Topologia I*

Witold Marciszewski & Wojciech Politarczyk

Semestr zimowy 2024/25

wersja z: *13 stycznia 2025*

Spis treści

[1] Ta Sekcja jest oparta na notatkach prof. Stefana Jackowskiego.

Spis rysunków

1 Przestrzenie metryczne i topologiczne

1.1 Przestrzenie metryczne

1.1.1 Przestrzenie metryczne — podstawowe definicje i przykłady

Definicja 1.1 (Metryka i przestrzeń metryczna). *Metryką* na zbiorze X nazywamy funkcję $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

1. $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$;

2. $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$;

3. $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Parę (X, d) nazywamy *przestrzenią metryczną*.

Konwencja
Elementy przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy *punktami*, a liczbę $d(x, y)$ *odległością* punktów x i y.

Uwaga
Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi $d(x, y) \geq 0$.

Dowód. Mamy

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

□

Przykład 1.2 (Metryka dyskretna). Niech X będzie dowolnym zbiorem, wówczas na X określamy metrykę dyskretną wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{gdy} \quad x = y. \end{cases}$$

Przykład 1.3 (Podprzestrzeń przestrzeni metrycznej). Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a Y podzbiorem X. Na Y rozważamy metrykę $d_Y = d|_{Y \times Y}$. Parę (Y, d_Y) nazywamy *podprzestrzenią przestrzeni* (X, d). Często piszemy d zamiast d_Y.

Definicja 1.4 (Norma i przestrzeń unormowana). *Normą* w przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) nazywamy funkcję

$$\|\cdot\|\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$$

spełniającą następujące warunki:

1. $\forall x \in X \quad \|x\| = 0 \iff x = 0;$

2. $\forall x \in X\ \forall t \in \mathbb{K} \quad \|tx\| = |t|\|x\|;$

3. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Definicja 1.5 (Metryka generowana przez normę). Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. *Metryka na X generowana przez normę* $\|\cdot\|$ jest zdefiniowana wzorem

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

dla $x, y \in X$.

Obserwacja
Metryka generowana przez normę jest *przesuwalna*, tzn. dla dowolnych $x, y, z \in X$ mamy $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Przykład 1.6 (Norma $\|\cdot\|_p$). Ustalmy $p \in [1, \infty)$. Dla dowolnego $n \geq 1$ oraz $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ definiujemy

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tak zdefiniowana funkcja jest normą na $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$.

Przykład 1.7 (Norma $\|\cdot\|_\infty$). Dla dowolnego $n \geq 1$ oraz dowolnego $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ definiujemy normę

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|).$$

Uwaga
Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$.

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Przykład 1.8 (Norma supremum na przestrzeni funkcji ciągłych). Niech $C[a, b]$ będzie przestrzenią liniową rzeczywistych (zespolonych) funkcji ciągłych na odcinku $[a, b]$. Dla $f \in C[a, b]$ definiujemy

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$$

Przykład 1.9 (Norma L^p na przestrzeni funkcji ciągłych)*.* Niech $C[a,b]$ będzie przestrzenią liniową rzeczywistych (zespolonych) funkcji ciągłych na odcinku $[a,b]$. Dla $f \in C[a,b])$ definiujemy

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Przykład 1.10*.* Oznaczenia standardowych metryk w skrypcie.

1. d_e — metryka euklidesowa na $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$, pochodząca od normy $\| \cdot \|_2$ (zob. [BCPP23, Przykład 1.1.2]);

2. d_s — metryka na $\mathbb{R}^n$, pochodząca od normy $\| \cdot \|_1$ (zob. [BCPP23, Przykład 1.1.6 (A)]);

3. d_m — metryka na $\mathbb{R}^n$ pochodząca od normy $\| \cdot \|_\infty$ (zob. [BCPP23, Przykład 1.1.6 (A)]);

4. $d_{\sup}$ — metryka na $C[a,b]$ pochodząca od normy $\| \cdot \|_\infty$ (zob. [BCPP23, Zadanie 1.6]).

1.1.2 Zbiory otwarte w przestrzeniach metrycznych

Definicja 1.11 (Kule w przestrzeni metrycznej)*.* Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną.

- *Kulą* w przestrzeni metrycznej (X,d) o środku w punkcie $a \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B_d(a,r) = \{x \in X \ : \ d(a,x) < r\}.$$

- *Kula domknięta* to zbiór

$$\overline{B}_d(a,r) = \{x \in X \ : \ d(a,x) \leq r\}.$$

Konwencja
Będziemy często stosowali skrótową notację $B(a,r)$ oraz $\overline{B}(a,r)$ zamiast $B_d(a,r)$ i $\overline{B}_d(a,r)$, o ile nie będzie to prowadziło do konfliktów.

Definicja 1.12 (Średnica zbioru)*.* • *Średnica podzbioru* A przestrzeni metrycznej (X,d) to

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}.$$

- Przez $\operatorname{diam}(X)$ oznaczamy średnicę przestrzeni X.

Konwencja
Przyjmujemy: $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$.

Definicja 1.13 (Zbiór ograniczony).
- Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X, d) jest *ograniczony* jeśli $\operatorname{diam}(A) < \infty$.
- Podobnie, przestrzeń metryczna (X, d) jest *ograniczona* jeśli $\operatorname{diam}(X) < \infty$ (metryka d jest funkcja ograniczoną).

Stwierdzenie 1.14. *Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X, d) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy jest zawarty w pewnej kuli $B(x, r)$.*

Dowód. Jeśli $\operatorname{diam}(A) < +\infty$, wówczas dla dowolnego $x \in A$ zachodzi

$$A \subset B(x, \operatorname{diam}(A)).$$

Zanim udowodnimy implikację w drugą stronę, zauważmy, że jeśli $A \subset B \subset X$, wówczas $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$. Dodatkowo, dla dowolnego $x \in X$ oraz $R > 0$ zachodzi $\operatorname{diam}(B(x, R)) \leq 2R$ (dlaczego?). Zatem, jeśli $A \subset B(x, R)$, dla pewnego $x \in X$ oraz pewnego $R > 0$, wówczas

$$\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B(x, R)) \leq 2R.$$

W konsekwencji, A jest zbiorem ograniczonym. □

Definicja 1.15. Odległość punktu x w przestrzeni metrycznej (X, d) od niepustego podzbioru $A \subset X$ jest zdefiniowana wzorem

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Definicja 1.16 (Zbiór otwarty). W przestrzeni metrycznej (X, d) zbiór $U \subseteq X$ jest *otwarty*, jeżeli dla każdego $x \in U$ istnieje $r > 0$ takie, że $B(x, r) \subset U$.

Definicja 1.17 (Topologia w przestrzeni metrycznej). Rodzinę $\tau(d)$ wszystkich zbiorów otwartych w (X, d) nazywamy *topologią* tej przestrzeni metrycznej albo *topologią generowaną przez metrykę d*.

Twierdzenie 1.18 (Własności topologii). *Topologia $\tau(d)$ przestrzeni metrycznej (X, d) ma następujące własności:*

1. *$\emptyset, X \in \tau(d)$;*
2. *przecięcie skończenie wielu elementów $\tau(d)$ jest elementem $\tau(d)$;*
3. *suma dowolnie wielu elementów $\tau(d)$ jest elementem $\tau(d)$.*

Dowód. Cała przestrzeń jest w sposób oczywisty zbiorem otwarty, zatem $X \in \tau(d)$. W przypadku zbioru pustego, warunek $x \in \emptyset$ jest zawsze fałszywy, zatem $\emptyset \in \tau(d)$.

Załóżmy, że mamy skończoną rodzinę $U_1, \cdots, U_k$ zbiorów otwartych. Jeśli $\bigcap_{i=0}^{k} U_i$, jest pusty, to, na mocy poprzedniego punktu,

$$\bigcap_{i=0}^{k} U_i \in \tau(d).$$

Możemy zatem założyć, że $\bigcap_{i=0}^{k} U_i \neq \emptyset$. Weźmy dowolny element $x \in \bigcap_{i=0}^{k} U_i$. Dla każdego $1 \leq i \leq k$ istnieje $R_i > 0$ takie, że $B(x, R_i) \subset U_i$. Biorąc $R = \min\{R_1, \ldots, R_k\}$, otrzymujemy

$$B(x, R) \subset \bigcap_{i=0}^{k} U_i,$$

zatem $\bigcap_{i=0}^{k} U_i$ jest zbiorem otwartym.

Załóżmy, że mamy daną dowolną rodzinę podzbiorów otwartych $\{U_t\}_{t \in T}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\bigcup_{t \in T} U_t \neq \emptyset$. Ustalmy dowolny $x \in \bigcup_{t \in T} U_t$. Istnieje $t_0 \in T$ takie, że $x \in U_{t_0}$ oraz $R > 0$ takie, że $B(x, R) \subset U_{t_0}$. Wówczas

$$B(x, R) \subset U_{t_0} \subset \bigcup_{t \in T} U_t,$$

zatem zbiór $\bigcup_{t \in T} U_t$ jest otwarty. $\square$

1.1.3 Zbieżność w przestrzeniach metrycznych

Definicja 1.19 (Zbieżność ciągu w przestrzeni metrycznej). Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów w przestrzeni metrycznej (X, d) jest *zbieżny* do punktu $x \in X$ (w metryce d), jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$.

Konwencja

Zbieżność ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ do punktu $x \in X$ w metryce d będziemy oznaczali przez $x_n \xrightarrow{\mathrm{d}} x$ (lub $x_n \to x$, o ile nie będzie to powodowało zamieszania).

Definicja 1.20 (Otoczenie).

- Dowolny zbiór otwarty $U \in \tau(d)$ zawierający $x \in X$ nazywamy *otwartym otoczeniem* x.
- *Otoczeniem* punktu x nazywamy dowolny zbiór zawierający otwarte otoczenie x (równoważnie, pewną kulę $B(x, r)$).

Stwierdzenie 1.21. *Załóżmy, że (x_n) jest ciągiem punktów w przestrzeni metrycznej (X, d) oraz $x \in X$. Wówczas, $x_n \xrightarrow{d} x$ wtedy, i tylko wtedy, gdy każde otoczenie punktu x zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n).*

Dowód. Załóżmy, że $x_n \to x$ oraz niech U będzie dowolnym otoczeniem x. Na mocy definicji istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $B(x, \epsilon) \subset U$. Zatem, ż faktu, że $x_n \to x$ wnioskujemy, że istnieje $N > 0$ takie, że dla dowolnego $n > N$ mamy $d(x, x_n) < \epsilon$. Zatem, dla dowolnego $n > N$, $x_n \in N$, co kończy dowód pierwszej implikacji.

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek, że każde otoczenie punktu x zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n). Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$. Zbiór $B(x, \epsilon)$ jest otoczeniem punktu x, zatem zawiera ono prawie wszystkie wyrazy ciągu x_n. Stąd, istnieje $N > 0$ takie, że dla $n > N$ mamy $d(x_n, x) < \epsilon$. Zatem, $x_n \to x$. □

Stwierdzenie 1.22.

- *Każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej ma dokładnie jedną granicę.*
- *Każdy podciąg ciągu zbieżnego zbiega do tej samej granicy.*

Dowód. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem punktów z przestrzeni metrycznej (X, d) oraz załóżmy, że $x_n \to x$ oraz $x_n \to y$, dla pewnych $x, y \in X$. Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$. Na mocy definicji istnieje $N > 0$ takie, że dla dowolnych $n > N$ zachodzi $d(x_n, x) < \epsilon/2$ oraz $d(x_n, y) < \epsilon/2$. Ustalmy $n_0 > N$, wówczas

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \epsilon.$$

Z dowolności ϵ wynika, że $d(x, y) = 0$, czyli $x = y$.

Dowód drugiego punktu zostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika. □

1.1.4 Równoważność metryk

Definicja 1.23 (Równoważność metryk). Niech X będzie zbiorem oraz załóżmy, że mamy dane dwie metryki d_1 oraz d_2 na X.

- Mówimy, że metryka d_1 jest *zdominowana* przez metrykę d_2, co oznaczamy $d_1 \preceq d_2$, jeśli $\tau(d_1) \subset \tau(d_2)$.
- Metryki d_1, d_2 na zbiorze X są *równoważne*, jeżeli $\tau(d_1) = \tau(d_2)$. Równoważnie, metryki d_1 i d_2 są równoważne, jeżeli $d_1 \preceq d_2$ oraz $d_2 \preceq d_1$.

Lemat 1.24. *Załóżmy, że mamy dane dwie metryki d_1 i d_2 na zbiorze X. Następujące warunki są równoważne.*

1. $d_1 \preceq d_2$*,*

2. każda kula w metryce d_1 *jest otwarta w metryce* d_2*,*

3. dla każdego $x \in X$ *i każdego* $R > 0$ *istnieje* $r > 0$ *takie, że* $B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, R)$*,*

4. jeśli $(x_n)_n$ *jest ciągiem punktów z* X*, wówczas* $x_n \xrightarrow{d_2} x$ *implikuje, że* $x_n \xrightarrow{d_1} x$*.*

Dowód. Równoważność (1) $\iff$ (2) oraz implikacja (2) $\Rightarrow$ (3) wynikają wprost z definicji.

(3) $\Rightarrow$ (2). Niech $U \in \tau(d_1)$. Ustalmy dowolny element $x \in U$. Na mocy definicji, istnieje $R > 0$ takie, że $B_{d_1}(x, R) \subset U$. Korzystając z warunku (3) znajdujemy $r > 0$ takie, że

$$B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, R) \subset U,$$

zatem $U \in \tau(d_2)$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Załóżmy, że $x_n \xrightarrow{d_2} x$ oraz ustalmy $\epsilon > 0$. Korzystając z założenia znajdujemy $\epsilon' > 0$ takie, że $B_{d_2}(x, \epsilon') \subset B_{d_1}(x, \epsilon)$. Na mocy definicji istnieje $N > 0$ takie, że dla $n > N$ zachodzi

$$x_n \in B_{d_2}(x, \epsilon') \subset B_{d_1}(x, \epsilon).$$

Zatem $x_n \xrightarrow{d_1} x$.

(4) $\Rightarrow$ (3). Dowód nie wprost. Zatem zakładamy, że zachodzi (4) oraz istnieje $x_0 \in X$ oraz istnieje $R > 0$ takie, że dla dowolnego $r > 0$ mamy

$$B_{d_2}(x, r) \setminus B_{d_1}(x, R) \neq \emptyset.$$

Skonstruujmy ciąg punktów $(x_n)_n$ biorąc $x_n \in B_{d_2}(x, 1/n) \setminus B_{d_1}(x, R)$. Wówczas $x_n \xrightarrow{d_2} x$ oraz żaden element ciągu $(x_n)_n$ nie należy do $B_{d_1}(x, R)$. W szczególności, to oznacza, że ciąg $(x_n)_n$ nie zbiega do x w metryce d_1, co prowadzi do sprzeczności z (4). $\square$

Twierdzenie 1.25 (Warunki równoważności metryk)**.** *Niech* d, d' *będą metrykami na zbiorze* X*. Następujące warunki są równoważne:*

1. metryki d *i* d' *są równoważne;*

2. kule w d *są otwarte w* d' *i na odwrót;*

3. *dla każdego ciągu* (x_n) *i punktu* x *mamy* $x_n \xrightarrow{d} x$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x_n \xrightarrow{d'} x$.

Dowód. Twierdzenie jest prostym wnioskiem z Lematu 1.24. $\square$

Przykład 1.26. W $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ łatwo sprawdzić, że dla dowolnych $p > q \geq 1$ (p może być równe ∞) istnieją stałe $C_1(n,p,q), C_2(n,p,q) > 0$ (jakie to stałe?) takie, że

$$C_1(n,p,q)|\cdot|_p \leq |\cdot|_q \leq C_2(n,p,q)|\cdot|_p,$$

zatem metryki wyznaczone przez normy $|\cdot|_p$ i $|\cdot|_q$ są równoważne.

Przykład 1.27. W Przykładzie 1.8 oraz Przykładzie 1.9 zdefiniowaliśmy przykładowe normy na przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,1]$.

- Łatwo sprawdzić, że zachodzi nierówność

$$||\cdot||_p \leq ||\cdot||_\infty,$$

  zatem $d_{L^p} \preceq d_{\text{sup}}$ (co łatwo wynika z punktu (3) Lematu 1.24).

- Okazuje się, że $d_{\text{sup}} \not\preceq d_{L_p}$, tj. metryka d_{sup} generuje istotnie więcej zbiorów otwartych niż każda z metryk d_{L_p}, dla $p \geq 1$.

Przykład 1.28. [BCPP23, Przykład 1.1.7 (B)] Rozważmy zbiór

$$\mathbb{R}^\infty = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots,) \in \mathbb{R}^\omega : x_i = 0 \text{ dla prawie wszystkich } i\}.$$

- Rozważmy dwie metryki na $\mathbb{R}^\infty$

$$d_e(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty}(x_i - y_i)^2}, \quad d_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{\infty}|x_i - y_i|.$$

Przykład 28 cd.

- Rozważmy ciąg

$$\mathbf{x}_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, \ldots\Big)$$

- mamy

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{d_e} \mathbf{0}, \quad \text{ale} \quad \mathbf{x}_n \stackrel{d_s}{\not\to} \mathbf{0}.$$

  Zatem $d_s \not\preceq d_e$.

- Czy prawdą jest, że $d_e \preceq d_s$?

Przykład 1.29. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.

- Ustalmy pewną stałą $\delta > 0$. Na zbiorze X określamy nową metrykę

$$d_\delta(x, y) = \min\{d(x, y), \delta\}.$$

- Nietrudno sprawdzić, że każda kula w metryce d jest otwarta względem d_δ i na odwrót, zatem obie metryki są równoważne na mocy Twierdzenia 1.25.

1.1.5 Dalsze przykłady przestrzeni metrycznych

Przykład 1.30.

- *Metryka kolejowa* na $\mathbb{R}^2$, zob. [BCPP23, Zadanie 1.1].
- *Metryka rzeki* na $\mathbb{R}^2$, zob. [BCPP23, Zadanie 1.2].

Uwaga
Warto zapoznać się z tymi dwoma metrykami, ponieważ mogą pojawić się na kolokwium lub egzaminie.

Przykład 1.31. Niech $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną przestrzeni metrycznych.

- Dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \prod_{n\in n} X_n$ wyrażenia postaci

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} d_n(x_n, y_n), \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x_n, y_n)^p\right)^{1/p}, \ p \geq 1$$

  na ogół nie mają sensu.

- Jeśli ustalimy stałą $\delta > 0$, wówczas możemy zdefiniować następujące metryki na $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$

$$d_{\sup,\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_{n,\delta}(x_n, y_n), \quad d_{p,\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_{n,\delta}(x_s, y_s)^p\right)^{1/p}.$$

1.2 Przestrzenie topologiczne

1.2.1 Przestrzenie topologiczne – podstawowe definicje i przykłady

Definicja 1.32 (Przestrzeń topologiczna). Parę (X, τ), gdzie X to zbiór, a τ to rodzina podzbiorów X nazywamy *przestrzenią topologiczną*, jeżeli τ spełnia warunki:

1. $\emptyset$, $X \in \tau$;
2. przecięcie skończenie wielu elementów τ należy do τ;
3. suma dowolnie wielu elementów τ należy do τ.

Elementy τ nazywamy *zbiorami otwartymi*, a τ topologią na X.

Definicja 1.33 (Metryzowalność). Topologia τ na X jest *metryzowalna*, jeżeli istnieje metryka d na X taka, że $\tau = \tau(d)$.

Definicja 1.34. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. X ma *własność Hausdorffa*[2] (jest *Hausdorffa*, jest T_2*-przestrzenią*), jeśli dla dowolnej pary różnych punktów $x, y \in X$, istnieją rozłączne zbiory otwarte $U, V \in \tau$ takie, że $x \in U,\ y \in V$.

Stwierdzenie 1.35. *Przestrzenie metryzowalne mają własność Hausdorffa.*

Dowód. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $x, y \in X$, wówczas biorąc $R = d(x, y)$, szukanymi zbiorami są

$$U = B(x, R/2), \quad V = B(y, R/2).$$

Gdyby $z \in B(x, R/2) \cap B(y, R/2)$, wówczas

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < R,$$

co prowadzi do sprzeczności, zatem $B(x, R/2) \cap B(y, R/2) = \emptyset$. $\square$

Przykład 1.36. Niech X będzie dowolnym zbiorem takim, że $|X| > 1$.

- Na X możemy rozważać *topologię dyskretną* $\tau_{\mathrm{d}}(X) = \mathcal{P}(X)$ oraz *topologię antydyskretną* $\tau_{\mathrm{ad}}(X) = \{\emptyset, X\}$.
- Jeśli X jest zbiorem nieskończonym, to możemy rozważać na X tzw. *topologię koskończoną* (cofinite topology) (proszę sprawdzić, że spełnione są aksjomaty!)

$$\tau_{\mathrm{cofin}}(X) = \{U \subset X : |X \setminus U| < \infty\}.$$

[2]Felix Hausdorff – niemiecki matematyk.

- Dla dowolnego $x \in X$ definiujemy *topologię wyróżnionego punktu* oraz *topologię wykluczonego punktu*

$$\tau_{\mathrm{incl}(x)}(X) = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x \in U\},$$
$$\tau_{\mathrm{excl}(x)}(X) = \{X\} \cup \{U \subset X : x \notin U\}.$$

Uwaga
Żadna z powyższych przestrzeni topologicznych (poza topologią dyskretną) nie ma własności Hausdorffa (proszę sprawdzić!), więc żadna z nich *nie jest metryzowalna.*

Przykład 1.37.

- Przez τ_e będziemy oznaczali *topologię euklidesową* na $\mathbb{R}^n$, tj. topologię generowaną przez metrykę euklidesową d_e. Zob. punkt 1 z Przykładu 1.10.

- Przez τ_k i τ_{rz} będziemy oznaczali topologie generowane przez metrykę kolejową i metrykę rzeki, odpowiednio, na $\mathbb{R}^2$.

1.2.2 Zbiory domknięte oraz operacja domknięcia

Definicja 1.38 (Zbiór domknięty). Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest *domknięty*, jeżeli zbiór $X \setminus A$ jest otwarty.

Twierdzenie 1.39. *Rodzina zbiorów domkniętych w przestrzeni topologicznej (X, τ) ma następujące własności:*

1. *$\emptyset$, X są domknięte;*

2. *suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym;*

3. *Przecięcie dowolnie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.*

Dowód. Dowód: Prosta konsekwencja Definicji 1.32 oraz praw de Morgana. □

Definicja 1.40 (Operacja domknięcia). *Domknięcie* podzbioru A przestrzeni topologicznej (X, τ) to $\mathrm{cl}_X A = \overline{A} = \bigcap\{F : A \subseteq F,\ F \text{ domknięty w } X\}$ — najmniejszy domknięty podzbiór X zawierający A.

Obserwacja
Zbiór A jest domknięty w X wtedy i tylko wtedy gdy $A = \mathrm{cl}_X A$.

Definicja 1.41 (Otoczenie). Dowolny zbiór otwarty $U \in \tau$ zawierający punkt x przestrzeni topologicznej (X, τ) nazywamy *otwartym otoczeniem* x. *Otoczeniem* punktu x nazywamy dowolny zbiór zawierający otwarte otoczenie x.

Stwierdzenie 1.42. *Punkt x należy do domknięcia podzbioru A przestrzeni topologicznej (X, τ) wtedy i tylko wtedy, gdy każde (otwarte) otoczenie x przecina niepusto zbiór A.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $x \in \mathrm{cl}_X(A) \setminus A$ i niech U będzie dowolnym otwartym otoczeniem x. Gdyby $U \cap A = \emptyset$, wówczas zbiór $B = X \setminus U$ jest domknięty, $A \subset B$ oraz $x \notin B$, zatem $x \notin \mathrm{cl}_X(A)$, co jest sprzeczne z założeniem.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że każde otwarte otoczenia punktu x przecina niepusto A. Jeśli $x \notin \mathrm{cl}_X(A)$, to oznacza, że istnieje zbiór domknięty $B \subset X$ taki, że $A \subset B$ oraz $x \notin B$. Wówczas $U = X \setminus B$ jest otoczeniem punkt x, które nie przecina zbioru A. Doszliśmy, do sprzeczności, zatem $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. □

Twierdzenie 1.43 (Własności operacji domknięcia)**.** *Operacja domknięcia ma następujące własności:*

1. $\mathrm{cl}\,\emptyset = \emptyset$;
2. $A \subseteq \mathrm{cl}\,A$;
3. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}\,A \cup \mathrm{cl}\,B$;
4. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\,A) = \mathrm{cl}\,A$.

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 1.44. Ciąg punktów $(x_n)_n$ przestrzeni topologicznej (X, τ) *zbiega do punktu* $x \in X$ (ozn. $x_n \to x$) jeśli każde otoczenie x zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu $(x_n)_n$.

Stwierdzenie 1.45. *Punkt x należy do domknięcia podzbioru A metryzowalnej przestrzeni (X, τ) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg (x_n) punktów A zbieżny do x.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Na mocy Stwierdzenia 1.42, dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ mamy $B_d(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. Wybierając wyrazy ciągu $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$ otrzymujemy ciąg o żądanych własnościach.

($\Leftarrow$) Niech U będzie dowolnym otoczeniem x. Z faktu, że $x_n \xrightarrow{x}$ wynika, że

$$\emptyset \neq U \cap \{x_n \colon n \in \mathbb{Z}_+\} \subset U \cap A.$$

Zatem, na mocy Stwierdzenia 1.42, $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. □

Wniosek 1.46. *Podzbiór A metryzowalnej przestrzeni (X, τ) jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy zawiera granice wszystkich zbieżnych ciągów punktów z A.*

Dowód. Prosty wniosek ze Stwierdzenia 1.45. □

1.2.3 Wnętrze i brzeg zbioru

Definicja 1.47 (Wnętrze i brzeg). Operacje *wnętrza* i *brzegu* (ograniczenia) podzbioru A przestrzeni topologicznej (X, τ) definiujemy w następujący sposób:

- $\operatorname{int}_X A = \bigcup\{U \subseteq A \colon U \text{ otwarty w } X\}$ — wnętrze zbioru A w X;
- $\operatorname{bd}_X A = \operatorname{cl}_X A \setminus \operatorname{int}_X A$ — brzeg zbioru A.

Stwierdzenie 1.48. *Dla każdego podzbioru A przestrzeni topologicznej (X, τ) zachodzą równości*

- $\operatorname{int}_X A = X \setminus \operatorname{cl}_X(X \setminus A)$;
- $\operatorname{bd}_X A = \operatorname{cl}_X A \cap \operatorname{cl}_X(X \setminus A)$.

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Stwierdzenie 1.49. *Operacje wnętrza, domknięcia i brzegu w przestrzeni X mają następujące własności:*

1. $\operatorname{int} X = X$;
2. $\operatorname{int} A \subseteq A$;
3. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;
4. $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$;
5. $\operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{bd} A$;
6. $\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{bd} A$;
7. $\operatorname{bd}(X \setminus A) = \operatorname{bd} A$;
8. $\operatorname{cl}(A \cap B) \subseteq \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$;
9. $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$;
10. $\operatorname{bd}(A \cup B) \subseteq \operatorname{bd} A \cup \operatorname{bd} B$;

11. $\operatorname{bd}(A \cap B) \subseteq \operatorname{bd} A \cup \operatorname{bd} B$.

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. $\square$

Stwierdzenie 1.50. *Punkt x należy do wnętrza podzbioru A przestrzeni (X, τ) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje otoczenie punktu x zawarte w A.*

Dowód. Prosty wniosek ze Stwierdzenia 1.42 oraz równości $\operatorname{int}_X A = X \setminus \operatorname{cl}_X(X \setminus A)$ ze Stwierdzenia 1.48. $\square$

Wniosek 1.51. *Punkt x należy do wnętrza podzbioru A przestrzeni metrycznej (X, d) wtedy i tylko wtedy gdy pewna kula $B_d(x, r)$ o środku w x jest zawarta w A.*

Dowód. Łatwy wniosek ze stwierdzenia 1.45. $\square$

Stwierdzenie 1.52. *Zbiór U w przestrzeni (X, τ) jest otoczeniem punktu $x \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \in \operatorname{int} U$.*

Dowód. Prosty wniosek ze Stwierdzenia 1.48. $\square$

1.2.4 Baza topologii i aksjomaty przeliczalności

Definicja 1.53. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną.

- Rodzinę $\mathcal{B}$ podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznej (X, τ) nazywamy *bazą topologii* τ, jeśli dla dowolnego $U \in \tau$ i $x \in U$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ spełniające $x \in B \subset U$.

- Równoważnie, możemy zapisać ten warunek w postaci
$$\tau = \left\{ \bigcup \mathcal{C} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

- Jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą topologii τ, wówczas mówimy, że $\mathcal{B}$ *generuje topologię* τ (τ jest generowana przez $\mathcal{B}$).

Twierdzenie 1.54. *Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X spełniającą warunki*

1. $\bigcup \mathcal{B} = X$*;*

2. dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $x \in B_1 \cap B_2$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ takie, że $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Wówczas rodzina τ zbiorów $U \subset X$ takich, że jeśli $x \in U$, to $x \in B \subset U$ dla pewnego $B \in \mathcal{B}$ ($\tau = \{\bigcup \mathcal{C} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$), jest topologią w X.

Dowód Twierdzenia 1.54. Musimy sprawdzić, że rodzina τ spełnia warunki z Definicji 1.32. Warunek (1) spełniony jest w sposób trywialny.

Aby sprawdzić warunek (2), wystarczy sprawdzić, że przecięcie dwóch elementów $U_1, U_2 \in \tau$ należy do τ. Weźmy dowolne $x \in U_1 \cap U_2$. Na mocy definicji, istnieją $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takie, że

$$x \in B_1 \subset U_1, \quad x \in B_2 \subset U_2.$$

Korzystając z założenia znajdujemy zbiór $B_3 \in \mathcal{B}$ taki, że

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2.$$

Z dowolności wyboru x wynika, że $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Sprawdzenie warunku (3) zostawiamy czytelnikowi. □

Przykład 1.55. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, wówczas rodzina

$$\mathcal{B} = \{B_d(x, 1/n) \colon x \in X,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$$

jest bazą topologii $\tau(d)$.

Przykład 1.56. Niech τ_S będzie topologią na prostej $\mathbb{R}$ generowaną przez rodzinę wszystkich przedziałów postaci $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Przestrzeń $(\mathbb{R}, \tau_S)$ nazywamy *strzałką*[3].

Przykład 1.57. Niech $<$ będzie porządkiem liniowym na zbiorze X mocy $|X| \geq 2$.

- Rodzina wszystkich przedziałów postaci $\{y : y < x\}$, $\{y : x < y\}$, oraz $\{z : x < z < y\}$ spełnia warunki (i) i (ii) Twierdzenia 1.54. Topologię generowaną przez tę bazę nazywamy *topologią porządkową* i będziemy oznaczać symbolem $\tau(<)$.

- Biorąc $(X, <) = (\mathbb{R}, <)$, $\tau(<)$ jest topologią euklidesową.

- Biorąc $(X, <) = (I^2, <_{\mathrm{lex}})$, gdzie $I = [0, 1]$ oraz

  $$(x_1, y_1) <_{\mathrm{lex}} (x_2, y_2) \iff (x_1 < x_2) \text{ lub } (x_1 = x_2 \text{ oraz } y_1 < y_2).$$

  Przestrzeń $(I^2, \tau(<_{\mathrm{lex}}))$ nazywamy *kwadratem leksykograficznym*. Kwadrat leksykograficzny nie jest przestrzenią metryzowalną, zob. Przykład 1.103.

[3] Ang. *Sorgenfrey line*, od nazwiska amerykańskiego matematyka Roberta Sorgenfreya.

Definicja 1.58. *Baza otoczeń punktu x* w przestrzeni topologicznej (X, τ) to rodzina $\mathcal{B}_{x_0}$ otoczeń punktu x_0 taka, że dla każdego otoczenia U punktu x_0 istnieje $V \in \mathcal{B}_{x_0}$ zawarte w U.

Przykład 1.59. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, wówczas dla dowolnego $x_0 \in X$, rodzina kul o środku w x_0 tworzy bazę otoczeń punktu x_0.

Definicja 1.60. Przestrzeń topologiczna (X, τ) spełnia *I aksjomat przeliczalności* jeśli każdy punkt $x \in X$ ma przeliczalną bazę otoczeń.

Stwierdzenie 1.61. *Każda przestrzeń metryzowalna spełnia I aksjomat przeliczalności.*

Dowód. Wybierzmy punkt x_0 z przestrzeni metrycznej (X, d). Rodzina $\mathcal{B}_{x_0} = \{B_d(x_0, r)\}_{r \in \mathbb{Q}}$ jest przeliczalną bazą otoczeń w x_0. □

Stwierdzenie 1.62. *Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną oraz $A \subset X$.*

- *Jeśli istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów zbioru A taki, że $x_n \to x_0$, wówczas $x_0 \in \mathrm{cl}(A)$.*
- *Jeśli (X, τ) spełnia I aksjomat przeliczalności, wówczas z faktu, że $x_0 \in \mathrm{cl}(A)$ wynika, że istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów z A taki, że $x_n \to x_0$*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 1.63. Niech(X, τ) będzie przestrzenią topologiczną.

- *Ciężar $w(X)$ przestrzeni topologicznej* (X, τ) to minimalna moc bazy X.
- Jeśli X ma przeliczalną bazę, czyli $w(X) \leq \aleph_0$, to mówimy, że X spełnia *II aksjomat przeliczalności.*

Przykład 1.64. Dla dowolnego $n \neq 1$, przestrzenie $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ spełniają drugi aksjomat przeliczalności. Jako bazę w tych przestrzeniach możemy wziąć rodzinę wszystkich kostek

$$Q = (q_1, q_2) \times (q_3, q_4) \times \cdots \times (q_{2n-1}, q_{2n}), \text{ gdzie } q_1, q_2, \ldots, q_{2n-1}, q_{2n} \in \mathbb{Q}.$$

Przykład 1.65.

- Rozważmy strzałkę $(\mathbb{R}, \tau_S)$ z przykładu 1.56.
- Strzałka spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności, bo dla $x \in \mathbb{R}$, rodzina
$$\mathcal{B}_x = \{(x - 1/n, x] \colon n = 1, 2, \ldots\}$$
jest przeliczalną bazą otoczeń punktu x.

- Strzałka nie spełnia drugiego aksjomatu przeliczalności.
- Gdyby $\mathcal{B}$ była przeliczalną bazą, wówczas dla każdego $x \in \mathbb{R}$ wybieramy $B_x \in \mathcal{B}$ taki, że
$$x \in B_x \subset (x-1, x].$$
- Dla $x \neq y$ zachodzi $B_x \neq B_y$ (ponieważ $x = \sup B_x$).
- Zatem rodzina $\mathcal{B}$ musi być nieprzeliczalna.

1.2.5 Nieskończoności zbioru liczb pierwszych

W tym rozdziale przedstawimy dowód twierdzenia o nieskończoności zbioru liczb pierwszych podany przez Hillela Furstenberga[4], zob. [Fur55, AZ14]. Dowód ten jest o tyle ciekawy, że wyrażony jest w języku topologii.

Definicja 1.66.
- Ustalmy $a, b \in \mathbb{Z}$ takie, że $a \neq 0$. Zdefiniujmy
$$S(a,b) = \{an + b \colon n \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z} + b.$$
- Rodzina
$$\mathcal{B}_F = \{S(a,b) \colon a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0\}.$$
Spełnia warunki z Twierdzenia 1.54, zatem jest bazą pewnej topologii na zbiorze liczb całkowitych.
- Oznaczmy przez τ_F topologię generowaną przez $\mathcal{B}_F$.

Lemat 1.67. *Rozważmy przestrzeń topologiczną $(\mathbb{Z}, \tau_F)$.*

- *Każdy zbiór bazowy $S(a,b) \in \mathcal{B}_F$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $a \neq 0$, jest otwarty i domknięty.*
- *Żaden podzbiór skończony $\mathbb{Z}$ nie jest otwarty w tej topologii.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Twierdzenie 1.68. *Zbiór liczb pierwszych $\mathbb{P}$ jest nieskończony.*

Dowód.
- Zauważmy, że zachodzi równość
$$\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} S(p, 0).$$

[4]Zob. https://en.wikipedia.org/wiki/Hillel_Furstenberg

- Gdyby zbiór $\mathbb{P}$ był skończony, to, z faktu, że zbiory $S(p, 0)$ są domknięte (zob. p. (1) Lematu 1.67), wynika, że lewa strona, tj. $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ jest domknięty.
- To oznacza, że zbiór $\{\pm 1\}$ jest otwarty, co przeczy p. (2) z Lematu 1.67.
- Zatem zbiór $\mathbb{P}$ musi być nieskończony.

□

1.3 Ciągłość w przestrzeniach metrycznych i topologicznych

1.3.1 Ciągłość w przestrzeniach metrycznych

Lemat 1.69. *Rozważmy przestrzenie metryczne (X, d_X) oraz (Y, d_Y) oraz niech $x_0 \in X$. Dla odwzorowania $f\colon X \to Y$ następujące warunki są równoważne*

(1) (Warunek Cauchy'ego[5])

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\ [\ d_X(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\ ],$$

(2) (Warunek Heinego[6])

$$\forall_{(x_n)_n}\, x_n \in X\ \ [x_n \to x_0 \ \Rightarrow f(x_n) \to f(a)]$$

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 1.70.
- Rozważmy przestrzenie metryczne (X, d_X) oraz (Y, d_Y) oraz $x_0 \in X$. Jeśli $f\colon X \to Y$, to mówimy, że f jest *ciągłe* w x_0, gdy spełniony jest jeden z warunków (1) lub (2) z Lematu 1.69.
- Mówimy, że f jest *ciągła*, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in X$.

Stwierdzenie 1.71. *Rozważmy przestrzenie metryczne (X, d_X) oraz (Y, d_Y) oraz niech $x_0 \in X$. Rozważmy odwzorowanie $f\colon X \to Y$.*

(1) f jest ciągłe w $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia U punktu $f(x_0)$ w Y, istnieje otoczenie V punktu x_0 w X takie, że $f(V) \subseteq U$.

[5] Augustin-Louis Cauchy – francuski matematyk.
[6] Heinrich Eduard Heine – niemiecki matematyk.

(2) Przekształcenie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $U \in \tau(d_Y)$, $f^{-1}(U) \in \tau(d_X)$.

Dowód. Zauważmy, że warunek (1) z Lematu 1.69 można sformułować równoważnie w następujący sposób:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ f(B_{d_X}(x_0, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x_0), \epsilon). \tag{1.1}$$

Zauważmy, że na mocy Wniosku 1.51 oraz Stwierdzenia 1.52 zbiór $U \subset Z$ jest otoczeniem punktu $z \in Z$, gdzie (Z, d_Z) jest przestrzenią metryczną, wtedy i tylko wtedy, gdy $B_{d_Z}(z, R) \subset U$, dla pewnego $R > 0$. Zatem warunek (1.1) jest równoważny warunkowi 1.

Aby uzasadnić warunek (2), zauważmy, że warunek (1)można sformułować następująco. Odwzorowanie f jest ciągłe w punkcie $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego otoczenia V punktu $f(x_0)$, mamy $x_0 \in \mathrm{int}(f^{-1}(V))$. W szczególności, jeśli $V \subset Y$ jest otwarty, to jest otoczeniem każdego swojego punktu. Zatem, jeśli f jest ciągłe w każdym punkcie, to dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ zachodzi warunek, że jeśli $f(x_0) \in V$, gdzie V otwarty, to $x_0 \in \mathrm{int}(f^{-1}(V))$. Zatem, $f^{-1}(V) = \mathrm{int}(f^{-1}(V))$, co oznacza, że $f^{-1}(V)$ jest otwarty. □

1.3.2 Ciągłość w przestrzeniach topologicznych

Definicja 1.72. Przekształcenie $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej (X, τ_X) w przestrzeń (Y, τ_Y) jest *ciągłe w punkcie* $x_0 \in X$, jeśli dla każdego otoczenia U punktu $f(x_0)$ w Y, istnieje otoczenie V punktu x_0 w X takie, że $f(V) \subseteq U$.

Definicja 1.73. Przekształcenie $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej (X, τ_X) w przestrzeń (Y, τ_Y) jest *ciągłe*, jeśli dla każdego $U \in \tau(d_Y)$, $f^{-1}(U) \in \tau(d_X)$.

Twierdzenie 1.74. *Dla przekształcenia $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej (X, τ_X) w przestrzeń (Y, τ_Y) następujące warunki są równoważne:*

1. *f jest przekształceniem ciągłym;*
2. *f jest ciągłe w każdym punkcie przestrzeni X;*
3. *dla każdego domkniętego podzbioru F przestrzeni Y, zbiór $f^{-1}(F)$ jest domknięty w X;*
4. *$f(\mathrm{cl}_X A) \subseteq \mathrm{cl}_Y f(A)$, dla każdego $A \subseteq X$.*

Dowód. Równoważność (1) $\iff$ (2) wynika z faktu, że warunek ciągłości w punkcie x_0 można równoważnie sformułować następująco (zob. dowód Stwierdzenia 1.71): f jest ciągła w $x_0 \in X$ jeśli dla dowolnego otoczenia $V \subset Y$ punktu $f(x_0) \in Y$, punkt x_0 leży w $\mathrm{int}(f^{-1}(V))$.

Aby uzasadnić równoważność (1) $\iff$ (3) zauważmy, że jeśli $F \subset Y$ jest domknięty, wówczas $U = Y \setminus F$ jest otwarty. Dodatkowo mamy $X = f^{-1}(U \cup F) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(F)$. Zatem, $f^{-1}(F)$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(U)$ jest otwarty.

Na koniec, udowodnimy równoważność (3) $\iff$ (4). Zacznijmy of implikacji (3) $\Leftarrow$ (4). Niech $A \subset X$ będzie dowolnym zbiorem. Zbiór $F = \mathrm{cl}_Y(f(A))$ jest domknięty, zatem $f^{-1}(F)$ jest również domknięty. Dodatkowo, $A \subset f^{-1}(F)$, zatem $\mathrm{cl}_X(A) \subset f^{-1}(F)$. Równoważnie, $f(\mathrm{cl}_X(A)) \subset F = \mathrm{cl}_Y(f(A))$.

(4) $\Leftarrow$ (3). Niech $F \subset Y$ będzie domknięty. Wówczas, biorąc $A = f^{-1}(F)$ mamy

$$\mathrm{cl}_X(A) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}_Y f(A)) = f^{-1}(\mathrm{cl}_Y(F)) = f^{-1}(F) = A.$$

Zatem, $A = \mathrm{cl}_X(A)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 1.75. *Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami Hausdorffa oraz niech będzie dane odwzorowanie $f\colon X \to Y$.*

1. *Jeśli f jest ciągłe, to dla dowolnego ciągu $(x_n)_n$ punktów przestrzeni X takiego, że $x_n \to x$, zachodzi $f(x_n) \to f(x)$.*

2. *Implikacja w drugą stronę zachodzi tylko jeśli X spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności.*

Dowód. Weźmy dowolne otoczenie otwarte V punktu $f(x)$. Na mocy założenia $f^{-1}(V)$ jest otoczeniem otwartym x, zatem zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu $(x_n)_n$. Zatem V zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu $(f(x_n))_n$, co pokazuje, że $f(x_n) \to f(x)$.

Załóżmy teraz, że X spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności oraz dla każdego ciągu $(x_n)_n$ punktów przestrzeni X, dla którego $x_n \to x$, zachodzi również $f(x_n) \to f(x)$. Pokażemy, że dla dowolnego $A \subset X$ zachodzi $f(\mathrm{cl}_X(A)) \subset \mathrm{cl}_Y f(A)$, co na mocy Twierdzenia 1.74 implikuje ciągłość f.

Niech $A \subset X$ będzie dowolnym podzbiorem. Wybierzmy $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Skoro X spełnia I aksjomat przeliczalności, to na mocy Stwierdzenia 1.62 istnieje ciąg punktów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $x_n \to x$. Z założenia wynika, że $f(x_n) \to f(x)$, zatem, ponownie korzystając ze Stwierdzenia 1.62, wnioskujemy, że $f(x) \in \mathrm{cl}_Y(f(A))$, co kończy dowód. □

Definicja 1.76. *Podbazą* przestrzeni topologicznej (X, τ) nazywamy rodzina $\mathcal{P} \subseteq \tau$ taka, że $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{S} : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P} \text{ skończona}\}$ jest bazą (X, τ).

Stwierdzenie 1.77. *Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem przestrzeni (X, τ_X) w (Y, τ_Y). f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy istnieje podbaza $\mathcal{P}$ przestrzeni Y taka, że $f^{-1}(U) \in \tau_X$ dla każdego $U \in \mathcal{P}$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Każdy element $P \in \mathcal{P}$ jest zbiorem otwartym, zatem, jeśli f ciągłe, to $f^{-1}(P)$ jest otwarte.

($\Leftarrow$) Niech $U \subset Y$ będzie otwarty. Skoro rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą topologii, to istnieje rodzina $\{U_t\}_{t\in T}$ elementów $\mathcal{B}$ taka, że

$$U = \bigcap_{t\in T} U_t.$$

Co więcej, dla każdego $t \in T$ znajdziemy skończoną rodzinę $\{V_{t,k}\}_{k\in A_t}$ elementów $\mathcal{P}$ taką, że

$$U_t = \bigcap_{k\in A_t} V_{t,k}.$$

Na mocy założenia, dla każdego $t \in T$ i każdego $k \in A_t$, zbiór $f^{-1}(A_t)$ jest otwarty. Zatem

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{t\in T}\bigcap_{k\in A_t} V_{t,k}\right) = \bigcup_{t\in T}\bigcap_{k\in A_t} f^{-1}(V_{t,k})$$

jest również otwarty, co dowodzi ciągłości f. □

Definicja 1.78. Przekształcenie $h : X \to Y$ przestrzeni topologicznej (X, τ_X) w przestrzeń (Y, τ_Y) jest *homeomorfizmem*, jeśli h jest bijekcją oraz oba przekształcenia h i $h^{-1} : Y \to X$ są ciągłe. Równoważnie, h jest homeomorfizmem, jeśli h jest bijekcją oraz $U \in \tau_X \Leftrightarrow h(U) \in \tau_Y$.

Stwierdzenie 1.79. *Złożenie przekształceń ciągłych jest ciągłe.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Wniosek 1.80. *Niech $f, g : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi z przestrzeni topologicznej (X, τ) w $(\mathbb{R}, \tau_e)$. Wówczas funkcje $f+g, f-g, fg, f/g$ (dla $g \neq 0$), $|f|$ są ciągłe.*

Dowód. Zauważmy, że jeśli f i g są ciągłe, to odwzorowanie

$$h\colon X \to \mathbb{R}^2, \quad h(x) = (f(x), g(x))$$

jest również ciągłe. Aby to sprawdzić, wystarczy, na mocy Stwierdzenia 1.77 sprawdzić ten warunek na dowolnej (pod)bazie. W szczególności, wystarczy sprawdzić, że dla każdego zbioru postaci $U = J_1 \times J_2$, gdzie $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ są przedziałami, zbiór $h^{-1}(J_1 \times J_2)$ jest otwarty. Mamy

$$h^{-1}(J_1 \times J_2) = f^{-1}(J_1) \cap g^{-1}(J_2),$$

zatem $h^{-1}(J_1 \times J_2)$ jest otwarte i w konsekwencji, h jest ciągłe.

Skoro h jest ciągłe, to z racji, że każdą z funkcji $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ można przedstawić jako złożenie h z odwzorowaniem, dodawania, odejmowania, mnożenia lub dzielenia (które są ciągłe), to implikuje ciągłość tych funkcji, na mocy Stwierdzenia 1.79. □

Definicja 1.81 (Zbieżność jednostajna). Ciąg $f_n : X \to Y$ przekształceń przestrzeni topologicznej (X, τ) w przestrzeń metryczną (Y, d) jest *jednostajnie zbieżny* do przekształcenia $f : X \to Y$, jeśli

$$\gamma_n = \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in X\} \to 0$$

Twierdzenie 1.82. *Niech $f_n, f : X \to Y$ będą przekształceniami przestrzeni topologicznej (X, τ) w przestrzeń metryczną (Y, d). Wówczas, jeśli ciąg (f_n) zbiega jednostajnie do f oraz (prawie) wszystkie przekształcenia f_n są ciągłe w punkcie $a \in X$, to także f jest ciągłe w tym punkcie.*

Wniosek 1.83. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu przekształceń ciągłych jest ciągła.*

Dowód Twierdzenia 1.82. Weźmy dowolne $R > 0$ i rozważmy dowolne otoczenie V punktu $f)(x_0)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $V = B_d(f(x), R)$, dla pewnego $R > 0$. Chcemy pokazać, że $x_0 \in \operatorname{int}(f^{-1}(V))$. Na mocy założenia o zbieżności jednostajnej, znajdziemy n_0 takie, że

$$\forall_{x \in X}\ d(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{R}{2}.$$

Rozważmy $V_1 = B_d(f_{n_0}(x_0), R/2)$. Mamy

$$f(x_0) \in V_1 \subset V.$$

Z ciągłości f_{n_0} wynika, że $f_{n_0}^{-1}(V_1)$ jest otoczeniem punktu x_0. Dodatkowo, $f_{n_0}^{-1}(V_1) \subset f^{-1}(V)$, zatem $x_0 \in \operatorname{int}(f^{-1}(V))$. □

1.3.3 Topologia podprzestrzeni

Definicja 1.84. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną i niech $Y \subset X$. Przestrzeń topologiczną (Y, τ_Y), gdzie

$$\tau|_Y = \{U \cap Y : U \in \tau_X\},$$

nazywamy *podprzestrzenią przestrzeni* (X, τ), a $\tau|_Y$ - *topologią indukowaną* w Y.

Stwierdzenie 1.85. *Jeśli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną oraz $Y \subset X$, wówczas topologia $\tau|_Y$ jest najsłabszą topologią (tj. najmniejszą w sensie inkluzji) dla której inkluzja $\iota\colon Y \hookrightarrow X$ jest ciągła.*

Stwierdzenie 1.86. *W podprzestrzeni (Y, τ_Y) przestrzeni (X, τ_X), rodzina zbiorów domkniętych to $\{F \cap Y : F$ domknięty w $X\}$, a domknięcie wyraża się wzorem*

$$\mathrm{cl}_Y A = (\mathrm{cl}_X A) \cap Y .$$

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Stwierdzenie 1.87. *Obcięcie przekształcenia ciągłego jest ciągłe.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Lemat 1.88. *Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem przestrzeni (X, τ_X) w (Y, τ_Y).*

1. *Jeśli*
$$X = F_1 \cup \ldots \cup F_m,$$
gdzie każdy ze zbiorów F_i jest domknięty i każde obcięcie
$$f|_{F_i} : F_i \to Y$$
jest ciągłe, to przekształcenie f jest ciągłe.

2. *Jeśli*
$$X = \bigcup_{s\in S} U_s,$$
gdzie $U_s \in \tau_X$ i obcięcia $f \mid U_s : U_s \to Y$ są ciągłe, to f jest ciągłe.

Dowód. Dla dowodu punktu (a) załóżmy, że $F \subset Y$ jest domknięty. Wówczas

$$f^{-1}(F) = \bigcup_{k=1}^{m} f^{-1}(F) \cap F_k = \bigcup_{k=1}^{m} (f|_{F_k})^{-1}(F).$$

Z faktu, że wszystkie odwzorowania $f|_{F_k}$ są ciągłe wynika, że dla $k = 1, 2, \ldots, m$, $(f|_{F_k})^{-1}(F)$ jest domknięty. W konsekwencji, zbiór $f^{-1}(F)$ jest domknięty oraz z dowolności F wynika ciągłość f.

Dowód punktu (b) jest analogiczny, więc zostawiamy go jako ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 1.89. Jeśli f jest homeomorfizmem przestrzeni (X, τ_X) na podprzestrzeń $(f(X), (\tau_Y)_{f(X)})$ przestrzeni (Y, τ_Y), to mówimy, że f jest *zanurzeniem homeomorficznym* X w Y.

1.4 Przestrzenie ośrodkowe

Definicja 1.90. Rozważmy przestrzeń topologiczną (X, τ).

- Podzbiór A jest *gęsty* jeśli $\mathrm{cl}_X A = X$.
- A jest *brzegowy* jeśli $\mathrm{int}_X A = \emptyset$.

Stwierdzenie 1.91. *Rozważmy przestrzeń topologiczną (X, τ).*

(a) Podzbiór A jest gęsty wtedy i tylko wtedy gdy A przecina każdy niepusty zbiór otwarty w X.

(b) A jest gęsty wtedy i tylko wtedy gdy $X \setminus A$ jest brzegowy.

Dowód. Załóżmy, zbiór A jest gęsty w X oraz niech $U \in \tau$. Jeśli $U \cap A = \emptyset$, to oznacza, na mocy Stwierdzenia 1.42, że żaden punkt $x \in U$ nie może należeć do $\mathrm{cl}_X(A)$, co przeczy założeniu. Zatem musi być $U \cap A \neq \emptyset$.

W drugą stronę, jeśli A przecina niepusto każdy podzbiór otwarty w X, wówczas na mocy Stwierdzenia 1.42, wnioskujemy, że $\mathrm{cl}_X(A) = X$.

Aby udowodnić drugi punkt stwierdzenia, zauważmy, że na mocy pierwszego punktu zachodzi

$$A \text{ gęsty} \iff \forall_{U \in \tau} A \cap U \neq \emptyset \iff \forall_{U \in \tau} U \not\subset X \setminus A.$$

□

Definicja 1.92. Przestrzeń topologiczna (X, τ) jest *ośrodkowa* jeśli zawiera przeliczalny podzbiór gęsty.

Stwierdzenie 1.93. *Kazda przestrzeń topologiczna (X, τ) spełniająca II aksjomat przeliczalności jest ośrodkowa.*

Dowód. Niech $\mathcal{B} = \{U_n\}$ będzie przeliczalną bazą przestrzeni (X, τ). Rozważmy ciąg punktów $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ przestrzeni X takich, że $x_n \in U_n$. Wówczas, zbiór $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ jest gęstym podzbiorem X. □

Stwierdzenie 1.94. *Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłym przekształceniem przestrzeni (X, τ_X) na przestrzeń (Y, τ_Y). Jeśli zbiór A jest gęsty w X, to $f(A)$ jest gęsty w Y.*

Dowód. Aby pokazać, że $f(A)$ jest gęsty skorzystamy ze Stwierdzenia 1.91. Niech $U \subset Y$ będzie zbiorem otwartym. Z ciągłości f wynika, że $f^{-1}(U)$ jest zbiorem otwartym, zatem $f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$. Zatem $U \cap f(A) \neq \emptyset$. Z dowolności wyboru U wynika, że $f(A)$ przecina niepusto każdy podzbiór otwarty w Y, zatem jest gęsty. □

Wniosek 1.95. *Ciągły obraz przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowy.*

Dowód. Bezpośrednia konsekwencja poprzedniego stwierdzenia. □

Twierdzenie 1.96. *Przestrzeń metryzowalna (X, τ) jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy gdy ma przeliczalną bazę (spełnia II aksjomat przeliczalności).*

Dowód. Implikacja $(\Leftarrow)$ wynika ze Stwierdzenia 1.93. Aby uzasadnić implikację $(\Rightarrow)$, zauważmy, że jeśli D jest przeliczalnym podzbiorem gęstym, to rodzina

$$\mathcal{B} = \bigcup_{d \in D} \{B(d, 1/n) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

jest bazą przestrzeni X. Aby to uzasadnić, wybierzmy dowolny zbiór otwarty $U \subset X$ oraz $x \in U$. Wiemy, że istnieje $R > 0$ takie, że $B_d(x, R) \subset U$. Wybierzmy $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $n > \frac{2}{R}$. Korzystając z gęstości jesteśmy w stanie znaleźć element $d \in A$ taki, że $d(x, d) < \frac{1}{n}$. Wówczas $x \in B_d(d, 1/n)$ oraz z faktu $n > 2/R$ wynika, że

$$x \in B_d(d, 1/n) \subset B_d(x, R) \subset U.$$

To pokazuje, że rodzina $\mathcal{B}$ jest rzeczywiście bazą topologii. □

Stwierdzenie 1.97. *Dla podprzestrzeni Y przestrzeni (X, τ_X) zachodzi*

$$w(Y) \leq w(X).$$

Dowód. Jeśli rodzina $\mathbb{B}$ jest bazą topologii τ_X mocy $w(X)$, wówczas rodzina

$$\mathcal{B}|_Y = \{B \cap Y \colon B \in \mathcal{B}\}$$

jest bazą topologii $(\tau_X)|_Y$. □

Wniosek 1.98. *Każda podprzestrzeń metryzowalnej przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.*

Przykład 1.99. Rozważmy płaszczyznę $(\mathbb{R}^2, \tau_k)$ z topologią generowaną przez metrykę kolejową.

- Niech L będzie dowolną prostą nieprzechodzącą przez punkt $0 \in \mathbb{R}^2$.
- Zbiór L jest nieprzeliczalny oraz dyskretny, czyli $(L, (\tau_k)|_L)$ nie jest ośrodkowa.
- Zatem, na mocy Wniosku 1.98 $(\mathbb{R}^2, \tau_k)$ nie jest ośrodkowa.

- Z Twierdzenia 1.96 wynika, że $(\mathbb{R}^2, \tau_k)$ nie spełnia drugiego aksjomatu przeliczalności.

Przykład 1.100 (Przykład 1.7.4(A) z [BCPP23]). Przestrzeń $(C[0,1], d_{\sup})$ jest ośrodkowa. Na mocy Twierdzenia Weierstrassa[7] o aproksymacji, zbiór wielomianów o wymiernych współczynnikach (rozpatrywanych jako elementy $C[0,1]$) jest gęsty.

Przykład 1.101 (Przykład 1.7.4(B) z [BCPP23]). Rozważmy przestrzeń metryczną $(C_b(\mathbb{R}), d_{\sup})$, gdzie $C_b(\mathbb{R})$ jest zbiorem wszystkich ograniczonych funkcji ciągłych na prostej rzeczywistej.

- Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich niepustych podzbiorów zbioru liczb naturalnych.
- Dla każdego $S \in P$ rozważmy funkcję $f_S(x) = d_e(x, S) = \inf_{z \in S} d_e(x, z)$, która należy do $C_b(\mathbb{R})$.
- Dla $S_1 \neq S_2$ mamy $d_{\sup}(f_{S_1}, f_{S_2}) = 1$.
- Zatem zbiór $\{f_S \colon S \in \mathcal{P}\}$ jest nieprzeliczalny i dyskretny.
- W konsekwencji, $(C_b(\mathbb{R}), d_{\sup})$ nie jest ośrodkowa.

Przykład 1.102. Niech $S = (\mathbb{R}, \tau_S)$ będzie strzałką z przykładu 1.56.

- W przykładzie 1.65 pokazaliśmy, że strzałka nie spełnia drugiego aksjomatu przeliczalności.
- Zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęstym podzbiorem strzałki, zatem strzałka jest ośrodkowa.
- Z twierdzenia 1.96 otrzymujemy, że strzałka nie jest metryzowalna.

Przykład 1.103. Rozważmy kwadrat leksykograficzny $(I^2, \tau(<_{\text{lex}}))$ z przykładu 1.57.

- Topologia indukowana z $\tau(<_{\text{lex}})$ na zbiorze $A = (0,1] \times \{0\}$ jest taka sama jak topologia podprzestrzeni indukowana z topologii strałki dla podzbioru $(0,1] \subset S$.
- Argumentując podobnie jak w poprzednim przykładzie pokazujemy, że $((0,1], \tau_S|_{(0,1]})$ nie jest metryzowalna.
- To pokazuje, że $(A, \tau(<_{\text{lex}})|_A)$ nie jest metryzowalna.
- Zatem kwadrat leksykograficzny nie jest metryzowalny.

[7] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass – niemiecki matematyk.

1.5 Skończone iloczyny kartezjańskie

Definicja 1.104. Niech (X_i, τ_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, będą przestrzeniami topologicznymi.

- Rodzina $\mathcal{B}$ iloczynów kartezjańskich $V_1 \times \ldots \times V_n$ zbiorów otwartych $V_i \in \tau_i$ spełnia warunki (1)-(2) w Twierdzeniu 1.54, a więc jest bazą pewnej topologii w iloczynie kartezjańskim $X_1 \times \ldots \times X_n$.

- Przestrzeń $(X_1 \times \ldots \times X_n, \tau)$ z topologią τ generowaną przez bazę $\mathcal{B}$ nazywamy iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych (X_i, τ_i).

Przykład 1.105. Jeśli przez τ_e^n oznaczymy topologię euklidesową na $\mathbb{R}^n$, wówczas, dla dowolnych $k_1, , k_2, \ldots, k_n$ oraz $k_0 = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ zachodzi

$$(\mathbb{R}^{k_0}, \tau_e^{k_0}) = \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{R}^{k_i}, \tau_e^{k_i}).$$

Twierdzenie 1.106. *1. Skończony iloczyn kartezjański przestrzeni metryzowalnych jest metryzowalny.*

2. Skończony iloczyn kartezjański przestrzeni ośrodkowych jest ośrodkowy.

Dowód. Aby dowieść (1) wystarczy użyć dowolnej metryki z Przykładu 1.31.

Jeśli $A_i \subset X_i$ jest przeliczalnym zbiorem gęstym, wówczas $A = \prod_{i=1}^n A_i$ jest przeliczalnym i gęstym podzbiorem w $\prod_{i=1}^n X_i$. $\square$

1.6 Aksjomaty oddzielania

1.6.1 Aksjomaty oddzielania – definicje i przykłady

Definicja 1.107. Przestrzeń (X, τ) jest T_0-*przestrzenią* jeśli dla dowolnej pary różnych punktów $x, y \in X$, istnieje zbiór otwarty $U \subseteq X$ zawierający dokładnie jeden spośród punktów x, y.

Definicja 1.108. Przestrzeń (X, τ) jest T_1-*przestrzenią* jeśli jeśli dla każdej pary różnych punktów $x, y \in X$, istnieje zbiór otwarty $U \subseteq X$ taki, że $x \in U$ i $y \notin U$.

Stwierdzenie 1.109. *Przestrzeń (X, τ) jest T_1-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy jednopunktowe podzbiory X są domknięte.*

Dowód. (⇒) Ustalmy $x_0 \in X$. Pokażemy, że $U = X \setminus \{x_0\}$ jest zbiorem otwartym. Weźmy dowolny $y \in U$. Na mocy definicji, wiemy, że istnieje zbiór otwarty $V \in \tau$ taki, że

$$y \in V \subset U,$$

co pokazuje, że $y \in \mathrm{int}_X(U)$. Z dowolności wybory y wynika, że $\mathrm{int}_X(U) = U$, zatem U jest zbiorem otwartym.

(⇐) Ustalmy dowolną parę punktów $x, y \in X$. Z założenia singleton $\{y\}$ jest zbiorem domkniętym, zatem $U = X \setminus \{y\}$ jest szukanym zbiorem otwartym. □

Definicja 1.110 (Przypomnienie definicji 1.34). X jest T_2-*przestrzenią* (*przestrzenią Hausdorffa*), jeśli dla dowolnej pary różnych punktów $x, y \in X$, istnieją rozłączne zbiory otwarte $U, V \subseteq X$ takie, że $x \in U,\ y \in V$.

Definicja 1.111. X jest T_3-*przestrzenią* (*przestrzenią regularną*), jeśli X jest T_1 oraz dla dowolnego $x \in X$ i dowolnego domkniętego podzbioru $F \subseteq X$, niezawierającego x, istnieją rozłączne zbiory otwarte $U, V \subseteq X$ takie, że $x \in U,\ F \subseteq V$.

Definicja 1.112. X jest T_4-*przestrzenią* (*przestrzenią normalną*), jeśli X jest T_1 oraz dla dowolnych domkniętych rozłącznych podzbiorów $A, B \subseteq X$, istnieją rozłączne zbiory otwarte $U, V \subseteq X$ takie, że $A \subseteq U,\ B \subseteq V$.

Twierdzenie 1.113. *Każda metryzowalna przestrzeń topologiczna jest normalna.*

Do dowodu Twierdzenia 1.113 użyjemy pojęcie odległości punktu od zbioru (zob. Definicja 1.15). Zatrzymajmy się na chwilę, aby lepiej poznać własności tej funkcji.

Stwierdzenie 1.114. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wówczas, dla dowolnego niepustego $A \subseteq X$*

(a) funkcja $x \mapsto d(x, A)$ jest ciągła (Lipschitzowska ze stałą 1);

(b) $x \in \mathrm{cl}_X A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

Dowód. Rozważmy dwa punkty $x, y \in X \setminus A$ oraz $z \in A$. Mamy

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \iff d(x, A) - d(y, z) \leq d(x, y).$$

Powyższa nierówność zachodzi dla dowolnego $z \in A$, zatem wybierając ciąg $(z_n)_n$ punktów z A takich, że $d(y, z_n) \to d(y, A)$ otrzymujemy

$$d(x, A) - d(y, A) = d(x, A) - \lim_{n\to\infty} d(y, z_n) \leq d(x, y).$$

Zamieniając miejscami x i y otrzymujemy nierówność

$$d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y),$$

zatem

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y),$$

co pokazuje, że funkcja $x \mapsto d(x,A)$ jest Lipschitzowska, a w szczególności ciągła.

Dla dowodu punktu (b) załóżmy, że $x \in \mathrm{cl}_X(A)$, wówczas istnieje ciąg (x_n) punktów z A taki, że $x_n \to x$. Zatem

$$d(x,A) \leq d(x,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

zatem $d(x,A) = 0$.

W drugą stronę, jeśli $d(x,A) = 0$, to istnieje ciąg x_n punktów z A takich, że

$$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0,$$

zatem $x_n \to x$ i w konsekwencji $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. □

Dowód Twierdzenia 1.113. Rozważmy funkcję ciągłą

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x,A) - d(x,B).$$

Określmy zbiory otwarte

$$U = f^{-1}((-\infty,0)), \quad V = f^{-1}((0,+\infty)).$$

Zbiory U i V są rozłączne oraz $A \subset U$, $B \subset V$, co pokazuje, że U i V posiadają żądane własności. □

Definicja 1.116. X jest *$T_{3\frac{1}{2}}$-przestrzenią* (przestrzenią *całkowicie regularną*, przestrzenią *Tichonowa*[8]), jeśli X jest T_1 oraz dla dowolnego $x \in X$ i dowolnego domkniętego podzbioru $F \subseteq X$, niezawierającego x, istnieje ciągła funkcja $f : X \to [0,1]$ taka, że $f(x) = 0$ i $f(F) \subseteq \{1\}$.

Stwierdzenie 1.117. *1. Każda $T_{3\frac{1}{2}}$-przestrzeń jest T_3-przestrzenią. W konsekwencji, zachodzą następujące implikacje*

$$T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

2. Podprzestrzeń T_i-przestrzeni jest T_i-przestrzenią, dla $i = 0,1,2,3,3\frac{1}{2}$.

[8] Andriej Nikołajewicz Tichonow – radziecki matematyk.

3. *Skończony produkt T_i-przestrzeni jest T_i-przestrzenią, dla $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.*

Dowód. Uzasadnimy tylko punkt (1). Dowód pozostałych punktów pozostawimy czytelnikowi.

Jeśli $x \in X$ oraz $A \subset X$ domknięty taki, że $x \notin A$, niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie taka, że

$$f(x) = 0, \quad f(A) \subset \{1\}.$$

Wówczas, biorąc $U = f^{-1}(-\infty, 1/2)$ oraz $V = f^{-1}((1/2, +\infty))$ otrzymujemy zbiory otwarte, które spełniają następujące warunki

$$x \in U, \quad A \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Zatem, X jest przestrzenią regularną. To pokazuje, że prawdziwa jest implikacja $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$. Pozostałe implikacje łatwo wynikają z definicji. □

Stwierdzenie 1.118. *Domknięta podprzestrzeń przestrzeni normalnej jest normalna.*

Dowód. Niech (X, τ) będzie normalna oraz niech $F \subset X$ będzie podzbiorem domkniętym. Załóżmy, że $A, B \subset F$ są domknięte w topologii indukowanej $\tau|_F$. To oznacza, że istnieją zbiory domknięte $A', B' \subset X$ takie, że

$$A = A' \cap F, \quad \text{oraz} \quad B = B' \cap F.$$

Skoro A', B', F są domknięte w X, to oznacza, że A i B są też podzbiorami domkniętymi w X. Zatem, na mocy założenia, istnieją rozłączne podzbiory otwarte $U', V' \subset X$ takie, że

$$A \subset U', \quad \text{oraz} \quad B \subset V'.$$

Biorąc $U = U' \cap F$ oraz $V = V' \cap F$, otrzymujemy rozłączne otoczenia otwarte zbiorów A i B w F. To pokazuje, że $(F, \tau|_F)$ jest przestrzenią normalną. □

Uwaga

Podprzestrzeń przestrzeni normalnej nie musi być normalna, zob. Wniosek 3.30. Zob. też [SS78, Counterexamples 86 and 87] lub [Mun00, Przykład 2 w rozdziale 32].

Stwierdzenie 1.119. *Niech X będzie T_1-przestrzenią. Wówczas:*

1. *X jest T_3 $\Leftrightarrow$ dla dowolnych $x \in X$ i otoczenia U punktu x, istnieje otoczenie V punktu x, takie, że $\mathrm{cl}_X(V) \subseteq U$;*

2. *X jest $T_{3\frac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow$ dla dowolnych $x \in X$ i otoczenia U punktu x, istnieje ciągła funkcja $f : X \to [0,1]$ taka, że $f(x) = 0$ i $f(X \setminus U) \subseteq \{1\}$;*

3. *X jest T_4 $\Leftrightarrow$ dla dowolnych domkniętego $A \subseteq X$ i otwartego $U \subseteq X, A \subseteq U$, istnieje otwarty $V \subseteq X$, taki, że $A \subseteq V \subseteq \mathrm{cl}_X(V) \subseteq U$.*

Udowodnimy tylko punkt (3). Dowody pozostałych punktów są analogiczne i zostawiamy je jako ćwiczenia dla czytelników.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że (X, τ) jest normalna. Niech $A \subset U \subset X$ będą takie, że A jest domknięty, a U otwarty. Rozważmy zbiór domknięty $B = X \setminus U$. Z założeń wynika, że $A \cap B = \emptyset$. Zatem, istnieją rozłączne zbiory otwarte V_1, V_2 takie, że $A \subset V_1$ oraz $B \subset V_2$. Mamy

$$V_1 \subset X \setminus V_2 \Rightarrow \mathrm{cl}_X(V_1) \subset \mathrm{cl}_X(X \setminus V_2) = X \setminus V_2,$$

zatem

$$A \subset V_1 \subset \mathrm{cl}_X(V_1) \subset X \setminus V_2 \subset X \setminus B = U,$$

zatem $V = V_1$ jest szukanym zbiorem.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $A, B \subset X$ są rozłącznymi i domkniętymi podzbiorami. Niech $U = X \setminus B$, wówczas

$$A \subset U \subset X.$$

Zatem, na mocy założenia, istnieje zbiór otwarty $V \subset X$ taki, że

$$A \subset V \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset U.$$

Rozważmy zbiory otwarte $V_1 = V$ oraz $V_2 = X \setminus \mathrm{cl}_X(V)$. Mamy $A \subset V_1$ oraz $B = X \setminus U \subset X \setminus \mathrm{cl}_X(V) = V_2$. Dodatkowo, mamy

$$V_1 \cap V_2 = V \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) \subset V \cap (X \setminus V) = \emptyset.$$

Z dowolności wyboru zbiorów A, B wynika, że (X, τ) jest przestrzenią normalną.

Przykład 1.120 (Płaszczyzna Niemyckiego). Rozważmy zbiór $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}$. Dla każdego punktu $p = (x, y) \in H$ określamy bazę otoczeń $\mathcal{B}_p$ w następujący sposób. Jeśli $p = (x, y)$ oraz $y > 0$, wówczas

$$\mathcal{B}_p = \{B_e(p, 1/n) \colon n > y \text{ oraz } n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Jeśli $p = (x, 0)$, wówczas

$$\mathcal{B}_p = \{B_e((x, 1/n), 1/n) \cup \{p\} \colon n = 1, 2, \ldots\}.$$

Definiujemy topologię τ_N jako topologię na H definiowaną przez bazę

$$\mathcal{B}_N = \bigcup_{p \in H} \mathcal{B}_p.$$

Przestrzeń topologiczną (H, τ_N) nazywamy *płaszczyzną Niemyckiego.*[9]

Stwierdzenie 1.121. *Płaszczyzna Niemyckiego jest całkowicie regularna.*

Dowód. Skorzystamy ze stwierdzenia 1.119. Niech $p \in H$ oraz niech U będzie otoczeniem bazowym punktu p. Dla dowolnego punktu $y \in U \setminus \{p\}$ rozważmy promień

$$R_p(y) = \{p + t(y - p) \colon t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

Oznaczmy przez S_p okrąg, który jest brzegiem U. Zauważmy, że dla dowolnego $y \in U \setminus \{p\}$ zbiór $R_p(y) \cap S_p$ może się składać z jednego lub dwóch punktów. Jeśli $p = (x, y)$, dla pewnego $y > 0$, wówczas zbiór $R_p(y) \cap S_p$ składa się z jednego punktu $z(p, y)$. Jeśli $p = (x, 0)$, wówczas zbiór $R_p(y) \cap S_p$ składa się z dwóch punktów, przy czym $p \in R_p(y) \cap S_p$. Jedyny element zbioru $(R_p(y) \cap S_p) \setminus \{p\}$ będziemy oznaczali symbolem $z(p, y)$.

Określamy funkcję $f \colon H \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y = p, \\ \frac{d_e(p,y)}{d_e(y,z(p,x))}, & y \in U \setminus \{p\}, \\ 1, & y \in H \setminus U. \end{cases}$$

Sprawdzenie ciągłości powyższej funkcji zostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika. □

1.6.2 Przestrzenie zerowymiarowe

Definicja 1.122. Przestrzeń topologiczna (X, τ) jest *zerowymiarowa* jeśli ma bazę złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych (tj. zbiorów, które są jednocześnie domknięte i otwarte).

Stwierdzenie 1.123. *Podprzestrzeń przestrzeni zerowymiarowej jest zerowymiarowa. Skończony iloczyn kartezjański przestrzeni zerowymiarowych jest zerowymiarowy.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

[9] Ang. *Niemycki plane* od nazwiska sowieckiego matematyka Wiktora Władimirowicza Niemyckiego.

Stwierdzenie 1.124. *Każda zerowymiarowa T_1-przestrzeń jest całkowicie regularna ($T_{3\frac{1}{2}}$).*

Dowód. Ustalmy dowolny punkt $x \in X$ oraz zbiór domknięty $F \subset X$ taki, że $x \notin F$. Z założenia, że X jest zerowymiarowa wynika, że istnieje otwarto-domknięty podzbiór $U \subset X$ taki, że

$$x \in U \subset X \setminus F.$$

Wynika to z faktu, że zbiór $X \setminus F$ jest otwarty. Zauważmy, że zbiór $V = X \setminus U$ jest również otwarto-domknięty oraz $F \subset V$. Rozważmy funkcję

$$f \colon X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in V, \\ 0, & x \in U. \end{cases}$$

Z faktu, że zbioru U i V są otwarto-domknięte wynika, że f jest ciągła. Dodatkowo, $f(x) = 0$ oraz $f(F) = \{1\}$.

Zatem, X jest całkowicie regularna. □

Wniosek 1.125. *Dowolna skończona potęga kartezjańska strzałki S^n, jest całkowicie regularna.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że zbiory bazowe postaci $(a, b]$, gdzie $a < b$, są domknięte w topologii strzałki. Zauważmy, że

$$\mathbb{R} \setminus (a, b] = (-\infty, a] \cup (b, +\infty).$$

Mamy

$$(-\infty, a] = \bigcup_{n \geq 1} (a - n, a], \quad (b, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (b, b + n].$$

Zatem, zbiór $\mathbb{R} \setminus (a, b]$ jest otwarty co implikuje, że zbiór $(a, b]$ jest domknięty. To pokazuje, że strzałka jest przestrzenią zerowymiarową.

Łatwo sprawdzić, że strzałka S jest przestrzenią Hausdorffa. W konsekwencji, dla dowolnego $n \geq 1$, przestrzeń S^n jest zerowymiarowa oraz T_2. Zatem, na mocy Stwierdzenia 1.124, przestrzenie S^n są całkowicie regularne. □

1.6.3 Produkty kartezjańskie przestrzeni normalnych

Lemat 1.126. *Jeśli A jest gęstym podzbiorem przestrzeni X to dla dowolnego otwartego podzbioru $U \subseteq X$ zachodzi*

$$\mathrm{cl}_X\, U = \mathrm{cl}_X(U \cap A).$$

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Lemat 1.127 (F. B. Jones[10]). *W ośrodkowej przestrzeni normalnej X, każda domknięta dyskretna podprzestrzeń ma moc mniejszą niż continuum.*

Dowód. Niech (X, τ) będzie normalna i ośrodkowa oraz niech $D \subset X$ będzie domkniętym podzbiorem dyskretnym. Jeśli $A \subset D$, wówczas A oraz $D \setminus A$ są domkniętymi podzbiorami X. Zatem, istnieją rozłączne zbiory otwarte $U_A, V_A \subset X$ takie, że

$$A \subset U_A, \quad \text{oraz} \quad D \setminus A \subset V_A.$$

Rozważmy dwa podzbiory $A, B \subset D$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $A \setminus B \neq \emptyset$. Mamy

$$A \setminus B \subset \mathrm{cl}(U_A) \cap V_B$$

oraz

$$\mathrm{cl}_X(U_B) \subset \mathrm{cl}_X(X \setminus V_B) = X \setminus V_B,$$

zatem $\mathrm{cl}_X(U_B) \cap V_B = \emptyset$. W konsekwencji, $\mathrm{cl}_X(U_A) \neq \mathrm{cl}_X(U_B)$.

Niech $Z \subset X$ będzie przeliczalnym i gęstym podzbiorem. Przez $\mathcal{P}(D)$ oraz $\mathcal{P}(Z)$ oznaczamy zbiory potęgowe D i Z, odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie $J \colon \mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(Z)$ zdefiniowane następująco

$$J(A) = U_A \cap Z.$$

Zauważmy, że na mocy lematu 1.126, mamy $\mathrm{cl}_X(J(A)) = \mathrm{cl}_X(U_A)$, zatem dla dwóch różnych podzbiorów $A, B \subset D$ mamy $J(A) \neq J(B)$. Zatem odwzorowanie J jest różnowartościowe, co pokazuje, że $|D| \leq |Z|$. □

Wniosek 1.128. *Kwadrat strzałki S^2 i płaszczyzna Niemyckiego są przestrzeniami całkowicie regularnymi, ale nie normalnymi.*

Dowód. Zauważmy, że obie przestrzenie są całkowicie regularne na mocy Stwierdzenia 1.121 oraz Wniosku 1.125.

Aby pokazać, że przestrzeń S^2 nie jest normalna rozważmy podzbiór

$$L = \{(x, -x) \in S^2 \colon x \in \mathbb{R}\}.$$

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$L \cap [(x-1, x] \times (-x-1, -x]] = \{(x, -x)\}.$$

[10] Floyd Burton Jones – amerykański matematyk. Zob. też F. Burton Jones (1910–1999) — An Appreciation.

Zatem L jest nieprzeliczalnym podzbiorem dyskretnym, co, na mocy Lematu 1.127, pokazuje, że S^2 nie może być normalna.

Podobnie w przypadku płaszczyzny Niemyckiego sprawdzamy, że podzbiór

$$L = \{(x, 0) \in H \colon x \in \mathbb{R}\}$$

jest dyskretny. To pokazuje, że płaszczyzna Niemyckiego nie jest przestrzenią normalną. □

Wniosek 1.129. *Produkt kartezjański skończenie wielu przestrzeni normalnych nie musi być przestrzenią normalną.*

Dowód. Wynika z faktu, że strzałka S jest przestrzenią normalną (co uzasadnimy poniżej), ale S^2 nie jest normalna na mocy Wniosku 1.128.

Aby uzasadnić, że S jest przestrzenią normalną, zauważmy, że na mocy Wniosku 1.125 przestrzeń S jest całkowicie regularna, więc jest T_1-przestrzenią.

Niech teraz $A, B \subset \mathbb{R}$ będą podzbiorami domkniętymi w topologi strzałki. Dla każdego punktu $a \in A$ znajdujemy zbiór bazowy postaci $U_a = (x_a, a]$ taki, że $U_a \cap B = \emptyset$. Podobnie, dla każdego $b \in B$ znajdujemy zbiór bazowy postaci $V_b = (y_b, b]$ taki, że $V_b \cap A = \emptyset$. Zauważmy, że dla dowolnego $a \in A$ oraz $b \in B$ mamy

$$U_a \cap V_b = \emptyset.$$

Aby uzasadnić tę równość możemy założyć, bez straty ogólności, że $a < b$. Gdyby $U_a \cap V_b \neq \emptyset$, to musiałoby zachodzić $a \in V_b$, co jest niemożliwe ponieważ $V_b \cap A = \emptyset$. Zatem zbiory U_a i V_b muszą być rozłączne.

Biorąc

$$U = \bigcup_{a \in A} U_a, \quad V = \bigcup_{b \in B} V_b$$

otrzymujemy zbiory otwarte takie, że $A \subset U$ oraz $B \subset V$. Dodatkowo, mamy

$$U \cap V = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} U_a \cap V_b = \emptyset,$$

Co kończy dowód faktu, że S jest przestrzenią normalną. □

1.6.4 Lemat Urysohna i Twierdzenie Tietzego-Urysohna

Twierdzenie 1.130 (Lemat Urysohna[11])**.** *Jeżeli przestrzeń X jest normalna, to dla każdej pary A, B rozłącznych podzbiorów dokniętych X i dowolnych liczb rzeczywistych $a < b$, istnieje funkcja ciągła $f : X \to [a, b]$ taka, że $f(A) \subseteq \{a\}$, $f(B) \subseteq \{b\}$.*

[11] Paweł Samuiłowicz Urysohn – radziecki matematyk.

Dowód Twierdzenia 1.130. W dowodzie ograniczymy się do przypadku $a = 0$ i $b = 1$.

Zaczniemy od skonstruowania rodziny $\mathcal{V} = \{V_r\}_{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ otwartych podzbiorów X, które spełniają następujące warunki.

(LU i) Dla dowolnego $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ mamy
$$A \subset V_r \subset X \setminus B.$$

(LU ii) Jeśli $0 \le r' < r \le 1$, wówczas zachodzi
$$A \subset V_{r'} \subset \mathrm{cl}_X(V_{r'}) \subset V_r \subset X \setminus B.$$

Aby skonstruować rodzinę $\{\mathcal{V}_r\}_{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ ustawmy liczby wymierne z $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ w ciąg
$$r_1 = 1, r_2 = 0, r_3, r_4, \cdots$$
Zbiory V_r określamy indukcyjnie: $V_0 = A$ oraz $V_1 = X \setminus B$. Dla $n > 1$ znajdujemy $r_k < r_n < r_j$ takie, że r_k, r_j są najbliższe r_n, dla pewnych $1 \le j, k < n$. Korzystając ze Stwierdzenia 1.119, znajdujemy zbiór otwarty V_{r_i} taki, że
$$\mathrm{cl}_X(V_{r_k}) \subset V_{r_n} \subset \mathrm{cl}_X(V_{r_n}) \subset V_{r_j}.$$

Jeśli mamy już rodzinę zbiorów $\mathcal{V}$, która spełnia warunki (LU i) oraz (LU ii), możemy określić funkcję w następujący sposób.
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\}, & \text{jeżeli } x \in V_1, \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Z samej definicji f wynika łatwo, że
$$f(A) \subset \{0\}, \quad f(B) \subset \{1\}.$$
Aby sprawdzić, że f jest ciągła, skorzystamy ze Stwierdzenia 1.77 i ograniczymy się do sprawdzenia, że zbiory postaci $f^{-1}((-\infty, t))$ i $f^{-1}((s, \infty))$ są otwarte, dla $s, t \in \mathbb{R}$.

Zacznijmy od rozważenia zbioru postaci $f^{-1}((-\infty, t))$, dla pewnego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli $x \in U = f^{-1}((-\infty, t))$, wówczas istnieje $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ takie, że $r < t$ oraz $x \in V_r$. Zauważmy, że dla dowolnego $y \in V_r$ mamy $f(y) \le r < t$, zatem $V_r \subset U$. Skoro V_r jest zbiorem otwartym, to oznacza, że $x \in \mathrm{int}(U)$, a zatem U jest otwarty.

Sprawdzamy teraz otwartość zbiorów postaci $f^{-1}((s,+\infty))$, dla $s \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że $f(x) > r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \notin \mathrm{cl}_X(V_r)$. Ustalmy $q, r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ takie, że $s < r < q$. Zauważmy, że zbiór $U = V_q \setminus \mathrm{cl}_X(V_r)$ jest otwarty, oraz dla dowolnego $x \in U$ mamy

$$r < f(x) \leq q,$$

co pokazuje, że $U \subset f^{-1}((s,+\infty))$.

□

Wniosek 1.131. *Prawdziwe są następujące implikacje:*

$$T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Dowód. Implikacje $T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ zostały udowodnione w Stwierdzeniu 1.117. Implikacja $T_4 \implies$ wynika bezpośrednio z Twierdzenia 1.130. □

Twierdzenie 1.132 (Twierdzenie Tietzego[12]-Urysohna[13])**.** *Niech $f : A \to [a,b]$ będzie funkcją ciągłą określoną na podprzestrzeni domkniętej przestrzeni normalnej (X,τ). Istnieje wówczas funkcja ciągła $F : X \to [a,b]$ taka, że $F|_A = f$.*

Wniosek 1.133. *Niech $f : A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą określoną na podprzestrzeni domkniętej przestrzeni normalnej (X,τ). Istnieje wówczas funkcja ciągła $F : X \to \mathbb{R}$ taka, że $F|A = f$.*

Dowód. Rozważmy funkcję $h\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, $h(x) = \mathrm{arctg}(x)$, która jest homeomorfizmem. Żądane rozszerzenie otrzymujemy stosując twierdzenie 1.132 do złożenia $h \circ f$. □

Dowód Twierdzenia 1.132. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a = -1$ oraz $b = 1$.

Dowód rozpoczniemy od poniższego lematu.

Lemat 1.134. *Niech A będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni normalnej X. Dla każdej funkcji ciągłej $h : A \to [-1,1]$ takiej, że $|h(x)| \leq c \leq 1$, dla $x \in A$, istnieje ciągła funkcja $g : X \to [-1,1]$ taka, że*

(1) $|g(x)| \leq (1/3)c$, dla $x \in X$;

(2) $|h(x) - g(x)| \leq (2/3)c$, dla $x \in A$.

[12] Heinrich Franz Friedrich Tietze – austriacki matematyk.
[13] Paweł Samuiłowicz Urysohn – radziecki matematyk.

Dowód. Rozważmy domknięte i rozłączne zbiory

$$B = \{x \in A\colon h(x) \geq c/3\}, \quad D = \{x \in A\colon h(x) \leq -c/3\}.$$

Korzystając z Twierdzenia 1.130 konstruujemy funkcję

$$h\colon X \to [-c/3, c/3]$$

taką, że $h(B) = \{c/3\}$ oraz $h(D) = \{-c/3\}$. Bezpośrednio z definicji funkcji h wynika, że dla dowolnych $x \in X$ oraz dowolnych $y \in A$ zachodzi

$$|h(x)| \leq 1/3c, \quad |g(y) - h(y)| \leq \frac{2}{3}c.$$

□

Ustalmy $0 \leq c_0 \leq 1$ takie, że $|f(x)| \leq c_0$, dla $x \in A$. Indukcyjnie konstruujemy ciąg funkcji ciągłych $h_n\colon X \to \mathbb{R}$, dla $n \geq 0$, takich, że dla $x \in X$ oraz $y \in A$ zachodzi

$$|h_n(x)| \leq \frac{2^n}{3^{n+1}}c_0, \quad |f(y) - h_0(y) - \cdots - h_n(y)| \leq \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}c_0.$$

Mając taki ciąg funkcji ciągłych rozważamy funkcje $F_n = h_0+h_1+\cdots+h_n$, dla $n \geq 0$. Dla $m > n > 0$ mamy

$$|F_m(x) - F_n(x)| = |h_{n+1}(x) + \cdots + h_m(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}c_0.$$

Ciąg $(F_n)_{n\geq 0}$ jest zbieżny jednostajnie, zatem funkcja $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ jest ciągła. Dla dowolnego $y \in A$ oraz $n \geq 0$ mamy

$$|f(y) - F_n(y)| \leq \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}c_0 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

czyli $F(y) = f(y)$. Dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$|F(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}c_0 = c_0.$$

Opiszemy teraz konstrukcję ciągu funkcji $(h_n)_{n\geq 0}$. Funkcję h_0 konstruujemy korzystając bezpośrednio z Lematu 1.134. Jeśli mamy już skonstruowaną funkcję h_n, dla pewnego $n \geq 0$, to do konstrukcji funkcji h_{n+1} stosujemy Lemat 1.134 do funkcji

$$g_n(x) = f(x) - h_0(x) - \cdots - h_n(x), \quad \text{oraz} \quad c_n = \sup_{y\in A} |g(x)|\,.$$

Na mocy założenia indukcyjnego mamy

$$c_n \leq \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} c_0 \leq c_0$$

Zatem

$$|f(x) - h_0(x) - \cdots - h_n(x) - h_{n+1}(x)| = |g_n(x) - h_{n+1}(x)| \frac{2}{3} c_n \leq \frac{2^{n+2}}{3^{n+2}} c_0.$$

Co kończy dowód twierdzenia. □

2 Konstrukcje przestrzeni topologicznych

2.1 Topologie generowane przez rodziny odwzorowań

Definicja 2.1 (Cofnięcie topologii). Niech X będzie dowolnym zbiorem, $\{(Y_t, \tau_t)\}_{t\in T}$ jest rodziną przestrzeni topologicznych. Załóżmy, że dana jest rodzina odwzorowań $\mathfrak{f} = \{f_t \colon X \to Y_t\}_{t\in T}$.

- Możemy rozpatrywać rodzinę $\mathcal{T}(\mathfrak{f})$ wszystkich topologii na X, względem których wszystkie odwzorowania f_t są ciągłe.
- Mamy $\tau_d(X) \in \mathcal{T}(\mathfrak{f})$ oraz jeśli $(\tau_s)_{s\in S}$ jest podrodziną $\mathcal{T}(\mathfrak{f})$, wówczas
$$\bigcap_{s\in S} \tau_s \in \mathcal{T}(\mathfrak{f}).$$
- Najsłabsza (tj. najmniejsza ws. inkluzji) topologia, względem której wszystkie odwzorowania f_t są ciągłe zdefiniowana jest przez
$$\tau^*(\mathfrak{f}) = \bigcap \mathcal{T}(\mathfrak{f}).$$

Lemat 2.2. *Niech X będzie zbiorem oraz rozważmy rodzinę odwzorowań*
$$\mathfrak{f} = \{f_t \colon X \to (Y_t, \tau_t)_{t\in T}\}.$$
Topologia $\tau^*(\mathfrak{f})$ jest generowana przez rodzinę podzbiorów postaci
$$f_{t_1}^{-1}(U_{t_1}) \cap \cdots \cap f_{t_n}^{-1}(U_{t_n}),$$
gdzie $t_1, \ldots, t_n \in T$ oraz $U_{t_i} \subset Y_{t_i}$ jest zbiorem otwartym.

Lemat 2.3. *Rozważmy zbiór X oraz rodzinę odwzorowań*
$$\mathfrak{f} = \{f_t \colon X \to (Y_t, \tau_t)\}.$$
Jeśli (Z, τ_Z) jest przestrzenią topologiczną, wówczas odwzorowanie
$$g \colon (Z, \tau_Z) \to (X, \tau^*(\mathfrak{f}))$$
jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy każde złożenie $f_t \circ g$ jest ciągłe.

Definicja 2.4 (Popchnięcie topologii). Niech Y będzie zbiorem. Załóżmy, że mamy daną $\{(X_t, \tau_t)\}_{t\in T}$ rodziną przestrzeni topologicznych oraz rodzinę odwzorowań
$$f_t \colon X_t \to Y.$$

Na Y możemy rozpatrywać najsilniejszą (tj. największą w sensie inkluzji) topologię $\tau_*(\mathfrak{f})$ względem której wszystkie odwzorowania f_t są ciągłe.

Lemat 2.5. *Niech X będzie zbiorem oraz rozważmy rodzinę odwzorowań*

$$\mathfrak{f} = \{f_t \colon (X_t, \tau_t) \to Y\}_{t \in T}.$$

Zbiór $U \subset Y$ jest otwarty w topologii $\tau^*(\mathfrak{f})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in T$ zbiór $f_t^{-1}(U) \subset X_t$ jest otwarty.

Lemat 2.6. *Rozważmy zbiór Y oraz rodzinę odwzorowań*

$$\mathfrak{f} = \{f_t \colon (X_t, \tau_t) \to Y\}_{t \in T}.$$

Jeśli (Z, τ_Z) jest przestrzenią topologiczną, wówczas odwzorowanie

$$g \colon (Y, \tau_*(\mathfrak{f})) \to (Z, \tau_Z)$$

jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy każde złożenie $g \circ f_t$ jest ciągłe.

Przykład 2.7. Niech (X, τ_X) będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $A \subset X$. Topologia indukowana $\tau_X|_A$ jest cofnięciem topologii τ_X przez inkluzję $\iota \colon A \to X$, tj.

$$\tau_X|_A = \tau^*(\iota).$$

Przykład 2.8. Niech (X, τ_X) będzie przestrzenią topologiczną oraz załóżmy, że odwzorowanie $f \colon X \to Y$ jest suriekcją. Topologię $\tau_*(f)$ nazywamy topologią ilorazową na Y. Więcej na temat tej topologii będziemy mówić w dalszej części kursu.

2.2 Koprodukty (sumy rozłączne) przestrzeni topologicznych

Definicja 2.9. Rozważmy rodzinę przestrzeni topologicznych $\{(X_t, \tau_t)\}_{t \in T}$.

- Oznaczamy
$$\bigsqcup_{t \in T} X_t := \bigcup_{t \in T} X_t \times \{t\}.$$
Dla $s \neq t$ mamy $(X_s \times \{s\}) \cap (X_t \times \{t\}) = \emptyset$.

- Rozważmy rodzinę inkluzji
$$\iota = \left\{ \iota_t \colon X_t \hookrightarrow \bigsqcup_{t \in T} X_t \right\}_{t \in T},$$
gdzie $\iota_t(x) = (x, t)$.

- Przestrzeń topologiczną $\left(\bigsqcup_{t\in T} X_t, \tau_*(\iota)\right)$ nazywamy *koproduktem* (*sumą dyskretną, sumą rozłączną*) rodziny $\{(X_t,\tau_t)\}_{t\in T}$.

Stwierdzenie 2.10. *Niech $\{(X_t,\tau_t)\}_{t\in T}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych. Podzbiór $U \subset \bigsqcup_{t\in T} X_t$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in T$ zbiór $U \cap X_t$ jest otwarty.*

Dowód. Na mocy lematu 2.5, zbiór $U \subset \bigsqcup_{t\in T} X_t$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in T$ zbiór $\iota_t^{-1}(U) = U \cap X_t$ jest otwarty. □

Stwierdzenie 2.11 (Własność uniwersalna koproduktu)**.** *Niech $\{f_t \colon X_t \to Y\}$ będzie rodziną ciągłych odwzorowań. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie*

$$f = \nabla(\{f_t\}_{t\in T})\colon \bigsqcup_{t\in T} X_t \to Y$$

takie, że dla każdego $t \in T$ zachodzi $f \circ \iota_t = f_t$.

Dowód. Odwzorowanie f definiujemy następująco:

$$f(x,t) = f_t(x).$$

Ciągłość f wynika bezpośrednio z Lematu 2.6. □

Twierdzenie 2.12. *Niech $\{(X_t,\tau_t)\}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych.*

(1) Jeśli dla każdego $t \in T$, X_t jest T_i-przestrzenią, gdzie $i \in \{0,1,2,3,3\frac{1}{2},4\}$, to suma dyskretna jest T_i-przestrzenią.

(2) Jeśli dla każdego $t \in T$, X_t spełnia I aksjomat przeliczalności (II a.p. i T jest przeliczalny), to suma dyskretna spełnia I (II) aksjomat przeliczalności.

(3) Suma dyskretna przeliczalnie wielu przestrzeni ośrodkowych jest ośrodkowa.

(4) Jeśli wszystkie przestrzenie X_t są metryzowalne, to suma dyskretna jest metryzowalna.

Dowód. Dowody punktów (1) – (3) zostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika.

Aby dowieść punkt (4) zauważmy, że jeśli d_t jest metryką na X_t generującą topologię tej przestrzeni, wówczas na sumie dyskretnej możemy określić metrykę w następujący sposób

$$d((x,t),(y,s)) = \begin{cases} d_t(x,y), & \text{jeśli } t = s, \\ 1, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

□

2.3 Produkty kartezjańskie przestrzeni topologicznych

Definicja 2.13. Niech (X), $t \in T$ będzie rodziną zbiorów.

- Iloczyn kartezjański rodziny $\{(X_t, \tau_t)\}$ to zbiór

$$\prod_{t\in T} X_t = \left\{ u\colon T \to \bigcup_{t\in T} X_t \mid \forall_{t\in T}\ u(t) \in X_t \right\}.$$

- Będziemy stosować następującą notację do oznaczania punktów $u \in \prod_{t\in T} X_t$ produkty kartezjańskiego

$$u = (u_t)_{t\in T}, \quad u_t = u(t).$$

- Dla każdego $s \in T$ zdefiniowane są rzutowania

$$p_s\colon \prod_{t\in T} X_t \to X_s, \quad p_s((u_t)_{t\in T}) = u_s.$$

Definicja 2.14. Niech $\{(X_t, \tau_t)\}_{t\in T}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych.

- *Topologią produktową* na $\prod_{t\in T} X_t$ nazywamy topologię $\tau^*(\mathfrak{p})$, gdzie $\mathfrak{p} = \{p_t\}_{t\in T}$ jest rodziną rzutowań produktu kartezjańskiego rodziny $\{X_t\}_{t\in T}$ na czynniki.

Lemat 2.15. *Topologia produktowa na $\prod_{t\in T} X_t$ jest generowana przez zbiory postaci*

$$\mathcal{B} = \left\{ U = \prod_{t\in T} U_t\colon \forall_{t\in T}\ U_t \in \tau_t, \quad U_t = X_t \ \textit{dla p.w.}\ t \right\}.$$

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnego $s \in T$, jeśli $U_s \subset X_s$, wówczas $p_s^{-1}(U_s) = U_s \times \prod_{t\in T\setminus\{s\}} X_t$. Dodatkowo, dla $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$, jeśli $U_{s_i} \subset X_{s_i}$, wówczas

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(U_{s_i}) = U_{s_1} \times U_{s_2} \times \cdots \times U_{s_n} \times \prod_{t\in T\setminus\{s_1,\ldots,s_n\}} X_t.$$

Zatem, dowód jest zakończony jeśli dowołamy się do Lematu 2.2. □

Przykład 2.16.
- Jeśli, T to zbiór, oraz (X, τ) to przestrzeń topologiczna, wówczas X^T to iloczyn kartezjański $\prod_{t\in T} X_t$, gdzie $X_t = X$, dla $t \in T$.

- W szczególności, dla $n \geq 1$, $X^n = \overbrace{X \times \cdots \times X}^{n}$.

Przykład 2.17. Niech λ będzie nieskończoną liczbą kardynalną.

- Jeśli $2 = \{0,1\}$ - dwupunktowa przestrzeń dyskretna, wówczas *kostką Cantora*[14] ciężaru λ nazywamy przestrzeń topologiczną 2^λ.

- Przestrzeń topologiczną $[0,1]^\lambda$ nazywamy *kostką Tichonowa ciężaru* λ.

Przykład 2.18. Jeśli $\lambda = \omega = \aleph_0$, wówczas:

- Przestrzeń 2^ω jest homeomorficzna ze *zbiorem Cantora*.

- Przestrzeń topologiczną $[0,1]^\omega$ nazywamy *kostką Hilberta*[15].

Stwierdzenie 2.19. *Dla dowolnego $s \in T$, rzutowanie $p_s : \prod_{t\in T} X_t \to X_s$ jest ciągłe i przekształca zbiory otwarte w iloczynie kartezjańskim $\prod_{t\in T} X_t$ na zbiory otwarte w X_s.*

Dowód. Ciągłość rzutowań wynika z definicji topologii produktowej.

Aby sprawdzić otwartość rzutowań, zauważmy, że jeśli U jest otwartym zbiorem bazowym, wówczas, dla każdego $t \in T$, obraz $p_t(U)$ jest zbiorem otwartym w X_t. Korzystając z faktu, że każdy zbiór otwarty w produkcie jest sumą zbiorów bazowych, łatwo wnioskujemy, że dla dowolnego otwartego podzbioru $U \subset \prod_{t\in T} X_t$, jego obraz $p_t(U)$ jest otwarty w X_t. □

Stwierdzenie 2.20. *Ciąg $((u_t^n)_{t\in T})_n$ punktów iloczynu kartezjańskiego $\prod_{t\in T} X_t$ zbiega do punktu $(u_t)_{t\in T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in T$, $x_t^n \longrightarrow x_t$.*

Jeśli $(u_t^n)_{t\in T} \to (u_t)_{t\in T}$, wówczas dla każdego $t \in T$ zachodzi

$$u_t^n = p_t((u_t^n)_{t\in T}) \longrightarrow p_t((u_t)_{t\in T}) = u_t.$$

Załóżmy zatem, że dla każdego $t \in T$ zachodzi $u_t^n \to u_t$. Niech $U \subset \prod_{t\in T} X_t$ będzie otoczeniem punktu $(u_t)_{t\in T}$. Bez straty ogólności, możemy założyć, że U jest otoczeniem bazowym, tj. istnieje skończony zbiór $S \subset T$ taki, że

$$U = \prod_{s\in S} U_s \times \prod_{t\in T\setminus S} X_t,$$

gdzie $U_s \subset X_s$ jest otoczeniem punktu x_s. Korzystając z założenia, znajdujemy $N > 0$ takie, że dla $n > N$ zachodzi $u_s^n \in U_s$, dla każdego $s \in S$. To pokazuje, że dla $n > N$ zachodzi $(u_t^n)_{t\in T} \in U$. Zatem $(u_{t\in T}^n) \to (u_t)_{t\in T}$.

[14] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor – niemiecki matematyk.
[15] David Hilbert – niemiecki matematyk.

Stwierdzenie 2.21. *Niech A_t będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej X_t, $t \in T$.*

(1) w iloczynie $\prod_{t\in T} A_t$ topologia podprzestrzeni iloczynu $\prod_{t\in T} X_t$ pokrywa się z topologią iloczynu kartezjańskiego podprzestrzeni A_t.

(2) $\operatorname{cl}\left(\prod_{t\in T} A_t\right) = \prod_{t\in T} \operatorname{cl}_{X_t} A_t$.

Dowód. Niech $A = \prod_{t\in T} A_t$. Punkt (1) jest konsekwencją faktu, że dla dowolnego zbioru bazowego

$$U = \prod_{t\in T} U_t$$

zachodzi

$$U \cap A = \prod_{t\in T} (U_t \cap A_t).$$

Aby udowodnić (2) uzasadnijmy najpierw, że zbiór $\prod_{t\in T} B_t$ jest domknięty, o ile wszystkie $B_t \subset X_t$ są domknięte. Mamy

$$\prod_{t\in T} B_t = \bigcap_{t\in T} p_t^{-1}(B_t),$$

co pokazuje, że domkniętość zbioru po lewej stronie znaku równości.

Skoro $\prod_{t\in T} \operatorname{cl}_{X_t}(A_t)$ jest domknięty, to

$$\operatorname{cl}\left(\prod_{t\in T} A_t\right) \subset \prod_{t\in T} \operatorname{cl}_{X_t} A_t.$$

Pokażemy, że zachodzi implikacja w drugą stronę.

Niech $u = (u_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} \operatorname{cl}_{X_t}(A_t)$. Wybierzmy zbiór bazowy

$$U = \prod_{t\in T} U_t$$

taki, że $u \in U$. Z definicji domknięcia wynika, że dla każdego $t \in T$ zachodzi $U_t \cap A_t \neq \emptyset$. Zatem, $U \cap \prod_{t\in T} A_t$, co pokazuje, że $u \in \operatorname{cl}\left(\prod_{t\in T} A_t\right)$. W konsekwencji, otrzymaliśmy inkluzję w drugą stronę

$$\prod_{t\in T} \operatorname{cl}_{X_t} A_t \subset \operatorname{cl}\left(\prod_{t\in T} A_t\right).$$

□

Wniosek 2.22. *Niech A_t będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej X_t, dla każdego $t \in T$.*

(1) *Jeśli* A_t *jest gęsty w* X_t*, dla* $t \in T$*, to* $\prod_{t\in T} A_t$ *jest gęsty w* $\prod_{t\in T} X_t$*.*

(2) *Jeśli* A_t *jest domknięty w* X_t*, dla* $t \in T$*, to* $\prod_{t\in T} A_t$ *jest domknięty w* $\prod_{t\in T} X_t$*.*

Dowód. Jeśli wszystkie zbiory $A_t \subset X_t$ są gęste, wówczas, na mocy Stwierdzenia 2.21 zachodzi

$$\mathrm{cl}\left(\prod_{t\in T} A_t\right) = \prod_{t\in T} \mathrm{cl}_{X_t}(A_t) = \prod_{t\in T} X_t,$$

zatem, produkt zbiorów A_t jest gęsty.

W dowodzie punktu (2) rozumujemy analogicznie. □

Stwierdzenie 2.23. *Przekształcenie* $f : Y \to \prod_{t\in T} X_t$ *przestrzeni* Y *w iloczyn kartezjański przestrzeni* X_t *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s \in T$*, złożenie* $p_s \circ f : Y \to X_s$ *jest ciągłe.*

Dowód. Bezpośredni wniosek z Lematu 2.3. □

Wniosek 2.24 (Własność uniwersalna produktu)**.** *Jeśli* $(X_t, \tau_t)_{t\in T}$ *jest rodziną przestrzeni topologicznych oraz* $\{f_t \colon Y \to X_t\}_{t\in T}$ *jest rodziną ciągłych odwzorowań, wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe*

$$f = \Delta\left(\{f_t\}_{t\in T}\right) : Y \to \prod_{t\in T} X_t$$

takie, że dla każdego $t \in T$ *zachodzi* $p_t \circ f = f_t$*.*

Dowód. Odwzorowanie $f = \Delta\left(\{f_t\}_{t\in T}\right)$ definiujemy następująco

$$f(y) = (f_t(y))_{t\in T} \in \prod_{t\in T} X_t.$$

Ciągłość odwzorowania f wynika ze Stwierdzenia 2.23. □

Przykład 2.25. Niech T będzie zbiorem.

- Załóżmy, że dana jest rodzina ciągłych odwzorowań

$$f_t \colon X_t \to Y_t, \quad \text{dla } t \in T.$$

- Zauważmy, że możemy zdefiniować rodzinę ciągłych odwzorowań

$$\mathfrak{g} = \{g_t\}_{t\in T}, \quad g_t = f_t \circ p_t \colon \prod_{t\in T} X_t \to Y_t, \quad \text{dla } t \in T.$$

- Stosując własność uniwersalną produktu do rodziny $\Delta(\mathfrak{g})$ otrzymujemy ciągłe odwzorowanie

$$\prod_{t\in T} f_t := \Delta(\mathfrak{g})\colon \prod_{t\in T} X_t \to \prod_{t\in T} Y_t, \quad \prod_{t\in T} f_t\colon (u_t)_{t\in T} \mapsto (f(u_t))_{t\in T},$$

  które nazywamy *produktem rodziny* $\{f_t\}$.

Stwierdzenie 2.26. *Dla dowolnego niepustego $S \subsetneq T$, rzutowanie*

$$p_S : \prod_{t\in T} X_t \to \prod_{t\in S} X_t$$

jest ciągłe i przekształca zbiory otwarte w iloczynie kartezjańskim $\prod_{t\in T} X_t$ na zbiory otwarte w $\prod_{t\in S} X_t$.

Dowód. Ciągłość wynika z faktu, że p_S można przedstawić jako przekątna rodziny odwzorowań

$$p_S = \Delta(\{p_t\}_{t\in S}).$$

Otwartość pokazujemy tak samo jak w dowodzie Stwierdzenia 2.19. □

Twierdzenie 2.27. *Niech T będzie zbiorem przeliczalnym, a X_t przestrzenią spełniającą I (II) aksjomat przeliczalności, dla $t \in T$. Wówczas iloczyn kartezjański $\prod_{t\in T} X_t$ spełnia I (II) aksjomat przeliczalności.*

Dowód. Jeśli dla każdego $t \in T$ rodzina $\mathcal{B}_t$ jest przeliczalną bazą topologii na X_t, wówczas rodzina

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{t\in T} V_t \colon \forall_{t\in T}\ V_t \in \mathcal{B}_t \cup \{X_t\} \quad \text{oraz } V_t = X_t \text{ dla p.w. } t \in T \right\}$$

jest przeliczalną bazą produktu.

Podobnie konstruujemy przeliczalne bazy otoczeń. □

Twierdzenie 2.28. *Jeśli (X_t, τ_t) jest rodziną T_1-przestrzeni takich, że $|X_t| > 1$, dla każdego $t \in T$, oraz $|T| > \aleph_0$, wówczas $\prod_{t\in T} X_t$ nie spełnia I aksjomatu przeliczalności.*

Dowód. Ustalmy $u = (u_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} X_t$ oraz niech $\mathcal{B}_u = \{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ będzie przeliczalną bazą otoczeń punktu u. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje tylko skończenie wiele indeksów $t \in T$ takich, że $p_t(B_n) \neq X_t$. Zatem istnieje $t_0 \in T$ takie, że $p_{t_0}(B_n) = X_{t_0}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $u_{t_0} \in V \subsetneq X_t$ jest otoczeniem otwartym, wówczas $U = p_{t_0}^{-1}(V)$ jest otwartym otoczeniem u, które nie zawiera żadnego zbioru z rodziny $\mathcal{B}$. □

Twierdzenie 2.29. *Niech T będzie zbiorem przeliczalnym, a X_t przestrzenią ośrodkową, dla $t \in T$. Wówczas iloczyn kartezjański $\prod_{t\in T} X_t$ jest ośrodkowy.*

Dowód. Jeśli $A_t \subset X_t$ jest przeliczalnym zbiorem gęstym, wówczas, na mocy Lematu 2.21, $A = \prod_{t\in T}$ jest przeliczalnym podzbiorem gęstym w $\prod_{t\in T} X_t$. □

Uwaga
W powyższym twierdzeniu wystarczy zakładać, że moc zbioru T nie jest większa od continuum.

Twierdzenie 2.30. *Niech T będzie zbiorem przeliczalnym, a X_t przestrzenią metryzowalną, dla $t \in T$. Wówczas iloczyn kartezjański $\prod_{t\in T} X_t$ jest metryzowalny.*

Dowód. Skoro T jest przeliczalny, to możemy założyć, że $T = \mathbb{N}$. Niech d_n będzie metryką generującą topologię X_n, dla $n \in \mathbb{N}$. Ustalamy stałą $\delta > 0$. Topologia produktu $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ jest generowana przez metrykę

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_n(x_n, y_n), 1),$$

zob. [BCPP23, Dowód Twierdzenia 1.5.2]. □

Wniosek 2.31. *Kostka Hilberta $[0,1]^\omega$ jest metryzowalna i ośrodkowa.*
Kostka Cantora 2^ω jest metryzowalna i ośrodkowa.

Dowód. Bezpośrednia konsekwencja Twierdzenia 2.29 i Twierdzenia 2.30. □

Twierdzenie 2.32. *Jeśli dla każdego $t \in T$, X_t jest T_i-przestrzenią, gdzie $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, to iloczyn kartezjański $\prod_{t\in T} X_t$ jest T_i-przestrzenią.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Uwaga
Strzałka jest normalna, ale jej kwadrat $S \times S$ nie jest normalny, zob. Wniosek 1.128.

2.4 Dodatek: Twierdzenie o przekątnej i przestrzenie uniwersalne

2.4.1 Własności przekątnej odwzorowań

Definicja 2.33. Załóżmy, że mamy daną rodzinę odwzorowań ciągłych $\mathfrak{f} = \{f_t\colon X \to Y_t\}$ o wspólnej dziedzinie.

- We Wniosku 2.24 pokazaliśmy, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe
$$\Delta(\mathfrak{f})\colon X \to \prod_{t\in T} Y_t$$
takie, że dla każdego $t \in T$, mamy $p_t \circ \Delta(\mathfrak{f}) = f_t$.

- Odwzorowanie $\Delta(\mathfrak{f})$ nazywamy *przekątną rodziny* $\mathfrak{f}$.

Definicja 2.34. Rozważmy rodzinę ciągłych odwzorowań $\mathfrak{f} = \{f_t\colon X \to Y_t\}_{t\in T}$.

- Mówimy, że rodzina $\mathfrak{f}$ *oddziela punkty*, jeśli dla dowolnych $x, y \in X$ istniej $t_0 \in T$ takie, że $f_{t_0}(x) \neq f_{t_0}(y)$.

- Mówimy, że rodzina $\mathfrak{f}$ *oddziela punkty od zbiorów domkniętych*, jeśli dla dowolnego $x \in X$ oraz dowolnego zbioru domkniętego $A \subset X$ takie, że $x \notin A$, istnieje $t_0 \in T$ takie, że $f_{t_0}(x) \notin \mathrm{cl}(f_{t_0}(A))$.

Twierdzenie 2.35. *Załóżmy, że dana jest rodzina ciągłych odwzorowań* $\mathfrak{f} = \{f_t\colon X \to Y_t\}_{t\in T}$.

(1) Jeśli $\mathfrak{f}$ *oddziela punkty, wówczas przekątna rodziny* $\mathfrak{f}$ *jest różnowartościowa.*

(2) Jeśli $\mathfrak{f}$ *oddziela punkty od zbiorów domkniętych, wówczas* $\Delta(\mathfrak{f})$ *jest zanurzeniem homeomorficznym.*

Dowód. Jeśli rodzina $\mathfrak{f}$ rozdziela punkty, to dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje $t_0 \in T$ takie, że $f_{t_0}(x) \neq f_{t_0}(y)$, zatem $\Delta(\mathfrak{f})(x) \neq \Delta(\mathfrak{f})(y)$.

Załóżmy teraz, że rodzina $\mathfrak{f}$ oddziela punkty of zbiorów domkniętych. Z poprzedniego punktu wnioskujemy, że $\Delta(\mathfrak{f})$ jest różnowartościowa. Aby pokazać, że $\Delta(\mathfrak{f})$ jest zanurzeniem homeomorficznym, wystarczy uzasadnić, że dla każdego zbioru domkniętego $A \subset X$ zachodzi równość

$$\Delta(\mathfrak{f})(A) = \Delta(\mathfrak{f})(X) \cap \mathrm{cl}_Y \Delta(\mathfrak{f})(A), \tag{2.1}$$

gdzie $Y = \prod_{t\in T} Y_t$.

Po pierwsze, zauważmy, że inkluzja

$$\Delta(\mathfrak{f})(A) \subset \Delta(\mathfrak{f})(X) \cap \mathrm{cl}_Y \Delta(\mathfrak{f})(A)$$

zachodzi w sposób oczywisty. Zatem, wystarczy uzasadnić, że zachodzi inkluzja odwrotna.

Załóżmy, że $x \in X$ spełnia $y = \Delta(\mathfrak{f})(x) \in \mathrm{cl}_Y \Delta(\mathfrak{f})(A)$. Gdyby $x \notin A$, wówczas istniałoby $t_0 \in T$ takie, że $f_{t_0} \notin \mathrm{cl}_{Y_t} f_{t_0}(A)$. Jeśli U_{t_0} jest dowolnym otoczeniem $f_{t_0}(x)$ w Y_{t_0}, to, na mocy założenia,

$$p_{t_0}^{-1}(U_{t_0}) \cap \Delta(\mathfrak{f})(A) \neq \emptyset.$$

Zatem $U_t \cap f_{t_0}(A) \neq \emptyset$, co pokazuje, że $f_{t_0}(x) \in \mathrm{cl}_X(f_{t_0}(A))$, co jest sprzeczne z tym, że $x \notin F$. Zatem musi być $x \in F$, co pokazuje, że zachodzi następująca inkluzja

$$\Delta(\mathfrak{f})(A) \supset \Delta(\mathfrak{f})(X) \cap \mathrm{cl}_Y \Delta(\mathfrak{f})(A).$$

Ostatecznie, pokazaliśmy równość (2.1), co kończy dowód Twierdzenia. $\square$

Przykład 2.36. Załóżmy, że (X, d) jest ośrodkową przestrzenią metryczną i $Z \subset X$ jest przeliczalnym podzbiorem gęstym.

- Rozważmy rodzinę funkcji $\mathfrak{f} = \{f_z(x) = \min(d(x, z), 1)\}_{z \in Z}$.
- Jeśli $x \in X$, $A \subset X$ domknięty taki, że $x \notin A$, niech $D = \min(d(x, A), 1)$.
- Ustalmy $z_0 \in Z$ taki, że $d(x, z_0) < D/2$. Mamy

$$f_{z_0}(x) < D/2, \quad f_{z_0}(A) \subset (D/2, 1].$$

- Zatem rodzina $\mathfrak{f}$ oddziela punkty od zbiorów domkniętych.
- Z twierdzenia o przekątnej otrzymujemy zanurzenie homeomorficzne

$$\Delta(\mathfrak{f}) \colon X \to [0, 1]^Z \cong [0, 1]^\omega.$$

2.4.2 Przestrzenie uniwersalne

Definicja 2.37. Przestrzeń topologiczną X nazywamy *uniwersalną* dla klasy $\mathcal{P}$ przestrzeni topologicznych, jeśli $X \in \mathcal{P}$ i dla dowolnego $Y \in \mathcal{P}$, istnieje zanurzenie homeomorficzne Y w X.

Przykład 2.38. Kostka Hilberta $[0, 1]^\omega$ jest uniwersalna dla klasy przestrzeni metrycznych ośrodkowych.

Twierdzenie 2.39. *Dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej λ, kostka Tichonowa $[0, 1]^\lambda$ jest przestrzenią uniwersalną dla klasy przestrzeni całkowicie regularnych ($T_{3\frac{1}{2}}$) ciężaru $\leq \lambda$.*

Dowód: Krok 1

- Dla każdej pary $s = (x, U) \in S := \{(x, U) \in X \times \tau \colon x \in U\}$, Stwierdzenie 1.119 gwarantuje istnienie funkcji ciągłej

$$f_s \colon X \to I, \quad \text{takiej, że } f(x) = 1, \text{ oraz } f(X \setminus U) = \{0\}.$$

- Oznaczmy, $U_s := f_s^{-1}((0, 1])$.
- Rodzina $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s \in S}$ tworzy bazę topologii na X.

Dowód: Krok 2

- Niech $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s \in S}$ będzie bazą z poprzedniego kroku.
- Korzystamy z [Eng89, Twierdzenie 1.1.15], który mówi, że dla dowolnej bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni X istnieje podrodzina $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ mocy $\leq \lambda$, która też jest bazą.
- Istnieje zatem podzbiór $T \subset S$ mocy $\leq \lambda$ taki, że rodzina

$$\mathcal{B}_0 = \{U_t\}_{t \in T}$$

  jest bazą X.

Dowód: Krok 3

- Niech $\mathcal{B}_0 = \{U_t\}_{t \in T}$ będzie bazą z poprzedniego kroku.
- Z kroku pierwszego wiemy, że dla każdego $t \in T$ istnieje funkcja ciągła

$$f_t \colon X \to [0, 1], \quad U_t = f^{-1}((0, 1]).$$

- Rozważmy rodzinę odwzorowań

$$\mathfrak{f} = \{f_t\}_{t \in T}.$$

Dowód: Krok 4

- Jeśli $x \in X$, $A \subset X$ domknięty taki, że $x \notin A$, wówczas istnieje $t_0 \in T$ takie, że

$$x \in U_t \subset X \setminus A.$$

- Wówczas $f_{t_0}(x) \in (0, 1]$ oraz $f_{t_0}(A) = \{0\}$.

- Zatem rodzina $\mathfrak{f}$ oddziela punkty od zbiorów domkniętych.
- Z twierdzenia o przekątnej otrzymujemy zanurzenie homeomorficzne

$$\Delta(\mathfrak{f})\colon X \hookrightarrow [0,1]^T.$$

- Z faktu, że $|T| \leq \lambda$ wynika, że $[0,1]^T$ zanurza się homeomorficznie w $[0,1]^\lambda$.

Wniosek 2.40. *Każda całkowicie regularna przestrzeń topologiczna spełniająca II aksjomat przeliczalności jest metryzowalna.*

Dowód. Z twierdzenia 2.39 wnioskujemy, że każda przestrzeń topologiczna o tych własnościach zanurza się w kostce Hilberta, ale kostka Hilberta jest metryzowalna, zob. Tw 2.30. Zatem, wyjściowa przestrzeń jest również metryzowalna. □

Uwaga 2.41. *Twierdzenie metryzacyjne Urysohna, które jest mocniejszą wersją powyższego twierdzenia mówi, że każda regularna przestrzeń spełniająca drugi aksjomat przeliczalności jest metryzowalna.*

3 Zwartość

3.1 Zwarte przestrzenie metryczne

Na kursie Analiza II pojawiło się już pojęcie podzbioru zwartego w $\mathbb{R}^n$. Dlatego w tej sekcji przypominamy najważniejsze własności zwartych przestrzeni metrycznych.

Definicja 3.1 (Bolzano-Weierstrass). Przestrzeń metryczna (X, d) jest *zwarta* jeśli każdy ciąg punktów z X zawiera podciąg zbieżny.

Twierdzenie 3.2 (Weierstrassa)**.** *Każda funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ na niepustej i zwartej przestrzeni metrycznej (X, d) jest ograniczona i osiąga kresy.*

Stwierdzenie 3.3. *Każda zwarta przestrzeń metryczna (X, d) jest ograniczona.*

Jeśli $A \subset X$ jest taki, że $(A, d|_A)$ jest zwartą przestrzenią metryczną, to A jest domkniętym podzbiorem X.

Dowód. Aby uzasadnić ograniczoność wystarczy zastosować Twierdzenie 3.2 do funkcji $f \colon X \to \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = d(x, x_0)$, gdzie $x_0 \in X$ jest ustalonym punktem.

Załóżmy, że $A \subset X$ jest taki, że $(A, d|_A)$ jest zwartą przestrzenią metryczną. Weźmy dowolny punkt $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Wiemy, że istnieje ciąg $(a_n)_n$ punktów z A taki, że $a_n \xrightarrow{x}$. To oznacza, że jedynym punktem skupienia ciągu $(a_n)_n$ jest punkt x. Zatem, ze zwartości wynika, że $x \in A$. Pokazaliśmy, że $\mathrm{cl}_X(A) \subset A$, co oznacza, że A jest domkniętym podzbiorem X. □

Stwierdzenie 3.4 (Twierdzenie Heinego-Borela)**.** *Podzbiór przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

Przykład 3.5 (Przestrzeń Hilberta ℓ^2). Rozważmy następujący podzbiór $\mathbb{R}^\omega$: $(\ell^2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^\omega \colon \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$.

- W zbiorze ℓ^2 określamy metrykę

$$d_2((x_n), (y_n)) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Rozważmy ciąg $(\mathbf{e}^k)_{k \geq 1}$ elementów ℓ^2, gdzie

$$\mathbf{e}^k = (e_n^k)_n, \quad e_n^k = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

- Dla dowolnych $k_1 \neq k_2 \geq 1$ mamy $d_2(\mathbf{e}^{k_1}, \mathbf{e}^{k_2}) = \sqrt{2}$, zatem ciąg $(\mathbf{e}^k)_k$ nie ma punktów skupienia.

- W konsekwencji, kula $\overline{B}_{d_2}(\mathbf{0}, 1)$ nie jest zbiorem zwartym.

Definicja 3.6. Rodzina $\mathcal{U}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej (X, τ) jest *pokryciem*, jeśli $\bigcup \mathcal{U} = X$. Rodzina $\mathcal{U}$ jest *pokryciem otwarty*, jeśli jest pokryciem oraz każdy jej element jest zbiorem otwartym.

Lemat 3.7 (o liczbie Lebesgue'a pokrycia)**.** *Niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem zwartej przestrzeni metrycznej (X, d). Wówczas istnieje liczba $\lambda > 0$ taka, że dowolny podzbiór X średnicy mniejszej niż λ leży w pewnym elemencie $\mathcal{U}$.*

Liczbę λ nazywamy liczbą Lebesgue'a[16] *pokrycia.*

Dowód. Przypuśćmy, że taka liczba $\lambda > 0$ nie istnieje. Wówczas, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $a_n \in X$ taki, że kula $B(a_n, 1/n)$ nie jest zawarta w żadnym elemencie pokrycia $\mathcal{U}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a_n \to a_0$. Jeśli $U_0 \in \mathcal{U}$ jest taki, że $a_0 \in U_0$, to wybierzmy $\delta > 0$ takie, że $B(a_0, \delta) \subset U_0$. Korzystając z faktu, że $a_n \to a_0$, znajdujemy $N > 0$ takie, że dla dowolnego $n > N$ mamy $d(a_n, a_0) < \delta$. Jeśli wybierzemy $n_0 > N$ takie, że $2/n_0 < \delta$ widzimy, że

$$B(a_{n_0}, 1/n_0) \subset B(a_0, \delta) \subset U_0,$$

co jest sprzeczne z założeniem.

Zatem musi istnieć liczba $\lambda > 0$ o żądanych własnościach. □

Twierdzenie 3.8. *Dla przestrzeni metryzowalnej (X, τ) następujące warunki są równoważne:*

(1) z każdego pokrycia otwartego przestrzeni X można wybrać pokrycie skończone;

(2) z każdego przeliczalnego otwartego pokrycia przestrzeni X można wybrać pokrycie skończone;

(3) każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych w X ma niepuste przecięcie;

(4) (X, τ) jest zwarta.

[16] Henri Léon Lebesgue – francuski matematyk.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) Ta implikacja jest oczywista.

(2) $\Rightarrow$ (3) Niech $\mathcal{A} = \{A_n\}_n$ będzie zstępującą rodziną zbiorów domkniętych, tj.

$$A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots .$$

Jeśli

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

wówczas rodzina $\mathcal{U} = \{X \setminus A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest przeliczalnym pokryciem X. Na mocy warunku (2) istnieje skończony zbiór $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$ taki, że

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{k} X \setminus A_{m_i}.$$

Zatem $\bigcap_{i=1}^{k} A_{m_i} = \emptyset$. Korzystając z faktu, że rodzina $\mathcal{A}$ jest zstępująca wynika, że

$$A_{m_k} = \bigcap_{i=1}^{k} A_{m_k} = \emptyset,$$

co jest sprzeczne z założeniem. Zatem

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} A_m \neq \emptyset.$$

(3) $\Rightarrow$ (4)). Rozważmy ciąg $(x_n)_n$ punktów X. Rozważmy następujący zstępujący ciąg zbiorów domkniętych

$$A_m = \mathrm{cl}_X(\{x_n \colon n \geq m\}), \quad m \geq 1.$$

Z założenia wynika, że

$$A_0 := \bigcap_{m\geq 1} A_m \neq \emptyset.$$

Jeśli $x_0 \in A_0$ oraz U jest dowolnym otoczeniem x_0, wówczas dla każdego $m \geq 1$ zachodzi

$$V \cap A_m \neq \emptyset,$$

zatem V zawiera nieskończenie wieli wyrazów ciągu (x_n). Stąd wynika, że x_0 jest punktem skupienia ciągu $(x_n)_n$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Niech $\mathcal{U}$ będzie dowolnym pokryciem otwartym przestrzeni X oraz niech $\lambda > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a tego pokrycia. Załóżmy, że z $\mathcal{U}$ nie można wybrać skończonego pokrycia. Skoro każda kula o promieniu λ jest

zawarta w pewny, elemencie $\mathcal{U}$, zatem przestrzeń X nie posiada też skończonego pokrycia kulami o promieniu $\leq \lambda$.

Wybierzmy $x_0 \in X$. Dla każdego $n \geq 1$ istnieje

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \lambda).$$

Stąd wynika, że dla dowolnych $m, n \geq 0$ zachodzi $d(x_m, x_n) \geq \lambda$, co pokazuje, że ciąg $(x_n)_n$ nie ma punktów skupienia w X, co jest sprzeczne z założeniem. Stąd wniosek, że pokrycie $\mathcal{U}$ musi zawierać skończone podpokrycie. $\square$

Definicja 3.9. Przestrzeń metryczna (X, d) jest całkowicie ograniczona, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje skończona rodzina punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ taka, że

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon).$$

Wniosek 3.10. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.*

- *Jeśli (X, d) jest całkowicie ograniczona, to jest ośrodkowa.*
- *Każda zwarta przestrzeń metryczna jest całkowicie ograniczona, a w szczególności ośrodkowa.*

Dowód. Aby udowodnić ośrodkowość całkowicie ograniczonej przestrzeni metrycznej (X, d), dla każdego $m = 1, 2, 3, \ldots$ znajdujemy skończony zbiór $Z_m \subset X$ taki, że

$$X \subset \bigcup_{z \in Z_m} B(z, 1/m).$$

Zbiór

$$Z = \bigcup_{m \geq 1} Z_m$$

jest przeliczalny i gęsty, zatem (X, d) jest ośrodkowa.

Jeśli przestrzeń (X, d) jest zwarta, z pokrycia otwartego $\mathcal{U} = \{B(x, \epsilon) \colon x \in X\}$ możemy wybrać pokrycie skończone, co pokazuje, że (X, d) jest całkowicie ograniczona. $\square$

Twierdzenie 3.11 (Twierdzenie Heinego-Cantora)**.** *Każde przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ zwartej przestrzeni metrycznej (X, d_X) w przestrzeń metryczną (Y, d_Y) jest jednostajnie ciągłe, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{a,b \in X} \;\; d_X(a, b) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon.$$

3.2 Zwartość – podstawowe definicje i fakty

Podobnie jak robiliśmy to wcześniej, aby uogólnić pojęcie zwartości dla dowolnych przestrzeni topologicznych, użyjemy topologicznej charakteryzacji pojęcia zwartości z Twierdzenia 3.8.

Definicja 3.12. Przestrzeń topologiczna (X, τ) jest *zwarta*, jeśli jest przestrzenią Hausdorffa i z każdego otwartego pokrycia tej przestrzeni można wybrać pokrycie skończone.

Uwaga 3.13. *W literaturze angielskojęzycznej zwartość (ang. compactness) często odnosi się do przestrzeni topologicznych, które niekoniecznie są T_2.*

Definicja 3.14. Rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów przestrzeni X jest scentrowana jeśli jest niepusta i dla każdej niepustej podrodziny skończonej $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ mamy $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Stwierdzenie 3.15. *Przestrzeń Hausdorffa X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda scentrowana rodzina domkniętych podzbiorów X ma niepuste przecięcie.*

Dowód. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów domkniętych oraz niech $\mathcal{U} = \{X \setminus A \colon A \in \mathcal{A}\}$. Zauważmy, że

$$\bigcap \mathcal{A} = \emptyset \iff \mathcal{U} \text{ jest pokryciem } X.$$

Jeśli X jest zwarta i $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, to z pokrycia U możemy wybrać skończone pokrycie, co implikuje, że rodzina $\mathcal{A}$ nie jest scentrowana. Podobnie, jeśli $\mathcal{A}$ jest scentrowana i $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, to z pokrycia $\mathcal{U}$ nie można wybrać pokrycia skończonego. □

Stwierdzenie 3.16. *Domknięta podprzestrzeń przestrzeni zwartej jest zwarta.*

Dowód. Jeśli X jest zwarta i A jest domknięta, to niech $\mathcal{U}$ będzie dowolnym otwartym pokryciem zbioru A. Wówczas rodzina $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ jest pokryciem X. Korzystając ze zwartości X wybieramy skończone pokrycie z rodziny $\mathcal{U}_1$, co daje nam skończone podpokrycie zbioru A elementami rodziny $\mathcal{U}$. □

Stwierdzenie 3.17. *Zwarta podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest domknięta.*

Dowód. Niech A będzie zwartą podprzestrzenią przestrzeni Hausdorffa X. Ustalmy $y \in X \setminus A$. Dla każdego $x \in A$ istnieje para rozłącznych zbiorów otwartych U_x, V_x takich, że $y \in U_x$ oraz $x \in V_x$. Rodzina $\{V_x\}_{x\in A}$ tworzy otwarte pokrycie zbioru A, zatem, korzystając ze zwartości, znajdujemy skończony zbiór $A_0 \subset A$ taki, że

$$A \subset \bigcup_{a\in A_0} V_a.$$

Stąd wynika, że zbiór $U = \bigcap_{a\in A_0} U_a$ jest otwartym otoczeniem y, które spełnia

$$y \in U = \bigcap_{a\in A_0} U_a \subset \bigcap_{a\in A_0} X \setminus V_a = X \setminus \left(\bigcup_{a\in A_0} V_a\right) \subset X \setminus A.$$

Zatem, $x \in \operatorname{int}_X(X \setminus A)$.

Pokazaliśmy inkluzję $X \setminus A \subset \operatorname{int}_X(X \setminus A)$, zatem zbiór $X \setminus A$ jest otwarty. □

Twierdzenie 3.18. *Każda zwarta przestrzeń jest normalna.*

Dowód. Niech $A, B \subset X$ będą rozłącznymi i niepustymi zbiorami domkniętymi. Ze Stwierdzenia 3.16 wnioskujemy, że podprzestrzenie A i B są zwarte.

Argumentując jak w dowodzie Stwierdzenia 3.17, dla każdego punktu $b \in B$ znajdujemy parę rozłącznych zbiorów otwartych U_b, V_b takich, że

$$A \subset V_b, \quad b \in U_b \subset X \setminus V_b.$$

Rodzina $\{U_b\}_{b\in B}$ jest pokryciem zbioru B, zatem, korzystając ze zwartości B, znajdujemy skończony podzbiór $B_0 \subset B$ taki, że

$$B \subset U := \bigcup_{b\in B_0} U_b.$$

Biorąc $V = \bigcap_{b\in B_0} V_b$ stwierdzamy, że

$$A \subset V \subset \bigcap_{b\in B_0} X \setminus U_b = X \setminus \left(\bigcup_{b\in B_0} U_b\right) = X \setminus U.$$

Zatem zbioru U i V są rozłącznymi otoczeniami otwartymi zbiorów B i A, odpowiednio. To pokazuje, że przestrzeń X jest normalna. □

Wniosek 3.19. *Przestrzeń zwarta X jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia II aksjomat przeliczalności.*

Dowód. Załóżmy, że X jest zwarta i spełnia II aksjomat przeliczalności. Twierdzenie 3.18 mówi, że X jest normalna. Skoro X jest normalna oraz spełnia II aksjomat przeliczalności, to Twierdzenie 2.40 gwarantuje metryzowalność przestrzeni X.

Jeśli X jest zwarta i metryzowalna, to na mocy Wniosku 3.10, X jest ośrodkowa. Z twierdzenia 1.96 wynika, że X spełnia II aksjomat przeliczalności. $\square$

Stwierdzenie 3.20. *Jeśli przestrzeń Hausdorffa Y jest ciągłym obrazem przestrzeni zwartej X, to Y jest zwarta.*

Dowód. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem Y. Wówczas, rodzina $f^*\mathcal{U} = \{f^{-1}(U) \colon U \in \mathcal{U}\}$ jest otwartym pokryciem X. Korzystając ze zwartości X wybieramy skończoną podrodzinę $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, taką, że $f^*\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) \colon U \in \mathcal{V}\}$ pokrywa X. Wówczas, rodzina $\mathcal{V}$ pokrywa Y, co pokazuje zwartość przestrzeni Y. $\square$

Wniosek 3.21 (Weierstrassa). *Każda funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ na niepustej przestrzeni zwartej X jest ograniczona i osiąga kresy.*

Dowód. Obraz $f(X)$ jest podzbiorem zwartym w $\mathbb{R}$, więc, na mocy Stwierdzenia 3.4, $f(A)$ musi być domknięty i ograniczony. $\square$

Stwierdzenie 3.22. *Jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłą bijekcją przestrzeni zwartej X na przestrzeń Hausdorffa Y, to f jest homeomorfizmem.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że f przekształca zbiory domknięte na zbiory domknięte. Ten warunek jest wystarczający do zagwarantowania ciągłości f^{-1}.

Niech $A \subset X$ będzie domknięty. Z faktu, że X jest zwarta wynika, że A jest zbiorem zwartym. Zatem, na mocy Stwierdzenia 3.20, wnioskujemy, że $f(A)$ jest zwartym podzbiorem w Y. Stwierdzenie 3.17 implikuje, że $f(A)$ jest domkniętym podzbiorem Y. $\square$

Twierdzenie 3.23. *Jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłą suriekcją przestrzeni zwartej X na przestrzeń Hausdorffa Y. Jeśli $w(X) \geq \aleph_0$, to $w(Y) \leq w(X)$.*

Dowód. Niech $\mathcal{U} = \{U_t\}_{t \in T}$ będzie bazą przestrzeni X taką, że $|T| = w(X)$. Niech $S = \{I \subset T \colon |I| < \infty\}$. Dla dowolnego $I \in S$ definiujemy zbiory otwarte

$$U_I = \bigcup_{t \in I} U_t \subset X, \quad W_I = Y \setminus f(X \setminus U_I) \subset Y.$$

Pokażemy, że rodzina

$$\mathcal{W} = \{W_I\}_{I \in S}$$

jest bazą przestrzeni Y.

Zauważmy, że jeśli $U \subset X$ jest otwarty, to

$$f(U) = f\left(X \setminus (X \setminus U)\right) \supset f(X) \setminus f(X \setminus U) = Y \setminus f(X \setminus U).$$

Zatem, dla dowolnego $I \in S$, mamy

$$W_I \subset f(U_I). \tag{3.1}$$

Niech $y \in V \subset Y$, gdzie V jest otwarty. Zauważmy, że zbiór $f^{-1}(\{y\})$ jest zwarty oraz

$$f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(V).$$

Korzystając ze zwartości $f^{-1}(\{y\})$, możemy wybrać skończoną rodzinę $I \subset T$ taką, że

$$f^{-1}(\{y\}) \subset U_I \subset f^{-1}(V).$$

Zatem

$$y \in W_I \subset f(U_I) \subset f(f^{-1}(V)) = V.$$

Pokazaliśmy zatem, że rodzina $\mathcal{W}$ jest bazą przestrzeni Y.

Na koniec zauważmy, że

$$w(Y) \leq |S| = |T| = w(X),$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 3.24. *Jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłą suriekcją przestrzeni zwartej metryzowalnej X na przestrzeń Hausdorffa Y, to Y jest zwarta i metryzowalna.*

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że na mocy Stwierdzenia 3.20 Y jest zwarta.

Jeśli X jest zwarta i metryzowalna, to na mocy Wniosku 3.19, X spełnia II aksjomat przeliczalności. Z Twierdzenia 3.23 wynika, że

$$w(Y) \leq w(X) = \aleph_0.$$

Odwołując się jeszcze raz do Wniosku 3.19, stwierdzamy, że Y jest metryzowalna. □

3.3 Twierdzenie Tichonowa

Twierdzenie 3.25 (Twierdzenie Tichonowa)**.** *Iloczyn kartezjański dowolnej rodziny przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą.*

W dowodzie twierdzenia Tichonowa fundamentalną rolę odegra następujący lemat.

Twierdzenie 3.26 (Lemat Alexandera o podbazie)**.** *Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa z podbazą $\mathcal{P}$. Jeśli każde pokrycie $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$ przestrzeni X zawiera podpokrycie skończone, to X jest zwarta.*

Dowód. Rozważmy następującą rodzinę pokryć otwartych przestrzeni X.

$$\mathcal{N} = \left\{\mathcal{U} \subset \tau\colon \bigcup \mathcal{U} = X, \quad \mathcal{U} \text{ nie zawiera skończonego podpokrycia}\right\}.$$

Rodzina $\mathcal{N}$ jest częściowo uporządkowana przez inkluzję. Każdy łańcuch w $\mathcal{N}$

$$\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1} \subset \cdots$$

posiada ograniczenie górne

$$\mathcal{U}_\infty = \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{U}_k.$$

Zatem, na mocy Lematu Kuratowskiego-Zorna, w $\mathcal{N}$ istnieje element maksymalny $\mathcal{Z}$. Innymi słowy, $\mathcal{Z}$ jest pokryciem X oraz, jeśli $U \in \tau \setminus \mathcal{Z}$, to rodzina $\mathcal{Z} \cup \{U\}$ posiada skończone podpokrycie.

Zauważmy, że rodzina $\mathcal{P} \cap \mathcal{Z}$, nie może być pokryciem X. Gdyby $\mathcal{P} \cap \mathcal{Z}$ było pokryciem X to, na mocy założenia, rodzina $\mathcal{P} \cap \mathcal{Z}$ zawierałaby skończone podpokrycie, co jest sprzeczne z definicją $\mathcal{Z}$.

Ustalmy punkt

$$z \in X \setminus \bigcup (\mathcal{P} \cap \mathcal{Z}).$$

Istnieje $Z \in \mathcal{Z}$ oraz $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ takie, że

$$z \in P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n \subset Z. \tag{3.2}$$

Zauważmy, że żaden ze zbiorów P_i, dla $i = 1, 2, \ldots, n$, nie może należeć do $\mathcal{Z} \cap \mathcal{P}$.

Wiemy, że dla każdego $1 \leq i \leq n$, rodzina $\mathcal{Z} \cup \{P_i\}$ posiada skończone podpokrycie. Niech $\mathcal{Y}_i \subset \mathcal{Z}$ będzie skończoną podrodziną taką, że $\mathcal{Y}_i \cup \{P_i\}$ jest pokryciem X. W konsekwencji, rodzina

$$\mathcal{Y} = \{P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{Y}_i$$

jest skończonym pokryciem X. Korzystając z (3.2) widzimy, że rodzina

$$\mathcal{X} = \{Z\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{Y}_i \subset \mathcal{Z}$$

jest skończonym pokryciem przestrzeni X, co jest sprzeczne z definicją $\mathcal{Z}$. To pokazuje, że przestrzeń X musi być zwarta. □

Dowód Twierdzenia 3.25 (Tichonowa). Niech $\{(X_t, \tau_t)\}_{t\in T}$ będzie rodziną zwartych przestrzeni topologicznych. Rozważmy następującą podbazę topologii na produkcie $X = \prod_{t\in T} X_t$

$$\mathcal{P} = \{p_t^{-1}(U_t) \colon t \in T,\ U_t \in \tau_t\}.$$

Pokażemy, że podbaza $\mathcal{P}$ spełnia założenia Lematu Alexandera.

Niech $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}$ będzie dowolnym pokryciem przestrzeni X, tj. $\bigcup \mathcal{U} = X$. Załóżmy, że $\mathcal{U}$ nie posiada skończonego podpokrycia.

Lemat 3.27. *Dla każdego $t \in T$ istnieje $x_t \in X_t$ taki, że przeciwobraz $p_t^{-1}(x_t) \subset X$ nie może być pokryty skończoną liczbą zbiorów z $\mathcal{U}$.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że dla pewnego $t_0 \in T$ nie ma takiego punktu. Ustalmy dowolny punkt $y \in X_{t_0}$ oraz niech $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\} \subset \mathcal{U}$ będzie skończonym pokryciem $Z_y = p_{t_0}^{-1}(y)$. Rozważmy zbiory otwarte $V_i = p_{t_0}(U_i) \subset X_{t_0}$, dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Możliwe są dwa przypadki:

(T1) Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, m$ mamy $V_i = X_{t_0}$, lub

(T2) Istnieje $1 \leq i_0 \leq m$ takie, że $V_i \neq X_{t_0}$.

Pokażemy, że żaden z powyższym warunków nie może być spełniony.

Załóżmy najpierw, że spełniony jest warunek (T1). Zauważmy, że dla dowolnego $t \in T \setminus \{t_0\}$ mamy

$$X_t = p_t(Z_y) \subset \bigcup_{i=1}^{m} p_t(U_i).$$

Zatem, dla każdego $t \in T$ zachodzi

$$X_t = \bigcup_{i=1}^{m} p_t(U_i),$$

co implikuje, że $X = \bigcup_{i=1}^{m} p_t(U)$. To jest sprzeczne z warunkiem, że rodzina $\mathcal{U}$ nie zawiera skończonego podpokrycia. W konsekwencji, widzimy, że warunek (T1) prowadzi do sprzeczności.

Załóżmy zatem, że zachodzi warunek (T2). Zauważmy, że jeśli $V_{i_0} \neq X_{t_0}$, to V_{i_0} jest otwartym otoczeniem punktu $y \in X_{t_0}$. Zatem $U_{i_0} = p_{t_0}^{-1}(V_{i_0})$, co wynika z definicji rodziny $\mathcal{P}$. W konsekwencji, mamy

$$p_{t_0}^{-1}(y) = Z_y \subset U_{i_0} = p_{t_0}^{-1}(V_{i_0}).$$

To pokazuje, że dla każdego $y \in X_{t_0}$ istnieje otoczenie otwarte $y \in W_y$ takie, że $p_{t_0}^{-1}(W_y) \in \mathcal{U}$. Korzystając ze zwartości X_{t_0}, wybieramy skończoną rodzinę $y_1, \ldots, y_l$ taką, że

$$X_{t_0} = \bigcup_{i=1}^{l} W_{y_i}.$$

Stąd wnioskujemy, że

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{m} p_{t_0}^{-1}(W_{y_i}),$$

co jest sprzeczne z tym, że rodzina $\mathcal{U}$ nie zawiera skończonego podpokrycia.

Pokazaliśmy, że żaden z przypadków (T1) i (T2) nie może zachodzić. To kończy dowód lematu. □

Na mocy powyższego lemat, dla każdego $t \in T$ istnieje $z_t \in X_t$ taki, że $p_t^{-1}(z_t)$ nie może być pokryty przez skończenie wiele elementów z $\mathcal{U}$. Rozważmy punkt $\mathbf{z} = (z_t)_{t \in T}$. Skoro $\mathcal{U}$ jest pokryciem X, to istnieje pewien $U \in \mathcal{U}$ taki, że $\mathbf{z} \in \mathcal{U}$. Wiemy, że $U = p_{t_0}^{-1}(U_{t_0})$, gdzie $U_{t_0} \subsetneq X_{t_0}$ jest otwarty. W szczególności, musi być $z_{t_0} \in U$, co przeczy temu, co powiedzieliśmy o punkcie $\mathbf{z}$, ponieważ

$$p_{t_0}^{-1}(z_{t_0}) \subset U = p_{t_0}^{-1}(U_{t_0}).$$

Zatem, pokazaliśmy, każda podrodzina podbazy $\mathcal{P}$, która jest pokryciem X musi być zawierać skończone podpokrycie. Stąd, na mocy Lematu 3.26, wnioskujemy, że X jest zwarta. □

Wniosek 3.29. *Kostki Cantora 2^λ i kostki Tichonowa $[0,1]^\lambda$ są zwarte (a więc normalne).*

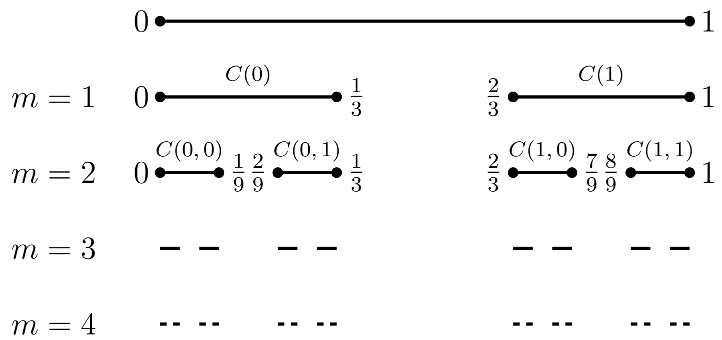
Wniosek 3.30. *Kostka Tichonowa $[0,1]^{2^\omega}$, która jest normalna, zawiera nienormalną podprzestrzeń – topologiczną kopię płaszczyzny Niemyckiego.*

Dowód. Zauważmy, że konstruując topologię na H w Przykładzie 1.120, wskazaliśmy bazę, której moc wynosiła dokładnie 2^ω. To oznacza, że $w(H) \leq 2^\omega$. Korzystając z uniwersalności kostki Tichonowa (zob. Twierdzenie 2.39), stwierdzamy, że płaszczyzna Niemyckiego zanurza się topologicznie w $[0,1]^{2^\omega}$. □

3.4 Zbiór Cantora

Definicja 3.31 (Zbiór Cantora).
- Niech $t \in \{0,1\}^m$. Wówczas definiujemy

$$C(t) = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in [0,1] \colon \forall_n x_n \in \{0,1,2\},\ \forall_{1 \leq n \leq m} x_n = 2t_n \right\}.$$



Rysunek 1: Kolejne etapy konstrukcji zbioru Cantora.

- Dla każdego $t \in \{0,1\}^m$, $C(t) = [a(t), b(t)]$ jest przedziałem, gdzie

$$a(t) = 2 \cdot \left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \cdots + \frac{t_m}{3^m} \right), \quad b = a + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = a + \frac{1}{3^m}.$$

- Dla każdego $m \geq 1$ niech $\mathcal{C}_m = \{C(t) \colon t \in \{0,1\}^m\}$.
- *Zbiór Cantora* zdefiniowany jest następująco

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup \mathcal{C}_m.$$

Lemat 3.32. *Zbiór Cantora ma następujące własności.*

1. *$\mathfrak{C}$ jest podzbiorem zwartym prostej euklidesowej.*
2. $\operatorname{int}(\mathfrak{C}) = \emptyset$.
3. *Jeśli $m \geq 1$ oraz $t \in \{0,1\}^m$, wówczas $U(t) = \mathfrak{C} \cap C(t)$ jest otwarto-domkniętym podzbiorem $\mathfrak{C}$.*
4. *Rodzina zbiorów $\mathcal{B} = \{U(t) \colon t \in \{0,1\}^m,\ m \geq 1\}$ tworzy bazę topologii $\mathfrak{C}$.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Przykład 3.33. Rozważmy odwzorowanie

$$f \colon 2^\omega \to \mathfrak{C}, \quad f((x_m)_{m \geq 1}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2x_m}{3^m}.$$

- Z opisu zbioru Cantora wynika, że f jest bijekcją (proszę to dokładnie sprawdzić!).
- Dla każdego $m \geq 1$ oraz $t \in \{0,1\}^m$ mamy

$$f^{-1}(U(t)) = \{t\} \times \prod_{k=m}^{\infty} \{0,1\} \subset 2^{\omega},$$

co pokazuje, że f jest ciągłe.

- Stwierdzenie 3.22 implikuje, że f jest homeomorfizmem.

Stwierdzenie 3.34. *Niech $\mathfrak{C}$ będzie zbiorem Cantora.*

1. *Dla dowolnego $n \geq 1$ mamy $\mathfrak{C} \cong \bigsqcup_n \mathfrak{C}$.*
2. *Dla każdego $n \geq 1$, mamy $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{C}^n$,*
3. *Mamy $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{C}^{\omega}$.*
4. *Dla każdego $n \geq 1$, istnieje ciągła suriekcja $\mathfrak{C} \to [0,1]^n$.*
5. *Istnieje ciągła suriekcja $\mathfrak{C} \to [0,1]^{\omega}$.*
6. *$\mathfrak{C}$ jest przestrzenią uniwersalną w klasie zerowymiarowych T_1-przestrzeni ciężaru $\leq \aleph_0$.*

Dowód. Dowód punktów (1)-(3) oraz (5) zostawiamy czytelnikowi.

Aby udowodnić punkt (4) zauważmy, że odwzorowanie

$$h\colon 2^{\omega} \to [0,1], \quad h((x_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \tag{3.3}$$

jest ciągłą suriekcją. Szukaną suriekcją jest odwzorowanie $h \circ f^{-1}\colon \mathfrak{C} \to [0,1]$, gdzie f jest homeomorfizmem z Przykładu 3.33.

Aby udowodnić punkt (6), niech X będzie dowolną zerowymiarową T_1-przestrzenią taką, że $w(X) \leq \aleph_0$. Niech $\mathbb{B} = \{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ będzie bazą złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy funkcję ciągłą

$$f_n\colon X \to \{0,1\} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in U_n, \\ 0, & x \notin U_n. \end{cases}$$

Jeśli $\mathcal{F} = \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, to przekątna $\Delta(\mathcal{F})$ jest szukanym zanurzeniem. $\square$

3.5 Dodatek: Krzywa Peana

Definicja 3.35. *Krzywa Peana*[17] to dowolne ciągłe i suriektywne odwzorowanie

$$[0,1] \to [0,1]^2.$$

Twierdzenie 3.36. *Dla każdego $n \geq 1$ istnieje ciągła suriekcja.*

$$P_n \colon [0,1] \to [0,1]^n$$

Dowód. Ustalmy liczbę $n \geq 1$. Rozważmy odwzorowanie

$$q_n \colon \mathfrak{C} \xrightarrow{s_n} \mathfrak{C}^n \xrightarrow{\prod_n h} [0,1]^n,$$

gdzie s_n jest odwzorowaniem z punktu (3) ze Stwierdzenia 3.34, a h jest odwzorowaniem (3.3). Zauważmy, że q_n jest ciągłą suriekcją. Istnieje rozszerzenie odwzorowania q_n do odwzorowania zdefiniowanego na odcinku

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[dr, dashed, two heads, "P_n"] & \\
\mathfrak{C} \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r, two heads, "q_n"'] & {[0,1]^n}
\end{tikzcd}$$

Jeśli $I = [a,b] \subset [0,1] \setminus \mathfrak{C}$ jest odcinkiem takim, że $I \cap \mathfrak{C} = \{a,b\}$, wówczas odwzorowanie P_n jest zdefiniowane na I następująco:

$$P_n(s \cdot a + (1-s) \cdot b) = s \cdot q_n(a) + (1-s) \cdot q_n(b), \quad s \in [0,1].$$

□

Uwaga 3.37. *Dla $n = 1$ powyższa konstrukcja daję tzw.* funkcję Cantora-Lebesgue'a[18]*, która jest ciągła, ale nie jest absolutnie ciągła. W szczególności, $P_1 \colon [0,1] \to [0,1]$ jest ciągłą suriekcją, która ma pochodną prawie wszędzie (względem miary Lebesgue'a) oraz $P_1'(t) = 0$, dla prawie wszystkich t.*

Uwaga 3.38. *Konstrukcja przedstawiona w powyższym dowodzie pochodzi od H. Lebesgue'a. Konstrukcja przedstawiona przez G. Peano jest omówiona w Sekcji 5.7.*

[17] Giuseppe Peano – włoski matematyk.
[18] https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function.

3.6 Dodatek: Uzwarcenia przestrzeni topologicznych

Definicja 3.39. Rozważmy przestrzeń topologiczną (X, τ). Parę (Y, j) nazywamy *uzwarceniem przestrzeni* X jeśli spełnione są następujące warunki:

- Y jest zwarta oraz $j\colon X \hookrightarrow Y$ jest zanurzeniem homeomorficznym,
- oraz $\mathrm{cl}_Y(f(X)) = Y$, tj. $f(X)$ jest gęstym podzbiorem Y.

Lemat 3.40. *Przestrzeń topologiczna* (X, τ) *posiada uzwarcenie wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie regularna.*

Dowód. $(\Rightarrow)$ Na mocy Twierdzenia 3.18, każda przestrzeń zwarta jest normalna, zatem, na mocy Wniosku 1.131, jest też całkowicie regularna. Dodatkowo, podprzestrzeń przestrzeni całkowicie regularnej jest całkowicie regularna. Stąd wynika, że każda podprzestrzeń przestrzeni zwartej musi być całkowicie regularna.

$(\Leftarrow)$ Jeśli (X, τ) jest całkowicie regularna, wówczas, na mocy Twierdzenia 2.39, istnieje zanurzenie homeomorficzne $j\colon X \hookrightarrow [0,1]^\lambda$, dla pewnej liczby kardynalnej λ. Na mocy twierdzenia Tichonowa, kostka $[0,1]^\lambda$ jest zwarta, zatem $Y = \mathrm{cl}(j(X))$ jest uzwarceniem przestrzeni X. $\square$

Przykład 3.41. Pokażemy kilka uzwarceń prostej euklidesowej.

- Para (S^1, j_1) jest uzwarceniem, gdzie
$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}, \quad j_1(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$
- Para $([0,1], j_2)$ jest uzwarceniem $\mathbb{R}$, gdzie $j_2(t) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(t)$.
- Para (X, j_3), jest uzwarceniem $\mathbb{R}$, gdzie
$$X = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (0,1]\right\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$
oraz
$$j_3(t) = \left(j_2(t), \sin\left(\frac{1}{j_2(t)}\right)\right).$$

3.6.1 Uzwarcenia Alexandrowa[19]

Definicja 3.42. Przestrzeń topologiczna (X, τ) jest *lokalnie zwarta*, jeśli jest przestrzenią Hausdorffa oraz każdy punkt $x \in X$ posiada otoczenie U_x takie, że $\mathrm{cl}_X(U_x)$ jest zbiorem zwartym.

Przykład 3.43. Przykłady lokalnie zwartych ale nie zwartych przestrzeni:

- przestrzenie euklidesowe $\mathbb{R}^n$,
- dowolny nieskończony zbiór wyposażony w topologię dyskretną.

Przykład 3.44. Rozważmy przestrzeń Hilberta ℓ^2 z Przykładu 3.5.

- Z faktu, że kule domknięte nie są zwarte wynika, że każdy podzbiór zwarty ℓ^2 jest brzegowy.
- W szczególności, przestrzeń ℓ^2 nie jest lokalnie zwarta.

Lemat 3.45. *Niech (X, τ) będzie przestrzenią Hausdorffa. Następujące warunki są równoważne.*

(1) (X, τ) jest lokalnie zwarta.

(2) Dla każdego $x \in X$ i otoczenia U punktu x istnieje otoczenie V punktu x takie, że

$$x \in V \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset U$$

oraz $\mathrm{cl}_X(V)$ jest zbiorem zwartym.

(3) Każdy punkt $x \in X$ posiada bazę otoczeń $\mathcal{B}_x$ taką, że domknięcie każdego zbioru z $\mathcal{B}_x$ jest zbiorem zwartym.

Dowód. Uzasadnimy implikację (1) $\Rightarrow$ (2). Implikacje (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) są oczywiste.

Ustalmy punkt $x \in X$ oraz niech U będzie dowolnym otoczeniem otwartym punktu x. Bez straty ogólności, możemy założyć, że $W = \mathrm{cl}_X(U)$ jest zwarty (dlaczego?). Korzystając z faktu, że $\mathrm{cl}_X(U)$ jest przestrzenią normalną (co wynika ze zwartości, zob. Twierdzenie 3.18), oraz faktu, że $\mathrm{bd}_X(W)$ jest zbiorem domkniętym, znajdujemy (zob. Stwierdzenie 1.119), podzbiór otwarty V taki, że

$$x \in V \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset U.$$

Zatem, V jest szukanym otoczeniem, ponieważ $\mathrm{cl}_X(V)$ jest zwarty jako domknięty podzbiór przestrzeni zwartej W. □

[19] Ta Sekcja jest oparta na notatkach prof. Stefana Jackowskiego.

Stwierdzenie 3.46 (Lokalna zwartość a konstrukcje przestrzeni topologicznych)**.** *(1) Podprzestrzeń przestrzeni lokalnie zwartej jest lokalnie zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest iloczynem dwóch podprzestrzeni, z których jedna jest otwarta, a druga domknięta.*

(2) W szczególności, domknięte i otwarte podprzestrzenie przestrzeni lokalnie zwartych są lokalnie zwarte.

(3) Produkt kartezjański rodziny przestrzeni jest lokalnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są lokalnie zwarte oraz prawie wszystkie czynniki są zwarte.

(4) Koprodukt rodziny przestrzeni topologicznych jest lokalnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składanki są lokalnie zwarte.

Dowód. Uzasadnimy tylko punkt (1). Pozostałe punkty zostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika.

Załóżmy, że (X, τ) jest lokalnie zwarta oraz $U \subset X$ jest otwarty, $A \subset X$ jest domknięty oraz $Y = U \cap A \neq \emptyset$. Niech $Y \in Y$. Korzystamy z Lematu 3.45, aby znaleźć otoczenie otwarte W punktu y takie, że $\mathrm{cl}_X(W)$ jest zwarty oraz $y \in W \subset U$. Wówczas $V = W \cap A$ jest otoczeniem punktu y w Y takim, że $\mathrm{cl}_Y(V)$ jest zwarty.

Załóżmy teraz, że $Y \subset X$ oraz Y jest lokalnie zwartą przestrzenią. Dla każdego $y \in Y$ istnieje otoczenie V_y (w X) takie, że $\mathrm{cl}_Y(V_y \cap Y) = \mathrm{cl}_X(V_y) \cap Y$ jest zwarty w Y (a więc też zwarty w X). Rozważmy zbiór otwarty

$$V = \bigcup_{y \in Y} V_y \subset X.$$

Pokażemy, że Y jest domkniętym podzbiorem V. Zauważmy, że

$$V \setminus Y = \left(\bigcup_{y \in Y} V_y \right) \setminus Y = \bigcup_{y \in Y} V_y \setminus (Y \cap V_y). \tag{3.4}$$

Mamy

$$Y \cap V_y = (Y \cap \mathrm{cl}_X(V_y)) \cap V_y.$$

Wiemy, że zbiór $Y \cap \mathrm{cl}_X(V_y) = \mathrm{cl}_Y(Y \cap V_y)$ jest domknięty w V_y. Stąd wnioskujemy, że zbiór $Y \cap V_y$ jest domknięty w V_y. Zatem, $V_y \setminus (V_y \cap Y)$ jest podzbiorem otwartym w V_y, co, na mocy (3.4), pokazuje, że Y jest domkniętym podzbiorem V. □

Przykład 3.47. Rozważmy zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ z topologią indukowaną z $\mathbb{R}$.

- Każde otoczenie dowolnego punktu $q \in \mathbb{Q}$ będzie zawierało ciąg zbieżny do pewnej liczby niewymiernej.
- Przestrzeń topologiczna $(\mathbb{Q}, \tau_e|_{\mathbb{Q}})$ nie jest lokalnie zwarta.
- To pokazuje, że dowolna podprzestrzeń przestrzeni lokalnie zwartej nie musi być lokalnie zwarta.

Konstrukcja 3.48. *Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną.*

- *Definiujemy przestrzeń topologiczną (X^+, τ^+), gdzie*

$$X^+ = X \cup \{\infty\}.$$

- *Topologia τ^+ jest zdefiniowana następująco (proszę sprawdzić, że rodzina τ^+ jest topologią). Zbiór $U \in \tau^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy*
  - *$U \in \tau$*
  - *lub $U = V \cup \{\infty\}$, przy czym zbiór $X \setminus V$ jest zwarty.*

Lemat 3.49. *Jeśli (X, τ) jest ustaloną przestrzenią topologiczną wówczas przestrzeń (X^+, τ^+) ma następujące własności.*

1. *Inkluzja $X \subset X^+$ jest zanurzeniem homeomorficznym.*
2. *Z każdego pokrycia otwartego przestrzeni (X^+, τ^+) można wybrać pokrycie skończone.*
3. *Przestrzeń (X^+, τ^+) jest Hausdorffa (a zatem zwarta) wtedy i tylko wtedy, gdy (X, τ) jest lokalnie zwarta.*
4. *Jeśli (X, τ) jest zwarta, to (X^+, τ^+) jest homeomorficzna z sumą rozłączną $(X, \tau) \sqcup \{\infty\}$.*

Dowód. Udowodnimy tylko punkt (3). Dowody pozostałych punktów pozostawiamy czytelnikowi.

W pierwszej kolejności zauważmy, że z założenia przestrzeń (X, τ) jest przestrzenią Hausdorffa. W konsekwencji, (X^+, τ^+) będzie przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt $x \in X$ będzie można oddzielić przy od punktu ∞ przy pomocy pary rozłącznych otoczeń.

Jeśli przestrzeń (X^+, τ^+) jest Hausdorffa, to dla każdego punktu $x \in X$ istnieje para rozłącznych podzbiorów otwartych

$$U, V \subset X^+, \quad \text{takich, że ,} \quad x \in U \text{ oraz } \infty \in V.$$

Z konstrukcji topologii τ^+ wynika, że zbiór $X \setminus (X \cap V)$ jest zwarty w X. Skoro $U \cap V = \emptyset$, zatem

$$U \subset X \setminus (X \cap V),$$

zatem $\mathrm{cl}_X(U)$ jest zwartym otoczeniem punktu x. Zatem, przestrzeń X jest lokalnie zwarta.

W drugą, stronę, jeśli (X, τ) jest lokalnie zwarta, to każdy punkt ma zwarte otoczenia, co oznacza, że każdy punkt można oddzielić od punktu ∞ przy pomocy rozłącznych otoczeń. □

Definicja 3.50. Mówimy, że uzwarcenia (Y_i, j_i), dla $i = 1, 2$, są *równoważne (homeomorficzne)*, gdy istnieje homeomorfizm $f\colon Y_1 \xrightarrow{\cong} Y_2$ taki, że następujący diagram jestx przemienny

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rr, "f"] & & Y_2 \\
& X \arrow[ul, hook, "j_1"] \arrow[ur, hook, "j_2"'] &
\end{tikzcd}.$$

Twierdzenie 3.51 (P.S. Aleksandrow[20]). *Dla każdej lokalnie zwartej ale nie zwartej przestrzeni topologicznej (X, τ) istnieje dokładnie jedno, z dokładnością do równoważności, uzwarcenie jednopunktowe (zwane* uzwarceniem Alexandrowa*).*

Dowód. Bezpośredni wniosek z Lematu 3.49. □

Przykład 3.52. Niech $X = \{0\} \cup \{1/n \in \mathbb{R} \colon n \in \mathbb{Z}_+\}$. Para (X, j), gdzie

$$j\colon \mathbb{Z}_+ \to X, \quad j(n) = \frac{1}{n},$$

jest jednopunktowym uzwarceniem zbioru $\mathbb{Z}_+$.

Przykład 3.53. Niech

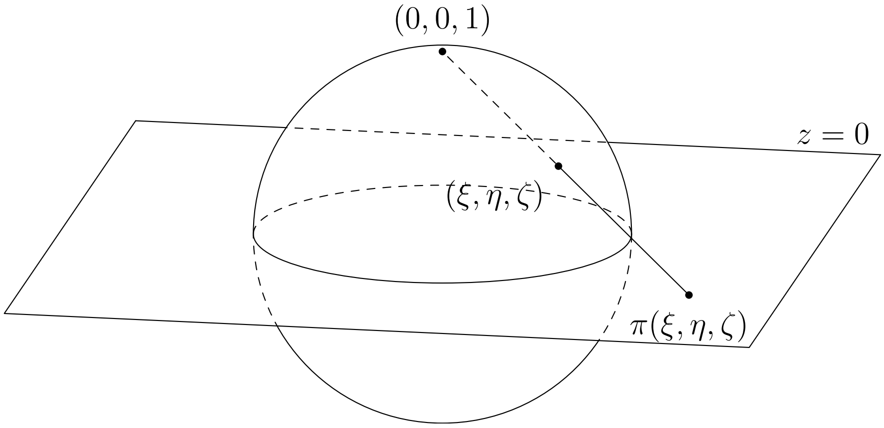
$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon ||x|| = 1\}.$$

Para (S^n, π), gdzie π jest tzw. *rzutowaniem stereograficznym*, zob. Rysunek 2, jest jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$.

Wniosek 3.54. *Każda lokalnie zwarta przestrzeń jest całkowicie regularna.*

Dowód. Z Twierdzenia 3.51 wynika, że lokalnie zwarta przestrzeń posiada uzwarcenie, co, na mocy Lematu 3.40, implikuje, że (X, τ) jest całkowicie regularna. □

[20] Paweł Sergiejewicz Alexandrow – sowiecki matematyk.



Rysunek 2: Rzutowanie stereograficzne dla $n = 2$. Każdemu punktowi $(\xi, \eta, \zeta) \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ przyporządkowujemy punkt na płaszczyźnie $\pi(\xi, \eta, \zeta) = (x, y, 0)$.

3.6.2 Uzwarcenie Čecha-Stone'a

Niech (X, τ) będzie całkowicie regularną przestrzenią. Przypomnijmy, że symbolem $C_b(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich ciągłych i ograniczonych funkcji na X.

Definicja 3.55. Uzwarcenie $(\beta(X), \iota_X)$ przestrzeni X nazywa się *uzwarceniem Čecha*[21]*-Stone'a*[22] jeśli każda funkcja $f \in C_b(X)$ posiada ciągłe rozszerzenie do funkcji $\widetilde{f} \in C(\beta(X))$.

Innymi słowy, dla każdej funkcji $f \in C_b(X)$ istnieje funkcja ciągła $\widetilde{f} \in C(\beta(X))$ taka, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} \beta(X) \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ X \arrow[u, hook, "\iota_X"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Twierdzenie 3.56. *Każda całkowicie regularna przestrzeń topologiczna X posiada dokładnie jedno, z dokładnością do równoważności, uzwarcenie Čecha-Stone'a.*

Szkic dowodu. Niech

$$\mathcal{F} = \{f : X \to [0,1] \mid f \text{ ciągła}\}.$$

[21] Eduard Čech – czeski matematyk.
[22] Marshall H. Stone – amerykański matematyk.

Z faktu, że X jest całkowicie regularna wynika, że rodzina $\mathcal{F}$ oddziela punkty od zbiorów domkniętych (zob. Definicję 2.34). Stąd, na mocy Twierdzenia o przekątnej, otrzymujemy zanurzenie homeomorficzne

$$j := \Delta(\mathcal{F})\colon X \hookrightarrow [0,1]^{\mathcal{F}}.$$

Niech $\beta(X) = \mathrm{cl}_{[0,1]^{\mathcal{F}}}(j(X))$ oraz niech $\iota_X\colon X \hookrightarrow \beta(X)$ będzie inkluzją. Z twierdzenia Tichonowa wynika, że para $(\beta(X), \iota_X)$ jest uzwarceniem przestrzeni X.

Zauważmy najpierw, że żeby pokazać, że każda funkcja ciągła i ograniczona na X posiada ciągłe rozszerzenie do funkcji ciągłej na $\beta(X)$, wystarczy pokazać, że każda funkcja ciągła $f\colon X \to [0,1]$ posiada takie rozszerzenie. Niech $k\colon \beta(X) \hookrightarrow [0,1]^{\mathcal{F}}$ będzie inkluzją. Wówczas określamy funkcję $\widetilde{f} = p_f \circ k \in C(\beta(X))$, która jest rozszerzeniem do $\beta(X)$ funkcji f. To pokazuje, że skonstruowane przez nas rozszerzenie spełnia żądane własności.

Aby pokazać jedyność, niech (Y, j) będzie uzwarceniem przestrzeni X, które ma żądaną własność. Wówczas, odwzorowanie $\Delta(\mathcal{F})$ posiada rozszerzenie do odwzorowania H,

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dashed, "H"] & \\ X \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r, "\Delta(\mathcal{F})"'] & {[0,1]^{\mathcal{F}}}. \end{tikzcd}$$

Łatwo sprawdzić, że H jest zanurzeniem homeomorficznym oraz, z faktu, że $j(X)$ jest zbiorem gęstym w Y wynika, że $H(Y) = \beta(X)$. To pokazuje, że H jest homeomorfizmem, który realizuje równoważność uzwarceń (Y, j) oraz $(\beta(X), \iota_X)$. $\square$

Stwierdzenie 3.57. *Niech (Y, j) będzie uzwarceniem całkowicie regularnej przestrzeni (X, τ). Uzwarcenie (Y, j) jest równoważne z uzwarceniem Čecha-Stone'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągłego odwzorowania*

$$F\colon X \to Z,$$

gdzie Z jest zwarta, istnieje rozszerzenie $\widetilde{F}\colon Y \to Z$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Wystarczy pokazać, że uzwarcenie $(\beta(X), \iota_X)$ ma taką własność. Niech Z będzie zwarta oraz załóżmy, że $F\colon X \to Z$ jest ciągłe. Oznaczmy przez $\mathcal{F}$ rodzinę wszystkich funkcji ciągłych na Z o wartościach w przedziale $[0,1]$. Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$ otrzymujemy funkcję ciągłą $f \circ F$ na X, która posiada rozszerzenie do funckji ciągłej $\overline{f}\colon \beta(X) \to \mathbb{R}$. Niech

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{f}\colon f \in \mathcal{F}\}.$$

Ze zwartości Z wynika, że

$$\Delta(\mathcal{F})\colon Z \to [0,1]^{\mathcal{F}}$$

jest zanurzeniem homeomorficznym na domkniętą podprzestrzeń. Odwzorowanie $\Delta(\overline{\mathcal{F}})$ jest przedłużeniem odwzorowania $\Delta(\mathcal{F})\circ F$ na $\beta(X)$. Zauważmy, że z faktu, że $\beta(X)$ jest uzwarceniem X wynika, że

$$\Delta(\overline{\mathcal{F}})(\beta(X)) = \mathrm{cl}\left(\Delta(\mathcal{F})\circ F\right)(X) \subset \Delta(\mathcal{F})(Z).$$

Zatem, odwzorowanie

$$\Delta(\mathcal{F})^{-1}\circ\Delta(\overline{\mathcal{F}})\colon \beta(X) \to Z$$

jest szukanym przedłużeniem odwzorowania F.

($\Leftarrow$) Jeśli uzwarcenie (Y,j) ma żądaną własność, wówczas każda funkcja ciągła i ograniczona na X będzie posiadała rozszerzenie do funkcji ciągłej na Y. Wówczas Twierdzenie 3.56 mówi, że (Y,j) będzie równoważne z uzwarceniem Čecha-Stone'a. □

Wniosek 3.58. *Ustalmy całkowicie regularną przestrzeń (X,τ). Jeśli (Y,j) jest dowolnym uzwarceniem X, wówczas istnieje ciągła suriekcja $f\colon \beta(X)\to Y$ taka, że następujący diagram jest przemienny*

$$\begin{tikzcd}
\beta(X) \arrow[rr, "f"] & & Y \\
& X \arrow[ul, "\iota_X"] \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}.$$

Dowód. Bezpośredni wniosek z poprzedniego stwierdzenia. □

Twierdzenie 3.59 ([Eng89, Rozdział 3.6])**.** *Rozważmy zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ oraz jego uzwarcenie Čecha-Stone'a $\beta(\mathbb{N})$.*

- *$\beta(\mathbb{N})$ ma moc $2^{\mathfrak{c}}$ oraz ciężar $\mathfrak{c}$ (ozn. $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$).*
- *Każdy nieskończony i domknięty podzbiór $F \subset \beta(\mathbb{N})$ zawiera homeomorficzną kopię $\beta(\mathbb{N})$.*
- *Każdy ciąg zbieżny w przestrzeni $\beta(\mathbb{N})$ jest od pewnego miejsca stały.*
- *Dla dowolnego $x \in \beta(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$ przestrzeń $\mathbb{N}\cup\{x\}$ nie spełnia I ap.*
- *Zbiór $\beta(\mathbb{N})\setminus\mathbb{N}$ zawiera nieprzeliczalną rodzinę rozłącznych zbiorów otwartych.*

4 Topologia ilorazowa

4.1 Przestrzenie ilorazowe – podstawowe własności

Definicja 4.1 (Zob. Przykład 2.8). Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną, Y zbiorem, a $f\colon X \to Y$ suriekcją. *Topologia ilorazowa* na Y to najsilniejsza topologią względem której f jest ciągłe.

Lemat 4.2. *Niech $f\colon (X, \tau) \to Y$ będzie suriekcją.*

1. *Mamy*
$$\tau_*(f) = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \in \tau\},$$
zatem $U \subset Y$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(U)$ jest otwarty.

2. *Podobnie $A \subset Y$ domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(A)$ jest domknięty.*

3. *Odwzorowanie $g\colon (Y, \tau_*(f)) \to (Z, \tau_Z)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy złożenie $g \circ f$ jest ciągłe.*

Dowód. Bezpośrednia konsekwencja Lematu 2.5 oraz Lematu 2.6. □

Definicja 4.3. Jeśli $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ jest ciągłą suriekcją, wówczas mówimy, że f jest *odwzorowaniem ilorazowym*, gdy

$$U \in \tau_Y \iff f^{-1}(U) \in \tau_X.$$

Lemat 4.4. *Klasa odwzorowań ilorazowych ma następujące własności.*

1. *Złożenie odwzorowań ilorazowych jest odwzorowaniem ilorazowym.*

2. *Jeśli złożenie odwzorowań ciągłych $g \circ f\colon X \to Z$ jest odwzorowaniem ilorazowym, wówczas $g\colon Y \to Z$ też jest odwzorowaniem ilorazowym.*

3. *Jeśli $F\colon X \to Y$ jest ciągłą suriekcją oraz dla pewnego $A \subset X$ obcięcie $f|_A$ jest odwzorowaniem ilorazowym, wówczas f jest odwzorowaniem ilorazowym.*

4. *Jeśli X jest zwarta, Y Hausdorffa, a $f\colon X \to Y$ jest ciągłą suriekcją, to f jest odwzorowaniem ilorazowym.*

5. *Jeśli $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ jest ciągłą bijekcją, wówczas f jest odwzorowaniem ilorazowym wtedy i tylko wtedy, gdy f jest homeomorfizmem.*

Dowód. Punkt (1) jest oczywisty.

Skoro $g \circ f$ jest odwzorowaniem ilorazowym, to $g \circ f$ jest suriekcją, zatem g jest suriekcją. Niech $U \subset Z$ będzie taki, że $g^{-1}(U)$ jest otwarty. Wówczas $(g \circ f)^{-1}(U)$ jest otwarty i, z faktu, że $g \circ f$ jest odwzorowaniem ilorazowym, wynika, że U jest otwarty. Zatem pokazaliśmy implikację $g^{-1}(U)$ otwarty, to U otwarty, zatem g jest odwzorowaniem ilorazowym.

Punkt (3) jest bezpośrednią konsekwencją punktu (2). Na mocy założenia złożenie $F \circ j_A$, gdzie $j_A \colon A \hookrightarrow X$ jest inkluzją, jest odwzorowaniem ilorazowym, zatem F jest odwzorowaniem ilorazowym.

Aby uzasadnić punkt (4) zauważmy, że ciągłość odwrotności f^{-1} jest równoważna temu, że $U \subset Y$ otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(U)$ otwarty.

Punkt (5) jest konsekwencją faktu, że obrazem zbioru zwartego przez f będzie zbiór domknięty. Zatem, korzystając z punktu (2) z Lematu 4.2, stwierdzamy, że f jest odwzorowaniem ilorazowym. □

Przykład 4.5. Jeśli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną oraz $\sim$ jest relacją równoważności na X, wówczas w zbiorze ilorazowym $X/\sim$ możemy rozpatrywać topologię ilorazową $\tau_*(q)$, gdzie

$$q \colon X \to X/\sim, \quad q(x) = [x]$$

jest odwzorowaniem ilorazowym.

Przykład 4.6. Załóżmy, że $f \colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ jest ciągłą suriekcją.

- Na X możemy wprowadzić relację równoważności

  $$x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2).$$

  Niech $q \colon X \to X/\sim$ będzie odwzorowaniem ilorazowym.

- Mamy indukowane odwzorowanie

  $$\overline{f} \colon (X/\sim, \tau_*(q)) \to (Y, \tau_Y), \quad \overline{f}([x]) = f(x).$$

- Zauważmy, że $f = \overline{f} \circ q$, zatem, na mocy Lematu 4.2, $\overline{f}$ jest ciągłe.

- Odwzorowanie $\overline{f}$ jest ciągłą bijekcją.

Lemat 4.7. *Załóżmy, że $f \colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ jest ciągłą suriekcją.*

1. *Odwzorowanie $\overline{f}$ jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy f jest odwzorowaniem ilorazowym.*

2. *Jeśli X i Y są T_2 oraz istnieje zwarty podzbiór $K \subset X$ taki, że $f(K) = Y$, to $\overline{f}$ jest homeomorfizmem.*

Dowód. Punkt (1) wynika bezpośrednio z Lematu 4.4.

Aby uzasadnić punkt (2), zauważmy, że na mocy punktu (5) z Lematu 4.4, otrzymujemy, że złożenie $f \circ j_K$ jest odwzorowaniem ilorazowym, gdzie $j_K \colon K \hookrightarrow X$ jest inkluzją. Korzystając z punktu (3) Lematu 4.4 stwierdzamy, że f jest odwzorowaniem ilorazowym. □

4.2 Relacje domykające

Definicja 4.8. Ciągłe przekształcenie $f : X \to Y$ jest *domknięte* jeśli przekształca zbiory domknięte w X na zbiory domknięte w Y.

Definicja 4.9. Relacja równoważności $\sim$ w przestrzeni topologicznej X jest *domykająca* jeśli przekształcenie ilorazowe

$$q \colon X \to X/\sim$$

jest domknięte (równoważnie, suma klas abstrakcji przecinających domknięty podzbiór X jest domknięta).

Twierdzenie 4.10. *Niech $f : X \to Y$ będzie ciągła, domknietą suriekcją. Jeśli przestrzeń X jest normalna (T_1), to Y również jest normalna (T_1).*

Dowód. Najpierw zauważmy, że jeśli X jest T_1-przestrzenią, to singletony są ciągłe. W szczególności, jeśli $y \in Y$, to istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$. Mamy $f(\{x\}) = \{y\}$, co, na mocy domkniętości f, pokazuje, że $\{y\}$ jest zbiorem domkniętym. Zatem Y jest T_1 przestrzenią.

Załóżmy, że X jest normalna. Na mocy poprzedniego punktu, Y jest T_1-przestrzenią.

Niech $A, B \subset Y$ będą domknięte i rozłączne. Korzystając z tego, że X jest przestrzenią normalną, znajdujemy zbiory otwarte i rozłączne U i V takie, że $f^{-1}(A) \subset U$ oraz $f^{-1}(B) \subset V$. Rozważmy zbiory $W_1 = Y \setminus f(X \setminus U)$ oraz $W_2 = Y \setminus f(X \setminus V)$. Zauważmy, że domkniętość f implikuje, że zbiory $f(X \setminus U)$ i $f(X \setminus V)$ są domknięte. W konsekwencji, zbiory W_1 i W_2 są otwarte. Dodatkowo

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= Y \setminus (f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V)) = Y \setminus f\,[(X \setminus U) \cup (X \setminus V)] \\ &= Y \setminus f\,[X \setminus (U \cap V)] = Y \setminus f(X) = \emptyset, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z faktu, że f jest suriekcją. Zauważmy, że skoro $f^{-1}(A) \subset U$, to $X \setminus U \subset X \setminus f^{-1}(A)$, zatem

$$f(X \setminus U) \subset f\left(X \setminus f^{-1}(A)\right).$$

Mamy

$$\begin{aligned} A \cap f(X \setminus f^{-1}(A)) &= f(f^{-1}(A)) \cap f(X \setminus f^{-1}(A)) \\ &= f(f^{-1}(A) \cap (X \setminus f^{-1}(A))) = \emptyset, \end{aligned}$$

przy czym w drugiej równości skorzystaliśmy z faktu, że $f^{-1}(f(f^{-1}(A))) = f^{-1}(A)$. W konsekwencji

$$f(X \setminus U) \subset f(X \setminus f^{-1}(A)) \subset Y \setminus A,$$

zatem

$$A \subset Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(A)) \subset Y \setminus f(X \setminus U) = W_1.$$

Podobnie pokazujemy, że $B \subset W_2$. Zatem, W_1 i W_2 są szukanymi rozłącznymi otoczeniami rozdzielającymi zbiory A i B. □

Wniosek 4.11. *Jeśli $\sim$ jest domykającą relacją równoważności w przestrzeni normalnej X, to przestrzeń ilorazowa jest $X/\sim$ jest normalna.*

Dowód. Bezpośredni wniosek z Twierdzenia 4.10. □

Wniosek 4.12. *Jeśli $\sim$ jest relacją równoważności w przestrzeni zwartej X, to przestrzeń ilorazowa jest $X/\sim$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy $\sim$ jest domykająca.*

Dowód. Jeśli $X/\sim$ jest zwarta, to rzutowanie ilorazowe jest odwzorowaniem domkniętym, ponieważ obraz dowolnego podzbioru domkniętego $A \subset X$ będzie zwarty w Y, zatem domknięty.

Jeśli relacja $\sim$ jest domykająca, to, na mocy Twierdzenia 4.10, Y będzie normalna, a zatem zwarta jako obraz przestrzeni zwartej. □

Wniosek 4.13. *Jeśli $\sim$ jest domykającą relacją równoważności w przestrzeni metryzowalnej zwartej X, to przestrzeń ilorazowa jest $X/\sim$ jest metryzowalna zwarta.*

Dowód. Na mocy Wniosku 4.11 przestrzeń ilorazowa jest normalna. Korzystając z Wniosku 3.24 otrzymujemy tezę. □

4.3 Przestrzenie ilorazowe – przykłady

Przykład 4.14. Niech $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ i rozważmy odwzorowanie

$$e\colon \mathbb{R} \to S^1, \quad e(t) = \exp(2\pi i t).$$

Mamy $e([0,1]) = S^1$, zatem z Lematu 4.7 wynika, że e jest odwzorowanie ilorazowym oraz okrąg S^1 jest homeomorficzny z ilorazem prostej przez relację $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Przykład 4.15. Torus $S^1 \times S^1$ możemy otrzymać jako iloraz płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ przy pomocy odwzorowania

$$E\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1, \quad E(s,t) = (\exp(2\pi i s), \exp(2\pi i t)).$$

Przykład 4.16. Niech $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon ||x|| = 1\}$.

- Na sferze określamy relację równoważności $x \sim y \iff x = \pm y$.
- Przestrzeń ilorazowa to tzw. *płaszczyzna rzutowa*[23] $\mathbb{R}P^2$.
- Płaszczyzna rzutowa nie zanurza się topologicznie w $\mathbb{R}^3$, więc nie jest łatwo ją zwizualizować.
- Płaszczyzna rzutowa zanurza się topologicznie w $\mathbb{R}^4$, zob. [BCPP23, Przykład 5.1.3].

Przykład 4.17. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej (X, τ).

- Dla $x, y \in X$, definiujemy $x \sim_A y$, jeśli $x = y$ lub $x, y \in A$.
- Jeśli A jest podzbiorem domkniętym, to relacja $\sim_A$ jest domykająca. (Proszę to sprawdzić.)
- Przestrzeń ilorazową $(X/\sim_A, \tau/\sim_A)$ nazywamy przestrzenią otrzymaną z X przez sklejenie zbioru A do punktu i oznaczać będziemy symbolem $(X/A, \tau/A)$.

Stwierdzenie 4.18. *Jeśli X jest zwartą podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, a $A \subseteq X$ jest domknięty, to przestrzeń ilorazowa X/A zanurza się w $\mathbb{R}^{n+1}$*

Dowód. Odwzorowanie

$$F\colon X \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad F(x) = (d(x,A) \cdot x, d(x,A)) \tag{4.1}$$

zadaje żądane zanurzenie. Dowód tego faktu jest dokładniej omówiony w skrypcie [BCPP23, Rozdział 5] zaraz pod Przykładem 5.1.3. □

[23] Płaszczyzna rzutowa i jej uogólnienia to bardzo ważna i interesująca klasa przestrzeni. Zachęcam do poczytania artykułu na Wikipedii poświęconego tej przestrzeni.

Przykład 4.19. Rozważmy dysk dwuwymiarowy $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \colon |x| \leq 1\}$ oraz jego brzeg
$$\partial D^2 = \{x \in D^2 \colon |x| = 1\}.$$
Przestrzeń ilorazowa $D^2/\partial D^2$ jest homeomorficzna ze sferą S^2. Jak łatwo się przekonać, odwzorowanie (4.1) zadaje homeomorfizm $D^2/\partial D^2 \cong S^2$.

Przykład 4.20. Rozważmy przykład $X = \mathbb{R}$ oraz $A = \mathbb{Z}$.

- Przestrzeń ilorazowa X/A nie jest metryzowalna, zob. [BCPP23, Przykład 5.1.4], ponieważ nie spełnia I aksjomatu przeliczalności.
- Iloraz niezwartej przestrzeni metryzowalnej otrzymanej przez zgniatanie domkniętego podzbioru nie musi być przestrzenią metryzowalną.

Przykład 4.21. Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi takimi, że $X \cap Y = \emptyset$.

- Załóżmy, że $K \subset X$ oraz $f \colon K \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym.
- W przestrzeni $X \sqcup Y$ wprowadzamy następującą relację $\sim_f$, której nietrywialne klasy abstrakcji są postaci
$$f^{-1}(y) \cup \{y\}, \quad y \in f(K).$$
- Przestrzeń ilorazową $(X \sqcup Y)/\sim_f$ oznaczamy symbolem $(X \cup_f Y, \tau_f)$ i mówimy, że powstała ona przez przyklejenie X do Y wzdłuż f.

Uwaga 4.22. *Jeśli X jest zwarta, Y Hausdorffa, a K jest domknięty, to relacja $\sim_f$ jest domykająca.*

Stwierdzenie 4.23. *Jeśli X jest zwartą podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$, Y jest zwartą podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, $K \subseteq X$ jest domknięty, a $f : K \to Y$ jest ciągłe, to przestrzeń $X \cup_f Y$ zanurza się w $\mathbb{R}^{m+n+1}$*

Dowód. Zob. [BCPP23, Twierdzenie 5.2.2]. □

Przykład 4.24. Rozważmy dysk dwuwymiarowy $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \colon |x| \leq 1\}$ oraz jego brzeg
$$K = \partial D^2 = \{x \in D^2 \colon |x| = 1\}.$$
Przestrzeń rzutowa $\mathbb{R}P^2$ może być otrzymana jako doklejenie dysku D^2 do okręgu S^1 przy pomocy odwzorowania
$$f \colon K \to S^1, \quad f(z) = z^2.$$

Przykład 4.25. Niech X będzie przestrzenią całkowicie regularną, oraz załóżmy, że (Y, j) będzie uzwarceniem X, zob. Sekcja 3.6. Na mocy Wniosku 3.58 istnieje ciągła suriekcja $f\colon \beta(X) \to Y$, gdzie $\beta(X)$ to uzwarcenie Čecha-Stone'a przestrzeni X, zob. Sekcja 3.6.2. Korzystając z Lematu 4.4 stwierdzamy, że f jest odwzorowaniem ilorazowym. To pokazuje, że każde uzwarcenie przestrzeni X można uzyskać jako iloraz przestrzeni $\beta(X)$.

5 Zupełność

5.1 Zupełność – podstawowe definicje i fakty

Definicja 5.1. Ciąg punktów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy *ciągiem Cauchy'ego*, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Stwierdzenie 5.2. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.*

1. *Każdy ciąg zbieżny w (X, d) jest ciągiem Cauchy'ego.*

2. *Ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony, tzn. zbiór $\{x_n : n \geq 1\}$ jest ograniczony.*

3. *Jeśli ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg zbieżny do punktu x_0, to $x_n \to x_0$.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 5.3. Przestrzeń metryczna (X, d) jest *zupełna*, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.

Przykład 5.4. Przestrzenie euklidesowe $(\mathbb{R}^n, d_e)$ są zupełne, zob. [BCPP23, Twierdzenie 3.1.4].

Przykład 5.5. Przestrzeń Hilberta ℓ^2, zob. Przykład 3.5, jest zupełna, zob. [BCPP23, Przykład 3.1.6].

Definicja 5.6. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną, a (Y, d) przestrzenią metryczną.

- Symbolem $C_b(X, Y)$ będziemy oznaczać zbiór funkcji ciągłych $f : X \to Y$ ograniczonych, tzn. takich, że $f(X)$ jest ograniczony w (Y, d).

- W $C_b(X, Y)$ rozważamy metrykę supremum

$$d_{\sup}(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Stwierdzenie 5.7. *Jeśli przestrzeń metryczna (Y, d) jest zupełna, to przestrzeń funkcyjna $(C_b(X, Y), d_{\sup})$ jest zupełna.*

Dowód. Jeśli $(f_n)_n$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $C_b(X, Y)$, to dla każdego $x \in X$ ciąg $(f_n(x))$ jest ciągiem Cauchy'ego w Y. Definiujemy odwzorowanie $f \colon X \to Y$, gdzie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Ciąg $(f_n)_n$ zbiega jednostajnie do f, zatem, na mocy Wniosku 1.83, $f \in C_b(X, Y)$. W konsekwencji, przestrzeń $C_b(X, Y)$ jest zupełna. □

Wniosek 5.8. *Przestrzeń* $(C[0,1], d_{\text{sup}})$ *jest zupełna.*

Przykład 5.9. Homeomorfizmy nie zachowują zupełności:

- Prosta euklidesowa jest zupełna,
- Otwarty odcinek $(0,1) \subset \mathbb{R}$ z metryką indukowaną nie jest zupełny.
- Mamy $(\mathbb{R}, d_e) \cong ((0,1), d_e)$.

Przykład 5.10. Jednostajne homeomorfizmy h (tzn. h i h^{-1} są jednostajnie ciągłe) zachowują zupełność.

Definicja 5.11. *Przestrzeń Banacha* to przestrzeń unormowana $(V, \|\cdot\|)$, która jest zupełna w metryce generowanej przez normę $\|\cdot\|$.

Przykład 5.12. Przykłady przestrzeni Banacha:

- Przestrzenie euklidesowe $(\mathbb{R}^n, d_e)$,
- Przestrzeń Hilberta $(\ell^2, || - ||_2)$ z Przykładu 3.5 jest przestrzenią Banacha.
- Przestrzeń $(C[0,1], || - ||_{sup})$.

Twierdzenie 5.13. *Niech* (X, d_X) *będzie przestrzenią metryczną,* $Y \subset X$ *i niech* d_Y *będzie obcięciem metryki* d_X *do* Y*.*

1. *Jeśli przestrzeń* (Y, d_Y) *jest zupełna, to zbiór* Y *jest domknięty w* (X, d_X)*.*
2. *Jeśli przestrzeń* (X, d_X) *jest zupełna i zbiór* Y *jest domknięty w* (X, d_X)*, to przestrzeń* (Y, d_Y) *jest zupełna.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Twierdzenie 5.14. *Przestrzeń metryczna* (X, d_X) *zwarta jest zupełna.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Twierdzenie 5.15 (Warunek Cantora)**.** *Przestrzeń* (X, d) *jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący* warunek Cantora*: każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera ma niepuste przecięcie.*

Dowód. Załóżmy, że przestrzeń (X, d) jest zupełna oraz niech $\{A_n\}_n$ będzie zstępującym ciągiem niepustych zbiorów domkniętych takich, że

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0.$$

Dla każdego n wybierzmy punkt $a_n \in A_n$. Pokażemy, że ciąg $(a_n)_n$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Jeśli $\epsilon > 0$, to istnieje $N > 0$ takie, że dla $n > N$, $\operatorname{diam}(A_n) < \epsilon$. Zatem, dla dowolnym $m > n > N$ mamy

$$d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(A_n) < \epsilon,$$

co pokazuje, że $(x_n)_n$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Z zupełności przestrzeni (X, d) wynika, że ciąg ma granicę a_0. Wówczas, z faktu, że zbiory A_n są domknięte wynika, że

$$a_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Jeśli przestrzeń metryczna (X, d) spełnia warunek Cantora, niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Rozważmy zbiory $A_n = \operatorname{cl}_X\{a_m\colon m \geq n\}$. Rodzina $\{A_n\}_n$ jest zstępującą rodziną niepustych zbiorów domkniętych oraz, z faktu, że $(a_n)_n$ jest ciągiem Cauchy'ego, wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0.$$

Zatem, z warunku Cantora wynika, że

$$A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Nietrudno się przekonać, że jeśli $a_0 \in A_0$, to a_0 jest punktem skupienia ciągu $(a_n)_n$, co kończy dowód. □

Definicja 5.16. Zupełną przestrzeń metryczną $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ nazywamy *uzupełnieniem* przestrzeni metrycznej (X, d), jeśli $X \subset \widetilde{X}$ jest gęstym podzbiorem oraz $\widetilde{d}|_X = d$.

Twierdzenie 5.17 (o uzupełnieniu)**.** *Dowolna przestrzeń metryczna (X, d) posiada uzupełnienie.*

Lemat 5.18. *Dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) istnieje izometryczne zanurzenie (X, d) w przestrzeń $(C_b(X, \mathbb{R}), d_{sup})$.*

Dowód. Ustalmy $x_0 \in X$. Dla $a \in X$ definiujemy $f_a : X \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$f_a(x) = d(x,a) - d(x,x_0) \quad \text{dla } x \in X$$

Zauważmy, że z nierówności trójkąta wynika, że dla każdego $x \in X$ mamy

$$|f_a(x)| \leq d(a,x_0),$$

zatem funkcja f_a jest ciągła i ograniczona.

Dla dowolnych $a, b \in X$ mamy

$$d_{\sup}(f_a, f_b) = \sup_{x\in X} |f_a(x) - f_b(x)| = \sup_{x\in X} |d(x,a) - d(x,b)| \leq d(a,b),$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z nierówności trójkąta. Dla $x = b$ mamy $f_a(b) - f_b(b) = d(a,b)$, czyli $d_{\sup}(f_a, f_b) = d(a,b)$. Zatem, odwzorowanie

$$\Phi\colon (X,d) \to (C_b(X,\mathbb{R}), d_{\sup}), \quad \Phi(a) = f_a$$

jest zanurzeniem izometrycznym. □

Dowód Twierdzenia 5.17. Niech

$$\Phi\colon (X,d) \hookrightarrow (C_b(X,\mathbb{R}), d_{\sup})$$

będzie zanurzeniem izometrycznym z Lematu 5.18. Niech $\widetilde{X} = \mathrm{cl}(\Phi(X))$ oraz $\widetilde{d} = d_{\sup}|_{\widetilde{X}}$. Wówczas $\widetilde{X}$ jest domkniętą podprzestrzenią zupełnej przestrzeni metrycznej $C_b(X,\mathbb{R})$, zatem przestrzeń metryczna $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ jest uzupełnieniem przestrzeni (X,d). □

5.2 Twierdzenie Banacha o kontrakcji

Definicja 5.19. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną.

- Przekształcenie $T : X \to X$ jest *zwężające* (jest *kontrakcją*), jeśli istnieje stała $0 \leq c < 1$ taka, że

$$d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x,y), \text{ dla } x,y \in X. \tag{5.1}$$

- Punkt x jest *punktem stałym* przekształcenia T, jeśli $T(x) = x$.

Twierdzenie 5.20 (Banacha[24] o kontrakcji)**.** *Jeśli $T : X \to X$ jest przekształceniem zwężającym niepustej i zupełnej przestrzeni metrycznej (X,d) w siebie, to T ma dokładnie jeden punkt stały.*

[24] Stefan Banach – jeden z najwybitniejszych polskich matematyków.

Dowód. Warunek (5.1) implikuje, że jeśli T ma punkt stały, to jest on jedyny.

Aby wykazać istnienie punktu stałego, wybierzmy dowolny punkt $x_0 \in X$ i rozważmy ciąg

$$x_n = T^n(x_0) = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n}(x_0)$$

punktów przestrzeni X. Zauważmy, że dla $n > m \geq 0$ mamy

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq c^m d(T^{n-m}(x_0), x_0) \\ &\leq c^m \big(d(T^{n-m}(x_0), T^{n-m-1}(x_0)) + \cdots + d(T(x_0), x_0)\big) \\ &\leq c^m \left(c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \cdots + 1\right) d(T(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{c^n}{1-c} d(T(x_0), x_0). \end{aligned}$$

To pokazuje, że ciąg $(x_n)_n$ jest ciągiem Cauchy'ego. Jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, to y jest szukanym punktem stałym, ponieważ, na podstawie powyższej nierówności mamy

$$d(T(x_n), x_n) = d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c},$$

Zatem,

$$d(T(y), y) = \lim_{n\to\infty} d(T(x_n), x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{c^{n+1}}{1-c} = 0,$$

co kończy dowód. □

Przykład 5.21. Przykładowe zastosowania twierdzenia Banacha o kontrakcji:

1. Istnienie i jedyność rozwiązań równań różniczkowych.
2. Istnienie i jedyność rozwiązań równań całkowych.
3. Istnienie i jedyność punktów równowagi w wielu modelach ekonomicznych.
4. Więcej ciekawych zastosowań można znaleźć na Wikipedii lub Stack Exchange Math.

5.3 Twierdzenie Baire'a i metryzowalność w sposób zupełny

Definicja 5.22. Przestrzeń topologiczna (X, τ) jest metryzowalna w sposób zupełny jeśli istnieje zupełna metryka d na X generująca topologię τ.

Twierdzenie 5.23. *Przeliczalny iloczyn kartezjański przestrzeni metryzowalnych w sposób zupełny jest metryzowalny w sposób zupełny.*

Dowód. Niech (X_n, d_n) będzie rodziną zupełnych przestrzeni metrycznych i oznaczmy $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ oraz metrykę produktową

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \min(d(x_n, y_n), 1),$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_n)_n \in X$ oraz $\mathbf{y} = (y_n)_n \in X$. Jeśli $(\mathbf{x}^m)_m$ jest ciągiem Cauchy'ego względem metryki d, wówczas, dla dowolnego n, ciąg n-tych współrzędnych $(x_n^m)_m$ jest również ciągiem Cauchy'ego w X_n. Korzystając z zupełności czynników stwierdzamy, że, dla każdego n, $x_n^m \xrightarrow{d_n} x_n^0$. Biorąc $\mathbf{x}^0 = (x_n^0)_n$ stwierdzamy, że $\mathbf{x}^m \xrightarrow{d} \mathbf{x}^0$. To pokazuje, że przestrzeń (X, d) jest zupełna. □

Twierdzenie 5.24. *Podzbiór A przestrzeni (X, τ) metryzowalnej w sposób zupełny, jest metryzowalny w sposób zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy A jest przecięciem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych w X.*

Dowód Twierdzenia 5.24 znajduje się w Sekcji 5.6.1.

Przykład 5.25. Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ można zapisać w postaci

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\},$$

zatem $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ z topologią indukowaną z $\mathbb{R}$ jest metryzowalny w sposób zupełny.

Konstrukcję zupełnej metryki na zbiorze liczb niewymiernych przedstawiona jest w Sekcji 5.6.2.

Twierdzenie 5.26 (Baire'a[25])**.** *W przestrzeni (X, τ) metryzowalnej w sposób zupełny, przeliczalna suma domkniętych zbiorów brzegowych jest zbiorem brzegowym (równoważnie, przeliczalne przecięcie zbiorów otwartych gęstych jest gęste).*

Dowód. Niech d będzie zupełną metryką na X oraz niech $F_n{}_n$ będzie przeliczalną rodziną domkniętych zbiorów brzegowych. Oznaczmy $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pokażemy, że dla dowolnej kuli $B_d(x, R) \subset X$, różnica $B_d(x, R) \setminus F$ jest niepustym zbiorem.

Ustalmy $x \in X$ oraz $R > 0$. Skonstruujemy zstępujący ciąg kul

$$B_d(x, R) \supset B_d(x_1, R_1) \supset B_d(x_2, R_2) \supset \ldots \supset B_d(x_n, R_n) \supset \ldots,$$

[25] René-Louis Baire – francuski matematyk.

gdzie

$$\overline{B}_d(x_n, R_n) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k \right) = \emptyset$$

oraz $R_{n+1} \leq \frac{1}{2} R_n$, dla $n \geq 1$.

Dla $n = 1$, skoro F_1 jest domknięty i brzegowy, to $B_d(x, R) \setminus F_1$ jest otwartym podzbiorem $B_d(x, R)$. Zatem, biorąc dowolny $x_1 \in B_d(x, R)$, istnieje $s > 0$ takie, że $B_d(x_1, s) \subset B_d(x, R) \setminus F_1$. Biorąc $R_1 = \frac{s}{2}$ otrzymujemy kulę $B_d(x_1, R_1)$ o żądanych własnościach.

Niech $m > 1$. Załóżmy teraz, że mamy już skonstruowane kule dla $n \leq m$. Skoro F_{m+1} jest brzegowy, to $B_d(x_m, R_m) \setminus F_{m+1} \neq \emptyset$. Ustalmy dowolny punkt $x_{m+1} \in B_d(x_m, R_m) \setminus F_{m+1}$. Z faktu, że F_{m+1} jest domknięty wynika, że istnieje $s > 0$ takie, że $B_d(x_{m+1}, s) \subset B_d(x_m, R_m) \setminus F_{m+1}$. Biorąc teraz $R_{m+1} = \min(R_m/2, s/2)$ otrzymujemy kulę $B_d(x_{m+1}, R_{m+1})$ o żądanych własnościach.

Korzystając z warunku Cantora mamy

$$B(x, R) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_d(x_n, R_n) \neq \emptyset$$

oraz

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_d(x_n, R_n) \right) = \emptyset,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga 5.27. *W powyższym twierdzeniu nie można pominąć żadnego z założeń:*

- *Jeśli pominiemy domkniętość zbiorów, to mamy*

  $$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

  przy czym oba zbiory są brzegowe.

- *Jeśli pominiemy zupełność, to mamy*

  $$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\},$$

  gdzie każdy singleton jest domknięty i brzegowy.

Przykład 5.28. Twierdzenie Baire'a ma wiele zastosowań w analizie. Przykładowo:

- Istnienie funkcji ciągłej, która nie ma nigdzie pochodnej.
- Istnienie funkcji ciągłej, która nie jest monotoniczna na żadnym niepustym przedziale.
- Podstawowe twierdzenia analizy funkcjonalnej.
- Więcej ciekawych zastosowań można znaleźć np. na Stack Exchange Math.

5.4 Całkowita ograniczoność a zwartość – twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Definicja 5.29. Zbiór w przestrzeni metrycznej (X, d) jest całkowicie ograniczony, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ można go pokryć skończenie wieloma zbiorami o średnicach $\leq \varepsilon$.

Przykład 5.30. W przestrzeniach euklidesowych każdy zbiór ograniczony jest całkowicie ograniczony.

Twierdzenie 5.31. *Przestrzeń metryczna (X, d) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna i całkowicie ograniczona.*

Dowód. Implikację $(\Rightarrow)$ zostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika.

$(\Leftarrow)$ Załóżmy, że zbiór (X, d) jest zupełna i całkowicie ograniczona. Niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem przestrzeni (X, d), które nie posiada skończonego pokrycia. Skonstruujemy indukcyjnie ciąg podzbiorów

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

takich, że $\operatorname{diam} A_n \leq \frac{1}{n}$ oraz zbioru A_n nie da się pokryć skończenie wieloma zbiorami z $\mathcal{U}$.

Przyjmujemy, że $A_0 = X$. Załóżmy, że skonstruowaliśmy zbiory A_k, dla $0 \leq k \leq n-1$. Zbiór A_{n-1} pokrywamy skończoną rodziną zbiorów $B_1, \cdots, B_l$ o średnicach $\leq \frac{1}{n}$. Skoro A_{n-1} nie można pokryć skończoną liczbą zbiorów $\mathcal{U}$, to istnieje $1 \leq j_0 \leq l$ takie, że zbiór B_{j_0} nie może być pokryty przez skończoną liczbę zbiorów z $\mathcal{U}$. Przyjmujemy $A_n := B_j$.

Na mocy warunku Cantora, zob. Twierdzenie 5.15, wiemy, że

$$C = \bigcap_{n \geq 0} \operatorname{cl}_X(A_n) \neq \emptyset.$$

Niech $a \in C$ oraz wybierzmy $U \in \mathcal{U}$ takie, że $a \in U$. Istnieje $N > 0$ takie, że $B(a, \frac{1}{N}) \subset U$, co pokazuje, że dla $n > N$ mamy $A_n \subset U$, co jest sprzeczne z definicją zbioru A_n. Zatem, pokrycie $\mathcal{U}$ musi posiadać skończone podpokrycie i, w konsekwencji, przestrzeń (X, d) musi być zwarta. $\square$

Wniosek 5.32. *Jeśli (X, d) jest zupełną przestrzenią metryczną, to domknięcie $\mathrm{cl}_X A$ zbioru całkowicie ograniczonego A w przestrzeni (X, d) jest zwarte.*

Definicja 5.33. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną, a $C(X, \mathbb{R}^n)$ niech będzie zbiorem funkcji ciągłych.

- Rodzina przekształceń $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ jest jednakowo ciągła, jeśli dla każdego $x \in X$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie U punktu x takie, że dla wszystkich $f \in \mathcal{F}$, $\operatorname{diam} f(U) \leq \varepsilon$.

- Rodzina $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ jest wspólnie ograniczona, jeśli dla pewnego $r > 0$, obrazy $f(X)$ wszystkich przekształceń $f \in \mathcal{F}$ leżą w kuli $B(\mathbf{0}, r)$.

Twierdzenie 5.34 (Ascoliego-Arzeli)**.** *Niech (X, τ) będzie przestrzenią zwartą i niech rodzina $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ będzie jednakowo ciągła i ograniczona. Wówczas domknięcie $\mathcal{F}$ w przestrzeni metrycznej $(C(X, \mathbb{R}^n), d_{\sup})$ jest zwarte.*

Lemat 5.35. *Niech (X, τ) będzie zwarta oraz niech $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}^n)$. Wówczas $\mathcal{F}$ jest całkowicie ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła i ograniczona.*

Dowód. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że rodzina funkcji ciągłych $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła i wspólnie ograniczona. Ustalmy $\epsilon > 0$. Niech $M > 0$ będzie takie, że dla każdego $f \in \mathcal{F}$ mamy $f(X) \subset B_e(\mathbf{0}, M)$.

Rozważmy rodzinę

$$\mathcal{U} = \{U \in \tau \colon \ \forall_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{diam} f(U) \leq \frac{\epsilon}{3}\}.$$

Jednakowa ciągłość rodziny $\mathcal{F}$ implikuje, że rodzina $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem przestrzeni X. Korzystając ze zwartości X, wybieramy skończone podpokrycie

$$U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}, \quad \bigcup_{i=1}^{k} U_i = X.$$

Kula $B_e(\mathbf{0}, M)$ jest całkowicie ograniczona, zatem możemy ją przedstawić jako

$$B_e(\mathbf{0}, M) = \bigcup_{j=1}^{l} B_j,$$

gdzie $\operatorname{diam} B_j \leq \frac{\epsilon}{3}$.

Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną wszystkich funkcji

$$s \colon \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, l\}.$$

Dla $s \in \mathcal{S}$ definiujemy

$$\mathcal{B}_s = \{f \in \mathcal{F} \colon \forall_{1 \leq i \leq k}\ f(U_i) \cap B_{s(i)} \neq \emptyset\}.$$

Mamy

$$\mathcal{F} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{B}_s.$$

Ustalmy $s \in \mathcal{S}$ oraz wybierzmy $f, g \in \mathcal{B}_s$. Dla $x \in X$ ustalmy $1 \leq i \leq k$ takie, że $x \in U_i$. Wybierzmy $b \in f(U_i) \cap B_{s(i)}$ oraz $c \in g(U_i) \cap B_{s(i)}$. Mamy

$$d_e(f(x), g(x)) \leq d_e(f(x), b) + d_e(b, c) + d_e(c, g(x)) \leq \epsilon,$$

co wynika z faktu, że

$$\operatorname{diam} f(U_i),\ \operatorname{diam} g(U_i),\ \operatorname{diam} B_{s(i)} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Podsumowując, pokazaliśmy, że zbiór $\mathcal{F}$ można zapisać jako sumę zbiorów $\mathcal{B}_s$, gdzie $s \in \mathcal{S}$, oraz $\operatorname{diam} \mathcal{B}_s \leq \epsilon$, zatem, $\mathcal{F}$ jest całkowicie ograniczonym podzbiorem. □

Dowód Tw. Arzeli-Ascoliego. Twierdzenie Arzeli-Ascoliego jest bezpośrednią konsekwencją Lematu 5.35 oraz Twierdzenia 5.31. □

5.5 Dodatek: Kouniwersalność zbioru Cantora

Przypomnijmy, że w Rozdziale 2.4.2 powiedzieliśmy, że przestrzeń uniwersalna X dla klasy przestrzeni topologicznych $\mathcal{P}$, to taka przestrzeń, która należy do $\mathcal{P}$ oraz każda przestrzeń należąca do $\mathcal{P}$ zanurza się topologicznie w X. Możemy również rozpatrywać własność dualną, tzn. *przestrzeń kouniwersalna* dla klasy przestrzeni topologicznych $\mathcal{P}$, to przestrzeń topologiczna X, która należu do $\mathcal{P}$ oraz dla każdej przestrzeni z $\mathcal{P}$ istnieje ciągła suriekcja z X na tę przestrzeń.

W szczególności, jeśli $\mathcal{P}$ jest klasą zwartych przestrzeni metrycznych, to zbiór Cantora $\mathfrak{C}$ jest przestrzenią kouniwersalną dla $\mathcal{P}$.

Zanim udowodnimy to twierdzenie, zacznijmy od poniższego lematu. Przypomnijmy, że zbiór Cantora oznaczaliśmy symbolem $\mathfrak{C}$.

Lemat 5.36. *Dla każdego $m \geq 1$ istnieją rozłączne, otwarto-domknięte podzbiory $U_1, U_2, \ldots, U_m \subset \mathfrak{C}$ takie, że*

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$$

oraz każdy ze zbiorów U_i jest homeomorficzny z $\mathfrak{C}$.

Dowód. Lemat wynika z faktu, że dla każdego $m \geq 1$ istnieje homeomorfizm

$$\mathfrak{C} \cong \bigsqcup_{i=1}^{m} \mathfrak{C},$$

zob. Stwierdzenie 3.34. □

Wniosek 5.37. *Jeśli $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rodziną niepustych i skończonych zbiorów takich, że dla każdego $n \geq 1$ mamy $|X_n| > 1$, to*

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n \cong \mathfrak{C}.$$

Zanim przejdziemy do dowodu, wprowadźmy jeszcze jedno pojęcie. Niech $\mathcal{U} = U_{tt\in T}$ oraz $\mathcal{V} = V_{ss\in S}$ będą pokryciami (niekoniecznie otwartymi) przestrzeni topologicznej (X, τ). Mówimy, że pokrycie $\mathcal{V}$ jest *podporządkowane* pokryciu $\mathcal{U}$, jeśli dla każdego $s \in S$ istnieje $t_s \in T$ takie, że $V_s \subset U_{t_s}$. Podporządkowanie pokryć zapisujemy następująco $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$.

Dowód Wniosku 5.37. Niech $\mathcal{X} = X_{nn\geq 1}$ będzie taka jak w sformułowaniu wniosku. Oznaczmy $I_m = \prod_{i=1}^{m} X_m$, $I_\infty = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ oraz niech $\pi_{[m]} I_m \to I_{m-1}$ będzie rzutowaniem na pierwsze $(m-1)$ współrzędnych. Korzystając z Lematu 5.36, dla każdego $m \geq i$ skonstruujemy pokrycie zbioru Cantora

$$\mathcal{A}_m = \{A_t \colon t \in I_n\}$$

takie, że:

1. Dla każdego $m \geq 1$ rodzina $\mathcal{A}_m$ jest pokryciem zbiory Cantora rozłącznymi, otwarto-domkniętymi zbiorami o średnicy $\leq 2^{-m+1}$.

2. Dla każdego $m \geq 2$ oraz każdego $t \in I_m$ zachodzi

$$A_t \subset A_{\pi_{[m]}(t)}.$$

Konstrukcja rodziny pokryć $\{\mathcal{A}_m\}_{m\geq 1}$ o żądanych własnościach będzie indukcyjna. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\operatorname{diam} \mathfrak{C} \leq 1$. Korzystając z Lematu 5.36 konstruujemy pokrycie $\mathcal{A}_1$ o żądanych własnościach, przy czym każdy element tego pokrycia jest homeomorficzny z $\mathcal{C}$.

Jeśli mamy już skonstruowane pokrycia $\mathcal{A}_k$, dla $1 \leq k \leq m$, wówczas z konstrukcji wynika, że każdy element pokrycia $\mathcal{A}_m$ jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. Zatem, stosując Lemat 5.36, do każdego elementu $A_t \in \mathcal{A}_m$ otrzymujemy pokrycie $\mathcal{A}_{m+1}$ o żądanych własnościach.

Mając skonstruowaną rodzinę pokryć $\{\mathcal{A}_m\}_{m\geq 1}$ rozważmy odwzorowania

$$P_m\colon I_\infty \to I_m,$$

które rzutuje każdy element na pierwszych m współrzędnych. Dla każdego $m \geq 1$ konstruujemy odwzorowania

$$f_m\colon I_\infty \xrightarrow{P_m} I_m \xrightarrow{g_m} \mathfrak{C},$$

gdzie g_m jest dowolnym odwzorowaniem takim, że dla każdego $t \in I_m$, $g_m(t) \in A_t$.

Zauważmy, że dla dowolnych $n > m \geq 1$ oraz dowolnego $u \in I_\infty$ mamy $f_n(u), f_m(u) \in A_{P_m(u)}$, zatem

$$d_{\mathrm{sup}}(f_n, f_m) \leq 2^{-m+1}.$$

W konsekwencji, ciąg $(f_m)_{m\geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $(C(I_\infty, \mathfrak{C}), d_{\mathrm{sup}})$. Korzystając z zupełności metryki d_{sup} znajdujemy odwzorowanie f, które jest jednostajną granicą ciąg $(f_m)_{m\geq}$.

Zauważmy, że dla każdego $u \in I_\infty$ mamy zstępujący ciąg zbiorów domkniętych $\{A_{P_m(u)}\}_{m\geq 1}$ takich, że

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam} A_{P_m(u)} = 0.$$

Zatem, na mocy Warunku Cantora

$$\bigcup_{m\geq 1} A_{P_m(u)} \neq \emptyset.$$

Co więcej, powyższy iloczyn jest singletonem, tj.

$$\bigcup_{m\geq 1} A_{P_m(u)} = \{x_u\},$$

wówczas z konstrukcji odwzorowania f wynika, że $f(u) = x_u$. Z konstrukcji rodziny pokryć wynika, że dla każdego $x \in \mathfrak{C}$ istnieje $u \in I_\infty$ takie, że

$$\bigcap_{m\geq 1} A_{P_m(u)} = \{x\},$$

zatem f jest suriekcją. Podobnie, z faktu, że dla każdego $m \geq 1$ elementy pokrycia $\mathcal{A}_m$ są rozłączne wynika, że f jest iniekcją. W konsekwencji f jest ciągłą bijekcją, a zatem, na mocy Stwierdzenia 3.22, f jest homeomorfizmem. □

Twierdzenie 5.38. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wówczas, (X, d) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciągła suriekcja ze zbioru Cantora na X.*

Szkic dowodu. $(\Rightarrow)$ Załóżmy, że X jest zawarta. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\operatorname{diam}(X) \leq 1$.

W dowodzie wykorzystamy tę samą metodę co w dowodzie Wniosku 5.37. Indukcyjnie konstruujemy rodzinę zbiorów skończonych $J_{m m \geq 1}$ oraz rodzinę pokryć przestrzeni X

$$\mathcal{A}_m = \{A_t \colon t \in I_m\},$$

gdzie $I_m = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_m$ oraz $m \geq 1$. Rodzina $\{\mathcal{A}_m\}_{m \geq 1}$ spełnia następujące warunki.

- Dla każdego $m \geq 1$ rodzina $\mathcal{A}_m$ jest skończonym pokryciem otwartym przestrzeni X zbiorami o średnicy $\leq 2^{-m+1}$.
- Jeśli, dla $m \geq 2$, odwzorowanie

$$\pi_{[m]} \colon I_m \to I_{m-1} \tag{5.2}$$

  jest rzutowaniem na pierwszych $(m-1)$ współrzędnych, to dla każdego $m \geq 2$ oraz każdego $t \in I_m$ zachodzi

$$A_t \subset A_{\pi_{[m]}(t)}.$$

Konstrukcję rodziny pokryć $\{\mathcal{A}_m\}_{m \geq 1}$ zostawimy jako ćwiczenie dla czytelnika. Mając skonstruowaną rodzinę pokryć o zadanych własnościach postępujemy tak jak w dowodzie Wniosku 5.37, tj. konstruujemy odwzorowania

$$f_m \colon I_\infty \xrightarrow{P_m} I_m \xrightarrow{g_m} X,$$

gdzie

$$I_\infty = \prod_{m=1}^{\infty} J_m,$$

P_m jest rzutowaniem na pierwsze m współrzędnych, oraz $g_m(t) \in \operatorname{cl}_X(A_t)$, dla $t \in I_m$. Podobnie jak wcześniej rozważamy odwzorowanie $f \colon I_\infty \to X$, które jest jednostajną granicą ciągu $(f_m)_{m \geq 1}$. Z faktu, że dla każdego $m \geq 1$ rodzina $\mathcal{A}_m$ jest pokryciem przestrzeni wynika, że rodzina $\{\operatorname{cl}_X(A_t) \colon t \in I_m\}$ jest pokryciem przestrzeni X, zatem f jest ciągłą suriekcją.

Na mocy Wniosku 5.37 istnieje homeomorfizm

$$h \colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\cong} I_\infty,$$

zatem $f \circ h$ jest szukanym odwzorowaniem. $\square$

5.6 Dodatek: Metryzowalność w sposób zupełny

5.6.1 Charakteryzacja metryzowalności w sposób zupełny

W tej sekcji udowodnimy Twierdzenie 5.24. Zacznijmy od przypomnienia jego treści.

Twierdzenie (5.24)**.** *Podzbiór Y przestrzeni (X, τ) metryzowalnej w sposób zupełny, jest metryzowalny w sposób zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest przecięciem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych w X.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech d będzie zupełną metryką na X, $A \subset X$ oraz niech d_A będzie zupełną metryką na A. Dla każdego $n \geq 1$ rozważmy rodzinę zbiorów

$$\mathcal{A}_n = \{U \subset X \colon U \text{ otwarty}, \ A \cap U \neq \emptyset, \ \operatorname{diam}_d(U), \ \operatorname{diam}_{d_A}(A \cap U) \leq \frac{1}{n}\}.$$

Zdefiniujmy zbiory

$$V_n = \bigcup \mathcal{A}_n.$$

Rodzina $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n \geq 1}$ jest zstępującą rodziną zbiorów otwartych. Dodatkowo, jeśli ustalimy $n \geq 1$ oraz $x \in A$, wówczas, skoro $B_{d_A}(x, \frac{1}{2n})$ jest otwartym podzbiorem A, to istnieje $0 < r_n < \frac{1}{2n}$ takie, że

$$B_d(x, r_n) \cap A \subset B_{d_A}(x, \frac{1}{2n}).$$

To pokazuje, że $A \subset V_n$. Zatem, $A \subset \bigcap_{n \geq 1} V_n$. Pokażemy, że $A = \bigcap_{n \geq 1} V_n$.

Niech $y \in \bigcap_{n \geq 1} V_n$. Na mocy definicji, dla każdego $n \geq 1$ istnieje zbiór otwarty $W_n \subset X$ taki, że $y \in W_n$, $W_n \cap A \neq \emptyset$ oraz

$$\operatorname{diam}_d(W_n), \ \operatorname{diam}_{d_A}(A \cap W_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Bez straty ogólności, możemy założyć, że rodzina zbiorów $\{W_n\}_{n \geq 1}$ jest zstępująca. Wybierzmy ciąg $a_n \in A \cap W_n$. Wówczas

$$a_n \xrightarrow{d} y.$$

Z drugiej strony, jeśli ustalimy $n > m \geq 1$, to $x_n, x_m \in A \cap W_m$, zatem

$$d_A(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}_{d_A}(W_m \cap A) \leq \frac{1}{m}.$$

To pokazuje, że ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego względem metryki d_A. Korzystając z zupełności d_A stwierdzamy, że

$$a_n \xrightarrow{d_A} a_0 \in A.$$

Korzystając z faktu, że inkluzja $A \hookrightarrow X$ jest ciągła stwierdzamy, że

$$a_n \xrightarrow{d} a_0,$$

zatem $a_0 = y$. To pokazuje, że $y \in A$ i w konsekwencji $\bigcap_{n\geq 1} V_n \subset A$. Ostatecznie, $A = \bigcap_{n\geq 1} V_n$, co kończy dowód.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że d jest zupełną metryką na X. Niech $\{U_n\}_{n\geq 1}$ będzie rodziną podzbiorów otwartych w X oraz niech

$$A = \bigcap_{n\geq 1} U_n \neq \emptyset.$$

Dla każdego $n \geq 1$ rozważmy funkcję

$$f_n \colon U_n \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{d(x, X \setminus U_n)}.$$

Niech $\iota_A \colon A \hookrightarrow X$ będzie inkluzją. Rozważmy rodzinę odwzorowań

$$\mathcal{F} = \{\iota_A \colon A \to X\} \cup \{f_n|_A \colon A \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}.$$

Biorąc $D = \Delta(\mathcal{F})$, zob. Definicja 2.33, otrzymujemy zanurzenie homeomorficzne

$$D \colon A \to X \times \mathbb{R}^\omega.$$

Aby uzasadnić, że D jest zanurzeniem homeomorficznym, wystarczy zauważyć, że rodzina $\mathcal{F}$ oddziela zbiory domknięte od punktów, zob. Definicja 2.34, i skorzystać z Twierdzenia 2.35. Oznaczmy $B = D(A)$. Pokażemy, że $D(A)$ jest domkniętą przestrzenią w $X \times \mathbb{R}^\omega$.

Niech

$$p_X \colon X \times \mathbb{R}^\omega \to X, \quad \text{oraz} \quad p_n \colon X \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$$

będą rzutowaniami na X lub na n-tą współrzędną w $\mathbb{R}^\omega$, odpowiednio. Na $X \times \mathbb{R}$ rozpatrujemy metrykę

$$d_\times((x, \mathbf{t}), (y, \mathbf{s})) = d(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(d_e(t_n, s_n), 1).$$

Rozważmy ciąg punktów $(b_n)_n$ z B, taki, że

$$b_n \xrightarrow{d_\times} b_0.$$

W szczególności, ciąg $(b_n)_n$ jest ograniczony. Biorąc $x_n = p_X(b_n)$, dla każdego $m \geq 1$ istnieje $M_m > 0$ takie, że

$$M_m \geq \sup_{n\geq 1} p_m(b_n) = \sup_{n\geq 1} f_m|_A(x_n) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{d(x_n, X \setminus U_m)}.$$

W konsekwencji, dla każdego $m \geq 1$ mamy

$$\inf_{n\geq 1} d(x_n, X \setminus U_m) \geq \frac{1}{M_m} > 0.$$

To pokazuje, że dla $m \geq 1$,

$$d(x_0, X \setminus U_m) = \lim_{n\to\infty} d(x_0, X \setminus U_m) \geq 0.$$

Z faktu, że zbiory $X \setminus U_m$ są domknięte wynika, że dla $m \geq 1$, $x_0 \in U_m$. W konsekwencji, $x_0 \in A = \bigcap_{m\geq 1} U_m$ oraz $b_0 \in B$. To pokazuje, że B jest domkniętym podzbiorem $X \times \mathbb{R}^\omega$. Zatem, A jest metryzowalne w sposób zupełny. □

5.6.2 Przestrzeń Baire'a i zupełna metryka na zbiorze liczb niewymiernych

Korzystając z Twierdzenia 5.24 możemy skonstruować zupełną metrykę na zbiorze liczb niewymiernych. Alternatywna konstrukcja zupełnej metryki na zbiorze liczb niewymiernych została podana przez R. L. Baire'a.

Definicja 5.39. *Przestrzeń metryczna Baire'a*, zob. [BCPP23, Zad. 1.8], to przestrzeń metryczna $(B(\mathbb{N}), d_B)$, gdzie

$$B(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^\omega, \quad d_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \text{ oraz } \forall_{1\leq k\leq n-1}\ x_k = y_k, \text{ oraz } x_n \neq y_n, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Lemat 5.40. *Przestrzeń Baire'a $(B(\mathbb{N}), d_B)$ jest zupełna.*

Szkic dowodu. To wynika z faktu, że metryka d_B indukuje jest zgodna z topologią produktową na $B(\mathbb{N})$ (proszę to sprawdzić!). □

Twierdzenie 5.41. *Zbiór liczb niewymiernych z topologią indukowaną z prostej rzeczywistej jest homeomorficzny z przestrzenią Baire'a $(B(\mathbb{N}), d_B)$.*

Konstrukcja homeomorfizmu będzie wyglądała podobnie jak konstrukcja odwzorowania w dowodzie Twierdzenia 5.38. Zacznijmy od następującego lematu.

Lemat 5.42. *Ustalmy na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ zupełną i ograniczoną metrykę (może to być metryka skonstruowana w dowodzie Twierdzenia 5.24). Dla każdego $\epsilon > 0$ oraz każdego podzbioru otwartego $U \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ istnieje rodzina $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rozłącznych otwarto-domkniętych podzbiorów $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takich, że:*

- *dla każdego $n \geq 1$, $\operatorname{diam}(V_n) \leq \epsilon$,*

- *mamy*

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_n.$$

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. $\square$

Wniosek 5.43. *Dla każdego $n \geq 2$ definiujemy odwzorowanie*

$$\pi_{[n]} \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^{n-1}, \quad \pi_{[n]}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Dla każdego $n \geq 1$ istnieje rodzina rozłącznych, otwarto-domkniętych podzbiorów $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\mathcal{A}_n = \{A_t \colon t \in \mathbb{N}^m\},$$

takich, że dla każdego $n \geq 2$ oraz każdego $t \in \mathbb{N}^{n-1}$ mamy $\operatorname{diam}(A_t) \leq 2^{n-1}$ *oraz*

$$A_t = \bigcup_{s \in \pi_{[n]}^{-1}(t)} A_s.$$

Szkic dowodu. Aby skonstruować rodzinę $\mathcal{A}_1$ stosujemy poprzedni lemat dla $U = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oraz $\epsilon = 1$. Dalej indukcja, czyli jeśli mamy już konstruowane rodziny $\mathcal{A}_k$, dla $1 \leq k \leq n-1$, to aby skonstruować rodzinę $\mathcal{A}_n$ stosujemy poprzedni lemat do każdego zbioru z $\mathcal{A}_{n-1}$. $\square$

Uwaga 5.44. *Zauważmy, że z powyższego wniosku wynika, że dla każdego $n \geq 1$ mamy*

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}^n} A_t.$$

Szkic dowodu Twierdzenia 5.41. Ustalmy zupełną i ograniczoną metrykę d na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dla każdego $n \geq 1$ oznaczmy przez

$$p_{[n]} \colon \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{N}^n$$

rzutowanie na pierwszych n współrzędnych. Dla każdego $n \geq 1$ definiujemy odwzorowanie ciągłe

$$g_n \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

w taki sposób, żeby dla każdego $t \in \mathbb{N}^n$, $g_n(t) \in A_t$. Definiujemy ciąg odwzorowań $(f_n)_n$, gdzie

$$f_n \colon B(\mathbb{N}) \xrightarrow{p_{[n]}} \mathbb{N}^n \xrightarrow{g_n} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Łatwo sprawdzić, że tak skonstruowany ciąg $(f_n)_n$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $C_b(B(\mathbb{N}), (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, d))$. Korzystając z zupełności przestrzeni $C_b(B(\mathbb{N}), (\mathbb{R}\setminus$

$\mathbb{Q}, d)$) stwierdzamy, że ciąg $(f_n)_n$ ma granicę $f\colon B(\mathbb{N}) \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, która jest ciągłym odwzorowaniem.

Korzystając z zupełności przestrzeni $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, d)$ stwierdzamy, że odwzorowanie f jest suriekcją. Mówiąc dokładniej, jeśli $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to, korzystając z własności rodzin $\mathcal{A}_n$, dla $n \geq 1$ stwierdzamy, że dla każdego $n \geq 1$ istnieje $s_n \in \{0,1\}^n$ taki, że

$$d(x, g_n(t_n)) \leq 2^{-n}.$$

Zatem, biorąc dowolny $\mathbf{x}_n \in B(\mathbb{N})$ taki, że $p_{[n]}(\mathbf{x}_n) = t_n$ otrzymamy ciąg elementów $(\mathbf{x}_n)_n$ z $B(\mathbb{N})$ takich, że

$$f_n(\mathbf{x}_n) \xrightarrow{d} x.$$

Zauważmy, że ciąg $(\mathbf{x}_n)_n$ możemy wybrać w ten sposób, że dla każdego $n > m \geq 1$ mamy

$$p_{[m]}(\mathbf{x}_n) = p_{[m]}(\mathbf{x_m}),$$

co pokazuje, że

$$d_B(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) < \frac{1}{m}.$$

Zatem, ciąg $(\mathbf{x}_n)_n$ jest ciągiem Cauchy'ego w $B(\mathbb{N})$, zatem

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{d_B} x.$$

Wówczas, mamy

$$f_n(\mathbf{x}_n) \xrightarrow{d} f(\mathbf{x}),$$

zatem $f(\mathbf{x}) = x$.

Iniektywność odwzorowanie f wynika łatwo z faktu, że dla każdego $n \geq 1$ oraz dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{N}^n$, jeśli $t_1 \neq t_2$, to $A_{t_1} \cap A_{t_2} = \emptyset$.

Podsumowując, pokazaliśmy, że f jest ciągłą bijekcją. Aby uzasadnić, że f jest homeomorfizmem zauważmy, że dla każdego $n \geq 1$ oraz każdego $t \in \{0,1\}^m$ bazowy zbiór otwarty

$$U_t = t \times \prod_{k=m+1}^{\infty} \mathbb{N} \subset B(\mathbb{N})$$

jest przekształcany przez f na zbiór otwarty A_t. Stąd wynika, że dla dowolnego zbiory otwartego $U \subset B(\mathbb{N})$, $f(U) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest otwarty. Zatem, odwzorowanie f jest homeomorfizmem. □

5.7 Dodatek: Krzywa Peana jeszcze raz

W tym rozdziale naszkicujemy konstrukcję krzywej Peana wypełniającej kwadrat, która pochodzi od G. Peana. Jak czytamy w rozdziale 3.1 książki [Sag94], Peano podał konstrukcję krzywej wypełniającej kwadrat przy pomocy konkretnego wzoru wyrażonego w terminach rozwinięć trójkowych punktów z odcinka jednostkowego. Bardziej geometryczną wersję konstrukcji odwzorowania Peano, której szkic przedstawimy, zawdzięczamy D. Hilbertowi.

Zachęcamy czytelnika zainteresowanego tym tematem do sięgnięcia po książkę [Sag94]. W szczególności, konstrukcja krzywej wypełniającej doczekała się wielu różnych wariacji pochodzących np. od Davida Hilberta, lub Wacława Sierpińskiego. Wszystkie te konstrukcje są przedstawione dość szczegółowo w książce Sagana.

Twierdzenie 5.45 (G. Peano)**.** *Istnieje ciągła suriekcja* $G\colon [0,1] \to [0,1]^2$.

Dowód. Konstrukcja odwzorowania G będzie polegała na konstrukcji ciągu odwzorowań

$$g_n\colon [0,1] \to [0,1]^2$$

takich, że

- dla każdego $n \geq 1$ oraz dla dowolnego $x \in [0,1]^2$, mamy

$$d_e(x, g_n([0,1])) \leq \frac{\sqrt{2}}{3^{2n}}. \tag{5.3}$$

- dla każdego $n > m \geq 1$ oraz dowolnego $t \in [0,1]$ mamy

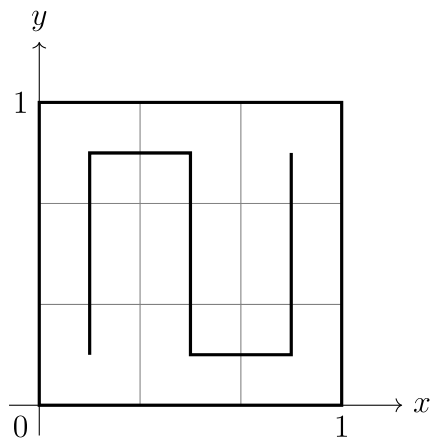
$$d_e(g_n(t), g_m(t)) \leq \frac{\sqrt{2}}{3^{2n}}. \tag{5.4}$$

Drugi warunek implikuje, że ciąg $(g_n)_n$ jest ciągiem Cauchy'ego w zupełnej przestrzeni metrycznej $(C([0,1],[0,1]^2), d_{\text{sup}})$. Jeśli zdefiniujemy

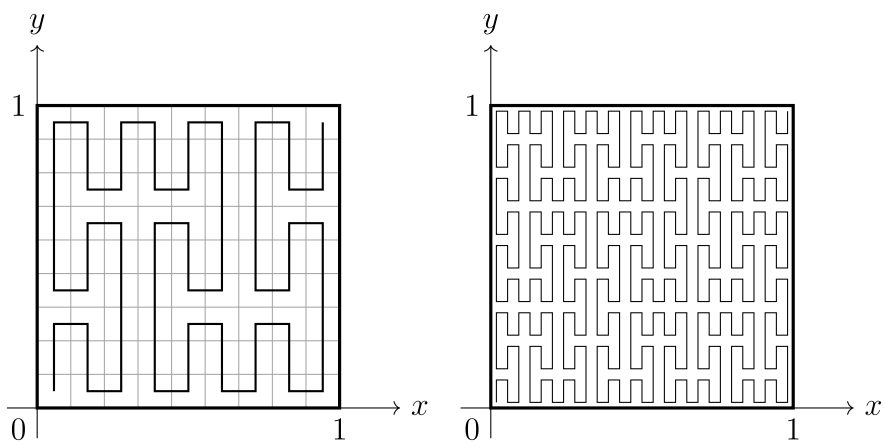
$$g_n \xrightarrow{d_{\text{sup}}} G,$$

wówczas warunek pierwszy implikuje, że $G([0,1])$ jest gęstym podzbiorem kwadratu. Ze zwartości odcinka jednostkowego wynika, że $G([0,1])$ jest domknięty w kwadracie. Zatem, $G([0,1]) = [0,1]^2$.

Dla $n = 1$, dzielimy kwadrat jednostkowy na dziewięć przystających kwadratów $Q_1, Q_2, \ldots, Q_9$ o boku długości $1/3$, zob. Rysunek 3. Dzielimy odcinek na 9 równych odcinków $J_1, J_2, \ldots, J_9$ i konstruujemy odwzorowanie g_1, które



Rysunek 3: Na obrazku przedstawiona jest łamana, która jest obrazem odwzorowania g_1. Przedstawiona łamana jest pierwszym etapem konstrukcji krzywej Peana.



Rysunek 4: Drugi (po lewej) i trzeci (po prawej) krok konstrukcji krzywej Peana.

każdy z odcinków J_i odwzorowuje w odpowiedni kwadrat Q_l, dla pewnego $1 \leq l \leq 9$, tak jak pokazano na Rysunku 3

W kolejnym kroku każdy z 9 kwadratów $Q_1, \dots, Q_9$ dzielimy na 9 przystających kwadratów oraz każdy z odcinków $J_1, \dots, J_9$ dzielimy na 9 równych odcinków. Każdy nowy odcinek jest odwzorowywany w jeden z nowych kwadratów w taki sposób, że jego obraz wygląda jak przedstawiono na Rysunku 3.

W n-tym kroku, kwadrat jednostkowy jest podzielony na 3^{2n} przystających kwadratów o boku długości $\frac{1}{3^n}$ oraz odcinek jednostkowy jest podzielony na 3^{2n} odcinków każdy o długości $\frac{1}{3^{2n}}$. Obraz każdego z 3^{2n} odcinków zawarty jest w jednym z 3^{2n} kwadratów i wygląda tak jak odpowiednio zmniejszony obraz odcinka jednostkowego przez odwzorowanie g_1 (lub jego lustrzane odbicie), zob. Rysunek 3. Na Rysunku 4 pokazane są obrazy odwzorowań g_2 i g_3.

Z powyższego opisu konstrukcji łatwo można wywnioskować, że spełnione są warunki (5.3) i (5.4). $\square$

6 Spójność

6.1 Spójność i łukowa spójność – podstawowe definicje i fakty

Definicja 6.1. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną.

- Mówimy, że (X, τ) jest *niespójna* wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona homeomorficzna z przestrzenią postaci $A \sqcup B$, gdzie $A, B \neq \emptyset$.
- Mówimy, że (X, τ) jest *spójna*, jeśli nie jest niespójna.
- Podzbiór $S \subset X$ jest *(nie)spójny*, jeśli podprzestrzeń $(S, \tau_X|_S)$ przestrzeni (X, τ) jest (nie)spójna.

Definicja 6.2. Podzbiór otwarty i spójny przestrzeni topologicznej (X, τ) nazywamy *obszarem*.

Stwierdzenie 6.3. *Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Następujące warunki są równoważne.*

1. *Przestrzeń (X, τ) jest spójna.*
2. *Jeśli A, B są otwartymi (domkniętymi) podzbiorami X takimi, że*
$$A \cup B = X \text{ oraz } A \cap B = \emptyset,$$
to $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$.
3. *Jedynymi otwarto-domkniętymi podzbiorami X są zbiór pusty i cała przestrzeń.*
4. *Każde odwzorowanie ciągłe $f\colon (X, \tau) \to (\{0, 1\}, \tau_d)$ jest stałe.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) Jeśli istnieją niepuste otwarte (domknięte) podzbiory $A, B \subset X$, takie, że $A \cup B = X$ oraz $A \cap B \neq \emptyset$, wówczas inkluzje $\iota_A\colon A \hookrightarrow X$ oraz $\iota_B\colon B \hookrightarrow X$ zadają homeomorfizm

$$\nabla(\{\iota_A, \iota_B\})\colon A \sqcup B \xrightarrow{\cong} X,$$

a to jest sprzeczne z tym, że X jest spójna.

(2) $\Rightarrow$ (3) Jeśli $V \subset X$ jest właściwym, niepustym i otwarto-domkniętym podzbiorem, wówczas $X \setminus V$ jest również niepustym otwarto-domkniętym podzbiorem. Zatem $X = V \cup (X \setminus V)$ oraz

$$X \cap (X \setminus V) = \emptyset,$$

zatem, na mocy założenia, albo $V = \emptyset$, albo $V = X$ – oba przypadki prowadzą do sprzeczności, ponieważ V jest właściwym i niepustym podzbiorem.

(3) $\Rightarrow$ (4) Jeśli $f\colon (X, \tau) \to (\{0,1\}, \tau_d)$ jest ciągła, to $f^{-1}(\{0\})$ oraz $f^{-1}(\{1\})$ są otwarto-domkniętymi podzbiorami (X, τ).

(4) $\Rightarrow$ (1) Jeśli (X, τ) jest niespójna, to niech $A, B \subset X$ będą niepustymi i właściwymi podzbiorami takimi, że $X \cong A \sqcup B$. Odwzorowanie

$$f\colon (X, \tau) \to (\{0,1\}, \tau_d), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

jest ciągłą suriekcją, co jest sprzeczne z naszym założeniem. □

Stwierdzenie 6.4. *Niech S będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej (X, τ). Wówczas S jest niespójny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją podzbiory $A, B \subset X$ takie, że:*

1. $S \subset A \cup B$,
2. $\mathrm{cl}_X(A) \cap B = A \cap \mathrm{cl}_X(B) = \emptyset$,
3. $S \cap A \neq \emptyset$ *oraz* $S \cap B \neq \emptyset$.

Dowód. Zauważmy, że

$$\mathrm{cl}_S(S \cap A) \cap (B \cap S) = (\mathrm{cl}_X(A) \cap S) \cap (B \cap S) = \emptyset.$$

Zatem,

$$\mathrm{cl}_S(S \cap A) \subset S \cap A,$$

czyli $S \cap A$ jest domkniętym podzbiorem w S. Podobnie, $B \cap S$ jest domkniętym podzbiorem S. Zatem, przestrzeń topologiczna $(S, \tau|_S)$ nie jest spójna, na mocy Stwierdzenia 6.3. □

Stwierdzenie 6.5. *Jeśli w przestrzeni topologicznej (X, τ) zachodzi*

$$S \subseteq T \subseteq \mathrm{cl}_X S$$

i zbiór S jest spójny, to zbiór T też jest spójny. W szczególności, domknięcie zbioru spójnego jest spójne.

Dowód. Niech $f\colon (T, \tau_T) \to (\{0,1\}, \tau_d)$ będzie ciągła. Na mocy założenia $f|_S$ jest stała. Bez straty ogólności możemy założyć, że $f(S) = \{0\}$. Zauważmy, że $f^{-1}(\{0\})$ jest domkniętym podzbiorem T. Zatem

$$T = \mathrm{cl}_X(S) \cap T = \mathrm{cl}_T(S) \subset f^{-1}(\{0\}).$$

To pokazuje, że f musi być stała. W konsekwencji, zbiór T musi być spójny. □

Definicja 6.6. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. *Łańcuchem łączącym punkty* $a, b \in X$ nazywamy skończony ciąg zbiorów otwartych

$$U_1, U_2, \ldots, U_n$$

takich, że $a \in U_1$, $b \in U_n$ oraz $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|i-j| \leq 1$.

Stwierdzenie 6.7. *Jeśli (X, τ) jest spójna oraz $\mathcal{U} = \{U_t\}_{t \in T}$ jest pokryciem otwartym przestrzeni X, wówczas każde dwa punkty z przestrzeni X można połączyć łańcuchem wybranym z $\mathcal{U}$.*

Dowód. □

Wniosek 6.8. *Jeśli (X, d) jest spójną przestrzenią metryczną, wówczas dla dowolnego $\epsilon > 0$ i każdej pary punktów $a, b \in X$ istnieje skończony ciąg punktów $x_0, x_2, \ldots, x_n \in X$ takich, że $x_0 = a$, $x_n = b$ oraz $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$, dla $i = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Dowód. Wystarczy zastosować Stwierdzenie 6.7 do pokrycia złożonego z kul o promieniu $\epsilon/2$. □

Przykład 6.9. Warto zauważyć, że warunek z powyższego wniosku nie gwarantuje spójności przestrzeni metrycznej. Dla podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej

$$X = \{(x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \exp(-x)) \colon x \in \mathbb{R}\}$$

warunek z Wniosku 6.8 jest spełniony dla każdego ϵ pomimo tego, że przestrzeń nie jest spójna.

Twierdzenie 6.10. *Podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy A jest przedziałem.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że zbiór A nie jest przedziałem. Wówczas istnieją $x < y < z$ takie, że $x, z \in A$ oraz $y \notin A$. Niech

$$A_0 = A \cap (-\infty, y), \quad A_1 = A \cap (y, \infty).$$

Zbiory A_0 i A_1 są rozłączne, otwarte w A oraz $A = A_0 \cup A_1$. To pokazuje, że zbiór A nie jest spójny.

($\Leftarrow$) Jeśli A jest niepustym przedziałem, wówczas A można przedstawić jako wstępującą sumę niepustych przedziałów domkniętych. Zatem, na mocy Wniosku 6.15, wystarczy pokazać, że niepuste przedziały domknięte są spójne. Dowolny niepusty przedział domknięty jest albo singletonem (który jest spójny) lub jest postaci $[a, b]$, gdzie $a < b$. Każdy przedział $[a, b]$, dla

$a < b$, jest homeomorficzny z przedziałem $[0,1]$. Zatem, wystarczy pokazać, że przedział $[0,1]$ jest spójny.

Załóżmy, że $f\colon [0,1] \to \{0,1\}$ jest ciągłą suriekcją. Bez straty ogólności możemy założyć, że $f(0) = 0$. Niech $t_1 = \sup\{t\colon f(t) = 1\}$. Z faktu, że f nie jest stała wynika, że $t_1 > 0$. Dodatkowo, mamy $f(t_1) = 1$ oraz $f(t) = 0$, dla każdego $t < t_1$. To pokazuje, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie t_1, co prowadzi do sprzeczności. Zatem przedział A jest spójny. □

Definicja 6.11. *Droga* w przestrzeni topologicznej X łącząca punkty $a, b \in X$, to przekształcenie ciągłe $f : [0,1] \to X$ takie, że $f(0) = a$ i $f(1) = b$.

Definicja 6.12. Przestrzeń topologiczna X jest *łukowo spójna*, jeśli każdą parę punktów z X można połączyć drogą w X.

Uwaga 6.13. *Kiedyś rozróżniano następujące dwa pojęcia:*

- drogowa spójność*: dowolne dwa punkty przestrzeni X można połączyć drogą,*
- łukowa spójność*: dowolne dwa punkty przestrzeni X można połączyć* łukiem, *tj. dla dowolnych $a, b \in X$ istnieje zanurzenie homeomorficzne $\alpha\colon [0,1] \to X$ takie, że $\alpha(0) = a$ oraz $\alpha(1) = b$.*

Okazuje się, że oba pojęcia są równoważne w przypadku przestrzeni Hausdorffa, zob. Dodatek 6.6.1

. Przyjęło się używać terminu łukowej spójności dla przestrzeni, które są drogowe spójne.

Stwierdzenie 6.14. *Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną zbiorów (łukowo) spójnych w przestrzeni topologicznej (X, τ). Jeśli istnieje zbiór $S_0 \in \mathcal{S}$, który ma niepuste przecięcie z dowolnym $S \in \mathcal{S}$, to suma $\bigcup \mathcal{S}$ jest (łukowo) spójna.*

Dowód. Oznaczmy $T = \bigcup \mathcal{S}$.

Załóżmy, że wszystkie zbiory z rodziny $\mathcal{S}$ są spójne. Niech $f\colon T \to \{0,1\}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Na mocy założenia dla każdego $S \in \mathcal{S}$, odwzorowanie $f|_S$ jest stałe. Skoro dla każdego $S \in \mathcal{S}$ zachodzi $S \cap S_0 \neq \emptyset$, zatem $f|_S = f|_{S_0}$, co pokazuje, że f musi być stała.

Załóżmy teraz, że wszystkie zbiory z rodziny $\mathcal{S}$ są łukowo spójne. Wybierzmy $x, y \in T$. Istnieją $S_x, S_y \in \mathcal{S}$ takie, że $x \in S_x$ oraz $y \in S_y$. Aby połączyć drogą punkty x i y postępujemy następująco: łączymy najpierw drogą w S_x punkt x z punktem $x_1 \in S_x \cap S_0$. Dalej łączymy punkt x_1 w S_0 drogą z punktem $y_1 \in S_y \cap S_0$. W ostatnim kroku łączymy punkt y_1 w S_y drogą z punktem y. □

Wniosek 6.15. *Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną zbiorów (łukowo) spójnych w przestrzeni topologicznej (X, τ). Jeśli przecięcie $\bigcap \mathcal{S}$ jest niepuste, to suma $\bigcup \mathcal{S}$ jest (łukowo) spójna.*

Dowód. Bezpośredni wniosek ze Stwierdzenia 6.14. □

Wniosek 6.16. *Jeśli w przestrzeni topologicznej (X, τ), dla każdej pary punktów $x, y \in X$, istnieje (łukowo) spójny zbiór S zawierający x i y, to X jest (łukowo) spójna.*

Dowód. Ustalmy punkt $x_0 \in X$. Dla każdego $x \in X \setminus \{x_0\}$ ustalmy (łukowo) spójny zbiór U_x zawierający x_0 oraz x. Rodzina $\mathcal{U} = \{U_x \colon x \in X \setminus \{x_0\}\}$ spełnia założenia Wniosku 6.15. Zatem przestrzeń (X, τ) jest (łukowo) spójna. □

Wniosek 6.17. *Zbiory wypukłe w $\mathbb{R}^n$ są (łukowo) spójne.*

Dowód. Bezpośredni wniosek z Twierdzenia 6.10 oraz Wniosku 6.16. □

Stwierdzenie 6.18. *Ciągły obraz przestrzeni (łukowo) spójnej jest (łukowo) spójny.*

Dowód. Niech $f \colon X \to Y$ będzie ciągłą suriekcją. Jeśli $g \colon Y \to \{0, 1\}$ jest ciągłą suriekcją, wówczas $g \circ f$ jest również ciągłą suriekcją. Zatem, jeśli X jest spójna, to Y też.

Załóżmy teraz, że X jest łukowo spójna. Niech $a, b \in Y$. Istnieją $x, y \in X$ takie, że $f(x) = a$ oraz $f(y) = b$. Jeśli $\alpha \colon [0, 1] \to X$ jest drogą łączącą punkty a i b, to $f \circ \alpha$ jest drogą w Y łączącą punkty a i b. To pokazuje, że przestrzeń Y jest łukowo spójna. □

Wniosek 6.19 (Uogólniona własność Darboux)**.** *Jeśli (X, τ) jest spójna oraz $f \colon (X, \tau) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $f(X)$ jest przedziałem.*

Wniosek 6.20. *Każda łukowo spójna przestrzeń topologiczna jest spójna.*

Dowód. Załóżmy, że $f \colon X \to \{0, 1\}$ jest ciągłą suriekcją. Wybierzmy $x_i \in f^{-1}(\{i\})$, dla $i = 0, 1$. Skoro X jest łukowo spójna, to istnieje droga α łącząca punkty x_0 i x_1. Wówczas złożenie $f \circ \alpha \colon [0, 1] \to \{0, 1\}$ jest ciągła suriekcją, co jest niemożliwe ze względu na fakt, że przedział $[0, 1]$ jest spójny, na mocy Twierdzenia 6.10. □

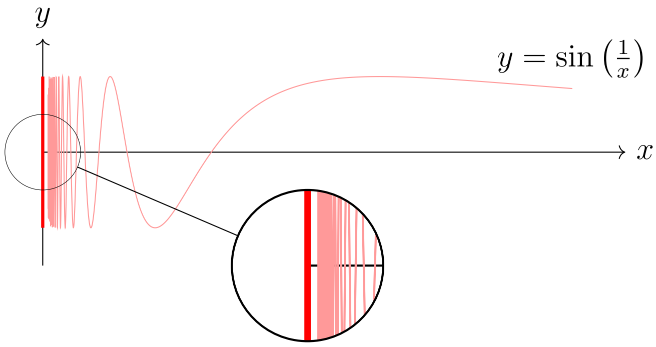
Przykład 6.21 (Sinusoida warszawska)*.* Rozważmy spójny podzbiór płaszczyzny

$$S = \{(x, \sin(1/x)) \colon 0 < x \leq 1/\pi\}.$$

Mamy

$$\overline{S} = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(S) = S \cup [\{0\} \times [-1, 1]] .$$

Zob. Rysunek 5.



Rysunek 5: Sinusoida warszawska

Stwierdzenie 6.22. *Zbiór $\overline{S}$ jest spójny, ale nie jest łukowo spójny.*

Dowód. Spójność zbioru $\overline{S}$ wynika ze Stwierdzenia 6.5.

Załóżmy teraz, że $\alpha\colon [0,1] \to \overline{S}$ jest drogą łączącą punktu $p = (1/\pi, 0)$ oraz $q = (0,0)$. Z Twierdzenia 3.11 wynika, że α jest jednostajnie ciągła, zatem istnieje ciąg

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

taki, że dla każdego $1 \le i \le n$, mamy

$$\operatorname{diam} \alpha([t_{i-1}, t_i]) \le \frac{1}{2}. \tag{6.1}$$

Skoro α jest drogą łącząca punkty p i q, to istnieje $0 < i_0 \le n$ takie, że $f(t_{i_0}) \in S$ oraz $f(t_{i_0-1}) \in \overline{S} \setminus S$. Rzut zbioru $f([t_{i_0-1}, t_{i_0}])$ na oś OX jest przedziałem postaci $J = [0, \delta)$, dla pewnego $\delta > 0$. Stąd wynika, że zbiór $f([t_{i_0-1}, t_{i_0}])$ zawiera punkt postaci $(a, 1)$ oraz punkt postaci $(b, -1)$. Stąd wynika, że $\operatorname{diam} f([t_{i_0-1}, t_{i_0}]) \ge 1$, co jest sprzeczne z (6.1). To pokazuje, że nie istnieje droga łącząca punkty p i q. Zatem, zbiór $\overline{S}$ nie jest łukowo spójny. $\square$

Twierdzenie 6.23. *Iloczyn kartezjański $\prod_{t\in T} X_t$, gdzie $X_t \neq \emptyset$, dla $t \in T$, jest (łukowo) spójny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są (łukowo) spójne.*

Dowód. ($\Leftarrow$) Jeśli iloczyn kartezjański jest (łukowo) spójny, to wszystkie czynniki też, na mocy Stwierdzenia 6.18, ponieważ każdy czynnik jest obrazem produktu przez odpowiednie rzutowanie.

($\Rightarrow$) Zaczniemy od wykazania, że produkt łukowo spójnych przestrzeni jest łukowo spójny. Rozważmy dwa punkty $\mathbf{x} = (x_t)$ oraz $\mathbf{y} = (y_t)$ z $\prod_{t\in T} X_t$. Dla każdego $t \in T$, niech

$$\alpha_t\colon [0,1] \to X_t$$

będzie drogą taką, że $\alpha_t(0) = x_t$ oraz $\alpha_t(1) = y_t$. Wówczas, biorąc przekątną rodziny odwzorowań $\{\alpha_t\}_{t\in T}$

$$A = \Delta(\{\alpha_t\}_{t\in T})\colon [0,1] \to \prod_{t\in T} X_t$$

otrzymujemy drogę łączącą punkty $\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{y}$.

Zajmijmy się teraz spójnością produktu. Zaczniemy od wykazania, że produkt dwóch spójnych przestrzeni (X, τ_X) oraz (Y, τ_Y) jest spójny. Skorzystamy z Wniosku 6.16. Niech $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Rozważmy zbiór

$$A = (X \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times Y).$$

Skoro $(X \times \{y_1\}) \cap (\{x_2\} \times Y) \neq \emptyset$, to, korzystając z Wniosku 6.15, stwierdzamy, że zbiór A jest spójny. Zatem, skoro $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$, to z dowolności wyboru punktów z $X \times Y$ stwierdzamy, że produkt $X \times Y$ jest spójny.

Wykorzystując zasadę indukcji, możemy łatwo pokazać, że skończone produkty przestrzeni spójnych są spójne.

Rozważmy teraz ogólny przypadek produktu $\prod_{t\in T} X_t$, gdzie zbiór T jest nieskończony. Ustalmy $\mathbf{x} = (x_t) \in \prod_{t\in T} X_t$. Rozważmy zbiór

$$\mathcal{D} = \left\{ (y_t) \in \prod_{t\in T} X_t \colon y_t = x_t, \text{ dla prawie wszystkich } t \in T \right\}.$$

Podobnie, jeśli $S \subset T$ jest skończony, to definiujemy

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ (y_t) \in \prod_{t\in T} X_t \colon \forall_{t\in T\setminus S}\ y_t = x_t \right\}.$$

Zauważmy, że

$$\mathcal{D}(S) \cong \prod_{t\in S} X_t,$$

zatem, na mocy faktu, że S jest skończony, stwierdzamy, że $\mathcal{D}(S)$ jest spójnym podzbiorem $\prod_{t\in T} X_t$. Dodatkowo, mamy

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\substack{S\subset T\\ |S|<\infty}} \mathcal{D}(S)$$

oraz

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{\substack{S\subset T\\ |S|<\infty}} \mathcal{D}(S),$$

co, na mocy Wniosku 6.15, implikuje, że $\mathcal{D}$ jest spójny.

Na koniec zauważmy, że zbiór $\mathcal{D}$ jest gęstym podzbiorem produktu. Niech $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ oraz rozważymy zbiór bazowy

$$U = p_{t_1}^{-1}(U_{t_1}) \cap p_{t_2}^{-1}(U_{t_2}) \cap \ldots \cap p_{t_n}^{-1}(U_{t_n}),$$

gdzie $U_{t_i} \subset X_{t_i}$ jest otwarty i niepusty. Wówczas, dla dowolnego skończonego podzbioru $S \subset T$ mamy

$$U \cap \mathcal{D}(S) = \prod_{t \in T} A_t, \quad A_t = \begin{cases} U_t, & t \in S, \\ \{x_t\}, & t \notin S. \end{cases}$$

Zatem, korzystając ze Stwierdzenia 6.5, wnioskujemy że skoro

$$\prod_{t \in T} X_t = \mathrm{cl}(\mathcal{D}),$$

to produkt jest spójny. □

6.2 Składowe (łukowo) spójne

Definicja 6.24. *Składowa (łukowo) spójna* przestrzeni topologicznej (X, τ) to maksymalny ze względu na inkluzję (łukowo) spójny podzbiór X.

Lemat 6.25. *Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną.*

1. *Jeśli C_1 i C_2 są składowymi (łukowo) spójnymi przestrzeni (X, τ) takimi, że $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, to $C_1 = C_2$.*
2. *Przestrzeń (X, τ) jest sumą swoich składowych (łukowo) spójnych.*
3. *Każda składowa spójna jest zbiorem domkniętym.*

Dowód. Jeśli C_1 i C_2 są składowymi (łukowo) spójnymi takimi, że $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, wówczas, korzystając z Wniosku 6.15, stwierdzamy, że zbiór $C_1 \cup C_2$ jest spójny. Zatem, maksymalności C_1 i C_2 wynika, że

$$C_1 = C_1 \cup C_2 = C_2.$$

Aby pokazać, że przestrzeń X jest sumą swoich składowych (łukowo) spójnych, wystarczy pokazać, że każdy punkt należy do pewnej składowej spójnej. Niech $x \in X$ oraz niech $\mathcal{S}_x$ będzie rodziną wszystkich spójnych podzbiorów przestrzeni X, które zawierają punkt x oraz niech

$$C_x = \bigcup \mathcal{S}_x.$$

Wówczas, na mocy Stwierdzenia 6.14, zbiór C_x jest spójny. Dodatkowo, na mocy definicji C_x, w X nie istnieje podzbiór spójny, który zawierałby w sposób właściwy C_x. Zatem C_x jest składową spójną punktu x.

Jeśli C jest składową spójną X, wówczas, na mocy Stwierdzenia 6.5, $\mathrm{cl}_X(C)$ jest również spójny. Zatem, z maksymalności C stwierdzamy, że $C = \mathrm{cl}_X(C)$, czyli C jest domknięty. □

Przykład 6.26. Składowe spójne nie muszą być otwarte: składowe spójne przestrzeni $\mathbb{Q}$ są singletonami.

Przykład 6.27. Rozważmy sinusoidę warszawską $\overline{S}$ z Przykładu 6.21.

- Zbiór $\overline{S}$ ma dwie składowe łukowo spójne $A = S$ oraz $B = \overline{S} \setminus S$.
- Składowa A jest otwartym podzbiorem, a B jest domkniętym podzbiorem.
- Składowe łukowo spójne nie muszą być ani otwarte ani domknięte.

6.3 Lokalna (łukowa) spójność

Definicja 6.28. Niech $x \in (X, \tau)$.

- Przestrzeń (X, τ) jest lokalnie (łukowo) spójna w punkcie x jeśli punkt x posiada bazę otoczeń złożoną z otwartych i (łukowo) spójnych otoczeń.
- Przestrzeń (X, τ) jest lokalnie (łukowo) spójna, jeśli jest lokalnie (łukowo) spójna w każdym punkcie.

Przykład 6.29. Niech $\overline{S}$ będzie sinusoidą warszawską z Przykładu 6.21. Jeśli $x \in \overline{S} \setminus S$, to przestrzeń $\overline{S}$ nie jest lokalnie (łukowo) spójna w x.

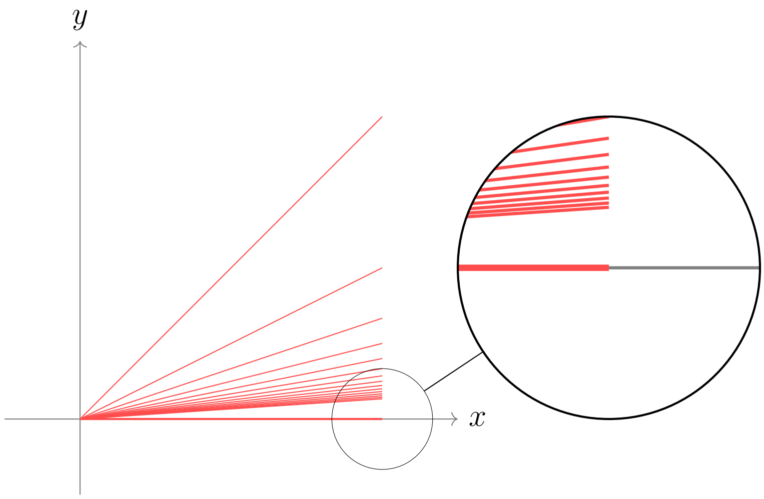
Przykład 6.30 (Nieskończona miotełka). Dla $p \in \mathbb{R}^2$ oznaczamy przez $I(p)$ odcinek domknięty łączący punkt p z punktem $\mathbf{0} = (0, 0)$. Rozważmy zbiór

$$F = I((1, 0)) \cup \bigcup_{n \geq 1} I(1, 1/n),$$

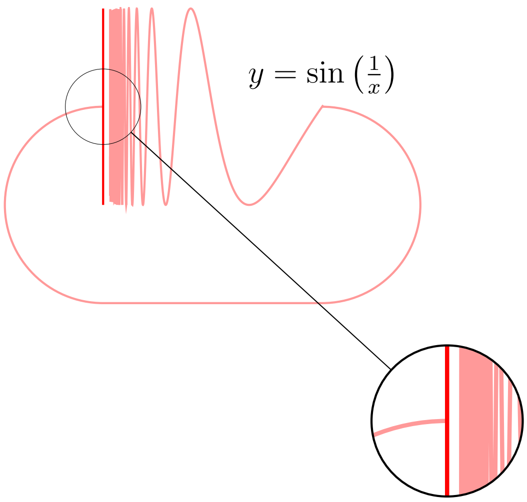
zob. Rysunek 6.

Zbiór F jest łukowo spójny (każdy punkt z F można połączyć drogą z punktem $(0, 0)$), ale nie jest lokalnie spójny w punktach $(t, 0)$, dla $0 < t \leq 1$.

Uwaga 6.31. *Czasami w definicji lokalnej spójności w punkcie nie wymaga się, aby otoczenia były otwarte, zob. [Eng89, Problem 6.3.3]. Punktowo to rozróżnienie robi różnicę, ale z globalnego punktu widzenia to rozróżnienie jest nieistotne, zob. Sekcja 6.5.*



Rysunek 6: Nieskończona miotełka – łukowo spójna przestrzeń, która nie jest lokalnie spójna.



Rysunek 7: Okrąg warszawski – łukowo spójna przestrzeń, które nie jest lokalnie spójna.

Stwierdzenie 6.32. *Przestrzeń topologiczna X jest lokalnie (łukowo) spójna wtedy i tylko wtedy, gdy składowe (łukowej) spójności dowolnego podzbioru otwartego są otwarte.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że (X, τ) jest lokalnie (łukowo) spójna oraz $U \subset X$ otwarty. Niech U_1 będzie składową spójną U oraz niech $x \in U_1$ będzie dowolny. Skoro punkt x ma bazę otoczeń złożoną z otwartych i (łukowo) spójnych zbiorów, to istnieje (łukowo) spójne otoczenie V punktu x, które zawiera się w U. Skoro V jest spójne, to

$$x \in V \subset U_1,$$

co pokazuje, że $x \in \mathrm{int}(U_1)$. Skoro x były dowolnym punktem z U_1, to $U_1 \subset \mathrm{int}(U_1)$, czyli U_1 jest zbiorem otwartym.

($\Leftarrow$) Załóżmy teraz, że składowe (łukowo) spójne dowolnego podzbioru otwartego X są otwarte. Niech U będzie otwartym podzbiorem X oraz niech $x \in U$. Pokażemy, że punkt x posiada (łukowo) spójne otoczenie zawarte w U. Wystarczy wziąć składową V (łukowo) spójną zbioru U zawierającą punkt x. Zbiór V jest szukanym otoczeniem. $\square$

Wniosek 6.33. *Jeśli przestrzeń (X, τ) jest lokalnie spójna, to jej składowe spójne są otwarto-domknięte.*

Dowód. Jeśli C_1 jest składową spójną przestrzeni X, to na mocy Lematu 6.25, jest ona domkniętym podzbiorem X. Z drugiej strony, Stwierdzenie 6.32 implikuje, że C_1 jest też otwartym podzbiorem X. $\square$

Wniosek 6.34. *Otwarta podprzestrzeń przestrzeni lokalnie (łukowo) spójnej jest lokalnie (łukowo) spójna.*

Stwierdzenie 6.35. *Iloczyn kartezjański $\prod_{t\in T} X_t$, gdzie $X_t \neq \emptyset$, dla $t \in T$, jest lokalnie (łukowo) spójny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są lokalnie (łukowo) spójne oraz prawie wszystkie czynniki są (łukowo) spójne.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. $\square$

Stwierdzenie 6.36. *Koprodukt $\bigsqcup_{t\in T} X_t$ jest lokalnie (łukowo) spójny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są lokalnie (łukowo) spójne.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. $\square$

Stwierdzenie 6.37. *Każda spójna i lokalnie łukowo spójna przestrzeń topologiczna jest łukowo spójna.*

Dowód. Niech (X, τ) będzie spójna i lokalnie łukowo spójna. Ustalmy $x_0 \in X$ i rozważmy zbiór

$$Y = \{y \in X \colon \exists\, \alpha\colon [0,1] \to X, \quad \alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = y\}.$$

Lokalna łukowa spójność X implikuje, że zbiór Y jest otwarty. Mianowicie, jeśli $y_0 \in Y$ oraz V jest łukowo spójnym otoczeniem y_0, to

$$y \in V \subset Y.$$

Podobnie, jeśli $z \in X \setminus Y$ oraz W jest łukowo spójnym otoczeniem z, to

$$z \in W \subset X \setminus Y.$$

Zatem, zbiór Y jest otwarto-domknięty oraz $x_0 \in Y$. Z faktu, że X jest spójna wynika, że $Y = X$. □

Wniosek 6.38. *Jeśli przestrzeń topologiczna jest lokalnie łukowo spójna, to składowe łukowej spójności pokrywają się ze składowymi spójnymi.*

Niech (X, τ) będzie lokalnie łukowo spójna oraz niech $C \subset X$ będzie składową spójną. Jeśli $x_0 \in C$ oraz V jest łukowo spójnym otoczeniem x_0, wówczas V jest spójny, zatem $V \subset C$. To pokazuje, że C jest lokalnie łukowo spójna, zatem, na mocy Stwierdzenia 6.37, C jest łukowo spójna.

Wniosek 6.39. *Obszar w lokalnie łukowo spójnej przestrzeni topologicznej jest łukowo spójny.*

Wniosek 6.40. *Każdy obszar w dowolnej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest łukowo spójny.*

6.4 Dodatek: Topologiczna charakteryzacja zbioru Cantora

Definicja 6.41. Mówimy, że przestrzeń topologiczna (X, τ) jest *całkowicie niespójna* jeśli każda składowa spójna przestrzeni X składa się tylko z jednego punktu. Równoważnie, (X, τ) jest całkowicie niespójna, jeśli maksymalnymi spójnymi podzbiorami X są singletony.

Uwaga 6.42. *W niektórych źródłach, np. [Eng89], przestrzenie całkowicie niespójne nazywane są* dziedzicznie niespójnymi.

Przykład 6.43.

- Przestrzenie dyskretne są całkowicie niespójne.

- Zbiór liczb wymiernych oraz zbiór liczb niewymiernych jest całkowicie niespójny.
- Każda zerowymiarowa T_1-przestrzeń jest całkowicie niespójna.
- W szczególności, zbiór Cantora, zob. Sekcja 3.4, jest całkowicie niespójny.
- Podobnie strzałka, zob. Przykład 1.56, jest całkowicie niespójna.

Stwierdzenie 6.44. 1. *Produkt niepustych i całkowicie niespójnych przestrzeni jest całkowicie niespójny.*

2. *Niepusta podprzestrzeń całkowicie niespójnej przestrzeni jest całkowicie niespójna.*

Definicja 6.45 (Miotełka Knastera-Kuratowskiego)*.* Niech $\mathfrak{C}$ będzie zbiorem Cantora.

- Niech $\mathfrak{C} = P \cup Q$, gdzie Q to zbiór końców przedziałów wyrzucanych w konstrukcji zbioru Cantora, i $P = C \setminus Q$.
- Dla $x \in P$ definiujemy
$$I(x) = \{((1-t)x + 1/2 \cdot t, t) \colon t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}.$$
- Dla $x \in Q$ definiujemy
$$J(x) = \{((1-t)x + 1/2 \cdot t, t) \colon t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\}.$$
- *Miotełka Knastera-Kuratowskiego* to zbiór
$$M = \left(\bigcup_{x \in P} I(x)\right) \cup \left(\bigcup_{x \in Q} J(x)\right)$$

Stwierdzenie 6.46. *Niech M będzie miotełką Knastera-Kuratowskiego z poprzedniego przykładu oraz niech $x = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \in M$.*

1. *Przestrzeń M jest spójna.*
2. *Przestrzeń $M \setminus \{x\}$ jest całkowicie niespójna.*
3. *Przestrzeń $M \setminus \{x\}$ nie jest zerowymiarowa.*

Szkic dowodu. Dowód spójności M przedstawiony jest w [SS78, Rozdział 129].

Całkowita niespójność przestrzeni $M \setminus \{x\}$ łatwo wynika z samej konstrukcji.

Aby przekonać się, że $K = M \setminus \{x\}$ nie jest zerowymiarowa, zauważmy, że zbiór

$$U = K \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < 1/4\} = M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < 1/4\}$$

nie może zawierać otwarto-domkniętego podzbioru. Gdyby U maił otwarto-domknięty podzbiór, to otrzymalibyśmy rozkład przestrzeni M, który przeczyłby spójności M. □

Definicja 6.47. Przestrzeń topologiczna (X, τ) jest doskonała jeśli każdy jej punkt jest jej punktem skupienia, tj. (X, τ) nie zawiera punktów izolowanych.

Lemat 6.48. *Przestrzeń (X, τ) jest doskonała wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in X$ mamy*

$$X = \mathrm{cl}_X(X \setminus \{x\}).$$

Twierdzenie 6.49. *Jeśli (X, τ) jest całkowicie niespójna, doskonała, zwarta i metryzowalna, wówczas (X, τ) jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora.*

Szkic dowodu. Powtarzamy ten sam argument, którego używaliśmy w dowodzie Wniosku 5.37 biorąc przestrzeń X zamiast zbioru Cantora i otrzymujemy homeomorfizm

$$\prod_{m=1}^{\infty} J_m \cong X,$$

gdzie, dla każdego $m \geq 1$, każdy zbiór J_m jest skończony i posiada co najmniej dwa elementy. Zatem, na mocy Wniosku 5.37 otrzymujemy homeomorfizm

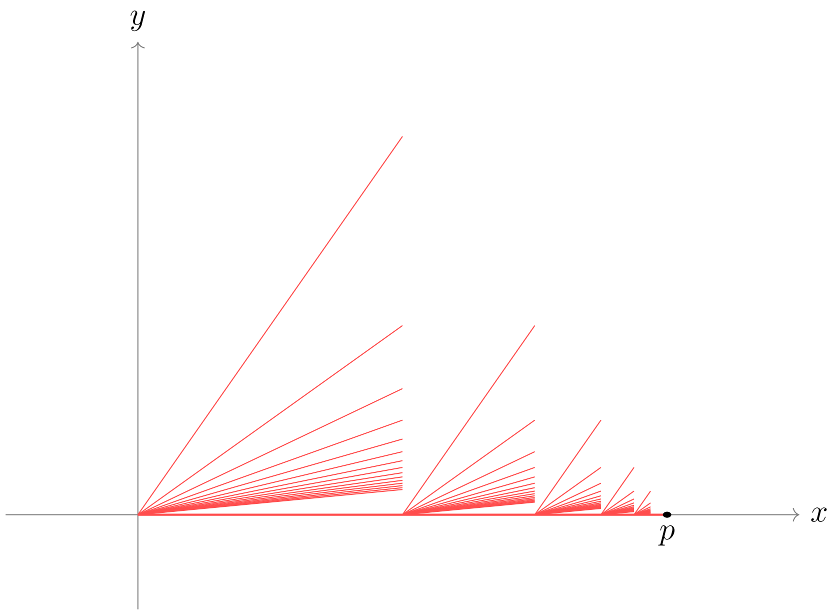
$$\mathfrak{C} \cong \prod_{m=1}^{\infty} J_m \cong X.$$

□

6.5 Dodatek: Słaba lokalna spójność

Definicja 6.50. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną.

1. Mówimy, że X jest *słabo lokalnie spójna* w punkcie $x \in X$ jeśli punkt x posiada bazę otoczeń (niekoniecznie otwartych) założoną ze zbiorów spójnych.



Rysunek 8: Przestrzeń topologiczna na rysunku jest słabo lokalnie spójna w punkcie p, ale nie jest lokalnie spójna w punkcie p.

2. Mówimy, że przestrzeń jest *słabo lokalnie spójna*[26], jeśli jest słabo lokalnie spójna w każdym punkcie.

Przykład 6.51. Przestrzeń topologiczna przedstawiona na Rysunku 8obrazuje różnicę między pojęciami lokalnej spójności i słabej lokalnej spójności w punkcie. Na rysunku zaznaczono punkt p, w którym przestrzeń jest słabo lokalnie spójna, ale nie jest lokalnie spójna.

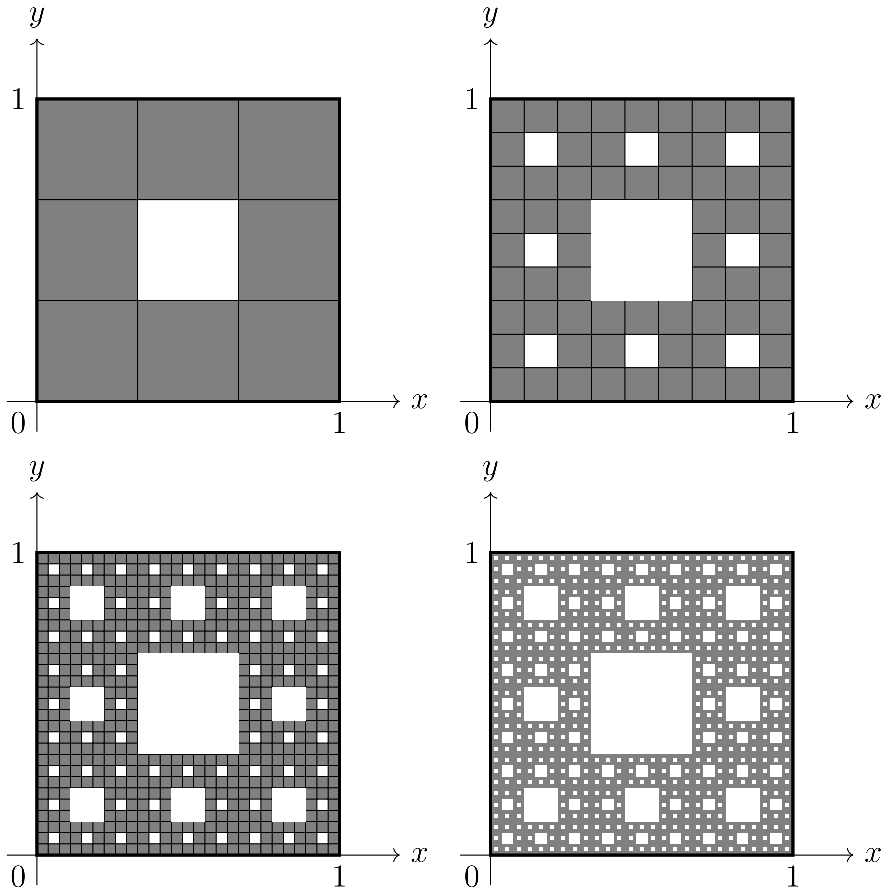
Stwierdzenie 6.52. *Przestrzeń X jest słabo lokalnie spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jest lokalnie spójna.*

Dowód. Załóżmy, że przestrzeń X jest słabo lokalnie spójna. Niech $U \subset X$ będzie otwarty oraz niech V będzie składową spójną zbioru X. Jeśli $x \in V$, to istnieje otoczenie W punktu x, które zawiera się w V. Zatem, $x \in \mathrm{int}_X(V)$. Z dowolności wyboru punktu x wynika, że zbiór V jest otwarty. Zatem, na mocy Stwierdzenia 6.32, przestrzeń X jest lokalnie spójna. □

6.6 Dodatek: Continua

Definicja 6.53. *Continuum* to zwarta i spójna przestrzeń topologiczna.

[26]W angielskojęzycznej literaturze stosuje się dwie wersje tego terminu: *weakly locally connected* lub *connected im kleinen*.



Rysunek 9: Pierwsze czery kroki konstrukcji dywanu Sierpińskiego.

Lemat 6.54. *Załóżmy, że $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\geq 1}$ jest zstępującą rodziną continuów. Jeśli*

$$C_\infty = \bigcap_{n\geq 1} C_n \neq \emptyset,$$

to przestrzeń C_∞ jest również continuum.

Dowód. Zob. dowód Twierdzenia 28.2 w [Wil16]. □

Przykład 6.55 (Dywan Sierpińskiego). Korzystając z Lematu 6.54można skonstruować wiele ciekawych przykładów continuów. My skupimy się na *dywanie Sierpińskiego*, który jest dwuwymiarowym odpowiednikiem zbioru Cantora.

Dywan Sierpińskiego konstruujemy biorąc przecięcie przeliczalnej i zstępującej rodziny continuów zawartych w kwadracie jednostkowym na płaszczyźnie, zob. Rysunek 9. W pierwszym kroku kwadrat jednostkowy dzielimy na dziewięć przystających kwadratów o boku długości $\frac{1}{3}$ i usuwamy wnętrze środkowego kwadratu, zob. lewa górna ramka na Rysunku 9. W drugim kroku każdy z pozostałych kwadratów dzielimy na dziewięć przystających kwadratów i usuwamy wnętrza środkowych kwadratów, zob. prawa górna ramka na Rysunku 9. Opisaną procedurę stosujemy w każdym następnym kroku konstrukcji. Na koniec bierzemy część wspólną tak skonstruowanych podzbiorów kwadratu jednostkowego. Lemat 6.54 gwarantuje, że skonstruowana przestrzeń jest również continuum.

Definicja 6.56. Rozważmy continuum C. Punkt $x \in C$ nazywamy *punktem rozcinającym*, jeśli $C \setminus \{x\}$ nie jest spójne. Podobnie, mówimy, że punkt $x \in C$ jest *punktem nierozcinającym*, jeśli $C \setminus \{x\}$ jest spójna.

Przykład 6.57.
- Jeśli $C = [0, 1]$, wówczas każdy punkt wewnętrzny jest rozcinający, a punkty 0 i 1 są nierozcinające.
- Jeśli $C = S^1$ jest okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie, wówczas każdy punkt jest nierozcinający.

Twierdzenie 6.58. *Jeśli continuum C zawiera więcej niż jeden punkt, wówczas C zawiera co najmniej dwa punkty nierozcinające.*

Twierdzenie 6.59 (Sierpiński, Straszewicz, Moore)**.** *Metryzowalne continuum C, które ma dokładnie dwa punkty nierozcinające jest homeomorficzne z odcinkiem jednostkowym.*

6.6.1 Drogowa spójność a łukowa spójność

W Uwadze 6.13 powiedzieliśmy, że kiedyś rozróżniano pojęcie drogowej spójności i łukowej spójności. Twierdzenie udowodnione niezależnie przez Mazurkiewicza i Moore'a pokazuje, że w przypadku przestrzeni Hausdorffa to rozróżnienie jest nieistotne.

Definicja 6.60. Rozważmy przestrzeń topologiczną (X, τ).

- Podzbiór A przestrzeni X nazywamy *łukiem*, jeśli A jest obrazem zanurzenia homeomorficznego odcinka jednostkowego.
- Mówimy, że łuk A łączy punkty $a, b \in X$ jeśli istnieje zanurzenie homeomorficzne $\alpha \colon [0, 1] \hookrightarrow X$ takie, że $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$ oraz $A = \alpha(I)$.

Twierdzenie 6.61 (Sierpiński)**.** *Zwarta przestrzeń metryczna (X, d) jest lokalnie spójna wtedy i tylko wtedy, gdy, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, X można pokryć skończenie wieloma continuami o średnicach mniejszych niż ε.*

Dowód. Zob. dowód Twierdzenia 8.4 w [Nad92]. □

Wniosek 6.62. *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest ciągłym przekształceniem zwartej, lokalnie spójnej przestrzeni metrycznej X na przestrzeń Hausdorffa Y, to Y jest lokalnie spójna.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że Wniosek 3.24 implikuje, że przestrzeń Y jest zwarta i metryzowalna.

Ustalmy $\epsilon > 0$. Skoro X jest zwarta, to f jest jednostajnie ciągłe. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $x, y \in X$ spełniają $d_X(x, y) < \delta$, to $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$. Korzystając z Twierdzenia 6.61 znajdujemy skończoną rodzinę continuów $\{C_k\}_{1 \leq k \leq m}$ o średnicach $< \delta$, która pokrywa X. Wówczas rodzina $\{f(C_k)\}_{1 \leq k \leq m}$ jest rodziną continuów o średnicach $< \epsilon$, która pokrywa Y. Zatem, no mocy Twierdzenia 6.61, przestrzeń Y jest lokalnie spójna. □

Twierdzenie 6.63 (Mazurkiewicz, Moore)**.** *Niech (X, τ) będzie zwartą, lokalnie spójną i metryzowalną przestrzenią topologiczną. Jeśli $V \subset X$ jest otwarty i spójny oraz $a, b \in V$, wówczas V zawiera łuk łączący punkty a i b.*

Dowód. Zob. dowód Twierdzenia 31.2 w [Wil16]. □

Wniosek 6.64. *Jeśli (X, τ) jest łukowo spójną przestrzenią Hausdorffa, wówczas dla dowolnej pary punktów $a, b \in X$ istnieje łuk łączący te dwa punkty.*

Dowód. Skoro X jest łukowo spójna, to niech $\delta\colon [0, 1] \to X$ będzie drogą łączącą punkty a, b. Wówczas $Y = \delta([0, 1])$ jest zwartą podprzestrzenią X. Zauważmy, że na mocy Wniosku 3.24, przestrzeń Y jest metryzowalna oraz na mocy Wniosku 6.62 jest ona lokalnie spójna. Zatem, możemy zastosować Twierdzenie 6.63 do przestrzeni Y aby otrzymać łuk o żądanych własnościach. □

6.6.2 Twierdzenie Hahna-Mazurkiewicza

Definicja 6.65. *Continuum Peano* to continuum C, które jest lokalnie spójne i metryzowalne.

Stwierdzenie 6.67. *Jeśli C jest dowolnym continuum Peano, wówczas C jest łukowo spójne i lokalnie łukowo spójne.*

Dowód. Bezpośredni wniosek z Twierdzenia 6.63. □

Wniosek 6.68. *Dowolne continuum Peana jest* jednostajnie lokalnie łukowo spójne, *tj. dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $a, b \in X$ spełniają $d(a, b) < \delta$, to istnieje droga α łącząca punkty a, b taka, że* $\operatorname{diam} \alpha(I) < \epsilon$.

Dowód. Ustalmy $\epsilon > 0$. Korzystając z lokalnej spójności znajdujemy pokrycie $\mathcal{U} = \{U_t\}_{t\in T}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi i spójnymi o średnicy $< \epsilon$. Niech $\delta > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a pokrycia $\mathcal{U}$, wówczas dowolne dwa punkty $a, b \in X$ takie, że $d(a, b) < \delta$ należą do pewnego zbioru U_{t_0}. Skoro zbiór U_{t_0} jest spójny i otwarty, to, na mocy Twierdzenia 6.63, istnieje droga α łącząca punkty a, b, która zawiera się całkowicie w U_{t_0}. Skoro $\operatorname{diam} U_{t_0} < \epsilon$, to $\operatorname{diam} \alpha(I) < \epsilon$. □

Twierdzenie 6.69 (Hahn-Mazurkiewicz)**.** *Przestrzeń Hausdorffa* (X, τ) *jest ciągłym obrazem odcinka* $[0, 1]$*, wtedy i tylko wtedy, gdy* X *jest przestrzenią Peana.*

Szkic dowodu. Najpierw zauważmy, że Wniosek 3.24 oraz Wniosek 6.62 implikują, że jeśli przestrzeń Hausdorffa jest ciągłym obrazem odcinka, to jest ona continuum Peana.

Rozważmy continuum Peana X. Niech d będzie ustaloną metryką na X. Rozważmy ciągłą suriekcję $F_0 \colon \mathfrak{C} \to X$, która istnieje na mocy Twierdzenia 5.38.

Niech $\mathcal{I}$ będzie rodziną przedziałów domkniętych, których wnętrza usuwamy z odcinka jednostkowego konstruując zbiór Cantora. Rodzina $\mathcal{I}$ jest uporządkowana następująco:

- jeśli $I_n, I_m \in \mathcal{I}$ spełniają $\operatorname{diam}(I_n) > \operatorname{diam}(I_m)$, to $n > m$, tj. dłuższe przedziały występują wcześniej,
- jeśli $\operatorname{diam}(I_n) = \operatorname{diam}(I_m)$ oraz $n > m$, to dla dowolnego $x \in I_n$ oraz dowolnego $y \in I_m$ zachodzi $x < y$, tj. przedziały tej samej długości porządkujemy od lewej do prawej.

Dla każdego $n \geq 1$ znajdujemy stałą δ_n taką, że jeśli $a, b \in X$ spełniają $d(x, y) < \delta_n$, to punkty a, b można połączyć drogą α taką, że $\operatorname{diam} \alpha(I) \leq \frac{1}{2^n}$. W tym kroku korzystamy z Wniosku 6.68.

Dla każdego $n \geq 1$ znajdujemy stałą $\eta_n > 0$ taką, że dla dowolnych $x, y \in \mathfrak{C}$ spełniających $d_e(x, y) < \eta_n$ implikuje $d(F_0(x), F_0(y)) < \delta_n$. Tutaj korzystamy z jednostajnej ciągłości odwzorowania F_0.

Istnieje tylko skończenie wiele przedziałów $I_k = [p_k, q_k]$ z $\mathcal{I}$, gdzie $1 \leq k \leq m_1$, których długość jest $\geq \eta_1$. Dla każdego takiego przedziału $I_k = [p_k, q_k]$ definiujemy odwzorowanie

$$\alpha_k \colon I_k \to X$$

jako odpowiednio sparametryzowaną drogę łączącą punkty $F(p_k), F(q_k)$. W ten sposób otrzymamy ciągłe odwzorowanie

$$F_1 \colon \mathfrak{C} \cup \bigcup_{k=1}^{m_1} I_k \to X, \quad F_1(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in \mathfrak{C}, \\ \alpha_k(x), & x \in I_k, 1 \leq k \leq m_1. \end{cases}$$

Załóżmy, że dla pewnego $n > 1$ mamy już zdefiniowane odwzorowanie ciągłe

$$F_n\colon \mathfrak{C} \cup \bigcup_{k=1}^{m_n} I_k \to X,$$

gdzie rodzina $\{I_k\}_{1\le k\le m_n} \subset \mathcal{I}$ zawiera wszystkie przedziały długości $\ge \eta_n$. Niech $m_{n+1} > m_n$ będzie takie, że rodzina $\{I_k\}_{m_n<k\le m_{n+1}}$ zawiera wszystkie przedziały z $\mathcal{I}$ o długościach mieszczących się w przedziale $[\eta_{n+1}, \eta_n)$. Dla każdego $m_n < k \le m_{n+1}$ niech

$$\alpha_k\colon I_k \to X$$

będzie odpowiednio sparametryzowaną drogą łączącą punkty $F_0(p_k), F_0(q_k)$, gdzie $I_k = [p_k, q_k]$, taką, że $\operatorname{diam}(\alpha_k(I)) < \frac{1}{2^k}$. Istnienie takiej drogi wynika z Wniosku 6.68. Definiujemy

$$F_{n+1}\colon \mathfrak{C} \cup \bigcup_{k=1}^{m_{n+1}} I_k \to X, \quad F_{n+1}(x) = \begin{cases} F_n(x), & x \in \mathfrak{C} \cup \bigcup_{k=1}^{m_n} I_k, \\ \alpha_k(x), & x \in I_k, m_n < k \le m_{n+1}. \end{cases}$$

Kontynuując tę procedurę otrzymamy ciągłą suriekcję

$$F_\infty\colon I \to X.$$

$\square$

Wniosek 6.70.
- *Dla każdego $n \ge 1$ istnieje ciągła suriekcja $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^n$.*
- *Istnieje ciągłą suriekcja $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^\omega$.*

Poniżej kilka ciekawych problemów do przemyślenia, które są uogólnieniami Twierdzenia Hahna-Mazurkiewicza.

Problem 6.71. Pokaż, że dla każdego $n > 1$ istnieje ciągła suriekcja

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

Problem 6.72. Niech

$$\mathbb{R}^\infty = \{\mathbf{x} = (x_n)_{n\ge1} \in \mathbb{R}^\omega \colon x_n = 0 \text{ dla p.w. } n\}.$$

Czy istnieje ciągła suriekcja

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\infty?$$

Problem 6.73. Czy istnieje ciągła suriekcja

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega?$$

7 Homotopie

7.1 Homotopie i grupa podstawowa

Definicja 7.1. Przekształcenia ciągłe $f, g : X \to Y$ są *homotopijne*, jeśli istnieje przekształcenie ciągłe

$$H : X \times I \to Y,$$

które nazywamy *homotopia* łącząca f z g, takie, że

$$f(x) = H(x, 0) \text{ i } g(x) = H(x, 1), \quad \text{dla } x \in X.$$

Piszemy wówczas $f \sim g$.

Stwierdzenie 7.2. *Relacja homotopii jest relacją równoważności w $C(X, Y)$.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 7.3. Niech $H : X \times I \to Y$ będzie homotopią łączącą $f, g \in C(X, Y)$.

1. dla $t \in T$, definiujemy $H_t \colon X \to Y$ wzorem $H_t(x) = H(x, t)$, dla $x \in X$.
2. dla $x \in X$, definiujemy $h_x \colon I \to Y$, wzorem $h_x(t) = H(x, t)$, dla $t \in I$.
3. dla każdego $x \in X$, h_x jest drogą łączącą $f(x)$ z $g(x)$.

Stwierdzenie 7.4. *Załóżmy, że przestrzeń (X, τ) jest zwarta, oraz dana jest przestrzeń metryczna (Y, d).*

1. *Niech $H : X \times I \to Y$ będzie homotopią łączącą $f, g \in C(X, Y)$. Przyporządkowanie $F \colon t \mapsto H_t$ jest drogą w $(C(X, Y), d_{\sup})$ łączącą f i g.*
2. *Jeśli $\alpha \colon I \to (C(X, Y), d_{\sup})$ jest drogą łączącą f i g, to $H : X \times I \to Y$ zdefiniowane wzorem $H(x, t) = \alpha(t)(x)$, $t \in I, x \in X$ jest homotopią łączącą f z g.*

Dowód. Niech $H \colon X \times I \to Y$ będzie ciągłym homotopią łączącą odwzorowania $f, g \in C(X, Y)$. Rozważmy odwzorowanie

$$F \colon I \to C(X, Y), \quad F(t) = H_t.$$

Ustalmy $\epsilon > 0$ oraz $t_0 \in I$. Rozważmy kulę $B_{d_{\sup}}(f_{t_0}, \epsilon)$ w $C(X, Y)$ oraz jej przeciwobraz

$$U = F^{-1}(B_{d_{\sup}}(f_{t_0}, \epsilon)) = \{t \in I \colon d_{\sup}(f_t, f_{t_0}) < \epsilon\}.$$

Z ciągłości H wynika, że dla każdego $x \in X$ istnieją otoczenie otwarte W_x punktu $x \in X$ oraz $\delta_x > 0$ takie, że $\operatorname{diam} H(V_x) < \epsilon$, gdzie $V_x = W_x \times (t_0 - \delta_x, t_0 + \delta_x)$. Wówczas

$$V = \bigcup_{x \in X} V_x \subset X \times I$$

jest zbiorem otwartym zawierającym $X \times \{t_0\}$. Ze zwartości X wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$X \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset V.$$

Zatem,

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset U,$$

co pokazuje, że odwzorowanie F jest ciągłe w punkcie $t_0 \in I$.

W drugą stronę, załóżmy, że $\alpha \colon I \to C(X, Y)$ jest drogą w przestrzeni metrycznej $(C(X, Y), d_{\sup})$ i rozważmy odwzorowanie

$$H \colon X \times I \to Y, \quad H(x, t) = \alpha(t)(x).$$

Ustalmy $(x_0, t_0) \in X \times I$ oraz niech $y_0 = H(x_0, t_0)$. Ustalmy $\epsilon > 0$ i rozważmy kulę $B_d(y_0, \epsilon)$ oraz jej przeciw obraz

$$U = H^{-1}(B_d(y_0, \epsilon)) = \{(x, t) \in X \times I \colon d((x, t), y_0) < \epsilon\}.$$

Z ciągłości α wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset B_{d_{\sup}}(f_{t_0}, \frac{\epsilon}{2}).$$

Podobnie, z ciągłości odwzorowania α_{t_0} wynika, że istnieje otoczenie W punktu $x_0 \in X$ takie, że

$$\operatorname{diam} \alpha_{t_0}(W) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zauważmy, że dla dowolnego $(x_1, t_1)) \in V = W \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ mamy

$$\begin{aligned} d(H(x_1, t_1), y_0) &= d(H(x_1, t_1), H(x_0, t_0)) \leq \\ &\leq \underbrace{d(H(x_1, t_1), H(x_1, t_0))}_{<\epsilon/2} + \underbrace{d(H(x_1, t_0), H(x_0, t_0))}_{<\epsilon/2} < \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Zatem $V \subset U$, co oznacza, że odwzorowanie H jest ciągłe w punkcie (x_0, t_0).
□

Stwierdzenie 7.5. *Jeśli przekształcenia $e : U \to X, f, g : X \to Y, h : Y \to Z$ są ciągłe, a przekształcenia f i g sa homotopijne, to również złożenia $f \circ e$ i $g \circ e$ oraz $h \circ f$ i $h \circ g$ sa homotopijne.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 7.6. Dla $a \in X$ symbolem ε_a oznaczamy odwzorowanie stałe

$$\varepsilon_a \colon X \to X, \quad \varepsilon(x) = a.$$

Stwierdzenie 7.7. *W przestrzeni łukowo spójnej X, dla dowolnych $a, b \in X$, $\varepsilon_a \sim \varepsilon_b$.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 7.8. Przestrzeń topologiczna X jest *ściągalna*, jeśli identyczność jest homotopijna z przekształceniem stałym $\varepsilon_a(x) = a$, dla pewnego $a \in X$.

Stwierdzenie 7.9. *Przestrzenie ściągalne są łukowo spójne.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Stwierdzenie 7.10. *Dowolne dwa przekształcenia ciągłe $f, g : X \to Y$ w przestrzeń ściągalną Y są homotopijne.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 7.11. Podzbiór A przestrzeni (X, τ) jest jej *retraktem*, jeśli istnieje *retrakcja* $r : X \to A$, czyli ciągłe przekształcenie takie, ze $r(x) = x$, dla $x \in A$.

Stwierdzenie 7.12. *Retrakt przestrzeni ściągalnej jest ściągalny.*

Dowód. Załóżmy, że $r \colon X \to A$ jest retrakcją na $A \subset X$ oraz oznaczmy przez

$$\iota \colon A \hookrightarrow X$$

inkluzję Niech $H \colon X \times I \to X$ będzie homotopią taką, że f_0 jest identycznością oraz $f_1 = \epsilon_{x_0}$, gdzie $x_0 \in X$. Rozważmy złożenie

$$F \colon A \times I \xrightarrow{\iota \times \mathrm{id}_I} X \times I \xrightarrow{H} X \xrightarrow{r} A.$$

Wówczas dla dowolnego $a \in A$ mamy

$$F(a, 0) = (r \circ H)(a, 0) = r(a) = a,$$
$$F(a, 1) = (r \circ H)(a, 1) = r(x_0) \in A.$$

Zatem F jest homotopią ściągającą przestrzeń A do punktu. □

7.2 Pętle w przestrzeniach topologicznych

Definicja 7.13. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną z wyróżnionym punktem $x_0 \in X$.

1. *Pętlą w X zaczepioną w x_0* nazywamy drogę $\alpha\colon I \to X$ taką, że $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.

2. *Pętla trywialna* to pętla stała $\varepsilon_{x_0}(t) = x_0$.

3. Symbolem $\Omega(X, x_0)$ oznaczamy zbiór pętli w X zaczepionych w x_0.

4. *Homotopią rel ∂I* między pętlami $\alpha, \beta \in \Omega(X, a)$ nazywamy homotopię $H : I \times I \to X$ łączącą α z β i spełniającą warunek $H(0, t) = x_0 = H(1, t)$, dla $t \in I$.

Stwierdzenie 7.14. *Relacja homotopii rel ∂I w zbiorze $\Omega(X, x_0)$ jest relacją równoważności.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Stwierdzenie 7.15. *W przestrzeni ściągalnej X, dla dowolnego punktu $x_0 \in X$, każda pętla $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ jest homotopijna rel ∂I z pętlą trywialną ε_{x_0}.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

7.3 Pętle w okręgu

Lemat 7.16. *Okrąg S^1 utożsamiamy ze zbiorem $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ oraz definiujemy odwzorowanie*

$$E\colon \mathbb{R} \to S^1, \quad E(s) = \exp(2\pi i s) = \cos(2\pi s) + i \sin(2\pi s). \tag{7.1}$$

Mamy:

1. *dla dowolnyc $s, t \in \mathbb{R}$, $E(s) \cdot E(t) = E(s + t)$, oraz $E(-s) = 1/E(s)$;*

2. *$E^{-1}(1) = \mathbb{Z}$;*

3. *Odwzorowanie $E|_{(-1/2,1/2)}$ jest homeomorfizmem na $S^1 \setminus \{-1\}$.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Stwierdzenie 7.17. *Jeśli X jest przestrzenią spójną, a przekształcenia*

$$f, g : X \to \mathbb{R}$$

są ciągłe oraz $E \circ f = E \circ g$, to funkcja $f - g$ jest stała. W szczególności, jeśli $f(x_0) = g(x_0)$, dla pewnego $x_0 \in X$, to $f = g$.

Dowód. Oznaczmy $h = (f - g)\colon X \to \mathbb{R}$. Mamy

$$(E \circ h)(t) = \frac{(E \circ f)(t)}{(E \circ g)(t)} = 1.$$

Stąd wynika, że $h(X) \subset E^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Zatem, z faktu, że X jest spójna wynika, że funkcja h jest stała. □

Twierdzenie 7.18. *Niech $f : I^n \to S^1$ będzie przekształceniem ciągłym takim, że $f(\mathbf{0}) = 1$, gdzie $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ oraz $n \geq 1$. Istnieje wówczas dokładnie jedno przekształcenie ciągłe*

$$\tilde{f} : I^n \to \mathbb{R}$$

takie, że $E \circ \tilde{f} = f$, oraz $\tilde{f}(\mathbf{0}) = 0$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że jedyność odwzorowania $\widetilde{f}$ wynika ze Stwierdzenia 7.17. W istocie, gdyby istniały dwa odwzorowania

$$\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2\colon I^n \to \mathbb{R},$$

spełniające

$$E \circ \widetilde{f}_i = f, \quad \widetilde{f}_i(\mathbf{0}) = 1,$$

to, na mocy Stwierdzenia 7.17, otrzymamy $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$. To pokazuje, że jeśli istnieje odwzorowanie o żądanych własnościach, to jest ono jedyne.

Zanim zaczniemy dowód istnienia odwzorowania $\widetilde{f}$, niech $d_{S^1}(z, w) = |z - w|$, dla $z, w \in S^1$ będzie obcięciem metryki euklidesowej na płaszczyźnie do okręgu oraz niech d_n będzie obcięciem metryki euklidesowej z $\mathbb{R}^n$ do I^n.

Skoro f jest jednostajnie ciągłe, to istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $d_n(x, y) < \delta$, to $d_{S^1}(f(x), f(y)) < 2$. Wybierzmy $N > 0$ całkowite takie, że

$$\frac{1}{N} < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Dla $j = 0, 1, \ldots, N$ rozważmy odwzorowania

$$g_j(x) = f\left(\frac{j}{N} \cdot x\right).$$

Ustalmy $0 \leq j \leq N - 1$. Dla dowolnego $x \in I^n$ zachodzi

$$d_n\left(\frac{j}{N} \cdot x, \frac{j+1}{N} \cdot x\right) = d_n\left(\mathbf{0}, \frac{1}{N} \cdot x\right) \leq \frac{\sqrt{n}}{N} < \delta.$$

W konsekwencji mamy

$$d_{S^1}(f_j(x), f_{j+1}(x)) < 2,$$

dla każdego $x \in I^n$. Skoro $f_j(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) = f_{j+1}(\mathbf{0})$, to

$$\frac{f_j(x)}{f_{j+1}(x)} \neq -1, \quad x \in I^n. \tag{7.2}$$

Określamy odwzorowanie

$$\widetilde{f}\colon I^n \to \mathbb{R}$$

wzorem

$$\widetilde{f}(x) = L\left(\frac{f_1(x)}{f_0(x)}\right) + L\left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right) + \cdots + L\left(\frac{f_N(x)}{f_{N-1}(x)}\right),$$

gdzie $L\colon S^1 \setminus \{-1\} \to (-1/2, 1/2)$ jest określone $L = \left(E|_{(-1/2,1/2)}\right)^{-1}$. Warunek (7.2) gwarantuje, że złożenia $L\left(\frac{f_{j+1}}{f_j}\right)$, dla $j = 0, 1, \ldots, N-1$ są dobrze określone. Dodatkowo, mamy

$$(E \circ \widetilde{f})(x) = \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \cdots \cdot \frac{f_N(x)}{f_{N-1}(x)} = \frac{f_N(x)}{f_0(x)} = f(x)$$

oraz

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\mathbf{0}) &= L\left(\frac{f_1(\mathbf{0})}{f_0(\mathbf{0})}\right) + L\left(\frac{f_2(\mathbf{0})}{f_1(\mathbf{0})}\right) + \cdots + L\left(\frac{f_N(\mathbf{0})}{f_{N-1}(\mathbf{0})}\right) = \\ &= L\left(\frac{f(\mathbf{0})}{f(\mathbf{0})}\right) + L\left(\frac{f(\mathbf{0})}{f(\mathbf{0})}\right) + \cdots + L\left(\frac{f(\mathbf{0})}{f(\mathbf{0})}\right) = \\ &= N \cdot L(1) = 0.\end{aligned}$$

Zatem funkcja $\widetilde{f}$ spełnia wszystkie wymagania. □

Definicja 7.19. Dla dowolnej pętli $\alpha \in \Omega(S^1, 1)$ definiujemy jej *stopień*

$$\deg(\alpha) = \widetilde{\alpha}(1),$$

gdzie $\widetilde{\alpha}\colon I \to \mathbb{R}$ spełnia $E \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ oraz $\widetilde{\alpha}(0) = 0$.

Twierdzenie 7.20. *Pętle $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ są homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy* $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$.

Dowód. Niech $H : I \times I \to S^1$ będzie homotopią rel ∂I między pętlami $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$, tj. $H(0,t) = 1 = H(1,t)$, dla $t \in I$. Na mocy Twierdzenia 7.18, istnieje przekształcenie ciągłe $\widetilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ takie, że $E \circ \widetilde{H} = H$ i $\widetilde{H}(0,0) = 0$.

Zauważmy, że dla dowolnego $t \in I$ mamy

$$\widetilde{H}(0,t) = 0, \quad \widetilde{H}(1,t) = d,$$

dla pewnego $d \in \mathbb{Z}$. Przyjmijmy

$$\widetilde{\alpha}(s) = \widetilde{H}(s,0), \quad \widetilde{\beta}(s) = \widetilde{H}(s,1).$$

Wówczas

$$E \circ \widetilde{\alpha}(s) = E \circ \widetilde{H}(s,0) = H(s,0) = \alpha(s)$$

i podobnie, $E \circ \widetilde{\beta} = \beta$. Ponadto,

$$\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{H}(0,0) = 0 = \widetilde{H}(0,1) = \widetilde{\beta}(0).$$

Zgodnie z Definicją 7.19,

$$\deg(\alpha) = \widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{H}(1,1) = \widetilde{\beta}(1) = \deg \beta.$$

Na odwrót, załóżmy, że pętle $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1)$ mają równe stopnie. Niech $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że $E \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ oraz $E \circ \widetilde{\beta} = \beta$, $\widetilde{\alpha}(0) = 0 = \widetilde{\beta}(0)$. Wówczas

$$\widetilde{\alpha}(1) = \deg(\alpha) = \deg(\beta) = \widetilde{\beta}(1),$$

skąd wynika, że odwzorowanie

$$H(s,t) = E((1-t)\widetilde{\alpha}(s) + t\widetilde{\beta}(s))$$

jest homotopią rel ∂I między pętlami α i β. □

Wniosek 7.21. *Dla dowolnego $d \in \mathbb{Z}$ pętla*

$$\omega_d(s) = \cos(2\pi ds) + i\sin(2\pi ds), \quad s \in I, \tag{7.3}$$

ma stopień d. Jeśli $\alpha \in \Omega(S^1, 1)$ i $\deg(\alpha) = d$, to α jest homotopijna rel ∂I z pętlą ω_d.

Dowód. Zauważmy, że

$$\widetilde{\omega}_d(s) = ds,$$

zatem $\deg(\omega_d) = d$.

Druga część jest bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 7.20. □

Wniosek 7.22. *Dla $d \in \mathbb{Z}$ definiujemy odwzorowanie*

$$p_d \colon S^1 \to S^1, \quad p_d(z) = z^d.$$

Jeśli odwzorowania p_{d_1} i p_{d_2} są homotopijne, to $d_1 = d_2$. W szczególności, okrąg S^1 nie jest ściągalny.

Dowód. Niech $H : S^1 \times I \to S^1$ będzie homotopią łączącą p_{d_1} z p_{d_2}, tzn.

$$H(z, 0) = z^n, \quad H(z, 1) = z^m, \quad \text{dla} z \in \mathbb{C}.$$

Wówczas przekształcenie

$$G \colon I \times I \to S^1, \quad G(s, t) = H(E(s), t) \cdot H(1, t)^{-1}$$

jest homotopią między pętlami ω_{d_1}, i ω_{d_2}. Zatem, na mocy Twierdzenia 7.20 oraz Wniosku 7.21 mamy

$$d_1 = \deg(\omega_{d_1}) = \deg(\omega_{d_2}) = d_2.$$

Nieściągalność okręgu wynika z tego, że p_1 jest odwzorowaniem identycznościowym, a p_0 jest odwzorowaniem stałym. Zatem

$$\deg(\mathrm{id}_{S^1}) = 1 \neq 0 = \deg(\epsilon_1),$$

co kończy dowód wniosku. □

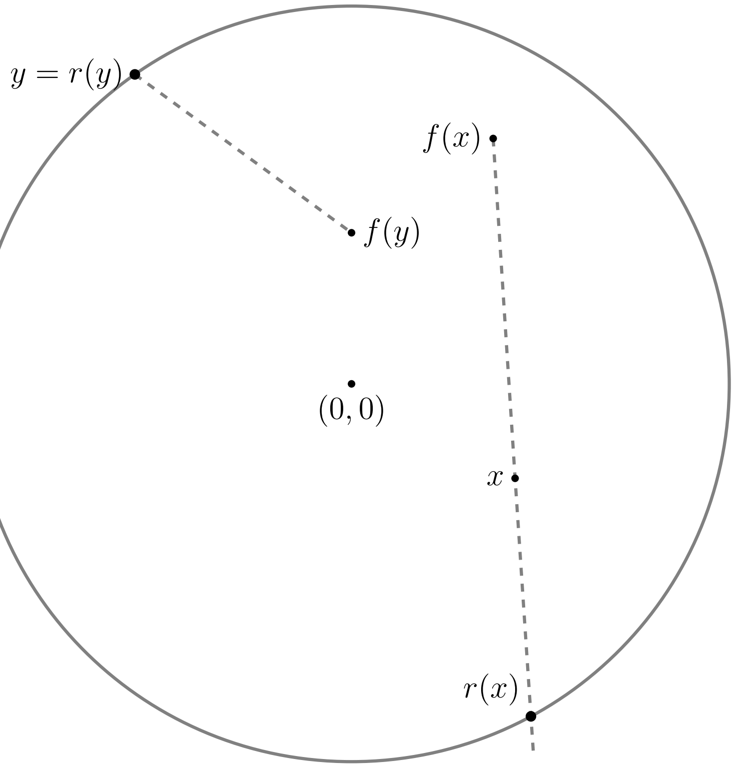
Wniosek 7.23. *Okrąg S^1 nie jest retraktem dysku*

$$D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}.$$

Dowód. Gdyby istniała retrakcja $r \colon D^2 \to S^1$, to na mocy Stwierdzenia 7.12, okrąg byłby ściągalny. To jest sprzeczne z Wnioskiem 7.22. □

Wniosek 7.24 (Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym)**.** *Każde przekształcenie ciągłe $f : D^2 \to D^2$ ma punkt stały.*

Dowód. Gdyby $f \colon D^2 \to D^2$ nie miało punktu stałego, tj. dla dowolnego $x \in D^2$, $f(x) \neq x$. Dla każdego $x \in D^2$, przez L_x oznaczamy półprostą wychodzącą z $f(x)$ i przechodzącą przez x. Przez $r(x)$ oznaczamy punkt przecięcia prostej L_x z okręgiem S^1, zob. Rysunek 10. Odwzorowanie $r \colon D^2 \to S^1$ jest ciągłe (proszę to sprawdzić!). Dla $x \in S^1$ mamy $r(x) = x$. Odwzorowanie $r \colon D^2 \to S^1$ jest retrakcją – sprzeczność. □



Rysunek 10: Konstrukcja retrakcji w dowodzie twierdzenia Brouwera o punkcie stałym.

Twierdzenie 7.25 (Zasadnicze Twierdzenie Algebry). *Każdy wielomian $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{d-1} + z^d$, gdzie $d > 0$, o współczynnikach zespolonych posiada pierwiastek zespolony.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że $P(z) \neq 0$, dla $z \in \mathbb{C}$. Funkcja

$$F : S^1 \times I \to \mathbb{C}, \quad F(z,s) = s^d P(\frac{z}{s}) = s^d a_0 + s^{d-1} a_1 z + \ldots + s a_{d-1} z^{n-1} + z^d$$

jest ciągła i nie przyjmuje wartości 0.

Rozważmy odwzorowanie $H : S^1 \times I \to S^1$ zdefiniowane następująco:

$$H(z,t) = \begin{cases} \frac{F(z,2t)}{|F(z,2t)|}, & \text{jeśli } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{P(2(1-t)z)}{|P(2(1-t)z)|}, & \text{jeśli } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dla $t = \frac{1}{2}$ obie formuły dają

$$H(z, \frac{1}{2}) = \frac{P(z)}{|P(z)|}.$$

W konsekwencji, przekształcenie H jest ciągłe na $S^1 \times [0,1]$ (dlaczego?). Zatem H jest homotopią łączącą przekształcenie $H(z,0) = z^n = p_n(z)$ z przekształceniem stałym $H(z,1) = \frac{P(0)}{|P(0)|} = p_0(z)$. Wniosek 7.22 implikuje, że $d = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. □

7.4 Grupa podstawowa przestrzeni

Definicja 7.26. Niech (X, τ) będzie przestrzenią z wyróżnionych punktem $x_0 \in X$.

- *Iloczynem pętli* $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ nazywamy pętlę zdefiniowaną następująco:

$$\alpha \star \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{jeśli } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2s-1), & \text{jeśli } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

- *Pętla odwrotna* do $\alpha \in \Omega(X, a)$ jest określona formułą

$$\overline{\alpha}(s) = \alpha(1-s), \quad s \in [0,1].$$

Przykład 7.27. Rozważmy pętle ω_d, dla $d \in \mathbb{Z}$, w okręgu, gdzie

$$\omega_d \colon I \to S^1, \quad \omega_d(s) = \cos(2\pi d s) + i \sin(2\pi d s).$$

1. Dla $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ niech $\alpha = \omega_{d_1} \star \omega_{d_2}$.

2. Podniesienie
$$\widetilde{\alpha} = \widetilde{\omega_{d_1} \star \omega_{d_2}} = \widetilde{\omega_{d_1}} \star \widetilde{\omega_{d_1}} \colon I \to \mathbb{R}$$
spełnia $\widetilde{\alpha}(1) = d_1 + d_2$.

3. Zatem
$$\deg(\omega_{d_1} \star \omega_{d_2}) = \deg(\omega_{d_1}) + \deg(\omega_{d_2}).$$

Stwierdzenie 7.28. *Niech $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma \in \Omega(X, x_0)$.*

1. Jeśli $\alpha \sim \alpha'$ oraz $\beta \sim \beta'$, to $\alpha \star \beta \sim \alpha' \star \beta'$, oraz $\overline{\alpha} \sim \overline{\alpha}'$.

2. $(\alpha \star \beta) \star \gamma \sim \alpha \star (\beta \star \gamma)$.

3. $\varepsilon_{x_0} \star \alpha \sim \alpha \sim \alpha \star \varepsilon_{x_0}$, oraz $\alpha \star \overline{\alpha} \sim \varepsilon_{x_0} \sim \overline{\alpha} \star \alpha$.

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Wniosek 7.29. *Zbiór klas homotopii pętli należących do $\Omega(X, x_0)$ tworzy grupę.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 7.30. Niech (X, x_0) będzie przestrzenią topologiczną z wyróżnionych punktem. *Grupą podstawową przestrzeni X w punkcie x_0* nazywamy zbiór klas homotopii pętli z $\Omega(X, x_0)$ z działaniem mnożenia
$$[\alpha][\beta] = [\alpha \star \beta],$$
elementem neutralnym $[\varepsilon_{x_0}]$ i operacją odwracania
$$[\alpha]^{-1} = [\overline{\alpha}]$$

Twierdzenie 7.31. *Jeśli przestrzeń (X, τ) jest łukowo spójna, to dla dowolnych punktów $x_0, x_1 \in X$, grupy $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ są izomorficzne.*

Dowód. Niech $\gamma \colon [0, 1] \to X$ będzie drogą łączącą punkty x_0 oraz x_1. Rozważmy odwzorowanie:
$$\beta_\gamma \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \quad \beta_\gamma([\alpha]) = [\overline{\gamma} \star \alpha \star \gamma]. \tag{7.4}$$
Łatwo sprawdzić, że β_γ jest homomorfizmem grup oraz, że $(\beta_\gamma)^{-1} = \beta_{\overline{\gamma}}$. To pokazuje, że β_γ jest izomorfizmem grup. □

Definicja 7.32. Dla przestrzeni łukowo spójnej (X, τ), *grupą podstawową* $\pi_1(X)$ nazywamy dowolną grupę izomorficzną z $\pi_1(X, x_0)$, dla dowolnego $x_0 \in X$.

Stwierdzenie 7.33. *Jeśli X jest ściągalna, to grupa podstawowa $\pi_1(X)$ jest trywialna.*

Wniosek 7.34. *Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest wypukły lub gwiaździsty, to $\pi_1(A)$ jest trywialna.*

Stwierdzenie 7.35. *Dla $n \geq 2$, grupa podstawowa $\pi_1(S^n)$ jest trywialna.*

Twierdzenie 7.36. *Grupa podstawowa $\pi_1(S^1, 1)$ jest izomorficzna z grupą addytywną liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.*

Dowód. Stopień definiuje izomorfizm

$$\deg\colon \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}.$$

□

Definicja 7.37. Przestrzenie topologiczne X i Y są *homotopijnie równoważne*, jeśli istnieją przekształcenia ciągłe $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ takie, że $g \circ f \sim id_X$ oraz $f \circ g \sim id_Y$.

Stwierdzenie 7.38. *Przestrzeń ściągalna X jest homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową $Y = \{x_0\}$.*

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Definicja 7.39. Niech $f\colon X \to Y$ będzie ciągłe. Jeśli $x_0 \in Y$, wówczas f indukuje odwzorowanie

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)), \quad f_*[\alpha] = [f \circ \alpha].$$

Stwierdzenie 7.40. *Niech X, Y, Z będą przestrzeniami topologicznymi.*

1. *Jeśli $f\colon X \to Y$ oraz $g\colon Y \to Z$, wówczas dla każdego $x_0 \in X$ mamy*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, g(f(x_0))).$$

2. *Odwzorowanie $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ jest homomorfizmem grup.*

3. *Jeśli $h\colon Y \to X$ spełnia $h \circ f = id_X$ oraz $f \circ h = id_Y$, wówczas f i h są wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami, tj.*

$$h_* = (f_*)^{-1}.$$

4. W szczególności, homeomorfizmy zachowują grupę podstawową (z dokładnością do izomorfizmu).

Dowód. Ćwiczenie dla czytelnika. □

Twierdzenie 7.41. *Niech H będzie homotopią łączącą odwzorowania $f, g\colon X \to Y$. Ustalmy $x_0 \in X$ oraz niech $h_{x_0}\colon I \to Y$ będzie drogą od $f(x_0)$ do $g(x_0)$ wyznaczoną przez H. Wówczas*

$$f_* = \beta_{h_x} \circ g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, g(x_0)),$$

gdzie β_{h_x} jest odwzorowaniem zdefiniowanym w dowodzie Twierdzenia 7.31.

Dowód. Najpierw pokażemy, że dla dowolnej pętli $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ zachodzi

$$\beta_{\epsilon_{x_0}}(f \circ \gamma) \sim \beta_\alpha(g \circ \gamma). \tag{7.5}$$

Ustalmy $\gamma \in \Omega(X, x_0)$. Rozważmy odwzorowanie $H_1\colon I \times I \to Y$ zdefiniowane następująco.

$$H_1(s,t) = \begin{cases} H(x_0, 3st), & 0 \le s \le \frac{1}{3}, \\ H(\gamma(3s-1), t), & \frac{1}{3} \le s \le \frac{2}{3}, \\ H(x_0, 3(1-s)t), & \frac{2}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

Odwzorowanie H_1 jest homotopią realizującą relację (7.5).

Na koniec zauważmy, że na mocy Stwierdzenia 7.28 zachodzi

$$\beta_{\epsilon_{f(x_0)}}(f \circ \alpha) \sim f \circ \alpha,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 7.42. *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest homotopijną równoważnością, wówczas, dla dowolnego $x_0 \in X$, odwzorowanie*

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

jest izomorfizmem.

Dowód. Ustalmy $x_0 \in X$. Niech $H_1\colon X \times I \to X$ będzie homotopią łączącą $g \circ f$ z id_X. Wówczas, na mocy Twierdzenia 7.41 mamy

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \beta_{h_{x_0}}.$$

To pokazuje, że f_* jest iniekcją.

Podobnie, jeśli H_2 jest homotopią łączącą $f \circ g$ oraz id_Y, to

$$f_* \circ g_* = \beta_{h_{f(x_0)}}),$$

zatem $f_* \colon \pi_1(X, (g \circ f)(x_0)) \to \pi_1(Y, (f \circ g \circ f)(x_0))$ jest suriekcją. Na koniec zauważmy, że następujące odwzorowania są sobie równe

$$f_* = \beta_{f \circ h_x} \circ f_* \circ \beta_{h_x}^{-1} \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)).$$

To pokazuje, że odwzorowanie

$$f_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

jest również suriekcją, a zatem izomorfizmem. □

Przykład 7.43. Niech $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Rozważmy odwzorowania

$$\iota \colon S^1 \to X, \quad \iota(z) = z, \quad r \colon X \to S^1, \quad r(z) = \frac{z}{|z|}.$$

2. Mamy

$$r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^1}, \quad \iota \circ r \sim \mathrm{id}_X.$$

3. Homotopia od $\iota \circ r$ do id_X zdefiniowana jest następująco

$$H \colon X \times I \to X, \quad H(z,t) = t \cdot z + (1-t) \cdot \frac{z}{|z|}.$$

Przykład 7.45. Podobnie, jak w poprzednim przykładzie pokazujemy, że dla $n \geq 2$ przestrzenie $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ i S^n są homotopijnie równoważne. W konsekwencji

$$\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) \cong 0.$$

Literatura

[AZ14] Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK. With illustrations by Karl H. Hofmann*, 5th revised and enlarged ed. ed., Berlin: Springer, 2014 (English). 21

[BCPP23] Stanisław Betley, Józef Chaber, Elżbieta Pol, and Roman Pol, *Topologia I*, https://duch.mimuw.edu.pl/~betley/wyklad1/topologia.pdf, Maj 2023. 7, 12, 13, 30, 52, 83, 84, 86, 101

[Eng89] Ryszard Engelking, *General topology*, rev. and completed ed ed., Sigma series in pure mathematics, no. 6, Heldermann, Berlin, 1989 (eng ger). 55, 78, 115, 118

[Fur55] Harry Furstenberg, *On the infinitude of primes*, The American Mathematical Monthly **62** (1955), no. 5, 353–353. 21

[Mun00] James R. Munkres, *Topology.*, 2nd ed. ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000 (English). 34

[Nad92] Sam B. Nadler, *Continuum theory. An introduction*, Pure Appl. Math., Marcel Dekker, vol. 158, New York: Marcel, 1992. 123

[Sag94] Hans Sagan, *Space-Filling Curves*, Universitext, Springer New York, New York, NY, 1994. 104

[SS78] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach, *Counterexamples in Topology*, Springer New York, New York, NY, 1978 (en). 34, 120

[Wil16] Stephen Willard, *General topology*, Dover books on mathematics, Dover publications, Mineola, N.Y, 2016 (eng). 122, 124