis elementas:} \quad & e \\
\text{Atvirkštinis elementas:} \quad & e^{-1} = e
\end{aligned}$$

Skaičius 1 kartu su įprastine daugyba sudaro grupę C_1.

Pavyzdys 1.1.2. Kita paprasčiausia grupė turi du elementus, $C_2 = \{e, a\}$, kur $a * a = a^2 = e$:

$$\begin{aligned} \text{Uždarumas:} \quad & a * a = e \\ \text{Asociatyvumas:} \quad & (a * a) * a = e * a = a * e = a * (a * a) \\ \text{Vienetinis elementas:} \quad & e \\ \text{Atvirkštinis elementas:} \quad & a^{-1} = a \text{ nes } a * a = e \end{aligned}$$

Skaičiai 1 ir -1 kartu su įprastine daugyba sudaro grupę C_1.

Fizikoje, a gali būti erdvės ($\vec{x} \to -\vec{x}$), laiko ($t \to -t$), arba krūvio ($e^- \to e^+$) atspindys.

Klausimas. Ar gali būti lygybė $a * a = a$ vietoj $a * a = e$?

Pavyzdys 1.1.3. Yra vienintelė grupė su 3 elementais, $C_3 = \{e, a, b\}$. Jos daugybos lentelė:

e	a	b
a	b	e
b	e	a

Paprastumo dėlei, mes praleidome pirmą eilutę ir pirmą stulpelį, kur buvo daugyba iš e.

Skaičiai 1, $e^{i2\pi/3}$, ir $e^{-i2\pi/3}$ kartu su įprastine daugyba sudaro grupę C_3.

Lygiakraščio trikampio pasukimai 0, $2\pi/3$, ir $4\pi/3$ kampais sudaro grupę C_3.

Užduotis. Suraskite a^{-1} ir b^{-1}.

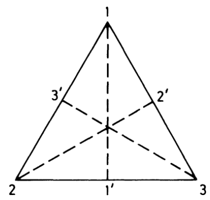
Pavyzdys 1.1.4. Paprasčiausia ne ciklinė grupė su 4 elementais vadinama *Kleino keturgrupe* arba *dihedrine* grupe $D_2 = \{e, a, b, c\}$. Jos daugybos lentelė:

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Tai abelinė stačiakampio simetrijų grupė, kur a ir b yra atspindžiai, o c - sukimas π kampu.

Pavyzdys 1.1.5. Paprasčiausia ne Abelio grupė turi 6 elementus. Tai dihedrinė lygiakraščio trikampio simetrijų grupė, žymima D_3:

e	(12)	(23)	(31)	(123)	(321)
(12)	e	(321)	(123)	(31)	(23)
(23)	(123)	e	(321)	(12)	(31)
(31)	(321)	(123)	e	(23)	(12)
(123)	(23)	(31)	(12)	(321)	e
(321)	(31)	(12)	(23)	e	(123)



Grupė D_3 veikia ant viršūnių aibės $V = \{1,2,3\}$ šiais perstatymais:

- vienetinis elementas e nieko neperstato
- atspindžiai (12), (23), (31) perstato nurodytas viršūnes
- pasukimas $2\pi/3$ kampu, (123), perstato $\{1,2,3\} \mapsto \{2,3,1\}$, t.y. $1 \to 2 \to 3 \to 1$
- pasukimas $4\pi/3$ kampu, (321), perstato $\{1,2,3\} \mapsto \{3,1,2\}$, t.y. $1 \to 3 \to 2 \to 1$

Pastebėkite, kad:

- Grupė D_3 nėra Abelio, nes, pavyzdžiui, $(12)(123) = (31)$ bet $(123)(12) = (23)$.
- Grupė D_3 veikia ant viršūnių aibės V visais įmanomais sukeitimas. Ji tapatinga trijų viršūnių perstatymų grupei, žymimai S_3.

> **Apibrėžimas 1.1.4. Pogrupis**
> Grupės G poaibis H vadinamas *pogrupiu* jei poaibis H kartu su grupės daugyba $*$ apribota ant šio poaibio sudaro grupę. Pogrupius žymėsime $H \leq G$.

Pavyzdys 1.1.6. Kiekviena grupė G turi du trivialius pogrupius, save pačią ir vienetinę grupę, $G \leq G$ ir $\{e\} \leq G$. Mes visada kalbėsime tik apie tikrus (proper) pogrupius.

Pavyzdys 1.1.7. Stačiakampio simetrijų grupė D_2 turi 3 pogrupius: $\{e,a\}$, $\{e,b\}$ ir $\{e,c\}$. Kiekvienas iš jų tapatus grupei C_2.

Užduotis. Lygiakraščio trikampio simetrijų grupė D_3 turi 4 pogrupius. Suraskite juos.

Užduotis. Kvadrato simetrijų grupė D_4 turi 8 pogrupius. Suraskite juos.

Daug fizikai svarbių grupių yra *begalinės*. Todėl pateikiame keletą tokių grupių pavyzdžių.

Pavyzdys 1.1.8. Begalinės skaičių grupės:

- Sveikų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ kartu su sumos operacija sudaro begalinę Abelio grupę:
$$e = 0, \quad a^{-1} = -a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$
- Realių skaičių aibė be nulio, $\mathbb{R}^\times$, kartu su daugybos operacija, sudaro begalinę Abelio grupę:
$$e = 1, \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}^\times$$

Pavyzdys 1.1.9. Plokščios (Euklidinės) erdvės izometrijų grupė $E(n)$ yra begalinė. Ją sudaro:

- Transliacijos, $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$, kur $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ir $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.
- Sukimai $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, kur A yra tam tikra $n \times n$ realių skaičių matrica.
- Atspindžiai plokštumos statmenos vektoriui $\vec{x}$ atžvilgiu.

Pavyzdys 1.1.10. Begalinės matricų grupės:

- Kompleksinės neišsigimusios $n \times n$ matricos sudaro *bendrąją tiesinę grupę*:
$$GL(n) = \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \; : \; \det M \neq 0\}$$

- Unitarios $n \times n$ matricos sudaro *unitariąją grupę*:

$$U(n) = \{U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \ : \ U^\dagger U = I\}$$

kur $U^\dagger = \overline{U^T}$ reškia matricos tanspoziciją ir kompleksinį jungtinumą,
o I – vienetinė matrica.

- Unitarios $n \times n$ matricos, kurių determinantas lygus vienam, sudaro *specialiąją unitariąją grupę*:

$$SU(n) = \{U \in SU(n) \ : \ \det U = 1\}$$

- Ortogonalios $n \times n$ matricos sudaro *ortogonaliąją grupę*:

$$O(n) = \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ M^T M = I\}$$

1.2 Perstatymo lema ir simetrinė grupė

Teiginys 1.2.1. Panaikinimo taisyklė (Cancellation law)
Tegul $a, b, c \in G$.

A. Jei $ba = ca$, tada $b = c$.

B. Jei $ab = ac$, tada $b = c$.

Įrodymas. (A) Tarkim $ba = ca$. Tada

$$(ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} \quad \Longrightarrow \quad b(aa^{-1}) = c(aa^{-1}) \quad \Longrightarrow \quad be = ce \quad \Longrightarrow \quad b = c$$

(B) Tarkim $ab = ac$. Tada

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \quad \Longrightarrow \quad (aa^{-1})b = (aa^{-1})c \quad \Longrightarrow \quad eb = ec \quad \Longrightarrow \quad b = c$$

Čia pasinaudojome daugybos asociatyvumo, atvirkštinio ir vienetinio elemento savybėmis. □

Užduotis. Parodykite, kad (1) jei $ba \neq ca$, tada $b \neq c$ ir (2) jei $ab \neq ac$, tada $b \neq c$.

Teiginys 1.2.2. Perstatymo lema (Rearrangement lemma)
Tegul $h \in G$. Tada aibė

$$hG = \{hg : g \in G\}$$

yra sudaryta grupės G elementų kurių kiekvienas pasirodo šioje aibėje tik vieną kartą. Kitais žodžiais, $hG = G$.

Įrodymas. Tarkim

$$G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$$

Tada

$$hG = \{hg_1, hg_2, \ldots, hg_n\}$$

Iš Panaikinimo taisyklės žinome, kad $hg_i \neq hg_j$, jei $g_i \neq g_j$, todėl visi aibės hG elementai yra skirtingi.
Pagaliau, $|hG| = |G|$, todėl hG skiriasi nuo G tik elementų užrašymo tvarka. □

Pavyzdys 1.2.1. Tegul $G = C_3 = \{e, a, a^2\}$ ir $h = a$. Tada

$$aC_3 = \{a, a^2, a^3\} = \{a, a^2, e\}$$

Perstatymo lema teigia, kad jei

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

Tada

$$hG = \{g_{h_1}, g_{h_2}, \dots, g_{h_n}\}$$

kur $(h_1, h_2, \dots h_n)$ yra skaičių rinkinio $(1, 2, \dots, n)$ perstatymas.

Mes suradome natūralų grupės elemento $h \in G$ ir *perstatymo* p_h sąryšį, kur

$$p_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{pmatrix}$$

Egzistuoja $n!$ skaičių rinkinio $(1, 2, \dots, n)$ perstatymų. Perstatymų visuma sudaro *perstatymų* arba *simetrinę* grupę S_n. Jos elementus žymėsime taip:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \qquad p^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Užduotis. Įrodykite, kad $|S_n| = n!$.

Daugybą grupėje S_n apibrėšime per pavyzdį. Tegul

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

Tada

$$p_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Simetrinės grupės S_n elementai įprastai užrašomi per *r-ciklus*, pavyzdžiui

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (134)(25)(6)$$

kur (134) yra 3-ciklas, (25) yra 2-ciklas, ir (6) - 1-ciklas. Ciklai skaitomi iš kairės į dešinę.

Savybės:

- Kiekvienas perstatymas turi unikalią ciklų struktūrą.
- Vienintelis perstatymas sudarytas tik iš 1-ciklų yra vienetinis elementas:

$$e = (1)(2) \cdots (n)$$

- Ciklai skaitomi iš kairės į dešinę, pvz. (123) atvaizduoja $1 \to 2$, $2 \to 3$ ir $3 \to 1$.
- Ciklai dauginami iš dešinės į kairę, pvz. $(23)(12) = \{1 \to 2 \to 3,\ 2 \to 1 \to 1,\ 3 \to 3 \to 2\} = (321)$.

Užduotis. Tegul

$$p_1 = (1352), \quad p_2 = (256), \quad p_3 = (1634)$$

(1) Parodykite, kad

$$p_1 p_2 = (1356), \quad p_1 p_3 = (1652)(34)$$

(2) Patikrinkite asociatyvumo sąvybę, $(p_1 p_2) p_3 = p_1 (p_2 p_3)$.

Apibrėžimas 1.2.3. Grupių izomorfizmas

Dvi grupės G ir G' vadinamos *izomorfiškomis* jeigu jų eilės sutampa ir egzistuoja injektyvus (1:1) atvaizdavimas tarp šių grupių, išsaugantis grupės daugybą:

$$G \cong G' \implies |G| = |G'| \land \exists f : G \hookrightarrow G',\ f(g)f(h) = f(gh)\ \forall g,h \in G$$

Pavyzdys 1.2.2.

- Stačiakampio simetrijų grupės D_2 pogrupiai $\{e,a\}$, $\{e,b\}$ ir $\{e,c\}$ izomorfiški grupei C_2.
- Grupė sudaryta iš skaičių $\{\pm 1, \pm \boldsymbol{i}\}$ ir įprastinės daugybos operacijos yra izomorfiška ciklinei grupei C_4:

$$\begin{array}{c|ccc} +1 & +\boldsymbol{i} & -1 & -\boldsymbol{i} \\ \hline +\boldsymbol{i} & -1 & -\boldsymbol{i} & +1 \\ -1 & -\boldsymbol{i} & +1 & +\boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & +1 & +\boldsymbol{i} & -1 \end{array} \iff \begin{array}{c|ccc} e & a & a^2 & a^3 \\ \hline a & a^2 & a^3 & e \\ a^2 & a^3 & e & a \\ a^3 & e & a & a^2 \end{array}$$

- Trikampio simetrijų grupė D_3 yra izomorfiška perstatymų grupei S_3.

Teorema 1.2.4. Keilio (Cayley) teorema

Kiekviena eilės n grupė G yra izomorfiška perstatymų grupės S_n pogrupiui.

Įrodymas. Perstatymo lemos pagalba galime sukonstruoti injektyvų atvaizdavimą

$$a \in G \mapsto p_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in S_n$$

kur indeksai a_i surandami iš lygybės $ag_i = g_{a_i}$ visiems $i = 1, 2, \ldots, n$. Mums tereikia parodyti kad šis atvaizdavimas išsaugo grupės daugybą. Tegul $ab = c$ grupėje G. Tada

$$\begin{aligned} p_a p_b &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{b_1} & a_{b_2} & \cdots & a_{b_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_{b_1} & a_{b_2} & \cdots & a_{b_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tačiau

$$g_{a_{b_i}} = a g_{b_i} = a(b g_i) = (ab) g_i = c g_i = g_{c_i} \implies a_{b_i} = c_i$$

Todėl

$$p_a p_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} = p_c$$

□

Pavyzdys 1.2.3.

- $C_3 = \{e, a, b = a^2\} \simeq \{e, (123), (321)\} < S_3$:

$$\begin{aligned} e\,C_3 = \{e,a,b\} &\implies p_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) \\ a\,C_3 = \{a,b,e\} &\implies p_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \\ b\,C_3 = \{b,e,a\} &\implies p_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (321) \end{aligned}$$

Patikrinkite, kad $p_a^2 = p_b$, $p_b^2 = p_a$ ir $p_a p_b = p_b p_a = p_e$.

- $D_2 = \{e, a, b, c\} \simeq \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\} < S_4$:

$$
\begin{aligned}
a\,D_2 = \{a, e, c, b\} &\quad\Longrightarrow\quad p_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34) \\
b\,D_2 = \{b, c, e, a\} &\quad\Longrightarrow\quad p_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24) \\
c\,D_2 = \{c, b, a, e\} &\quad\Longrightarrow\quad p_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23)
\end{aligned}
$$

  Patikrinkite, kad $p_a^2 = p_b^2 = p_c^2 = p_e$ ir $p_a p_b = p_c$.

- $C_4 = \{e, a, a^2, a^3\} \simeq \{e,\ (1234),\ (13)(24),\ (4321)\} < S_4$.
  Suraskite p_a, p_{a^2}, p_{a^3} ir patikrinkite, kad $p_a^2 = p_{a^2}$, $p_a^3 = p_{a^3}$, $p_a^4 = p_e$.

Pastaba

Tegul $f : G \xrightarrow{\sim} H < S_n$, kur $n = |G|$. Tada:

- $f(g)$ negali turėti 1-ciklų jei $g \neq e$. Kad tai pamatyti, sunumeruokime grupės G elementus $\{g_i\}_{i=1}^n$ tokia tvarka, kad $g_i g_j = g_{p_i(j)}$, kur $p_i = f(g_i) \in S_n$. Tarkim $f(g_i)$ turi 1-ciklą ir $g \neq e$. Tada egzistuos toks indeksas $j \in \{1, \ldots, n\}$, kad $p_i(j) = j$. Tokiu atveju, $g_i g_j = g_j$. Tačiau taip negali būti, nes prieštarauja perstatymo lemai.

- $f(g)$ fiksuotam g turi būti sudarytas iš tokio pat ilgio r-ciklų. Priešingu atveju $f(g^p)$, kur p yra trumpiausio $f(g)$ ciklo ilgis, turės bent p 1-ciklų. Pavyzdžiui, jei $f(g) = (345)(12)$, tada $f(g^2) = (543)(1)(2)$.

- Jei n yra pirminis skaičius, pogrupį H sudaro tik nefaktorizuoti (pilni) ciklai, išskyrus vienetinį elementą (Kodėl?) Pavyzdžiui, $f(g) = (123)$ yra nefaktorizuotas ciklas.

Iš šių pastabų išplaukia ši teorema:

Teorema 1.2.5

Jei $p = |G|$ yra pirminis skaičius, $G \cong C_p$.

Išvada 1.2.6

Kiekvienam pirminiam skaičiui p egzistuoja tik viena eilės p grupė, C_p.

1.3 Klasės ir invariantiniai pogrupiai

Grupės elementai gali būti suskirstyti į *klases* ir *sluoksnius*. Šie suskirstymai mums padės geriau suprasti grupių struktūrą ir jų *įvaizdžių* teoriją.

Apibrėžimas 1.3.1. Jungtiniai (conjugate) elementai
Elementas $b \in G$ yra *jungtinis* elementui $a \in G$, jei egzistuoja elementas $p \in G$ toks, kad $b = pap^{-1}$. Jungtinumą žymėsime simboliu $\sim$.

Pavyzdys 1.3.1. Grupėje S_3 egzistuoja šie netriviliai jungtiniai elementai:

$$(12) \sim (13) = (23)(12)(23)^{-1}$$
$$(12) \sim (23) = (13)(12)(13)^{-1} \qquad (123) \sim (321) = (12)(123)(12)^{-1}$$
$$(13) \sim (23) = (12)(13)(12)^{-1}$$

Junginumas yra *ekvivalentiškumo* sąryšis:

- Kiekvienas elementas yra jungtinis pats sau, $a \sim a$ (refliektyvumas)
- Jei $a \sim b$ tai $b \sim a$ (simetriškumas)
- Jei $a \sim b$ ir $b \sim c$ tai $a \sim c$ (tranzityvumas)

Įrodykime trečią savybę:

$$a \sim b \sim c \;\Rightarrow\; \exists p, q \in G,\; a = pbp^{-1},\; b = qcq^{-1} \;\Rightarrow\; a = pqc(pq)^{-1} \;\Rightarrow\; a \sim c$$

Apibrėžimas 1.3.2. Jungtinės (conjugate) klasės
Visi grupės elementai, jungtiniai vienas kitam, sudaro (jungtinę) *klasę*.

Pavyzdys 1.3.2. Grupė S_3 turi šias klases:

- $\zeta_1 = \{e\}$
- $\zeta_2 = \{(12), (13), (23)\}$
- $\zeta_3 = \{(123), (321)\}$

Pastaba

- Kiekvienas elementas priklauso tik vienai klasei.
- Elementai priklausantys tai pačiai klasei turi tokią pat eilę.
- Vienetinis elementas sudaro vieno elemento klasę.
- Matricų grupėms jungtinumo sąryšis yra matricų panašumas, $A \sim B \Rightarrow A = CBC^{-1}$.

Jei $H \leq G$ ir $a \in G$, tada

$$H' = aHa^{-1} = \{aha^{-1} \;:\; h \in H\} \leq G$$

yra G pogrupis *jungtinis* H.

Jei $H' \sim H$, tai $|H'| = |H|$ ir $H' = H$ arba $H' \cap H = \{e\}$.

Užduotis. Įrodykite, kad elementai priklausantys tai pačiai klasei turi tokią pat eilę.
Užduotis. Įrodykite, kad $H' = aHa^{-1}$ yra G pogrupis ir kad $H' = H$ arba $H' \cap H = \{e\}$.

Pavyzdys 1.3.3. Sukimų trimatėje erdvėje grupę $R(3)$ sudaro sukimai $R_{\vec{n}}(\theta)$ kampu θ apie vienetinio vektoriaus $\vec{n}$ kryptį. Kiekvienam θ egzistuoja klasė, kurią sudaro sukimai kampu θ visomis kryptimis:

$$\zeta_\theta = \{R_{\vec{n}}(\theta) \;:\; \text{visi } \vec{n}\}$$

nes

$$\forall \vec{n}', \vec{n} \;\; \exists R \in R_3 : \vec{n}' = R\vec{n} \quad \Longrightarrow \quad R_{\vec{n}}(\theta) \sim R_{\vec{n}'}(\theta) = R R_{\vec{n}}(\theta) R^{-1}$$

Pavyzdys 1.3.4. Euklidinę grupę $E(3)$ sudaro visi sukimai $R_{\vec{n}}(\theta)$, atspindžiai plokštumos statmenos $\vec{n}$ atžvilgiu, ir visos transliacijos $T_{\vec{n}}(d)$ atstumu d kryptimi $\vec{n}$.

Kiekvienam d egzistuoja klasė, kurią sudaro transliacijos atstumu d visomis kryptimis:

$$\zeta_d = \{ T_{\vec{n}}(d) \; : \; \text{visi } \vec{n} \}$$

nes

$$\forall \vec{n}', \vec{n} \;\; \exists R \in E(3) : \vec{n}' = R\vec{n} \quad \Longrightarrow \quad T_{\vec{n}}(d) \sim T_{\vec{n}'}(d) = R\, T_{\vec{n}}(d) R^{-1}$$

> **Apibrėžimas 1.3.3. Invariantinis pogrupis**
>
> Pogrupis $H \leq G$ yra *invariantinis* (arba *normalusis*) pogrupis, jei $H = aHa^{-1} \;\; \forall a \in G$.
> Invariantinius pogrupius žymėsime $H \lhd G$.

Pogrupis $H \leq G$ yra invariantinis tada ir tik tada, kai H elementai sudaro pilnas G klases

$$H = \zeta_{i_1} \cup \zeta_{i_2} \cup \cdots \cup \zeta_{i_r}$$

tam tikriem skirtingiem $i_1, i_2, \ldots, i_r \in I$, kur I indeksuoja grupės G jungtines klases.

Pavyzdys 1.3.5.

- $H = \{e, a^2\} < C_4 = \{e = a^4,\ a,\ a^2,\ a^3\}$ yra invariantinis pogrupis.
- $H = \{e, (123), (321)\} < S_3 = \{e,\ (12),\ (13),\ (23),\ (123)(321)\}$ yra invariantinis.
- $H = \{e, (13)\} < S_3$ nėra invariantinis pogrupis.

> **Pastaba**
>
> - Kiekviena grupė turi bent 2 invariantinius pogrupius, $G \leq G$ ir $\{e\} < G$.
>   Šiuos invariantinius pogrupius vadinsime trivialiais.
> - Visi Abelio grupės pogrupiai yra invariantiniai.

> **Apibrėžimas 1.3.4. Paprastos (simple) ir pusiau-paprastos (semi-simple) grupės**
>
> Grupė yra *paprasta* jei ji neturi netrivilių invariantinių pogrupių.
> Grupė yra *pusiau-paprasta* jei ji neturi Abelio invariantinių pogrupių.

Pavyzdys 1.3.6.

- C_n, kai n yra pirminis, yra paprasta grupė.
- C_n, kai n nėra pirminis, yra nei paprasta nei pusiau-paprasta grupė.

  Pavyzdžiui, $H = \{e,\ a\} < C_4 = \{e,\ a,\ a^2,\ a^3\}$ yra Abelio pogrupis.
- S_3 yra nei paprasta nei pusiau-paprasta grupė, nes $\{e,\ (123),\ (321)\} < G$ yra invariantinis Abelio pogrupis.
- Sukimų trimatėje erdvėje grupė $R(3)$ yra paprasta, tačiau dvimatės edrvės sukimų grupė $R(2)$ - ne. Pastaroji grupė turi be galo daug Abelio invariantinių pogrupių kuriuos sudaro sukimai kampu $\theta = 2\pi r$, kur $r \in \mathbb{Q}$.

Pastaba

- Grupių teorija "gimė" 1846, bet tik 2004 buvo surastos visos paprastos baigtinės grupės. Jos sudaro tris suskaičiuojamai begalines šeimas ir 27 sporadines grupes.
- *Monstro grupė* yra didžiausia žinoma paprasta sporadinė grupė. Jos eilė $\sim 8 \times 10^{53}$, o elementus galima užrašyti 196883×196883 dydžio matricomis.

1.4 Sluoksniai ir sluoksnių grupės

Apibrėžimas 1.4.1. Sluoksniai (cosets)
Tegul $H = \{h_1, h_2, \ldots\} < G$ ir tegul $p \in G \backslash H$ (t.y. $p \in G$ bet $p \notin H$). Tada aibė $pH = \{ph_1, ph_2, \ldots\}$ yra *kairys H sluoksnis*, o aibė $Hp = \{h_1 p, h_2 p, \ldots\}$ yra *dešinys H sluoksnis*.

Pastaba

- Mes nagrinėsime kairius sluoksnius. Dešiniems sluoksniams viskas gaunama analogiškai.
- Sluoksniai pH nėra pogrupiai, nes $e \notin pH$ (kodėl?).
- Visi H sluoksniai turi tą pačią eilę, $|pH| = |qH| \quad \forall p, q \in G \backslash H$, dėka Perstatymo lemos.

Teiginys 1.4.2
Tegul $H < G$ ir $p, q \in G \backslash H$. Tada $pH = qH$ arba $pH \cap qH = \emptyset$.

Įrodymas. Tarkim $ph_i = qh_j$ tam tikriems $h_i, h_j \in H$. Tada

$$q^{-1}p = h_j h_i^{-1} \in H \quad \Longrightarrow \quad q^{-1}pH = H \quad \Longrightarrow \quad pH = qH$$

nes $hH = H$ visiems $h \in H$.

Kita vertus, jei tokie h_i, h_j neegzistuoja, $pH \cap qH = \emptyset$. □

Tegul $H < G$. Kiekvienas elementas $g \in G$ priklauso vienam iš H sluoksnių, nes $g \in gH$.
Iš Teiginio 1.4.2 išplaukia, kad kairieji H sluoksniai išskaido grupę G į nesusikertančius poaibius:

$$G = H \cup p_1 H \cup p_2 H \cup \cdots, \quad H \cap p_i H = \emptyset = p_i H \cap p_j H$$

tam tikriems $p_i \neq p_j \in G \backslash H$.

Teorema 1.4.3. Lagranžo (Lagrange) teorema
Kiekvieno grupės G pogrupio H eilė dalina grupės eilę, $|G|/|H| \in \mathbb{N}$. Šis sveikas skaičius vadinamas pogrupio H *indeksu* grupėje G ir žymimas $(G : H)$.

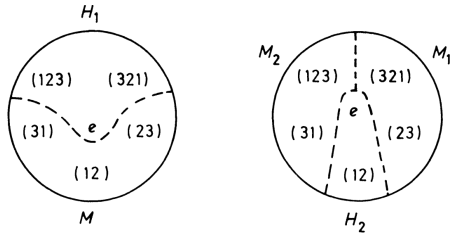
Pavyzdys 1.4.1. Tegu $G = S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$. Tada:

- $H_1 = \{e, (123), (321)\} < S_3$ turi vieną sluoksnį

$$M = pH_1 = \{(12), (23), (31)\} \quad \text{kur} \quad p \in \{(12), (13), (23)\}$$

- $H_2 = \{e, (12)\} < S_3$ turi du sluoksnius:

$$M_1 = pH_2 = \{(23), (321)\} \quad \text{kur} \quad p \in \{(23), (321)\}$$
$$M_2 = qH_2 = \{(31), (123)\} \quad \text{kur} \quad q \in \{(31), (123)\}$$



Jei $N \lhd G$ yra invariantis pogrupis ($gN = Ng$ visiems $g \in G$), grupės G išskaidymas į N sluoksnius yra unikalus ir turi grupės struktūrą:

- Grupės daugyba:
$$pN * qN = pqNN = (pq)N$$

- Asociatyvumas:
$$(pN * qN) * rN = (pq)N * rN = (pqr)N = pN * (qr)N = pN * (qN * rN)$$

- Vienetinis elementas:
$$eN * pN = (ep)N = pN = (pe)N = pN * eN$$

- Atvirkštinis elementas:
$$pN * p^{-1}N = (pp^{-1})N = eN$$

Teorema 1.4.4. Sluoksnių grupė (factor/quotient group)
Jei $N \lhd G$ yra invariantinis pogrupis, sluoksnių pN ($p \in G$) aibė kartu su daugyba $pN * qN = (pq)N$ sudaro grupę vadinamą *sluoksnių grupe* ir žymimą G/N.

Pavyzdys 1.4.2. Tegul $N = \{e, a^2\} < C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ ir $M = aN = \{a, a^3\}$. Tada $C_4 = N \cup M$ ir

$$NN = N, \quad MM = aN * aN = a^2NN = a^2N = N$$
$$NM = N * aN = aNN = MN = aN = M$$

Taigi, $C_4/N \cong C_2$.

Pavyzdys 1.4.3. Tegul $N = \{e, (123), (321)\} < S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$ ir $M = (ij)N = \{(12), (23), (31)\}$. Tada $S_3 = N \cup M$ ir

$$NN = N, \quad MM = (ij)N * (ij)N = (ij)^2N = N$$
$$NM = N * (ij)N = (ij)N = M = NM$$

Vėl gauname, kad $S_3/N \cong C_2$.

1.5 Homomorfizmai ir automorfizmai

Apibrėžimas 1.5.1. Homomorfizmai
Atvaizdavimas $f : G \to G'$ vadinamas grupių *homomorfizmu*, jei

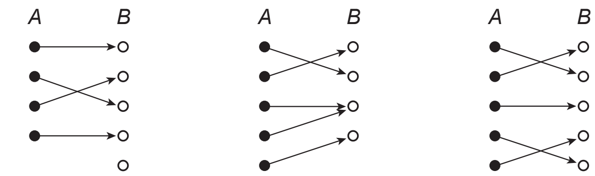
$$f(g)f(h) = f(gh) \quad \forall g,h \in G.$$

Homorfizmas f vadinamas:

- *injektyviu*, jei $f(g) \neq f(h)$ kai $g \neq h$,
- *surjektyviu*, jei $\forall g' \in G'$, $\exists g \in G$ toks kad $g' = f(g)$,
- *bijektyviu* arba *izomorfizmu*, jei f yra kartu injektyvus ir surjektyvus.

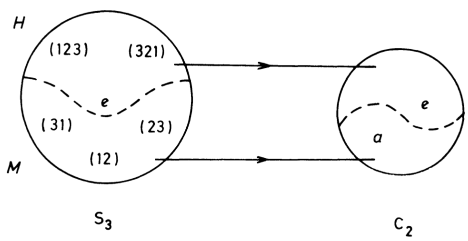
Homomorfizmų $f : G \to G'$ aibė žymima $\mathrm{Hom}(G, G')$.

Šiuos terminus patogu įsiminti vizualiai:



Injekcija ("into") Surjekcija ("onto") Bijekcija

Pavyzdys 1.5.1. Atvaizdavimas $f : S_3 \to C_2$ pavaizduotas žemiau yra surjektyvus grupių homomorfizmas.



Sluoksnių grupės daugybos lentelė:

S_3/H	H	M
H	H	M
M	M	H

Visumoje, jei $N \lhd G$ yra invariantinis pogrupis, egzistuoja natūralus homomorfizmas

$$f : G \twoheadrightarrow G/N, \; g \mapsto gN$$

Teorema 1.5.2
Tegul $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$ ir tegul $K \subset G$ būna aibė elementų kuriuos f atvaizduoja į vienetinį elementą:

$$K = \{g \in G \; : \; f(g) = e' \in G'\}$$

Tada aibė K sudaro invariantinį grupės G pogrupį, o sluoksnių grupė $G/K \cong \mathrm{im}\, f$.

Įrodymas. (i) Įrodykime, kad K yra pogrupis. Mums reikia parodyti, kad visiems $a, b \in K$ jų sandauga $ab \in K$ ir $a^{-1} \in K$ bei $e \in K$:

$$\begin{aligned} f(ab) = f(a)f(b) = e'e' = e' \quad &\Longrightarrow \quad ab \in K \\ f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} = (e')^{-1} = e' \quad &\Longrightarrow \quad a^{-1} \in K \end{aligned}$$

Pagaliau, $e \in K$ gauname iš $ab \in K$ pasirinkę $b = a^{-1}$.

(ii) K yra invariantinis pogrupis. Mums reikia parodyti, kad $gKg^{-1} = K \;\; \forall g \in G$:

$$f(gag^{-1}) = f(g)\underbrace{f(a)}_{=e'}f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = f(g)f(g)^{-1} = e'$$

Taigi, $gag^{-1} \in K$ visiems $a \in K$, o tai reiškia, kad $gKg^{-1} = K$ visiems $g \in G$.

(iii) Įrodykime, kad $G/K \cong \operatorname{im} f$. Prisiminkite, kad G/K elementai yra sluoksniai pK.

Nagrinėkime atvaizdavimą

$$\rho \;:\; G/K \to \operatorname{im} f \quad pK \mapsto p' \;\text{ kur }\; p' = f(p)$$

- Atvaizdavimas ρ yra homomorfiškas:

  $$\rho(pK)\rho(qK) = p'q' = (pq)' = \rho(pqK)$$

- Atvaizdavimas ρ yra injektyvus:

  Tarkim $\rho(pK) = \rho(qK)$. Tada

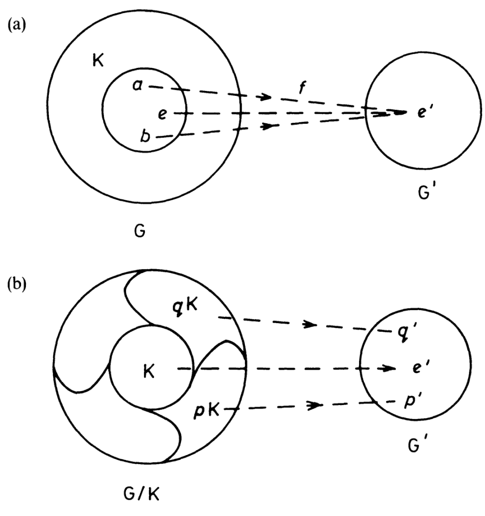
  $$\rho(q^{-1}pK) = \rho(q^{-1}K * pK) = \rho(q^{-1}K)\rho(pK) = \rho(qK)^{-1}\rho(pK) = e'$$

  todėl $q^{-1}pK = K$, t.y. $pK = qK$.

- Atvaizdavimas ρ yra surjektyvus pagal apibrėžimą, todėl ρ yra izomorfizmas.

□

Grafiškai,



(a) $f : G \longrightarrow G'$ (b) $\rho : G/K \xrightarrow{\sim} G'$

Šiame pavyzdyje $\operatorname{im} f = G'$, t.y. f yra injektyvus.

Apibrėžimas 1.5.3. Endo- ir Auto- morfizmai

Homomorfizmas $f : G \to G$ vadinamas *endomorfizmu*. Jų aibė žymima $\mathrm{End}(G)$. Bijektyvus endomorfizmas vadinamas *automorfizmu*. Jų aibė žymima $\mathrm{Aut}(G)$.

Pavyzdys 1.5.2. Tegul $G = D_2 = \{e, x, y, r = xy\}$. Atvaizdavimas

$$e \mapsto e, \quad x \mapsto r, \quad y \mapsto r, \quad r \mapsto e$$

yra endomorfizmas, o atvaizdavimas

$$e \mapsto e, \quad x \mapsto y, \quad y \mapsto x, \quad r \mapsto r$$

yra automorfizmas.

Pavyzdys 1.5.3. Tegul $G = S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$. Atvaizdavimas

$$e \mapsto e, \quad (ij) \mapsto (12), \quad (ijk) \mapsto e$$

yra endomorfizmas, o atvaizdavimas

$$e \mapsto e, \quad (12) \mapsto (13), \quad (23) \mapsto (23), \quad (31) \mapsto (12), \quad (123) \mapsto (321), \quad (321) \mapsto (123)$$

yra automorfizmas.

Teiginys 1.5.4

Grupės G automorfizmų aibė $\mathrm{Aut}(G)$ kartu su kompozicijos operacija sudaro grupę. Ši grupė vadinama *automorfizmų grupe*.

Įrodymas. Mums reikia patikrinti grupės aksiomas:

A. Automorfizmų kompozicija yra uždara:

$$\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(G) \quad \Longrightarrow \quad \varphi \circ \psi \in \mathrm{Aut}(G)$$

B. Automorfizmų kompozicija yra asociatyvi:

$$\varphi, \psi, \phi \in \mathrm{Aut}(G) \quad \Longrightarrow \quad (\varphi \circ \psi) \circ \phi = \varphi \circ (\psi \circ \phi)$$

C. Vienetinis elementas yra tapatusis automorfizmas:

$$\mathrm{id}_G : G \to G, \quad g \mapsto g$$

Jis tenkina

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \quad \Longrightarrow \quad \varphi \circ \mathrm{id}_G = \mathrm{id}_G \circ \varphi = \varphi$$

D. Automorfizmai yra bijektyvus atvaizdavimai, todėl kiekvienam $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ egzistuoja $\varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ toks kad $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_G$.

□

Kiekvienas elementas $s \in G$ apibrėžia *jungtinį* endomorfizmą:

$$\varphi_s \ : \ G \to G, \quad g \mapsto sgs^{-1}$$

Tikrai, nes

$$\varphi_s(g)\,\varphi_s(h) = sgs^{-1}shs^{-1} = sghs^{-1} = \varphi_s(gh)$$

visiems $g, h \in G$.

Jungtinis endomorfizmas φ_s yra injektyvus:

$$\varphi_s(g) = \varphi_s(h) \quad \Longrightarrow \quad sgs^{-1} = shs^{-1} \quad \Longrightarrow \quad g = h$$

Jis yra surjektyvus, nes jo domeno ir vaizdo dimensijos sutampa. Taigi, φ_s yra automorfizmas. Jis vadinamas *vidiniu* (inner) automorfizmu.

Pavyzdys 1.5.4. Grupės S_3 automorfizmas $\varphi_{(23)} : p \mapsto (23)\, p\, (23)^{-1}$

$$e \mapsto e, \quad (12) \mapsto (13), \quad (23) \mapsto (23), \quad (31) \mapsto (12), \quad (123) \mapsto (321), \quad (321) \mapsto (123)$$

yra vidinis automorfizmas.

Atvaizdavimas

$$\varphi \ : \ G \to \mathrm{Aut}(G), \quad s \mapsto \varphi_s$$

yra grupių homomorfizmas:

$$(\varphi_s \circ \varphi_t)(g) = s\,(tgt^{-1})s^{-1} = (st)\,g\,(st)^{-1} = \varphi_{st}(g)$$

visiems $s, t, g \in G$.

Homomorfizmo φ vaizdas yra invariantinis $\mathrm{Aut}(G)$ progrupis:

$$\varphi_g \circ \varphi_s \circ \varphi_g^{-1} = \varphi_{gsg^{-1}} \in \mathrm{Aut}(G)$$

visiems $\varphi_s, \varphi_g \in \mathrm{Aut}(G)$. Jis vadinamas *vidinių automorfizmų grupe*, ir žymimas $\mathrm{Inn}(G)$.

Homomorfizmo φ branduolys vadinamas *grupės centru* ir žymimas $Z(G)$:

$$Z(G) = \{s \in G : \varphi_s(g) = g, \ \forall g \in G\}$$

Jis yra invariantinis G pogrupis ir $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

Vidinių automorfizmų grupė $\mathrm{Inn}(G)$ yra invariantinis $\mathrm{Aut}(G)$ progrupis. Jo sluoksnių grupė vadinama *išorinių automorofizmų grupe*:

$$\mathrm{Out}(A) = \mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Inn}(G)$$

> **Pastaba**
>
> - Paprastos grupės turi trivialų centrą, $Z(G) = \{e\}$.
> - Abelio grupėms $Z(G) = G$ ir $\mathrm{Inn}(G) = \{\mathrm{id}_G\}$, $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)$.
> - Surasti $\mathrm{Out}(G)$ bendru atveju yra sudėtinga problema.

Pavyzdys 1.5.5.

- $\mathrm{Aut}(D_2) \cong C_2$. Ji turi vieną netrivialų automorfizmą

$$e \mapsto e, \quad x \mapsto y, \quad y \mapsto x, \quad r \mapsto r$$

- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, +) \cong C_2$. Ji turi vieną netrivialų automorfizmą

$$x \mapsto -x$$

- $\mathrm{Aut}(C_p) \cong C_{p-1}$ kai p yra pirminis skaičius. (Pabandykite įrodyti!)

1.6 Tiesioginė grupių sandauga

Apibrėžimas 1.6.1. Grupių tiesioginė sandauga
Tegul $H_1, H_2 < G$ būna komutuojantys pogrupiai,

$$h_1 h_2 = h_2 h_1 \quad \forall h_1 \in H_1,\ \forall h_2 \in H_2.$$

Grupė G yra *tiesioginė H_1 ir H_2 sandauga* jei visus $g \in G$ galime užrašyti unikaliai kaip $g = h_1 h_2$ tam tikriems $h_1 \in H_1$ ir $h_2 \in H_2$. Simboliškai, $G = H_1 \times H_2$.

Pavyzdys 1.6.1. Tegul $H_1 = \{e, a^3\}$ ir $H_2 = \{e, a^2, a^4\}$ būna $C_6 = \{e, a, a^2, \dots, a^5\}$ pogrupiai. Tada $G = H_1 \times H_2$:

$$h_1 h_2 = h_2 h_1 \text{ nes } C_6 \text{ yra Abelio grupė}$$

ir

$$e = e\,e,\ \ a = a^3 a^4,\ \ a^2 = e\,a^2,\ \ a^3 = a^3\,e,\ \ a^4 = e\,a^4,\ \ a^5 = a^3 a^2$$

$H_1 \cong C_2$ ir $H_2 \cong C_3$, ir $C_6 \cong C_2 \times C_3$.

Pavyzdys 1.6.2. Ortogonalioji grupė $O(n) \cong SO(n) \times C_2$, kur

$$\begin{aligned} O(n) &= \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ M^T M = I\} \\ SO(n) &= \{M \in O(n) \ : \ \det M = 1\} \end{aligned}$$

Tegul $G = H_1 \times H_2$. Tada:

- $H_1, H_2 \triangleleft G$ yra invariantiniai pogrupiai. Tikrai, nes $\forall a \in H_1$ turime:

$$g = h_1 h_2 \in G \ \ (h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2) \quad \Longrightarrow \quad g\,a\,g^{-1} = h_1 h_2 a\, h_2^{-1} h_1^{-1} = h_1 a\, h_1^{-1} \in H_1$$

- $G/H_1 \cong H_2$ ir $G/H_2 \cong H_1$.

Tegu $H \triangleleft G$ ir $H' = G/H$. Bendru atveju, $G \neq H \times H'$. Pavyzdžiui,

- $C_3 \cong H = \{e, (123), (321)\} \triangleleft S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$ ir

$$S_3/H \cong H_1 = \{e, (12)\} \cong H_2 = \{e, (23)\} \cong H_3 = \{e, (31)\} \cong C_2$$

  Tačiau $S_3 \neq C_3 \times C_2$ nes H ir H_i yra nekomutuojantys pogrupiai.

TEMA

GRUPIŲ ĮVAIZDŽIŲ TEORIJA 2

2.1 Įvaizdžiai

Apibrėžimas 2.1.1. Grupės įvaizdis (reprezentacija)

Tegul V būna vektorinė erdvė ir tegul $GL(V)$ būna izomorfizmų $V \to V$ grupė. Grupės G tiesinis *įvaizdis* erdvėje V yra homomorfizmas

$$\rho : G \to GL(V), \;\; g \mapsto \rho(g)$$

Patogumo dėlei, naudosime žymėjimą $\rho_g = \rho(g)$, o $\rho_g v$ reikš ρ_g veikimą į $v \in V$.

Pastaba

- Tiesinis įvaizdis ρ yra homomorfizmas; tai reiškia, kad

$$\begin{aligned} \rho_g \circ \rho_h &= \rho_{gh} && \forall g, h \in G \\ \rho_g(av + bw) &= a\,\rho_g v + b\,\rho_g w && \forall v, w \in V, \;\; \forall a, b \in k \end{aligned}$$

- Vienetinis elementas atvaizduojamas į tapatųjį izomorfizmą: $\rho_e = \mathrm{id}_V \in GL(V)$.
- Elementų g ir g^{-1} įvaizdžiai tenkina sąryšį:

$$gg^{-1} = e \quad \Longrightarrow \quad \rho_g \circ \rho_{g^{-1}} = \mathrm{id}_V \quad \Longrightarrow \quad \rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$$

- Įvaizdis ρ vadinamas *ištikimu*, jei $\rho_g \neq \rho_h$ jei $g \neq h$. Priešingu atveju ρ yra *neištikimas*.
- Jei $\{e_i\}_{i=1}^n$ yra V bazė, operatoriai ρ_g realizuojami kaip $n \times n$ matricos $R_g = R(g)$:

$$\rho_g\, e_i = R_g\, e_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ji}\, e_j \quad \text{kur} \quad r_{ji} = (R_g)_{ji}$$

  Tokie įvaizdžiai vadinami *matriciniais įvaizdžiais*.

- Vienetinio elemento e matricinis įvaizdis visada yra vienetinė matrica, $R_e = I$.
- Fizikoje dažnai naudojami *unitarūs matriciniai įvaizdžiai*, $R_g^\dagger R_g = I$, kur $R_g^\dagger = \overline{R_g^t}$ žymi Ermitinį jungtinumą. Unitarios matricos turi *realias tikrines vertes*. Tai svarbu, nes tikrinės vertės interpretuojamos kaip stebiniai, pavyzdžiui, energija, greitis, arba judesio kiekis. Šie dydžiai negali būti kompleksiniai.

Pavyzdys 2.1.1. Kiekviena grupė turi *trivialų* vienmatį įvaizdį erdvėje $V = \mathbb{C}$

$$\rho : G \to GL(1), \quad g \mapsto 1$$

Pavyzdys 2.1.2. Tegul G būna matricų grupė, pavyzdžiui $G = GL(n)$ arba $U(n)$ arba $O(n)$. Matricų grupės turi *netrivialų* vienmatį įvaizdį erdvėje $V = \mathbb{C}$

$$\rho : G \to GL(1), \quad g \mapsto \det g$$

Šis atvaizdavimas yra homomorfizmas, nes $\det(gh) = \det(g)\det(h)$ visiems $g, h \in G$.

Pavyzdys 2.1.3. Ciklinė grupė $C_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ turi netrivialų vienmatį įvaizdį erdvėje $V = \mathbb{C}$

$$\rho : C_n \to GL(1), \quad a \mapsto e^{2\pi i/n}$$

Pavyzdys 2.1.4. Dihedrinė grupė $D_2 = \{e, x, y, r = xy\}$ turi dvimatį įvaizdį erdvėje $V = \mathbb{C}^2$

$$\rho : D_2 \to GL(2), \quad e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad r \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Klausimas. Kurie iš šių įvaizdžių yra ištikimi, o kurie – išsigimę?

Pavyzdys 2.1.5. Sukimų dvimatėje erdvėje grupė $SO(2) = \{r_\phi : 0 \le \phi < 2\pi\}$ turi dvimatį įvaizdį erdvėje $V = \mathbb{R}^2$

$$\rho : SO(2) \to GL(2, \mathbb{R}), \quad r_\phi \mapsto \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Jei $v \in \mathbb{R}^2$, tada

$$v' = \rho(r_\phi)v = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{pmatrix}$$

Užduotis. Patikrinkite, kad $\rho(r_\phi)\rho(r_\varphi) = \rho(r_{\phi+\varphi})$

Pavyzdys 2.1.6. Simetrinė grupė $S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$ turi dvimatį įvaizdį $\rho : S_3 \to GL(2)$ erdvėje $V = \mathbb{C}^2$ apibrėžtą atvaizdavimu

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$(123) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (321) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Pavyzdys 2.1.7. Simetrinė grupė S_n turi n-matį įvaizdį erdvėje $V = \mathbb{C}^n$ apibrėžtą veikimu:

$$\rho_s(x_1, \dots, x_n) = (x_{s^{-1}(1)}, \dots, x_{s^{-1}(n)})$$

visiems $s \in S_n$ ir $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Šis įvaizdis vadinamas *natūraliu perstatymų įvaizdžiu*.

Pavyzdys 2.1.8. Tegul V_f būna visų tolydžių funkcijų f priklausančių nuo dviejų realių kintamųjų $x, y \in \mathbb{R}$ erdvė. Tarkime, kad kintamieji x ir y yra vektoriaus $v \in \mathbb{R}^2$ koordinatės

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Tegul G turi dvimatį įvaizdį ρ erdvėje $V = \mathbb{R}^2$. Šis įvaizdis *indukuoja* funkcijų $f \in V_f$ transformaciją

$$f \xrightarrow{g \in G} f'(x, y) = f(x', y')$$

kur

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \rho_g^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Šis atvaizdavimas yra homomorfizmas, t.y. jei $g : f \mapsto f'$ ir $h : f' \mapsto f''$, turime gauti $hg : f \mapsto f''$:

$$f'(-) = f(\rho_{g^{-1}}.-) \qquad f''(-) = f'(\rho_{h^{-1}}.-)$$

$$f''(-) = f(\rho_{g^{-1}}\rho_{h^{-1}}.-) = f(\rho_{g^{-1}h^{-1}}.-) = f(\rho_{(hg)^{-1}}.-)$$

2.2 Įvaizdžių povaizdžiai

Apibrėžimas 2.2.1. Įvaizdžio povaizdis (subrepresentation)
Tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna G įvaizdis ir tegul $W < V$ būna vektorinis poerdvis. Poerdvis W yra *stabilus* arba *invariantinis* V poerdvis G veikimo atžvilgiu, jei

$$\rho_g w \in W \quad \text{visiems} \quad g \in G,\ w \in W$$

Įvaizdžio ρ apribojimas ant invariantinio poerdvio $W < V$, $\rho|_W : G \to GL(W)$ irgi yra G įvaizdis, vadinamas *įvaizdžio ρ povaizdžiu*.

Pavyzdys 2.2.1. Ciklinė grupė $C_2 = \{e, a\}$ turi dvimatį įvaizdį erdvėje $V = \mathbb{C}^2$

$$\rho : C_2 \to GL(V), \quad e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vienmatis poerdvis

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\} < \mathbb{C}^2$$

yra invariantinis $\mathbb{C}^2$ poerdvis G veikimo atžvilgiu (G-invariantinis):

$$\rho_e \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \qquad \rho_a \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

Tad $\rho|_W : G \to GL(W),\ g \mapsto \mathrm{id}_W$ įvaizdžio ρ povaizdis.

Vektorinė erdvė V yra tiesioginė jos poerdvių W ir W' suma, $V = W \oplus W'$, jei $W \cap W' = \{0\}$ ir bet kurį $v \in V$ galime užrašyti $v = w + w'$, kur $w \in W$ ir $w' \in W'$.

- Poerdvį W' vadinsime W *papildiniu* erdvėje V.
- Tiesinį operatorių $p : V \to W$ tokį, kad $p(v) \in W$ vadinsime *V projektoriumi į W*.
- Projekciniai operatoriai yra *idempotentai*, t.y. $p(p(v)) = p(v)$ visiems $v \in V$.
- Egzistuoja toks W papildinys W', kad $p(w') = 0$ visiems $w' \in W'$.

Pavyzdys 2.2.2. Erdvė $\mathbb{C}^2$ yra tiesioginė jos vienmačių poerdvių, izomorfiškų $\mathbb{C}$, suma:

$$V = \mathbb{C}^2 = \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}\right\}}_{W \cong \mathbb{C}} \oplus \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{C}\right\}}_{W' \cong \mathbb{C}}$$

Operatorius $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yra projekcinis operatorius $p : V \to W$:

$$p(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$
$$p(p(v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = p(v)$$

Teorema 2.2.2

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna baigtinės grupės G įvaizdis ir tegu $W < V$ būna G-invariantinis poerdvis. Tada egzistuoja W papildinys W', kuris irgi yra G-invariantinis.

Įrodymas. Tegul $p : V \to W$ būna projekcinis operatorius. Apibrėžkime naują operatorių

$$\widehat{p} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1}$$

Šis operatorius irgi projektuoja V į W, nes W yra G-invariantinis:

$$v \in V \xrightarrow{\rho_g^{-1}} \rho_g^{-1} v \in V \xrightarrow{p} p \circ \rho_g^{-1} v \in W \xrightarrow{\rho_g} \rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1} v \in W$$

Pasirinkime papildinį W' tokį, kad $\widehat{p}(w') = 0$ visiems $w' \in W'$. Mums lieka parodyti, kad $\widehat{p} \circ \rho_h w' = 0$ visiems $h \in G$:

$$\begin{aligned}
\widehat{p} \circ \rho_h w' &= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} (\rho_h \circ \rho_h^{-1}) \circ (\rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1}) \circ \rho_h w' \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho_h \circ \rho_{h^{-1}g} \circ p \circ \rho_{g^{-1}h} w' \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho_h \circ \rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1} w' = \rho_h \circ \widehat{p}\, w' = 0
\end{aligned}$$

nes $\widehat{p}\, w' = 0$. □

Pavyzdys 2.2.3. Tegul $G = C_3 = \{e, a, a^2\}$ ir $h = a = a^{-2}$. Tada

$$\widehat{p} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1} = \frac{1}{3}(\rho_e \circ p \circ \rho_{e^{-1}} + \rho_a \circ p \circ \rho_{a^{-1}} + \rho_{a^2} \circ p \circ \rho_{a^{-2}})$$

ir

$$\begin{aligned}
\widehat{p} \circ \rho_a w' &= \frac{1}{3}\sum_{g \in G} \rho_a \circ \rho_a^{-1} \circ \rho_g \circ p \circ \rho_g^{-1} \circ \rho_a w' \\
&= \frac{1}{3}\big(\rho_a \circ \rho_{a^{-1}e} \circ p \circ \rho_{e^{-1}a} + \rho_a \circ \rho_{a^{-1}a} \circ p \circ \rho_{a^{-1}a} + \rho_a \circ \rho_{a^{-1}a^2} \circ p \circ \rho_{a^{-2}a}\big) w' \\
&= \frac{1}{3}\rho_a \circ \big(\rho_{a^2} \circ p \circ \rho_{a^{-2}} + \rho_e \circ p \circ \rho_{e^{-1}} + \rho_a \circ p \circ \rho_{a^{-1}}\big) w' \\
&= \rho_a \circ \widehat{p}\, w'
\end{aligned}$$

Pastaba

Tiesiniai operatoriai komutuojantys su grupės veikimu, $\rho_g \circ f\ v = f \circ \rho_g\ v$ visiems $g \in G$ ir $v \in V$, vadinami *intertvaineriais* arba *keitliais*.

Iš Teoremos 2.2.2 išplaukia, kad jei $\rho : G \to GL(V)$ yra G įvaizdis ir $W < V$ yra G-invariantinis poerdvis, ir $\dim V = n$ bei $\dim W = k$, tada:

- Galime pasirinkti tokią V bazę $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots e_n\}$, kad $\{e_1, \ldots, e_k\}$ yra W bazė, o $\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ yra G-invariantinio W papildinio W' bazė.
- Tiesiniai operatoriai ρ_g šioje bazėje turi blok-diagonalią formą

$$R_g = \begin{pmatrix} R_g|_W & 0 \\ 0 & R_g|_{W'} \end{pmatrix}$$

  visiems $g \in G$. Čia $R_g|_W$ yra $k \times k$ matrica, o $R_g|_{W'}$ yra $(n-k) \times (n-k)$ matrica.
- Sakysime, kad įvaizdis ρ yra *tiesioginė įvaizdžių $\rho|_W$ ir $\rho|_{W'}$ suma*, $\rho = \rho|_W \oplus \rho|_{W'}$.

Jei $\rho_1 : G \to GL(V_1),\ \ \rho_2 : G \to GL(V_2),\ \ \ldots,\ \ \rho_\ell : G \to GL(V_\ell)$ yra G įvaizdžiai, tada

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_\ell$$

yra G įvaizdis erdvėje $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell$, o jo matrica R_g turi blok-diagonalią formą

$$R_g = \begin{pmatrix} R_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_\ell(g) \end{pmatrix}$$

visiems $g \in G$.

Pavyzdys 2.2.4. Ciklinė grupė $C_2 = \{e, a\}$ turi dvimatį įvaizdį erdvėje $V = \mathbb{C}^2$. Standartinėje V bazėje:

$$\rho\ :\ C_2 \to GL(V), \quad e \mapsto R_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \mapsto R_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tegul

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}, \qquad W' = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C} \right\}$$

Tada $V = W \oplus W'$ ir

$$\begin{aligned} R_e w = w, \quad R_a w = w \quad &\Longrightarrow \quad R_e|_W = 1, \quad R_a|_W = 1 \\ R_e w' = w', \quad R_a w' = -w' \quad &\Longrightarrow \quad R_e|_{W'} = 1, \quad R_a|_{W'} = -1 \end{aligned}$$

Bazėje $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, t.y. $V = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ operatorių ρ_g matricinis atvaizdas

$$R_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operatorius R_e yra vienetinė matrica nepriklausomai nuo bazės pasirinkimo.

Pavyzdys 2.2.5. Simetrinė grupė $S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$ turi vienmatį įvaizdį $\rho_1 : S_3 \to GL(1)$ erdvėje $V_1 = \mathbb{C}$ apibrėžtą atvaizdavimu

$$e \mapsto 1, \quad (12) \mapsto -1, \quad (23) \mapsto -1, \quad (31) \mapsto -1, \quad (123) \mapsto 1, \quad (321) \mapsto 1$$

ir dvimatį matricinį įvaizdį $\rho_2 : S_3 \to GL(2)$ erdvėje $V_2 = \mathbb{C}^2$ apibrėžtą atvaizdavimu

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$(123) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (321) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Tiesioginė įvaizdžių ρ_1 ir ρ_2 suma yra matricinis įvaizdis $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ apibrėžtas atvaizdavimu

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$(123) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (321) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Apibrėžimas 2.2.3

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna G įvaizdis. Mes sakysime kad įvaizdis ρ yra:

- *paprastas* arba *neredukuojamas* jei V neturi G-invariantinių poerdvių,
- *pilnai redukuojamas* jei V yra tiesioginė netrivialių G-invariantinių poerdvių suma,
- *nepilnai redukuojamas* arba *neišskaidomai redukuojamas* visais kitais atvejais.

Pastaba

- Jei ρ yra *pilnai redukuojamas* (*pusiau-paprastas*) įvaizdis, tada egzistuoja tokia V bazė, kad visi matriciniai operatoriai R_g turi tokią pačią blok-diagonalią formą:

$$R_g = \begin{pmatrix} R_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_\ell(g) \end{pmatrix}$$

- Jei ρ yra *nepilnai redukuojamas* įvaizdis, tada egzistuoja tokia V bazė, kad visi operatoriai R_g turi tokią pačią blok-trikampę formą:

$$R_g = \begin{pmatrix} R'_g & N_g \\ 0 & D_g \end{pmatrix}$$

  kur R'_g yra matricinis įvaizdžio povaizdis, o N_g ir D_g yra tam tikros matricos.
- Jei ρ yra *paprastas* įvaizdis, tada nėra tokios V bazės, kad visi matriciniai operatoriai R_g turėtų blok-diagonalią arba blok-trikampę formą.

Teorema 2.2.4. Maškės (Maschke) teorema

Visi baigtinės grupės G įvaizdžiai yra pilnai redukuojami, t.y. bet kurį įvaizdį V galime išskaidyti į tiesioginę neredukuojamų įvaizdžių sumą.

Įrodymas. Jei V yra neredukuojamas įvaizdis, mums nieko įrodyti nereikia. Priešingu atveju, dėka Teoremos 2.2.2, erdvė V gali būti išskaidyta į du G-invariantinius poerdvius, $V = V' \oplus V''$. Jei V' ir V'' neturi netrivialių invariantinių poerdvių, teorema įrodyta. Kitu atveju, galime taikyti Teoremą 2.2.2 tol, kol iškaidysime V į tiesioginę neredukuojamų įvaizdžių sumą. $\square$

Pastaba

- Maškės teorema galioja tik baigtinėms grupėms. Begalinių grupių įvaizdžių struktūra yra daug sudėtingsnė ir įdomesnė.
- Maškės teorema nepasako ar V išskaidymas į neredukuojamus įvaizdžius yra unikalus. Tai labai svarbus klausimas, kurį atsakyti padės Šuro lema.
- Plačiau apie Maškės teoremą galite sužinoti čia:

Užduotis. Įrodykite, kad bet kurio baigtinės grupės G neredukuojamo įvaizdžio V dimensija yra mažesnė arba lygi grupės eilei, $\dim V \leq |G|$.

2.3 Šuro lema

Teiginys 2.3.1. Šuro lema

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ ir $\sigma : G \to GL(W)$ būna neredukuojami G įvaizdžiai ir tegul $f : V \to W$ būna tiesinis atvaizdavimas toks, kad

$$\sigma_g \circ f = f \circ \rho_g \quad \text{visiems } g \in G$$

Tada:

A. Įvaizdžiai ρ ir σ yra izomorfiški arba $f = 0$.

B. Jei $V = W$ ir $\rho = \sigma$, tada $f = \lambda\,\mathrm{id}_V$ tam tikram $\lambda \in \mathbb{C}$.

Įrodymas. (A) Atvaizdavimo f branduolys ir vaizdas yra

$$K := \ker f = \{v \in V : f(v) = 0\} \quad \text{ir} \quad M := \operatorname{im} f = \{f(v) : v \in V\}$$

Mums reikia parodyti, kad $K = 0$ ir $M = W$ (tada f yra izomorfizmas), arba $f = 0$:

$$u \in K \implies (f \circ \rho_g)(u) = (\sigma_g \circ f)(u) = 0 \implies \rho_g(u) \in K$$

Taigi, K yra G-invariantinis poerdvis. Bet ρ yra neredukuojamas, todėl $K = \{0\}$ arba $K = V$. Tačiau, jei $K = V$, tada $f = 0$. Priešingu atveju, kai $K = \{0\}$, tarkim $M < W$. Tada:

$$\sigma_g \circ f = f \circ \rho_g : M \to M$$

Taigi M yra G-invariantis poerdvis. Bet σ yra neredukuojamas, todėl $M = W$ jei $K = \{0\}$.

(B) Prisiminkite, kad kiekvienas operatorius $f \in \mathscr{L}(V)$ turi bent vieną tikrinę vertę $\lambda \in \mathbb{C}$. Tegul λ būna tikrinė f vertė. Apibrėžkime naują operatorių

$$f' = f - \lambda\,\mathrm{id}_V$$

Tada

$$f(v) = \lambda v \implies f'(v) = 0 \implies \ker f' \neq \{0\}$$

Iš (A) išplaukia, kad $f' = 0$ ir $f = \lambda\,\mathrm{id}_V$. $\square$

Pavyzdys 2.3.1. Tegul $\rho, \sigma : S_3 \to GL(\mathbb{C}^2)$ būna neredukuojami įvaizdžiai apibrėžti taip:

$$\rho_{\{\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\rho_{\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\{3,2,1\}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ir

$$\sigma_{\{\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\{1,2\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_{\{1,2,3\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\{3,2,1\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tegul

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Šuro lemos pirma dalis teigia, jog tiesinių lygčių sistema

$$\sigma_{\{\}}F = F\rho_{\{\}}, \quad \sigma_{\{1,2\}}F = F\rho_{\{1,2\}}, \quad \sigma_{\{1,3\}}F = F\rho_{\{1,3\}}, \quad \sigma_{\{2,3\}}F = F\rho_{\{2,3\}}$$
$$\sigma_{\{1,2,3\}}F = F\rho_{\{1,2,3\}}, \quad \sigma_{\{3,2,1\}}F = F\rho_{\{3,2,1\}},$$

turi tik apgręžiamą arba trivialų ($F = 0$) sprendinį. Šiuo atveju

$$F = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

Taigi, $\sigma_s = F\rho_s F^{-1}$ visiems $s \in S_3$, t.y. įvaizdžiai ρ ir σ yra izomorfiški. Jie skiriasi tik erdvės $\mathbb{C}^2$ bazės pasirinkimu. Šuro lemos antra dalis teigia, jog tiesinių lygčių sistema

$$\rho_{\{\}}F = F\rho_{\{\}}, \quad \rho_{\{1,2\}}F = F\rho_{\{1,2\}}, \quad \rho_{\{1,3\}}F = F\rho_{\{1,3\}}, \quad \rho_{\{2,3\}}F = F\rho_{\{2,3\}}$$
$$\rho_{\{1,2,3\}}F = F\rho_{\{1,2,3\}}, \quad \rho_{\{3,2,1\}}F = F\rho_{\{3,2,1\}},$$

turi tik vienetinį ($F = \lambda I$) arba trivialų ($F = 0$) sprendinį. Šiuo atveju

$$F = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

Lygiai tas pats galioja įvaizdžiui σ.

Išvada 2.3.2. Pirmoji Šuro lemos išvada

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ ir $\sigma : G \to GL(W)$ būna neredukuojami G įvaizdžiai ir tegul $f : V \to W$ būna ρ ir σ įvaizdžių intertvaineris. Tegul

$$\widehat{f} = \frac{1}{n_G}\sum_{g\in G}\sigma_g^{-1} \circ f \circ \rho_g$$

Tada:

A. $\widehat{f} = 0_V$ jei ρ ir σ ne izomorfiški įvaizdžiai.

B. $\widehat{f} = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(f)\operatorname{id}_V$, jei $V = W$ ir $\rho = \sigma$, kur $n = \dim V$.

Įrodymas. (A) f yra intertvaineris reiškia, kad $f \circ \rho_h = \sigma_h \circ f$ visiems $h \in G$. Todėl $f = \sigma_h \circ f \circ \rho_h^{-1}$ ir

$$\begin{aligned}\sigma_h^{-1} \circ \widehat{f} \circ \rho_h &= \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \sigma_h^{-1} \circ (\sigma_g^{-1} \circ \underbrace{\sigma_h \circ f \circ \rho_h^{-1}}_{=f} \circ \rho_g) \circ \rho_h \\ &= \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \sigma_{h^{-1}gh}^{-1} \circ f \circ \rho_{h^{-1}gh} = \widehat{f}\end{aligned}$$

Taigi $\widehat{f}$ irgi yra intertvaineris. Iš Šuro lema išplaukia, kad $\widehat{f} = 0_V$ jei ρ ir σ neizomorfiški.

(B) Iš Šuro lema išplaukia, kad $\widehat{f} = \lambda \, \mathrm{id}_V$. Mums tereikia surasti λ:

$$\operatorname{Tr} \widehat{f} = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(\rho_g^{-1} \circ f \circ \rho_g) = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(f) = n\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(f)$$ □

Išvada 2.3.3. Antroji Šuro lemos išvada

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ ir $\sigma : G \to GL(W)$ būna neredukuojami G įvaizdžiai. Tegul $\{e_a\}_{a=1}^{n}$ ir $\{e'_c\}_{c=1}^{n'}$ būna V ir W bazės. Tegul $S_g = (s_{ab}(g))$ ir $R_g = (r_{cd}(g))$ būna matriciniai σ_g ir ρ_g atvaizdai. Tada

$$\sum_{g \in G} s_{ab}(g^{-1}) \, r_{cd}(g) = 0 \tag{1}$$

visiems a, b ir c, d jei ρ ir σ ne izomorfiški įvaizdžiai, arba

$$\sum_{g \in G} s_{ab}(g^{-1}) \, r_{cd}(g) = \frac{n_G}{n} \, \delta_{ad} \delta_{bc} \tag{2}$$

visiems a, b ir c, d jei $V = W$ ir $\rho = \sigma$, ir $n = \dim V$.

Įrodymas. Tegul $f : V \to W$ būna intertvaineris ir tegul $F = (f_{bc})$ būna jo matricinis atvaizdas duotose V ir W bazėse. Iš pirmos Šuro lemos išvados išplaukia, kad

$$\sum_{g \in G} \sum_{b=1}^{n'} \sum_{c=1}^{n} s_{ab}(g^{-1}) \, f_{bc} \, r_{cd}(g) = 0$$

yra tiesinė lygčių sistema koeficientų f_{bc} atžvilgiu. Ji bus tenkinama visiems įmanomams intervaineriams f tada ir tik tada, kai galios pirmoji norima lygybė.

Kad įrodyti antrąją lygybę, nagrinėkime išraišką

$$\sum_{g \in G} \sum_{b,c=1}^{n} s_{ab}(g^{-1}) \, f_{bc} \, r_{cd}(g) = \frac{n_G}{n} \sum_{b,c=1}^{n} \delta_{ad} \, \delta_{bc} \, f_{bc}$$

Tai tiesinė lygčių sistema koeficientų f_{bc} atžvilgiu. Ji bus tenkinama visiems įmanomams intervaineriams f tada ir tik tada, kai galios antroji norima lygybė. □

Išvada 2.3.4. Trečioji Šuro lemos išvada

Bet kurį baigtinės grupės G grupės įvaizdį V galime išskaidyti į tiesioginę skirtingų neredukuojamų ivaizdžių V_i sumą su pasikartojimais m_i:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{h} V_i^{\oplus m_i}$$

Sumos narių skaičius h, įvaizdžiai V_i ir jų pasikartojimai m_i yra unikalūs.

Įrodymas. Tegul W būna kitas G įvaizdis ir tegul $W = \bigoplus_{j=1}^{k} W_j^{\oplus s_j}$ būna jo išskaidymas. Tegul $\phi : V \to W$ būna intertvaineris. Šuro lema teigia, kad ϕ turi atvaizduoti narį $V_i^{\oplus m_i}$ į tą narį $W_j^{\oplus s_j}$, kuriam $W_j \cong V_i$. Kai $W = V$, $\phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$ ir $s_j = m_i$, $k = h$, t.y. narių skaičius h, įvaizdžiai V_i ir jų pasikartojimai m_i yra unikalūs. □

Pastaba

- Jei $m_i > 1$, i-tojo sumos nario $V_i^{\oplus m_i}$ išskaidymas į neredukuojamus įvaizdžius nėra unikalus. Unikalus yra tik pats įvaizdis V_i ir jo pasikartojimų skaičius m_i.
- Ši išvada nepasako, kaip surasti sumos narių skaičių h ir pasikartojimus m_i.
- Mes laikysime kad h yra visų skirtingų neredukuojamų įvaizdžių V_i skaičius, ir kad $m_i = 0$ jei V_i nėra V išskaidyme.

2.4 Dualūs įvaizdžiai

Apibrėžimas 2.4.1. Funkcionalas

Tiesinis *funkcionalas* ant vektorinės erdvės V yra tiesinis atvaizdavimas $\varphi : V \to k$, kur $k = \mathbb{R}$ arba $k = \mathbb{C}$.

Pavyzdys 2.4.1.

- Funkcionalas ant erdvės $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\;\; (x_1, x_2, x_3) \mapsto 4x_1 - 5x_2 + 2x_3$$

- Funkcionalas ant erdvės $\mathbb{R}^n$ pasirinktam $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\;\; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

- Funkcionalas ant polinomų erdvės $\mathscr{P}(\mathbb{R})$:

$$\varphi \;:\; \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\;\; p \mapsto 3p''(4) + 2p'(1)$$

- Funkcionalas ant realaus kintamojo funkcijų erdvės $\mathscr{F}(\mathbb{R})$:

$$\delta : \mathscr{F}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)$$

  Šis funkcionalas vadinamas *Dirako delta apibendrintąja funkcija*.

Klausimas. Ar atvaizdavimas $p \mapsto 3p''(4) + 2p'(1) + 3$ yra tiesinis funkcionalas ant $\mathscr{P}(\mathbb{R})$?

Apibrėžimas 2.4.2. Duali erdvė

Tegul V būna vektorinė erdvė ir tegul V^* būna visų tiesinių atvaizdavimų $V \to k$ aibė. Aibę V^* vadinsime *dualia erdve*, o jos elementus – *tiesiniais funkcionalais*:

$$V^* = \{\varphi : V \to k\}$$

Duali erdvė V^* kartu su sumos ir daugybos iš skaičiaus operacijomis yra *duali vektorinė erdvė*:

$$\varphi(v) + \psi(v) = (\varphi + \psi)(v)$$
$$(a\,\varphi)(v) = a\,(\varphi(v))$$

visiems $\varphi, \psi \in V^*$, $v \in V$ ir $a \in k$.

Pastaba

- Duali erdvė V^* dažnai žymima $\mathrm{Hom}_k(V,k)$ arba tiesiog $\mathrm{Hom}(V,k)$.
- Dualios erdvės elementai dar vadinami kovektoriais, vienas-formomis, arba tiesinėmis formomis.
- Skaičius $\varphi(v)$ vadinamas vektoriaus v *įvertinimu*.
- Jei V yra baigtinės dimensijos vektorinė erdvė, tada ir V^* yra tos pačios dimensijos vektorinė erdvė:

$$\dim V^* = \dim \mathrm{Hom}(V,k) = \dim V \cdot \dim k = \dim V$$

Apibrėžimas 2.4.3. Duali bazė

Tegul $\{v_i\}_{i=1}^n$ būna vektorinės erdvės V bazė. Jai *duali bazė* yra tiesinių funkcionalų ant erdvės V aibė $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ tokia kad

$$\varphi_j(v_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jei } i = j \\ 0 & \text{jei } i \neq j \end{cases}$$

Pavyzdys 2.4.2. Tegul $\{e_i\}_{i=1}^n$ būna standartinė k^n bazė. Tada kiekvieną vektorių $v \in V$ galime užrašyti

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

Kiekvienam $j = 1 \ldots n$ apibrėžkime funkcionalus $\varphi_j : V \mapsto k$ pagal taisyklę

$$\varphi_j(v) = x_j$$

Tada

$$\varphi_j(e_i) = \delta_{ij}$$

Funkcionalų aibė $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ yra duali bazė standartinei bazei. Šie funkcionalai vadinami *koordinatinėmis funkcijomis*. Koordinatinės fukcijos įvertina vektorių koordinates.

Teiginys 2.4.4

Tegul $\{v_i\}_{i=1}^n$ būna vektorinės erdvės V bazė. Tada jai duali bazė $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ yra dualios vektorinės erdvės V^* bazė.

Įrodymas. Mums reikia parodyti, kad funkcionalai φ_j yra tiesiškai nepriklausomi. Tegul $a_1, \ldots, a_n \in k$ būna tokie, kad

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n = 0$$

Tada

$$(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n)(e_i) = a_i\varphi_i(e_i) = a_i = 0$$

Taigi, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Tai reiškia, kad funcionalai $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ yra tiesiškai nepriklausomi. Kadangi $\dim V^* = n$, šie funkcionalai sudaro V^* bazę. □

Pavyzdys 2.4.3. Standartinėje bazėje vektoriai $v \in k^n$ užrašomi stulpeliais, o dualioje bazėje vektoriai $w \in (k^n)^*$ – eilutėmis:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}, \qquad w(v) = \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

Apibrėžimas 2.4.5

Tegul $f : V \to W$ būna tiesinis atvaizdavimas. Jam *dualus atvaizdavimas* yra tiesinis atvaizdavimas $f^* : W^* \to V^*$ toks, kad

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f \quad \text{visiems} \quad \varphi \in W^*$$

Atvaizdavimų kompozicija $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ yra tiesinis atvaizdavimas iš V į k:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\varphi} k$$

Patikrinkime, kad f^* tikrai yra tiesinis atvaizdavimas:

- Jei $\varphi, \psi \in W^*$, tada

$$f^*(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ f = \varphi \circ f + \psi \circ f = f^*(\varphi) + f^*(\psi)$$

- Jei $a \in k$ ir $\varphi \in W^*$, tada

$$f^*(a\,\varphi) = (a\,\varphi) \circ f = a\,(\varphi \circ f) = a\,f^*(\varphi)$$

Pavyzdys 2.4.4. Tegul $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ būna polinomų erdvė ir tegul ∂ būna tiesinis atvaizdavimas

$$\partial \,:\, \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p' \quad \text{(išvestinė)}$$

Suraskime jam dualų atvaizdavimą $\partial^* : \mathscr{P}(\mathbb{R})^* \to \mathscr{P}(\mathbb{R})^*$.

- Kiekvienas polinomas $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ yra baigtinė monomų suma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

  Monomai $x^0, x^1, x^2, \ldots$ sudaro $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ bazę.

- Monomams duali bazė yra begalinė aibė funkcionalų $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ tokių, kad

$$\varphi_m(x^n) = \delta_{mn}$$

- Tiesiniai funkcionalai $\varphi : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ yra eilutės

$$\varphi = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots$$

  kur $b_0, b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$.

- Jei $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$. Tada

$$\varphi(p) = a_n b_n + a_{n-1} b_{n-1} + \ldots + a_0 b_0$$

- Tiesinis atvaizdavimas $\partial : p \mapsto p'$ veikia ant bazės vektorių tokiu būdu:

$$\partial : x^n \mapsto n\,x^{n-1}$$

- Pagal apibrėžimą, $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$, dualus atvaizdavimas ∂^* veikia ant dualios bazės tokiu būdu:

$$\begin{aligned}(\partial^*(\varphi_m))(x^n) &= (\varphi_m \circ \partial)(x^n) = \varphi_m(n\,x^{n-1}) = n\,\varphi_m(x^{n-1}) \\ &= n\,\delta_{m,n-1} = n\,\delta_{m+1,n} = (m+1)\,\delta_{m+1,n} = (m+1)\,\varphi_{m+1}(x^n)\end{aligned}$$

- Mes surandome, kad

$$(\partial^*(\varphi_m))(x^n) = (m+1)\,\varphi_{m+1}(x^n) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\partial^*(\varphi_m) = (m+1)\,\varphi_{m+1}}$$

- Taigi, dualus atvaizdavimas ∂^* veikia į funkcionalus φ tokiu būdu:

$$\partial^* \ : \ b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \dots \ \mapsto \ b_0\varphi_1 + 2b_1\varphi_2 + 3b_2\varphi_3 + \dots$$

Pavyzdys 2.4.5. Tegul $\{e_i\}_{i=1}^n$ ir $\{e'_j\}_{j=1}^m$ būna standartinės $\mathbb{C}^n$ ir $\mathbb{C}^m$ bazės ir tegul $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ būna tiesinis atvaizdavimas apibrėžtas taisykle

$$\boxed{f(e_i) = \textstyle\sum_{j=1}^m f_{ji}\, e'_j}$$

Suraskime dualų atvaizdavimą $f^* : (\mathbb{C}^m)^* \to (\mathbb{C}^n)^*$.

- Tegul $\{e^*_k\}_{k=1}^n$ ir $\{e'^*_l\}_{l=1}^m$ būna dualios bazės, t.y.

$$e^*_k(e_i) = \delta_{ki}, \quad e'^*_l(e'_j) = \delta_{lj}$$

- Pagal apibrėžimą, dualus atvaizdavimas f^* yra toks, kad

$$(f^*(e'^*_l))(e_i) = (e'^*_l \circ f)(e_i)$$

  visiems e'^*_l ir e_i.

- Iš šio reikalavimo išplaukia, kad

$$\boxed{f(e'^*_l) = \textstyle\sum_{k=1}^n f_{lk}\, e^*_k}$$

  nes

$$(f^*(e'^*_l))(e_i) = \textstyle\sum_{k=1}^n f_{lk}\, e^*_k(e_i) = \sum_{k=1}^n f_{lk}\, \delta_{ki} = f_{li}$$
$$(e'^*_l \circ f)(e_i) = e'^*_l(f(e_i)) = e'^*_l\big(\textstyle\sum_{j=1}^m f_{ji}\, e'_j\big) = \sum_{j=1}^m f_{ji}\delta_{lj} = f_{li}$$

Pavyzdys 2.4.6. Tegul $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ būna tiesinis atvaizdavimas ir tegul $\{e_i\}_{i=1}^n$ ir $\{e'_j\}_{j=1}^m$ būna standartinės $\mathbb{C}^n$ ir $\mathbb{C}^m$ bazės. Suraskime dualų atvaizdavimą $f^* : (\mathbb{C}^m)^* \to (\mathbb{C}^n)^*$.

- Standartinėje bazėje f atvaizdas yra matrica

$$F = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_{ji} E_{ji} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

  Čia $E_{ji} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ yra standartiniai matriciniai vienetai:

$$E_{ji}\, e_l = \delta_{il}\, e'_j \quad \Longrightarrow \quad F\, e_l = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_{ji}\, E_{ji}\, e_l = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_{ji}\, \delta_{il}\, e'_j = \sum_{j=1}^m f_{jl}\, e'_j$$

- Standartinei bazei $\{e'_j\}_{j=1}^m$ duali bazė yra $\{e'^*_k\}_{k=1}^m$ tokia, kad $e'^*_k(e'_j) = \delta_{kj}$.
- Dualus atvaizdavimas f^* dualioje bazėje veikia tokiu būdu:

$$f^*(e'^*_k)(e_l) = (e'^*_k \circ f)(e_l) = e'^*_k\left(\sum_{j=1}^m f_{jl}\, e'_j\right) = \sum_{j=1}^m f_{jl}\, e'^*_k(e'_j)$$
$$= \sum_{j=1}^m f_{jl}\, \delta_{kj} = f_{kl} = \sum_{i=1}^n f_{ki}\, \delta_{il} = \sum_{i=1}^n f_{ki}\, e^*_i(e_l)$$

- Mes pradėjome nuo $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ standartinėje bazėje:

$$F = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_{ji}\, E_{ji} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f\, e_l = \sum_{j=1}^m f_{jl}\, e'_j}$$

- Mes suradome, kad $f^* : (\mathbb{C}^m)^* \to (\mathbb{C}^n)^*$ and dualios bazės veikia taip:

$$f^*(e_k'^*)(e_l) = \sum_{i=1}^{n} f_{ki}\, e_i^*(e_l) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f^*(e_k'^*) = \sum_{i=1}^{n} f_{ki}\, e_i^*}$$

- Dualaus atvaizdavimo f^* matricinis atvaizdas yra

$$F^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ji}\, E_{ij}^* = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} = F^t$$

  kur $E_{ij}^* : (\mathbb{C}^m)^* \to (\mathbb{C}^n)^*$ yra dualūs matriciniai vienetai:

$$E_{ij}\, e_k'^* = \delta_{jk}\, e_i^*$$

- Jei $e_k'^*$ užrašome kaip eilutes, $e_k'^* = (e_k')^t$, tada $F^* e_k'^* = (e_k')^t F$.

> **Apibrėžimas 2.4.6**
> Tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna grupės G įvaizdis. Jam *dualus įvaizdis* yra atvaizdavimas $\rho^* : G \to GL(V^*)$ toks, kad
> $$\rho_g^*(\varphi) = \varphi \circ \rho_g^{-1}$$
> visiems $\varphi \in V^*$ ir $g \in G$.

Patikrinkime homomorfizmo savybę, $\rho_g^* \circ \rho_h^* = \rho_{gh}^*$:

$$(\rho_g^* \circ \rho_h^*)(\varphi) = \rho_g^*(\varphi \circ \rho_h^{-1}) = \varphi \circ \rho_h^{-1} \circ \rho_g^{-1} = \varphi \circ \rho_{h^{-1}g^{-1}} = \varphi \circ \rho_{(gh)^{-1}} = \rho_{gh}^*(\varphi)$$

> **Pastaba**
>
> - Dualūs įvaizdžiai kartais vadinami *kontragradientiniais* įvaizdžiais.
> - Jei R_g yra ρ_g matricinis atvaizdas, tada ρ_g^* matricinis atvaizdas yra $(R_g^t)^{-1}$.
> - Fizikoje, dualūs vektoriai interpretuojami kaip anti-būsenos arba anti-dalelės:
>   - Matrica R_g transformuoja dalales, o $(R_g^t)^{-1}$ – anti-daleles.
>   - Įvertinimą $\varphi(v)$ galime interpretuoti kaip anti-dalelės ir dalelės anihiliaciją.

Pavyzdys 2.4.7. Ciklinė grupė $C_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ turi netrivialų vienmatį įvaizdį erdvėje $V = \mathbb{C}$

$$\rho : C_n \to GL(1), \quad a \mapsto e^{2\pi i/n}$$

Jam dualus atvaizdavimas yra

$$\rho^* : C_n \to GL(1), \quad a \mapsto e^{-2\pi i/n}$$

Pavyzdys 2.4.8. Simetrinė grupė $S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$ turi dvimatį įvaizdį $\rho : S_3 \to GL(2)$ erdvėje $V = \mathbb{C}^2$ apibrėžtą atvaizdavimu

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$(123) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (321) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Jam dualus atvaizdavimas yra identiškas, nes $(R_g^t)^{-1} = R_g$ visoms aukščiau pateiktoms matricoms.

2.5 Tenzorinė sandauga

Apibrėžimas 2.5.1

Tegul U ir V būna vektorinės erdvės. Jų *tenzorinė* sandauga yra vektorinė erdvė žymima $W = U \otimes V$ kartu su bi-tiesiniu atvaizdavimu
$$\otimes \,:\, U \times V \to W, \quad (u, v) \mapsto u \otimes v$$

Pastaba

- Atvaizdavimas $\otimes$ yra bi-tiesinis reiškia, kad
$$(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v, \qquad u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v'$$
$$(au) \otimes v = u \otimes (av) = a(u \otimes v)$$
visiems $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ ir $a \in \mathbb{C}$.
- Jei $\dim U = n$ ir $\dim V = m$, tai $\dim W = \dim U \cdot \dim V = n \cdot m$.
- Jei $\{e_i\}_{i=1}^n$ yra U bazė ir $\{e'_j\}_{j=1}^m$ yra V bazė, tai $\{e_i \otimes e'_j\}_{i=1,\, j=1}^{n\quad m}$ yra W bazė.

Pavyzdys 2.5.1. Tegul $U = \mathbb{R}^2$ ir $V = \mathbb{R}^2$. Tada $W = U \otimes V \cong \mathbb{R}^4$:
$$U = \{ae_1 + be_2 : a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad V = \left\{ce'_1 + de'_2 : c, d \in \mathbb{R}\right\}$$
$$W = U \otimes V = \left\{xe_1 \otimes e'_1 + ye_1 \otimes e'_2 + ze_2 \otimes e'_1 + qe_2 \otimes e'_2 : x, y, z, q \in \mathbb{R}\right\}$$

Pavyzdys 2.5.2. Fizikoje, “paprastos” vektorinės erdvės dažnai yra viendalelių sistemų būsenų erdvės. Pavyzdžiui, elektronas gali turėti dvi sukinio poliarizacijas, “sukinio viršun”, $|\uparrow\rangle$, ir “sukinio žemyn”, $|\downarrow\rangle$. Vieno elektrono sukininių būsenų erdvė yra neredukuojamas $SU(2)$ grupės įvaizdis (sukinio $s = 1/2$)
$$V_s = \left\{a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle : a, b \in \mathbb{C}\right\} \cong \mathbb{C}^2$$
Dviejų elektronų sukininių būsenų erdvė yra
$$V_s \otimes V_s = \left\{a\,|\uparrow\uparrow\rangle + b\,|\uparrow\downarrow\rangle + c\,|\downarrow\uparrow\rangle + d\,|\downarrow\downarrow\rangle : a, b, c, d \in \mathbb{C}\right\} \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$$
kur $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ ir t.t.

Apibrėžimas 2.5.2

Tegul $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ ir $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ būna G įvaizdžiai. Atvaizdavimas
$$\rho : G \to GL(V_1 \otimes V_2), \quad g \mapsto \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$$
yra grupės G įvaizdis tenzorinėje erdvėje $V_1 \otimes V_2$. Jį žymėsime $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$.

Jei $\{e_i\}_{i=1}^n$ yra V_1 bazė ir $\{e'_j\}_{j=1}^m$ yra V_2 bazė, tada
$$\rho_1(g)\,e_i = \sum_k r_{ki}\,e_k, \quad \rho_2(g)\,e'_j = \sum_l r'_{lj}\,e'_l \quad \Longrightarrow \quad \rho(g)(e_i \otimes e'_j) = \sum_{k,l} r_{ki} r'_{lj}\,e_k \otimes e'_l$$
kur $r_{ki} = (R_1(g))_{ki}$ ir $r'_{lj} = (R_2(g))_{lj}$.

Tiesinio operatoriaus $\rho_1(g) \otimes \rho_2(g) \in GL(V_1 \otimes V_2)$ matricinis atvaizdas standartinėje bazėje yra $(n \times m) \times (n \times m)$ matrica

$$R_1(g) \otimes R_2(g) = \begin{pmatrix} r_{11}R_2(g) & r_{12}R_2(g) & \cdots \\ r_{21}R_2(g) & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}r'_{11} & r_{11}r'_{12} & \cdots & r_{12}r'_{11} & r_{12}r'_{12} & \cdots \\ r_{11}r'_{21} & \ddots & & r_{12}r'_{21} & \ddots & \\ \vdots & & & & & \\ r_{21}r'_{11} & r_{21}r'_{12} & \cdots & & & \\ r_{21}r'_{21} & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

Pavyzdys 2.5.3. Tarkim $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$ ir

$$R_1(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad R_2(g) = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Tada

$$\begin{aligned}(R_1(g) \otimes R_2(g))(e_1 \otimes e_2) &= (R_1(g)e_1) \otimes (R_2(g)e_2) \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af \\ ah \\ cf \\ ch \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Kita vertus

$$\begin{aligned}(R_1(g) \otimes R_2(g))(e_1 \otimes e_2) &= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af \\ ah \\ cf \\ ch \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Čia e_1 ir e_2 yra standartiniai baziniai vektoriai.

Tenzorinė dviejų neredukuojamų įvaizdžių sandauga, bendru atveju, yra redukuojama. Pagal Maškės teoremą, baigtinėms grupėms, ji suskyla į tiesioginę neredukuojamų įvaizdžių sumą:

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{k=1}^{h} V_k^{\oplus m_k}$$

kur i, j, k yra neredukuojamų įvaizdžių vardai (labels), o m_k yra unikalūs įvaizdžių V_k pasikartojimų skaičiai.

Pavyzdys 2.5.4. Dviejų elektronų sistema suskyla į sukinio $s = 1$ ir sukinio $s = 0$ būsenas:

$$V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}} = V_1 \oplus V_0$$

Trijų elektronų sistema suskyla į sukinio $s = 3/2$ ir sukinio $s = 1/2$ būsenas:

$$\begin{aligned}(V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}}) \otimes V_{\frac{1}{2}} &= (V_1 \oplus V_0) \otimes V_{\frac{1}{2}} \\ &= (V_1 \otimes V_{\frac{1}{2}}) \oplus (V_0 \otimes V_{\frac{1}{2}}) = V_{\frac{3}{2}} \oplus V_{\frac{1}{2}} \oplus V_{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

kur V_0, $V_{\frac{1}{2}}$, V_1, $V_{\frac{3}{2}}$ yra neredukuojami $SU(2)$ grupės įvaizdžiai.

Pavyzdys 2.5.5. Tegul V būna baigtinė vektorinė erdvė. Apibrėžkime tiesinį *perstatymo* operatorių

$$P : V \otimes V \to V \otimes V, \quad v \otimes v' \mapsto v' \otimes v$$

visiems $v, v' \in V$. Erdvę $V \otimes V$ galime išskaidyti į jos *simetrinį* ir *antisimetrinį* poerdvius

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \wedge^2(V)$$

kur

$$\mathrm{Sym}^2(V) = \{w \in V \otimes V : Pw = w\}$$
$$\wedge^2(V) = \{w \in V \otimes V : Pw = -w\}$$

Jei $\{e_i\}_{i=1}^n$ yra V bazė, tada

$$\mathrm{Sym}^2(V) = \{a\,(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) : a \in \mathbb{C},\ i, j = 1 \dots n\}$$
$$\wedge^2(V) = \{a\,(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) : a \in \mathbb{C},\ i, j = 1 \dots n\}$$

Tegul V būna grupės G įvaizdis. Tada $V \otimes V$ poerdviai $\mathrm{Sym}^2(V)$ ir $\wedge^2(V)$ yra G-invariantiniai. Jie vadinami *simetriniu ir antisimetriniu įvaizdžio V kvadratu*.

Užduotis. Parodykite, kad operatoriai $\Pi^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm P)$ yra projektoriai

$$\Pi^{+} : V \otimes V \to \mathrm{Sym}^2(V), \qquad \Pi^{-} : V \otimes V \to \Lambda^2(V)$$

Pavyzdys 2.5.6. Tegul $V = \mathbb{C}^n$ ir tegul $W = \mathbb{C}^m$. Tada

$$W \otimes V^* \cong \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}(V, W)$$

Užduotis. Įrodykite šiuos izomorfizmus.

2.6 Charakteriai

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ ir tegul $S \in GL(V)$. Tada atvaizdavimas

$$g \in G \longmapsto \rho'_g = S \rho_g S^{-1} \in GL(V)$$

irgi yra grupės G įvaizdis erdvėje V:

- Įvaizdžiai ρ ir ρ' yra *panašūs* arba *ekvivalentiški* – jie susiję per *panašumo transformaciją*.
- Įvaizdžiai ρ ir ρ' skiriasi bazės pakeitimu erdvėje V.

Panašūs įvaizdžiai sudaro *panašumo klases*:

- Užtenka žinoti tik vieną įvaizdį iš panašumo klasės. Visi kiti įvaizdžiai gaunami panašumo transformacijų pagalba.
- Norint surasti visus grupės įvaizdžius užtenka surasti po vieną įvaizdį iš kiekvienos panašumo klasės.

Kaip patikrinti, ar du ivaizdžiai, ρ ir ρ', yra panašūs?

- Galima ieškoti panašumo transformacijos S tenkinančios $\rho'_g = S \rho_g S^{-1}\ \forall g \in G$.
  Tai įmanoma, bet ne efektyvu. Reiktų išspręsti $|G| \times \dim \rho$ tiesinių lygčių.
- Daug efektyviau yra surasti ir palyginti *panašumo transformacijos invariantus*.

Apibrėžimas 2.6.1. Įvaizdžio charakteris

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna grupės G įvaizdis. Įvaizdžio ρ *charakteris* yra tiesinis atvaizdavimas

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \operatorname{tr} \rho_g$$

kur tr žymi tiesinio operatoriaus ρ_g *pėdsaką* – jo tikrinių verčių kartu su pasikartojimais sumą.

Pėdsako savybės:

- Tegul $\{e_i\}_{i=1}^n$ būna V bazė ir tegul R_g būna operatoriaus ρ_g matricinis atvaizdas šioje bazėje. Tada

$$\operatorname{tr} \rho_g = \operatorname{tr} R_g = \sum_i r_{ii}$$

- Matricos pėdsakas nepriklauso nuo bazės pasirinkimo. Jei $\{e_i'\}_{i=1}^n$ yra kita V bazė, tada egzistuoja matrica S tokia, kad

$$e_i' = S^{-1} e_i S \ \text{ visiems } \ i = 1 \ldots n$$

- Jei R_g ir R_g' yra operatoriaus ρ_g matriciniai atvaizdai bazėse $\{e_i\}_{i=1}^n$ ir $\{e_i'\}_{i=1}^n$. Tada

$$\operatorname{tr} R_g' = \operatorname{tr} S R_g S^{-1} = \operatorname{tr} R_g$$

Charakterio savybės:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \chi_\rho(e) = \dim V \\ (ii) \quad & \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)} \\ (iii) \quad & \chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g) \end{aligned}$$

Savybė (ii) nėra akivaizdi. G yra baigtinė grupė, todėl $\exists k \in \mathbb{N}$ toks, kad $g^k = e$ ir $\rho_g^k = \mathrm{id}_V$.

Tai reiškia, kad ρ_g tikrinės vertės $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tenkina $\lambda_i^k = 1$, t.y.:

$$\lambda_i = e^{i\gamma_i} \implies \lambda_i^{-1} = e^{-i\gamma_i} = \overline{\lambda_i} \implies \chi_\rho(g^{-1}) = \textstyle\sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_i \overline{\lambda_i} = \overline{\chi_\rho(g)}$$

Savybė (iii) sako, kad visi vienos klasės elementai turi tą patį charakterį, t.y. charakteris yra *klasės funkcija*.

Charakteris χ_ρ nėra grupės homomorfizmas: bendru atveju $\chi_\rho(g)\chi_\rho(h) \neq \chi_\rho(gh)$.

Pavyzdys 2.6.1. Kai kurie ciklinės grupės C_3 įvaizdžiai ir jų charakteriai:

- Trivialus įvaizdis

$$\begin{aligned} \rho_{\text{triv}} &: e \mapsto 1, \quad a \mapsto 1, \quad a^2 \mapsto 1 \\ \chi_{\text{triv}} &: e \mapsto 1, \quad a \mapsto 1, \quad a^2 \mapsto 1 \end{aligned}$$

- Standartinis įvaizdis

$$\begin{aligned} \rho_{\text{st}} &: e \mapsto 1, \quad a \mapsto e^{2i\pi/3}, \quad a^2 \mapsto e^{4i\pi/3} \\ \chi_{\text{st}} &: e \mapsto 1, \quad a \mapsto e^{2i\pi/3}, \quad a^2 \mapsto e^{4i\pi/3} \end{aligned}$$

- Dualus standartinis įvaizdis

$$\begin{aligned} \rho_{\text{st}}^* &: e \mapsto 1, \quad a \mapsto e^{-2i\pi/3}, \quad a^2 \mapsto e^{-4i\pi/3} \\ \chi_{\text{st}}^* &: e \mapsto 1, \quad a \mapsto e^{-2i\pi/3}, \quad a^2 \mapsto e^{-4i\pi/3} \end{aligned}$$

- Dvimatis įvaizdis

$$\rho_2 : e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \mapsto \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix}, \quad a^2 \mapsto \begin{pmatrix} e^{4i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-4i\pi/3} \end{pmatrix}$$

$$\chi_2 : e \mapsto 2, \quad a \mapsto -1, \quad a^2 \mapsto -1$$

Pavyzdys 2.6.2. Kai kurie dihedrinės grupės D_2 įvaizdžiai ir jų charakteriai:

- x įvaizdis

$$\rho_x : e \mapsto 1, \quad x \mapsto 1, \quad y \mapsto -1, \quad r \mapsto -1$$

$$\chi_x : e \mapsto 1, \quad x \mapsto 1, \quad y \mapsto -1, \quad r \mapsto -1$$

- y įvaizdis

$$\rho_y : e \mapsto 1, \quad x \mapsto -1, \quad y \mapsto 1, \quad r \mapsto -1$$

$$\chi_y : e \mapsto 1, \quad x \mapsto -1, \quad y \mapsto 1, \quad r \mapsto -1$$

- r įvaizdis

$$\rho_r : e \mapsto 1, \quad x \mapsto -1, \quad y \mapsto -1, \quad r \mapsto 1$$

$$\chi_r : e \mapsto 1, \quad x \mapsto -1, \quad y \mapsto -1, \quad r \mapsto 1$$

- Dvimatis įvaizdis

$$\rho_2 : e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad r \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_2 : e \mapsto 2, \quad x \mapsto 0, \quad y \mapsto 0, \quad r \mapsto -2$$

- Keturmatis (reguliarus) įvaizdis

$$\rho_R : e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_R : e \mapsto 4, \quad x \mapsto 0, \quad y \mapsto 0, \quad r \mapsto 0$$

Pavyzdys 2.6.3. Kai kurie simetrinės grupės S_3 įvaizdžiai ir jų charakteriai:

- Alternuojantis (ženklo) įvaizdis

$$\rho_{\mathrm{alt}} : e \mapsto 1, \quad (12) \mapsto -1, \quad (23) \mapsto -1, \quad (13) \mapsto -1, \quad (123) \mapsto 1, \quad (321) \mapsto 1$$

$$\chi_{\mathrm{alt}} : e \mapsto 1, \quad (12) \mapsto -1, \quad (23) \mapsto -1, \quad (13) \mapsto -1, \quad (123) \mapsto 1, \quad (321) \mapsto 1$$

- Dvimatis standartinis įvaizdis

$$\rho_{\mathrm{st}} : e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$(123) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (321) \mapsto -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathrm{st}} : e \mapsto 2, \quad (12) \mapsto 0, \quad (23) \mapsto 0, \quad (13) \mapsto 0, \quad (123) \mapsto -1, \quad (321) \mapsto -1$$

- Trimatis (natūralus) įvaizdis

$$\rho_{\mathrm{nat}} : e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (321) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathrm{nat}} : e \mapsto 3, \quad (12) \mapsto 1, \quad (23) \mapsto 1, \quad (13) \mapsto 1, \quad (123) \mapsto 0, \quad (321) \mapsto 0$$

Teiginys 2.6.2

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ ir $\sigma : G \to GL(W)$ būna du G įvaizdžiai, o χ_ρ ir χ_σ – jų charakteriai. Tada:

- tiesioginės ivaizdžių sumos $\rho \oplus \sigma$ charakteris yra $\chi_\rho + \chi_\sigma$
- tenzorinės ivaizdžių sandaugos $\rho \otimes \sigma$ charakteris yra $\chi_\rho \cdot \chi_\sigma$

Įrodymas. egul R_g būna matricinis ρ_g atvaizdas pasirinktoje V bazėje ir S_g būna matricinis σ_g atvaizdas pasirinktoje W bazėje. Tada

$$\begin{aligned} \chi_{\rho\oplus\sigma}(g) &= \mathrm{tr}(R_g \oplus S_g) \\ &= \mathrm{tr} \begin{pmatrix} R_g & 0 \\ 0 & S_g \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\, R_g + \mathrm{tr}\, S_g = \chi_\rho(g) + \chi_\sigma(g) \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} \chi_{\rho\otimes\sigma}(g) &= \mathrm{tr}(R_g \otimes S_g) = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} r_{11}S_g & r_{12}S_g & \cdots \\ r_{21}S_g & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \\ &= \textstyle\sum_i r_{ii}\, \mathrm{tr}\, S_g = \mathrm{tr}\, R_g \cdot \mathrm{tr}\, S_g = \chi_\rho(g) \cdot \chi_\sigma(g) \end{aligned}$$

□

Teiginys 2.6.3

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna G įvaizdis ir tegul χ būna jo charakteris. Tegul

$$\rho_+^2 : G \to GL(\mathrm{Sym}^2(V)) \quad \text{ir} \quad \rho_-^2 : G \to GL(\Lambda^2(V))$$

būna simetriniai ir antisimetriniai įvaizdžio ρ kvadratai. Tada jų charakteriai yra

$$\chi_+^2(g) = \frac{1}{2}\big(\chi^2(g) + \chi(g^2)\big) \quad \text{ir} \quad \chi_-^2(g) = \frac{1}{2}\big(\chi^2(g) - \chi(g^2)\big)$$

Įrodymas. Pasirinkime $g \in G$ ir V bazę $\{e_i\}_{i=1}^n$ tokią, kad $\rho_g\, e_i = \lambda_i e_i$. Tada

$$(\rho_g \otimes \rho_g)(e_i \otimes e_j \pm e_j \otimes e_i) = \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j \pm e_j \otimes e_i)$$

Vektoriai $\{e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i\}_{i \le j=1}^n$ sudaro $\mathrm{Sym}^2(V)$ bazę, todėl

$$\chi_+^2(g) = \sum_{i\le j} \lambda_i\lambda_j = \sum_i \lambda_i\lambda_i + \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = \tfrac{1}{2}\big(\textstyle\sum_i \lambda_i\big)^2 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i \lambda_i^2 = \tfrac{1}{2}\big(\chi(g)^2 + \chi(g^2)\big)$$

Vektoriai $\{e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i\}_{i<j=1}^n$ sudaro $\Lambda^2(V)$ bazę, todėl

$$\chi_-^2(g) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \chi_+^2(g) - \sum_i \lambda_i \lambda_i = \tfrac{1}{2}\big(\chi(g^2) - \chi(g)^2\big) \qquad \square$$

Pavyzdys 2.6.4. Tegu $V = \mathbb{C}^2$ ir $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matricos A tikrinės vertės ir tikriniai vektoriai yra

$$\lambda_1 = 3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad \lambda_2 = 1, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Taigi:

$$A v_1 = \lambda_1 v_1, \quad A v_2 = \lambda_2 v_2$$
$$\operatorname{tr} A = 2 + 2 = 4 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 5 + 5 = 10 = 9 + 1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

Vektoriai $\{v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2\}$ sudaro $\mathrm{Sym}^2(V)$ bazę. Taigi:

$$(A \otimes A)(v_1 \otimes v_1) = 9\,(v_1 \otimes v_1), \quad (A \otimes A)(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) = 3\,(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1)$$
$$(A \otimes A)(v_2 \otimes v_2) = 1\,(v_2 \otimes v_2),$$
$$\operatorname{tr}(A \otimes A)|_{\mathrm{Sym}^2(V)} = 9 + 3 + 1 = 13 = \frac{1}{2}(16 + 10) = \frac{1}{2}((\operatorname{tr} A)^2 + \operatorname{tr} A^2)$$

Vektorius $\{v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1\}$ sudaro $\Lambda^2(V)$ bazę. Taigi:

$$(A \otimes A)(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1) = 3\,(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1)$$
$$\operatorname{tr}(A \otimes A)|_{\Lambda^2(V)} = 3 = \frac{1}{2}(16 - 10) = \frac{1}{2}((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2)$$

2.7 Ortogonalumo sąryšiai

Maškės teorema teigia, kad kiekvienas G įvaizdis V yra tiesioginė neredukuojamų įvaizdžių V_i suma su pasikartojimais m_i:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{h} V_i^{\oplus m_i}$$

Šiame skyrelyje išvesime *charaterių ortogonalumo sąryšį*, kuris leis surasti pasikartojimus m_i bet kokiam G įvaizdžiui V:

- Pirmiausia, apibrėšime projekcinį operatorių $p : V \to V^G$
- Paskui apibrėšime projekcinį operatorių $\widehat{p} : V \otimes W^* \to (V \otimes W^*)^G$
- Operatoriaus $\widehat{p}$ pėdsakas duos norimą ortogonalumo sąryšį.
- Gautą sąryšį iliustruosime keletu pavyzdžių.

Teiginys 2.7.1

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna grupės G įvaizdis ir tegul V^G būna V poerdvis sudarytas iš G-invariantinių vektorių:

$$V^G = \{v \in V : \rho_g v = v, \ \forall g \in G\}$$

Tada operatorius

$$p = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \rho_g$$

yra projektorius $V \to V^G$.

Įrodymas. Tegul $v \in V$ ir $w = p\,v$. Tada

$$\rho_h w = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \rho_h \circ \rho_g\, v = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \rho_{hg}\, v = p\,v = w \quad \Longrightarrow \quad w \in V^G \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{im} p \subseteq V^G$$

Kita vertus, jei $v \in V^G$, tada

$$p\,v = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \rho_g v = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} v = v \quad \Longrightarrow \quad V^G \subseteq \operatorname{im} p$$

Taigi $\operatorname{im} p = V^G$, t.y. p yra norimas projektorius. □

Poerdvį V^G sudaro tiesioginė trivialių G ivaizdžių ($g \mapsto 1 \in GL(1)$ visiems $g \in G$) suma. Jo dimensija yra lygi trivialių įvaizdžių skaičiui įvaizdyje ρ:

$$\dim V^G = \dim \operatorname{im} p = \operatorname{tr} p = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

Tegul $\sigma : G \to GL(W)$ būna kitas G įvaizdis ir tegul $\sigma^* : G \to GL(W^*)$ būna jam dualus įvaizdis. Tada operatorius

$$\widehat{p} = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} (\rho \otimes \sigma^*)_g = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \rho_g \otimes \sigma^*_g$$

yra projektorius

$$\widehat{p} : V \otimes W^* \to (V \otimes W^*)^G$$

ir

$$\dim (V \otimes W^*)^G = \operatorname{tr} \widehat{p} = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi_\sigma(g) \cdot \overline{\chi_\sigma(g)}$$

Atvaizdavimas f yra G-invariantinis homomorfizmas, $f \in \operatorname{Hom}(V, W)^G = \operatorname{Hom}_G(V, W)$. Šuro lema sako, kad

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{jei } V \cong W \\ 0 & \text{jei } V \ncong W \end{cases}$$

Pasinaudoję lygybe

$$\operatorname{Hom}_G(V, W) = (W \otimes V^*)^G$$

mes gauname

$$\dim (W \otimes V^*)^G = \operatorname{tr} \widehat{p} = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \cdot \overline{\chi_\sigma(g)} = \begin{cases} 1 & \text{jei } V \cong W \\ 0 & \text{jei } V \ncong W \end{cases}$$

Tegul $\chi, \varphi : G \to \mathbb{C}$ būna kompleksinės klasės funkcijos ant grupės G

$$\chi(g) = \chi(hgh^{-1}) \quad \forall g, h \in G$$

Apibrėžkime funkcijų χ ir φ *skaliarinę sandaugą*:

$$(\chi \mid \varphi) = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi(g) \cdot \overline{\varphi(g)}$$

Kai χ ir φ yra neredukuojamų G įvaizdžių charakteriai, mes gauname šią teoremą:

Teorema 2.7.2

Neredukuojamų G įvaizdžių charakteriai yra ortonormalūs skaliarinės sandaugos atžvilgiu, t.y. jei χ ir φ yra neredukuojamų įvaizdžių charakteriai, tada

$$(\chi \mid \varphi) = \delta_{\chi\varphi}$$

kur $\delta_{\chi\varphi} = 1$ jei $\chi = \varphi$ ir $\delta_{\chi\varphi} = 0$ priešingu atveju.

Maškės teorema teigia, kad kiekvienas G įvaizdis V yra tiesioginė neredukuojamų įvaizdžių V_i suma su pasikartojimais m_i:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{h} V_i^{\oplus m_i}$$

Tegul φ ir χ_j būna įvaizdžių V ir V_j charakteriai. Tada:

- Iš charakterio ir skaliarinės sandaugos savybių išplaukia, kad

$$(\varphi \mid \chi_j) = \textstyle\sum_{i=1}^{h} m_i (\chi_i \mid \chi_j) = m_j \quad \text{nes} \quad (\chi_i \mid \chi_j) = \delta_{ij}.$$

- Skaliarinė sandauga $(\varphi \mid \varphi)$ yra sveikas teigiamas skaičius

$$(\varphi \mid \varphi) = \textstyle\sum_{i,j=1}^{h} m_i m_j (\chi_i \mid \chi_j) = \sum_{i,j=1}^{h} m_i m_j \delta_{ij} = \sum_i m_i^2$$

- Įvaizdis V yra neredukuojamas tada ir tik tada, kai $(\varphi \mid \varphi) = 1$.

Išvada 2.7.3

A. Kiekvieną grupės įvaizdį nusako jo charakteris.

B. Du grupės įvaizdžiai yra izomorfiški tada ir tik tada, kai jų charakteriai sutampa.

Pavyzdys 2.7.1. Kai kurių ciklinės grupės C_3 įvaizdžių charakteriai ir jų ortogonalumo sąryšiai:

	e	a	a^2
χ_{triv}	1	1	1
χ_{st}	1	$e^{2i\pi/3}$	$e^{4i\pi/3}$
χ_{st}^*	1	$e^{-2i\pi/3}$	$e^{-4i\pi/3}$
χ_2	2	-1	-1

	χ_{triv}	χ_{st}	χ_{st}^*	χ_2
χ_{triv}	1	0	0	0
χ_{st}	0	1	0	1
χ_{st}^*	0	0	1	1
χ_2	0	1	1	2

Pavyzdys 2.7.2. Kai kurių dihedrinės grupės D_2 įvaizdžių charakteriai ir jų ortogonalumo sąryšiai:

	e	x	y	r
χ_{triv}	1	1	1	1
χ_x	1	1	-1	-1
χ_y	1	-1	1	-1
χ_r	1	-1	-1	1
χ_2	2	0	0	-2
χ_{R}	4	0	0	0

	χ_{triv}	χ_x	χ_y	χ_r	χ_2	χ_4
χ_{triv}	1	0	0	0	0	1
χ_x	0	1	0	0	1	1
χ_y	0	0	1	0	1	1
χ_r	0	0	0	1	0	1
χ_2	0	1	1	0	2	2
χ_{R}	1	1	1	1	2	4

Pavyzdys 2.7.3. Kai kurių simetrinės grupės S_3 įvaizdžių charakteriai ir jų ortogonalumo sąryšiai:

	e	(ij)	(ijk)
χ_{triv}	1	1	1
χ_{alt}	1	-1	1
χ_{st}	2	0	-1
χ_{nat}	3	1	0
χ_{R}	6	0	0

	χ_{triv}	χ_{alt}	χ_{st}	χ_{nat}	χ_{R}
χ_{triv}	1	0	0	1	1
χ_{alt}	0	1	0	0	1
χ_{st}	0	0	1	1	2
χ_{nat}	1	0	1	2	3
χ_{R}	1	1	2	3	6

Pastebėkite, kad pirmoje lentelėje charakteriai pateikti ekvivalentiškumo klasėms, todėl skaičiuojant charakterių skaliarinę sandaugą sumos narius reikia padauginti iš klasių eilių. Pavyzdžiui,

$$(\chi_{\text{triv}}|\chi_{\text{alt}}) = \frac{1}{6}\big(1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 1\big) = 0$$

kur 3 ir 2 yra elementų skaičius klasėse (ij) ir (ijk).

2.8 Reguliarusis įvaizdis

Apibrėžimas 2.8.1

Tegul G būna baigtinė grupė ir tegul V būna vektorinė erdvė su baze $\{e_s\}_{s\in G}$. *Reguliarusis G įvaizdis* yra atvaizdavimas

$$\rho : G \to GL(V), \quad g \mapsto \rho_g \quad \text{toks, kad} \quad \rho_g e_s = e_{gs}$$

visiems $s \in G$.

Reguliariojo G įvaizdžio matricinis atvaizdas:

- Tegul $G = \{g_i\}_{i=1}^{n_G}$. Grupės daugybos taisyklę $g_i g_j = g_k$ užrašykime taip:

$$g_i g_j = \sum_m \Delta_{ij}^m g_m$$

kur $\Delta_{ij}^m = 1$ jei $m = k$ ir $\Delta_{ij}^m = 0$ jei $m \neq k$.

- Atvaizdavimas $G \to \text{Mat}_{n_G\times n_G}(\mathbb{C})$, $g_i \mapsto R_i$, kur R_i yra matrica su elementais $(R_i)_{mj} = \Delta_{ij}^m$, yra *matricinis reguliarusis įvaizdis*. Tikrai, nagrinėkime sandaugą $g_i g_j g_l$:

$$(g_i g_j)\, g_l = g_k g_l = \textstyle\sum_s \Delta_{kl}^s g_s \quad \text{ir} \quad g_i(g_j g_l) = g_i \sum_r \Delta_{jl}^r g_r = \sum_{r,s} \Delta_{ir}^s \Delta_{jl}^r g_s$$

$$\implies \quad \textstyle\sum_r \Delta_{ir}^s \Delta_{jl}^r = \Delta_{kl}^s \quad \implies \quad \sum_r (R_i)_{sr}(R_j)_{rl} = (R_k)_{sl} \quad \implies \quad R_i R_j = R_k$$

Pavyzdys 2.8.1. Dihedrinės grupės $D_2 = \{e, x, y, r = xy\}$ reguliarusis matricinis įvaizdis:

$$ee = e, \quad ex = x, \quad ey = y \quad er = r \quad \Longrightarrow \quad R_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$xe = x, \quad xx = e, \quad xy = r \quad xr = y \quad \Longrightarrow \quad R_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ye = y, \quad yx = r, \quad yy = e \quad yr = x \quad \Longrightarrow \quad R_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$re = r, \quad rx = y, \quad ry = x \quad rr = e \quad \Longrightarrow \quad R_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pastaba

Reguliariajam įvaizdžiui visada $\operatorname{tr}\rho_g = 0$ jei $g \neq e$ ir $\operatorname{tr}\rho_e = n_G$. Tai išplaukia iš perstatymo lemos.

Teiginys 2.8.2

Tegul h būna skirtingų neredukuojamų G įvaizdžių V_i skaičius ir tegul $\{n_i\}_{i=1}^h$ būna jų dimensijos. Tada:

A. Kiekvienas neredukuojamas G įvaizdis V_i pasirodo reguliarajame įvaizdyje lygiai n_i kartų.

B. Dimensijos n_i tenkina sąryšį $\sum_{i=1}^h n_i^2 = n_G$.

C. Jei $g \in G$ ir $g \neq e$, tada $\sum_{i=1}^h n_i\, \chi_i(g) = 0$.

Įrodymas. (A) Tegul χ_{R} būna reguliaraus įvaizdžio charakteris. Tada:

$$(\chi_{\mathrm{R}} \,|\, \chi_i) = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{R}}(g)\, \overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{n_G}\, \chi_{\mathrm{R}}(e)\, \overline{\chi_i(e)} = \chi_i(e) = n_i \qquad \text{nes } \chi_{\mathrm{R}}(e) = n_G$$

(B-C) Iš savybės (A) gauname

$$\chi_{\mathrm{R}}(g) = \sum_{i=1}^h n_i\, \chi_i(g) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} n_G = \chi_{\mathrm{R}}(e) = \sum_{i=1}^h n_i\, \chi_i(e) = \sum_{i=1}^h n_i^2 & (g = e) \\ 0 = \chi_{\mathrm{R}}(g) = \sum_{i=1}^h n_i\, \chi_i(g) & (g \neq e) \end{cases}$$

$\square$

Pastaba

Sąryšis (B) gali būti panaudotas surasti visus G įvaizdžius V_i. Turint “daug” neizomorfiškų paprastų G įvaizdžių V_i tereikia patikrinti ar jie tenkina $\sum_i n_i^2 = n_G$.

Pavyzdys 2.8.2. Kai kurių ciklinės grupės C_3 įvaizdžių charakteriai ir jų ortogonalumo sąryšiai:

	e	a	a^2
χ_{triv}	1	1	1
χ_{st}	1	$e^{2i\pi/3}$	$e^{4i\pi/3}$
χ_{st}^*	1	$e^{-2i\pi/3}$	$e^{-4i\pi/3}$
χ_{R}	3	0	0

	χ_{triv}	χ_{st}	χ_{st}^*	χ_{R}
χ_{triv}	1	0	0	1
χ_{st}	0	1	0	1
χ_{st}^*	0	0	1	1
χ_{R}	1	1	1	3

Taigi, $V_{\text{R}} = V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{st}} \oplus V_{\text{st}}^*$

Priminimas. $(\chi \,|\, \varphi) = \dfrac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi(g)\, \overline{\varphi(g)}$ ir $e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pavyzdys 2.8.3. Kai kurių dihedrinės grupės D_2 įvaizdžių charakteriai ir jų ortogonalumo sąryšiai:

	e	x	y	r
χ_{triv}	1	1	1	1
χ_x	1	1	-1	-1
χ_y	1	-1	1	-1
χ_r	1	-1	-1	1
χ_{R}	4	0	0	0

	χ_{triv}	χ_x	χ_y	χ_r	χ_{R}
χ_{triv}	1	0	0	0	1
χ_x	0	1	0	0	1
χ_y	0	0	1	0	1
χ_r	0	0	0	1	1
χ_{R}	1	1	1	1	4

Taigi, $V_{\text{R}} = V_{\text{triv}} \oplus V_x \oplus V_y \oplus V_r$

Pavyzdys 2.8.4. Kai kurių simetrinės grupės S_3 įvaizdžių charakteriai ir jų ortogonalumo sąryšiai:

	e	(ij)	(ijk)
χ_{triv}	1	1	1
χ_{alt}	1	-1	1
χ_{st}	2	0	-1
χ_{R}	6	0	0

	χ_{triv}	χ_{alt}	χ_{st}	χ_{R}
χ_{triv}	1	0	0	1
χ_{alt}	0	1	0	1
χ_{st}	0	0	1	2
χ_{R}	1	1	2	6

Pastebėkite, kad pirmoje lentelėje charakteriai pateikti ekvivalentiškumo klasėms, todėl skaičiuojant charakterių skaliarinę sandaugą sumos narius reikia padauginti iš klasių eilių. Pavyzdžiui,

$$(\chi_{\text{triv}}|\chi_{\text{alt}}) = \frac{1}{6}\big(1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 1\big) = 0$$

Taigi, $V_{\text{R}} = V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{alt}} \oplus V_{\text{st}} \oplus V_{\text{st}}$.

Prisiminkite, kad atvaizdavimas $\varphi : G \to \mathbb{C}$ vadinamas *klasės funkcija*, jei $\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(g)$ visiems $g, h \in G$. Pavyzdžiui, įvaizdžio $\rho : G \to GL(V)$ charakteris χ yra klasės funkcija, nes

$$\chi(g) = \operatorname{tr}\rho_g = \operatorname{tr}\rho_h\rho_g\rho_h^{-1} = \chi(hgh^{-1}) \qquad \forall g, h \in G$$

Likusioje šio skyrelio dalyje mes įrodysime šiuos du teiginius:

- Neredukuojamų neizomorfiškų baigtinės grupės G įvaizdžių skaičius lygus jos klasių skaičiui.
- Neredukuojami charakteriai yra ortogonalūs G klasių atžvilgiu, t.y.

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)\,\chi_i(g^{-1}) = \delta_{\zeta(s)\zeta(g)}\,\frac{n_G}{n_\zeta(g)}$$

kur $\zeta(g)$ žymi elemento g klasę.

Mums reikės dviejų pagalbinių teiginių. Nuo jų ir pradėsime.

Teiginys 2.8.3
Tegul $\varphi : G \to \mathbb{C}$ būna klasės funkcija ir tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna neredukuojamas įvaizdis. Apibrėžkime $\rho_\varphi : V \to V$ taisykle

$$\rho_\varphi = \sum_{g\in G} \varphi(g)\rho_g$$

Jei $\dim V = n$ ir χ yra įvaizdžio ρ charakteris, tada $\rho_\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$, kur

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\varphi(g)\chi(g) = \frac{n_G}{n}(\varphi \,|\, \overline{\chi})$$

Įrodymas. Pirmiausia, parodysime, kad ρ_φ yra G-invariantinis:

$$\rho_h^{-1}\circ\rho_\varphi\circ\rho_h = \sum_{g\in G}\varphi(g)\rho_h^{-1}\circ\rho_g\circ\rho_h = \sum_{g\in G}\varphi(g)\rho_{h^{-1}gh} = \sum_{g\in G}\varphi(hgh^{-1})\rho_g = \rho_\varphi$$

Taigi $\rho_\varphi\circ\rho_h = \rho_h\circ\rho_\varphi$ visiems $h\in G$. Iš Šuro lemos išplaukia, kad $\rho_\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$.
Beliko surasti λ. Tam reikia suskaičiuoti $\rho_\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$ pėdsaką:

$$\mathrm{tr}\,\rho_\varphi = \sum_{g\in G}\varphi(g)\,\mathrm{tr}\,\rho_g = \sum_{g\in G}\varphi(g)\chi(g) = n_G(\varphi\,|\,\overline{\chi}) \quad \text{ir} \quad \mathrm{tr}\,\lambda\,\mathrm{id}_V = n\lambda$$

Sulyginus abi puses gauname norimą rezultatą. □

Teiginys 2.8.4
Tegu H būna klasės funkcijų ant grupės G erdvė. Neredukuojami charakteriai $\{\chi_i\}_{i=1}^h$ sudaro ortonormalią erdvės H bazę.

Įrodymas. Mes jau žinome, kad neredukuojami charakteriai yra ortonormalūs. Mums tereikia įrodyti, kad bet kuri kita klasės funkcija $\psi\in H$, tokia kad $(\psi\,|\,\chi_i) = 0$ visiems i yra nulinė funkcija.

Tegul ψ būna tokia funkcija. Iš ankstesnio teiginio žinome, kad bet kuriam neredukuojamam įvaizdžiui $\rho : G \to GL(V)$ mes turime

$$\rho_\psi = \sum_{g\in G}\psi(g)\rho_g = \frac{n_G}{n}\underbrace{(\psi\,|\,\overline{\chi})}_{=0}\mathrm{id}_V = 0_V$$

kur χ yra ρ charakteris. Mes taip pat žinome, kad bet kurį G įvaizdį galime išskaidyti į tiesioginę neredukuojamų įvaizdžių sumą. Todėl $\rho_\psi = 0_V$ nepriklausomai nuo V.

Mums beliko parodyti, kad $\psi = 0$. Tegul $e_1 \in V_{\mathrm{R}}$ būna reguliaraus įvaizdžio vektorius toks, kad $\rho_{\mathrm{R}}(g)e_1 = e_g$ visiems $g\in G$. Tada

$$\rho_\psi e_1 = \sum_{g\in G}\psi(g)\rho_{\mathrm{R}}(g)e_1 = \sum_{g\in G}\psi(g)e_g$$

Bet $\rho_\psi = 0$. Todėl $\sum_{g\in G}\psi(g)e_g = 0$. Tai įmanoma tik tada kai $\psi(g) = 0$ visiems $g\in G$, nes $\{e_g\}_{g\in G}$ yra tiesiškai nepriklausomi vektoriai. □

Teorema 2.8.5

Neredukuojamų neizomorfiškų baigtinės grupės G įvaizdžių skaičius lygus jos klasių skaičiui.

Įrodymas. Tegul $\{\zeta_i\}_{i=1}^h$ būna skirtingos G klasės. Apibrėžkime klasės funkcijas $\{\varphi_j\}_{j=1}^h$ tokiu būdu:

$$\varphi_j : \zeta_i \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \delta_{ij}$$

Bet kuri klasės funkcija φ gali būti užrašyta kaip tiesinė kombinacija

$$\varphi = \sum_{i=1}^{h} a_i \varphi_i, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

Taigi, funkcijos $\{\varphi_j\}_{j=1}^h$ sudaro klasės funkcijų erdvės H bazę. Kita vertus, mes žinome, kad neredukuojami charakteriai $\{\chi_i\}_{i=1}^h$ sudaro erdvės H bazę. Tai reiškia, kad skirtingų G klasių skaičius sutampa su neredukuojamų charakterių skaičiui. □

Pavyzdys 2.8.5. Simetrinė grupė S_3 turi tris klases:

$$\zeta_1 = \{e\}, \quad \zeta_2 = \{(12),(23),(31)\}, \quad \zeta_3 = \{(123),(321)\}$$

ir tris neizomorfiškus neredukuojamus įvaizdžius: trivialų, alternuojantį, ir standartinį.

Teorema 2.8.6. Charakterių pilnumo sąryšis

Tegul $\{\chi_i\}_{i=1}^h$ būna visų neredukuojamų G įvaizdžių charakteriai, tegul $\zeta(g)$ žymi elemento g klasę ir tegul $n_{\zeta(g)}$ būna tos klasės dimensija. Tada:

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)\overline{\chi_i(g)} = \delta_{\zeta(s)\zeta(g)} \frac{n_G}{n_{\zeta(g)}}$$

visiems $s, g \in G$.

Įrodymas. Tegul $\{\zeta_i\}_{i=1}^h$ būna skirtingos G klasės ir tegul $\{\varphi_j\}_{j=1}^h$ būna klasės funkcijų erdvės H bazė tokia, kad

$$\varphi_j(g) = \delta_{\zeta(g)\zeta_j} = \begin{cases} 1 & \text{jei } g \in \zeta_j \\ 0 & \text{jei } g \notin \zeta_j \end{cases}$$

Neredukuojami charakteriai $\{\chi_i\}_{i=1}^h$ irgi sudaro H bazę. Todėl, $\forall s \in G$,

$$\varphi_j(s) = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i(s) \quad \text{kur} \quad \lambda_i = (\varphi_j \mid \chi_i) = \frac{1}{n_G} \underbrace{\sum_{g \in G} \varphi_j(g)}_{\zeta_j \text{ dimensija}} \overline{\chi_i(g)} = \frac{n_{\zeta_j}}{n_G} \overline{\chi_i(g)} \quad \forall g \in \zeta_j$$

Taigi, kai $g \in \zeta_j$ (bet kuriam j), mes gauname norimą sąryšį

$$\frac{n_G}{n_{\zeta(g)}} \varphi_j(s) = \sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)\overline{\chi_i(g)} = \delta_{\zeta(s)\zeta(g)} \frac{n_G}{n_{\zeta(g)}}$$ □

Pavyzdys 2.8.6. Patikrinkime charakterių pilnumo sąryšį simetrinei grupei S_3. Ji turi tris klases

$$\zeta_1 = \{e\}, \quad \zeta_2 = \{(12),(23),(31)\}, \quad \zeta_3 = \{(123),(321)\}$$

ir tris neizomorfiškus neredukuojamus įvaizdžius: trivialų, alternuojantį, ir standartinį

	ζ_1	ζ_2	ζ_3
χ_{tr}	1	1	1
χ_{alt}	1	-1	1
χ_{st}	2	0	-1

Įstatę charakterių vertes į charakterių pilnumo sąryšį gauname

$s\backslash g$	ζ_1	ζ_2	ζ_3
ζ_1	$1^2+1^2+2^2=\frac{6}{1}$	$1\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0=0$	$1\cdot1+1\cdot1+2\cdot(-1)=0$
ζ_2	$1\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot2=0$	$1^2+(-1)^2+0^2=\frac{6}{3}$	$1\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot(-1)=0$
ζ_3	$1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot2=0$	$1\cdot1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot0=0$	$1^2+1^2+(-1)^2=\frac{6}{2}$

2.9 Kanoninis išskaidymas

Tegul $\{V_i\}_{i=1}^n$, $\{\chi_i\}_{i=1}^h$, $\{n_i\}_{i=1}^h$ būna neredukuojami neizomorfiški G įvaizdžiai, jų charakteriai ir dimensijos. Tegul V būna G įvaizdis ir tegul

$$V = V_1^{\oplus m_1} \oplus V_2^{\oplus m_2} \oplus \cdots \oplus V_h^{\oplus m_h}$$

būna V išskaidymas į neredukuojamus įvaizdžius. Pažymėkime $W_i = V_i^{\oplus m_i}$. Tada

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_h$$

Šis išskaidymas vadinamas *kanoniniu išskaidymu*.

Pavyzdys 2.9.1. Reguliarus S_3 grupės įvaizdis išsiskaido į tiesioginę neredukuojamų įvaizdžių sumą

$$V_{\text{R}} = V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{alt}} \oplus V_{\text{st}} \oplus V_{\text{st}}$$

Jo kanoninis išskaidymas yra

$$V_{\text{R}} = W_{\text{triv}} \oplus W_{\text{alt}} \oplus W_{\text{st}}$$

kur $W_{\text{triv}} = V_{\text{triv}}$, $W_{\text{alt}} = V_{\text{alt}}$ ir $W_{\text{st}} = V_{\text{st}} \oplus V_{\text{st}}$.

Kuo skiriasi kanoninis išskaidymas nuo nekanoninio išskaidymo?

- Išskaidymas yra *kanoninis*, jei jis yra unikalus. Pavyzdžiui, jei V yra tiesioginė neredukuojamų vienmačio V_1 ir dvimačio V_2 įvaizdžių suma

  $$V = V_1 \oplus V_2$$

  tai mes niekaip kitaip negalime išskaidyti V į neredukuojamus įvaizdžius.
- Išskaidymas *nekanoninis*, jei jis nėra unikalus. Pavyzdžiui, jei V yra tiesioginė dviejų izomorfiškų vienmačių įvaizdžių suma

  $$V = V_1 \oplus V_2 \quad \text{kur} \quad V_1 = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1\} \quad V_2 = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_2\}$$

  mes galime įšskaidyti V į du neredukuojamus įvaizdžius daugybe būdų:

  $$V = U_1 \oplus U_2 \quad \text{kur} \quad U_1 = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1\} \quad U_2 = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1 + v_2\}$$

arba

$$V = U_1' \oplus U_2' \quad \text{kur} \quad U_1' = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_1 - v_2\} \quad U_2' = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_2\}$$

Bendru atveju,

$$V = W_1 \oplus W_2 \quad \text{kur} \quad W_1 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a_1 v_1 + a_2 v_2\} \quad W_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{b_1 v_1 + b_2 v_2\}$$

kur $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ tokie, kad $a_1 b_2 \neq b_1 a_2$.

Teorema 2.9.1

Tegul V būna G įvaizdis ir tegul $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_h$ būna jo kanoninis išskaidymas. Tada:

A. Šis išskaidymas yra unikalus.

B. Operatorius

$$p_i = \frac{n_i}{n_G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}\, \rho_V(g)$$

yra projektorius $p_i : V \to W_i$.

Įrodymas. (B) Iš Teiginio 3.8.4 ir charakterių ortogonalumo žinome, kad bet kuriam neredukuojamam $V_j < V$

$$p_i|_{V_j} = \frac{n_i}{n_j} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}\, \rho_j(g) = (\overline{\chi_i} \,|\, \overline{\chi_j})\, \mathrm{id}_{V_j} = \delta_{ij}\, \mathrm{id}_{V_j}$$

Prisiminę, kad $W_j = V_j^{\oplus m_j}$, išskaidykime $v \in V$ į jo komponentus $w_j \in W_j$:

$$v = w_1 + \ldots + w_h \quad \Longrightarrow \quad p_i(v) = p_i(w_1) + \ldots + p_i(w_h) = w_i \quad \Longrightarrow \quad p_i : V \mapsto W_i$$

(A) išplaukia iš to, kad projekcija nepriklauso nuo išskaidymo $W_j = V_j^{\oplus m_j}$. $\square$

Pavyzdys 2.9.2. Ciklinė grupė C_2 turi du neredukuojamus vienmačius įvaizdžius

$$\rho_+ \;:\; e \mapsto 1,\;\; a \mapsto 1 \quad \text{ir} \quad \rho_- \;:\; e \mapsto 1,\;\; a \mapsto -1$$

- Bet kurio C_2 įvaizdžio V kanoninis išskaidymas yra

$$V = W_+ \oplus W_- \quad \text{kur} \quad W_\pm = \{v \in V \;:\; \rho_-(a)\, v = \pm v\}$$

- Pritaikę formulę

$$p_i = \frac{n_i}{n_G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}\, \rho_V(g)$$

surandame projektorius į poerdvius W_+ ir W_-:

$$p^+ = \frac{1}{2}\big(\overline{\chi_+(e)}\,\rho_V(e) + \overline{\chi_+(a)}\,\rho_V(a)\big) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{id}_V + \rho_V(a)\big)$$

$$p^- = \frac{1}{2}\big(\overline{\chi_-(e)}\,\rho_V(e) + \overline{\chi_-(a)}\,\rho_V(a)\big) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{id}_V - \rho_V(a)\big)$$

Užduotis. Patikrinkite, kad $p^\pm \circ p^\pm = p^\pm$ ir $p^\pm \circ p^\mp = 0_V$.

Pavyzdys 2.9.3. Perstatymo grupė S_3 turi tris neredukuojamus įvaizdžius, V_{triv}, V_{alt}, ir V_{st}. Jų charakteriai:

	e	(ij)	(ijk)
χ_{triv}	1	1	1
χ_{alt}	1	-1	1
χ_{st}	2	0	-1

- Bet kurio S_3 įvaizdžio V kanoninis išskaidymas yra

$$V = W_{\text{triv}} \oplus W_{\text{alt}} \oplus W_{\text{st}}$$

- Pritaikę formulę

$$p_i = \frac{n_i}{n_G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho_V(g)$$

surandame projektorius į poerdvius W_{triv}, W_{alt}, ir W_{st}:

$$p_{\text{triv}} = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \overline{\chi_{\text{triv}}(g)} \rho_V(g) = \frac{1}{6}\big(\operatorname{id}_V + \rho_V((12)) + \rho_V((23)) + \rho_V((13)) + \rho_V((123)) + \rho_V((321))\big)$$

$$p_{\text{alt}} = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \overline{\chi_{\text{alt}}(g)} \rho_V(g) = \frac{1}{6}\big(\operatorname{id}_V - \rho_V((12)) - \rho_V((23)) - \rho_V((13)) + \rho_V((123)) + \rho_V((321))\big)$$

$$p_{\text{st}} = \frac{2}{6} \sum_{g \in S_3} \overline{\chi_{\text{st}}(g)} \rho_V(g) = \frac{1}{3}\big(2\operatorname{id}_V - \rho_V((123)) - \rho_V((321))\big)$$

Tegul V būna G įvaizdis ir tegul $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_h$ būna jo kanoninis išskaidymas. Mes žinome, kad operatorius

$$p_i = \frac{n_i}{n_G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho_V(g)$$

yra projektorius $p_i : V \to W_i$. Kitas žingsnis yra išskaidyti kiekvieną W_i į neredukuojamus komponentus, $W_i = V_i^{\oplus m_i}$. Teiginys, pateiktas žemiau, nusako metodą, kaip būtent atlikti norimą W_i išskaidymą. Tada, išskaidę kiekvieną W_i, gauname norimą V išskaidymą į neredukuojamus komponentus:

$$V = V_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus V_h^{\oplus m_h}$$

Tokius skaičiavimus patogiausia atlikti su Python SymPy, Wolfram Mathematica ar kita programavimo kalba.

Teiginys 2.9.2

Tegul $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_h$ būna G įvaizdžio V kanoninis išskaidymas ir tegul $\{e_a^{(i)}\}_{a=1}^{n_i}$ būna V_i bazė, o $R^{(i)}(g)$ – įvaizdžio $\rho_{V_i}(g)$ matricinis atvaizdas šioje bazėje. Tegul

$$p_{ab}^{(i)} = \frac{n_i}{n_G} \sum_{g \in G} r_{ba}^{(i)}(g^{-1}) \rho_V(g)$$

ir tegul $W_{i,a} = \operatorname{im} p_{ab}^{(i)}$. Tada:

A. $p_{aa}^{(i)}$ yra projektorius $V \to W_{i,a}$ ir $p_i = \sum_{a=1}^{n_i} p_{aa}^{(i)}$ yra $V \to W_i$ projektorius.

B. $p_{ab}^{(i)} W_j = 0$ jei $j \neq i$ ir $p_{ab}^{(i)} W_{i,c} = 0$ jei $c \neq b$, ir $p_{ab}^{(i)} : W_{i,b} \xrightarrow{\sim} W_{i,a}$.

C. Tegul $w \in W_{i,1}$ ir tegul $u_a = p_{a1}^{(i)}(w) \in W_{i,a}$. Tada $\{u_a\}_{a=1}^{n_i}$ yra tiesiškai nepriklausomi ir

$$U(w) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{u_a\}_{a=1}^{n_i} \cong V_i$$

D. Jei $\{w_k\}_{k=1}^{m_i}$ yra $W_{i,1}$ bazė, $W_i = U(w_1) \oplus \ldots \oplus U(w_m)$, t.y. poerdvio $W_{i,1}$ bazės pasirikimas nustato W_i išskaidymą į neredukuojamus įvaizdžius.

Įrodymas. (A–B) Iš antrosios Šuro lemos išvados išplaukia, kad

$$p_{ab}^{(i)}\, e_c^{(j)} = \frac{n_i}{n_G} \sum_{g\in G} \sum_{d=1}^{n_j} r_{ba}^{(i)}(g^{-1})\, r_{dc}^{(j)}(g)\, e_d^{(j)} = \delta_{ij} \sum_{d=1}^{n_i} \delta_{bc}\, \delta_{ad}\, e_d^{(i)} = \delta_{ij}\, \delta_{bc}\, e_a^{(i)}$$

ir

$$p_{aa}^{(i)}(e_c^{(j)}) = \delta_{ij}\, \delta_{ac}\, e_c^{(i)}$$

Lieka pasirinkti bet kokį išskaidymą $W_i \cong V_i^{\oplus m_i}$ ir pritaikyti šias formules.

(C) Kad $\{u_a\}_{a=1}^{n_i}$ yra tiesiškai nepriklausomi išplaukia iš (A–B). Mums lieka parodyti, kad $U(w) \cong V_i$. Tam užtenka parodyti, kad vektoriai u_a transformuojami $R^{(i)}(g)$:

$$\rho(g)\, u_a = \rho(g) \circ p_{a1}^{(i)}(w) = \sum_{b=1}^{n} r_{ba}(g)\, p_{b1}^{(i)}(w)$$

(D) išplaukia iš (A–C). □

Pavyzdys 2.9.4. Natūralaus S_3 įvaizdžio V_{nat} tenzorinio kvadrato išskaidymas yra

$$V := V_{\text{nat}} \otimes V_{\text{nat}} = \underbrace{V_{\text{nat}} \oplus V_{\text{nat}}}_{W_{\text{triv}}} \oplus \underbrace{V_{\text{alt}}}_{W_{\text{alt}}} \oplus \underbrace{V_{\text{st}} \oplus V_{\text{st}} \oplus V_{\text{st}}}_{W_{\text{st}}}$$

Šį išskaidymą gauname tokiu būdu:

- Sukonstruojame projektorius:

$$p_{\text{triv}} = \frac{1}{6} \sum_{p\in S_3} \rho_V(p), \qquad p_{\text{alt}} = \frac{1}{6} \sum_{p\in S_3} (-1)^p \rho_V(p), \qquad p_{\text{triv}} = \frac{2}{6} \sum_{p\in S_3} \overline{\chi_{\text{st}}(p)}\, \rho_V(p)$$

  Tada

$$W_{\text{triv}} = \operatorname{im} p_{\text{triv}}, \qquad W_{\text{alt}} = \operatorname{im} p_{\text{alt}}, \qquad W_{\text{st}} = \operatorname{im} p_{\text{st}}$$

- $\dim W_{\text{alt}} = \dim V_{\text{alt}} = 1$. Todėl $W_{\text{alt}} = V_{\text{alt}}$.
- $\dim W_{\text{triv}} = 2$ ir $\dim V_{\text{triv}} = 1$. Pasirinkę W_{triv} bazę gauname išskaidymą $W_{\text{triv}} = V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{triv}}$.
- $\dim W_{\text{st}} = 6$ ir $\dim V_{\text{st}} = 2$. Sukonstruojame operatorius

$$p_{ab}^{\text{st}} = \frac{2}{6} \sum_{p\in S_3} \big(\rho_{\text{st}}(p^{-1})\big)_{ba}\, \rho_V(p)$$

  Jų pagalba išskaidysime erdvę W_{st} į tiesioginę sumą $V_{\text{st}} \oplus V_{\text{st}} \oplus V_{\text{st}}$.
- Projektoriaus p_{11}^{st} pagalba gauname trimatį W_{st} poerdvį:

$$W_{\text{st},1} = \operatorname{im} p_{11}^{\text{st}} W_{\text{st}}$$

- Pasirenkame $W_{\text{st},1}$ bazę, tarkim w_1, w_2, w_3, ir sukonstruojame šešis vektorius

$$u_a^{(i)} = p_{a1}^{\text{st}} w_i$$

  visiems $i = 1,2,3$ ir $a = 1,2$. Tada

$$\underbrace{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}\}}_{V_{\text{st}}^{(1)}} \cong \underbrace{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}\}}_{V_{\text{st}}^{(2)}} \cong \underbrace{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{u_1^{(3)}, u_2^{(3)}\}}_{V_{\text{st}}^{(3)}} \cong V_{\text{st}}$$

- Gauname norimą W_{st} išskaidymą

$$W_{\text{st}} = V_{\text{st}}^{(1)} \oplus V_{\text{st}}^{(2)} \oplus V_{\text{st}}^{(3)}$$

Pastebėkite, kad $u_1^{(i)} = w_i$, nes $p_{11}^{\text{st}} w_i = w_i$.

2.10 Abelio grupių įvaizdžiai

Prisiminkime, kad grupė G yra Abelio, jei $gh = gh$ visiems $g, h \in G$. Tai reiškia, kad

- visos G elementų klasės yra vienmatės, nes $hgh^{-1} = g$.
- visos funkcijos $f : G \to \mathbb{C}$ yra klasių funkcijos.

Teiginys 2.10.1
Šie teiginiai yra ekvivalentiški:

- G yra Abelio grupė
- Visi neredukuojami G įvaizdžiai yra vienmačiai.

Įrodymas. Tegul $n_G = |G|$ ir tegul $n_1, \ldots, n_h$ būna skirtingų G įvaizdžių dimensijos. Mes žinome, kad h yra G klasių skaičius ir kad

$$n_G = n_1^2 + \ldots + n_h^2$$

Bet $h = n_G$, jei G yra Abelio. Be to, šiuo atveju lygybė pateikta aukščiau turi unikalų sprendinį

$$n_1 = \ldots = n_h = 1$$

□

Išvada 2.10.2
Tegul $A < G$ būna Abelio pogrupis ir tegul $n_A = |A|$, $n_G = |G|$. Tada kiekvieno neredukuojamo G įvaizdžio dimensija yra mažesnė arba lygi n_G/n_A.

Įrodymas. Tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna neredukuojamas įvaizdis ir tegul $\rho|_A : A \to GL(V)$ būna ρ įvaizdžio apribojimas ant Abelio pogrupio A. Tegul $W \subseteq V$ būna neredukuojamas ρ_A įvaizdis ($\dim W = 1$) ir tegul

$$V' = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\rho_g W : g \in G\}$$

Akivaizdu, kad $V' = V$, nes V yra neredukuojamas. Be to,

$$\rho_{ga} = \rho_g \rho_a W = \rho_g W \quad \text{visiems} \quad g \in G,\ a \in A$$

Todėl skirtingų $\rho_g W$ skaičius yra ne didesnis nei n_G/n_A ir $\dim V \le n_G/n_A$, nes V yra skirtingų $\rho_g W$ suma. □

Pavyzdys 2.10.1. Ciklinė grupė $C_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ yra sukimų kampu $2k\pi/n$ aplink koordinačių pradžią grupė. Tai Abelio grupė, todėl visi neredukuojami C_n įvaizdžiai yra vienmačiai

2.11 Grupių sandaugos įvaizdžiai

Prisimikite, kad grupių G_1 ir G_2 sandauga $G_1 \times G_2$ yra sudaryta iš porų (g_1, g_2) kur $g_1 \in G_1$ ir $g_2 \in G_2$. Daugybos taisyklė

$$(g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

apibrėžia grupės struktūrą ant $G_1 \times G_2$. Tegul $G_1, G_2 < G$ būna pogrupiai tokie, kad

- visi $g \in G$ gali būti užrasyti unikaliai kaip sandauga $g = g_1 g_2$, kur $g_1 \in G_1$ ir $g_2 \in G_2$
- $g_1 g_2 = g_2 g_1$ visiems $g_1 \in G_1$ ir $g_2 \in G_2$

Tada $G \cong G_1 \times G_2$. Izomorfizmas tarp grupių yra

$$g = g_1 g_2 \in G \mapsto (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$$

Tegul $\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$ ir $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$ būna G_1 ir G_2 įvaizdžiai. Jie apibrėžia sandaugos $G_1 \times G_2$ tenzorinį įvaizdį $\rho_1 \otimes \rho_2 : G_1 \times G_2 \to GL(V_1 \otimes V_2)$ taisykle

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$$

Įvaizdžio $\rho_1 \otimes \rho_2$ charakteris χ yra apibrėžtas taisykle

$$\chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1) \cdot \chi_2(g_2)$$

Teiginys 2.11.1

A. Tegul $\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$ ir $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$ būna neredukuojami įvaizdžiai. Tada $\rho_1 \otimes \rho_2$ yra neredukuojamas $G_1 \times G_2$ įvaizdis

B. Kiekvienas neredukuojamas $G_1 \times G_2$ įvaizdis yra izomorfiškas neredukuojamų G_1 ir G_2 įvaizdžių tenzorinei sandaugai.

Įrodymas. (A) Tegul $n_1 = |G_1|$ ir $n_2 = |G_2|$. Jei ρ_1 ir ρ_2 yra neredukuojami, tada jų charakterių skaliarinė sandauga lygi vienetui:

$$(\chi_1|\chi_1) = \frac{1}{n_1} \sum_{g_1 \in G_1} |\chi_1(g_1)|^2 = 1, \qquad (\chi_2|\chi_2) = \frac{1}{n_2} \sum_{g_2 \in G_2} |\chi_2(g_2)|^2 = 1$$

Jų tenzorinio įvaizdžio skaliarinė sandauga yra:

$$\begin{aligned}(\chi_1 \otimes \chi_2 | \chi_1 \otimes \chi_2) &= \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2} |\chi_1(g_1)\,\chi_2(g_2)|^2 \\ &= \frac{1}{n_1} \sum_{g_1 \in G_1} |\chi_1(g_1)|^2 \frac{1}{n_2} \sum_{g_2 \in G_2} |\chi_2(g_2)|^2 = 1\end{aligned}$$

Taigi, $\rho_1 \otimes \rho_2$ yra neredukuojamas įvaizdis.

(B) Du neredukuojami įvaizdžiai yra neizomorfiški, kai jų charakteriai yra ortogonalūs. Tad mums užtenka parodyti, kad visos klasės funkcijos $f : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}$ ortogonalios charakteriui $\chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\,\chi_2(g_2)$ yra nulinės funkcijos. Tarkim, kad

$$\sum_{(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2} f(g_1, g_2)\,\chi_1(g_1^{-1})\,\chi_2(g_2^{-1}) = 0$$

Fiksuokime charakterį χ_2 ir pažymėkime

$$\widehat{f}(g_1) = \sum_{g_2 \in G_2} f(g_1, g_2)\,\chi_2(g_2) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{g_1 \in G_1} \widehat{f}(g_1)\,\chi_1(g_1^{-1}) = 0 \quad \text{visiems} \quad \chi_1$$

Analogiškai,

$$\widehat{\widehat{f}}(g_2) = \sum_{g_1 \in G_1} f(g_1, g_2)\,\chi_1(g_1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{g_2 \in G_2} \widehat{\widehat{f}}(g_2)\,\chi_2(g_2^{-1}) = 0 \quad \text{visiems} \quad \chi_2$$

Taip gali būti tada ir tik tada, kai $\widehat{f} = 0$ ir $\widehat{\widehat{f}} = 0$, t.y. kai $f = 0$. $\square$

Pavyzdys 2.11.1. Simetrinės grupės S_3 standartinis įvaizdis $\rho : S_3 \to GL(2)$ apibrėžtas atvaizdavimu

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31) \mapsto \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$(123) \mapsto -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (321) \mapsto -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

yra neredukuojamas:

$$(\chi_\rho|\chi_\rho) = \frac{1}{6}(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2) = 1$$

Tenzorinis įvaizdis $\rho \otimes \rho : S_3 \times S_3 \to GL(4)$ yra apibrėžtas atvaizdavimu

$$(e,e) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (e,(12)) \mapsto -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\ldots, \quad ((321),(321)) \mapsto \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3} & 1 & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & 1 & -\sqrt{3} \\ -3 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

irgi yra neredukuojamas

$$(\chi_{\rho\otimes\rho}|\chi_{\rho\otimes\rho}) = \frac{1}{36}(4^2 + 0^2 + \ldots + 1^2) = 1$$

Pastaba

Kai $G_1 = G_2$, įvaizdis $\rho_1 \otimes \rho_2$ apibrėžtas aukščiau yra neredukuojamas $G \times G$ įvaizdis. Grupė $G \times G$ turi *diagonalų* pogrupį G_D, izomorfišką grupei G, sudarytą iš porų

$$G_D = \{(g,g) \in G \times G : g \in G\} < G \times G$$

Apribotas įvaizdis $\rho_D = \rho_1 \otimes \rho_2|_{G_D}$ yra redukuojamas net jei $\rho_1 \otimes \rho_2$ yra neredukuojamas. Pavyzdžiui, kai ρ yra standartinis S_3 įvaizdis,

$$(\chi_D|\chi_D) = \frac{1}{6}(4^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2) = 3 \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad \rho_D \text{ yra redukuojamas}$$

Užduotis. Pasinaudodami grupės S_3 charakterių lentele

	e	(ij)	(ijk)
χ_{triv}	1	1	1
χ_{alt}	1	-1	1
χ_{st}	2	0	-1
χ_D	4	0	1

išskaidykite įvaizdį $\rho_D = \rho_{\text{st}} \otimes \rho_{\text{st}}|_{G_D}$ į tiesioginę neredukuojamų įvaizdžių sumą.

2.12 Indukuoti įvaizdžiai

Tegul $H = \{h_1, h_2, \ldots\} < G$ ir tegul $p \in G \backslash H$ (t.y. $p \in G$ bet $p \notin H$). Tada:

- aibė $pH = \{ph_1, ph_2, \ldots\}$ yra *kairys H sluoksnis* (left coset),
- aibė $Hp = \{h_1 p, h_2 p, \ldots\}$ yra *dešinys H sluoksnis* (right coset).
- aibė $eH = He = H$ yra *trivialus H sluoksnis*.

Du elementai $g, g' \in G$ vadinami ekvivalentūs pogrupio H atžvilgiu, jei jie priklauso tam pačiam kariniam H sluoksniui:

$$g \equiv g' \pmod{H} \quad \Longleftrightarrow \quad g^{-1} g' \in H$$

Visų kairinių H sluoksnių kartu su H aibė žymima G/H ir vadinama *sluoksnių aibe* (arba *faktor-aibe*):

$$G/H = \{H,\, p_2 H,\, p_3 H,\, \ldots,\, p_k H\}$$

kur $p_2, \ldots, p_k \in G \backslash H$ yra tam tikri skirtingi elementai ir $k = |G|/|H|$ yra pogrupio H indeksas grupėje G, žymimas $k = (G : H)$.

Kairiniai H sluoksniai įšskaido grupę G į nesusikertančius poaibius:

$$G = eH \cup p_2 H \cup p_3 H \cup \cdots \cup p_k H, \qquad H \cap p_i H = \emptyset = p_i H \cap p_j H \quad (i \neq j)$$

Pasirinkdami po elementą iš kiekvieno sluoksnio gauname faktor-aibės G/H *atstovų* aibę R. Kiekvieną $g \in G$ galima užrašyti unikaliai kaip sandaugą $g = rh$, kur $r \in R$ ir $h \in H$.

Pavyzdys 2.12.1. Tegu $G = S_3 = \{e, (12), (23), (31), (123), (321)\}$. Tada:

- $H_1 = \{e,\, (123),\, (321)\} < S_3$ turi vieną sluoksnį:

  $$M = pH_1 = \{(12),\, (23),\, (31)\} \quad \text{kur} \quad p \in \{(12), (13), (23)\}$$

  Indeksas, sluoksnių aibė, grupės išskaidymas ir astovų aibė:

  $$(G : H_1) = 2, \qquad G/H_1 = \{H_1,\, M\}, \qquad G = H_1 \cup M, \qquad R = \{e, (12)\}$$

  Faktorizacija $g = rh$:

  $$(12) = (12)\,e, \quad (23) = (12)(123), \quad (31) = (12)(321), \quad (ijk) = e\,(ijk)$$

- $H_2 = \{e,\, (12)\} < S_3$ turi du sluoksnius:

  $$\begin{aligned} M_1 &= pH_2 = \{(23),\, (321)\} \quad \text{kur} \quad p \in \{(23), (321)\} \\ M_2 &= qH_2 = \{(31),\, (123)\} \quad \text{kur} \quad q \in \{(31), (123)\} \end{aligned}$$

  Indeksas, faktor-aibė, grupės išskaidymas ir astovų aibė:

  $$(G : H_2) = 3, \qquad G/H_2 = \{H_2,\, M_1,\, M_2\}, \qquad G = H_2 \cup M_1 \cup M_2, \quad R = \{e, (23), (31)\}$$

  Faktorizacija $g = rh$:

  $$(12) = e\,(12), \quad (23) = (23)\,e, \quad (31) = (31)\,e, \quad (123) = (31)(12), \quad (321) = (23)(12)$$

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ ir tegul H būna G pogrupis:

- Tegul $W \subseteq V$ būna *H-stabilus* V poerdvis:

$$\rho_h W \subseteq W \quad \text{visiems} \quad h \in H$$

- Tegul $\sigma : H \to GL(W)$ būna pogrupio H įvaizdis erdvėje W (gautas apribojant ρ).
- Kiekvienam $g \in G$ erdvė $\rho_g W$ priklauso tik nuo sluoksnio gH, nes

$$\rho_{gh} W = \rho_g \rho_h W = \rho_g W \quad \text{visiems} \quad h \in H$$

  t.y. yra tiek skirtingu $\rho_g W$, kiek G turi H sluoksnių.
- Tegul $R_{G/H}$ būna faktor-erdvės G/H atstovų aibė. Tada kiekvienam $r \in R$ galime apibrėžti erdvę

$$W_r = \rho_r W$$

- Suma $\sum_{r \in R_{G/H}} W_r$ yra įvaizdžio V povaizdis.

Apibrėžimas 2.12.1
Įvaizdis $\rho : G \to GL(V)$ yra *indukuotas* nuo įvaizdžio $\sigma : H \to GL(W)$, jei V yra lygus tiesioginei sumai

$$V = \bigoplus_{r \in R_{G/H}} W_r$$

Prisiminkite, kad tiesioginė suma

$$V = \bigoplus_{r \in R_{G/H}} W_r$$

reiškia, kad kiekvienas $v \in V$ gali būti užrašytas kaip unikali suma

$$v = \sum_{r \in R_{G/H}} v_r \quad \text{kur} \quad v_r \in W_r$$

Be to,

$$\dim V = \sum_{r \in R_{G/H}} \dim W_r$$

Pastaba

- Indukuotas G įvaizdis V (nuo pogrupio H įvaizdžio W) žymimas taip:

$$V = \mathrm{Ind}_H^G W$$

- Pogrupio H įvaizdis W (gautas apribojant G įvaizdį V) žymimas taip:

$$W = \mathrm{Res}_H^G V$$

Pavyzdys 2.12.2.
- Tegul V būna reguliarusis G įvaizdis. Erdvė V turi bazę $\{e_s\}_{s \in G}$ tokią, kad $\rho_g e_s = e_{gs}$ visiems $g \in G$.
- Tegul $H < G$ ir tegul $W = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_t : t \in H\} \subseteq V$ būna H-stabilus poerdvis.
- Gautas įvaizdis $\sigma : H \to GL(W)$ yra reguliarusis H įvaizdis.
- Tegul $R_{G/H}$ būna faktor-erdvės G/H atstovų aibė. Tada įvaizdis V yra tiesioginė suma

$$V = \bigoplus_{r \in R_{G/H}} W_r = \bigoplus_{r \in R_{G/H}} \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_{rt} : t \in H\}$$

- Kai $G = S_3$, $V = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_e, e_{(12)}, e_{(23)}, e_{(31)}, e_{(123)}, e_{(321)}\}$.
- Tegul $H = \{e, (12)\}$ ir tegul $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_e, e_{(12)}\} \subseteq V$ būna H-stabilus poerdvis.
- W yra reguliarusis H įvaizdis.
- Pasirinkime $R = \{e, (23), (31)\}$. Tada

$$V = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_e, e_{(12)}\} \oplus \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_{(23)}, e_{(321)}\} \oplus \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_{(31)}, e_{(123)}\}$$

Užduotis. Suraskite išskaidymą $V = \bigoplus_{r \in R_{G/H}} W_r$ kai $H = \{e, (123), (321)\}$ ir kai $H = \{e\}$.

Pavyzdys 2.12.3.
- Tegul $H < G$ ir tegul $V = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_M\}_{M \in R/H}$, kur $R/H = \{H, p_2H, \ldots, p_kH\}$.
- Apibrėžkime įvaizdį $\rho : G \to GL(V)$ taisykle

$$\rho_g e_M = e_{gM} \quad \text{visiems} \quad g \in G$$

  Šis ivaizdis vadinamas G *perstatymo* įvaizdžiu susijusiu su G/H.
- Erdvė $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_H\} = \mathbb{C}e_H$ yra H-stabili, nes

$$\rho_h e_H = e_H \quad \text{visiems} \quad h \in H$$

  Gautas įvaizdis $\sigma : H \to GL(W)$ yra trivialus H įvaizdis.
- Įvaizdis V yra tiesioginė suma

$$V = \bigoplus_{M \in R/H} \mathbb{C}e_M = \mathbb{C}e_H \oplus \mathbb{C}e_{p_2H} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_{p_kH}$$

- Kai $G = S_3$ ir $H = \{e, (12)\}$, tada $V = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_H, e_{(23)H}, e_{(31)H}\}$ ir $W = \mathbb{C}e_H$.
- Akivaizdu, kad

$$V = \bigoplus_{M \in R/H} \mathbb{C}e_M = \mathbb{C}e_H \oplus \mathbb{C}e_{(23)H} \oplus \mathbb{C}e_{(31)H}$$

Užduotis. Suraskite išskaidymą $V = \bigoplus_{M \in R/H} \mathbb{C}e_M$ kai $H = \{e, (123), (321)\}$ ir kai $H = \{e\}$.

Pavyzdys 2.12.4.
- Tegul $V = \text{Ind}_H^G W$ ir tegul $W' \subset W$ būna H-stabilus poerdvis. Tada poerdvis

$$V' = \sum_{r \in R_{G/H}} \rho_r W'$$

  yra G-stabilus V poerdvis, t.y. $V' = \text{Ind}_H^G W'$.

- Tegul $V_1 = \text{Ind}_H^G W_1$ ir tegul $V_2 = \text{Ind}_H^G W_2$. Tada

$$V_1 \oplus V_2 = \text{Ind}_H^G (W_1 \oplus W_2)$$

- Tegul $V_1 = \text{Ind}_H^G W_1$ ir tegul $W_2 = \text{Res}_H^G V_2$. Tada

$$V_1 \otimes V_2 = \text{Ind}_H^G (W_1 \otimes W_2)$$

Tegul $\rho : G \to GL(V)$ ir $\rho' : G \to GL(V')$ būna du G įvaizdžiai. Prisiminkite, kad tiesinis atvaizdavimas $f \in \mathscr{L}(V, V')$ vadinamas G-ekvivariantiniu arba G-intertvaineriu, jei

$$f \circ \rho_g v = \rho'_g \circ f v$$

visiems $v \in V$ ir $g \in G$.

Teiginys 2.12.2. Indukavimo universalumas (universality property)

Tegul $H < G$ ir tegul $\rho : G \to GL(V)$ būna indikuotas nuo $\sigma : H \to GL(W)$. Tegul $\rho' : G \to GL(V')$ ir tegul $f \in \mathscr{L}(W, V')$ būna H-ekvivariantinis (intertvaineris). Tada egzistuoja H-ekvivariantinis $j \in \mathscr{L}(W, V)$ toks, kad egzistuoja unikalus G-ekvivariantinis atvaizdavimas $\widehat{f} \in \mathscr{L}(V, V')$ toks, kad

$$\widehat{f} \circ j = f$$

Kitais žodziais, $\widehat{f}$ yra unikalus atvaizdavimas toks, kad ši diagrama komutuoja

$$\begin{tikzcd} H \circlearrowright W \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & V \circlearrowleft G \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ & V' \circlearrowleft G \end{tikzcd}$$

Teiginys 2.12.3

Tegul $H < G$ ir tegul G įvaizdis ρ būna indukuotas nuo H įvaizdžio σ, t.y. $\rho = \mathrm{Ind}_H^G \sigma$. Tada

$$\chi_\rho(g) = \sum_{\substack{r \in R_{G/H} \\ r^{-1} g r \in H}} \chi_\sigma(r^{-1} g r) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1} g s \in H}} \chi_\sigma(s^{-1} g s)$$

visiems $g \in G$. Kitais žodžiais, $\chi_\rho(g)$ yra tiesinė kombinacija verčių $\chi_\sigma(s)$ visiems s esantiems pogrupio H in elemento g jungtinės klasės sankirtoje.

Teiginys 2.12.4. Frobenius savitarpiškumas (Frobenius reciprocity)

Tegul $H < G$ ir tegul G įvaizdis ρ būna indukuotas nuo H įvaizdžio σ, t.y. $\rho = \mathrm{Ind}_H^G \sigma$. Tada

$$(\mathrm{Ind}_H^G \chi_\sigma | \chi_\rho)_G = (\chi_\sigma | \mathrm{Res}_H^G \chi_\rho)_H$$

Plačiau skaitykite J. P. Serre knygos skyrelyje 3.3.

2.13 Algebros

Apibrėžimas 2.13.1. Algebra virš skaičių (algebra over a field)

Algebra A virš skaičių $k = \mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$ yra vektorinė erdvė A virš skaičių k kartu su papildoma binarine operacija $A \times A \to A$, vadinama daugyba ir žymima tašku $\cdot$, tenkinančia šias savybes:

- dešiniojo distributyvumo: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- kairiojo distributyvumo: $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$
- suderinamumo su skaičiais: $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$

visiems $x, y, z \in A$ ir $a, b \in k$. Tokia binarinė operacija yra vadinama *bitiesine*.

Apibrėžimas 2.13.2. Algebrų rūšys

Algebra A vadinama:

- *komutatyvia*, jei $x \cdot y = y \cdot x$ visiems $x, y \in A$.
- *asociatyvia*, jei $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ visiems $x, y, z \in A$. Asociatyvi daugyba įprastai rašoma be skliaustelių, $x \cdot y \cdot z$.
- *su vienetu* (arba unitalia), jei egzistuoja elementas $1 \in A$ toks, kad $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ visiems $x \in A$. Toks elementas vadinamas *vienetiniu*.
- *Lie*, jei $x \cdot y = -y \cdot x$ ir $x \cdot (y \cdot z) + y \cdot (z \cdot x) + z \cdot (x \cdot y) = 0$ visiems $x, y, z \in A$.

Pastaba

Fizikoje svarbų vaidmenį vaidina Lie algebros. Jos yra neasociatyvios, nekomutatyvios ir neturi vienetinio elemento. Lie algebros daugybos operacija įprastai žymima *Lie skliaustais* $x \cdot y = [x, y]$.

Pavyzdys 2.13.1. Asociatyvių algebrų su vienetu pavyzdžiai.

- Kompleksiniai skaičiai $\mathbb{C}$ sudaro *komutatyvią* algebrą virš realių skaičių $\mathbb{R}$:
  - $\mathbb{C}$ yra dvimatė vektorinė erdvė virš realių skaičių: $\mathbb{C} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{1, \boldsymbol{i}\}$.
  - Kompleksinių skaičių daugyba yra asociatyvi ir komutatyvi:
  $$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3, \qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$
  - Vienetinis elementas: $1 = 1 + \boldsymbol{i}\,0$.
- Visos $n \times n$ matricos $\mathrm{Mat}_{n\times n}(k)$, kur $k = \mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$, sudaro *nekomutatyvią* algebrą virš k:
  - $\mathrm{Mat}_{n\times n}(k)$ yra n^2-matė vektorinė ervė virš skaičių k: $\mathrm{Mat}_{n\times n}(k) = \operatorname{span}_k\{E_{ij} : 1 \le i, j \le n\}$.
  - Matricų daugyba yra asociatyvi, bet nekomutatyvi:
  $$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C, \quad A \cdot B \neq B \cdot A \text{ (bendru atveju)}$$
  - Vienetinis elementas: $I = E_{11} + \ldots + E_{nn}$.

Pavyzdys 2.13.2. Visi vieno kintamojo x polinomai

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

kur $a_0, \ldots, a_n \in k$ ($k = \mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$) ir $n \in \mathbb{N}_0$ sudaro begalinę vektorinę erdvę.

- Ši erdvė kartu su įprastine polinomų daugyba
$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \quad \Longrightarrow \quad p_n(x) \cdot p_m(x) = \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} x^i$$
sudaro asociatyvią komutatyvią algebrą su vienetu, vadinamą *polinomų žiedu* ir žymimą $k[x]$.
- Ši erdvė kartu su modifikuota daugybos taisykle
$$p_n(x) * p_m(x) = (p_n(x) \cdot p_m(x))'$$
yra neasociatyvi algebra, nes
$$\begin{aligned}(p_n * p_m) * p_\ell - p_n * (p_m * p_\ell) &= ((p_n \cdot p_m)' \cdot p_\ell)' - (p_n \cdot (p_m \cdot p_\ell)')' \\ &= p_n'' p_m p_\ell + p_n' p_m' p_\ell - p_n p_m' p_\ell' - p_n p_m p_\ell'' \neq 0\end{aligned}$$

Apibrėžimas 2.13.3. Grupės algebra

Tegul G būna baigtinė grupė ir tegul $k = \mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$. *Grupės algebra* kG (arba $k[G]$) yra vektorinė erdvė, kurios elementai yra vektoriai

$$v = \sum_{g \in G} a_g g \quad (a_g \in k)$$

o vektorių daugyba yra apibrėžta taisykle

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h h\right) = \sum_{s \in G} c_s s$$

kur $c_s = \sum_{g,h \in G,\, gh=s} a_g b_h$.

Pavyzdys 2.13.3. Grupės algebra $\mathbb{C}C_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e, a\}$ yra sudaryta iš vektorių

$$v = c_e e + c_a a \quad (c_e, c_a \in \mathbb{C})$$

Dviejų vektorių daugyba yra

$$\begin{aligned}(c_e e + c_a a) \cdot (d_e e + d_a a) &= c_e d_e e * e + c_e d_a e * a + c_a d_e a * e + c_a d_a a * a \\ &= (c_e d_e + c_a d_a)\, e + (c_e d_a + c_a d_e)\, a\end{aligned}$$

Pavyzdžiui

$$(2e + 3a) \cdot (4e - 5a) = (8 - 15)\, e + (-10 + 12)\, a = -7e + 2a$$

Pavyzdys 2.13.4. Grupės algebra $\mathbb{C}D_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e, x, y, r\}$ yra sudaryta iš vektorių

$$v = a_e e + a_x x + a_y y + a_r r \quad (a_e, a_x, a_y, a_z \in \mathbb{C})$$

Užduotis. Sudauginkite šiuos vektorius:

- $v = e + 4y$ ir $w = x + 2r$
- $v = x + 2y$ ir $w = x + y - r$
- $v = x + \boldsymbol{i} y$ ir $w = x - \boldsymbol{i} y$

Apibrėžimas 2.13.4. Poalgebris (subalgebra)

Tegul A būna asociatyvi algebra virš skaičių $k = \mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$. Jos poaibis $B \subset A$ vadinamas *poalgebriu*, jei B yra uždaras algebros elementų (vektorių) sumos, daugybos, ir daugybos iš skaičių atžvilgiu:

- $v + w \in B$ visiems $v, w \in B$
- $a\, v \in B$ visiems $v \in B$ ir $a \in k$
- $v \cdot w \in B$ visiems $v, w \in B$

Kitais žodžiais, jei B irgi yra algebra virš skaičių k.

Pavyzdys 2.13.5.

- Diagonalios matricos sudaro matricų algebros $\operatorname{Mat}_{n \times n}(k)$ poalgebrį.
- Grupės algebra $\mathbb{C}C_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e, a\}$ turi tik trivialius poalgebrius:

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e\} \cong \mathbb{C} \quad \text{ir} \quad \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e, a\} = \mathbb{C}C_2$$

- Grupės algebra $\mathbb{C}C_4 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e, a, a^2, a^3\}$ turi vieną netrivialų poalgebrį

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e, a^2\} \cong \mathbb{C}C_2$$

Apibrėžimas 2.13.5. Grupės algebros įvaizdis (reprezentacija)
Tegul V būna vektorinė erdvė virš skaičių $k=\mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$ ir tegul $\mathscr{L}(V)$ būna tiesinių atvaizdavimų $V\to V$ erdvė. Tegul G būna baigtinė grupė. Grupės algebros kG tiesinis *įvaizdis* erdvėje V yra atvaizdavimas

$$\rho : kG \to \mathscr{L}(V),\ \ v\mapsto \rho(v)$$

toks, kad

$$\rho(v+w)=\rho(v)+\rho(w), \qquad \rho(av)=a\rho(v), \qquad \rho(v\cdot w)=\rho(v)\rho(w)$$

visiems $v,w\in kG$ ir $a\in k$. Kitais žodžiais, ρ yra homomorfiškas atvaizdavimas.

Teiginys 2.13.6

- Kiekvienas grupės G tiesinis įvaizdis ρ yra ir grupės algebros kG įvaizdis.
- Kiekvienas grupės algebros kG tiesinis įvaizdis ρ yra ir grupės G įvaizdis.

Šis teiginys yra motyvuotas tuo, kad grupės elementai $\{g\}_{g\in G}$ sudaro kG bazę, o įvaizdžiai ρ yra tiesiniai. Svarbu tai, kad baigtinių grupių įvaizdžių teorija natūraliai apibendrinama baigtinių grupių algebroms.

2.14 Simetrinė grupė

Prisiminkite, kad simetrinė grupė S_n yra sveikų skaičių nuo 1 iki n perstatymų grupė. Jos eilė yra $|S_n|=n!$. Perstatymai žymimi taip:

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}, \qquad p=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ p_1 & p_2 & \dots & p_n\end{pmatrix}, \qquad p^{-1}=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & \dots & p_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

kur $p_i\neq p_j$ jei $i\neq j$. Perstatymus patogu užrašyti per *r-ciklus*, pavyzdžiui

$$p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}=(134)(25)(6)$$

kur (134) yra 3-ciklas, (25) yra 2-ciklas, ir (6) - 1-ciklas.

Taip pat prisiminkite, kad:

- Kiekvienas perstatymas turi unikalią ciklų struktūrą.
- Vienintelis perstatymas sudarytas tik iš 1-ciklų yra vienetinis elementas, $e=(1)(2)\cdots(n)$
- Ciklai skaitomi iš kairės į dešinę, pvz. (123) atvaizduoja 1→2, 2→3 ir 3→1.
- Ciklai dauginami iš dešinės į kairę, pvz. $(23)(12)=\{1\to 2\to 3,\ 2\to 1\to 1,\ 3\to 3\to 2\}=(321)$.

Grupė S_n yra generuota *elementariais perstatymais*

$$\sigma_1=(12), \quad \sigma_2=(23), \quad \dots, \quad \sigma_{n-1}=(n-1,n)$$

tenkinančiais

$$(\sigma_i)^2=\mathrm{id}, \qquad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \qquad \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i \quad (|i-j|>1)$$

Bet kurį perstatymą $(ij)\in S_n$, kur $i<j$, galime užrašyti kaip sandaugą

$$(ij)=\sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j-2}\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i$$

Mes norime surasti visus neredukuojamus S_n įvaizdžius. Mes jau žinome šiuos neredukuojamus S_n įvaizdžius:

- Trivialų vienmatį įvaizdį:
$$\rho_{\text{triv}} : p \mapsto 1$$
- Alternuojantį (ženklo) vienmatį įvaizdį:
$$\rho_{\text{alt}} : p \mapsto (-1)^p$$
kur $(-1)^p = 1$, jei p yra sudarytas iš lyginio elementarių perstatymų skaičiaus, ir $(-1)^p = -1$, jei p yra sudarytas iš nelyginio perstatymų skaičius. Pavyzdžiui:
$$(-1)^{(12)} = -1, \quad (-1)^{(123)} = 1, \quad (-1)^{(1234)} = -1$$
nes $(123) = (13)(12)$ ir $(1234) = (14)(13)(12)$. Skaičius $(-1)^p$ vadinamas p *lyginumu*.

Ankstesniuose skyreliuose mes įrodėme, kad

- Neredukuojamų neizomorfiškų grupės G įvaizdžių skaičius lygus G klasių skaičiui.
- Kiekvienas neredukuojamas G įvaizdis V_i pasirodo reguliarajame įvaizdyje lygiai n_i kartų.

Mums reikia surasti S_n klases ir sukonstruoti projekcinius operatorius. Prisiminkite, kad grupės G elementai g ir g' vadinami *jungtiniais*, $g \sim g'$, jeigu egzistuoja $h \in G$ toks, kad $g' = hgh^{-1}$. Be to:

- visi sujungtiniai elementai sudaro grupės klasę,
- kiekvienas elementas priklauso tik vienai klasei,
- grupė, kaip aibė, lygi jos klasių sąjungai.

Pavyzdys 2.14.1. Grupė S_3 turi šias klases:

- $\zeta_1 = \{(1)(2)(3)\}$
- $\zeta_2 = \{(12)(3), (13)(2), (23)(1)\}$
- $\zeta_3 = \{(123), (321)\}$

Kaip aibė, $S_3 = \zeta_1 \cup \zeta_2 \cup \zeta_3$.

Šis pavyzdys sufleruoja, kad $p \sim p'$, jei jų ciklų ilgiai tokie patys:

- ζ_1 elementas turi ilgių $1, 1, 1$ ciklus,
- ζ_2 elementai turi ilgių $2, 1$ ciklus,
- ζ_3 elementai turi ilgio 3 ciklą.

> **Teiginys 2.14.1**
> Perstatymai p ir p' yra jungtiniai grupėje S_n tada ir tik tada, kai jie turi tokio pat ilgio ciklus.

Įrodymas. ($\Leftarrow$) Tegul $p, q \in S_n$. Tada
$$qpq^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ q_{p_1} & q_{p_2} & \dots & q_{p_n} \end{pmatrix}$$
Ciklų žymėjime tai reiškia, kad
$$p = \cdots(\cdots i p_i \cdots)\cdots \quad \Longrightarrow \quad qpq^{-1} = \cdots(\cdots q_i q_{p_i} \cdots)\cdots$$

Taigi, transformacija $p \to qpq^{-1}$ išsaugo ciklų ilgius ir jei $p \sim p'$, tada jų ciklų ilgiai sutampa.
Pavyzdžiui, jei $p = (12)(345)$ ir $q = (23)$. Tada

$$(23)(12)(345)(23)^{-1} = (23)(12)(23)^{-1}(23)(345)(23)^{-1} = (13)(245)$$

($\Rightarrow$) Tegul $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{N}$ būna perstatymų p ir p' ciklų ilgiai. Tada

$$p = (i_1 \cdots i_{\lambda_1}) \cdots (j_1 \cdots j_{\lambda_r}) \quad \text{ir} \quad p' = (k_1 \cdots k_{\lambda_1}) \cdots (l_1 \cdots l_{\lambda_r})$$

Tegul

$$q = \begin{pmatrix} i_1 p_{i_1} & \cdots & j_{\lambda_r} p_{j_{\lambda_r}} \\ k_1 p'_{k_1} & \cdots & l_{\lambda_r} p'_{l_{\lambda_r}} \end{pmatrix}$$

Prisiminę formulę

$$p = \cdots(\cdots i p_i \cdots)\cdots \quad \Longrightarrow \quad qpq^{-1} = \cdots(\cdots q_i q_{p_i} \cdots)\cdots$$

gauname

$$p' = qpq^{-1}$$

Taigi, jei p ir p' turi tokio pat ilgio ciklus, tada $p \sim p'$.
Pavyzdžiui, jei $p = (12)(345)$ ir $p' = (13)(245)$. Tada

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (23)$$

□

Pavyzdys 2.14.2. Grupė S_4 turi šias klases:

- $\zeta_{1,1,1,1} = \{(1)(2)(3)(4)\}$
- $\zeta_{2,1,1} = \{(12)(3)(4), (13)(2)(4), (14)(2)(3), (23)(1)(4), (24)(1)(3), (34)(1)(2)\}$
- $\zeta_{3,1} = \{(123)(4), (124)(3), (134)(2), (234)(1), (321)(4), (421)(3), (431)(2), (432)(1)\}$
- $\zeta_{2,2} = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
- $\zeta_4 = \{(1234), (1324), (1423), (1243), (1342), (1432)\}$

Pastebėkite, kad klases patogu sunumeruoti, pagal jos elementų ciklų struktūrą.

Grupės S_n neredukuojamų įvaizdžių skaičių nusako jos klasių skaičius, o šį skaičių nusako grupės elementų ciklų ilgiai $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Pastaroji sąvoka tokia svarbi, kad verta apibrėžimo.
Pradžiai pastebėkite, kad:

- kiekvienas $\lambda_i \in \{1 \dots n\}$ ir $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$, nes būtent tiek skaičių perstato p.
- ciklų tvarka nesvarbi, nes jie nesusikerta, tad galime laikyti, jog $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$.

Apibrėžimas 2.14.2. Skaidinys (partition)

Skaičiaus $n \in \mathbb{N}$ *skaidinys* yra sveikų skaičių sąrašas $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ toks, kad

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 1 \quad \text{ir} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = n$$

Skaičiaus n skaidinį λ žymėsime $\lambda \vdash n$. Visų n skaidinių aibę žymėsime $P(n)$.

Pavyzdys 2.14.3. Skaidinių pavyzdžiai:

$$n = 3: \ (3), \ (2,1), \ (1,1,1)$$
$$n = 4: \ (4), \ (3,1), \ (2,2), \ (2,1,1), \ (1,1,1,1)$$

Taigi, grupė S_3 turi tris skirtingus neredukuojamus įvaizdžius, o S_4 – penkis.

Pastaba. Kai $r < n$, sakoma, kad $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, pvz. $(3) \equiv (3,0,0)$, $(2,1) \equiv (2,1,0)$.

Išvada 2.14.3. Perstatymo grupės neredukuojamų įvaizdžių klasifikacija

Perstatymų grupės S_n neredukuojami įvaizdžiai klasifikuojami skaidiniais $\lambda \vdash n$.

Pastaba

Skaičiaus n skaidinių skaičius žymimas $p(n)$. Galima suskaičiuoti, kad

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	100	...	1000
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	...	190569292	...	$\approx 2.4 \times 10^{31}$

Analitinė $p(n)$ išraiška nėra žinoma. Bet žinoma, kad

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \quad \text{kai} \quad n \to \infty$$

Šią formulę 1918 atrado britų matematikas Godfrey Harold Hardy ir indų matematikas Srinivasa Ramanujan. 2015 metais apie Srinivasa Ramanujan buvo sukurtas biografinias filmas “The Man Who Knew Infinity”. Rekomenduoju peržiūrėti

Taip pat žinoma, kad

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} \quad (x < 1)$$

Ši suma vadinama *generuojančia funkcija*. Tokio tipo sumos pasirodo statistinėje mechanikoje ir kvantinėse laukų teorijose.

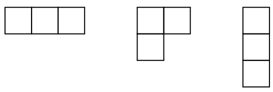
2.15 Jungo diagramos

Skaidinius $\lambda \vdash n$ patogu atvaizduoti grafiškai Jungo diagramomis.

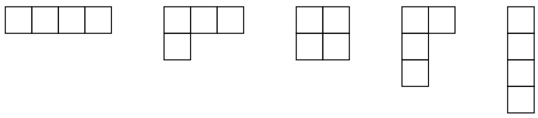
Apibrėžimas 2.15.1. Jungo (Young) diagrama

Skaidinio $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ *Jungo diagrama* yra diagrama sudaryta iš r eilučių, kurių kiekviena užpildyta λ_i *langelių* (kvadratų) sulygiuotų iš kairės pusės. Lastelės *adresas* yra jos eilutės ir stulpelio numeris.

Pavyzdys 2.15.1. Skaičius $n = 3$ turi tris skaidinius: (3), (2,1) ir (1,1,1). Juos atitinkančios Jungo diagramos yra:



Skaičius $n = 4$ turi penkis skaidinius: (4), (3,1), (2,2), (2,1,1) ir (1,1,1,1). Juos atitinkančios Jungo diagramos yra:



Apibrėžimas 2.15.2. Jungto tablo (Young tableaux)

Jungo tablo Λ yra skaidinio $\lambda \vdash n$ Jungo diagrama užpildyta skaičiais nuo 1 iki n be pasikartojimų. Jungo tablo Λ vadinama *standartine*, jei skaičiai joje didėja iš kairės į dešinę ir iš viršaus į apačią.

Pavyzdys 2.15.2. Tegul $\lambda = (3,2) \vdash 5$.

- Nestandartinių λ formos Jungo tablo Λ pavyzdžiai:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 5&4\\\cline{1-2}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&2\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&4&3\\\hline 2&1\\\cline{1-2}\end{array}$$

- Visos standartinės λ formos Jungo tablo Λ:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$$

Pastaba

Standartinių λ formos Jungo tablo Λ skaičius nusako neredukuojamo S_n įvaizdžio $\lambda \vdash n$ dimensiją.

Jungo tablo skaičius vaidina svarbią reikšmę skaičių ir algoritmų teorijoje (kaip skirtingų pasirinkimų skaičius), kvantinių laukų teorijoje (pvz, Seiberg–Witten teorijoje ↗), ir t.t.

Yra žimoni keli skirtingi metodai suskaičiuoti *standartines Jungo tablo* ↗. Mes naudosime Frame–Robinson–Thrall (1953) formulę.

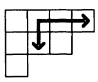
Teiginys 2.15.3

Standartinių formos $\lambda \vdash n$ Jungo tablo Λ skaičius yra

$$\frac{n!}{\prod_{i,j} h_\lambda(i,j)}$$

kur $h_\lambda(i,j)$ yra (i,j)-tosios lastelės kampo ilgis (hook length).

Pavyzdys 2.15.3. $\lambda = (4,3,1)$ formos Jungo diagramos kampų ilgiai (įrašyti į kampines lasteles) yra



$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6&4&3&1\\\hline 4&2&1\\\cline{1-3} 1\\\cline{1-1}\end{array}$$

Šios formos standartinių Jungo tablo Λ skaičius yra

$$\frac{8!}{6\cdot4\cdot3\cdot4\cdot2} = 70$$

Užduotis. Patikrinkite formulę

$$\frac{n!}{\prod_{i,j} h_\lambda(i,j)}$$

visoms standartinėms Jungo diagramoms, kai $n = 2,3,4$.

Kiekviena Jungo tablo Λ leidžia apibrėžti ją atitinkančius S_n eilučių ir stulpelių pogrupius.

Apibrėžimas 2.15.4. Eilučių ir stulpelių pogrupiai (row and column subgroups)

Tegul Λ būna Jungo tablo.

A. Ją atitinkantis *eilučių pogrupis* $R_\Lambda < S_n$ yra sudarytas iš visų skaičių $1, \dots, n$ perstatymų, išsaugančių kiekvieną Λ eilutę kaip aibę,

$$R_\Lambda = \{p \in S_n : p \text{ išsaugo } \Lambda \text{ eilutes}\}$$

B. Ją atitinkantis *stulpelių pogrupis* $C_\Lambda < S_n$ yra sudarytas iš visų skaičių $1, \dots, n$ perstatymų, išsaugančių kiekvieną Λ stulpelį kaip aibę,

$$C_\Lambda = \{p \in S_n : p \text{ išsaugo } \Lambda \text{ stulpelius}\}$$

Pavyzdys 2.15.4. Tegul

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Tada

$$R_\Lambda = \{\text{skaičių } 1,2,3 \text{ perstatymai}\} \times \{\text{skaičių } 4,5 \text{ perstatymai}\}$$
$$C_\Lambda = \{\text{skaičių } 1,4 \text{ perstatymai}\} \times \{\text{skaičių } 2,5 \text{ perstatymai}\} \times \{\text{skaičiaus } 3 \text{ perstatymai}\}$$

Apibrėžimas 2.15.5. Jungo simetrizatoriai (Young symmetrisers)

Tegul Λ būna $\lambda \vdash n$ formos Jungo tablo. Simetrinės grupės algebroje $\mathbb{C}S_n$ apibrėžkime tris operatorius:

$$P_\Lambda = \sum_{p \in R_\Lambda} p, \qquad Q_\Lambda = \sum_{p \in C_\Lambda} (-1)^p p, \qquad Y_\Lambda = P_\Lambda Q_\Lambda$$

Šie operatoriai atitinkamai vadinami *eilučių*, *stulpelių* ir *Jungo simetrizatoriais*.

Pavyzdys 2.15.5. Tegul $\lambda \vdash 3$. Tada

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array} : \quad P_\Lambda = e + (12) + (23) + (31) + (123) + (321), \quad Q_\Lambda = e, \quad Y_\Lambda = P_\Lambda$$

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} : \quad P_\Lambda = e + (12), \quad Q_\Lambda = e - (13), \quad Y_\Lambda = e + (12) - (13) - (321)$$

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} : \quad P_\Lambda = e + (13), \quad Q_\Lambda = e - (12), \quad Y_\Lambda = e + (13) - (12) - (123)$$

$$\Lambda = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} : \quad P_\Lambda = e, \quad Q_\Lambda = e - (12) - (23) - (31) + (123) + (321), \quad Y_\Lambda = Q_\Lambda$$

Pavyzdys 2.15.6. Tegul

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Tada

$$R_\Lambda = \{e, (12), (23), (13), (123), (321), (45)\}, \quad C_\Lambda = \{e, (14), (25)\}$$

ir

$$P_\Lambda = \sum_{p \in R_\Lambda} p = e + (12) + (23) + (13) + (123) + (321) + (45)$$

$$Q_\Lambda = \sum_{p \in C_\Lambda} (-1)^p p = e - (14) - (25)$$

ir

$$\begin{aligned} Y_\Lambda = P_\Lambda Q_\Lambda = e &+ (12) + (23) + (13) + (123) + (321) + (45) \\ &- (14) - (142) - (23)(14) - (143) - (1423) - (4321) - (154) \\ &- (25) - (125) - (253) - (13)(25) - (1253) - (3251) - (245) \end{aligned}$$

Kitame skyrelyje sužinosime, kaip Jungo simetrizatorių pagalba sukonstruoti neredukuojamus S_n įvaizdžius:

- Reguliarusis S_n įvaizdis V_R yra tiesioginė visų neredukuojamų ivaizdžių V_λ suma, o kiekvienas neredukuojamas įvaizdis V_λ pasirodo tiek kartų, kokia yra jo dimensija $m_\lambda = \dim V_\lambda$

$$V_\mathrm{R} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda^{\oplus m_\lambda} = \bigoplus_\Lambda V_\Lambda$$

- Reguliarusis įvaizdis V_R yra tapatus grupės algebrai $\mathbb{C}S_n$, t.y. $V_\mathrm{R} \overset{\text{v.s.}}{\cong} \mathbb{C}S_n$
- Jungo simetrizatoriai yra Y_Λ yra "dešininiai projektoriai"

$$Y_\Lambda \, : \, V_\mathrm{R} \to V_\Lambda, \;\; v \mapsto vY_\Lambda$$

2.16 Neredukuojami S_n įvaizdžiai

Pabandykime interpretuoti eilučių ir stulpelių simetrizatorius

$$P_\Lambda = \sum_{p \in R_\Lambda} p, \qquad Q_\Lambda = \sum_{q \in C_\Lambda} (-1)^q q$$

Tegul V būna vektorinė erdvė. Prisiminkite žymėjimus

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^2 V &= \mathrm{span}_\mathbb{C}\{v \otimes w + w \otimes v : v, w \in V\} \\ \wedge^2 V &= \mathrm{span}_\mathbb{C}\{v \otimes w - w \otimes v : v, w \in V\} \end{aligned}$$

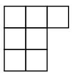
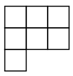
Tegul grupė S_n veikia ant erdvės $V^{\otimes n}$ jos tenzorinių faktorių sukeitimu

$$(ij) \, : \, V \otimes \cdots \otimes \underset{i}{V} \otimes \cdots \otimes \underset{j}{V} \otimes \cdots \otimes V \mapsto V \otimes \cdots \otimes \underset{j}{V} \otimes \cdots \otimes \underset{i}{V} \otimes \cdots \otimes V$$

Tada

$$\operatorname{im} P_\Lambda \cong \mathrm{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_2} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_\ell} V \qquad \operatorname{im} Q_\Lambda \cong \wedge^{\mu_1} V \otimes \wedge^{\mu_2} V \otimes \cdots \otimes \wedge^{\mu_m} V$$

kur $\mathrm{Sym}^{\lambda_i} V$ ir $\wedge^{\mu_j} V$ yra natūralūs $\mathrm{Sym}^2 V$ ir $\wedge^2 V$ apibendrinimai, ir $\mu = \lambda^T$ yra transponuotas skirstinys. Pavyzdžiui, jei

$\lambda = (3, 2, 2) =$  tada $\lambda^T = (3, 3, 1) =$ 

Tegul $\lambda = (n)$. Tada $\mu = \lambda^T = (1, \ldots, 1) = (1^n)$ ir

$$\operatorname{im} P_\Lambda = \mathrm{Sym}^n V \qquad \operatorname{im} Q_M = \wedge^n V$$

Vektoriai $v \in \mathrm{Sym}^n V$ vadinami *visiškai simetriniais tenzoriais*. Standartinėje V bazėje:

$$v = \sum_{i_1, \ldots, i_n} v_{i_1 \ldots i_n} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \in \mathrm{Sym}^n V \quad \Longrightarrow \quad v_{i_1 \ldots i_n} = v_{i_{p(1)} \ldots i_{p(n)}} \;\; \forall p \in S_n$$

Vektoriai $v \in \wedge^n V$ vadinami *visiškai antisimetriniais tenzoriais*. Standartinėje V bazėje:

$$v = \sum_{i_1,\dots,i_n} v_{i_1\dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \in \wedge^n V \quad \Longrightarrow \quad v_{i_1\dots i_n} = (-1)^p v_{i_{p(1)}\dots i_{p(n)}} \quad \forall p \in S_n$$

Pavyzdžiui, kai $n = 2$, $V = \mathbb{C}^2$ ir

$$v = v_{11}\, e_1 \otimes e_1 + v_{12}\, e_1 \otimes e_2 + v_{21}\, e_2 \otimes e_1 + v_{22}\, e_2 \otimes e_2 \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

Tada

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^2 \quad &\Longrightarrow \quad v_{12} = v_{21} \\ v \in \wedge^2\mathbb{C}^2 \quad &\Longrightarrow \quad v_{11} = v_{22} = 0, \;\; v_{12} = -v_{21} \end{aligned}$$

> **Pastaba**
> Skaičių rinkiniai $v_{i_1\dots i_n}$ $(i_k = 1\dots n)$ tenkinantys $v_{i_1\dots i_n} = (-1)^p v_{i_{p(1)}\dots i_{p(n)}}$ $\forall p \in S_n$ vadinami Levi-Civita simboliu. Įprastai pasirenkama, kad $v_{1\dots n} = 1$.

> **Teorema 2.16.1**
> Apibrėžkime reguliarųjį S_n įvaizdį ρ erdvėje $\mathbb{C}S_n$ veikimo iš kairės taisykle
>
> $$\rho(p)\left(\sum_{q\in S_n} c_q q\right) = \sum_{q \in S_n} c_q pq \quad \text{visiems} \quad p \in S_n,\; c_q \in \mathbb{C}$$
>
> Tegul $V_\Lambda \subseteq \mathbb{C}S_n$ būna poerdvis gautas simetrizatoriaus Y_Λ veikimu iš dešinės:
>
> $$V_\Lambda = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{pY_\Lambda : p \in S_n\}$$
>
> Tada:
>
> A. Apribojimas $\rho|_{V_\Lambda}$ yra neredukuojamas S_n įvaizdis.
>
> B. Įvaizdžiai V_Λ ir $V_{\Lambda'}$ yra izomorfiški tada ir tik tada, kai Λ ir Λ' yra tokios pačios formos λ.

Šios teoremos įrodymas ilgas ir techniškas. Todėl mes ją panagrinėsime per pavyzdžius.

Pavyzdys 2.16.1.

- V_Λ, kai $\Lambda = \boxed{1}\boxed{\dots}\boxed{n}$, yra vienmatis trivialus S_n įvaizdis:

$$P_\Lambda = \sum_{p\in S_n} p, \qquad Q_\Lambda = e, \qquad Y_\Lambda = P_\Lambda Q_\Lambda = P_\Lambda$$

$$V_\Lambda = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{pY_\Lambda : p \in S_n\} = \mathbb{C}P_\Lambda$$

$$\rho(q)P_\Lambda = q\sum_{p\in S_n} p = \sum_{p\in S_n} qp = P_\Lambda \quad \Longrightarrow \quad \rho(q) = 1 \quad \forall q \in S_n$$

- V_Λ, kai $\Lambda = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array}$, yra vienmatis ženklo S_n įvaizdis:

$$P_\Lambda = e, \qquad Q_\Lambda = \sum_{p\in S_n} (-1)^p p, \qquad Y_\Lambda = P_\Lambda Q_\Lambda = Q_\Lambda$$

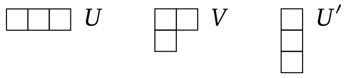
$$V_\Lambda = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{pY_\Lambda : p \in S_n\} = \mathbb{C}Q_\Lambda$$

$$\rho(q)Q_\Lambda = q\sum_{p\in S_n}(-1)^p p = (-1)^q \sum_{p\in S_n}(-1)^{p+q} qp = (-1)^q Q_\Lambda \quad \Longrightarrow \quad \rho(q) = (-1)^q \quad \forall q \in S_n$$

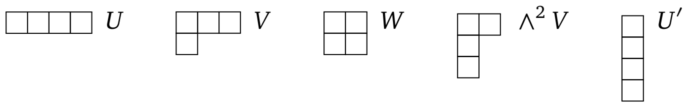
Pavyzdys 2.16.2. Ankstesnėse paskaitose mes nagrinėjome S_n įvaizdžius mažiems n. Dabar galime juos užrašyti Jungo diagramomis:

S_2:

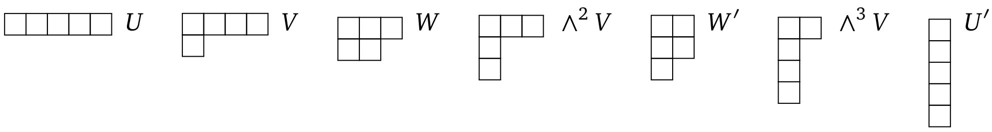
S_3:



S_4:



S_5:



kur U – trivialus, U' – ženklo, V – standartinis, o W, W' – kiti įvaizdžiai.

Užduotis. Suraskite šių įvaizdžių dimensijas ir pasikartojimus reguliariajame įvaizdyje.

Užduotis. Patikrinkite Teoremos 2.16.1 teiginius grupėms S_2 ir S_3.

2.17 Frobenius charakterio formulė

Vokiečių matematikas Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) sukūrė baigtinių grupių įvaizdžių charakterių teoriją ir išvedė formulę skirtą skaičiuoti S_n neredukuojamų įvaizdžių charakterius.

Prisminkite, kad įvaizdžio charakteris yra klasės funkciją:

$$\chi_\Lambda(p) = \chi_\Lambda(q) \quad \text{jei} \quad p \sim q$$

Pavyzdžiui, jei $p = (12)(345)$ ir $q = (54)(321)$.

Tegul $\mu \vdash n$ ir tegul ζ_μ žymi S_n klasę sudarytą iš elementų su ciklų struktūra μ. Pavyzdžiui, jei $\mu = (4,2,1) \vdash 7$, tada

$$p = (4567)(23)(1) \in \zeta_{(4,2,1)}$$

Teiginys 2.17.1. Frobenius charakterio formulė

Tegul $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ ir $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ būna n skaidiniai. Tada grupės S_n klasės ζ_μ charakteris įvaizdyje ρ_λ yra

$$\chi_\lambda(\zeta_\mu) = \left[\prod_{1\le i<j\le \ell} (x_i - x_j) \prod_{1\le i\le m} (x_1^{\mu_i} + \ldots + x_\ell^{\mu_i}) \right]_{(\lambda_1+\ell-1,\, \lambda_2+\ell-2, \ldots, \lambda_\ell)}$$

kur $[\cdots]_{\ldots}$ žymi koeficientą prie monomo $x_1^{\lambda_1+\ell-1} x_2^{\lambda_2+\ell-2} \cdots x_\ell^{\lambda_\ell}$.

Pavyzdys 2.17.1.

- Tegul $\lambda = (2,2)$ ir $\mu = (1,1,1,1)$. Tada $\ell = 2$, $m = 4$, $x_1^{\lambda_1+\ell-1} x_2^{\lambda_2+\ell-2} = x_1^3 x_2^2$ ir

$$\chi_{(2,2)}(\zeta_{(1,1,1,1)}) = \Big[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^4 \Big]_{(3,2)} = \Big[\ldots + 2\,x_1^3 x_2^2 + \ldots \Big]_{(3,2)} = 2$$

- Tegul $\lambda = (3,2)$ ir $\mu = (3,2)$. Tada $\ell = 2$, $m = 2$, $x_1^{\lambda_1+\ell-1} x_2^{\lambda_2+\ell-2} = x_1^4 x_2^2$ ir

$$\chi_{(3,2)}(\zeta_{(3,2)}) = \Big[(x_1 - x_2)(x_1^3 + x_2^3)(x_1^2 + x_2^2) \Big]_{(4,2)} = \Big[\ldots + x_1^4 x_2^2 + \ldots \Big]_{(4,2)} = 1$$

Užduotis. Suskaičiuokite grupių S_2 ir S_3 neredukuojamų įvaizdžių charakterius pasinaudodami Frobenius formule.

Prisminkite, kad tenzorinė dviejų neredukuojamų ivaizdžių sandauga, bendru atveju, yra redukuojama. Baigtinei grupei G, ji suskyla į tiesioginę neredukuojamų įvaizdžių sumą:

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{k=1}^{h} V_k^{\oplus m_k}$$

kur h yra grupės G klasių skaičius, o m_k – įvaizdžio V_k pasikartojimo skaičius.

Tegul V_λ ir V_μ būna neredukuojami simetrinės grupes S_n įvaizdžiai. Tada:

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_{\nu \vdash n} V_\nu^{\oplus g_{\lambda\mu\nu}}$$

kur $g_{\lambda\mu\nu}$ yra Kronecker koeficientai

$$g_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{n!} \sum_{p\in S_n} \chi_\lambda(p) \cdot \chi_\mu(p) \cdot \chi_\nu(p)$$

Pavyzdys 2.17.2.

$$V_{(1,1)} \otimes V_{(1,1)} = V_{(2)}, \qquad V_{(2,1)} \otimes V_{(2,1)} = V_{(3)} \oplus V_{(2,1)} \oplus V_{(1,1,1)}$$
$$V_{(3,1)} \otimes V_{(3,1)} = V_{(4)} \oplus V_{(3,1)} \oplus V_{(2,1,1)} \oplus V_{(2,2)}$$

Neredukuojamų įvaizdžių tenzorinės sandaugos $V_\lambda \otimes V_\mu \otimes \ldots$ ir Kronekerio keoficinetai vaidina svarbią reikšmę mechanikoje, molėkulių teorijoje, atomo ir branduolio fizikoje. Formulė

$$g_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{n!} \sum_{p\in S_n} \chi_\lambda(p) \cdot \chi_\mu(p) \cdot \chi_\nu(p)$$

atrodo paprasta, tačiau reikalauja ilgų skaičiavimų. Kombinatorinės $g_{\lambda\mu\nu}$ išraiškos paieška yra viena iš neišspręstų didžiųjų įvaizdžių teorijos problemų. Ji buvo postuluota 1938 m. airių matematiko Francis Dominic Murnaghan sprendžiant problemas susijusias su tolydžiųjų aplinkų mechanika.

2.18 Jucio-Merfio elementai

Algimantas Adolfas Jucys (1936–1998) buvo fizikas, vieno iš žymiausio Lietuvos fizikų, Adolfo Jucio (1904–1974), sūnus. Algimantas Jucys nagrinėjo atomo ir branduolio sluoksninių modelių teoriją. Jis geriausiai žinomas už Jucio-Merfio elementų atradimą (Jucys 1966, Murphy 1985).

Apibrėžimas 2.18.1. Jucio-Merfio (Jucys-Murphy) elements

Jucio-Merfio elementai yra šie simetrinės grupės algebros $\mathbb{C}S_n$ nariai:

$$x_1 = 0, \quad x_k = (1k) + (2k) + \ldots + (k-1\,k) \quad \text{visiems} \quad k = 2, \ldots, n$$

Dabar "Jucio-Merfio elementas" yra bendrinis terminas apibūdinti diagramatinių algebrų elementus pasižyminčiais tokiomis pat savybėmis, kaip ir originalūs Jucio-Merfio elementai.

Teiginys 2.18.2. Jucio-Merfio elementų savybės

A. Jucio-Merfio elementai sudaro komutuojantį algebros $\mathbb{C}S_n$ poalgebrį,

$$x_j x_k = x_k x_j \quad \text{visiems} \quad 1 \le j < k \le n$$

B. Grupės algebros $\mathbb{C}S_n$ centras $Z(\mathbb{C}S_n)$ yra generuotas simetriniais polinomais sudarytais iš Jucio-Merfio elementų $x_1, \ldots, x_n$.

C. Tegul t būna kitamasis. Tada

$$(t + x_1)(t + x_2) \cdots (t + x_n) = \sum_{p \in S_n} p\, t^{c(p)}$$

kur $c(p)$ yra elemento p ciklų skaičius.

Pavyzdys 2.18.1. Jucio-Merfio elementai grupės algebroje $\mathbb{C}S_3$ yra

$$x_1 = 0, \quad x_2 = (12), \quad x_3 = (13) + (23)$$

Užduotis. Patikrinkite Jucio teiginius.

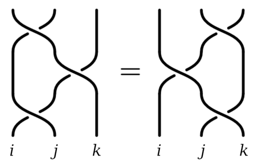
Pastaba

Moderni simetrinės grupės įvaizdžių teorija paremta Jucio-Merfio elementais buvo sukurta 1996 m. Anatolii Vershik ir Andrei Okounkov

Naują projekcinių operatorių sintezės metodą 2006 m. sugalvojo Alexander Molev Šis metodas remiasi "Baxterizuotais" operatoriais $\sigma_{ij}(u) = u - (ij) \in \mathbb{C}S_n$. Jie yra Yang-Baxter lygties sprendiniai

$$\sigma_{ij}(u)\,\sigma_{jk}(u+v)\,\sigma_{ij}(v) = \sigma_{jk}(v)\,\sigma_{ij}(u+v)\,\sigma_{jk}(u)$$

kur u ir v yra kompleksiniai kintamieji.



Fizikoje, operatoriai $\sigma_{ij}(u)$ aprašo tam tikrą dvidalelę sklaidą, o kitamasis u yra dalelių judesio kiekio momentų skirtumas.

Šis paskaitų konspektas paruoštas pagal:

- W.-K. Tung, Group Theory in Physics, World Scientific 1985 (Chapters 1–5)
- J. P. Serre, Linear Representations of Finite Groups, Springer 1977 (Part I)
- W. Fulton, J. Harris, Representation Theory, A First Course, Springer 1996 (Chapters 1–4)

Papildoma literatūra:

- M. Guidry and Y. Sun, Symmetry, Broken Symmetry, and Topology in Modern Physics, Cambridge 2022
- B. Steinberg, Representation Theory of Finite Groups, An Introductory Approach, Springer 2012
- P. Ramond, Group Theory, A Physicist's Survey, Cambridge 2010
- H. F. Jones, Groups, Representations and Physics, Second Edition, Taylor & Francis 1998
- T. Inui, Y. Tanabe, Y. Onodera, Group Theory and Its Applications in Physics, Springer-Verlag 1990
- J. P. Elliot, P. G. Dawber, Symmetry in Physics, vols 1 & 2, Macmillan Press 1979
- M. Hamermesh, Group Theory and its Applications to Physical Problems, Dover Publications, 1989