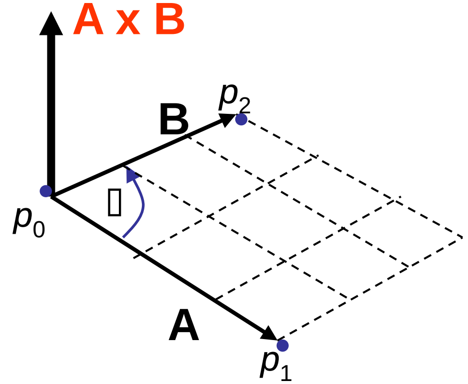
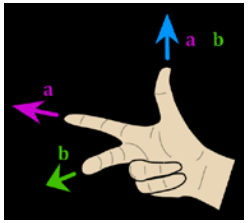
Iloczyn wektorowy

A x B – wektor prostopadły do A i B

Długość: |A||B| sin θ





Długość wektora otrzymanego
jako iloczyn wektorowy dwóch wektorów
jest równy polu równoległoboku
rozpiętego na tych wektorach:

$$\mathrm{AxB} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Dla 2-wymiarowych wektorów $A_z = B_z = 0$, obliczenia redukują się:

$$(A_x B_y - A_y B_x)\vec{\mathrm{k}}$$

Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach (p_0, p_1) i (p_0, p_2) =

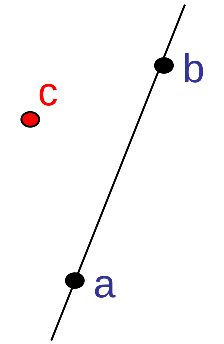
$$(p_{1x} - p_{0x})(p_{2y} - p_{0y}) - (p_{2x} - p_{0x})(p_{1y} - p_{0y})$$

lub analogicznie:

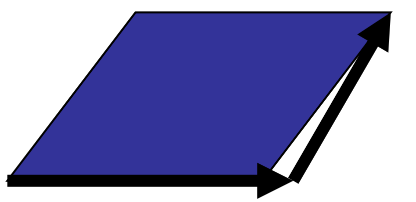
$$\det(p_0, p_1, p_2) = \begin{vmatrix} p_{0x} & p_{0y} & 1 \\ p_{1x} & p_{1y} & 1 \\ p_{2x} & p_{2y} & 1 \end{vmatrix}$$

Po której stronie (a,b) znajduje się c ?

$$\det(a,b,c)\begin{cases} <0 \\ >0 \\ =0 \end{cases}$$



<0



>0

Na płaszczyźnie

Krzywa parametryczna:

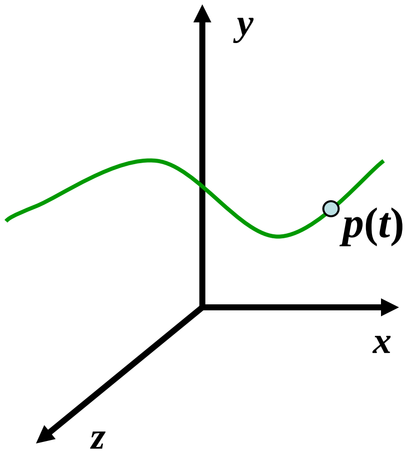
$$\mathbf{C}(t) = (\, x(t), y(t))\qquad \text{dla } t \in [t_0, t_1]$$

$x(t), y(t)$ – funkcje współrzędnych

- łatwe do rysowania
- trudno sprawdzić, czy punkt leży na krzywej
- mogą przedstawiać krzywe zamknięte

W przestrzeni

$$\mathbf{C}(t) = (\, x(t), y(t), z(t))\qquad \text{dla } t \in [t_0, t_1]$$

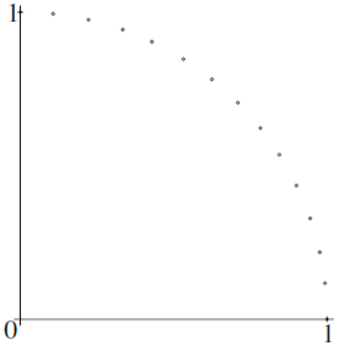


Postać parametryczna

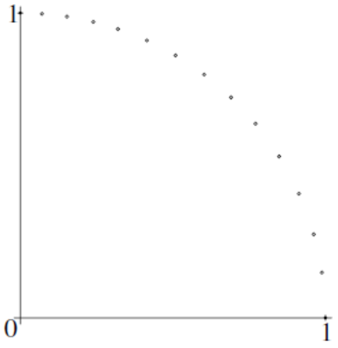
Dana krzywa może mieć różne parametryzacje.

Np. ćwiartka okręgu

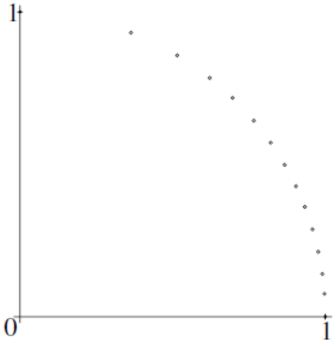
$$C(t) = (\cos\frac{\pi}{2}t, \sin\frac{\pi}{2}t), \quad t \in [0,1]$$



$$C(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \quad t \in [0,1]$$



$$C(t) = (\sqrt{1-t^2}, t) \quad t \in [0,1]$$



Ciągłość krzywych parametrycznych

Niech $\mathbf{C}(t) = (x(t), y(t))$ dla $t \in (t_0, t_1)$

Krzywa ma **ciągłość** (***parametryczną***) klasy C^k,
jeżeli istnieją ciągłe pochodne rzędu od 0 do k funkcji $x(t)$ oraz $y(t)$.

Jeżeli krzywa jest C^1 na przedziale I, to funkcja $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$
jest nazywana ***prędkością*** krzywej $C(t)$.

Jeżeli $v(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in I$, to krzywa jest nazywana ***regularną***.

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y(t))^2}\,dt = \int_a^b v(t)\,dt$$

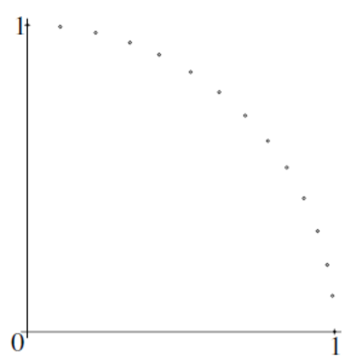
długość łuku krzywej

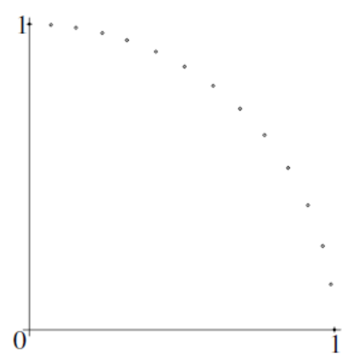
Prędkość krzywej dla trzech różnych parametryzacji ćwiartki okręgu

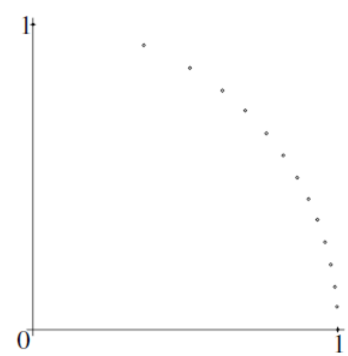
$$C(t) = (\cos\frac{\pi}{2}t, \sin\frac{\pi}{2}t), \quad t \in [0,1] \qquad v(t) = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t\right)^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$C(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \quad t \in [0,1] \qquad v(t) = \sqrt{\left(\frac{-4t^2}{(1+t^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right)^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$C(t) = (\sqrt{1-t^2}, t) \quad t \in [0,1] \qquad v(t) = \sqrt{(-t(1-t^2)^{-1/2})^2 + 1} = (1-t^2)^{-1/2}$$







Funkcja długości łuku dla trzech parametryzacji ćwiartki okręgu