**Algorytmy macierzowe**

**Laboratorium 2**

**Sprawozdanie**

**Łukasz Stępień, Szymon Urbański**

1. **Temat zadania**

Laboratorium polegało na zaimplementowaniu i przetestowaniu rekurencyjnego algorytmu odwracania, faktoryzacji LU oraz obliczania wyznacznika macierzy. Należało również narysować wykres zależności czasu i ilości obliczeń od rozmiarów macierzy oraz określić złożoność obliczeniową tych algorytmów.

1. **Rozwiązanie**

**2.1. Rekurencyjne odwracanie macierzy**

Zaimplementowano rekurencyjne odwracanie macierzy.

* **Pseudokod algorytmu:**

inverse(A):

if A jest w wymiarach 2x2:

return odwrócone A (według definicji)

Podziel macierz A na macierze A11, A12, A21, A22 (2)

A11\_inv = inverse(A11) (3)

S22 = A22 - A21 \* A11\_inv \* A12

S22\_inv = inverse(S22)

C1 = A11\_inv \* A12

C2 = S22\_inv \* A21 \* A11\_inv

B11 = A11\_inv + C1 \* C2

B12 = - C1 \* S22\_inv

B21 = - C2

B22 = S22\_inv

Połącz B11, B12, B21, B22 (4)

Return B

* **Złożoność obliczeniowa:**

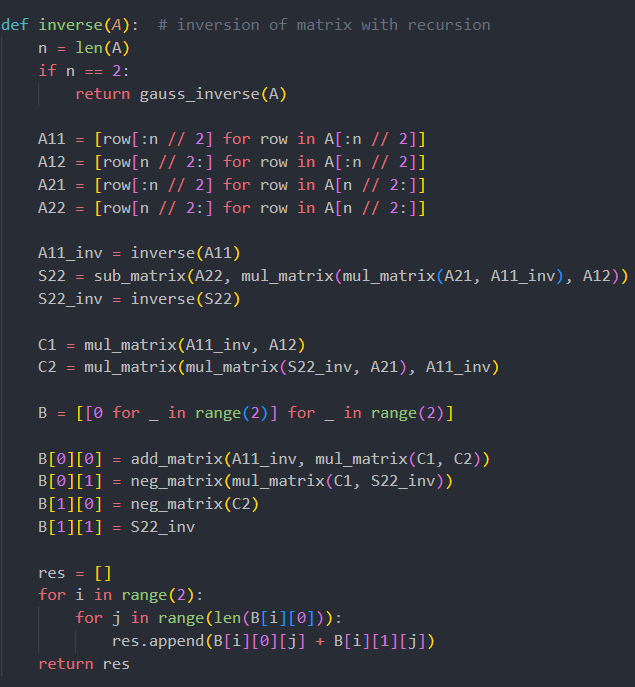
Niech T(n) oznacza czas procedury *inverse* dla dwóch macierzy *n*x*n*.

1. W przypadku bazowym (*n=2*), wykonujemy elementarną operacje odwracania, więc:
2. Zakładamy, że podział wykonuje się w stałym czasie .
3. Wykonujemy łącznie 2 wywołania rekurencyjne procedury *inverse*. Ponieważ w każdym tym wywołaniu argumentem są macierze x , co wnosi do łącznego czasu działania, czas tych dwóch wywołań to . Uwzględniamy 7 mnożeń macierzy zawierających elementów. Każde z siedmiu mnożeń wymaga , a ich liczba jest stała, łączny czas ich wykonywania to . Następnie bierzemy pod uwagę 4 działania addytywne. Każde z nich wymaga , a ich liczba jest stała, więc łączny czas ich wykonywania to .
4. Zakładamy, że łączenie wykonuje się w stałym czasie .

Rekurencja opisująca czas działania algorytmu odwracania macierzy przedstawia się równaniem:

Rozwiązaniem tej rekurencji jest .

* **Najważniejsze fragmenty kodu:**



**2.2. Faktoryzacja LU**

* **Pseudokod algorytmu:**

LU(A):

if A jest w wymiarach 2x2:

return sfaktoryzowane A (według definicji)

Podziel macierz A na macierze A11, A12, A21, A22 (2)

L11, U11 = LU(A11) (3)

U11\_inv = inverse(U11)

L21 = A21 \* U11\_inv

L11\_inv = inverse(L11)

U12 = L11\_inv \* A12

S = A22 - A21 \* U11\_inv \* L11\_inv \* A12

L22, U22 = LU(S)

Połącz L11, L21, L22 (4)

Połącz U11, U12, U22

Return L, U

* **Złożoność obliczeniowa:**

Niech T(n) oznacza czas procedury *LU* dla dwóch macierzy *n*x*n*.

1. W przypadku bazowym (*n=2*), wykonujemy operacje elementarną, więc:
2. Zakładamy, że podział wykonuje się w stałym czasie .
3. Wykonujemy łącznie 2 wywołania rekurencyjnej procedury *LU(A)*. Ponieważ w każdym tym wywołaniu argumentem są macierze x , co wnosi do łącznego czasu działania, czas tych dwóch wywołań to . Uwzględniamy pięć mnożeń oraz 2 odwracania macierzy. zawierających elementów. Łączny czas ich wykonywania to .
4. Zakładamy, że łączenie wykonuje się w stałym czasie .

Rekurencja opisująca czas działania algorytmu faktoryzacji LU przedstawia się równaniem:

Rozwiązaniem tej rekurencji jest

* **Najważniejsze fragmenty kodu:**

**A screenshot of a computer program

Description automatically generated**

**2.3. Obliczanie wyznacznika macierzy**

Zaimplementowano obliczanie wyznacznika macierzy.

* **Pseudokod algorytmu:**

determinant(A):

L, U = LU(A) (1)

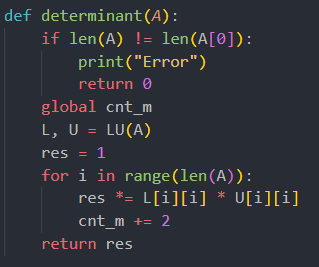
return suma iloczynów liczb występujących na diagonalach macierzy (2)

* **Złożoność obliczeniowa:**

1. Koszt faktoryzacji LU to .
2. Kosz sumowania iloczynów to .

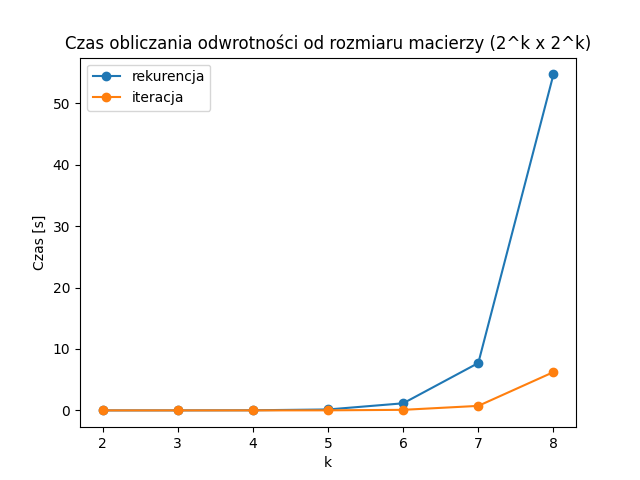
Zatem złożoność obliczeniowa obliczania wyznacznika macierzy to .

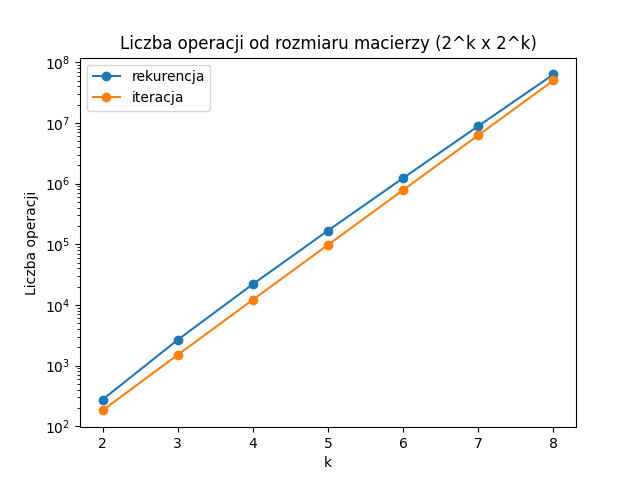
* **Najważniejsze fragmenty kodu:**

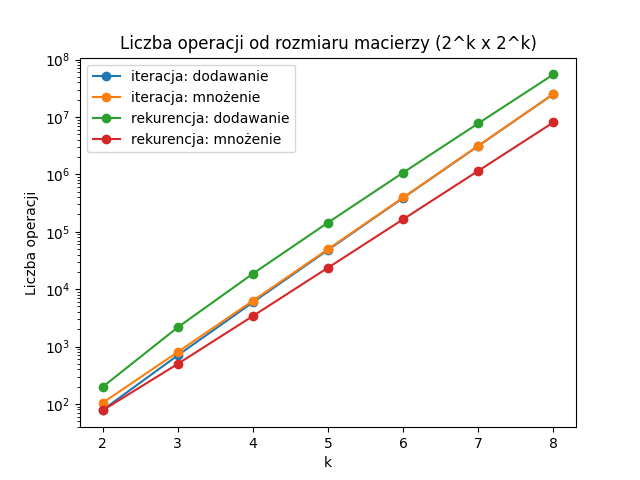


1. **Wyniki**

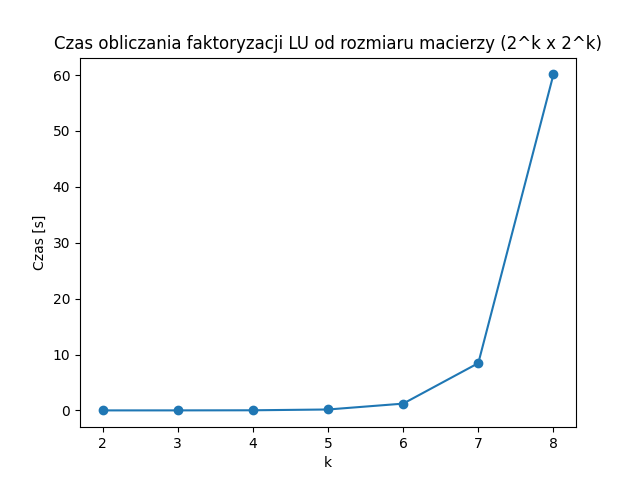
**3.1. Rekurencyjne odwracanie macierzy**

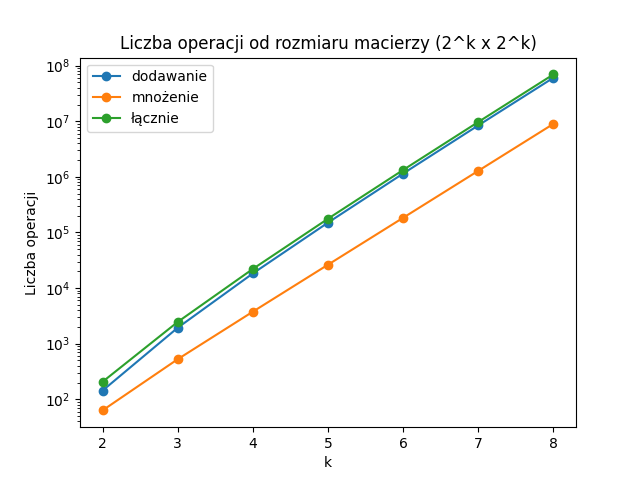
Na poniższym wykresie przedstawiono porównanie czasu działania rekurencyjnego oraz iteracyjnego algorytmu odwracania macierzy w zależności od ilości elementów.

Wygenerowano wykres przedstawiający liczbę wykonanych operacji arytmetycznych w zależności od wielkości macierzy dla obu wariantów algorytmu.

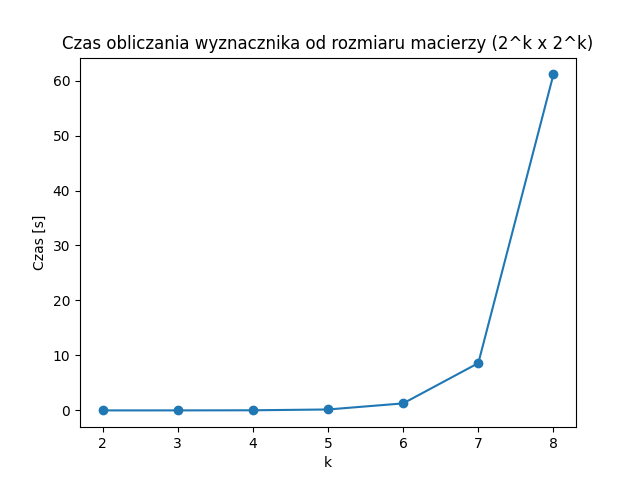
Wygenerowano wykres przedstawiający liczbę wykonanych operacji arytmetycznych z podziałem na dodawanie i odejmowanie w zależności od wielkości macierzy.

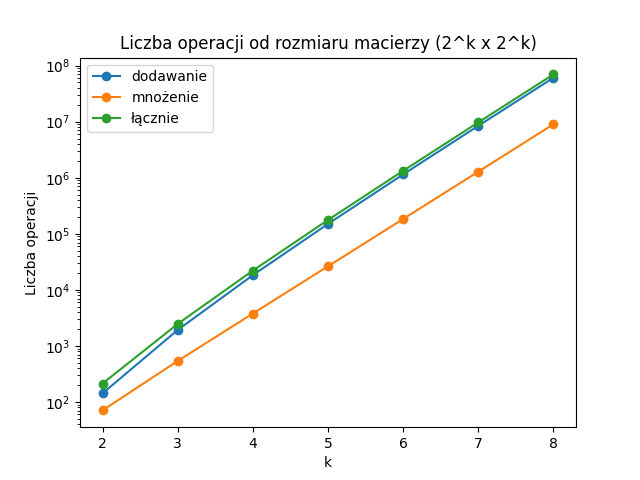
**3.2. Faktoryzacja LU**

Na poniższym wykresie przedstawiono czas działania algorytmu faktoryzacji LU macierzy w zależności od ilości elementów.

Wygenerowano wykres przedstawiający liczbę wykonanych operacji arytmetycznych w zależności od wielkości macierzy.

**3.3. Obliczanie wyznacznika macierzy**

Na poniższym wykresie przedstawiono czas działania algorytmu obliczającego wyznacznik macierzy w zależności od wielkości macierzy.

Wygenerowano wykres przedstawiający liczbę wykonanych operacji arytmetycznych w zależności od wielkości macierzy.

**3.4. Testy w MATLAB**

Przetestowano działanie algorytmów z tymi zaimplementowanymi w programie MATLAB.

Dla wygenerowanej macierzy 4x4:

zaimplementowane algorytmy zwróciły następujące wyniki:

* odwracanie macierzy:

* faktoryzacja LU
* obliczanie wyznacznika

1. **Wnioski**

Porównując ze sobą czas wyznaczania macierzy odwrotnej w przypadku iteracyjnym i rekurencyjnym można zauważyć, że sposób iteracyjny działa znacząco szybciej od sposobu rekurencyjnego. Może to być skutkiem tego, iż mimo że sposób rekurencyjny wykonuje mniej operacji mnożenia, to musi wykonać więcej operacji addytywnych (łącznie rozwiązanie rekurencyjne wykonuje więcej obliczeń). Dodatkowo należy pamiętać, że teoretycznie lepsza złożoność obliczeniowa nie zawsze oznacza szybszy algorytm (zależy to także od sposobu implementacji oraz czasu przeznaczonego np. na wywoływanie kolejnych funkcji).

Patrząc na wykresy przedstawiające czas obliczania faktoryzacji LU oraz wyznacznika można zauważyć, że czas ten znacząco zwiększa się dla większych macierzy. Bierze się to ze złożoności obliczeniowej oraz z ilości operacji którą musi wykonać algorytm. Warto również zauważyć, że w obu przypadkach ilość dodawań jest wyraźnie większa niż ilość mnożeń. Może mieć to wpływ na mniejszy błąd numeryczny. Dodatkowo można stwierdzić, że czas obliczania faktoryzacji LU wyznacznika jest do siebie zbliżony, ponieważ wyznaczanie wyznacznika macierzy to tak naprawdę faktoryzacja LU i obliczenie iloczynu diagonali wyznaczonych macierzy.

Porównując wyniki otrzymane przez rekurencyjne wyznaczanie odwrotności, faktoryzacji LU oraz wyznacznika macierzy z wynikami otrzymanymi w programie MATLAB można stwierdzić, że zaimplementowane algorytmy działają poprawnie z dokładnością do błędów numerycznych (inna faktoryzacja LU wynika z permutacji wierszy w programie MATLAB).

1. **Bibliografia**

* wykład z przedmiotu „Algorytmy macierzowe” przygotowany przez prof. dr hab. Macieja Paszyńskiego
* <https://en.wikipedia.org/wiki/LU_decomposition>
* Thomas H. Cormen - „Wprowadzenie do algorytmów”