

Łukasz Stępień

27.04.2023r.

Laboratorium 8

# Rozwiązywanie równań nieliniowych

## 1. Temat zadania:

Dane jest równanie:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad (1)$$

Każda z następujących funkcji definiuje równoważny schemat iteracyjny:

$$g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2) \quad (2)$$

$$g_2(x) = \sqrt{3x - 2} \quad (3)$$

$$g_3(x) = 3 - \frac{2}{x} \quad (4)$$

$$g_4(x) = \frac{x^2 - 2}{2x - 3} \quad (5)$$

Przeanalizuj zbieżność oraz rząd zbieżności schematów iteracyjnych odpowiadających funkcjom  $g_i(x)$  dla pierwiastka  $x=2$  badając wartość  $|g'_i(2)|$ . Potwierdź analizę teoretyczną implementując powyższe schematy iteracyjne i weryfikując ich zbieżność (lub brak). Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy błędu względnego każdej metody w zależności od numeru iteracji. Stwórz drugi rysunek, przedstawiający wykresy błędu względnego tylko dla metod zbieżnych.

Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \quad (6)$$

$$e^{-x} = x \quad (7)$$

$$x \sin(x) = 1 \quad (8)$$

Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Oblicz błąd względny otrzymanego rozwiązania.

## 2. Implementacja:

Kod przeprowadza analizę zbieżności czterech różnych funkcji iteracyjnych  $g$  dla zadanej wartości początkowej  $x_0$ . Definiuje również funkcje  $\text{eps}_k(t, k, x_0)$  i  $r(t, k, x_0)$ , które służą do obliczenia błędu względnego w każdej iteracji i wyznaczenia eksperymentalnego rzędu zbieżności, odpowiednio. Funkcja  $\text{err}(x)$  jest używana do obliczenia błędu względnego w każdej iteracji. Następnie iteruje każdą z funkcji iteracyjnych  $g$  i oblicza błąd względny w każdej iteracji dla każdej funkcji  $g$ . Następnie oblicza eksperymentalny rząd zbieżności dla każdej funkcji iteracyjnej  $g$ . Wyniki są wyświetlane na ekranie, a także przedstawiane na wykresach błędów względnych w każdej iteracji dla każdej funkcji  $g$  oraz tylko dla zbieżnych funkcji  $g$ . Ostatecznie generuje wykresy błędów względnych w każdej iteracji dla każdej funkcji  $g$  oraz dla zbieżnych funkcji  $g$ . Wykresy są zapisywane w plikach obrazów o nazwie "Błąd względny w każdej iteracji dla wszystkich funkcji  $g$ " i "Błąd względny w każdej iteracji dla zbieżnych funkcji  $g$ ".

Kod implementuje również metodę Newtona do znalezienia przybliżonej wartości pierwiastka równania dla trzech funkcji:  $f_1$ ,  $f_2$  i  $f_3$ . Funkcja "der" oblicza pochodną funkcji "f" w punkcie "x" z dokładnością  $h = 1e-8$ , wykorzystując definicję pochodnej. Funkcja "iterate\_newton" wykonuje iteracje metody Newtona, zaczynając od punktu początkowego "x1" i funkcji "f". Liczba iteracji jest zapisywana w "cnt", a wynik przybliżony jest zwracany jako "x1". Obliczenia są kontynuowane, dopóki różnica między "x0" a "x1" nie osiągnie tolerancji "tol" lub dopóki nowa wartość "x1" jest równa poprzedniej wartości "x0" z dokładnością do epsilon maszynowego. W kodzie wywołujemy funkcję "iterate\_newton" trzy razy dla każdej funkcji, aby uzyskać przybliżone wartości pierwiastków z dokładnościami 4, 24 i 53 bitów. Wyniki są następnie wypisywane na ekran oraz zostają wyświetlane wykresy.

Kod implementuje również metodę Newtona dla układu równań. Definiowana jest funkcja  $f(x)$  zwracającą wartości lewej strony układu równań, oraz funkcję  $\text{jacobian}(x)$  zwracającą macierz Jacobiego dla układu równań. Następnie definiujemy funkcję  $\text{newton\_method}(f, \text{jacobian}, x_0, \text{tol})$  wykonującą samą metodę Newtona, która na wejściu przyjmuje funkcję  $f$ , funkcję  $\text{jacobian}$ , punkt początkowy  $x_0$  oraz tolerancję  $\text{tol}$ . W ciele funkcji wykonujemy iteracje, aż osiągniemy zadany poziom dokładności. Na końcu kodu tworzymy punkt początkowy  $x_0$ , tolerancję  $\text{tol}$  i wywołujemy funkcję  $\text{newton\_method}()$ . Wyniki wypisywane na ekran.

### 3. Wyniki:

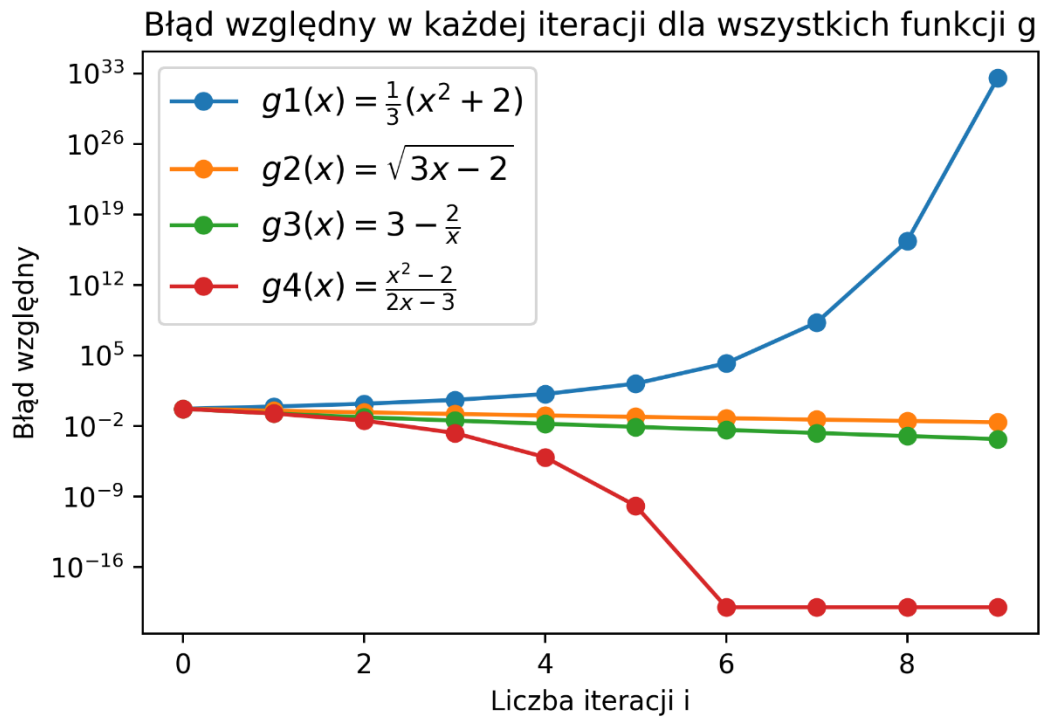
- Analiza teoretyczna schematów iteracyjnych:

Funkcja $g_i(x)$	Funkcja $g'_i(x)$	Wartość teoretyczna $ g'_i(2) $	Zbieżność
$g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)$	$g'_1(x) = \frac{2}{3}x$	$ g'_1(2)  = 1, (3) > 1$	nie
$g_2(x) = \sqrt{3x - 2}$	$g'_2(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}}$	$ g'_2(2)  = 0,75 < 1$	tak
$g_3(x) = 3 - \frac{2}{x}$	$g'_3(x) = \frac{2}{x^2}$	$ g'_3(2)  = 0,5 < 1$	tak
$g_4(x) = \frac{x^2 - 2}{2x - 3}$	$g'_4(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{(2x - 3)^2}$	$ g'_4(2)  = 0 < 1$	tak

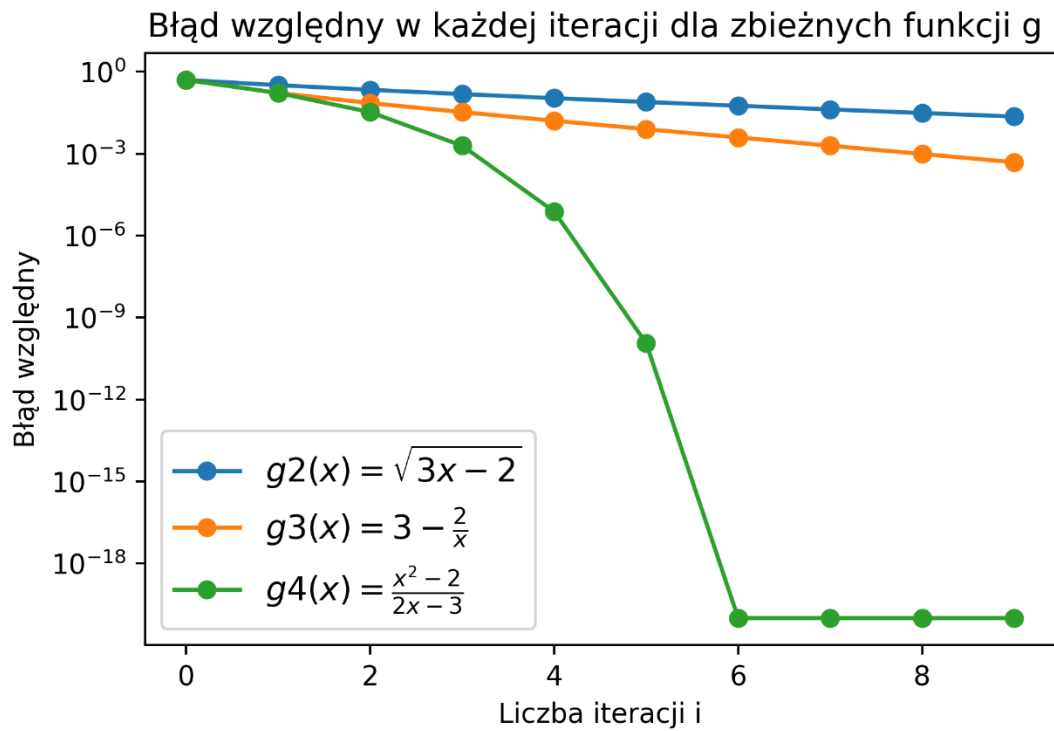
- Analiza eksperymentalna schematów iteracyjnych ( $x_0=3$ ):

Funkcja $g_i(x)$	Wartość eksperymentalnego rzędu zbieżności	Zbieżność	Zgodność wartości	Zgodność zbieżności
$g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)$	$2 > 1$	nie	znacznie różniące się	tak
$g_2(x) = \sqrt{3x - 2}$	$0.7157 < 1$	tak	bardzo zbliżone	tak
$g_3(x) = 3 - \frac{2}{x}$	$0.4978 < 1$	tak	bardzo zbliżone	tak
$g_4(x) = \frac{x^2 - 2}{2x - 3}$	$0 < 1$	tak	identyczne	tak

- Wykres: błąd względny w każdej iteracji dla wszystkich funkcji  $g$  ( $x_0=3$ )



- Wykres: błąd względny w każdej iteracji dla zbieżnych funkcji  $g$  ( $x_0=3$ )



- Wyniki dla metody Newtona dla równań nieliniowych (dla  $n=28$  i  $n=53$  ilość iteracji dla  $x_0$  równego wynikowi dla  $n=4$ ):

Funkcja	$x_0$	Przybliżenie z dokładnością do $n$ bitów					
		$n=4$		$n=28$		$n=53$	
		Wynik	It.	Wynik	It.	Wynik	It.
$f_1(x) = x^3 - 2x - 5$	1	2.09455	7	2.0945514815423265	2	2.0945514815423265	3
$f_2(x) = e^{-x} - x$	5	0.56653	3	0.5671432904097838	3	0.5671432904097838	4
$f_3(x) = x \sin(x) - 1$	3	2.77294	2	2.7726047082659933	2	2.7726047082659910	4

- Wyniki dla metody Newtona dla równań nieliniowych (dla tolerancji  $\epsilon=1e-16$ ):

Układ równań	Zmienna $x_1$		Zmienna $x_2$	
$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$	Wynik:	0.7861	Wynik:	0.6180
	Błąd względny:	0	Błąd względny:	1.7963785889362146e-16

#### 4. Wnioski:

Program poprawnie wykonuje wszystkie zagadnienia zamieszczone w temacie zadania, prezentuje wyniki w postaci napisów na ekranie oraz wykresach. Analiza teoretyczna schematów iteracyjnych pokrywa się z wynikami eksperymentalnymi. Poprawnie wskazana została zbieżność oraz rząd zbieżności dla schematów zbieżnych. Z wykresów można wywnioskować, że najlepiej działa schemat iteracyjny (5). Pokazuje to, że trzeba ostrożnie dobierać dany schemat, bo mocno koreluje on z optymalnością.

Wyniki dla metody Newtona dla równań nieliniowych zostały zamieszczone w tabelach. Można zauważyć, że zwiększenie dokładności z  $n=28$  bitów do  $n=53$  wymaga tylko 1 lub 2 iteracji. Świadczy to o bardzo dobrej jakości tej metody.

Program poprawnie potrafi rozwiązać układ równań nieliniowych. Błędy względne są minimalne.

#### 5. Bibliografia:

- [https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda\\_Newtona](https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Newtona)
- [https://pl.wikipedia.org/wiki/Epsilon\\_maszynowy](https://pl.wikipedia.org/wiki/Epsilon_maszynowy)
- Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 7. Równania nieliniowe (non-linear equations) Marian Bubak, Katarzyna Rycerz