Łukasz Stępień

13.04.2023r.

Laboratorium 6

Kwadratury

1. Temat zadania:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} \;=\; \pi$$

Powyższą równość wykorzystać do obliczenia przybliżonej wartości π poprzez całkowanie numeryczne korzystając ze złożonych kwadratur prostokątów, trapezów, Simpsona oraz Gaussa-Legendre'a.

2. Implementacja:

Program wykorzystuje biblioteki numpy, matplotlib i scipy do obliczeń matematycznych i wizualizacji wyników.

Pierwsza część programu definiuje funkcję do całkowania oraz przedział całkowania. Następnie wyznacza błędy bezwzględne względne dla trzech różnych metod numerycznego całkowania: metody prostokątów, metody trapezów i metody Simpsona. Dla każdej z tych metod program oblicza błędy dla różnej liczby węzłów i zapisuje je w odpowiednich listach.

Następnie program wyznacza empiryczne rzędy zbieżności dla każdej z metod na podstawie błędów obliczonych w poprzedniej części. Wyniki te są wyświetlane na ekranie.

W drugiej części programu definiowana jest przekształcona funkcja z granicami całkowania na [-1,1], a następnie program wykorzystuje metodę Gaussa-Legendre'a do obliczenia błędu bezwzględnego względem wartości π dla różnej liczby węzłów. Wyniki te są zapisywane w liście błędów.

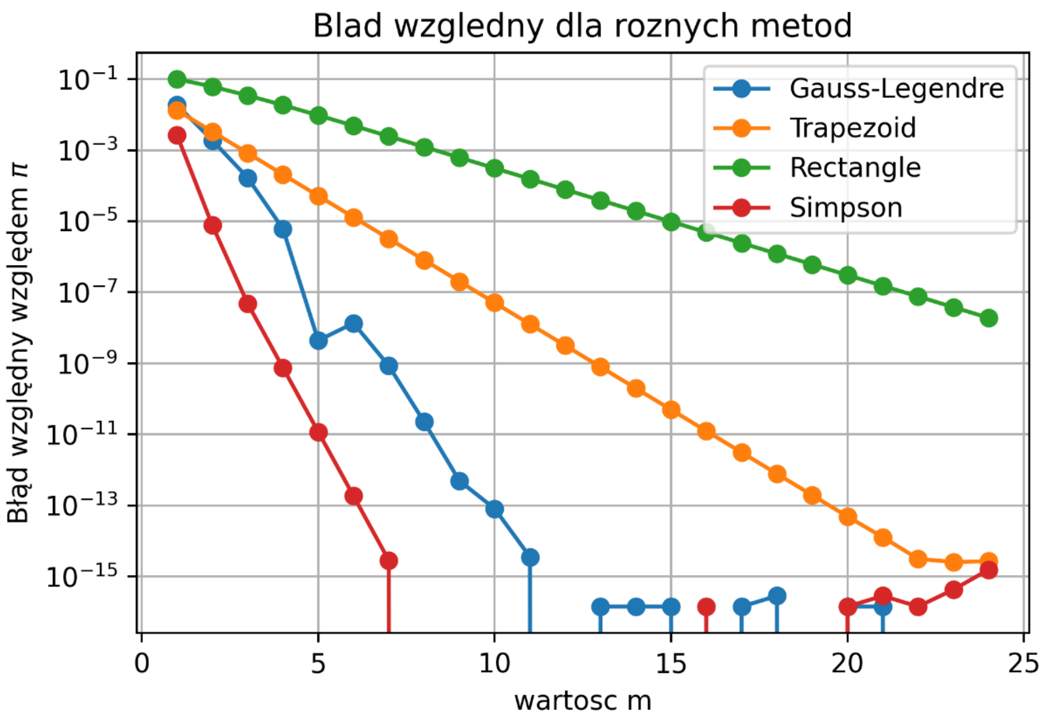
Przekształcenie:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} \;=\; \begin{vmatrix} \mathrm{t} = 2\mathrm{x}\text{-}1 \\ \mathrm{dt} = 2\mathrm{dx} \\ \mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{t}+1}{2} \end{vmatrix} = \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+\left(\dfrac{\mathrm{t}+1}{2}\right)^2}\,\mathrm{dt}$$

Ostatecznie program rysuje wykres błędów względnych dla każdej z metod oraz dla metody Gaussa-Legendre'a w zależności od liczby węzłów, wykorzystując bibliotekę matplotlib. Wykres ten pozwala na porównanie skuteczności poszczególnych metod numerycznego całkowania.

3. Wyniki:

- Wykres przedstawia błąd względny dla różnych metod kwadraturowych.



- Minimalne wartości skoku h:

<table>
<tr><th>Metoda</th><th>Wartość h_{min}</th><th>Wartość h_{min} z lab1</th></tr>
<tr><td>Prostokąty</td><td>x</td><td rowspan="3">1e-07</td></tr>
<tr><td>Trapezy</td><td>2.38e-07</td></tr>
<tr><td>Simpson</td><td>0.015</td></tr>
</table>

- Porównanie rzędów zbieżności:

<table>
<tr><th>Metoda</th><th colspan="2">Parametry</th><th>Rząd empiryczny</th><th>Rząd teoretyczny</th></tr>
<tr><td>Prostokąty</td><td>m1=5</td><td>m2=20</td><td>1.0012</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Trapezy</td><td>m1=5</td><td>m2=20</td><td>2.0008</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Simpson</td><td>m1=1</td><td>m2=6</td><td>7.0611</td><td>4</td></tr>
</table>

4. Wnioski:

Na podstawie wykresów wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od m dla różnych metod kwadratur, możemy stwierdzić, że metoda Simpsona jest zdecydowanie dokładniejsza niż metody prostokątów i trapezów. Wraz ze wzrostem m, błąd kwadratury maleje dla każdej z metod, ale maleje najszybciej dla metody Simpsona. W przypadku metody prostokątów, błąd jest bardzo duży, a jego wartość maleje bardzo powoli wraz z zwiększaniem liczby węzłów.

Istnieje pewna wartość h_{min}, poniżej której zmniejszanie kroku h nie zmniejsza już błędu kwadratury. W przypadku badanej całki, wartość h_{min} dla metody trapezów wynosi około 2.38e-07, co zgadza się pod względem rzędu z wynikiem uzyskanym w laboratorium 1.

Rząd zbieżności dla każdej z metod został obliczony empirycznie na podstawie wartości błędu w zależności od kroku h. Wyniki wskazują, że rzeczywisty rząd zbieżności jest zgodny z teoretycznym dla metody prostokątów i trapezów, zaś dla metody Simpsona znacząco się różni.

Wyniki uzyskane dla metody Gaussa-Legendre'a zostały porównane z wynikami uzyskanymi dla metody Simpsona w zadaniu 1. Jednakże, wraz ze wzrostem liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody Gaussa-Legendre'a dla n>11.

5. Bibliografia:

- https://pl.wikipedia.org/wiki/Kwadratury_Gaussa
- Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 6 - Kwadratury - całkowanie numeryczne Marian Bubak, Katarzyna Rycerz