Łukasz Stępień gr. IV

Algorytmy geometryczne

sprawozdanie z ćw. 2

1. Cel ćwiczenia:

Ćwiczenie algorytmów wyznaczającą otoczkę wypukłą Grahama i Jarvisa, wizualizacja ich przebiegu oraz porównanie.

2. Dane techniczne:

Język implementacji: Python

Środowisko programistyczne: Jupyter Notebook

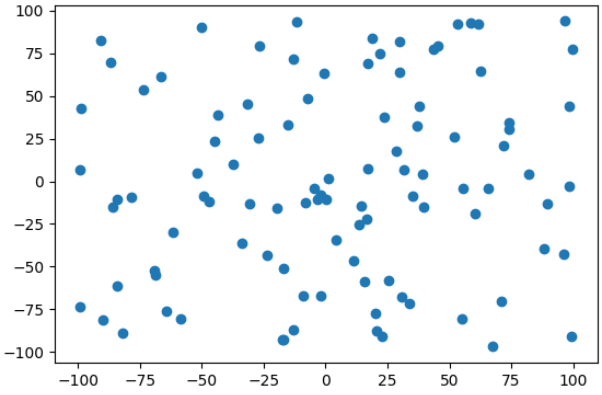
System operacyjny: Microsoft Windows 10 Pro x64

Procesor: Intel(R) Core(TM) i5-10400F CPU @ 2.90GHz, 2904 MHz

3. Zestawy danych i ich wizualizacja:

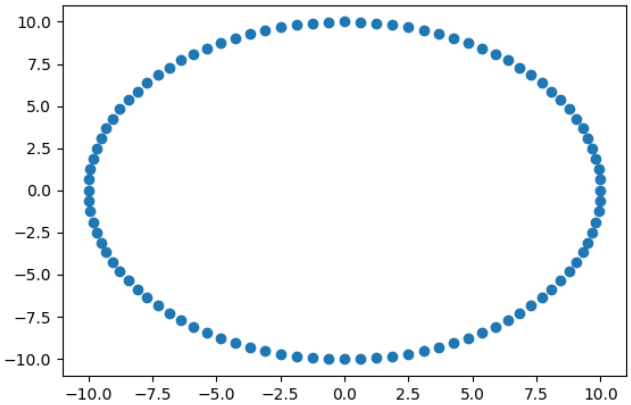
Na początku zaimplementowałem funkcję, które umożliwiają wygenerowanie specjalnych zestawów danych. Poniżej przedstawiam wizualizację dla małych, sprecyzowanych parametrów:

- 100 losowo wygenerowanych punktów o współrzędnych z przedziału [-100, 100]:



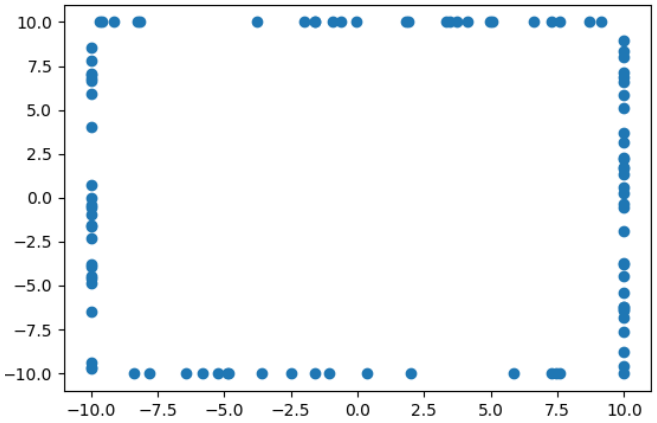
Wykres 1 Zestaw danych A

- 100 losowo wygenerowanych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu R=10:



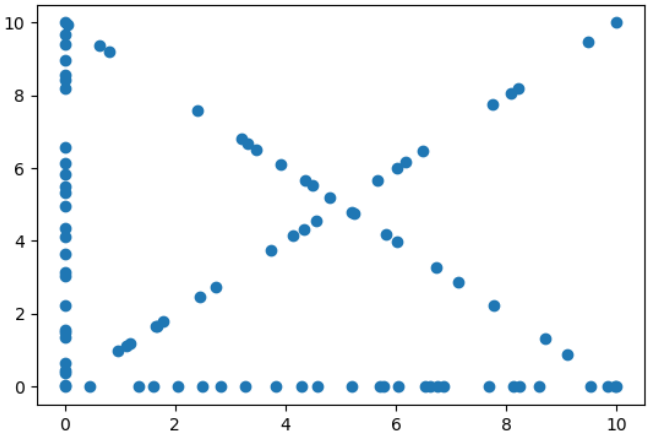
Wykres 2 Zestaw danych B

- 100 losowo wygenerowanych punktów leżących na bokach prostokąta o wierzchołkach (-10, 10), (-10,-10), (10,-10), (10,10):



Wykres 3 Zestaw danych C

- wierzchołki kwadratu (0, 0), (10, 0), (10, 10), (0, 10) oraz punkty wygenerowane losowo w sposób następujący: po 25 punktów na dwóch bokach kwadratu leżących na osiach i po 20 punktów na przekątnych kwadratu.



Wykres 4 Zestaw danych D

4. Implementacja przydatnych funkcji

Zaimplementowałem kilka funkcji, z których będę korzystał przy algorytmach Grahama i Jarvisa.

- *det*– oblicza wyznacznik na podstawie macierzy 3x3, kod własny
- *categorize_point* – klasyfikuje dany punkt względem położenia wobec prostej, korzysta z *det*
- *d* – oblicza odległość pomiędzy dwoma punktami
- *min_y* – wyznacza punkt z najmniejszą współrzędną y
- *quicksort* – sortuje zbiór punktów względem kąta utworzonego przez półprostą przechodzącą przez ten punkt i środek układu współrzędnych, korzysta z funkcji *categorize_point*
- *show_res* – wyświetla wyniki działania algorytmu, umożliwia zapis wyniku do pliku tekstowego

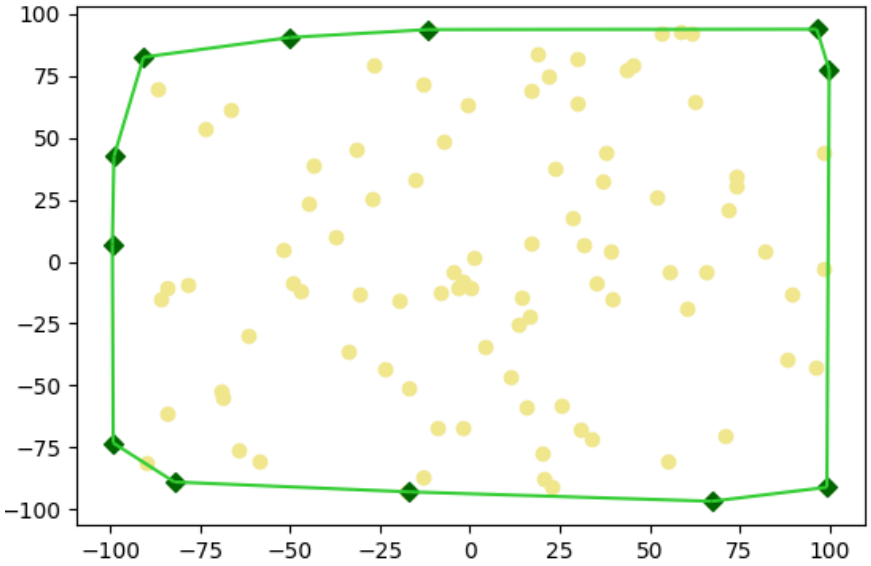
5. Algorytm Grahama

Zaimplementowałem trzy różne warianty algorytmu Grahama:

- *graham* – wyłącznie wyznaczenie otoczki wypukłej zbioru
- *graham_svis* – wyznaczenie otoczki wypukłej oraz jej wizualizacja
- *graham_dvis* - wyznaczenie otoczki wypukłej oraz stworzenie wizualizacji przebiegu algorytmu

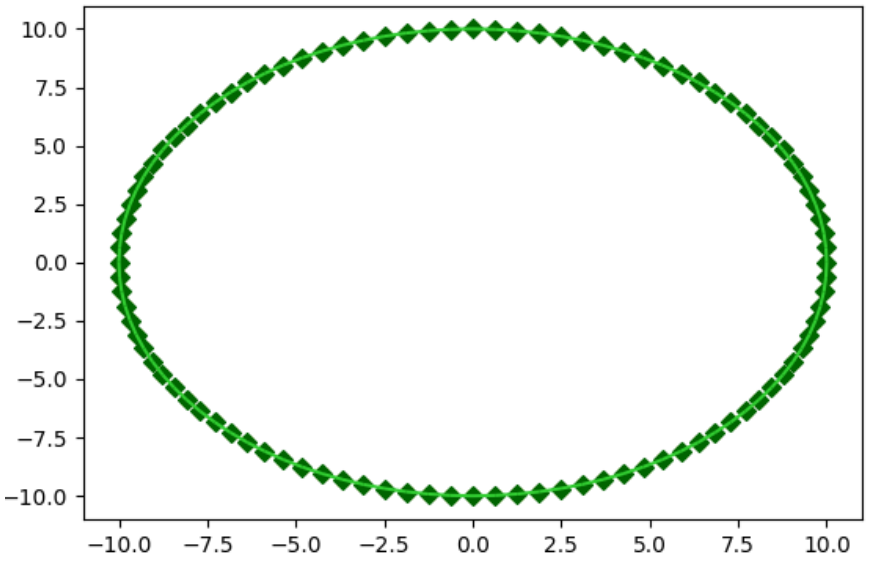
Poniżej przestawiam wynik algorytmu Grahama dla zbiorów z punktu 3.:

- Zestaw danych A - liczebność punktów w otoczce: 12



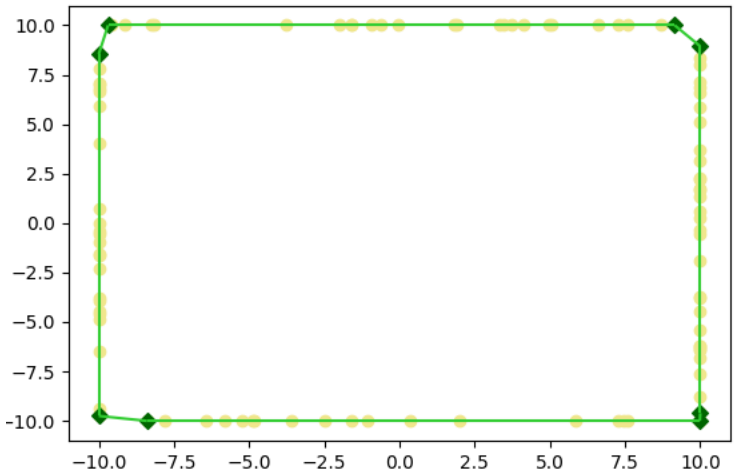
Wykres 5 Wynik algorytmu Grahama dla A

- Zestaw danych B - liczebność punktów w otoczce: 100



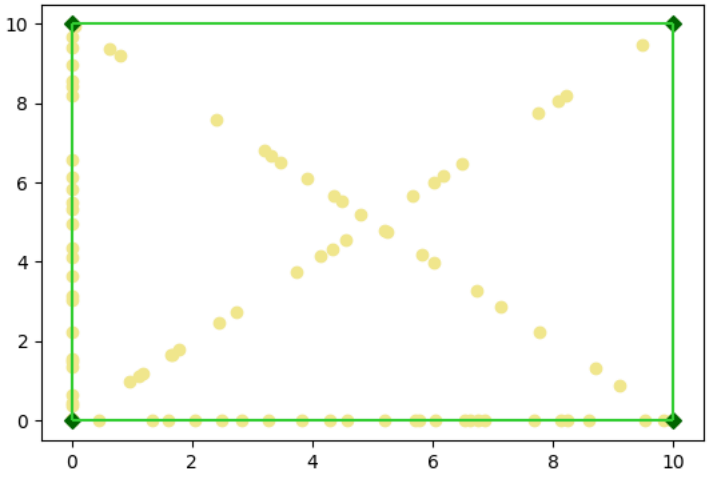
Wykres 6 Wynik algorytmu Grahama dla B

- Zestaw danych C - liczebność punktów w otoczce: 8



Wykres 7 Wynik algorytmu Grahama dla C

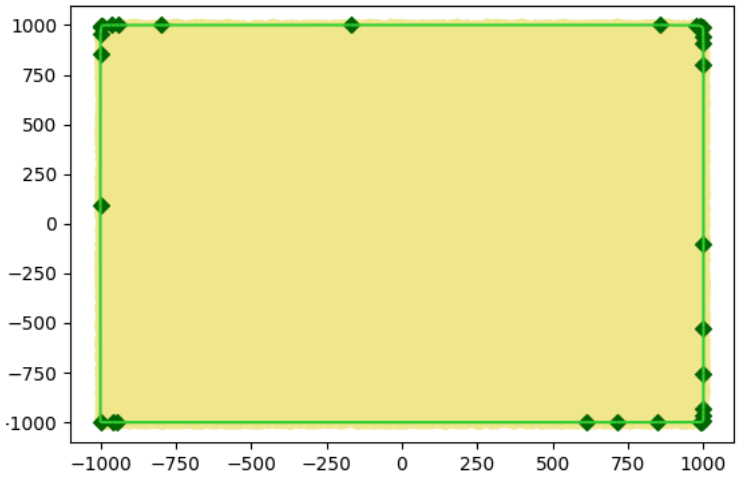
- Zestaw danych D - liczebność punktów w otoczce: 4



Wykres 8 Wynik algorytmu Grahama dla D

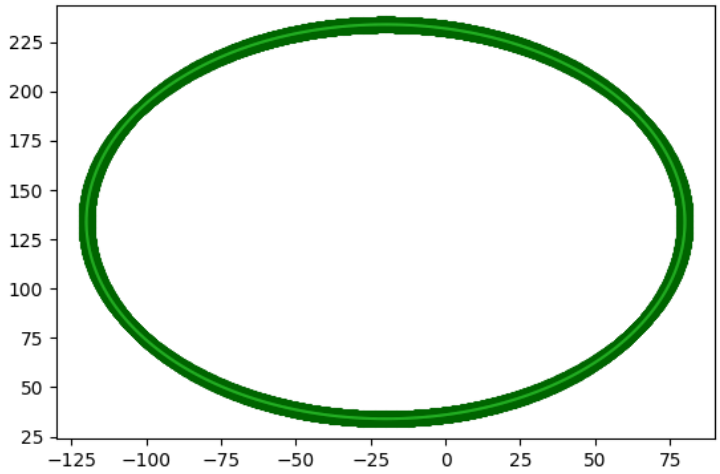
Poniżej przestawiam wynik algorytmu Grahama dla zmodyfikowanych zbiorów z punktu 3.:

- zmodyfikowany zestaw danych A - liczebność punktów w otoczce: 31



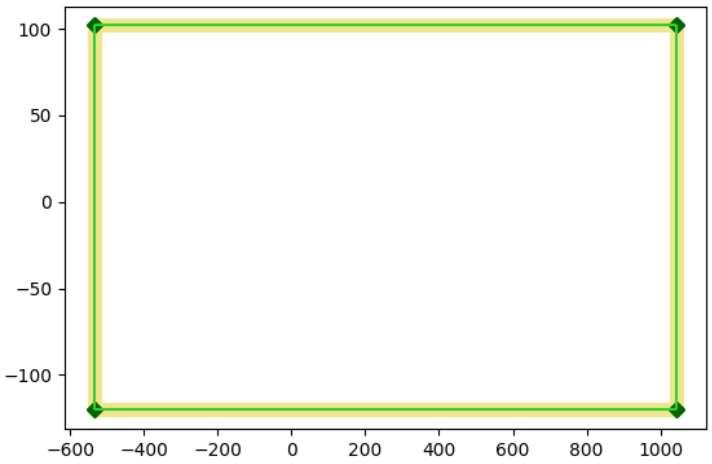
Wykres 9 Wynik algorytmu Grahama dla zmodyfikowanego A

- zmodyfikowany zestaw danych B - liczebność punktów w otoczce: 3000



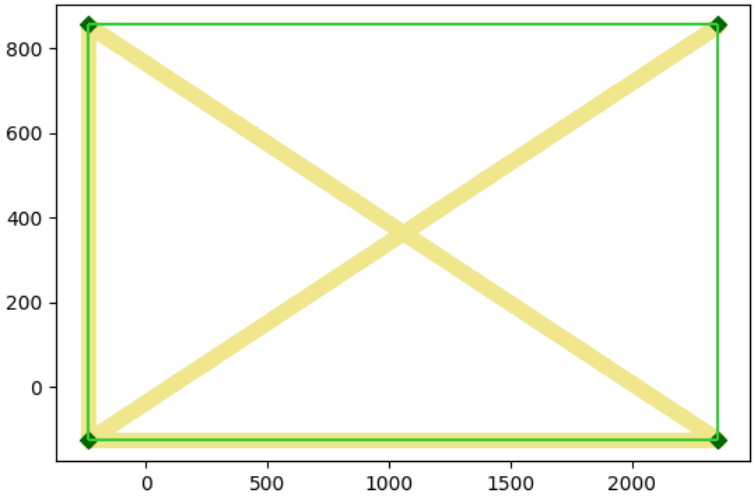
Wykres 10 Wynik algorytmu Grahama dla zmodyfikowanego B

- zmodyfikowany zestaw danych C - liczebność punktów w otoczce: 8



Wykres 11 Wynik algorytmu Grahama dla zmodyfikowanego C

- zmodyfikowany zestaw danych D - liczebność punktów w otoczce: 4



Wykres 12 Wynik algorytmu Grahama dla zmodyfikowanego D

6. Algorytm Jarvisa

Implementację algorytmu Jarvisa przeprowadziłem tym samym schematem co algorytm Grahama. Umożliwiłem wizualizację oraz zapis wyników, które dla danych zbiorów A-D oraz zmodyfikowanych A-D są identyczne, wykresy również są takie same. Jedyną różnicę w działaniu algorytmów można zauważyć w czasie ich wykonywania.

7. Porównanie algorytmu Grahama oraz Jarvisa

Przeprowadziłem testy porównujące czas dwóch algorytmów na czterech różnych rodzajach zbiorów (A-D) z kolejno zwiększającą się wielkością danych. Dokładną ich liczbę zamieściłem w tabeli 1., a wyniki testów w tabeli 2.

TEST	ZESTAW A	ZESTAW B	ZESTAW C	ZESTAW D
1	100	100	100	90
2	1 000	300	1 000	400
3	50 000	500	10 000	4 000
4	100 000	1 000	100 000	40 000
5	200 000	2 000	200 000	80 000
6	300 000	3 000	300 000	120 000

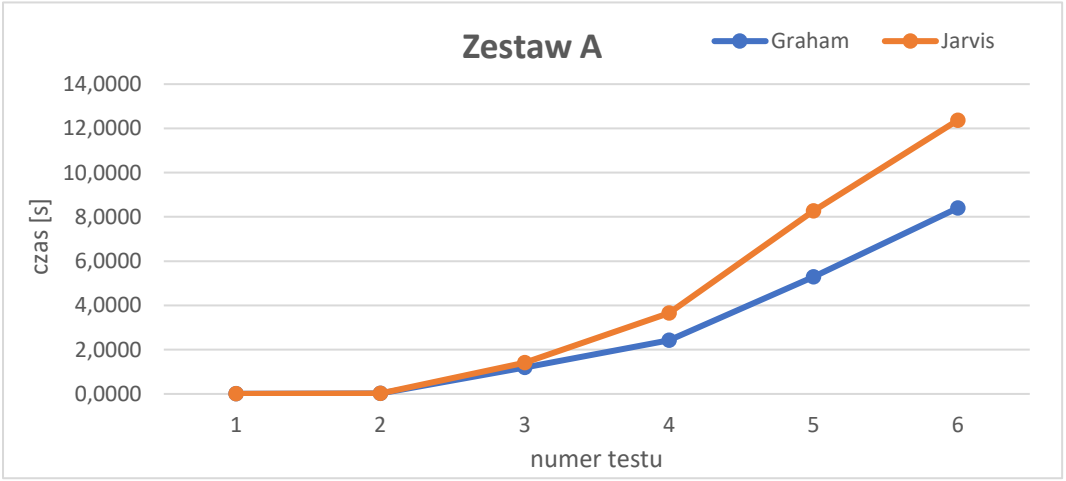
Tabela 1 Liczebność testowanych zbiorów (w punktach)

TEST	ZESTAW A [s]		ZESTAW B [s]		ZESTAW C [s]		ZESTAW D [s]	
	Graham	*Jarvis*	*Graham*	*Jarvis*	*Graham*	*Jarvis*	*Graham*	*Jarvis*
1	0,0060	0,0020	0,0110	0,0229	0,0070	0,0010	0,0070	0,0010
2	0,0190	0,0160	0,0272	0,1965	0,0209	0,0120	0,0090	0,0030
3	1,1949	1,4092	0,0711	0,5695	0,2982	0,1236	0,1566	0,0290
4	2,4201	3,6510	0,2789	2,1914	3,7822	1,2910	1,8138	0,2952
5	5,2897	8,2724	1,1108	8,6645	7,9329	2,6838	3,7741	0,6158
6	8,3984	12,3651	2,4869	20,2933	12,5669	4,0579	6,1573	0,9979

Tabela 2 Wyniki testów czasowych

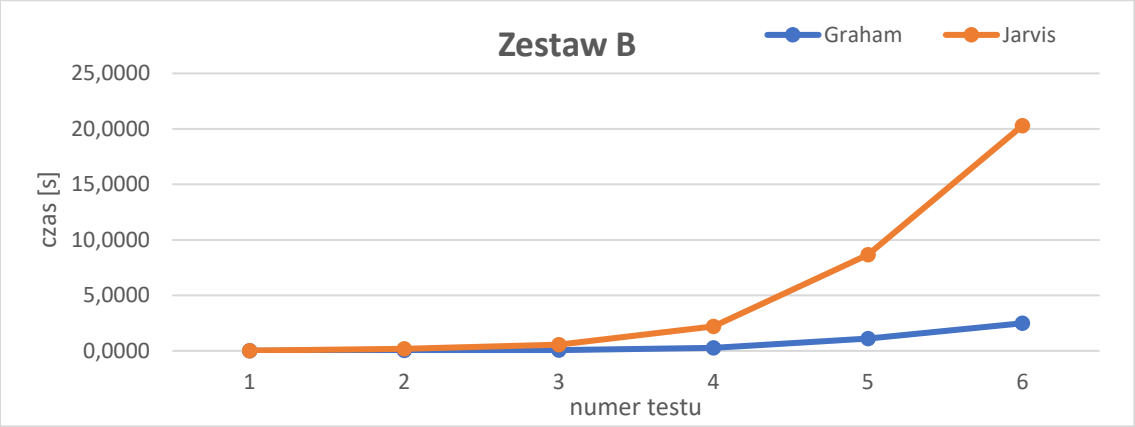
Powyższe wyniki przestawiłem również za pomocą wykresów liniowych:

- dla zestawu A:



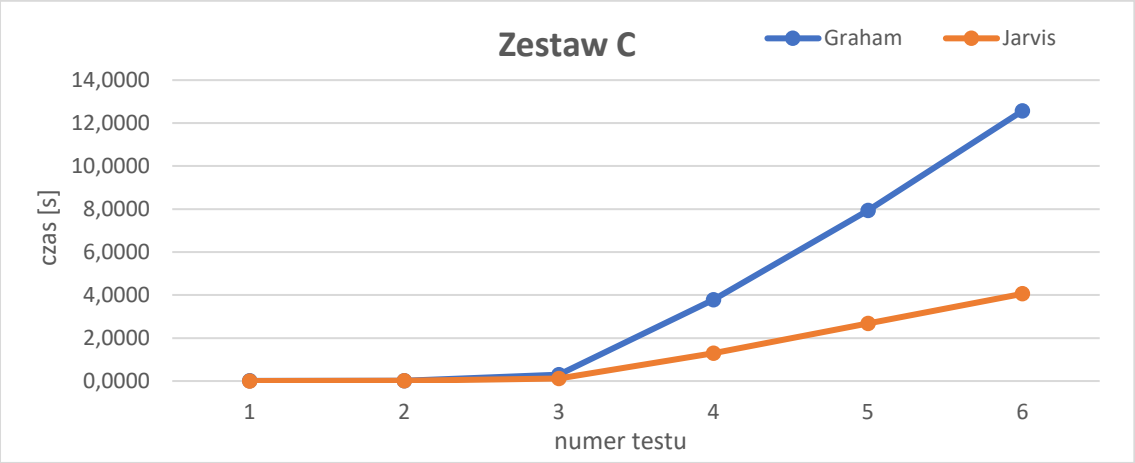
Wykres 13 Zestaw A

- dla zestawu B:



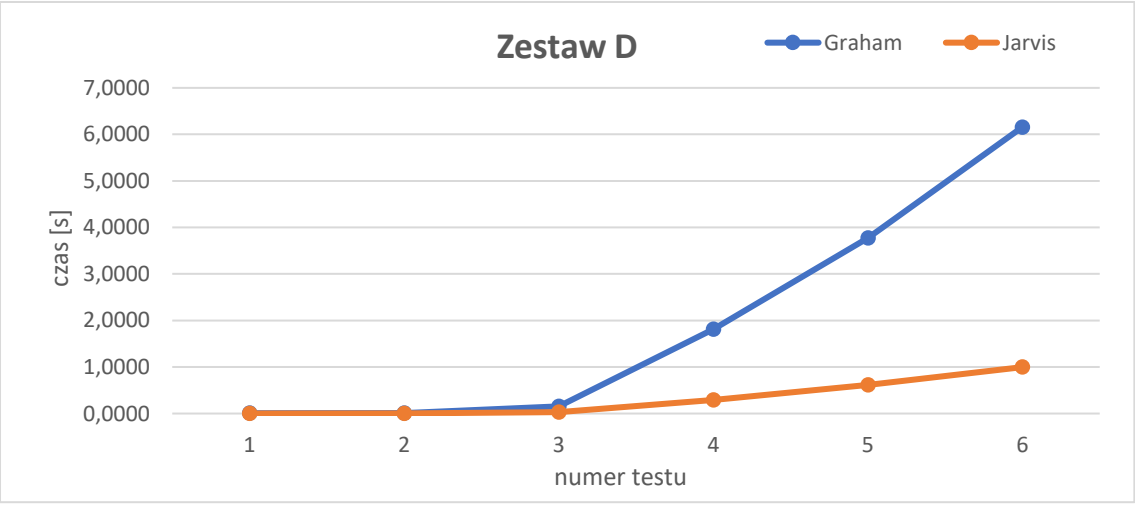
Wykres 14 Zestaw B

- dla zestawu C:



Wykres 15 Zestaw C

- dla zestawu D:



Wykres 16 Zestaw D

7. Podsumowanie

Każdy ze zbiorów z punktu 3. posiada pewne charakterystyczne cechy, które pozwalają przetestować algorytmy wyznaczające otoczkę wypukłą:

- zestaw danych A – zbiór to punkty należące do wnętrza prostokąta, dane najbardziej prawdopodobne, typowy przypadek,
- zestaw danych B – zbiór to punkty należące do okręgu, wszystkie punkty należą do otoczki,
- zestaw danych C – zbiór to punkty leżące na bokach prostokąta, bez punktów na jego wierzchołkach, tylko 8 punktów należących do otoczki – po dwa na każdy bok,
- zestaw danych D - punkty leżące na wierzchołkach kwadratu, jego dwóch bokach oraz przekątnych, tylko 4 punkty w otoczce – na wierzchołkach kwadratu.

W zestawach C i D ważne jest to, że punkty współliniowe nie należą do otoczki, co uwzględniłem w implementacji obu algorytmów.

Analizując i porównując złożoność obliczeniową obu algorytmów (Graham O(*nlogn*), Jarvis O(*nk*), gdzie *n* to liczba punktów w zbiorze, a *k* to liczba punktów należących do otoczki) można zauważyć, że ważną rolę w porównywaniu obu algorytmów odgrywa liczba punktów należących do otoczki. Tam, gdzie ich liczba jest duża, szybciej obliczenia wykona algorytm Grahama, zaś w przeciwnym przypadku szybciej upora się z nimi algorytm Jarvisa. Te różnicę bardzo dobrze widać na wykresach z punktu 7.:

- zestaw A – różnica w czasie wykonywania obu algorytmów nie jest ogromnie duża, lecz algorytm Grahama dla takiego typu zestawu będzie przeprowadzał obliczenia szybciej,
- zestaw B – różnica jest wyraźnie zauważalna (przy 6. teście około 17 sekund), parametr *k* będzie równał się *n*, przez co algorytm Jarvisa w tym zestawie zyskuje nieakceptowalną złożoność O(n^2),
- zestaw C – w przeciwieństwie do dwóch poprzednich zestawów, tutaj wygrywa algorytm Jarvisa ze względu na bardzo mały parametr *k* (przy 6. teście różnica około 8 sekund),
- zestaw D – bardzo duża przewaga algorytmu Jarvisa ze względu na małą wielkość parametru *k*.

8. Wnioski

W tym ćwiczeniu udało mi się poprawnie zaimplementować dwa algorytmy wyznaczające otoczkę wypukłą danego zbioru punktów. Przedstawiłem również wizualnie ich przebieg krok po kroku. Wykonałem po 6 testów dla każdego rodzaju zbioru danych A-D, dzięki czemu przedstawiłem wady i zalety obu algorytmów. Można z nich wywnioskować, że algorytm Grahama opłaca się używać w przypadkach typowych oraz gdy spodziewamy się dużej ilości punktów w otoczce. Zaś algorytm Jarvisa o wiele lepiej sprawdza się przy małej liczbie punktów w otoczce.