Łukasz Stępień

15.06.2023r.

Laboratorium 11

Optymalizacja

1. Temat zadania:

- Wyznacz punkty krytyczne każdej z poniższych funkcji. Scharakteryzuj każdy znaleziony punkt jako minimum, maksimum lub punkt siodłowy. Dla każdej funkcji zbadaj, czy posiada minimum globalne lub maksimum globalne na zbiorze R^2.

$$f_1(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$$

$$f_2(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$$

$$f_3(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1)$$

$$f_4(x,y) = (x - y)^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1$$

- Napisz program znajdujący minimum funkcji Rosenbrocka:

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2,$$

implementując następujące metody optymalizacji:

  - metodę największego spadku,
  - metodę Newtona.

Przetestuj obie metody z następującymi punktami startowymi:

$$x_0 = [-1,1]^T,$$

$$x_0 = [0,1]^T,$$

$$x_0 = [2,1]^T.$$

Każdą metodę wykonaj przez 10 iteracji i porównaj wyniki z wynikami otrzymanymi dla pozostałych punktów startowych. Czy metody zachowują się zgodnie z oczekiwaniami?

2. Implementacja:

Zadanie 2.

Program składa się z implementacji następujących funkcji:

- *f(x)* – funkcja Rosenbrocka:

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

- *gradient(x)* – gradient funkcji Rosenbrocka:

$$\nabla f(x) = [-400x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1), 200(x_2 - x_1^2)]$$

- *hessian(x)* – macierz Hessego funkcji Rosenbrocka:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix}$$

- *newton_method_alpha(x)* – optymalizacja parametru α w metodzie największego spadku:

$$\alpha_k = argmin\, f\,(x_k - \alpha\nabla f(x_k)),$$

  czyli minimalizacja funkcji g:

$$g(\alpha) = f\,(x_k - \alpha\nabla f(x_k)),$$

  za pomocą metody Newtona:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{g'(\alpha_i)}{g''(\alpha_i)}$$

- *steepest_descent(x0, N)* – metoda największego spadku dla punktu początkowego x0 i N iteracji:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha\nabla f(x_k)$$

- *newton_method(x0, N)* - metoda Newtona dla punktu początkowego x0 i N iteracji:

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1}\nabla f(x_k)$$

- *show(func, N, s)* – wizualizacja wyników.

3. Wyniki:

Zadanie 1.

- $f_1(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$

  WK: $\nabla f(x) = [0,0]$

  $\nabla f(x) = [2x - 4y, -2x + y]$

  $$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ punkty\ stacjonarne: \{(0,0)\}$$

  WW: $\boldsymbol{W}(\nabla^2 f(x)) > 0$

  $$\boldsymbol{W}(\nabla^2 f(x)) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

  $(x, y) = (0,0) \Rightarrow W(\nabla^2 f(x)) < 0 \Rightarrow (0,0)\ to\ punkt\ siodłowy$

  Funkcja nie posiada ekstremów globalnych.

- $f_2(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$

  WK: $\nabla f(x) = [0,0]$

  $\nabla f(x) = [4x^3\text{-}4y, -4x + 4y^3]$

  $$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ -4x + 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ punkty\ stacjonarne: \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}$$

  WW: $\boldsymbol{W}(\nabla^2 f(x)) > 0$

  $$\boldsymbol{W}(\nabla^2 f(x)) = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = (12xy)^2 - 16 \ \wedge \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \end{cases}$$

  $(x, y) = (0,0) \Rightarrow W(\nabla^2 f(x)) < 0 \Rightarrow (0,0)\ to\ punkt\ siodłowy$

  $(x, y) = (1,1) \Rightarrow W(\nabla^2 f(x)) > 0 \Rightarrow (1,1)\ to\ ekstremum\ lokalne$

  $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow (1,1)\ to\ minimum\ lokalne, f(1,1) = -2$$

  $(x, y) = (-1,-1) \Rightarrow W(\nabla^2 f(x)) > 0 \Rightarrow (-1,-1)\ to\ ekstremum\ lokalne$

  $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial y^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow (1,1)\ to\ minimum\ lokalne, f(-1,-1) = -2$$

  Funkcja posiada minimum globalne w punktach (1,1) oraz (-1,-1)

- $f_3(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1)$

  WK: $\nabla f(x) = [0,0]$
  $\nabla f(x) = [6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y, -6x^2 + 12xy + 6x]$

  $\begin{cases} 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0 \\ -6x^2 + 12xy + 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow punkty\ stacjonarne: \{(0,0),(1,0),(-1,-1),(0,-1)\}$

  WW: $W(\nabla^2 f(x)) > 0$

  $\boldsymbol{W}(\nabla^2 f(x)) = \begin{vmatrix} 12x - 6 - 12y & -12y + 12y + 6 \\ -12y + 12y + 6 & 12x \end{vmatrix} = 36\,(-1 + 2\,x - 2\,y)\,(1 + 2\,y)$

  $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 6 - 12y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x \end{cases}$

  $(x,y) = (0,0) \Rightarrow W(\nabla^2 f(x)) < 0 \Rightarrow (0,0)\ to\ punkt\ siodłowy$

  $(x,y) = (1,0) \Rightarrow W(\nabla^2 f(x)) > 0 \Rightarrow (0,0)\ to\ ekstremum\ lokalne$

  $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f(1,0)}{\partial y^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow (1,0)\ to\ minimum\ lokalne, f(1,0) = -1$

  $(x,y) = (-1,-1) \Rightarrow W(\nabla^2 f(x)) > 0 \Rightarrow (-1,-1)\ to\ ekstremum\ lokalne$

  $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x^2} < 0 \\ \dfrac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial y^2} < 0 \end{cases} \Rightarrow (-1,-1)\ to\ maksimum\ lokalne, f(-1,-1) = 1$

  $(x,y) = (0,-1) \Rightarrow W(\nabla^2 f(x)) < 0 \Rightarrow (0,-1)\ to\ punkt\ siodłowy$

  $f(2,2) = 28 > f(1,0) \wedge f(-2,-2) = -4 < f(1,0) \Rightarrow brak\ ekstremów\ globalnych$

- $f_4(x,y) = (x - y)^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1$
  WK: $\nabla f(x) = [0,0]$
  $\nabla f(x) = [-2 + 2\,x + 4\,(x - y)^3, 2 - 4\,(x - y)^3 - 2\,y]$
  $\begin{cases} -2 + 2\,x + 4\,(x - y)^3 = 0 \\ 2 - 4\,(x - y)^3 - 2\,y = 0 \end{cases} \Rightarrow punkty\ stacjonarne: \{(1,1)\}$

  WW: $W(\nabla^2 f(x)) > 0$

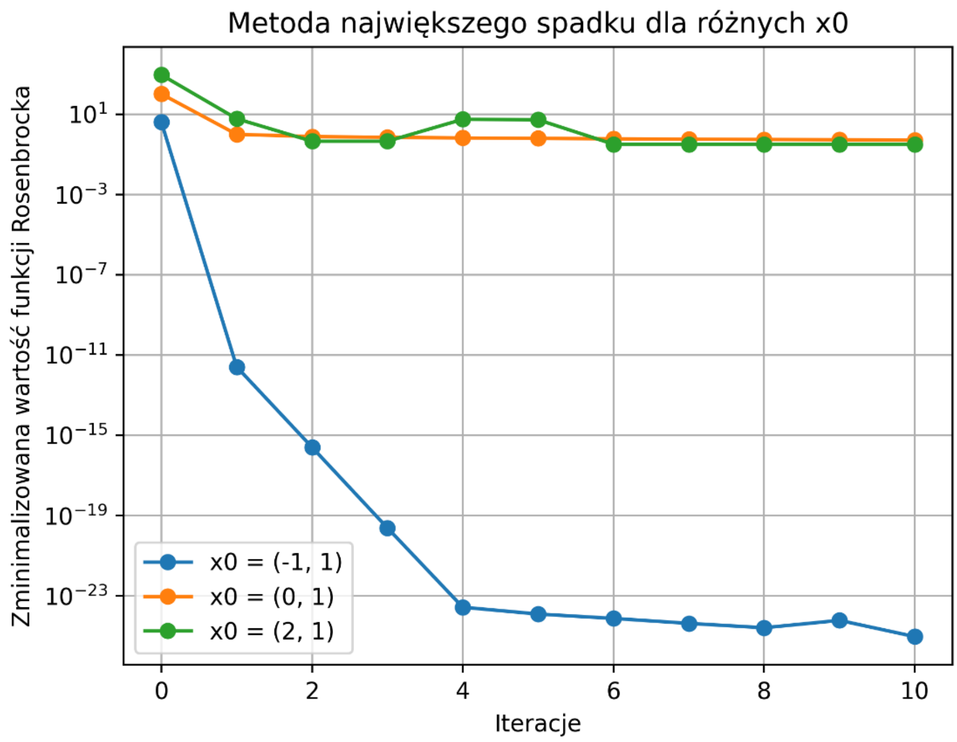
  $W(\nabla^2 f(x)) = \begin{vmatrix} 12\,(x - y)^2 + 2 & -12\,(x - y)^2 \\ -12\,(x - y)^2 & 12\,(x - y)^2 - 2 \end{vmatrix} = -4$

  $(x,y) = (1,1) \Rightarrow W(\nabla^2 f(x)) < 0 \Rightarrow (0,0)\ to\ punkt\ siodłowy$

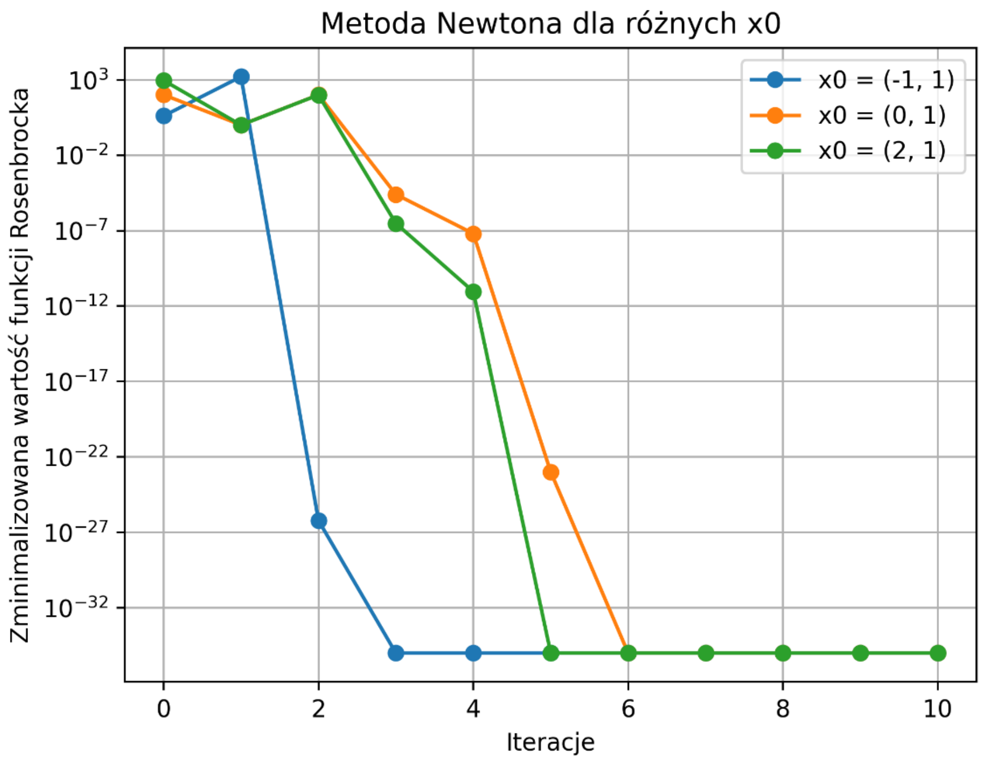
  Funkcja nie posiada ekstremów globalnych.

Zadanie 2.

- Wykres dla metody największego spadku:



- Wykres dla metody Newtona (wartości 10^{-35} są zaimplementowane jako 0):



4. Wnioski:

- Wyznaczono poprawnie punkty krytyczne zadanych funkcji oraz scharakteryzowano je. Każda została zbadana pod względem ekstremów globalnych.

- Poprawnie zaimplementowano obie metody wyznaczające minimum funkcji Rosenbrocka. Wyniki dla każdej z 10 iteracji zostały przedstawione na wykresach.

- Dla metody największego spadku widać odstające wyniki dla x_0=(-1,1) w porównaniu z innymi punktami początkowymi. Dla tego punktu metoda ta znajduję wynik rzędu 10^{-25}, gdzie dla dwóch pozostałych rząd wynosi około 10^{-2}. Potwierdza to oczekiwania co do tej metody odnośnie spadku rzędu zbieżności przy niezbyt fortunnym wyborze punktu startowego x_0. Potwierdza się również liniowa zbieżność, która widoczna jest szczególnie dla punktu x_0=(-1,1) w przedziale iteracji od 1 do 4.

- Dla metody Newtona wyniki są zadawalające dla każdego punktu startowego. We wszystkich przypadkach osiągnęły one dokładny wynik. Zauważalna jest również zbieżność kwadratowa, szczególnie dla x_0=(0,1) oraz x_0=(2,1), dzięki zbliżonemu do paraboli kształtu wykresu.

5. Bibliografia:

- https://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz_Hessego
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_najszybszego_spadku
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Newtona_(optymalizacja)