Algorytmy macierzowe

Laboratorium 2

Sprawozdanie

Łukasz Stępień, Szymon Urbański

1. Temat zadania

Laboratorium polegało na zaimplementowaniu i przetestowaniu rekurencyjnego algorytmu odwracania, faktoryzacji LU oraz obliczania wyznacznika macierzy. Należało również narysować wykres zależności czasu i ilości obliczeń od rozmiarów macierzy oraz określić złożoność obliczeniową tych algorytmów.

2. Rozwiązanie

2.1. Rekurencyjne odwracanie macierzy

Zaimplementowano rekurencyjne odwracanie macierzy.

- **Pseudokod algorytmu:**

```
inverse(A):
        if A jest w wymiarach 2x2:
                return odwrócone A (według definicji)

        Podziel macierz A na macierze A11, A12, A21, A22 (2)

        A11_inv = inverse(A11) (3)
        S22 = A22 - A21 * A11_inv * A12
        S22_inv = inverse(S22)

        C1 = A11_inv * A12
        C2 = S22_inv * A21 * A11_inv

        B11 = A11_inv + C1 * C2
        B12 = - C1 * S22_inv
        B21 = - C2
        B22 = S22_inv

        Połącz B11, B12, B21, B22 (4)
        Return B
```

- **Złożoność obliczeniowa:**

  Niech T(n) oznacza czas procedury *inverse* dla dwóch macierzy *n*x*n*.

  (1) W przypadku bazowym (*n=2*), wykonujemy elementarną operacje odwracania, więc:

  $$T(n) = \Theta(1)$$

  (2) Zakładamy, że podział wykonuje się w stałym czasie $\Theta(1)$.

  (3) Wykonujemy łącznie 2 wywołania rekurencyjne procedury *inverse*. Ponieważ w każdym tym wywołaniu argumentem są macierze $\frac{n}{2}$ x $\frac{n}{2}$, co wnosi $T\left(\frac{n}{2}\right)$ do łącznego

czasu działania, czas tych dwóch wywołań to $2T\left(\frac{n}{2}\right)$. Uwzględniamy 7 mnożeń macierzy zawierających $\frac{n^2}{4}$ elementów. Każde z siedmiu mnożeń wymaga $\Theta(n^{lg7})$, a ich liczba jest stała, łączny czas ich wykonywania to $\Theta(n^{lg7})$. Następnie bierzemy pod uwagę 4 działania addytywne. Każde z nich wymaga $\Theta(n^2)$, a ich liczba jest stała, więc łączny czas ich wykonywania to $\Theta(n^2)$.

(4) Zakładamy, że łączenie wykonuje się w stałym czasie $\Theta(1)$.

Rekurencja opisująca czas działania algorytmu odwracania macierzy przedstawia się równaniem:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & dla\ n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^{lg7}) & dla\ n > 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tej rekurencji jest $T(n) = \Theta(n^{lg7})$.

- **Najważniejsze fragmenty kodu:**

```
def inverse(A):  # inversion of matrix with recursion
    n = len(A)
    if n == 2:
        return gauss_inverse(A)

    A11 = [row[:n // 2] for row in A[:n // 2]]
    A12 = [row[n // 2:] for row in A[:n // 2]]
    A21 = [row[:n // 2] for row in A[n // 2:]]
    A22 = [row[n // 2:] for row in A[n // 2:]]

    A11_inv = inverse(A11)
    S22 = sub_matrix(A22, mul_matrix(mul_matrix(A21, A11_inv), A12))
    S22_inv = inverse(S22)

    C1 = mul_matrix(A11_inv, A12)
    C2 = mul_matrix(mul_matrix(S22_inv, A21), A11_inv)

    B = [[0 for _ in range(2)] for _ in range(2)]

    B[0][0] = add_matrix(A11_inv, mul_matrix(C1, C2))
    B[0][1] = neg_matrix(mul_matrix(C1, S22_inv))
    B[1][0] = neg_matrix(C2)
    B[1][1] = S22_inv

    res = []
    for i in range(2):
        for j in range(len(B[i][0])):
            res.append(B[i][0][j] + B[i][1][j])
    return res
```

2.2. Faktoryzacja LU

- **Pseudokod algorytmu:**

```
LU(A):
    if A jest w wymiarach 2x2:
        return sfaktoryzowane A (według definicji)

    Podziel macierz A na macierze A11, A12, A21, A22 (2)

    L11, U11 = LU(A11) (3)
    U11_inv = inverse(U11)
    L21 = A21 * U11_inv
    L11_inv = inverse(L11)
    U12 = L11_inv * A12

    S = A22 - A21 * U11_inv * L11_inv * A12
    L22, U22 = LU(S)

    Połącz L11, L21, L22 (4)
    Połącz U11, U12, U22

    Return L, U
```

- **Złożoność obliczeniowa:**

Niech T(n) oznacza czas procedury *LU* dla dwóch macierzy *n*x*n*.

(1) W przypadku bazowym (*n=2*), wykonujemy operacje elementarną, więc:

$$T(n) = \Theta(1)$$

(2) Zakładamy, że podział wykonuje się w stałym czasie $\Theta(1)$.

(3) Wykonujemy łącznie 2 wywołania rekurencyjnej procedury *LU(A)*. Ponieważ w każdym tym wywołaniu argumentem są macierze $\frac{n}{2}$ x $\frac{n}{2}$, co wnosi $T\left(\frac{n}{2}\right)$ do łącznego czasu działania, czas tych dwóch wywołań to $2T\left(\frac{n}{2}\right)$. Uwzględniamy pięć mnożeń oraz 2 odwracania macierzy. zawierających $\frac{n^2}{4}$ elementów. Łączny czas ich wykonywania to $\Theta(n^{lg7})$.

(4) Zakładamy, że łączenie wykonuje się w stałym czasie $\Theta(1)$.

Rekurencja opisująca czas działania algorytmu faktoryzacji LU przedstawia się równaniem:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & dla\ n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^{lg7}) & dla\ n > 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tej rekurencji jest $T(n) = \Theta(n^{lg7})$.

- **Najważniejsze fragmenty kodu:**

```python
def LU(A):
    n = len(A)
    if n == 2:
        return doolittle_LU(A)

    A11 = [row[:n // 2] for row in A[:n // 2]]
    A12 = [row[n // 2:] for row in A[:n // 2]]
    A21 = [row[:n // 2] for row in A[n // 2:]]
    A22 = [row[n // 2:] for row in A[n // 2:]]

    L11, U11 = LU(A11)
    U11_inv = inverse(U11)
    L21 = mul_matrix(A21, U11_inv)
    L11_inv = inverse(L11)
    U12 = mul_matrix(L11_inv, A12)
    S = sub_matrix(A22, mul_matrix(mul_matrix(
        mul_matrix(A21, U11_inv), L11_inv), A12))
    L22, U22 = LU(S)

    U = [[U11, U12], [
        [[0 for _ in range(n - len(U22))] for _ in range(n - len(U22))], U22]]
    L = [[L11, [[0 for _ in range(n - len(L11))]
                for _ in range(n - len(L11))]], [L21, L22]]

    U_res = []
    for i in range(2):
        for j in range(len(U[i][0])):
            U_res.append(U[i][0][j] + U[i][1][j])

    L_res = []
    for i in range(2):
        for j in range(len(L[i][0])):
            L_res.append(L[i][0][j] + L[i][1][j])

    return [L_res, U_res]
```

2.3. Obliczanie wyznacznika macierzy

Zaimplementowano obliczanie wyznacznika macierzy.

- **Pseudokod algorytmu:**

  determinant(A):

  L, U = LU(A) (1)

  return suma iloczynów liczb występujących na diagonalach macierzy (2)

- **Złożoność obliczeniowa:**

  (1) Koszt faktoryzacji LU to $\Theta(n^{lg7})$.
  (2) Kosz sumowania iloczynów to $\Theta(n)$.

  Zatem złożoność obliczeniowa obliczania wyznacznika macierzy to $\Theta(n^{lg7})$.

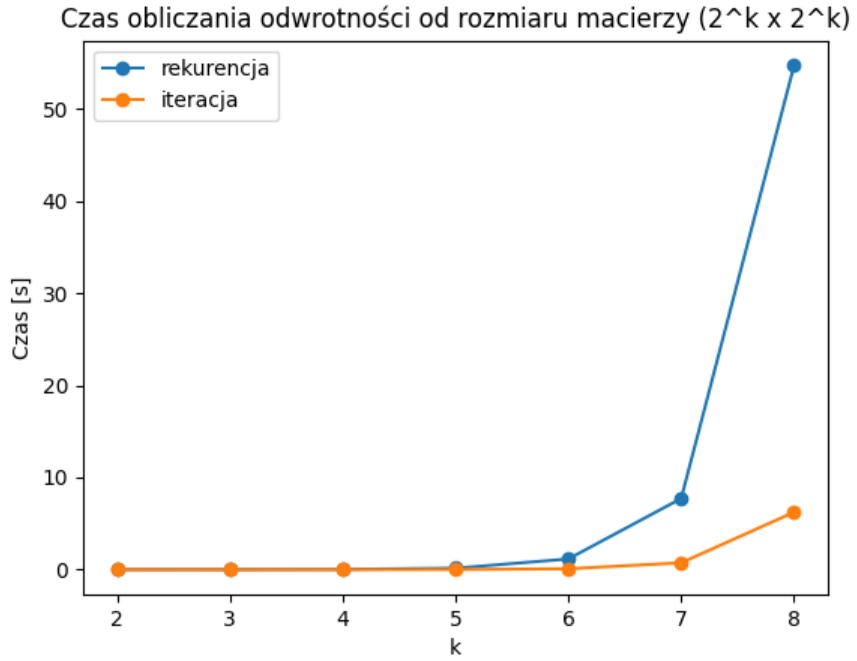
- **Najważniejsze fragmenty kodu:**

```
def determinant(A):
    if len(A) != len(A[0]):
        print("Error")
        return 0
    global cnt_m
    L, U = LU(A)
    res = 1
    for i in range(len(A)):
        res *= L[i][i] * U[i][i]
        cnt_m += 2
    return res
```

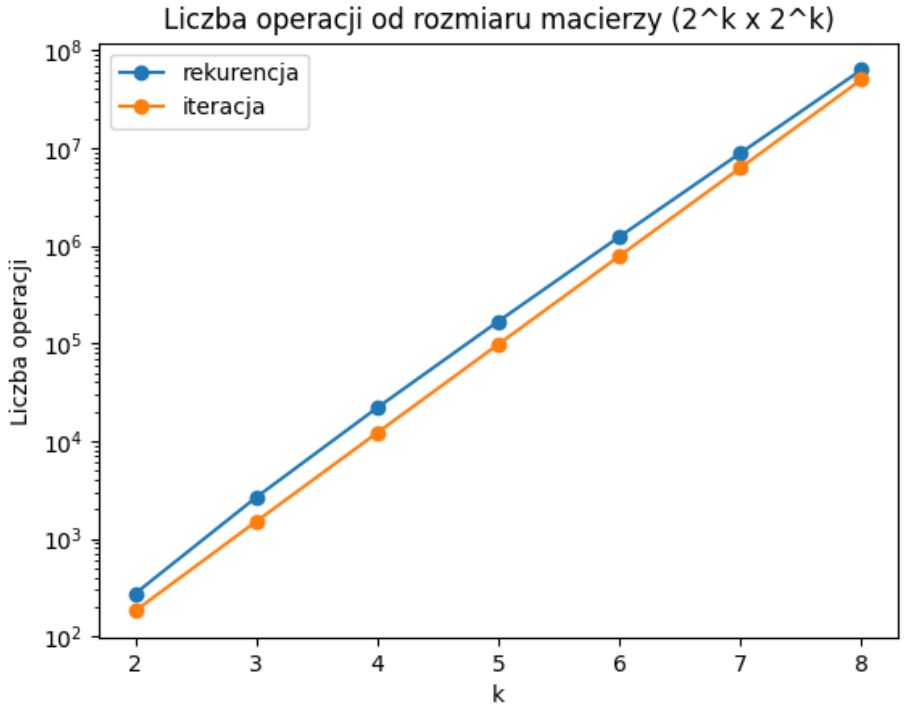
3. Wyniki

3.1. Rekurencyjne odwracanie macierzy

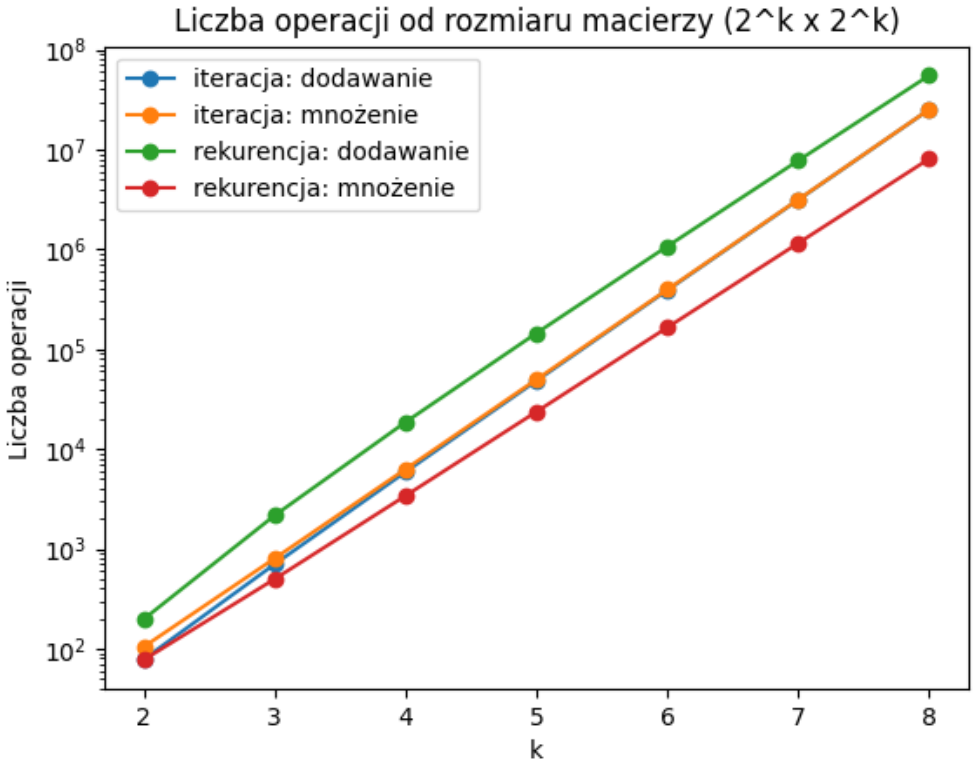
Na poniższym wykresie przedstawiono porównanie czasu działania rekurencyjnego oraz iteracyjnego odwracania macierzy w zależności od ilości elementów.



Wygenerowano wykres przedstawiający liczbę wykonanych operacji arytmetycznych w zależności od wielkości macierzy dla obu wariantów algorytmu.

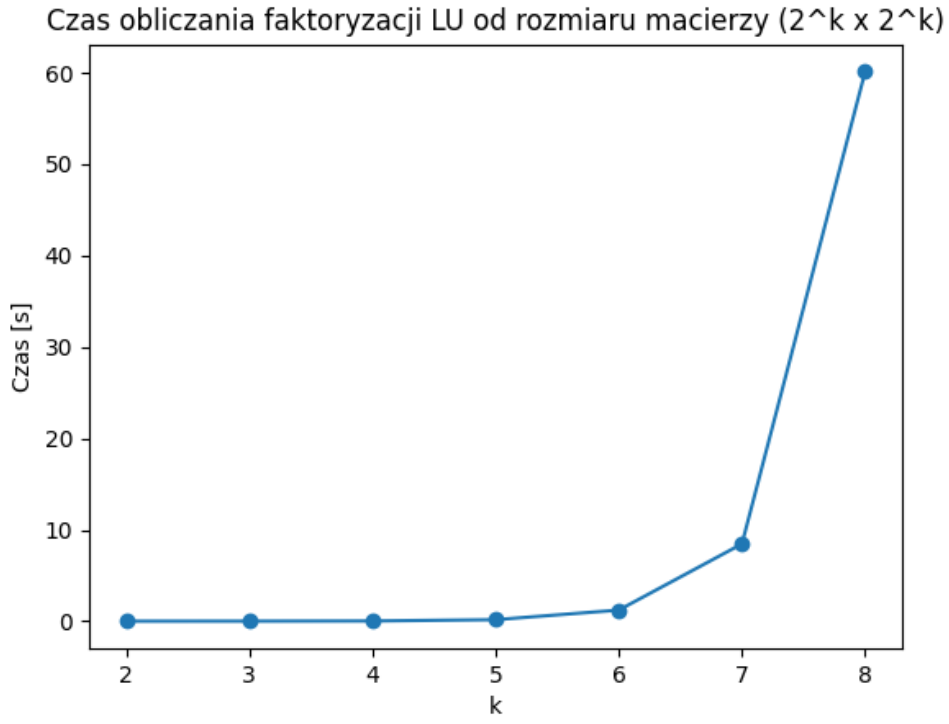


Wygenerowano wykres przedstawiający liczbę wykonanych operacji arytmetycznych z podziałem na dodawanie i odejmowanie w zależności od wielkości macierzy.

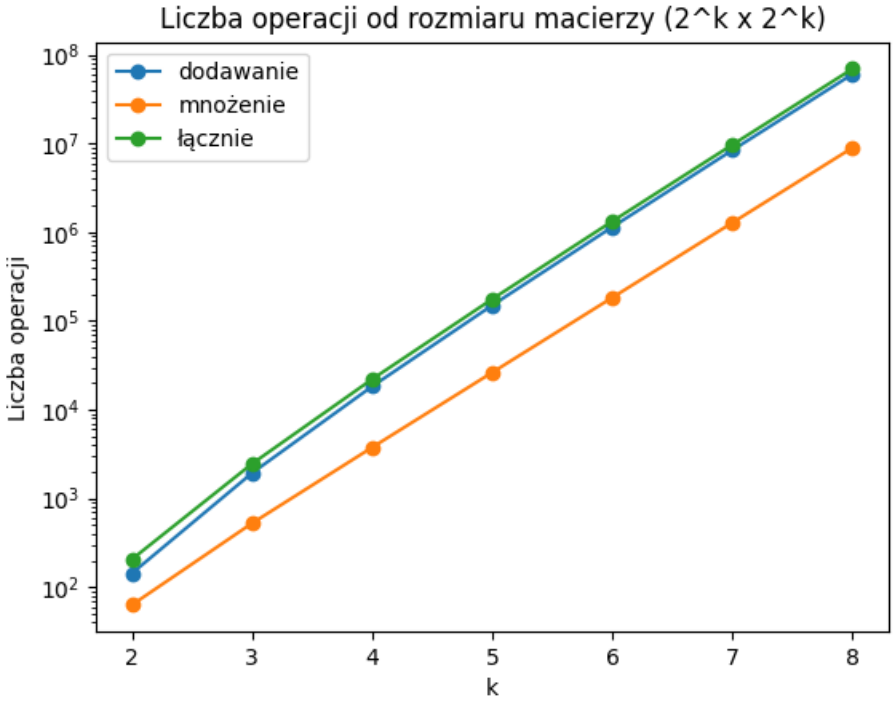


3.2. Faktoryzacja LU

Na poniższym wykresie przedstawiono czas działania algorytmu faktoryzacji LU macierzy w zależności od ilości elementów.

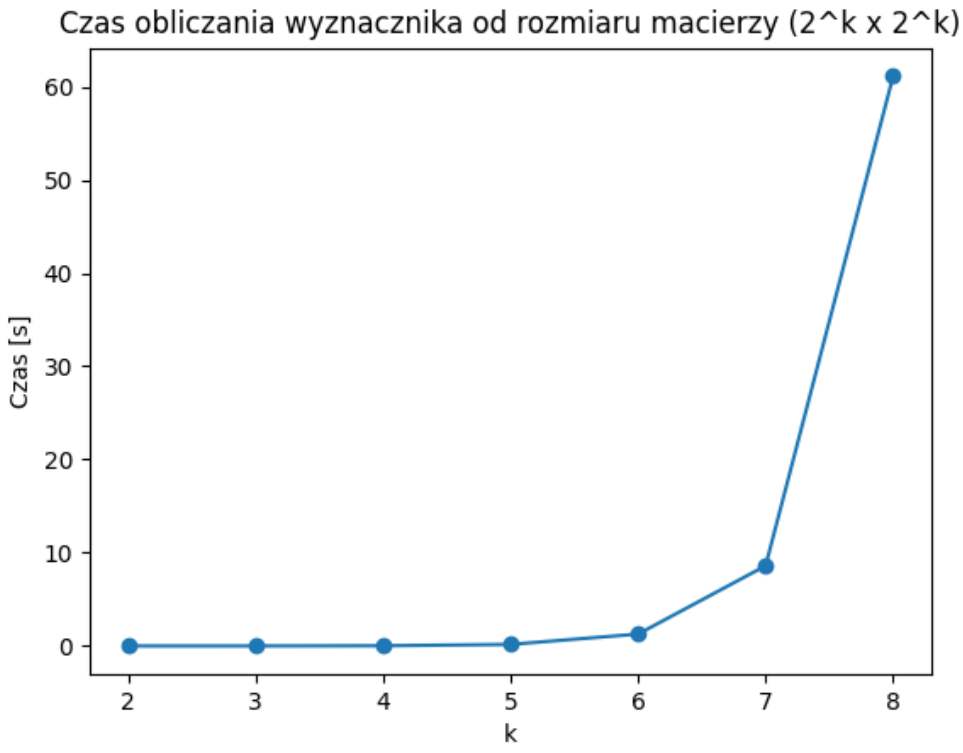


Wygenerowano wykres przedstawiający liczbę wykonanych operacji arytmetycznych w zależności od wielkości macierzy.

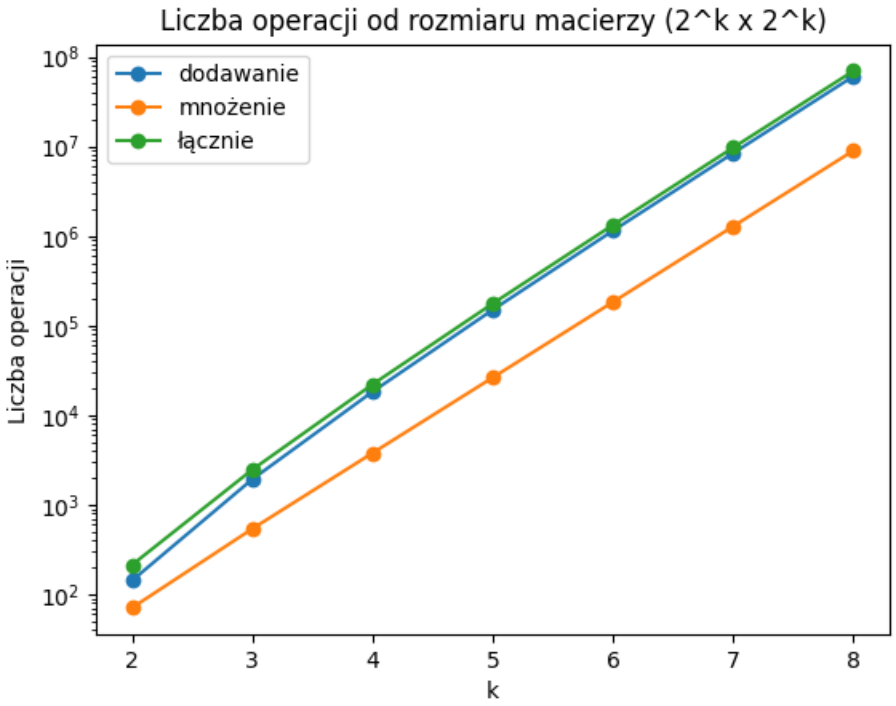


3.3. Obliczanie wyznacznika macierzy

Na poniższym wykresie przedstawiono czas działania algorytmu obliczającego wyznacznik macierzy w zależności od wielkości macierzy.



Wygenerowano wykres przedstawiający liczbę wykonanych operacji arytmetycznych w zależności od wielkości macierzy.



3.4. Testy w MATLAB

Przetestowano działanie algorytmów z tymi zaimplementowanymi w programie MATLAB.

Dla wygenerowanej macierzy 4x4:

$A =$

```
[0.3996362682016685, 0.3775324097440138, 0.2867355288648659, 0.9335904617261223]
[0.8442372135947669, 0.6695498023698692, 0.4219842325585101, 0.4341797318639589]
[0.026568629132153628, 0.6848164865354961, 0.006902246086230951, 0.49542134706786245]
[0.5269780713781076, 0.8534918403914511, 0.5867139799665525, 0.08457429827957923]
```

zaimplementowane algorytmy zwróciły następujące wyniki:

- odwracanie macierzy:

$A^{-1}_{rekurencja} =$

```
[-0.8765338450388764, 2.428286254740784, -0.2518254400791182, -1.3151671533372182]
[-0.8687881777468327, 0.20343962875281996, 1.414221858831219, 0.2616314251197229]
[1.874993051255954, -2.4225519429693705, -1.8459044518565995, 2.5521677277589014]
[1.2218026336803671, -0.3776865897158288, 0.10283993464741556, -0.32667751529510675]
```

$A^{-1}_{iteracja} =$

```
[-0.8765338450389437, 2.4282862547407595, -0.251825440079116, -1.3151671533372231]
[-0.8687881777467514, 0.2034396287528648, 1.4142218588312185, 0.2616314251197207]
[1.8749930512559558, -2.4225519429693727, -1.8459044518565995, 2.5521677277589006]
[1.22180263368036, -0.37768658971583224, 0.10283993464741538, -0.3266775152951 0636]
```

$A^{-1}_{MATLAB} =$

```
-0.876533845038943   2.428286254740761  -0.251825440079116  -1.315167153337223
-0.868788177746753   0.203439628752865   1.414221858831219   0.261631425119721
 1.874993051255957  -2.422551942969374  -1.845904451856599   2.552167727758900
 1.221802633680360  -0.377686589715832   0.102839934647415  -0.326677515295107
```

- faktoryzacja LU

$[L|U] =$

```
[1, 0, 0, 0]
[2.112514005282272, 1, 0, 0]
[0.066482026898385, -5.154335859014112, 1, 0]
[1.3186442605659066, -2.7787592047393996, 0.3148056717479142, 1]

[0.3996362682016685, 0.3775324097440138, 0.2867355288648661, 0.9335904617261223]
[0, -0.12799270066232526, -0.18374858798053834, -1.538043193730417]
[0, 0, -0.9592624491277839, -7.494236825277966],
[0, 0, 0, -3.06112282964024]
```

$[L|U]_{MATLAB} =$

```
1.000000000000000                   0                   0                   0
0.031470573322662   1.000000000000000                   0                   0
0.624206162547884   0.656207556469453   1.000000000000000                   0
0.473369642757176   0.091281780169313   0.267373392633044   1.000000000000000

  0.844237213594767   0.669549802369869   0.421984232558510   0.434179731863959
                  0   0.663745370386842  -0.006377839645509   0.481757461981024
                  0                   0   0.327494008074824  -0.502576252940785
                  0                   0                   0   0.818462796227376
```

- obliczanie wyznacznika

$$\det(A) = -0.15019943469607316$$

$$\det(A)_{MATLAB} = -0.150199434696073$$

4. Wnioski

Porównując ze sobą czas wyznaczania macierzy odwrotnej w przypadku iteracyjnym i rekurencyjnym można zauważyć, że sposób iteracyjny działa znacząco szybciej od sposobu rekurencyjnego. Może to być skutkiem tego, iż mimo że sposób rekurencyjny wykonuje mniej operacji mnożenia, to musi wykonać więcej operacji addytywnych (łącznie rozwiązanie rekurencyjne wykonuje więcej obliczeń). Dodatkowo należy pamiętać, że teoretycznie lepsza złożoność obliczeniowa nie zawsze oznacza szybszy algorytm (zależy to także od sposobu implementacji oraz czasu przeznaczonego np. na wywoływanie kolejnych funkcji).

Patrząc na wykresy przedstawiające czas obliczania faktoryzacji LU oraz wyznacznika można zauważyć, że czas ten znacząco zwiększa się dla większych macierzy. Bierze się to ze złożoności obliczeniowej oraz z ilości operacji którą musi wykonać algorytm. Warto również zauważyć, że w obu przypadkach ilość dodawań jest wyraźnie większa niż ilość mnożeń. Może mieć to wpływ na mniejszy błąd numeryczny. Dodatkowo można stwierdzić, że czas obliczania faktoryzacji LU wyznacznika jest do siebie zbliżony, ponieważ wyznaczanie wyznacznika macierzy to tak naprawdę faktoryzacja LU i obliczenie iloczynu diagonali wyznaczonych macierzy.

Porównując wyniki otrzymane przez rekurencyjne wyznaczanie odwrotności, faktoryzacji LU oraz wyznacznika macierzy z wynikami otrzymanymi w programie MATLAB można stwierdzić, że zaimplementowane algorytmy działają poprawnie z dokładnością do błędów numerycznych (inna faktoryzacja LU wynika z permutacji wierszy w programie MATLAB).

5. Bibliografia

- wykład z przedmiotu „Algorytmy macierzowe” przygotowany przez prof. dr hab. Macieja Paszyńskiego
- https://en.wikipedia.org/wiki/LU_decomposition
- Thomas H. Cormen - „Wprowadzenie do algorytmów”