

# **Analiza matematyczna I**

## **(skrypt wykładu)**

Paweł Strzelecki

wersja z dodatkami, 14 grudnia 2018  
ostatnie poprawki: 14 grudnia 2018

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Liczby rzeczywiste</b>	<b>1</b>
1.1	Aksjomatyka liczb rzeczywistych . . . . .	1
1.1.1	Aksjomaty ciała przemienneego . . . . .	2
1.1.2	Aksjomaty porządku . . . . .	2
1.1.3	Pojęcie kresu górnego i aksjomat ciągłości . . . . .	4
1.1.4	Podzbiory $\mathbb{R}$ . . . . .	5
1.2	Liczby naturalne i zasada indukcji zupełnej . . . . .	6
1.3	Pierwiastki $n$ -tego stopnia . . . . .	11
1.4	Liczby całkowite. Entier. Gęstość zbioru liczb wymiernych i niewymiernych	13
<b>2</b>	<b>Ciągi. Pojęcie granicy ciągu.</b>	<b>17</b>
2.1	Granica ciągu i jej podstawowe własności . . . . .	18
2.2	Ciągi monotoniczne . . . . .	26
2.3	Granice niewłaściwe . . . . .	27
2.4	Podciągi. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa . . . . .	28
<i>Dodatki do rozdziału 2</i>	. . . . .	33
2.A	Twierdzenie Stolza . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Funkcja wykładnicza i logarytm</b>	<b>37</b>
3.1	Funkcja wykładnicza . . . . .	37
3.2	Charakteryzacja funkcji wykładniczej . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Szeregi. Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej.</b>	<b>46</b>
4.1	Szeregi o wyrazach dodatnich . . . . .	49
4.2	Interludium: zbieżność ciągów i szeregów zespolonych . . . . .	56
4.3	Szeregi o wyrazach dowolnych . . . . .	58
4.3.1	Zbieżność bezwzględna i warunkowa . . . . .	58
4.3.2	Przekształcenie Abela . . . . .	60
4.3.3	Mnożenie szeregów i twierdzenie Mertensa . . . . .	62
4.4	Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej . . . . .	65
4.5	Funkcje trygonometryczne . . . . .	72
4.6	Liczba $\pi$ . . . . .	74
4.7	Wzór de Moivre'a . . . . .	78

<b>5 Funkcje ciągłe</b>	<b>81</b>
5.1 Punkty skupienia. Granica funkcji . . . . .	81
5.2 Funkcje monotoniczne . . . . .	88
5.3 Ciągłość funkcji . . . . .	89
5.4 Ciągłość funkcji odwrotnej . . . . .	94
5.4.1 Funkcje cyklotometryczne . . . . .	96
5.5 Jednostajna ciągłość . . . . .	97
5.6 Zbiory zwarte . . . . .	100
5.7 Funkcje wypukłe . . . . .	102
<i>Dodatki do rozdziału 5</i> . . . . .	110
5.A Zasadnicze twierdzenie algebraiczne . . . . .	110
<b>6 Rachunek różniczkowy</b>	<b>114</b>
6.1 Pojęcie pochodnej . . . . .	114
6.1.1 Związek różniczkowalności z ciągłością . . . . .	115
6.1.2 Interpretacja pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej . . . . .	115
6.1.3 Arytmetyczne własności pochodnej . . . . .	117
6.1.4 Pochodna złożenia i funkcji odwrotnej . . . . .	118
6.2 Pochodne funkcji elementarnych . . . . .	121
6.3 Najważniejsze własności funkcji różniczkowalnych . . . . .	125
6.4 Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora . . . . .	130
6.4.1 Definicja pochodnych wyższych rzędów . . . . .	130
6.4.2 Wzór Taylora . . . . .	132
6.4.3 Warunki dostateczne istnienia ekstremów lokalnych . . . . .	139
6.4.4 Warunki dostateczne wypukłości. Punkty przegięcia . . . . .	141
6.5 Reguła de l'Hospitala . . . . .	144
<i>Dodatki do rozdziału 6</i> . . . . .	152
6.A Metoda stycznych (Newtona) . . . . .	152
<b>7 Zbieżność jednostajna</b>	<b>158</b>
7.1 Definicje i przykłady . . . . .	158
7.2 Najprostsze kryteria zbieżności jednostajnej . . . . .	164
7.3 Twierdzenia Weierstrassa i Diniego . . . . .	165
7.4 Różniczkowanie ciągów funkcyjnych . . . . .	169
7.4.1 Przypadek rzeczywisty . . . . .	169
7.4.2 Przypadek zespolony . . . . .	173
7.4.3 Istnienie funkcji pierwotnej . . . . .	176
7.4.4 Inne przykłady . . . . .	177
7.5 Twierdzenie Arzeli–Ascoliego . . . . .	179
<b>8 Szeregi potęgowe</b>	<b>183</b>
8.1 Dygresja: granica górna i dolna . . . . .	183
8.2 Promień zbieżności; ciągłość sumy szeregu potęgowego . . . . .	184
8.3 Różniczkowalność sumy szeregu potęgowego . . . . .	187
8.3.1 Pojęcie funkcji analitycznej . . . . .	189
8.4 Przykłady . . . . .	191
8.5 Twierdzenie Abela o granicach kątowych . . . . .	194

8.6 Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy . . . . .	198
<b>9 Całka</b>	<b>200</b>
9.1 Całka nieoznaczona . . . . .	200
9.1.1 Własności całek nieoznaczonych . . . . .	202
9.1.2 Całkowanie funkcji wymiernych . . . . .	204
9.1.3 Podstawienia Eulera, podstawienia trygonometryczne . . . . .	209
9.2 Całka Newtona . . . . .	212
9.2.1 Całka Newtona a zbieżność jednostajna . . . . .	217
9.2.2 Wzór Wallisa i wzór Stirlinga . . . . .	218
9.2.3 Niewymierność liczby $\pi$ . Informacje o liczbach przestępnych. . . . .	222
9.2.4 Wzór Taylora z resztą w postaci całkowej . . . . .	227
9.3 Całka Riemanna . . . . .	228
9.4 Geometryczne zastosowania całki . . . . .	233
9.4.1 Długość krzywej . . . . .	233
9.4.2 Objętość bryły obrotowej. Pole powierzchni obrotowej . . . . .	237
<i>Dodatki do rozdziału 9</i> . . . . .	241
9.A Charakteryzacja całkowalności w sensie Riemanna . . . . .	241
<b>10 Całki niewłaściwe. Funkcje <math>\Gamma</math> i <math>B</math> Eulera oraz ich zastosowania</b>	<b>244</b>
10.1 Całka niewłaściwa . . . . .	244
10.2 Funkcje $\Gamma$ i $B$ . . . . .	255
10.3 Wzór iloczynowy Weierstrassa i kilka innych własności funkcji $\Gamma$ . . . . .	262
10.4 Rozwinięcie cotangensa w szereg ułamków prostych . . . . .	269
<b>11 Zakończenie: eliptyczność orbit</b>	<b>274</b>
<b>A Szeregi Fouriera</b>	<b>277</b>
A.1 Motywacje, intuicje . . . . .	277
A.1.1 Model przepływu ciepła w jednorodnym pręcie . . . . .	277
A.1.2 Wzory na współczynniki . . . . .	279
A.2 Lemat Riemanna–Lebesgue'a. Kryterium Dini'ego . . . . .	280
A.2.1 Jądro Dirichleta . . . . .	283
A.2.2 Współczynniki Fouriera pochodnych. . . . .	285
A.3 Szeregi Fouriera i całkowalność z kwadratem . . . . .	286
A.4 Funkcje ciągłe o rozbieżnych szeregach Fouriera . . . . .	291
A.4.1 Norma operatora liniowego. Operatory liniowe ciągłe. . . . .	291
A.4.2 Sumy częściowe szeregu Fouriera jako funkcjonały liniowe. . . . .	292
A.4.3 Twierdzenie Banacha–Steinhausa i jego zastosowanie. . . . .	292
<b>B Pakiety do obliczeń symbolicznych</b>	<b>293</b>
B.1 Wprowadzenie . . . . .	293
B.1.1 Programy typu CAS . . . . .	293
B.1.2 Obliczenia symboliczne . . . . .	294
B.2 Granice ciągów i funkcji . . . . .	297
B.2.1 Obliczanie prostych granic . . . . .	297
B.2.2 Ciągi rekurencyjne . . . . .	300

B.2.3	Rekurencje liniowe . . . . .	305
B.2.4	Fraktale . . . . .	308
B.3	Badanie funkcji rzeczywistych . . . . .	311
B.3.1	Wykresy funkcji . . . . .	311
B.3.2	Przebieg zmienności funkcji . . . . .	316
B.3.3	Aproksymacja funkcji ciągłych wielomianami . . . . .	322
B.3.4	Znajdowanie miejsc zerowych funkcji ciągłych . . . . .	324
B.4	Ciągi i szeregi funkcyjne . . . . .	327
B.4.1	Szeregi liczbowe . . . . .	327
B.4.2	Wzór Taylora, szeregi potęgowe . . . . .	329
B.4.3	Badanie zbieżności punktowej i jednostajnej . . . . .	333
B.5	Całka . . . . .	338
B.5.1	Całkowanie . . . . .	338
B.5.2	Zastosowania rachunku całkowego . . . . .	342

# Zamiast wstępu

1. Ten tekst powstał na podstawie wykładu z Analizy Matematycznej I, który prowadziłem w roku 2010–11, i wciąż jest *w budowie*. Mogą w nim być różne błędy, zarówno literówki, jak i poważniejsze usterki. Mogą stopniowo pojawiać się pewne (niezbyt wielkie) zmiany układu treści.
2. Wiosną roku 2015 skrypt jest stopniowo uzupełniany o dodatki, obejmujące treści, wykładane studentom Analizy Matematycznej *z gwiazdką*.
3. Wszelkie uwagi Czytelników (w tym sugestie, co zmienić, gdzie warto napisać dokładniejsze wyjaśnienie, gdzie umieścić rysunek itp.) są mile widziane, z góry za nie dziękuję.
4. Najnowszą wersję tekstu można znaleźć na stronie

<http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/analiza/>

(w zakładce z notatkami).

5. Pod koniec kwietnia 2015 r. dodany został podrozdział 9.A, z dowodem charakteryzacji klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna, a 11 czerwca 2015 r. – dodatek o szeregach Foriera (niepełny).

*Paweł Strzelecki*

# Rozdział 1

## Liczby rzeczywiste

Czym zajmuje się Analiza Matematyczna?

Jedna z możliwych ogólnych odpowiedzi na to pytanie jest następująca: badaniem odpowiednio regularnych funkcji, określonych zwykle na podzbiorach przestrzeni wektorowych<sup>1</sup>. Do najważniejszych zagadnień w Analizie należą zatem:

- sposoby definiowania tych funkcji oraz opis ich własności;
- badanie różnych typów procesów, które wiążą się z matematycznym opisem ciągłych zmian (przejście graniczne, różniczkowanie, całkowanie);
- badanie wielu zastosowań powyższej teorii w innych obszarach, np. w geometrii, fizyce, ekonomii, biologii.

W najprostszym przypadku chodzi o funkcje jednej zmiennej rzeczywistej. Podczas pierwszego roku studiów matematycznych praktycznie nie będziemy się stykać z istotnie bardziej zaawansowanymi działami Analizy.

A jak powstaje typowa teoria matematyczna?

We współczesnej matematyce typowa teoria ma budowę aksjomatyczną. To znaczy, że wprowadzamy pewne *pojęcia pierwotne*, których nie definiujemy; zakładamy natomiast, że między tymi pojęciami zachodzą pewne określone związki, wyrażone za pomocą *aksjomatów* (inaczej nazywanych *pewnikami*). Na tej podstawie budujemy resztę teorii.

Ponieważ mamy zajmować się funkcjami zmiennej rzeczywistej, więc rozpoczęniemy cały wykład od podania pojęć pierwotnych i aksjomatów teorii liczb rzeczywistych, oraz omówienia ich najważniejszych konsekwencji.

### 1.1 Aksjomatyka liczb rzeczywistych

Pojęcia pierwotne teorii liczb rzeczywistych są następujące: dany jest zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  z dwoma wyróżnionymi elementami, 0 i 1 (przy czym  $0 \neq 1$ ), relacja nierówności  $<$ , oraz dwa działania, dodawanie i mnożenie, przypisujące każdej parze liczb  $x, y \in \mathbb{R}$  ich sumę  $x + y$  oraz iloczyn  $x \cdot y = xy$ .

---

<sup>1</sup>Z pojęciem przestrzeni wektorowej Czytelnik tych notatek zetknie się na wykładach Geometrii z Algorytmiką Liniową.

**Uwaga.** Czytelnik, jeśli tylko chce, może sobie wyobrażać jako  $\mathbb{R}$  zbiór punktów osi liczbowej, o której uczyono go w szkole. Relacja nierówności, zero i jedynka, suma i iloczyn też nieprzypadkowo są oznaczane tak, jak w szkole. Zamiast mówić *liczba*  $x \in \mathbb{R}$ , będziemy czasem mówić *punkt*  $x \in \mathbb{R}$

Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych wygodnie jest podzielić na trzy grupy: aksjomaty ciała przemiennego, aksjomaty porządku, oraz aksjomat ciągłości.

### 1.1.1 Aksjomaty ciała przemiennego

Pierwsza grupa aksjomatów orzeka, że liczby rzeczywiste tworzą *ciało przemienne*. Chodzi o opis kluczowych własności dodawania i mnożenia.

Oto własności dodawania:

**A.1 (Przemienność dodawania).** Dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  zachodzi równość  $x + y = y + x$ .

**A.2 (Łączność dodawania).** Dla wszystkich  $x, y, z \in \mathbb{R}$  zachodzi równość  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .

**A.3 (Charakteryzacja zera).** Dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  jest  $x + 0 = x$ .

**A.4 (Istnienie elementów przeciwnych).** Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  istnieje element  $-x \in \mathbb{R}$ , taki, że  $x + (-x) = 0$ .

Mnożenie ma podobną listę własności:

**A.5 (Przemienność mnożenia).** Dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  zachodzi równość  $xy = yx$ .

**A.6 (Łączność mnożenia).** Dla wszystkich  $x, y, z \in \mathbb{R}$  zachodzi równość  $(xy)z = x(yz)$ .

**A.7 (Charakteryzacja jedynki).** Dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  jest  $x \cdot 1 = x$ .

**A.8 (Istnienie elementów odwrotnych).** Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , istnieje element  $x^{-1} \in \mathbb{R}$ , taki, że  $x \cdot x^{-1} = 1$ .

Ostatni aksjomat z tej grupy mówi o tym, jaki jest związek dodawania z mnożeniem.

**A.9 (Rozdzielność mnożenia względem dodawania).** Dla wszystkich  $x, y, z \in \mathbb{R}$  zachodzi równość  $x(y + z) = xy + xz$ .

### 1.1.2 Aksjomaty porządku

**N.1 (Prawo trichotomii).** Dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  zachodzi *dokładnie jedna* z trzech możliwości:

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$

**N.2 (Przechodniość).** Dla wszystkich  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , jeśli  $x < y$  i  $y < z$ , to  $x < z$ .

**N.3 (Związki nierówności z działaniami).** Dla wszystkich  $x, y, z \in \mathbb{R}$ :

- (a) jeśli  $x < y$ , to  $x + z < y + z$ ;

(b) jeśli  $x < y$  i  $0 < z$ , to  $xz < yz$ .

Z tych dwóch grup aksjomatów można wyprowadzić wszystkie szkolne reguły arytmetyki, definiując po drodze dwa pozostałe działania, odejmowanie i dzielenie (przez liczbę różną od zera). Są wśród tych reguł m.in. następujące:

(W1) Elementy przeciwnie i odwrotne są określone jednoznacznie. Ponadto,  $-(-x) = x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , a  $(x^{-1})^{-1} = x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ .

(W2) Dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}$  istnieje dokładnie jeden element  $x \in \mathbb{R}$  taki, że  $a + x = b$ .

(W3) Jeśli  $xy = x$  i  $x \neq 0$ , to  $y = 1$ .

(W4) Dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  z równości  $xy = 0$  wynika, że  $x = 0$  lub  $y = 0$ .

(W5) Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  mamy  $x \cdot 0 = 0$ .

(W6) Dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , istnieje dokładnie jeden element  $x \in \mathbb{R}$  taki, że  $ax = b$ .

(W7) Dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a, b$  zachodzą równości  $(-a)b = a(-b) = -ab$ .

(W8) Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  mamy  $0 \leq x^2$ ; przy tym  $x^2 = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = 0$ . W szczególności,

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$$

**Uwaga notacyjna.** Czytelnik zauważył może, że w ostatniej własności pojawił się symbol  $\leq$ , dotychczas niezdefiniowany, ani nie wymieniony wśród pojęć pierwotnych. Zgodnie z naturalnym oczekiwaniem, przyjmujemy dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a, b$ , że

(i)  $a \leq b$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = b$  lub  $a < b$ ;

(ii)  $a \geq b$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $b \leq a$ ;

(iii)  $a > b$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $b < a$ .

Dla przykładu przeprowadzimy

**Dowód własności (W5).** Ustalmy dowolną liczbę  $x \in \mathbb{R}$ . Z aksjomatu A.3 wynika, że  $1+0=1$ . Mnożąc obie strony przez  $x$  i stosując wskazane aksjomaty, otrzymujemy

$$x \stackrel{\text{A.7}}{=} x \cdot 1 = x(1+0) \stackrel{\text{A.9}}{=} x \cdot 1 + x \cdot 0 \stackrel{\text{A.7}}{=} x + x \cdot 0, \quad (1.1)$$

a zatem

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &\stackrel{\text{A.3}}{=} x \cdot 0 + 0 \stackrel{\text{A.4}}{=} x \cdot 0 + (x + (-x)) \stackrel{\text{A.1 i A.2}}{=} x + x \cdot 0 + (-x) \\ &\stackrel{\text{(1.1)}}{=} x + (-x) \quad (\text{wiemy już, patrz (1.1), że } x + x \cdot 0 = x) \\ &\stackrel{\text{A.4}}{=} 0, \end{aligned}$$

co było do udowodnienia.  $\square$

Nie będziemy przeprowadzać dowodów wszystkich własności z listy (W1)–(W8). Dowody nie są zbyt skomplikowane, a treść tych własności powinna być Czytelnikowi dobrze

znana. Przykładowe dowody takich własności pojawią się na ćwiczeniach. Podkreślimy inną rzeczą: warto i należy zdawać sobie sprawę, że podana lista aksjomatów A.1–A.9 i N.1–N.3, wystarcza, by wyprowadzić z niej *wszystkie* pozostałe reguły arytmetyki, zdefiniowawszy wcześniej odejmowanie  $x - y := x + (-y)$  i dzielenie  $x/y := x \cdot y^{-1}$  dla  $y \neq 0$ . To oznacza, że reguły z listy (W1)–(W8) czy np. szkolne prawo rozdzielności dzielenia względem odejmowania nie są już, jak aksjomaty, kwestią umowy, a tym bardziej opinii nauczyciela, zapisanej w kolorowych ramkach. Są konieczną konsekwencją aksjomatów. (Matematyk zaś dba o to, żeby listy aksjomatów były możliwie oszczędne).

### 1.1.3 Pojęcie kresu górnego i aksjomat ciągłości

Ostatni aksjomat, który jest nam potrzebny, ma inny charakter od aksjomatów ciała i porządku. Dotyczy nie pojedynczych liczb rzeczywistych, ani ich par czy trójkę, tylko podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych. Sformułowanie tego aksjomatu poprzedzimy definicjami ograniczenia górnego i kresu górnego.

**Definicja 1.1.** Liczba  $M \in \mathbb{R}$  jest ograniczeniem górnym zbioru  $A \subset \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $x \in A$  jest  $x \leq M$ .

Mówimy, że zbiór  $A \subset \mathbb{R}$  jest ograniczony z góry, gdy ma choć jedno ograniczenie górne. Na przykład przedział domknięty  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  jest ograniczony z góry. Jego ograniczeniami górnymi są m.in. liczby 1, 10, 2010 i  $2010^{2010}$ .

**Definicja 1.2.** Liczba  $M \in \mathbb{R}$  jest kresem górnym niepustego zbioru  $A \subset \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

- (i)  $M$  jest ograniczeniem górnym  $A$ ,
- (ii) jeśli  $M'$  jest ograniczeniem górnym  $A$ , to  $M \leq M'$ .

Kres górnny zbioru oznaczamy symbolem ‘ $\sup$ ’ (od łacińskiego *supremum*) i piszemy  $M = \sup A$ . Definicję kresu górnego niepustego zbioru liczb rzeczywistych można sformułować na inne, równoważne sposoby:

- $M = \sup A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $M$  jest *najmniejszym* ograniczeniem górnym zbioru  $A$ ;
- $M = \sup A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $M$  jest ograniczeniem górnym zbioru  $A$  i dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $x \in A$  taki, że  $M - \varepsilon < x$ .

Sprawdzenie równoważności tych definicji pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Podobnie, łatwo jest sprawdzić, posługując się tylko definicją, że

$$\sup\{a\} = a \quad \text{dla każdego } a \in R, \quad \sup([a, b]) = b \quad \text{dla wszystkich } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Teraz możemy już sformułować zapowiedziany aksjomat ciągłości.

**Aksjomat ciągłości (Dedekinda).** Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór  $A \subset \mathbb{R}$  ma kres górny  $M = \sup A \in \mathbb{R}$ .

**Uwaga.** Analogicznie do ograniczenia górnego i kresu górnego definiuje się ograniczenie dolne zbioru liczb i kres dolny niepustego zbioru liczb  $A \subset \mathbb{R}$ . Kres dolny oznaczamy symbolem ‘ $\inf$ ’, od łacińskiego *infimum*. Liczba  $\inf A$  jest największym ograniczeniem dolnym niepustego zbioru  $A \subset \mathbb{R}$ . Sformułowanie ścisłych definicji pozostawiamy jako ćwiczenie.

Zbiór, który ma ograniczenie dolne, nazywa się ograniczny z dołu. Mówimy, że zbiór jest ograniczony, gdy jest ograniczony z góry i z dołu.

Wygodnie jest przyjąć następującą dodatkową umowę, która w wielu sytuacjach jest naturalna:  $\sup A = +\infty$ , gdy  $A$  nie jest ograniczony z góry, oraz  $\inf A = -\infty$ , gdy  $A$  nie jest ograniczony z dołu. Ponadto,

$$\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty,$$

gdzie symbol  $\emptyset$  oznacza zbiór pusty.

#### 1.1.4 Podzbiory $\mathbb{R}$

Wielokrotnie będziemy spotykać następujące podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, skąd inąd dobrze Czytelnikowi znane: zbiór liczb naturalnych,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

zbiór liczb całkowitych<sup>2</sup>,

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

oraz zbiór liczb wymiernych

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

O kluczowych własnościach zbioru  $\mathbb{N}$  i jednym z możliwych sposobów aksjomatycznego wprowadzenia tego zbioru opowiemy w następnym podrozdziale. Teraz sformułujemy twierdzenie, z którego wynika, że zbiór liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$  jest istotnie mniejszy, niż zbiór liczb rzeczywistych. Zbiór  $\mathbb{Q}$ , z naturalnymi działaniami “na ułamkach” i szkolną relacją mniejszości, spełnia wprawdzie (jak nietrudno sprawdzić, choć nie jest to zajęcie szczególnie pasjonujące) wszystkie aksjomaty ciała i porządku. Jednak  $\mathbb{Q}$  nie spełnia aksjomatu ciągłości: nie każdy ograniczony z góry zbiór liczb wymiernych ma kres górnny, który jest liczbą wymierną.

**Twierdzenie 1.3.** *Zbiór liczb niewymiernych,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , jest niepusty.*

Dowód podamy już teraz, choć niektóre występujące w nim liczby nie zostały jeszcze w sposób ścisły zdefiniowane. Czytelnik zna je jednak pewnie ze szkoły, a ich ścisłe określenia pozna w ciągu najbliższych tygodni na wykładzie.

**Dowód 1.** Wykażemy, że  $\sqrt{2}$  nie jest liczbą wymierną. Przypuśćmy na chwilę, że jest przeciwnie i  $\sqrt{2} = p/q$ , gdzie  $p$  i  $q$  są całkowite,  $q \neq 0$ . Ponieważ  $\sqrt{2}$  jest dodatni, więc możemy bez zmniejszenia ogólności założyć, że  $p$  i  $q$  są liczbami naturalnymi. Możemy także założyć, w razie potrzeby skracając licznik i mianownik ułamka  $p/q$ , że  $p$  i  $q$  są względnie pierwsze, tzn. nie mają żadnego wspólnego dzielnika większego niż 1.

Jeśli  $\sqrt{2} = p/q$ , to  $2 = p^2/q^2$ , a więc  $2q^2 = p^2$ . Liczby  $p^2$  i  $2q^2$ , zapisane w systemie dziesiątkowym, muszą więc mieć tę samą ostatnią cyfrę. Zbadajmy, jakie są wszystkie możliwości, wypisując ostatnią cyfrę każdej z liczb  $q$ ,  $q^2$  i  $2q^2$  w tabelce:

---

<sup>2</sup>Symbol  $\mathbb{Z}$ , na ogół nie używany w polskiej szkole, za to powszechnie używany przez matematyków na całym świecie, pochodzi od niemieckiego słowa *Zahlen*, liczby.

$q \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q^2 \pmod{10}$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2q^2 \pmod{10}$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

(Symbol  $k \pmod{10}$  oznacza resztę z dzielenia  $k$  przez 10, czyli właśnie ostatnią cyfrę liczby  $k$  w zapisie dziesiątkowym. Każdy, kto zna szkolny algorytm mnożenia pisemnego, może sam sprawdzić, dlaczego tabelka jest taka, a nie inna).

Ale ostatnia cyfra liczby  $p^2$  musi być jedną z cyfr środkowego wiersza tej tabelki. I musi być taka sama, jak ostatnia cyfra  $2q^2$ . Jedyna możliwość to

$$p^2 \equiv 2q^2 \equiv 0 \pmod{10}.$$

Nietrudno jednak stwierdzić, że wtedy zarówno  $p$ , jak i  $q$ , dzielą się przez 5. Jest to sprzeczność, gdyż wiemy, że  $p$  i  $q$  nie mają wspólnych dzielników większych od 1. Użykana sprzeczność oznacza, że  $\sqrt{2}$  nie może być liczbą wymierną, co kończy dowód.  $\square$

**Dowód<sup>3</sup> 2.** Początek rozumowania jest taki sam, jak w pierwszym dowodzie. Zakładamy, że  $\sqrt{2} = p/q$  jest liczbą wymierną, gdzie  $p$  i  $q$  są naturalne i nie mają wspólnych dzielników większych od 1.

Jak wcześniej, z równości  $\sqrt{2} = p/q$  wynika, że  $2q^2 = p^2$ . Dalszy ciąg rozumowania jest nieco inny. Lewa strona tej równości jest parzysta, więc prawa też. Skoro  $p^2$  jest liczbą parzystą, to i  $p$  jest parzyste (gdyby bowiem  $p$  było nieparzyste, to  $p^2$  także byłoby nieparzyste: przecież jeśli  $p = 2k + 1$ , to  $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ). Zatem  $p = 2k$  dla pewnego  $k$  naturalnego. W takim razie,

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

to zaś oznacza, że  $q^2 = 2k^2$ . Liczba  $q^2$  jest więc parzysta. Zatem  $q$  jest liczbą parzystą,  $q = 2l$  dla pewnego  $l$  naturalnego. Stwierdziliśmy więc, że  $p$  i  $q$  dzielą się przez 2, a to jest sprzeczność. Sprzeczność wzięła się z założenia, że  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , więc ostatecznie  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Dowód 3.** Wykażemy, że liczba  $x = \log 2$  (gdzie logarytm bierzemy przy podstawie 10), czyli taka liczba dodatnia  $x$ , która spełnia równość  $10^x = 2$ , nie jest wymierna.<sup>4</sup>

Przypuśćmy, że  $x = \log 2 = p/q$ , gdzie  $p$  i  $q$  są naturalne. Wtedy  $10^{p/q} = 2$ . Podnosząc obie strony do potęgi  $q$ , dostaniemy  $10^p = 2^q$  dla pewnych  $p, q \in \mathbb{N}$ . To jednak jest oczywista sprzeczność, gdyż jedna z tych liczb dzieli się przez 5, a druga nie.

## 1.2 Liczby naturalne i zasada indukcji zupełnej

Niech  $\mathcal{A}$  będzie rodziną wszystkich takich podzbiorów  $A \subset \mathbb{R}$ , które spełniają jednocześnie dwa warunki:

1.  $1 \in A$ ;
2. Jeśli liczba rzeczywista  $x \in A$ , to  $x + 1 \in A$ .

---

<sup>3</sup>W pradawnych czasach Rzeczypospolitej Drugiej i Pół ten dowód poznawali wszyscy uczniowie ósmej klasy szkoły podstawowej.

<sup>4</sup>Czytelnik być może uczył się o logarytmach w szkole; za kilka tygodni zobaczymy, jak zdefiniować logarytm w sposób ścisły.

Nietrudno sprawdzić, że np. zbiór wszystkich liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ , a także zbiór  $\mathbb{R}_+$ , należą do rodziny  $\mathcal{A}$ . Nietrudno sobie także wyobrazić wiele – nieskończenie wiele! – innych zbiorów, należących do tej rodziny: bierzemy liczbę 1 i dowolną “chmurkę” punktów z przedziału  $(1, 2)$ , a następnie tworzymy sumę przesuniętych kopii takiego zbioru. Innymi słowy, bierzemy zbiór

$$B \subset [1, 2) \quad \text{taki, że } 1 \in B,$$

i kładziemy

$$A = B \cup (1 + B) \cup (2 + B) \cup \dots,$$

gdzie  $k + B = \{k + x : x \in B\}$ .

Znany skądinąd zbiór liczb naturalnych można, uprawiając aksjomatyczną teorię liczb rzeczywistych, określić następująco.

**Definicja 1.4.**  $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ dla każdego zbioru } A \in \mathcal{A}\}$ .

Inaczej mówiąc, zbiór liczb naturalnych to część wspólna wszystkich zbiorów należących do rodziny  $\mathcal{A}$ , tzn.

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

**Stwierdzenie 1.5.** *Zbiór  $\mathbb{N}$  nie jest ograniczony z góry.*

Dowód. Liczba  $1 \in \mathbb{N}$ , więc  $\mathbb{N}$  jest niepusty. Postawmy hipotezę, przeczącą tezie, tzn. przypuśćmy, że  $\mathbb{N}$  jest ograniczony z góry. Zgodnie z aksjomatem ciągłości, zbiór  $\mathbb{N}$  ma wtedy kres górny  $b = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ .

Z definicji kresu,  $b \geq n$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Z drugiej własności wszystkich zbiorów rodziny  $\mathcal{A}$  wynika, że  $b \geq n+1$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ . Stąd jednak  $b - 1 \geq n$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , więc  $b - 1$  jest ograniczeniem górnym  $\mathbb{N}$ . Ponownie korzystając z definicji kresu górnego – z drugiego podanego w niej warunku – stwierdzamy, że

$$b - 1 \geq \sup \mathbb{N} = b,$$

a zatem  $-1 \geq 0$ , czyli  $0 \geq 1$ . To jest sprzeczność, więc przyjęta hipoteza musiała być fałszywa. Zbiór  $\mathbb{N}$  nie jest zatem ograniczony z góry.  $\square$

**Wniosek 1.6** (aksjomat Archimedesa). *Dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b \in \mathbb{R}$  istnieje taka liczba naturalna  $n$ , że  $an > b$ .*

Dowód. Gdyby  $an \leq b$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , to liczba  $b/a$  byłaby ograniczeniem górnym  $\mathbb{N}$ . Wiemy już jednak, że zbiór  $\mathbb{N}$  nie jest ograniczony z góry.  $\square$

Omówimy teraz ważną metodę dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych, tak zwaną zasadę indukcji matematycznej (zwaną także zasadą indukcji zupełnej).

**Twierdzenie 1.7.** *Przypuśćmy, że pewna własność  $W$  przysługuje pewnym liczbom naturalnym, przy czym spełnione są dwa warunki:*

(i) *W(1), tzn. własność W przysługuje liczbie 1;*

(ii) *Jeśli W(n), to także W(n + 1).*

Wówczas własność  $W$  przysługuje wszystkim liczbom naturalnym.

Dowód. Niech  $A$  będzie zbiorem wszystkich tych liczb naturalnych, którym przysługuje własność  $W$ , tzn.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : W(n)\}.$$

Oczywiście  $A \subset \mathbb{N}$ . Pokażemy teraz, że  $A$  należy do rodziny  $\mathcal{A}$ .

Z założenia (i) mamy  $1 \in A$ , tzn. spełniony jest pierwszy z warunków z definicji rodziny  $\mathcal{A}$ . Ponadto, jeśli  $x \in A$ , to zachodzi  $W(x)$ , więc na mocy założenia (ii) zachodzi także  $W(x+1)$ , a to znaczy, że  $x+1 \in A$ . Spełniony jest więc również drugi warunek z definicji rodziny  $\mathcal{A}$ .

Zatem  $A \in \mathcal{A}$ . Ponieważ  $\mathbb{N}$  jest częścią wspólną wszystkich zbiorów rodziny  $\mathcal{A}$ , więc  $\mathbb{N} \subset A$ .

Otrzymaliśmy więc dwie inkluze:  $A \subset \mathbb{N}$  i  $\mathbb{N} \subset A$ . To oznacza, że  $A = \mathbb{N}$ .  $\square$

Spójrzmy teraz na przykłady zastosowań zasady indukcji zupełnej w konkretnych dowodach. Pierwszy z nich będzie bardzo prosty, dwa pozostałe – wyraźnie trudniejsze.

**Stwierdzenie 1.8** (nierówność Bernoulliego). *Dla każdej liczby rzeczywistej  $a \geq -1$  i dla każdej liczby  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność*

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Dowód. Ustalmy dowolne  $a \geq -1$ .

*Etap 1 (baza indukcji).* Sprawdzamy, co się dzieje dla  $n = 1$ . Zarówno lewa, jak i prawa strona są wtedy równe  $1+a$ , więc nierówność Bernoulliego zachodzi dla  $n = 1$ .

*Etap 2 (krok indukcyjny).* Założymy, że  $(1+a)^n \geq 1+na$ . Wykażemy, że wtedy  $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$ .

Z aksjomatu N.3(b) i własności  $x \cdot 0 = 0$  wynika, że obie strony nierówności nieostrej wolno pomnożyć przez liczbę nieujemną. Ponieważ  $1+a \geq 0$ , więc z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) \\ &= 1+na+a+na^2 \\ &\geq 1+na+a \quad \text{gdyż } na^2 \geq 0 \text{ dla wszystkich } n \text{ i } a \\ &= 1+(n+1)a. \end{aligned}$$

*Etap 3 (konkluzja).* Stwierdziliśmy, że nierówność Bernoulliego zachodzi dla liczby  $n = 1$ , a także, że jeśli zachodzi dla liczby  $n$ , to zachodzi i dla  $n + 1$ . Zatem, zgodnie z zasadą indukcji zupełnej, nierówność Bernoulli'ego zachodzi dla każdej liczby naturalnej  $n$ . Teza stwierdzenia wynika z dowolności  $a \geq -1$ .  $\square$

**Uwaga.** Proszę sprawdzić, że równość w nierówności Bernoulliego zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $n = 1$  lub  $a = 0$ .

Dla potrzeb drugiego przykładu zdefiniujemy najpierw średnią arytmetyczną i geometryczną  $n$  liczb rzeczywistych nieujemnych. Jeśli  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ , to kładziemy

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}.$$

$A_n$  to średnia arytmetyczna liczb  $a_1, \dots, a_n$  (tu założenie o nieujemności nie jest potrzebne; definicja średniej arytmetycznej ma sens dla dowolnych liczb rzeczywistych, niekoniecznie nieujemnych), natomiast  $G_n$  jest średnią geometryczną liczb nieujemnych  $a_1, \dots, a_n$ .

(Pierwiastki dowolnego stopnia z liczb nieujemnych zdefiniujemyściśle po omówieniu przykładów dowodów indukcyjnych. Teraz wystarczy nam wiedzieć, że  $\sqrt[n]{0} = 0$ , a dla  $x > 0$  liczba  $y = \sqrt[n]{x}$  jest dodatnia i ma tę własność, że  $y^n = x$ ).

**Twierdzenie 1.9** (nierówność między średnimi). *Dla każdej liczby  $n \in \mathbb{N}$  i dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  zachodzi nierówność*

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} = G_n.$$

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek nietrywialny, gdy wszystkie  $a_i$  są dodatnie. (Gdy choćby jedna z liczb  $a_i$  jest zerem, to oczywiście  $G_n = 0 \leq A_n$ ).

*Baza indukcji.* Dla  $n = 1$  mamy jedną liczbę nieujemną  $a_1$ . Teza jest prawdziwa, gdyż wtedy  $A_1 = a_1 = G_1$ .

*Krok indukcyjny.* Założymy, że dla pewnego  $m$  naturalnego nierówność

$$\frac{b_1 + \dots + b_m}{m} \geq (b_1 \dots b_m)^{1/m}$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Wykażemy, że przy takim założeniu dla dowolnych liczb dodatnich  $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$  jest  $A_{m+1} \geq G_{m+1}$ .

Będziemy dowodzić równoważnej nierówności  $A_{m+1}^{m+1} \geq G_{m+1}^{m+1}$ . Skorzystamy z nierówności Bernoulliego, ale nie zrobimy tego od razu.

Z uwagi na przemienność dodawania i mnożenia mamy prawo założyć, że  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \leq a_{m+1}$ . Wtedy, ponieważ średnia arytmetyczna  $m$  składników nie przekracza największego z tych składników, mamy

$$A_m = \frac{a_1 + \dots + a_m}{m} \leq \frac{ma_m}{m} = a_m \leq a_{m+1}. \quad (1.2)$$

Zapiszmy teraz średnią  $A_{m+1}$  w nieco innej postaci:

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= \frac{mA_m + a_{m+1}}{m+1} \\ &= A_m + \frac{a_{m+1} - A_m}{m+1}, \quad \text{gdyż } \frac{m}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1}, \\ &= A_m \left( 1 + \underbrace{\frac{a_{m+1} - A_m}{(m+1)A_m}}_a \right) \end{aligned}$$

(wypisując ostatnią linijkę, po prostu wyłączymy  $A_m$  przed nawias).

Z nierówności (1.2) wynika, że

$$a = \frac{a_{m+1} - A_m}{(m+1)A_m} \geq 0 \geq -1,$$

a to znaczy, że nierówność Bernoulliego można stosować do szacowania potęg sumy  $(1+a)$  z dołu. Piszemy teraz

$$\begin{aligned}
 A_{m+1}^{m+1} &\geq A_m^{m+1}(1+a)^{m+1} \\
 &\geq A_m^{m+1}(1+(m+1)a) \quad (\text{tu użyliśmy nierówności Bernoulliego}) \\
 &= A_m^{m+1} \left(1 + \frac{a_{m+1} - A_m}{A_m}\right) = A_m^m a_{m+1} \\
 &\geq G_m^m a_{m+1} \quad (\text{tu użyliśmy założenia indukcyjnego}) \\
 &= (a_1 a_2 \dots a_m) a_{m+1} = G_{m+1}^{m+1}.
 \end{aligned}$$

Zatem,  $A_{m+1} \geq G_{m+1}$ . Stąd, na mocy zasady indukcji zupełnej, wynika już teza twierdzenia.  $\square$

**Uwaga.** Czytelnik może się zastanawiać: skąd było wiadomo, że aby wykazać nierówność między średnimi, trzeba rozumować akurat tak? Na takie pytania często nie ma łatwych odpowiedzi. Tu akurat można było zauważać, że dla dużych  $a_1 = a_2 = \dots$  lewa strona nierówności  $A_m^m \geq G_m^m$  rośnie wykładniczo wraz z  $m$  i spróbować szacowania (z dołu) czegoś rosnącego wykładniczo przez coś, co rośnie zaledwie liniowo – do tego służy nierówność Bernoulliego. Reszta powyższego dowodu polega na stosunkowo prostych przekształceniach, potrzebnych, by  $A_{m+1}^{m+1}$  przekształcić do odpowiedniej postaci.

Podamy teraz drugi dowód nierówności między średnimi, po to, żeby zilustrować, że rozumowania indukcyjne mogą mieć bardzo różny charakter. Dla zobrazowania zasady indukcji zupełnej używa się często porównania z kostkami domina: jeśli wiadomo, że kostki domina są ustawione w rzędzie, na tyle blisko, że każda z nich, upadając, przewróci następną, to przewrócenie pierwszej kostki spowoduje przewrócenie wszystkich. W kolejnym dowodzie nierówności między średnimi ustawienie kostek będzie bardzo fantazyjne: takie, że dla każdego  $n$  kostka  $n$ -ta przewraca kostkę o numerze  $2n$ , a kostka  $k$ -ta przewraca kostkę z numerem  $(k-1)$ .

Dowód. Jak wcześniej, założymy, że wszystkie  $a_i$  są dodatnie. Dowód ma trzy części.

Po pierwsze, sprawdzamy, że  $A_1 \geq G_1$  (to oczywiste) i  $A_2 \geq G_2$ . Druga nierówność jest równoważna innej,  $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ .

Po drugie, wykażemy, że jeśli nierówność między średnimi zachodzi dla dowolnych liczb  $b_1, \dots, b_n > 0$ , to zachodzi także dla dowolnych liczb  $a_1, \dots, a_{2n} > 0$ . Istotnie, korzystając najpierw (dwukrotnie) z nierówności między średnimi dla  $n$  liczb, a potem z nierówności  $A_2 \geq G_2$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 A_{2n} &= \frac{1}{2} \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n} \right) \\
 &\geq \frac{(a_1 \dots a_n)^{1/n} + (a_{n+1} \dots a_{2n})^{1/n}}{2} \\
 &\geq \sqrt{(a_1 \dots a_n)^{1/n} (a_{n+1} \dots a_{2n})^{1/n}} \\
 &= G_{2n}.
 \end{aligned}$$

(Komentarz: teraz wiemy, że nierówność między średnimi zachodzi dla  $n$  liczb, gdy  $n \in \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ . Te wartości  $n$  stanowią zdobyte przyczółki.)

Po trzecie, dowodzimy, że jeśli nierówność między średnimi zachodzi dla  $n + 1$  liczb dodatnich, to zachodzi także dla  $n$  liczb dodatnich. Piszemy

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{n}{n+1} A_n + \frac{1}{n+1} A_n \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + A_n}{n+1} \quad \text{w liczniku jest } n+1 \text{ liczb} \\ &\geq (a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot A_n)^{1/(n+1)}, \quad \text{z nierówności dla } n+1 \text{ liczb,} \\ &= G_n^{n/(n+1)} A_n^{1/(n+1)}. \end{aligned}$$

Dzielimy obie strony przez  $A_n^{1/(n+1)}$ , podnosimy do potęgi  $(n+1)$  i otrzymujemy  $A_n^n \geq G_n^n$ .

(Komentarz: teraz wiemy, że z każdego zdobytego wcześniej przyczółka, tzn. od każdej z wartości  $n = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ , można cofać się jednostkowymi krokami.)

Z trzech części dowodu wynika już teza twierdzenia.  $\square$

**Zadanie 1.10.** Analizując wybrany dowód nierówności między średnimi, wykazać, że  $A_n = G_n$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $n = 1$  lub  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

### 1.3 Pierwiastki $n$ -tego stopnia

Posługiwaliśmy się już pierwiastkami  $n$ -tego stopnia z liczb nieujemnych. Aby mieć pewność, że wolno było tak postępować, udowodnimy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1.11.** Dla każdej liczby  $a \geq 0$  i każdego  $n \in \mathbb{N}$  istnieje dokładnie jedna liczba  $b \geq 0$  taka, że  $b^n = a$ . Piszemy wówczas  $b = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ .

Dowód twierdzenia poprzedzimy sformułowaniem pomocniczego faktu.

**Lemat 1.12** (wzór na różnicę  $n$ -tych potęg). Dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$  i wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  zachodzi równość

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}). \quad (1.3)$$

**Szkic dowodu.** To jest nieznacznie przekształcony wzór na sumę skończonego postępu geometrycznego. Gdy  $y = 0$ , nie ma czego dowodzić; obie strony są równe  $x^n$ . Jeśli  $y \neq 0$ , to dzieląc obie strony (1.3) przez  $y^n$  i kładąc  $q = x/y$ , otrzymujemy równoważny tezie lematu wzór

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + 1).$$

Nietrudno jest udowodnić go przez indukcję. Można także po prostu “otworzyć nawiasy” i zaobserwować, że prawa strona jest równa

$$q^n + \underbrace{(-q^{n-1}) + q^{n-1}}_{=0} + \underbrace{(-q^{n-2}) + q^{n-2}}_{=0} + \dots + \underbrace{(-q) + q}_{=0} - 1,$$

czyli po prostu  $q^n - 1$ , gdyż każda ze wskazanych par składników ma sumę zero.

**Dowód Twierdzenia 1.11.** Zaczniemy od wykazania jednoznaczności pierwiastków  $n$ -tego stopnia. Gdyby dla pewnego  $a \geq 0$  było  $b^n = b_1^n = a$ , gdzie  $b, b_1 \geq 0$ , to byłoby wtedy

$$0 = b^n - b_1^n = (b - b_1) \underbrace{(b^{n-1} + b^{n-2}b_1 + \dots + b_1^{n-1})}_{=(\text{ozn.}) M}$$

Zatem,  $b - b_1 = 0$  lub  $M = 0$  (jeden z czynników musi zniknąć). W pierwszym przypadku mamy  $b = b_1$ . W drugim przypadku, ponieważ  $b, b_1 \geq 0$ , liczba  $M$  jest sumą  $n$  nieujemnych składników. Równość  $M = 0$  może zachodzić jedynie wtedy, gdy każdy z tych składników jest zerem, czyli jedynie wtedy, gdy  $b = b_1 = 0$ .

W obu przypadkach mamy więc  $b = b_1$ . Dla każdego  $a \geq 0$  istnieje zatem *co najwyżej jedna* liczba  $b \geq 0$  taka, że  $b^n = a$ .

Teraz zajmiemy się istnieniem. Dla  $a = 1$  (odpowiednio,  $a = 0$ ), wystarczy wziąć  $b = 1$  (odpowiednio,  $b = 0$ ). Gdy już udowodnimy tezę dla liczb  $a > 1$ , to dla  $a \in (0, 1)$  będzie można postąpić następująco: gdy  $a \in (0, 1)$ , to  $a^{-1} > 1$ , więc istnieje pierwiastek  $n$ -tego stopnia z  $a^{-1}$ , tzn. liczba  $b_1$  taka, że  $b_1^n = a^{-1}$ . Wtedy jednak liczba  $b = b_1^{-1}$  spełnia równość

$$b^n = (b_1^{-1})^n = (b_1^n)^{-1} = (a^{-1})^{-1} = a,$$

tzn. jest pierwiastkiem  $n$ -tego stopnia z  $a$ .

Wystarczy więc rozważyć przypadek  $a > 1$ . Tym się teraz zajmiemy. Niech

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x^n \leq a\}.$$

Jeśli  $x \in S$ , to  $x \leq a$ , bowiem w przeciwnym przypadku mielibyśmy  $x^n > a^n > a > 1$ , a to jest sprzeczność z definicją zbioru  $S$ . Liczba  $a$  jest więc ograniczeniem górnym zbioru  $S$ , a ponadto  $1 \in S$ , bo  $1 = 1^n < a$ .

Z aksjomatu ciągłości wynika, że zbiór  $S$  ma kres górny  $b = \sup S$ . Musi zachodzić jeden z trzech przypadków,

$$b^n < a, \quad b^n > a, \quad b^n = a.$$

Pokażemy, że pierwsza i druga możliwość prowadzą do sprzeczności.

Przypuśćmy, że  $b^n < a$ . Rozważmy liczbę  $b + \varepsilon$ ; niewielką liczbę dodatnią  $\varepsilon \in (0, a)$  dobierzemy za chwilę tak, aby uzyskać sprzeczność  $b = \sup S < b + \varepsilon \in S$ . Z lematu otrzymujemy

$$\begin{aligned} (b + \varepsilon)^n - b^n &= \varepsilon ((b + \varepsilon)^{n-1} + (b + \varepsilon)^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \\ &< \varepsilon \cdot n(b + a)^{n-1} \end{aligned}$$

(każdy z  $n$  składników w nawiasie szacujemy z góry przez  $(b + a)^{n-1}$ ). Biorąc dowolną liczbę

$$0 < \varepsilon < \frac{a - b^n}{n(b + a)^{n-1}},$$

przekonujemy się, że  $(b + \varepsilon)^n - b^n < a - b^n$ , tzn.  $(b + \varepsilon)^n < a$ , a więc  $b + \varepsilon \in S$ . Stąd  $b + \varepsilon \leq \sup S = b$ , czyli  $\varepsilon \leq 0$ . To jest zapowiedziana sprzeczność.

Przypuśćmy zatem, że  $b^n > a$ . Rozważając tym razem  $b - \delta$ , gdzie  $\delta$  jest małą liczbą dodatnią, otrzymujemy, ponownie stosując Lemat,

$$b^n - (b - \delta)^n = \delta (b^{n-1} + b^{n-2}(b - \delta) + \cdots + (b - \delta)^{n-1}) < \delta \cdot nb^{n-1} < b^n - a,$$

o ile tylko  $0 < \delta < (b^n - a)/nb^{n-1}$  (wtedy mamy prawo napisać ostatnią nierówność). To jednak oznacza, że

$$(b - \delta)^n > a.$$

Z definicji zbioru  $S$  mamy więc  $(b - \delta)^n > x^n$  dla każdego  $x \in S$ , czyli  $b - \delta \geq \sup S = b$ . Stąd  $-\delta \geq 0$ , jednak liczbę  $\delta$  wybraliśmy wcześniej dodatnią! Ta sprzeczność oznacza, że przypadek  $b^n > a$  także nie może zachodzić.

Została tylko jedna możliwość:  $b^n = a$ .  $\square$

**Uwaga.** Wygodnie jest przyjąć następującą dodatkową umowę: jeśli  $a < 0$ , natomiast  $n = 2k + 1$  jest liczbą naturalną nieparzystą, to kładziemy

$$a^{1/n} = -(-a)^{1/n}.$$

Wtedy rzeczywiście  $(a^{1/n})^n = a$ , co wynika z przemienności mnożenia i stąd, że  $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = -1$ . Nietrudno zauważać, że dla  $n = 2k$  analogiczna umowa nie miałaby sensu: parzysta potęga liczby rzeczywistej  $b$ ,  $b^{2k} = (b^k)^2$  jest nieujemna, co wynika z własności (W8), patrz strona 3.

## 1.4 Liczby całkowite. Entier. Gęstość zbioru liczb wymiernych i niewymiernych

Jak już wiemy, zbiór liczb całkowitych jest określony następująco

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}).$$

Przytoczymy bez dowodu dwa twierdzenia, opisujące własności zbioru  $\mathbb{Z}$ .

**Twierdzenie 1.13.** Jeśli  $k \in \mathbb{Z}$ , to w przedziale otwartym  $(k, k + 1)$  nie ma żadnej liczby całkowitej, tzn.  $(k, k + 1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ .

**Twierdzenie 1.14.** Jeśli zbiór niepusty  $A \subset \mathbb{Z}$  jest ograniczony z góry (odpowiednio: z dołu), to w  $A$  istnieje element największy (odpowiednio: najmniejszy).

Każde z tych twierdzeń<sup>5</sup> można sprowadzić do odpowiednich własności zbioru liczb naturalnych, których dowodzi się, stosując zasadę indukcji zupełnej. Nie będziemy tego robić; szczegóły pozostawiamy zainteresowanemu Czytelnikowi.

**Definicja 1.15** (Entier, czyli część całkowita liczby rzeczywistej). Dla każdej liczby  $x \in \mathbb{R}$  określamy

$$[x] = \sup \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}. \quad (1.4)$$

Zatem, na przykład,  $[7] = 7 = -[-7]$ ,  $[\frac{1}{3}] = 0$ ,  $[\sqrt{2}] = 1$ , ale  $[-\sqrt{2}] = -2$ , gdyż największy całkowitą nie przekraczającą  $-1,4142\dots = -\sqrt{2}$  jest właśnie  $-2$ .

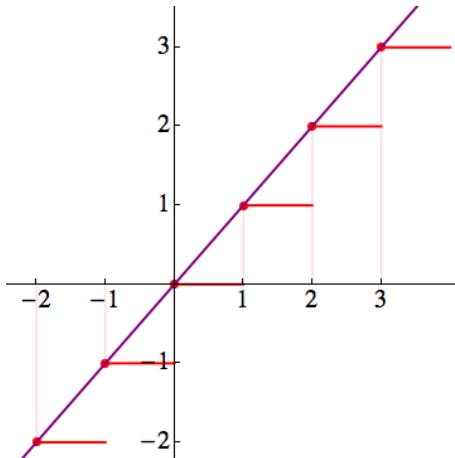
**Stwierdzenie 1.16.** Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  liczba  $[x]$  jest całkowita i spełnia nierówności

$$[x] \leq x < [x] + 1. \quad (1.5)$$

Dowód. Odpowiednie własności  $[x]$  widać na załączonym rysunku.

---

<sup>5</sup>Nawiąsem: ze szkolnego, a także zdroworozsądkowego punktu widzenia oba twierdzenia są, praktycznie biorąc, oczywiste – tzn. wyrażają nasze bardzo naturalne intuicje związane ze strukturą zbioru liczb całkowitych.



Oto niedługi dowód, dla zainteresowanych formalizacją. To, że  $[x] \in \mathbb{Z}$ , wynika z definicji części całkowitej i własności zbioru  $\mathbb{Z}$ , wyrażonej w Twierdzeniu 1.14: zbiór

$$K = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

jest ograniczony z góry przez  $x$ , a liczba  $[x]$  jest największym elementem  $K$ . Mamy  $[x] \leq x$  wprost z definicji supremum. Gdyby  $[x] + 1 \leq x$ , to byłoby

$$\sup K = [x] < [x] + 1 \in K,$$

a to jest sprzeczność z definicją supremum.  $\square$

**Funkcja entier i funkcja  $f(x) = x$ .** Lewy koniec każdego z poziomych odcinków wykresu  $[x]$  należy do tego wykresu, a prawy – nie.

Wiemy już zatem (z grubsza), co to są liczby rzeczywiste, naturalne, całkowite i wymierne. Wiemy też, że istnieją liczby niewymierne; jedną z nich jest  $\sqrt{2}$ . Sformułujmy jeszcze jedną ważną własność,

która ma zarówno zbiór  $\mathbb{Q}$  liczb wymiernych, jak i zbiór  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  liczb niewymiernych.

**Definicja 1.17.** Zbiór  $A \subset \mathbb{R}$  nazywa się gęsty, jeśli dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ , istnieje element  $a \in A$  taki, że  $x < a < y$ .

**Twierdzenie 1.18.** Zarówno zbiór  $\mathbb{Q}$  liczb wymiernych, jak i zbiór  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  liczb niewymiernych, są gęste w  $\mathbb{R}$ .

Mówiąc inaczej, w każdym przedziale otwartym prostej rzeczywistej jest jakaś liczba wymierna i jakaś liczba niewymierna.

Dowód. Ustalmy dowolne  $x, y \in \mathbb{R}$  takie, że  $x < y$ . Najpierw wskażemy liczbę wymierną  $w$ , która należy do przedziału  $(x, y)$ .

Wiemy, że  $[nx] \leq nx < [nx] + 1$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Stąd

$$\frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} =: w.$$

Ponieważ  $[nx] \in \mathbb{Z}$ , więc  $w \in \mathbb{Q}$ . Pozostaje dobrać  $n$  tak, żeby  $w < y$ , ale to nietrudne: mamy  $[nx]/n \leq x$ , a zatem

$$w = \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n}.$$

Wystarczy więc, gdy  $x + \frac{1}{n} < y$ , a tak jest dla dowolnej liczby  $n > 1/(y-x)$  (proszę zauważać, że korzystamy tu z dwóch faktów:  $y-x > 0$ , więc  $1/(y-x) > 0$ , a ponadto zachodzi aksjomat Archimedesa).

**Uwaga.** Ta część dowodu wyraża prostą intuicję: jeśli wyruszamy z punktu  $0 \in \mathbb{R}$  i idziemy krokami długości  $1/n$ , to stąpamy tylko po liczbach wymiernych i nie możemy ominąć żadnej “dziury” dłuższej niż  $1/n$ .

Teraz wskażemy liczbę niewymierną  $z$  taką, że  $x < w < z < y$ . Położymy

$$z = w + \frac{\sqrt{2}}{m}, \quad \text{gdzie } m \in \mathbb{N}.$$

Dla każdego  $m \in \mathbb{N}$  mamy  $z > w$  (to oczywiste), a ponadto  $z \notin \mathbb{Q}$ , bowiem w przeciwnym przypadku mielibyśmy  $\sqrt{2} = m(z - w) \in \mathbb{Q}$ , a wiemy, że  $\sqrt{2}$  jest niewymierny. Pozostaje tylko dobrać  $m$  tak, żeby  $z < y$ , ale to nietrudne: ponieważ  $w < y$ , więc  $z < y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sqrt{2}/(y - w) < m$ . Bierzemy więc jako  $m$  dowolną liczbę naturalną, która jest większa od  $\sqrt{2}/(y - w)$ .  $\square$

**Uwaga.** Z Twierdzenia 1.18 wynika, że w każdym przedziale otwartym prostej rzeczywiście jest nieskończenie wiele liczb wymiernych i nieskończenie wiele liczb niewymiernych (Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego tak jest). W istocie, jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest dowolnym zbiorem gęstym, to do każdego przedziału otwartego należy nieskończenie wiele elementów zbioru  $A$ .

Na zakończenie tej partii wykładu podamy jeszcze jeden dowód istnienia liczb niewymiernych – dowód Dedekinda niewymierności pierwiastków niecałkowitych. To ilustracja, jak wiele można wywnioskować z najprostszych reguł arytmetyki i jednej własności zbioru  $\mathbb{N}$ : *w każdym niepustym zbiorze  $A \subset \mathbb{N}$  istnieje element najmniejszy*.

**Twierdzenie 1.19.** *Jeśli  $n, k \in \mathbb{N}$  i  $k \geq 2$ , to  $x = n^{1/k}$  jest albo liczbą naturalną, albo liczbą niewymierną.*

**Dowód.** Aby lepiej zilustrować najważniejszy pomysł dowodu, rozpatrzymy najpierw przypadek  $k = 2$ .

Przypuśćmy, że  $0 < x = \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ , ale jednak  $x \in \mathbb{Q}$ . Wtedy zbiór

$$A = \{m \in \mathbb{N} : mx \in \mathbb{N}\}$$

jest niepusty; to wynika wprost z definicji zbioru liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$ . Niech  $m_0$  będzie najmniejszym elementem  $A$ ; wtedy oczywiście  $m_0x = l \in \mathbb{N}$ .

Położymy  $m_1 = m_0(x - [x])$ . Z nierówności  $0 < x - [x] < 1$  (pamiętajmy:  $x$  nie jest liczbą całkowitą) wynika, że  $0 < m_1 < m_0$ . Ponadto,

$$m_1 = m_0x - m_0[x] = l - m_0[x] \in \mathbb{Z},$$

a więc  $m_1$  jest liczbą naturalną, bo  $m_1 > 0$ . Wreszcie, mamy

$$0 < m_1x = m_0x^2 - m_0x[x] = m_0n - l[x] \in \mathbb{Z},$$

a więc liczba  $m_1x$  też jest naturalna. To oznacza, że  $m_1 \in A$  i  $m_1 < m_0$ , a przy tym  $m_0$  jest najmniejszym elementem w zbiorze  $A$ . Otrzymaliśmy sprzeczność, która oznacza, że  $x = \sqrt{n}$  nie może być liczbą wymierną. To kończy dowód twierdzenia w przypadku  $k = 2$ .

Pokażemy teraz, jak rozważyć przypadek ogólny. Założymy, że  $x = n^{1/k} \notin \mathbb{N}$ . Przypuśćmy, że  $x \in \mathbb{Q}$ ; pokażemy, że to założenie prowadzi do sprzeczności. Niech

$$B = \{s \in \mathbb{N} : x^s \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór  $B \subset \mathbb{N}$  jest niepusty ( $k \in B$ , bowiem  $x^k = n$ ), więc zawiera element najmniejszy  $s_0$ ; przy tym  $s_0 > 1$ , gdyż  $1 \notin B$ . Oznaczmy

$$x^{s_0} = n_0. \tag{1.6}$$

Rozważmy zbiór

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \text{wszystkie liczby } mx, mx^2, \dots, mx^{s_0-1} \text{ są naturalne}\}.$$

Jest to zbiór niepusty, gdyż  $x, x^2, \dots, x^{s_0-1}$  są liczbami wymiernymi. Niech  $m_0$  będzie najmniejszym elementem zbioru  $A$ . Dla wygody oznaczmy

$$m_0x = l_1 \in \mathbb{N}, \quad m_0x^2 = l_2 \in \mathbb{N}, \quad \dots, \quad m_0x^{s_0-1} = l_{s_0-1} \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ  $s_0$  to najmniejszy element zbioru  $B$ , więc

$$0 < \varepsilon := x^{s_0-1} - [x^{s_0-1}] < 1$$

(liczba  $x^{s_0-1}$  nie jest naturalna, gdyż wtedy  $s_0 - 1$  należałoby do  $B$ ). Położmy  $m_1 = \varepsilon m_0$ . Wtedy  $0 < m_1 < m_0$ . Ponadto,

$$0 < m_1 = m_0\varepsilon = m_0x^{s_0-1} - m_0[x^{s_0-1}] = l_{s_0-1} - m_0[x^{s_0-1}] \in \mathbb{Z},$$

więc  $m_1$  jest liczbą naturalną. Wreszcie, nietrudno sprawdzić, że

$$m_1x \in \mathbb{N}, \quad m_1x^2 \in \mathbb{N}, \quad \dots, \quad m_1x^{s_0-1} \in \mathbb{N}.$$

Istotnie, niech  $j$  będzie dowolną z liczb  $1, 2, \dots, s_0 - 1$ . Wtedy

$$\begin{aligned} m_1x^j &= m_0\varepsilon x^j &= m_0x^{j-1}x^{s_0} - m_0x^j[x^{s_0-1}] \\ &\stackrel{(1.6)}{=} m_0x^{j-1}n_0 - l_j[x^{s_0-1}] \\ &= \begin{cases} m_0n_0 - l_1[x^{s_0-1}] & \text{gdy } j = 1, \\ l_{j-1}n_0 - l_j[x^{s_0-1}] & \text{gdy } j > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

a więc  $m_1x^j$  jest liczbą całkowitą. Do tego oczywiście  $m_1x^j > 0$ , więc  $m_1x^j$  jest liczbą naturalną. Zatem, z definicji zbioru  $A$  i dowolności  $j$ , liczba  $m_1 \in A$ .

Otrzymaliśmy więc

$$m_0 = \inf A > m_1 \in A.$$

Jest to sprzeczność, która kończy dowód.  $\square$

Ktoś, komu powyższy dowód wydaje się nie tylko pomysłowy, ale i trudny, powinien pamiętać, że o niewymierności  $\sqrt{2}$  wiadomo od dwóch i pół tysiąca lat, a Dedekind swój artykuł *Was sind und was sollen die Zahlen?* publikował, jako pięćdziesięcioparolatek, w roku 1888.

Nie należy się dziwić, jeśli nie rozumiemy w ciągu pół godziny czegoś, na co inni potrzebowali wielu lat.

## Rozdział 2

# Ciągi. Pojęcie granicy ciągu.

**Definicja 2.1.** Ciąg jest to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych.

Będziemy rozważać ciągi o wyrazach rzeczywistych, czyli – zgodnie z powyższą definicją – funkcje  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wartości takiej funkcji w kolejnych liczbach naturalnych nazywa się *wyrazami ciągu* i oznacza

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots$$

Zarówno na wykładzie, jak i na ćwiczeniach spotkamy wielokrotnie ciągi zdefiniowane w różny sposób: przez podanie ogólnego wzoru na  $n$ -ty wyraz, np.  $a_n = 1/n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ , albo przez określenie rekurencyjnej reguły, która pozwala obliczyć następny wyraz ciągu, gdy znane są wyrazy o wcześniejszych numerach, np.

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

(nawiasem: ciąg  $(F_n)$  nazywa się ciągiem Fibonacci’ego).

Ciągi służą matematykowi m.in. do tego, żeby nowe, nieznane jeszcze liczby rzeczywiste *przybliżać* liczbami prostszymi, już oswojonymi – np. liczbami wymiernymi. Bywa i na odwrót: znamy jakiś ciąg liczb, wyrażony skomplikowanym wzorem lub regułą, a chcemy powiedzieć coś względnie prostego i jasnego o zachowaniu dalekich wyrazów ciągu. Aby robić jedno i drugie w sposób możliwie ścisły, wprowadza się fundamentalne w całej Analizie pojęcie *granicy ciągu*. Zanim je wprowadzimy, przypomnijmy definicję wartości bezwzględnej.

**Definicja 2.2** (wartość bezwzględna liczby rzeczywistej). Dla  $x \in \mathbb{R}$  kładziemy

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Interpretacja wartości bezwzględnej, z którą będziemy nieustannie mieć do czynienia, jest następująca:  $|x|$  to odległość liczby (punktu)  $x$  od 0 na prostej rzeczywistej, a  $|x - a|$  to odległość punktów  $x \in \mathbb{R}$  i  $a \in \mathbb{R}$ .

**Stwierdzenie 2.3** (nierówność trójkąta). *Dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  zachodzi nierówność*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{2.1}$$

Dowód. Sprawdzenie przypadków, gdy obie liczby są tego samego znaku lub co najmniej jedna z nich jest zerem, jest łatwe. W nierówności trójkąta zachodzi wtedy równość. Szczególny pozostawiamy Czytelnikowi.

Pozostaje wykazać nierówność dla  $x < 0 < y$  (przypadek  $y < 0 < x$  jest w pełni analogiczny, wystarczy zamienić  $x$  i  $y$  rolami). Prawa strona (2.1), którą oznaczymy  $P$ , jest wtedy równa  $|x| + |y| = y - x$ . Lewa strona,  $L$ , jest równa  $x + y$  lub  $-x - y$ .

Jeśli  $L = x + y$ , to nierówność  $L \leq P$  jest równoważna temu, że  $x + y \leq y - x$ , czyli temu, że  $2x \leq 0$ , a wiemy, że ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż  $x < 0$ .

Jeśli natomiast  $L = -x - y$ , to nierówność  $L \leq P$  jest równoważna temu, że  $-x - y \leq y - x$ , czyli temu, że  $0 \leq 2y$ , a wiemy, że ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż  $y > 0$ .

□

## 2.1 Granica ciągu i jej podstawowe własności

**Definicja 2.4.** Ciąg  $(a_n)$  liczb rzeczywistych jest zbieżny do granicy  $g \in \mathbb{R}$  (inaczej: ma granicę  $g \in \mathbb{R}$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  takie, że dla wszystkich numerów  $m > n_\varepsilon$  zachodzi nierówność

$$|a_m - g| < \varepsilon.$$

Pozwólmy sobie na nieformalny komentarz. Warunek z definicji należy rozumieć tak: jakkolwiek małą liczbę  $\varepsilon > 0$  weźmiemy, można będzie wskazać taką liczbę  $n_\varepsilon$ , odpowiednio dobraną do  $\varepsilon$ , że wszystkie wyrazy ciągu  $(a_n)$  o numerach większych od  $n_\varepsilon$  będą się różnić od liczby  $g$  – granicy ciągu – mniej niż o  $\varepsilon$ . Mówiąc inaczej, liczba  $\varepsilon$  określa żądanego poziom dokładności przybliżenia  $a_m \approx g$ , natomiast  $n_\varepsilon$  wskazuje moment, od którego jesteśmy w stanie taką dokładność zapewnić.

**Oznaczenia i terminologia.** Ciąg, który ma granicę, nazywa się *zbieżny*. Ciąg *rozbieżny* to taki ciąg, który nie ma granicy  $g \in \mathbb{R}$ . Jeśli  $(a_n)$  ma granicę, która jest równa liczbie  $g \in \mathbb{R}$ , to piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

(skrót  $\lim$  pochodzi od łacińskiego *limes*), lub czasem po prostu:  $a_n \rightarrow g$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Oboma sposobami zapisu tego, że liczba  $g$  jest granicą ciągu  $(a_n)$ , będziemy posługiwać się zamiennie.

**Przykład 2.5.** Ciąg stały,  $a_n = a \in \mathbb{R}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , ma granicę równą  $a$ . □

**Przykład 2.6.** Ciąg  $a_n = \frac{1}{n}$  dla  $n = 1, 2, \dots$  ma granicę równą zero, tzn.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Sprawdzimy to, posługując się definicją. Weźmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Mamy wskazać  $n_\varepsilon$  tak, żeby  $|a_m - g| < \varepsilon$  dla wszystkich  $m > n_\varepsilon$ . Zobaczmy więc, kiedy nierówność  $|a_m - g| < \varepsilon$  jest spełniona. Mamy

$$|a_m - g| = \left| \frac{1}{m} - 0 \right| = \frac{1}{m} < \varepsilon$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $m > 1/\varepsilon$ . Można więc wybrać np.  $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 > 1/\varepsilon$ ; wtedy dla  $m > n_\varepsilon$  jest  $m > 1/\varepsilon$ , a więc  $\frac{1}{m} = |a_m - g| < \varepsilon$ , zgodnie z warunkiem podanym w definicji granicy.

**Uwaga** (banalna, ale nie pozbawiona pewnego sensu). W tym przykładzie równie dobrze moglibyśmy użyć jako  $n_\varepsilon$  dowolnej liczby naturalnej większej od  $1/\varepsilon$ , np. wziąć

$$n'_\varepsilon = \left( \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 7 \right)^3 + 2010^{2010}.$$

Z implikacji  $m > n'_\varepsilon$  wynika przecież, że  $m > 1/\varepsilon$ , a więc  $\frac{1}{m} = |a_m - g| < \varepsilon$ . W definicji granicy *nie ma mowy o tym, że powinniśmy liczbę  $n_\varepsilon$  wybrać najlepiej, jak tylko się da*.

Spójrzmy teraz na kolejny przykład, gdzie powyższa banalna uwaga ma pewne znaczenie.

**Przykład 2.7.** Niech  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ . Wykażemy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$ .

Postępujemy podobnie, jak w poprzednim przykładzie. Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Warunek

$$|a_m - g| = \left| \frac{1}{m!} - 0 \right| = \frac{1}{m!} < \varepsilon$$

jest równoważny innemu,  $m! > 1/\varepsilon$ . W przeciwnieństwie do poprzedniego przykładu, tej nierówności nie potrafimy łatwo rozwiązać, tzn. wyznaczyć wszystkich liczb  $m$ , które ją spełniają. Możemy jednak skorzystać z oczywistej nierówności  $m! \geq m$  i zauważyc, że jeśli  $m > n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ , to

$$m! \geq m > \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

a zatem warunek  $|a_m - g| < \varepsilon$  jest spełniony. Zatem, wprost z definicji  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$ .

W obu powyższych przykładach było rzeczą względnie jasną, jaka liczba powinna być granicą ciągu. Nie zawsze tak jest.

**Przykład 2.8.** Znajdziemy granicę ciągu  $a_n = \sqrt[n]{n}$ . Ktoś, kto nie dowiedział się wcześniej, że jest to ciąg zbieżny, ma prawo tego nie wiedzieć; ma także prawo mieć wątpliwość: *jaka właściwie liczba powinna być granicą tego ciągu?*

Aby wskazać możliwą odpowiedź na to pytanie, użyjemy brutalnej siły, tzn. przyjrzymy się odpowiednio dużej liczbie wyrazów ciągu. Odpowiedni eksperyment można przeprowadzić z użyciem dowolnego pakietu do obliczeń symbolicznych, np. pakietu *Mathematica*, dostępnego dla każdego użytkownika w laboratorium komputerowym Wydziału MIM. Krótki program

```
Do[Print[{n, N[n^(1/n), 8]}], {n, 1, 10000}]
```

pozwala wypisać przybliżone wartości wyrazów  $a_1, a_2, \dots, a_{10000}$  z dokładnością do 8 miejsc znaczących. Jego wykonanie nie trwa szczególnie długo. Oględziny wyników eksperymentu wskazują, że

$$\begin{aligned} a_2 &= 1,414\dots, & a_3 &= 1,442\dots, & a_4 &= a_2, & a_5 &< a_4, \\ a_{10} &= 1,258\dots, & a_{100} &= 1,047\dots, & a_{1000} &= 1,0069\dots, & a_{10000} &= 1,0009\dots. \end{aligned}$$

Naturalna, nawet temu, kto wątpi, że programy komputerowe robią naprawdę to, co im każemy, wydaje się więc hipoteza:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . Aby sprawdzić, że tak rzeczywiście jest, oznaczymy różnicę  $\sqrt[n]{n} - 1$  symbolem  $\delta_n$ . Użyjemy *dwumianu Newtona*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n,$$

gdzie tzw. *symbol Newtona* dany jest wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(Umowa:  $0! = 1$ .) Podstawiając  $a = 1$  i  $b = \delta_n$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} n = (\sqrt[n]{n})^n &= (1 + \delta_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\delta_n + \binom{n}{2}\delta_n^2 + [\text{cała reszta składników}] \\ &= 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \dots \end{aligned}$$

Stąd  $n > \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$  dla  $n > 1$ , gdyż suma składników dodatnich jest większa od każdego z nich; równoważnie,

$$\delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad \text{dla } n > 1. \quad (2.2)$$

Ponieważ w tym przykładzie  $|a_n - g| = |\sqrt[n]{n} - 1| = \delta_n$ , więc wystarczy sprawdzić, dla jakich  $n$  zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

Nietrudno się przekonać, że spełniają ją wszystkie liczby  $n > 1 + (2/\varepsilon^2)$ . Zatem, dla wszystkich  $n > n_\varepsilon := 2 + [2/\varepsilon^2]$  mamy

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = \delta_n \stackrel{(2.2)}{<} \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon,$$

a to, zgodnie z definicją granicy, oznacza, że  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  dla  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Przykład 2.9.** Ciąg  $a_n = (-1)^n$ , czyli ciąg liczb  $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$  jest rozbieżny. Gdyby liczba  $g \in \mathbb{R}$  była jego granicą, to biorąc w warunku z definicji granicy  $\varepsilon = 1/2$  otrzymalibyśmy

$$g - \frac{1}{2} < a_n < g + \frac{1}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_\varepsilon = n_{1/2}.$$

To jednak jest niemożliwe: przedział  $(g - 1/2, g + 1/2)$  ma długość 1, więc punkty 1 i  $-1$  (odległe o 2) nie mogą do niego jednocześnie należeć, niezależnie od tego, jaką weźmiemy liczbę  $g$ .

Podobnie pokazuje się, że jeśli  $a \neq b$ , to ciąg  $a, b, a, b, a, b, \dots$  jest rozbieżny.  $\square$

**Uwaga 2.10.** Każdy ciąg ma co najwyżej jedną granicę. (Gdyby miał dwie różne, powiedzmy  $g_1 \neq g_2$ , to biorąc w definicji granicy  $\varepsilon < \frac{1}{2}|g_2 - g_1|$  łatwo uzyskalibyśmy sprzeczność: wszystkie wyrazy o odpowiednio dalekich numerach musiałyby należeć do części wspólnej dwóch *rozłącznych przedziałów*  $(g_i - \varepsilon, g_i + \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2$ .)

Posługiwanie się bezpośrednio definicją granicy ciągu za każdym razem, gdy chcemy wykazać, że jakiś ciąg jest zbieżny, i obliczyć jego granicę, byłoby rzeczą niewygodną. Bardzo pozyteczne jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 2.11** (arytmetyczne własności granicy). *Załóżmy, że ciągi liczb rzeczywistych  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne odpowiednio do  $a$  i  $b$ , tzn.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

*Wówczas*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad (2.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab. \quad (2.5)$$

*Ponadto, jeśli  $b \neq 0$  i  $b_n \neq 0$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}. \quad (2.6)$$

Dowód tego nietrudnego, ale ważnego twierdzenia wygodnie będzie poprzedzić pewnym przygotowaniem.

**Definicja 2.12.** Ciąg  $(a_n)$  nazywa się ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  jest ograniczonym podzbiorem  $\mathbb{R}$ .

Analogicznie definiuje się ciągi ograniczone z góry i z dołu. Nietrudno zobaczyć, że np. ciąg  $a_n = n^2$  nie jest ograniczony z góry, choć jest ograniczony z dołu. Ciąg  $a_n = (-1)^n n$  nie jest ograniczony ani z góry, ani z dołu.

**Stwierdzenie 2.13.** *Każdy zbieżny ciąg liczb rzeczywistych jest ograniczony.*

**Dowód.** Niech  $a_n \rightarrow g$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Weźmy w definicji granicy  $\varepsilon = 1$ . Istnieje taka liczba  $n_1$ , że

$$g - 1 < a_n < g + 1 \quad \text{dla wszystkich } n > n_1. \quad (2.7)$$

Położymy teraz

$$M = \max(g + 1, \max(a_1, \dots, a_{n_1})), \quad m = \min(g - 1, \min(a_1, \dots, a_{n_1})),$$

gdzie symbol  $\max(x_1, \dots, x_m)$  oznacza największą z liczb rzeczywistych  $x_1, \dots, x_m$ , a symbol  $\min(x_1, \dots, x_m)$  – najmniejszą z tych liczb. Nietrudno zobaczyć, że  $m \leq a_n \leq M$  dla wszystkich  $n \in M$ . Dla  $n > n_1$  wynika to z doboru  $n_1$ , tzn. z warunku (2.7), i z nierówności

$$m \leq g - 1 \leq g + 1 \leq M$$

Dla  $n \leq n_1$  nierówność  $m \leq a_n \leq M$  wynika wprost z definicji liczb  $m, M$ .  $\square$

**Stwierdzenie 2.14** (o szacowaniu granic). *Załóżmy, że  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżnymi ciągami liczb rzeczywistych. Zachodzą wtedy następujące implikacje:*

(i) *Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > a$ , to istnieje takie  $n_1 \in \mathbb{N}$ , że  $a_n > a$  dla wszystkich  $n > n_1$ .*

(ii) *Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n < b$ , to istnieje takie  $n_1 \in \mathbb{N}$ , że  $b_n < b$  dla wszystkich  $n > n_1$ .*

(iii) Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , to istnieje takie  $n_1 \in \mathbb{N}$ , że  $a_n > b_n$  dla wszystkich  $n > n_1$ .

(iv) Jeżeli istnieje takie  $n_1 \in \mathbb{N}$ , że  $a_n \leq b_n$  dla wszystkich  $n > n_1$ , to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Dowód. Zaczniemy od własności (i). Biorąc w definicji granicy  $\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a > 0$ , a następnie dobierając doń  $n_\varepsilon$ , otrzymujemy

$$a_m > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a) = a \quad \text{dla wszystkich } m > n_\varepsilon.$$

Dowód własności (ii) jest analogiczny; Czytelnik może przeprowadzić go samodzielnie, lub skorzystać z własności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = (-b),$$

która pozwala wyprowadzić (ii) z udowodnionej już (i).

Aby sprawdzić (iii), bierzemy dowolną liczbę rzeczywistą  $x$  taką, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > x > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Istnieje wtedy takie  $n_1$ , że  $a_n > x$  dla wszystkich  $n > n_1$ ; to wynika z punktu (i). Podobnie, istnieje wtedy takie  $n_2$ , że  $x > b_n$  dla wszystkich  $n > n_2$ ; to wynika z punktu (ii). Dla  $n > \max(n_1, n_2)$  obie nierówności zachodzą jednocześnie, a więc, dzięki przechodniości,  $a_n > b_n$ .

Wreszcie, własność (iv) wynika z (iii) przez zaprzeczenie. Istotnie, gdyby nie zachodziła teza (iv), to dysponowałibyśmy założeniem (iii), a więc zgodnie z (iii) byłoby  $a_n > b_n$  dla wszystkich  $n > n_1$ , co przeczyłoby założeniu (iv).  $\square$

Wróćmy teraz do arytmetycznych własności granicy.

**Dowód TWIERDZENIA 2.11. 1. Granica sumy ciągów.** Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Korzystając z definicji granicy dla liczby  $\varepsilon/2$  (można tak zrobić, bowiem warunek z definicji ma zachodzić dla każdej liczby dodatniej, a  $\varepsilon/2 > 0$ ) dobierzmy liczby  $n_1$  i  $n_2$  tak, żeby

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_2.$$

Wówczas, dla  $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$ , zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad \text{z nierównością trójkąta} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Wykaźaliśmy więc, że liczba  $g = a + b$  jest granicą ciągu  $a_n + b_n$ .

Przerwijmy dowód na chwilę i skomentujmy całe rozumowanie.

**Komentarz (dla początkujących).** Czytelnik, który po raz pierwszy styka się z podobnym dowodem, może zapytać: skąd było wiadomo, że trzeba skorzystać z definicji granicy ciągu  $a_n$  i ciągu  $b_n$ , biorąc w nich  $\varepsilon/2$  zamiast  $\varepsilon$ ? Po pierwsze, akurat w tym przypadku rachunki są na tyle krótkie, że można je przemyśleć w pamięci (lub szybko wykonać na brudno) i odgadnąć, że tak będzie wygodnie, bo na końcu otrzymamy wynik  $\varepsilon$ . Można jednak postąpić inaczej, i to co najmniej na dwa różne sposoby:

1. Użyć obu definicji, biorąc w nich  $\varepsilon$ , a nie  $\varepsilon/2$ ; otrzymujemy wtedy, dla  $n > n_3$ ,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ale przecież  $2\varepsilon$  jest dowolną liczbą dodatnią, więc otrzymaliśmy warunek z definicji granicy, tylko dla liczby o *innej nazwie*.

2. Użyć obu definicji, biorąc w nich ostrożnie  $\eta > 0$  zamiast  $\varepsilon > 0$ , bowiem *a priori* nie mamy pewności, jaki będzie wynik; otrzymujemy wtedy, dla  $n > n_3$ ,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \eta + \eta = 2\eta.$$

Teraz nietrudno już powiedzieć: *niech  $\eta = \varepsilon/2$ ; w dodatku, mogliśmy tak rozumować od samego początku*. W dłuższych dowodach, uzasadniających, że jakaś granica ma tę, a nie inną wartość, taki sposób postępowania bywa wygodny.

2. *Granica różnicy ciągów*. Postępujemy tak samo, jak w poprzedniej części dowodu. Ustalmy  $\varepsilon > 0$ ; liczby  $n_1$  i  $n_2$  dobierzmy tak, żeby

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } n > n_2.$$

Wówczas, dla  $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$ ,

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) + (b - b_n)| \\ &\leq |a_n - a| + |b - b_n| \quad \text{z nierównością trójkąta} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że różnica liczb  $a$  i  $b$  jest granicą różnicy ciągów  $a_n$  i  $b_n$ .

3. *Granica iloczynu ciągów*. Dowód jest podobny do poprzednich, jednak nieco dłuższy. Najpierw trzeba zapisać różnicę  $a_n b_n - ab$  tak, żeby zobaczyć wyrażenia  $a_n - a$  i  $b_n - b$ . Oto odpowiedni rachunek

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |b_n| |a_n - a| + |a| |b_n - b| \quad \text{z nierównością trójkąta} \\ &=: W_n. \end{aligned}$$

Ciąg  $b_n$  jest ograniczony, więc istnieje taka *dodatańia* liczba  $M$ , że  $|b_n| \leq M$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ . Ponadto, dla ustalonej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieją takie  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , że

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a| + 1} \quad \text{dla wszystkich } n > n_2.$$

Zatem, dla  $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$  możemy oszacować

$$W_n < M \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \frac{\varepsilon}{2|a| + 1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

gdziż  $|a|/(2|a| + 1) < \frac{1}{2}$  dla każdego  $a \in \mathbb{R}$ . Otrzymaliśmy  $|a_n b_n - ab| \leq W_n < \varepsilon$  dla wszystkich  $n > n_3$ ; dzięki dowolności  $\varepsilon > 0$  wynika stąd, że  $a_n b_n \rightarrow ab$  dla  $n \rightarrow \infty$ .

3. *Granica ilorazu ciągów.* Wystarczy wykazać, że  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$  dla  $n \rightarrow \infty$ , a następnie skorzystać z poprzedniego punktu twierdzenia, gdyż  $a_n/b_n = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ .

Ponieważ  $b \neq 0$ , więc istnieje taki przedział otwarty  $(c, d) \subset \mathbb{R}$ , że  $b \in (c, d)$ , ale  $0 \notin [c, d]$ . Posługując się dwukrotnie Stwierdzeniem 2.14, przekonujemy się, że

$$b_n \in (c, d) \quad \text{dla wszystkich } n \text{ większych od pewnego } n_1 \in \mathbb{N}.$$

Wtedy  $|b|, |b_n| \geq \min(|c|, |d|)$ , a zatem

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b| |b_n|} \leq \frac{|b - b_n|}{\min(|c|, |d|)^2}.$$

Ustalamy teraz  $\varepsilon > 0$  i wybieramy liczbę  $n_2 \in \mathbb{N}$  tak, żeby mieć  $|b - b_n| \leq \varepsilon \min(|c|, |d|)^2$  dla  $n > n_2$ . Dla  $n > \max(n_1, n_2)$  mamy wtedy

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{|b - b_n|}{\min(|c|, |d|)^2} < \varepsilon,$$

czyli istotnie  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Dowód całego twierdzenia jest zakończony.  $\square$

Podamy teraz dwa inne twierdzenia. W połączeniu z Twierdzeniem 2.11 tworzą one wygodny zestaw narzędzi do badania zbieżności wielu ciągów o wyrazach rzeczywistych. Zobaczmy też pewne przykłady zastosowań tych twierdzeń.

Oto pierwsze z zapowiedzianych twierdzeń.

**Twierdzenie 2.15** (o trzech ciągach). *Załóżmy, że  $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ , a ponadto*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

*i istnieje takie  $n_1 \in \mathbb{N}$ , że dla wszystkich  $n > n_1$  zachodzą nierówności*

$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

*Wówczas  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ .*

Dowód. To twierdzenie jest stosunkowo prostym wnioskiem ze Stwierdzeniem 2.14. Ustalmy liczbę  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ  $g = \lim a_n > g - \varepsilon$ , więc istnieje takie  $n_2 \in \mathbb{N}$ , że  $a_n > g - \varepsilon$  dla  $n > n_2$ . Podobnie,  $g = \lim b_n < g + \varepsilon$ , więc istnieje takie  $n_3 \in \mathbb{N}$ , że  $b_n < g + \varepsilon$  dla  $n > n_3$ .

Dla  $n > \max(n_1, n_2, n_3)$  możemy skorzystać ze wszystkich nierówności, w których występują  $a_n, b_n$  i  $c_n$ . Zatem, dla takich  $n$ ,

$$g - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < g + \varepsilon,$$

stąd zaś wynika, że  $|c_n - g| < \varepsilon$  dla wszystkich  $n > \max(n_1, n_2, n_3)$ .  $\square$

Twierdzenie o trzech ciągach jest bardzo wygodnym narzędziem. Popatrzymy na przykłady jego zastosowań.

**Przykład 2.16.** Niech  $x \in (0, \infty)$ . Obliczymy granicę ciągu  $c_n = \sqrt[n]{x}$ . Założmy najpierw, że  $x \geq 1$ . Wtedy dla wszystkich  $n > n_1 = [x] + 1 > x$  zachodzą nierówności

$$1 \leq c_n = \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{n}.$$

Wiemy już jednak, że  $b_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  dla  $n \rightarrow \infty$ , a ciąg stały  $a_n \equiv 1$  też ma granicę 1. Zatem, z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1. \quad (2.8)$$

Jeśli  $x \in (0, 1)$ , to  $\sqrt[n]{x} = 1/\sqrt[n]{y}$  dla  $y = 1/x > 1$ , a więc wzór (2.8) także zachodzi.  $\square$

**Przykład 2.17.** Niech  $q \in \mathbb{R}$ ,  $|q| < 1$ . Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Ponieważ  $|q^n - 0| = |q^n| = ||q|^n - 0|$ , więc wystarczy ograniczyć się do przypadku  $q \in [0, 1)$ . Dla  $q = 0$  mamy do czynienia z ciągiem stałym,  $q^n \equiv 0$ ; wtedy nie ma czego dowodzić.

Niech więc  $q \in (0, 1)$ ; oznaczmy  $a = \frac{1}{q} - 1$ . Wtedy  $a > 0$ ,  $1/q = 1 + a$  i z nierówności Bernoulliego mamy

$$\frac{1}{q^n} = (1 + a)^n \geq 1 + na > na \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zatem,

$$0 \longleftarrow 0 < q^n < \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

gdzie  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , i dla dowolnej liczby rzeczywistej  $c$  z twierdzenia o iloczynie granicy ciągów wynika, że  $c \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy teraz, że  $q^n \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Przykład 2.18.** Wykażemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4. \quad (2.9)$$

Wskażemy w tym celu odpowiednie oszacowania  $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$  z góry i z dołu. Ponieważ  $0 < 3^n < 4^n$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , więc

$$4 = \sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{3^n + 4^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = 4 \sqrt[n]{2}.$$

Jednak  $4 \sqrt[n]{2} \rightarrow 4$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ ; to wynika z udowodnionego wcześniej wzoru (2.8). Oszacowaliśmy więc  $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$  z góry i z dołu przez wyrazy ciągów zbieżnych do liczby 4; można zastosować twierdzenie o trzech ciągach i stwierdzić, że wzór (2.9) rzeczywiście zachodzi.  $\square$

W istocie, prawdziwy jest wzór nieco ogólniejszy od (2.9).

**Przykład 2.19.** Jeśli  $k$  jest liczbą naturalną i  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n} = x_k. \quad (2.10)$$

Istotnie, możemy wypisać oczywiste nierówności

$$x_k = \sqrt[n]{x_k^n} \leq \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n} \leq \sqrt[n]{k \cdot x_k^n} = x_k \sqrt[n]{k}.$$

Wiemy już jednak, że  $\sqrt[n]{k} \rightarrow 1$ , zatem, podobnie jak w poprzednim przykładzie, wzór (2.10) wynika z twierdzenia o trzech ciągach.  $\square$

Uważny Czytelnik spostrzegł zapewne, że praktycznie we wszystkich sytuacjach posługiwały się w istocie prostym wnioskiem z twierdzenia o trzech ciągach.

**Wniosek 2.20.** Jeśli  $b \leq c_n \leq b_n$  dla wszystkich  $n > n_1$ , a ponadto  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , to wtedy także  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b$ .  $\square$

Drugie z zapowiedzianych twierdzeń zasługuje na osobny podrozdział.

## 2.2 Ciągi monotoniczne.

**Definicja 2.21.** Ciąg liczb rzeczywistych  $(a_n)$  jest:

- (i) *malejący*, gdy  $a_n > a_{n+1}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (ii) *niemalejący*, gdy  $a_n \leq a_{n+1}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (iii) *rosnący*, gdy  $a_n < a_{n+1}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (iv) *nierosnący*, gdy  $a_n \geq a_{n+1}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definicja 2.22.** Ciąg  $(a_n)$  jest monotoniczny, gdy spełnia któryś z warunków (i)–(iv) po przedniej definicji. Ciąg  $(a_n)$  jest ścisłe monotoniczny, gdy jest rosnący albo malejący.

**Twierdzenie 2.23.** Założmy, że ciąg  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  jest niemalejący i ograniczony z góry. Wówczas ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny. Jego granicą jest liczba

$$M = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że zbiór wyrazów ciągu,  $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , jest ograniczony z góry, więc liczba  $M = \sup A \in \mathbb{R}$  istnieje.

Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ  $M - \varepsilon < M$ , więc  $M - \varepsilon$  nie jest ograniczeniem górnym zbioru  $A$ . Zatem, znajdziemy takie  $n_1$ , że

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq M.$$

Ciąg  $(a_n)$  jest niemalejący; dlatego  $a_m \geq a_{n_1}$  dla wszystkich  $m > n_1$ . Jednak oczywiście mamy też  $a_m \leq M$ , gdyż  $M$  jest ograniczeniem górnym zbioru wyrazów ciągu. Podsumowując, mamy

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq a_m \leq M < M + \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } m > n_1,$$

tzn.  $|a_m - M| < \varepsilon$  dla  $m > n_1$ . Przeto, zgodnie z definicją granicy ciągu,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$ .  $\square$

Ponieważ ciąg  $(a_n)$  jest niemalejący wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg  $(-a_n)$  jest nierosnący, a  $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{(-a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ , więc zachodzi oczywiście następujący, bliźniaczy fakt.

**Wniosek 2.24.** Założmy, że ciąg  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  jest nierosnący i ograniczony z dołu. Wówczas ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny. Jego granicą jest liczba

$$M = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

**Przykład 2.25.** Niech  $a_1 = \sqrt{6}$  i  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , tzn.

$$a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \quad a_3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \quad a_4 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}, \quad \dots$$

Sprawdzimy, że ciąg  $a_n$  jest rosnący i ograniczony. Niech  $x > 0$ . Zauważmy, że dla takich  $x$  nierówność  $\sqrt{x+6} > x$  jest równoważna innej,  $x^2 - x - 6 < 0$ . Ponieważ  $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ , więc ostatecznie

$$x > 0 \text{ i } \sqrt{x+6} > x \iff x \in (0, 3). \tag{2.11}$$

Zauważmy też, że

$$x \in (0, 3) \Rightarrow 0 < x + 6 < 9 \Rightarrow \sqrt{x+6} \in (0, 3). \quad (2.12)$$

Wyrazy ciągu  $a_n$  są oczywiście dodatnie. Ponieważ  $a_1 = \sqrt{6} \in (2, 3)$ , więc z implikacji (2.12) wynika, na mocy zasady indukcji matematycznej, że  $a_n \in (0, 3)$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ ; ciąg  $(a_n)$  jest więc ograniczony. Ponadto,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \stackrel{(2.11)}{>} a_n, \quad \text{bowiem wiemy już, że } a_n \in (0, 3).$$

Zatem ciąg  $a_n$  jest rosnący. Z Twierdzenia 2.23 wynika, że istnieje granica tego ciągu.

Nietrudno tę granicę znaleźć: ponieważ

$$a_{n+1}^2 = 6 + a_n,$$

więc z Twierdzenia 2.11 wynika, że  $a = \lim a_n$  spełnia równość  $a^2 = 6 + a$ , a przy tym  $a \geq 0$ , gdyż  $a_n > 0$  dla wszystkich  $n$ . Przeto  $a = 3$ .  $\square$

**Uwaga.** Ostatni fragment rozumowania wolno przeprowadzić dopiero wtedy, gdy wiadomo już, że liczba  $a = \lim a_n$  istnieje. Wcześniej można stąd jedynie wywnioskować, że jeśli  $a = \lim a_n$  istnieje i  $a \geq 0$ , to wtedy  $a = 3$ .

**Przykład 2.26.** Niech  $a_1 = \sqrt{3}$  i  $a_{n+1} = 12 + \frac{a_n}{7}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ . Podobnie jak w poprzednim przykładzie, mamy  $a_n > 0$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , a także  $a_n > 12$  dla wszystkich  $n > 1$ . Przez indukcję łatwo wykazać, że  $a_n < 14$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  (tzn. ciąg  $a_n$  jest ograniczony, z dołu przez 0, a z góry przez 14). Zatem,

$$a_{n+1} - a_n = 12 + \frac{a_n}{7} - a_n = 12 - \frac{6a_n}{7} > 12 - \frac{6 \cdot 14}{7} = 0,$$

tzn. ciąg  $a_n$  jest rosnący. Z Twierdzenia 2.23 wynika teraz, że istnieje granica  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  tego ciągu. Mamy także  $a = 12 + a/7$ , stąd zaś  $a = 14$ .

## 2.3 Granice niewłaściwe

Wśród wszystkich ciągów rozbieżnych wygodnie jest wyróżnić osobno ciągi *rozbieżne do plus nieskończoności* i ciągi *rozbieżne do minus nieskończoności*

**Definicja 2.27.** Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych  $a_n$  jest rozbieżny do plus nieskończoności, i piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej  $t$  istnieje  $n_1 \in \mathbb{N}$  takie, że  $a_n > t$  dla wszystkich  $n > n_1$ .

**Definicja 2.28.** Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych  $a_n$  jest rozbieżny do minus nieskończoności, i piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej  $t$  istnieje  $n_1 \in \mathbb{N}$  takie, że  $a_n < -t$  dla wszystkich  $n > n_1$ .

Oto proste przykłady: ciąg  $a_n = n$  jest rozbieżny do  $+\infty$ , ciąg  $b_n = -n^2$  jest rozbieżny do  $-\infty$ , natomiast ciąg  $c_n = (-1)^n n^2$  jest rozbieżny, ale nie jest rozbieżny ani do  $+\infty$ , ani do  $-\infty$ . Czytelnik sam zechce się zastanowić, dlaczego tak jest.

Posługując się pojęciem granicy nieskończonej, łatwo jest podać nieco ogólniejszą wersję Twierdzenia 2.23.

**Twierdzenie 2.29.** *Każdy ciąg niemalejący  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  jest albo zbieżny, albo rozbieżny do  $+\infty$ . Zbieżność  $(a_n)$  jest równoważna jego ograniczoności.*

Dowód. Gdy ciąg jest ograniczony, to korzystamy po prostu z Twierdzenia 2.23. Gdy  $(a_n)$  jest nieograniczony z góry, to dla każdej liczby  $t > 0$  można wskazać takie  $n_1 \in \mathbb{N}$ , że  $a_{n_1} > t$ . Dla  $m \geq n_1$  mamy  $a_m \geq a_{n_1} > t$ , gdyż ciąg  $(a_n)$  jest niemalejący. Zatem, wprost z definicji,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .  $\square$

Można wykazać, że przy naturalnej umowie

$$\begin{aligned} a + (+\infty) &= +\infty \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, & -(-\infty) &= +\infty, & +\infty + \infty &= +\infty \\ a \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \quad \text{dla } a > 0, & (+\infty) \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \\ (-\infty) \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty & \text{oraz} & & \frac{1}{\pm\infty} &= 0 \end{aligned}$$

twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy (Twierdzenie 2.11) zachodzi także dla granic nieskończonych. Szczegółowe sprawdzenie tego faktu pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom (patrz też przykład, zamieszczony niżej). Nie można go jednak używać w innych przypadkach, tzn. do obliczania granic postaci

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

**Ćwiczenie 2.30.** Dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0, +\infty\}$  podać przykład takich dwóch ciągów  $x_n, y_n$  rozbieżnych do  $+\infty$ , żeby  $x_n/y_n \rightarrow a$  dla  $n \rightarrow \infty$ .

**Przykład 2.31.** Założymy, że  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , natomiast  $b_n \rightarrow +\infty$ . Sprawdzimy, że wtedy  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ . Niech  $M > 0$  będzie dużą liczbą dodatnią. Dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$  mamy

$$a_n > a - 1 \quad \text{oraz} \quad b_n > M - a + 1.$$

(Pierwszą nierówność otrzymujemy, biorąc  $\varepsilon = 1$  w definicji granicy ciągu, a drugą – biorąc  $t = M - a + 1$  w definicji granicy niewłaściwej). Dodając obie nierówności stronami, sprawdzamy, że dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$  zachodzi nierówność  $a_n + b_n > M$ .  $\square$

## 2.4 Podciągi. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa.

**Definicja 2.32.** Jeśli  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest dowolnym ciągiem, a  $k_1, k_2, k_3, \dots$  rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg  $(y_n)$ , określony wzorem

$$y_n = x_{k_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

nazywamy *podciągiem* ciągu  $(x_n)$ .

Mówiąc potocznie, chodzi o wybranie nieskończenie wielu wyrazów ciągu, ale bez zmiany kolejności.

Pojęcie podcięgu jest ważne m.in. z następującego powodu.

**Stwierdzenie 2.33.** *Jeśli ciąg  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  jest zbieżny do  $g$ , to każdy podciąg ciągu  $(a_n)$  też jest zbieżny do  $g$ .*

Łatwy dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

**Lemat 2.34** (W. Sierpiński). *Każdy ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg monotoniczny.*

Co więcej, można wskazać, jak taki podciąg należy wybierać.

Dowód. Położymy, dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

Rozważamy osobno dwa przypadki:

1. W każdym ze zbiorów  $A_n$  istnieje element największy.
2. W którymś ze zbiorów  $A_n$  nie ma elementu największego.

W pierwszym przypadku z  $(a_n)$  można wybrać podciąg nierosnący. Pokażemy, jak to zrobić. Niech  $a_{k_1}$  będzie największym elementem  $A_1$ . W  $A_{k_1+1}$  jest element największy,  $a_{k_2}$ ; oczywiście  $k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$ , a przy tym  $a_{k_2} \leq a_{k_1}$ , bo  $a_{k_2} \in A_1$ ,  $a_{k_1} = \sup A_1$ . Jeśli w razie  $a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \dots \geq a_{k_n}$ , gdzie  $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ , zostały już wybrane, to dobieramy  $k_{n+1} \geq k_n + 1$  tak, aby

$$a_{k_{n+1}} := \sup A_m \quad \text{dla } m = k_n + 1.$$

Definicja jest poprawna, gdyż w każdym zbiorze  $A_m$  istnieje element największy. Mamy, jak w pierwszym kroku rozumowania,  $k_{n+1} > k_n$  i  $a_{k_{n+1}} \leq a_{k_n}$ .

W drugim przypadku można wybrać z  $(a_n)$  podciąg rosnący. Przypuśćmy, że w  $A_m$  nie ma elementu największego. Bierzemy wtedy  $k_1 = m$ . Zgodnie z założeniem, istnieje  $k_2 > m$  takie, że  $a_{k_2} > a_{k_1} = a_m$ . Gdyby dalej, dla  $n > k_2$ , nie byłoby już wyrazów większych od  $a_{k_2}$ , to wtedy w  $A_m$  byłby element największy, wbrew założeniu. Zatem można znaleźć  $a_{k_3} > a_{k_2}$ , gdzie  $k_3 > k_2$ . To rozumowanie można powtórzyć dowolnie wiele razy (Czytelnik zechce sam uzupełnić szczegóły).  $\square$

**Twierdzenie 2.35** (Bolzano–Weierstrassa). *Każdy ciąg ograniczony  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  zawiera podciąg zbieżny.*

Dowód. Zgodnie z poprzednim lematem, ciąg  $(a_n)$  ma podciąg monotoniczny  $(a_{k_n})$ . Oczywiście każdy podciąg ciągu ograniczonego jest ograniczony. Z Twierdzenia 2.23 wynika więc, że podciąg  $(a_{k_n})$  jest zbieżny.  $\square$

Ponieważ to naprawdę istotne twierdzenie, obejrzyjmy jeszcze jeden dowód.

Dowód DRUGI. Można bez zmniejszenia ogólności założyć, że  $(a_n) \subset [0, 1]$  — gdyby tak nie było, możemy rozpatrzyć ciąg  $\lambda(a_n + C)$  dla odpowiednio wybranych  $C$  oraz  $\lambda$ ; jego podciągów zbieżnych odpowiadają zbieżne podciągi ciągu  $(a_n)$ .

Podzielmy odcinek  $[0, 1]$  na 10 równych części, o długości  $1/10$ . W jednej z nich, powiedzmy  $[l_1, r_1]$ , jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Wybierzmy jeden z nich,  $a_{k_1}$ .

Teraz podzielimy odcinek  $[l_1, r_1]$  na 10 równych części, o długości  $1/10^2$ . W jednej z nich, powiedzmy  $[l_2, r_2]$  jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu o numerach większych od  $k_1$ ; niech  $a_{k_2}$  będzie jednym z tych wyrazów.

Przeprowadziszy  $m$  kroków takiego rozumowania, skonstruujemy

- Przedziały domknięte  $[0, 1] \supset [l_1, r_1] \supset [l_2, r_2] \supset \dots \supset [l_m, r_m]$  takie, że

$$|l_j - r_j| = \frac{1}{10^j}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

i w każdym z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu  $(a_n)$ ;

- Wyrazy  $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}$  takie, że

$$a_{k_j} \in [l_j, r_j] \quad \text{dla } j = 1, \dots, m;$$

W  $(m+1)$ -szym kroku dzielimy odcinek  $[l_m, r_m]$  na 10 równych części. W jednej z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu o numerach większych od  $k_m$ . Nazywamy tę część  $[l_{m+1}, r_{m+1}]$  i wybieramy numer  $k_{m+1} = s > k_m$  tak, żeby  $a_s \in [l_{m+1}, r_{m+1}]$ .

Postępując indukcyjnie, otrzymujemy nieskończony, zstępujący ciąg przedziałów  $[l_m, r_m]$  i podciąg  $(a_{k_m})$  taki, że  $a_{k_m} \in [l_m, r_m]$ . Ciąg  $(l_m)$  jest niemalejący i ograniczony z góry przez 1, a ciąg  $(r_m)$  nierosnący i ograniczony z dołu przez 0, zatem oba są zbieżne. Ponadto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = \lim_{m \rightarrow \infty} r_m, \quad \text{gdyż} \quad r_m - l_m = \frac{1}{10^m} \rightarrow 0.$$

Nietrudno wreszcie zauważyć, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{k_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} r_m$$

– to wynika z twierdzenia o trzech ciągach.  $\square$

**Uwaga.** Czytelnik–koneser zechce zauważyć, że w drugim dowodzie tak naprawdę dobrzymy kolejne wyrazy ciągu, próbując stabilizować coraz dłuższe początkowe fragmenty rozwinięć dziesiętnych. Oczywiście, liczbę 10 można zastąpić w rozumowaniu liczbą 2, i nie trzeba od początku zakładać, że wyrazy ciągu są akurat w przedziale jednostkowym, ale wtedy analogia związana z rozwinięciami dziesiętnymi nie jest widoczna.

**Wniosek 2.36.** *Ciąg ograniczony ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy granice wszystkich jego podciągów są równe.*

Dowód. Jest rzeczą praktycznie oczywistą, że jeśli ciąg  $a_n$  ma granicę, to wszystkie jego podciągi są zbieżne do tej samej granicy. Jeśli  $(a_n)$  jest rozbieżny (ale ograniczony), to wobec Tw. Bolzano–Weierstrassa ma zbieżny podciąg,  $a_{n_k} \rightarrow g$ . Ponieważ  $g$  nie jest granicą ciągu  $(a_n)$ , to dla pewnego  $\varepsilon_0 > 0$  poza przedziałem  $(g - \varepsilon_0, g + \varepsilon_0)$  jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu; z nich wybieramy inny podciąg zbieżny, którego granica  $g'$  – zgodnie ze Stwierdzeniem 2.14 – różni się od  $g$  co najmniej o  $\varepsilon_0$ .  $\square$

Czasem bywa tak, że umiemy wykazać zbieżność kilku różnych podciągów danego ciągu (np. niektóre są rosnące, a inne malejące, a wszystkie są ograniczone), dobranych tak, że każdy wyraz ciągu należy do jednego z tych podciągów. Wtedy przydaje się następujący prosty fakt.

**Stwierdzenie 2.37.** Jeśli ciąg  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  ma k różnych podciągów zbieżnych do tej samej granicy  $g$ , i każdy wyraz ciągu  $(a_n)$  jest wyrazem któregoś z tych podciągów (tzn. zbiór  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  jest sumą zbiorów wyrazów rozważanych podciągów), to  $a_n \rightarrow g$  dla  $n \rightarrow \infty$ .

Dowód. Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Wybierzmy liczby  $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{N}$  tak, aby spełniony był warunek:

Jeśli  $a_m$  jest wyrazem  $j$ -tego z rozważanych podciągów (gdzie  $j = 1, \dots, k$ ) i numer  $m > l_j$ , to  $|a_m - g| < \varepsilon$ .

(Innymi słowy, liczbę  $l_j$  dobieramy do  $\varepsilon$ , korzystając ze zbieżności  $j$ -tego podciągu). Położymy  $l_0 = \max(l_1, \dots, l_k)$ . Ponieważ każdy wyraz ciągu  $(a_n)$  jest wyrazem któregoś z  $k$  rozważanych podciągów, więc dla każdego  $m > l_0$  z pewnością  $|a_m - g| < \varepsilon$ .  $\square$

Podamy teraz ważne twierdzenie, które podaje warunek równoważny zbieżności ciągu.

**Twierdzenie 2.38 (warunek Cauchy'ego).** Ciąg  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego:

(C) Dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  takie, że dla wszystkich  $m, k > n_\varepsilon$  zachodzi nierówność  $|a_m - a_k| < \varepsilon$ .

Dowód. Część I. ( $\Rightarrow$ ) Niech  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , to istnieje  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  takie, że  $|a_n - g| < \varepsilon/2$  dla wszystkich  $n > n_\varepsilon$ . Weźmy teraz dwie liczby  $m, k > n_\varepsilon$ . Wówczas

$$|a_m - a_k| = |(a_m - g) + (g - a_k)| \leq |a_m - g| + |a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zatem ciąg  $(a_n)$  spełnia warunek (C) – właśnie pokazaliśmy, jak dobrać  $n_\varepsilon$  do liczby  $\varepsilon > 0$ .

Część II. ( $\Leftarrow$ ) Łatwo sprawdzić, że każdy ciąg spełniający (C) jest ograniczony: stosujemy warunek Cauchy'ego dla  $\varepsilon = 1$  i widzimy, że dostatecznie duże wyrazy różnią się o mniej niż 1, a więc muszą zawierać się w pewnym przedziale, np. przedziale  $(a_{n_1+1} - 1, a_{n_1+1} + 1)$ ; skończony zbiór wyrazów  $a_1, \dots, a_{n_1}$  też jest ograniczony.

Stosujemy zatem twierdzenie Bolzano–Weierstrassza i wybieramy z  $(a_n)$  podciąg  $a_{n_k} \rightarrow g \in \mathbb{R}$  dla  $k \rightarrow \infty$ . Pokażemy, że  $g$  jest granicą całego ciągu  $(a_n)$ . Niech  $\varepsilon > 0$ . Istnieje takie  $l_1 \in \mathbb{N}$ , że

$$|a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n_k > l_1,$$

a ponadto istnieje takie  $l_2 \in \mathbb{N}$ , że  $|a_m - a_k| < \varepsilon/2$  dla  $m, k > l_2$ . Niech  $l_3 = \max(l_1, l_2)$ . Ustalając jakikolwiek numer  $n_k > l_3 \geq l_1$  i biorąc dowolne  $m > l_3 \geq l_2$ , możemy oszacować

$$|a_m - g| = |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - g| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To kończy dowód twierdzenia.  $\square$

Warunek Cauchy'ego odgrywa ważną rolę z kilku powodów. Po pierwsze, pozwala stwierdzić zbieżność ciągu bez wskazywania konkretnej granicy, a także pozwala stwierdzić, że jakiś ciąg jest rozbieżny. Proszę zauważyc, że wcześniej, sprawdzając rozbieżność ciągu  $a_n = (-1)^n$ , sprawdziliśmy tak naprawdę, że warunek Cauchy'ego nie zachodzi dla  $\varepsilon = 1$ . Po drugie, można posłużyć się warunkiem Cauchy'ego, żeby skonstruować liczby rzeczywiste, mając do dyspozycji liczby wymierne; jest to konstrukcja na tyle ogólna, że używa się jej w wielu działach matematyki – do tej sprawy wróćmy jeszcze przy innej okazji.

**Stwierdzenie 2.39** (kryterium spełniania warunku Cauchy'ego). *Załóżmy, że  $a_1, a_2, \dots$  są dodatnie, a ponadto istnieje taka stała  $C \in \mathbb{R}$ , że*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq C \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

*Jeśli ciąg  $(x_n) \subset \mathbb{R}$  spełnia warunek*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a_n \quad \text{dla dostatecznie dużych } n \in \mathbb{N},$$

*to  $(x_n)$  spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Ciąg  $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  jest rosnący (bo  $a_j$  są dodatnie) i ograniczony z góry przez  $C$ . Zatem  $(s_n)$  jest zbieżny i spełnia warunek Cauchy'ego.

Niech  $m > k$  będą dostatecznie duże. Piszemy, korzystając z nierówności trójkąta, założeń i monotoniczności ciągu  $s_n$ ,

$$\begin{aligned} |x_m - x_k| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq a_{m-1} + a_{m-2} + \cdots + a_k \\ &= s_{m-1} - s_{k-1} = |s_{m-1} - s_{k-1}|. \end{aligned}$$

Niech  $\varepsilon > 0$ . Dla wszystkich dostatecznie dużych  $m, k$  mamy  $|x_m - x_k| \leq |s_{m-1} - s_{k-1}| < \varepsilon$ , gdyż  $(s_n)$  spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem  $(x_n)$  też spełnia warunek Cauchy'ego.  $\square$

**Przykład 2.40.** Nietrudno zauważyc, że jeśli dla danego ciągu  $(x_n)$  umiemy wskazać taką stałą  $M > 0$  i taką liczbę  $q \in (0, 1)$ , że

$$|x_{n+1} - x_n| \leq Mq^n \quad \text{dla dostatecznie dużych } n \in \mathbb{N},$$

to założenia powyższego stwierdzenia są spełnione. Istotnie, biorąc wtedy  $a_n = Mq^n$  mamy

$$s_n = Mq + Mq^2 + \cdots + Mq^n = Mq \frac{1 - q^n}{1 - q} \leq \frac{Mq}{1 - q} \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

To wynika ze szkolnego wzoru na sumę skończonego postępu geometrycznego; patrz także Lemat 1.12 i szkic jego dowodu.

**Ćwiczenie 2.41** (wzór na sumę szeregu geometrycznego). Proszę wykazać, że jeśli  $|q| < 1$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \frac{1}{1 - q}.$$

# Dodatki do rozdziału 2

## 2.A Twierdzenie Stolza

Poniższe twierdzenie pozwala w wielu przypadkach obliczać granice ciągów  $a_n/b_n$ , gdy  $a_n, b_n \rightarrow +\infty$ , i stanowi dla ciągów odpowiednik tak zwanej reguły de l'Hospitala.<sup>1</sup>

**Twierdzenie 2.42** (Twierdzenie Stolza). *Załóżmy, że ciąg  $(b_n)$  jest ścisłe monotoniczny oraz  $b_n \neq 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Jeśli  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  i istnieje granica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = g,$$

*a ponadto zachodzi któryś z następujących warunków:*

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty,$$

*to wówczas ciąg  $(a_n/b_n)$  jest zbieżny, a ponadto*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g.$$

**Dowód.** Bez zmniejszenia ogólności założymy, że ciąg  $b_n$  jest rosnący (zawsze można rozpatrzyć  $-a_n$  i  $-b_n$ ). Niech  $\varepsilon > 0$  i niech  $\eta \in (0, 1/2]$ ; konkretną wartość  $\eta$  dobierzemy do  $\varepsilon$  później. Ustalmy  $k \in \mathbb{N}$  tak, aby

$$g - \eta < \frac{a_{s+1} - a_s}{b_{s+1} - b_s} < g + \eta \quad \text{dla wszystkich } s \geq k.$$

Ciąg  $(b_n)$  jest rosnący, więc  $b_{s+1} - b_s > 0$ . Mnożąc obie nierówności przez tę liczbę, otrzymujemy

$$(b_{s+1} - b_s)(g - \eta) < a_{s+1} - a_s < (b_{s+1} - b_s)(g + \eta), \quad s \geq k.$$

Niech  $n > m \geq k$ . Dodając powyższe nierówności dla  $s = m, m+1, \dots, n-1$ , a następnie dzieląc wynik przez liczbę dodatnią  $b_n - b_m$ , sprawdzamy, że

$$g - \eta < \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} < g + \eta \quad \text{dla wszystkich } n > m \geq k. \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup>Jeśli Czytelnik nie zna tej nazwy, niech się nie martwi; jeśli zaś zna ją ze słyszenia, to niech nie stosuje bezmyślnie nieodpowiednich narzędzi, szczególnie wtedy, gdy nie jest pewien, skąd się one właściwie wzięły.

Od tego momentu rozumowanie jest nieco inne w każdym z dwóch przypadków.

*Przypadek (i):*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Ustalmy w nierównościach (2.13) liczbę  $m \geq k$  i przejdźmy do granicy  $n \rightarrow \infty$ . Korzystając ze Stwierdzenia 2.14 i arytmetycznych własności granicy, otrzymujemy

$$g - \eta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} = \frac{a_m}{b_m} \leq g + \eta.$$

Jeśli więc  $\eta > 0$  jest jakąkolwiek liczbą z przedziału  $(0, \varepsilon)$ , powiedzmy  $\eta = \varepsilon/2$ , to

$$\left| \frac{a_m}{b_m} - g \right| \leq \eta < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } m \geq k,$$

co kończy dowód twierdzenia Stolza w przypadku (i).

*Przypadek (ii):*  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ . Ustalmy w nierównościach (2.13) liczbę  $m = k$

**Uwaga.** Cała reszta dowodu w tym przypadku jest formalizacją następującego intuicyjnego i nieścisłego spostrzeżenia:  $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n) \approx g$  dla dużych  $n$ , więc przyrosty ciągu  $a_n$  są z grubsza, z dokładnością do stałego czynnika, takie, jak przyrosty ciągu  $b_n$ . Zatem ułamek  $a_n/b_n$ , który dopiero chcemy zbadać, powinien różnić się mało od ułamka  $(a_n - a_k)/(b_n - b_k)$ ; spodziewamy się, że dla  $n$  znacznie większych od  $k$  liczby  $a_k$  i  $b_k$  są mało istotnymi dodatkami do  $a_n$  i  $b_n$ .

Spróbujmy tę intuicję doprecyzować. Obliczmy w tym celu różnicę liczb  $a_n/b_n$  oraz  $(a_n - a_k)/(b_n - b_k)$ . Prosty rachunek daje

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| &= \left| \frac{a_n(b_n - b_k) - b_n(a_n - a_k)}{b_n(b_n - b_k)} \right| = \left| \frac{-a_n b_k + b_n a_k}{b_n(b_n - b_k)} \right| \\ &= \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \cdot \left| \frac{b_k}{b_n - b_k} \right| + \left| \frac{a_k}{b_n - b_k} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \eta + \eta \quad \text{dla } n > n_1 = n_1(k, \eta) > k. \end{aligned} \tag{2.14}$$

(Proszę zauważyć:  $b_n \rightarrow +\infty$ , więc przy ustalonym  $k$  mamy  $b_k/(b_n - b_k), a_k/(b_n - b_k) \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ , zatem wartości bezwzględne obu tych ułamków są małe, gdy  $n$  jest dostatecznie duże). Zatem dla dostatecznie dużych  $n$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| + \left| \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \eta + \eta + |g| + \eta,$$

stąd zaś

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \frac{|g| + 2\eta}{1 - \eta} \leq 2|g| + 4\eta \leq 2|g| + 2 =: M, \quad n > n_1.$$

Możemy więc nierówność (2.14) przepisać w postaci

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| \leq (M + 1)\eta, \quad n > n_1.$$

Zatem, dzięki warunkowi (2.13), dla  $n > n_1$  jest

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - g \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \right| + \left| \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} - g \right| \leq (M + 1)\eta + \eta = (2|g| + 4)\eta.$$

Wystarczy teraz dobrać  $\eta < \min(\frac{1}{2}, \varepsilon/(2|g| + 4))$ ; otrzymamy wtedy  $|(a_n/b_n) - g| < \varepsilon$  dla wszystkich  $n > n_1$ .  $\square$

**Ćwiczenie 2.43.** Analizując starannie powyższe rozumowanie, sprawdzić, że ostatnie twierdzenie wolno stosować także wtedy, gdy  $g = \pm\infty$  (tzn. do obliczania granic niewłaściwych).

**Przykład 2.44.** Wykażemy, że dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Zastosujemy Twierdzenie Stolza dla  $a_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$  i  $b_n = n^{k+1}$ . Ciąg  $b_n$  jest rosnący i rozbieżny do  $+\infty$ ; to połowa założeń twierdzenia. Sprawdźmy więc jeszcze, że  $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n) \rightarrow 1/(k+1)$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ . Mamy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}$$

Korzystając ze wzoru na różnicę  $(k+1)$ -szych potęg, a następnie dzieląc licznik i mianownik przez  $n^k$ , otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^k + (n+1)^{k-1}n + \cdots + n^k} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} + \cdots + 1}.$$

Z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy nietrudno wywnioskować, że dla  $n \rightarrow \infty$  licznik ostatniego ułamka jest zbieżny do 1, a mianownik (w którym jest  $k+1$  składników) do  $k+1$ .  $\square$

**Przykład 2.45.** Jeśli ciąg  $x_n$  jest zbieżny do granicy  $x$ , to ciąg średnich arytmetycznych

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

też jest zbieżny do granicy  $x$ . Istotnie, biorąc w twierdzeniu Stolza  $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ,  $b_n = n$ , otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{x_{n+1}}{(n+1) - n} = x_{n+1} \rightarrow x,$$

a zatem także

$$A_n = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow x.$$

**Przykład 2.46.** Jeśli ciąg liczb dodatnich  $x_n$  jest zbieżny do granicy  $x \geq 0$ , to ciąg średnich geometrycznych

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

też jest zbieżny do granicy  $x$ . Szczegóły dowodu, który można przeprowadzić, korzystając z poprzedniego przykładu oraz ciągłości funkcji wykładniczej i logarytmu, pozostawimy Czytelnikom.  $\square$

**Zadanie 2.47.** Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

**Wskazówka.** Zauważyc, że  $x_n = n^n / (1+n)^n$  ma granicę  $1/e$  i skorzystać z poprzedniego przykładu.

**Przykład 2.48.** Implikacji, która jest treścią twierdzenia Stolza, *nie można odwrócić*. Jeśli np.  $a_n = 3n - (-1)^n$ ,  $b_n = 3n + (-1)^n$ , to łatwo zauważyc, że  $b_n$  rośnie monotonicznie do  $+\infty$  i, oczywiście,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3 - \frac{(-1)^n}{n}}{3 + \frac{(-1)^n}{n}} \rightarrow \frac{3}{3} = 1,$$

ale nietrudno sprawdzić, że  $a_{n+1} - a_n = 3 + 2 \cdot (-1)^n$ ,  $b_{n+1} - b_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$ , więc ciąg  $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)$  ma na przemian wyrazy równe  $1/5$  i  $5$ , a to znaczy, że jest rozbieżny. Nie należy więc bez zastanowienia pisać  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \dots$ , gdyż może się okazać, że pierwsza granica istnieje, a druga – nie. (Z podobną sytuacją zetknimy się później, omawiając regułę de l'Hospitala.)

## Rozdział 3

# Funkcja wykładnicza i logarytm

Potrafimy już definiować potęgi liczb dodatnich o wykładniku wymiernym: jeśli  $a > 0$  i  $x = p/q \in \mathbb{Q}$  dla  $p, q \in \mathbb{N}$ , to naturalnie jest przyjąć

$$a^x = \left(a^{1/q}\right)^p = \underbrace{a^{1/q} \cdot \dots \cdot a^{1/q}}_{p \text{ razy}}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Zasadniczym celem tego rozdziału jest wskazanie, jak można określić potęgę  $a^x$  liczby  $a > 0$  o dowolnym wykładniku rzeczywistym  $x$  – także *niewymiernym*, i jak określić logarytm, to znaczy funkcję, która dla danych liczb dodatnich  $y, a, a \neq 1$ , wskazuje taką liczbę  $x \in \mathbb{R}$ , że  $a^x = y$ .

Poznamy przy okazji cały szereg fundamentalnych własności tych funkcji. Jak Czytelnik być może zauważy, w nazwach niektórych z tych własności figurują takie słowa jak *ciągłość* i *różniczkowalność*. Na razie to tylko terminy; pełną treść nadamy im wtedy, gdy zajmiemy się bliżej systematycznym badaniem własności funkcji ciągłych i funkcji różniczkowalnych.

**Uwaga.** W jednym z późniejszych rozdziałów zajmiemy się wprowadzeniem funkcji wykładniczej w dziedzinie zespolonej. Do tego jednak przyda się nam nieco więcej narzędzi.

### 3.1 Funkcja wykładnicza

**Lemat 3.1 (o ciągach szybko zbieżnych do 1).** *Założmy, że  $(a_n)$  jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że  $na_n \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Wtedy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n = 1.$$

**Dowód.** Ponieważ  $na_n \rightarrow 0$ , więc  $|a_n| \leq |na_n| < 1/2$  i  $|a_n| < \frac{1}{2} < |1 + a_n|$  dla dostatecznie dużych  $n$ ; dla takich  $n$  skorzystamy dwukrotnie z nierówności Bernoulliego. (Czytelnik zechce sprawdzić, że dzięki poprzedniemu zdaniu wszystkie założenia tej nierówności są spełnione). Po pierwsze,

$$\frac{1}{(1 + a_n)^n} = \left(1 - \frac{a_n}{1 + a_n}\right)^n \geq 1 - \frac{na_n}{1 + a_n}.$$

Po drugie,

$$(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n > 0, \quad \text{więc} \quad \frac{1}{(1 + a_n)^n} \leq \frac{1}{1 + na_n}.$$

Zatem, dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$ ,

$$1 - \frac{na_n}{1 + a_n} \leq \frac{1}{(1 + a_n)^n} \leq \frac{1}{1 + na_n}$$

Ponieważ  $na_n \rightarrow 0$  (i oczywiście tym bardziej  $a_n \rightarrow 0$ ) dla  $n \rightarrow \infty$ , więc teza lematu łatwo wynika z twierdzenia o 3 ciągach.  $\square$

**Twierdzenie 3.2 (własności funkcji wykładniczej).** *Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  ciąg*

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

*jest zbieżny do granicy  $a(x) \in \mathbb{R}$ , która ma następujące własności:*

**(E1)**  $a(x) > 0$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  i  $a(0) = 1$ ;

**(E2)**  $a(x)a(y) = a(x+y)$  dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

**(E3)**  $a(x) \geq 1+x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ ;

**(E4) (Monotoniczność):**  $a(x) > a(y)$  dla wszystkich  $x > y$ ;

**(E5)**  $a(x) \leq 1/(1-x)$  dla każdego  $x < 1$ ;

**(E6)**  $|a(x) - 1 - x| \leq 2|x|^2$  dla każdego  $|x| \leq \frac{1}{2}$ ;

**(E7) (Ciągłość):** jeśli  $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ , to  $a(x_n) \rightarrow a(x)$ ;

**(E8) (Różniczkowalność):** jeśli  $h_n \rightarrow 0$  i  $h_n \neq 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(x + h_n) - a(x)}{h_n} = a'(x)$$

Dowód. Plan postępowania jest taki: wykażemy, że granica  $a(x)$  ciągu  $a_n(x)$  istnieje dla każdego  $x$ , a potem stopniowo będziemy dowodzić jej własności.

**Krok 1.** Najpierw sprawdzimy, że ciąg  $a_n(x)$  jest monotoniczny od pewnego miejsca. Ustalmy  $x \in \mathbb{R}$ . Rozpatrujemy odtąd tylko  $n > |x|$ ; wtedy  $(n+x)/n = 1 + \frac{x}{n} > 0$  i  $a_n(x) > 0$ , zatem

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}} \geq \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{n}{n+x}.$$

Zapiszmy iloraz potęg, występujący w ostatnim wyrażeniu, w postaci  $(1 + \dots)^{n+1}$  i skorzystajmy wtedy z nierówności Bernoulliego:

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}} &= \left(\frac{(n+1+x)n}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \\ &\text{gdyż } (n+1)(n+x) - x = (n+1+x)n \\ &\geq 1 - \frac{x}{(n+x)} = \frac{n}{n+x}. \end{aligned}$$

(Dla  $x < 0$  oczywiście wolno było nierówność Bernoulli'ego stosować; dla  $x \geq 0$  jest  $|\frac{x}{(n+1)(n+x)}| \leq \frac{x}{n+x} \leq 1$ ). Zatem istotnie ciąg  $a_n(x)$  jest niemalejący dla  $n > |x|$ .

*Krok 2.* Niech  $x < 0$ . Wtedy dla  $n > |x|$  zachodzą nierówności

$$0 < 1 + \frac{x}{n} < 1, \quad 0 < a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < 1,$$

a to znaczy, że ciąg  $a_n(x)$  jest ograniczony. Ponieważ jest niemalejący od pewnego miejsca, więc jest zbieżny, a jego granica  $a(x) > 0$ , bo dzięki monotoniczności  $a(x) \geq a_m(x) > 0$  dla  $m > |x|$ .

*Krok 3.* Dla  $x > 0$  posłużymy się sztuczką. Mianowicie,  $1 - \frac{x^2}{n^2} = (1 - \frac{x}{n})(1 + \frac{x}{n})$ , a zatem dla  $n > |x|$  możemy napisać

$$a_n(x) = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}{a_n(-x)}.$$

Z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 wiemy, że licznik jest zbieżny do 1, a z poprzedniego kroku dowodu – że mianownik jest zbieżny do  $a(-x) > 0$ . Zatem, z twierdzenia o granicy ilorazu ciągów,  $a_n(x) \rightarrow a(x) = 1/a(-x) > 0$ . Dla  $x = 0$  oczywiście  $a_n(0) \equiv 1 \rightarrow 1$ . To daje istnienie  $a(x)$  dla każdego  $x$  i własność (E1).

*Krok 4.* Teraz udowodnimy, że własności (E2)–(E6) istotnie przysługują  $a(x)$ .

Z twierdzenia o granicy ilorazu

$$\frac{a(x)a(y)}{a(x+y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}}}_{= (\text{ozn.}) a_n}\right)^n$$

Łatwo zauważyc, że  $na_n \rightarrow 0$ , więc z lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1 otrzymujemy  $a(x)a(y)/a(x+y) = 1$ , czyli własność (E2).

Ponieważ, dzięki nierówności Bernoulliego,  $a_n(x) \geq 1 + x$  dla wszystkich  $n > |x|$  i wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ , więc na mocy stwierdzenia o szacowaniu granic także  $a(x) \geq 1 + x$ . To daje własność (E3).

Sprawdzamy monotoniczność, czyli własność (E4). Niech  $x > y$ . Korzystając z (E1)–(E3) piszemy

$$a(x) - a(y) \stackrel{(E2)}{=} a(y)a(x-y) - a(y) = a(y)(a(x-y) - 1) \stackrel{(E1), (E3)}{\geq} a(y)(x-y) > 0$$

gdyż  $a(y) > 0$  i  $x-y > 0$ . Zatem  $a(x) > a(y)$  dla  $x > y$ .

Własność (E5) łatwo wynika z (E3) i (E2). Istotnie,  $a(-x) \geq 1 - x > 0$  dla  $x < 1$ , a więc dla takich  $x$  jest

$$a(x) = \frac{1}{a(-x)} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Aby wykazać (E6), stosujemy dla  $|x| \leq 1/2 < 1$  własności (E3) i (E5):

$$0 \stackrel{(E3)}{\leq} a(x) - 1 - x \stackrel{(E5)}{\leq} \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{1 - 1 + x - x + x^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \leq 2|x|^2$$

(w ostatniej nierówności używamy warunku  $|x| \leq \frac{1}{2}$ ).

**Krok 5.** Na koniec wykażemy własności (E7) i (E8). Jeśli  $x_n \rightarrow x$ , to wówczas  $|x_n - x|^2 < |x_n - x| < 1/2$  dla dostatecznie dużych  $n$ , więc oznaczając dla długości  $r_n = |x_n - x|$ , otrzymujemy z nierównością trójkąta

$$|a(r_n) - 1| \leq |a(r_n) - 1 - r_n| + |r_n| \stackrel{(E6)}{\leq} 2r_n^2 + |r_n| \leq 3|r_n| = 3|x_n - x|.$$

Zatem, posługując się twierdzeniem o 3 ciągach, łatwo wnioskujemy, że  $a(x_n - x) = a(r_n) \rightarrow 1$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Ponadto,

$$0 \leq |a(x_n) - a(x)| \stackrel{(E2)}{=} |a(x)| \cdot |a(x_n - x) - 1|,$$

więc także  $a(x_n) \rightarrow a(x)$ .

Została nam ostatnia własność, (E8). Piszemy

$$\frac{a(x + h_n) - a(x)}{h_n} \stackrel{(E2)}{=} \frac{a(x)a(h_n) - a(x)}{h_n} = a(x) \cdot \underbrace{\frac{a(h_n) - 1}{h_n}}_{= (\text{ozn.}) U_n} \equiv a(x) \cdot U_n.$$

Skoro  $h_n \rightarrow 0$ , to dla dostatecznie dużych  $n$  jest  $|h_n| < 1/2$  i wtedy

$$0 \leq |U_n - 1| = \left| \frac{a(h_n) - 1}{h_n} - 1 \right| = \left| \frac{a(h_n) - 1 - h_n}{h_n} \right| \stackrel{(E6)}{\leq} \frac{2|h_n|^2}{|h_n|} = 2|h_n| \rightarrow 0,$$

a więc  $U_n \rightarrow 1$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Zatem,  $a(x)U_n \rightarrow a(x)$  dla  $n \rightarrow \infty$ , a to właśnie należało udowodnić.

Dowód całego twierdzenia jest teraz zakończony.  $\square$

**Definicja 3.3** (liczba  $e$  i funkcja  $\exp$ ). Kładziemy

$$e = a(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2,718281828459045\dots$$

Dla  $x \in \mathbb{R}$  piszemy także  $\exp(x) = a(x)$ , gdzie  $a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ . Funkcja  $\exp$  nazywa się *funkcją wykładniczą* (zmiennej rzeczywistej).

Zatem,

$$e = \exp(1).$$

(Warto zauważyć, że wszystkie przytoczone wyżej cyfry rozwinięcia dziesiętnego  $e$  znał Leonhard Euler przed 1750 rokiem!)

Wiemy już o funkcji wykładniczej bardzo wiele. Udowodnimy jeszcze jedną jej własność: każda liczba dodatnia jest wartością tej funkcji.

**Stwierdzenie 3.4.** Dla każdego  $y > 0$  istnieje dokładnie jedna liczba  $x \in \mathbb{R}$  taka, że  $y = \exp(x)$ .

**Dowód.** Wystarczy przeprowadzić dowód dla  $y \in (0, 1)$ , gdyż  $1 = \exp(0)$  i jeśli  $z > 1$ , to  $1/z = y \in (0, 1)$ , więc z równości  $y = \exp(x)$  i  $\exp(x)\exp(-x) = 1$  wynika, że  $\exp(-x) = z$ .

Niech przeto  $y \in (0, 1)$ . Położmy  $A = \{t \in \mathbb{R}: \exp(t) \leq y\}$ . Jeśli  $t \geq 0$ , to dzięki (E3) jest  $\exp(t) \geq 1 + t \geq 1 > y$ , a więc  $t \notin A$ , tzn.  $A \subset (-\infty, 0)$ . Ponadto, dla  $n \in \mathbb{N}$  mamy, z własności (E5) użytej dla  $x = -n$ ,

$$\exp(-n) \leq \frac{1}{1+n},$$

a więc  $-n \in A$  dla wszystkich  $n$  dostatecznie dużych (wystarczy, by  $1/(1+n) < \exp(y)$ , tzn. aby  $n+1 > \exp(-y)$ ). Zatem zbiór  $A$  jest niepusty i ograniczony z góry, a więc istnieje  $x = \sup A \in \mathbb{R}$ . *A priori*, są trzy możliwości:

$$\exp(x) < y, \quad \exp(x) > y, \quad \exp(x) = y.$$

Wykażemy, że pierwsze dwie prowadzą do sprzeczności. Przypuśćmy więc, że  $\exp(x) < y$ . Z własności (E7) wynika, że dla  $n \rightarrow \infty$  ciąg  $\exp(x + \frac{1}{n}) \rightarrow \exp(x) < y$ , a więc, dzięki Stwierdzeniu 2.14,  $\exp(x + \frac{1}{n}) < y$  dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$ . Innymi słowy,  $\sup A = x < x + \frac{1}{n} \in A$ , to zaś jest sprzeczność. Nie może więc być  $\exp(x) < y$ .

Gdyby natomiast  $\exp(x) > y$ , to, podobnie jak przed chwilą, mielibyśmy  $\exp(x - \frac{1}{n}) \rightarrow \exp(x) > y$ , tzn. dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$  byłoby

$$\exp(x - \frac{1}{n}) > y \geq \exp t \quad \text{dla każdego } t \in A.$$

Z monotoniczności, patrz własność (E4), otrzymalibyśmy  $x - \frac{1}{n} > t$  dla każdego  $t \in A$ , ale  $x - \frac{1}{n} < x = \sup A$ , więc byłaby to sprzeczność z definicją kresu górnego.

Musi zatem być  $\exp(x) = y$ . Jednoznaczność wynika z monotoniczności  $\exp$ .  $\square$

**Definicja 3.5** (logarytm naturalny). Dla liczby  $y > 0$  definiujemy:  $\ln y = x$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$  jest jedyną liczbą taką, że  $\exp(x) = y$ .

Własności funkcji wykładniczej nietrudno przełożyć na odpowiednie własności logarytmu naturalnego.

**Twierdzenie 3.6** (własności logarytmu naturalnego). *Logarytm naturalny  $\ln y$  jest określony dla wszystkich liczb  $y > 0$  i ma następujące własności:*

**(L1)** *Dla wszystkich  $x, y > 0$  jest  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ;  $\ln e = 1$  i  $\ln 1 = 0$ .*

**(L2) (Monotoniczność logarytmu)** *Dla wszystkich  $y_1 > y_2 > 0$  mamy  $\ln y_1 > \ln y_2$ .*

**(L3)** *Dla wszystkich  $y > 0$  zachodzą nierówności*

$$1 - \frac{1}{y} \leq \ln y \leq y - 1.$$

*Równoważnie,*

$$\frac{t}{t+1} \leq \ln(1+t) \leq t \quad \text{dla wszystkich } t > -1. \tag{3.1}$$

**(L4)** *Jeśli  $t_n > -1$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  i  $t_n \rightarrow 0$ , to  $\ln(1+t_n) \rightarrow 0 = \ln 1$ .*

**(L5) (Ciągłość logarytmu)** *Jeśli  $y_n > 0$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  i  $y_n \rightarrow y > 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ , to wówczas  $\ln y_n \rightarrow \ln y$  dla  $n \rightarrow \infty$ .*

**(L6) (Różniczkowalność logarytmu)** Jeżeli  $h_n \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ , a także  $y > 0$  i  $y + h_n > 0$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(y + h_n) - \ln y}{h_n} = \frac{1}{y}.$$

Dowód. Udowodnimy (L1). Ponieważ  $x, y > 0$ , więc istnieją  $t, w \in \mathbb{R}$  takie, że  $\exp(t) = x$ ,  $\exp w = y$  (czyli:  $t = \ln x$ ,  $w = \ln y$ ). Z własności (E2) funkcji  $\exp$  otrzymujemy

$$xy = \exp(t) \exp(w) = \exp(t + w),$$

tz. wprost z definicji logarytmu  $\ln xy = t + w = \ln x + \ln y$ . Równości  $\ln e = 1$ ,  $\ln 1 = 0$  wynikają stąd, że  $\exp(1) = e$ ,  $\exp(0) = 1$ .

Nietrudno zauważyć, że logarytm jest monotoniczny: gdyby  $x_1 = \ln y_1 \leq \ln y_2 = x_2$  dla pewnych  $y_1 > y_2 > 0$ , to byłoby, dzięki monotoniczności funkcji wykładniczej,  $y_1 = \exp(x_1) \leq \exp(x_2) = y_2$ , a to jest sprzeczność.

Teraz sprawdzimy, że zachodzą nierówności podane w punkcie (L3). Niech  $x = \ln y$ . Mamy  $\exp(x) \geq 1 + x$ , tzn.  $\ln y = x \leq \exp(x) - 1 = y - 1$ . Ponieważ  $\exp(x) < 1/(1-x)$  dla  $x < 1$ , a z monotoniczności wynika, że  $\ln y < 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $y < e$ , więc przy dodatkowym założeniu  $x = \ln y < 1$ ,  $y > 0$ , jest

$$y = \exp(x) \leq \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\ln y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \geq 1 - \ln y \Leftrightarrow \ln y \geq 1 - \frac{1}{y}.$$

Gdy  $x = \ln y \geq 1$ , to nierówność jest banalna, gdyż  $1 - 1/y < 1$  dla  $y > 0$ . To kończy dowód pierwszej wersji (L3); drugą otrzymujemy, podstawiając  $y = 1+t$  (zauważmy:  $y > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $t > -1$ ).

Własność (L4) jest bardzo prosta. Otrzymujemy ją, stosując nierówności (3.1) z punktu (L3) i twierdzenie o trzech ciągach.

Przejdźmy do dowodu ciągłości, tzn. do własności (L5). Ponieważ logarytm iloczynu jest sumą logarytmów, więc

$$\ln y_n - \ln y = \ln \left( y \cdot \left( 1 + \frac{y_n - y}{y} \right) \right) - \ln y = \ln \left( 1 + \underbrace{\frac{y_n - y}{y}}_{= (\text{ozn.}) t_n} \right),$$

gdzie  $-1 < t_n = (y_n - y)/y = -1 + \frac{y_n}{y} \rightarrow 0$ , gdy  $y_n \rightarrow y$ . Wiemy już jednak, że  $\ln(1 + t_n) \rightarrow 0$  dla każdego ciągu  $t_n \rightarrow 0$ ,  $t_n > -1$ ; zatem  $\ln y_n \rightarrow \ln y$ , gdy  $y_n, y > 0$  i  $y_n \rightarrow y$  dla  $n \rightarrow \infty$ . To kończy dowód własności (L4).

Na koniec wykażemy różniczkowalność logarytmu. Zauważmy, że

$$\frac{\ln(y + h_n) - \ln y}{h_n} = \frac{\ln y + \ln \left( 1 + \frac{h_n}{y} \right) - \ln y}{h_n} = \frac{\ln(1 + t_n)}{t_n} \cdot \frac{1}{y} \quad \text{dla } t_n = \frac{h_n}{y} \neq 0,$$

Wystarczy więc wykazać, że dla każdego ciągu  $t_n \rightarrow 0$ , gdzie  $t_n \neq 0$  i  $t_n > -1$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , mamy  $\frac{1}{t_n} \ln(1 + t_n) \rightarrow 1$ . Oznaczmy  $s_n = \ln(1 + t_n)$ ; wtedy  $\exp(s_n) - 1 = t_n$  i  $s_n \neq 0$ . Zatem

$$\frac{\ln(1 + t_n)}{t_n} = \frac{s_n}{\exp(s_n) - 1}.$$

Sprawdziliśmy przed chwilą, dowodząc własności (L4), że  $s_n = \ln(1 + t_n) \rightarrow 0$ . Korzystając z różniczkowalności funkcji wykładniczej, patrz własność (E8), wnioskujemy, że  $s_n/(\exp(s_n) - 1) \rightarrow 1$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Zatem także  $\frac{1}{t_n} \ln(1 + t_n) \rightarrow 1$ .  $\square$

Dysponując już funkcją wykładniczą i logarytmem, nietrudno jest zdefiniować potęgę dowolnej liczby dodatniej o dowolnym wykładniku rzeczywistym.

**Definicja 3.7.** Dla wszystkich  $a > 0$  i wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  przyjmujemy

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

W szczególności, dla liczby  $e$  przyjęta definicja daje, zgodnie z naturalnym oczekiwaniem,  $e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$ , gdyż  $\ln e = 1$ . Zauważmy też od razu, że dla  $n \in \mathbb{N}$  jest, dzięki własności (L1) logarytmu,

$$a^n = \exp(n \ln a) = \exp(\underbrace{\ln a + \ln a + \dots + \ln a}_{n \text{ razy}}) = \exp(\ln(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)) = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}},$$

co zgadza się ze zwykłą definicją potęgi o wykładniku naturalnym. Nietrudno podać listę własności potęg, podawaną na ogół w szkole<sup>1</sup>

**Ćwiczenie 3.8.** Niech  $a, b > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Proszę samodzielnie, korzystając z (E1)–(E8) oraz (L1)–(L5), udowodnić następujące własności potęg:

- (i)  $a^{x+y} = a^x a^y$ , a ponadto  $a^{-x} = 1/a^x$  i  $a^0 = 1$ .
- (ii)  $(a^x)^y = a^{xy}$  i  $a^x b^x = (ab)^x$ .
- (iii) Jeśli  $a > 1$ , to  $a^x < a^y$  dla wszystkich  $x < y$ , a jeśli  $a \in (0, 1)$ , to  $a^x > a^y$  dla wszystkich  $x < y$ .
- (iv) Jeśli ciąg  $x_n \rightarrow x$  dla  $n \rightarrow \infty$ , to wówczas  $a^{x_n} \rightarrow a^x$  dla  $n \rightarrow \infty$ .
- (v) Jeśli  $a < b$ , to  $a^x < b^x$  dla wszystkich  $x > 0$  oraz  $a^x > b^x$  dla wszystkich  $x < 0$ .

Możemy także zdefiniować logarytm przy dowolnej podstawie  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Definicja 3.9.** Jeśli  $a > 0$  i  $a \neq 1$ , to dla wszystkich  $y > 0$  przyjmujemy

$$\log_a y = x \iff a^x = y.$$

**Ćwiczenie 3.10.** Posługując się udowodnionymi już własnościami funkcji wykładniczej i logarytmu, sprawdzić, że powyższa definicja jest poprawna (tzn. przy podanych założeniami o  $a$  i  $y$  liczba  $\log_a y$  istnieje i jest określona jednoznacznie). Dlaczego przyjmujemy, że  $a \neq 1$ ?

**Ćwiczenie 3.11.** Posługując się znanyimi własnościami potęg i logarytmu naturalnego, wykazać, że logarytm przy dowolnej podstawie  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  ma następujące własności:

---

<sup>1</sup>Odbiera się to zwykle bez wyjaśnienia, jak należy rozumieć napis  $a^x$ , gdy liczba  $x$  nie jest wymierna, i dlaczego wtedy odpowiednie równości mają sens – prawda jest taka, że nie da się wtedy uniknąć jakiejś wersji przejść granicznych...

- 1)  $\log_a y = (\ln y)/(\ln a)$  dla wszystkich  $y > 0$ .
- 2) Jeśli  $b > 0, b \neq 1$ , to  $\log_a y = (\log_b y)/(\log_b a)$  dla wszystkich  $y > 0$ .
- 3)  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$  dla wszystkich  $x, y > 0$ .
- 4)  $\log_a(y^x) = x \log_a y$  dla wszystkich  $y > 0, x \in \mathbb{R}$ .

Warunek 2) bywa nazywany *wzorem na zamianę podstawy logarytmu*.

## 3.2 Charakteryzacja funkcji wykładniczej

Co ciekawe, niewielka część własności funkcji wykładniczej i logarytmu określa każdą z tych funkcji jednoznacznie. Oto odpowiednie twierdzenia.

**Twierdzenie 3.12** (charakteryzacja funkcji  $\exp$ ). *Jeśli funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia trzy warunki:*

- (i) *Dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  jest  $f(x+y) = f(x)f(y)$ ,*
- (ii)  *$f(1) = e$ ,*
- (iii) *Dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  i każdego ciągu  $x_n \rightarrow x$  ciąg  $f(x_n)$  jest zbieżny do  $f(x)$ ,*

to wówczas

$$f(x) = \exp(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Dowód. Plan dowodu jest bardzo prosty. Korzystając z dwóch pierwszych założeń, dowodzi się, że  $f(x) > 0$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  i sprawdza się równość (3.2) dla wszystkich  $x \in \mathbb{Q}$  (niezbyt trudna indukcja). Następnie, korzystając z trzeciego założenia i gęstości  $\mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$ , dowodzi się (3.2) dla wszystkich  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Oto szczegóły:

*Krok 1.* Z pierwszego założenia otrzymujemy  $f(x) = f(x/2+x/2) = f(x)^2 \geq 0$  i  $f(0)^2 = f(0)$ . Liczba  $f(0)$  jest więc zerem lub jedynką. Nie może być jednak  $f(0) = 0$ , bo wtedy mielibyśmy  $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$  dla wszystkich  $x$ , a wiemy, że  $f(1) = e$ . Zatem  $f(0) = 1$ , co oznacza, że  $f(x)f(-x) = f(0) = 1$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Innymi słowy, liczba  $f(x)$  jest różna od zera i nieujemna.

Stwierdziliśmy więc, że  $f(x) > 0$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  i  $f(-x) = 1/f(x)$ .

*Krok 2.* Wiemy, że  $f(1) = e$ . Jeśli przyjąć, że  $f(m) = e^m$ , to  $f(m+1) = f(m)f(1) = e^m e = e^{m+1}$ . Przez indukcję wnioskujemy, że  $f(m) = e^m$  dla wszystkich  $m \in \mathbb{N}$ . Ponadto, dla  $m \in \mathbb{N}$  mamy  $f(-m)e^m = f(-m)f(m) = 1$ , tzn.  $f(-m) = e^{-m}$ . Zatem

$$f(m) = e^m = \exp(m) \quad \text{dla wszystkich } m \in \mathbb{Z}.$$

*Krok 3.* Niech  $m, n \in \mathbb{N}$ . Wtedy

$$f\left(\frac{1}{n}\right)^n = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ razy}}\right) = f(1) = e,$$

stąd zaś  $f(1/n) = e^{1/n}$ . Przez indukcję, podobnie jak w poprzednim kroku stosując własność  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , dowodzimy teraz, że  $f(m/n) = e^{m/n}$ . Wreszcie, ponieważ  $f(-x) = 1/f(x)$ , więc

$$f(x) = e^x = \exp(x) \quad \text{dla wszystkich } x = p/q \in \mathbb{Q}.$$

**Krok 4.** Niech  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Istnieje wtedy (patrz Twierdzenie 1.18) ciąg liczb wymiernych  $x_n$  zbieżny do  $x$ . Z założenia (iii) oraz ciągłości funkcji wykładniczej wnioskujemy, że

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \exp(x).$$

Sprawdziliśmy więc, że  $f(x) = \exp(x)$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Uwaga.** Drugie założenie Twierdzenia 3.12 ma charakter *normalizujący*: gdyby przyjąć, że  $f(1) = a > 0$ , to byłoby  $f(x) = a^x$ . Zamiast zakładać, że  $f(1) = e$ , można też przyjąć warunek

(ii)' Dla każdego ciągu różnych od zera liczb  $x_n \rightarrow 0$  mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = 1.$$

**Zadanie 3.13** (dla zainteresowanych rozumieniem teorii). Wykazać, że teza Twierdzenia 3.12 zachodzi, gdy założenie (ii) zastąpimy powyższym warunkiem (ii)'. Zastanowić się, czy założenie (iii) można wtedy ominąć.

**Wskazówka:** co trzeba zmienić w pierwszym kroku dowodu? Jak wykazać, że  $f(1) = e$ ? (Wolno używać wszystkich udowodnionych własności funkcji wykładniczej).

**Zadanie 3.14** (łatwiejsze od poprzedniego). Naśladując dowód ostatniego twierdzenia, wykazać, że jeśli funkcja  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia następujące warunki:

- (a) Dla wszystkich  $x, y > 0$  jest  $g(xy) = g(x) + g(y)$ ,
- (b)  $g(e) = 1$ ,
- (c) Dla każdego  $x > 0$  i każdego ciągu liczb dodatnich  $x_n \rightarrow x$  ciąg  $g(x_n)$  jest zbieżny do granicy  $g(x)$ ,

to wówczas

$$g(x) = \ln(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Przekonamy się za pewien czas, że funkcję wykładniczą i logarytm naturalny można określić także dla zespolonych wartości zmiennej. Trzeba to jednak zrobić nieco inaczej (Czytelnik zauważał zapewne, że w dowodach w tym rozdziale wielokrotnie korzystaliśmy z własności ciągów monotonicznych i nierówności Bernoulliego, a tych narzędzi trudno używać w  $\mathbb{C}$ ). Wygodnie będzie zająć się najpierw *szeregami*.

## Rozdział 4

# Szeregi. Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej.

Pojęcie szeregu wprowadza się po to, żeby można było ścisłe mówić o sumach nieskończonym wielu składników. Z takimi sumami spotkaliśmy się już, mówiąc o ciągach. Np. dla  $|q| < 1$  jest

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + \dots + q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}. \quad (4.1)$$

Pierwszą równość traktujemy jako definicję napisu, występującego z lewej strony; druga równość wynika ze wzoru na różnicę  $(n + 1)$ -szych potęg, a trzecia – z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy i stąd, że  $q^n \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ , gdy  $|q| < 1$ .

Nieskończone sumowanie wymaga ostrożności: nie wolno w tym przypadku bezkarnie korzystać z przemienności i łączności dodawania. Gdyby np. suma  $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$  miała skońzoną wartość  $S$  i gdyby nieskończone dodawanie było przemienne i łączne, to mielibyśmy

$$\begin{aligned} S &= (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= -1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = -1 + 0 + 0 + \dots \\ &= -1 - ((-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots) \end{aligned}$$

tz. przy, jak się wydaje, naturalnej i sensownej umowie  $0 + 0 + 0 + \dots = 0$ , byłoby  $S = 0 = -1 = -1 - S$ , co pokazuje, że  $S$  byłaby jednocześnie każdą z liczb  $0, -1, -\frac{1}{2}$ , tak zaś oczywiście nie może być!

Dlatego zaczniemy od definicji, służących ustaleniu, kiedy można mówić o sumie nieskończonym wielu składników.

**Definicja 4.1.** Szereg (liczb rzeczywistych)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  to para ciągów,  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  i  $s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Ciąg  $(s_n)$  nazywamy ciągiem sum częściowych szeregu. Liczby  $a_n$  to wyrazy szeregu.

**Definicja 4.2.** Mówimy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest zbieżny do skończonej granicy. Jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to

liczbe

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

nazywamy jego sumą i piszemy<sup>1</sup>

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Szereg, który nie jest zbieżny, nazywa się rozbieżny.

(Czasem wygodnie jest numerować ciąg wyrazów szeregu za pomocą liczb całkowitych większych od pewnej ustalonej liczby  $n_0 \in \mathbb{Z}$ ; będziemy to robić bez wahania.)

**Przykład 4.3 (szereg geometryczny).** Jeśli  $q \in \mathbb{R}$  i  $|q| < 1$ , to wtedy szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

jest zbieżny, a jego suma jest równa  $1/(1 - q)$ . To wynika ze wzoru na sumę skończonego postępu geometrycznego i zostało wyjaśnione, gdy podaliśmy wzór (4.1).

**Stwierdzenie 4.4 (warunek Cauchy'ego dla szeregów).** Szereg liczb rzeczywistych  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek Cauchy'ego dla szeregów:

(CS) Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  takie, że dla wszystkich  $m > k > n_{\varepsilon}$  jest

$$|a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Dowód. Mamy  $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m = s_m - s_k$ , więc (CS) to po prostu warunek Cauchy'ego dla ciągu  $(s_n)$ , równoważny (jak wiemy) zbieżności  $(s_n)$ , czyli – wprost z definicji – zbieżności szeregu. □

Dla porządku odnotujmy jeszcze jeden prosty fakt. (Jego sens jest jasny: analizując zbieżność szeregu, wolno odrzucić ustaloną liczbę początkowych wyrazów.)

**Stwierdzenie 4.5.** Jeśli  $k_0 \in \mathbb{N}$ , to szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Dowód. Nietrudno zauważyc, że warunek Cauchy'ego albo jednocześnie zachodzi dla obu szeregów, albo nie zachodzi dla żadnego z nich: dla dużych  $m > k > k_0$  wartości sum  $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m$  są przecież te same. □

---

<sup>1</sup>Nadużywamy tu lekko oznaczeń, ale jest to przyjęty i w tym przypadku niegroźny obyczaj; nie będziemy się nadmiernie obawiać pomylenia szeregu z jego sumą.

**Stwierdzenie 4.6 (suma szeregów).** Jeśli szeregi  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  są zbieżne, to szereg  $\sum(a_n + b_n)$  jest zbieżny i

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dowód. To wynika natychmiast z twierdzenia o granicy sumy ciągów zbieżnych.  $\square$

**Stwierdzenie 4.7 (warunek konieczny zbieżności szeregu).** Jeśli szereg liczb rzeczywistych  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dowód. Jeśli  $s_n = a_1 + \dots + a_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$ , to  $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Przykład 4.8.** Jeśli  $|q| \geq 1$ , to szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

jest rozbieżny, gdyż  $a_n = q^n \not\rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ , a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.  $\square$

**Przestroga.** Należy pamiętać, że podany wyżej warunek zbieżności szeregu **nie jest warunkiem dostatecznym**: ze zbieżności  $a_n \rightarrow 0$  nie wynika wcale zbieżność szeregu  $\sum a_n$ . Istotna jest nie sama zbieżność  $a_n$  do zera, ale *tempo tej zbieżności*.

**Przykład 4.9 (rozbieżność szeregu harmonicznego).** Szereg *harmoniczny*, tzn. szereg o wyrazach  $a_n = 1/n$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ , jest rozbieżny. Jest to na tyle ważny fakt, że obejrzymy kilka jego dowodów.

**Dowód PIERWSZY.** Dla szeregu harmonicznego nie jest spełniony warunek Cauchy'ego; sumy dalekich wyrazów nie muszą być małe. Istotnie, biorąc  $\varepsilon = 1/2$  i dowolną liczbę  $n$ , otrzymujemy

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ składników}} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

**Dowód DRUGI.** Wiemy już, że dla  $t > -1$  zachodzą nierówności  $t/(t+1) \leq \ln(1+t) \leq t$ . Podstawiając w nich  $t = 1/k$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ , otrzymujemy

$$\frac{1}{k+1} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

Sumując te nierówności dla  $k = 1, 2, \dots, n$ , sprawdzamy, że

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Jednak  $\ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln((k+1) \cdot \frac{1}{k}) = \ln(k+1) - \ln k$ , zatem sumę logarytmów w poprzednim wzorze łatwo jest obliczyć: jest ona równa  $\ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$ . Otrzymujemy stąd, oznaczając dla krótkości  $n$ -tą sumę częściową szeregu harmonicznego przez  $s_n$ ,

$$s_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq s_n. \quad (4.2)$$

Ponieważ  $\ln(n+1) \rightarrow \infty$  dla  $n \rightarrow \infty$ , więc  $s_n$  nie ma skończonej granicy, gdy  $n \rightarrow \infty$ .

**Przykład 4.10.** Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  jest zbieżny. Istotnie, dla każdej liczby  $n \geq 2$  mamy

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

a zatem

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Ciąg  $(s_n)$  sum częściowych tego szeregu jest rosnący (bo wyrazy szeregu są dodatnie) i ograniczony z góry przez liczbę 2, jest więc zbieżny.  $\square$

## 4.1 Szeregi o wyrazach dodatnich

Badanie zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich jest łatwiejsze od badania zbieżności szeregów o dowolnych wyrazach rzeczywistych. W podręcznikach Analizy można znaleźć bardzo wiele tzw. *kryteriów zbieżności szeregów*, tzn. twierdzeń, podających warunki dostateczne zbieżności (lub rozbieżności) szeregu. Nie będziemy podawać długiej listy takich twierdzeń<sup>2</sup>; zadowolimy się skromnym zestawem, który do wielu celów w zupełności wystarcza.

Zacznijmy od banalnej obserwacji.

**Twierdzenie 4.11.** Jeśli  $a_n > 0$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych  $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  jest ograniczony z góry.

**Dowód.** Ciąg  $(s_n)$  jest niemalejący, gdyż  $a_n > 0$  dla wszystkich  $n$ . Dlatego zbieżność  $s_n$  do granicy skończonej jest równoważna ograniczeniu  $s_n$ , patrz Twierdzenie 2.29. Ponieważ  $s_n > 0$ , więc trzeba (i wystarcza) sprawdzać tylko ograniczonosć z góry.  $\square$

Najprostszy zestaw kryteriów zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich w gruncie rzeczy można ograniczyć do dwóch faktów: kryterium porównawczego i kryterium zagęszczeniowego. Każde z nich wykorzystuje jasną, intuicyjną ideę. Sens kryterium porównawczego jest taki, że jeśli można określić sumę pewnego nieskończonego zestawu liczb dodatnich, to można także określić sumę liczb mniejszych (która będzie mniejsza). Kryterium zagęszczeniowe można opisać tak: grupując dodatnio wyrazy, łatwiej jest dostrzec, jak szybko (lub wolno) rosną sumy częściowe szeregu.

<sup>2</sup>Zainteresowanych odsyłam do podręcznika Fichtenholza i książki Knoppa o szeregach nieskończonych.

**Stwierdzenie 4.12 (kryterium porównawcze, wersja I).** Założmy, że  $a_n, b_n > 0$  i istnieją takie liczby  $c > 0$  i  $n_0 \in \mathbb{N}$ , że  $a_n \leq c \cdot b_n$  dla wszystkich  $n \geq n_0$ . Wtedy

- (a) Ze zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  wynika zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;
- (b) Z rozbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wynika rozbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Dowód. Jeśli  $n_1 \geq n_0$ , to dla wszystkich  $m > k > n_1$  jest, dzięki dodatniości wyrazów obu szeregów,

$$|a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m| \leq c|b_k + b_{k+1} + \cdots + b_m|$$

(moduły można po prostu pominąć). Jeśli więc warunek Cauchy'ego dla szeregów jest spełniony dla szeregu o wyrazach  $b_n$ , to jest spełniony także dla szeregu o wyrazach  $a_n$ . Trzeba po prostu ustalić  $\varepsilon > 0$ , wziąć dla szeregu o wyrazach  $b_n$  liczbę dodatnią  $\varepsilon' = \varepsilon/c$ , dobrą do niej  $n_{\varepsilon'}$  (nie mniejsze od  $n_0$ ) i zobaczyć, że dla  $m > k > n_{\varepsilon'}$  będzie wtedy  $|a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m| < c\varepsilon' = \varepsilon$ .

Tak samo sprawdzamy, że jeśli warunek Cauchy'ego nie zachodzi dla szeregu o wyrazach  $a_n$ , to nie zachodzi także dla szeregu o wyrazach  $b_n$ .  $\square$

**Uwaga.** Jeśli komuś nie podoba się rozumowanie, w którym w sposób jawnym korzysta się z warunku Cauchy'ego, może postępować w dowodzie tak: skorzystać ze Stwierdzenia 4.5, odrzucić wyrazy o numerach mniejszych od  $n_0$  i stwierdzić, że jeśli  $M/c$  jest ograniczeniem górnym zbioru sum częściowych szeregu  $\sum_{n \geq n_0} b_n$ , to liczba  $M > 0$  jest ograniczeniem górnym zbioru sum częściowych szeregu  $\sum_{n \geq n_0} a_n$ . To wynika z nierówności  $a_n \leq c \cdot b_n$  i dodatniości wyrazów  $a_n, b_n$ . Zastosowanie Stwierdzenia 4.11 pozwala zakończyć inny, alternatywny dowód kryterium porównawczego.

**Stwierdzenie 4.13 (kryterium porównawcze, wersja II).** Jeśli  $a_n, b_n > 0$  dla wszystkich  $n \geq n_0$  i istnieje skończona, dodatnia granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n)$ , to wówczas szeregi  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Dowód. Można bez zmniejszenia ogólności założyć, że  $n_0 = 1$ . Wybierzmy liczbę  $C > 0$  tak, aby

$$\frac{1}{C} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < C.$$

Na mocy Stwierdzenia 2.14 (o szacowaniu granic) istnieje wtedy  $n_1 \in \mathbb{N}$  takie, że

$$a_n < Cb_n \quad \text{i} \quad b_n < Ca_n \quad \text{dla wszystkich } n > n_1.$$

Teza wynika teraz z poprzedniej wersji kryterium porównawczego.  $\square$

**Stwierdzenie 4.14 (kryterium porównawcze, wersja ilorazowa).** Założmy, że dla  $n \geq n_0$  jest  $a_n, b_n > 0$  oraz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{4.3}$$

Wtedy

(a) Ze zbieżnością szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  wynika zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;

(b) Z rozbieżnością szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wynika rozbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Dowód.** Można bez zmniejszenia ogólności założyć, że  $n_0 = 1$ . Mnożąc nierówności (4.3) stronami dla  $n = 1, 2, \dots, N - 1$  otrzymujemy

$$\frac{a_N}{a_1} = \frac{a_N}{a_{N-1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_N}{b_{N-1}} \cdot \dots \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_N}{b_1},$$

a więc  $a_N \leq c \cdot b_N$ , gdzie  $c = a_1/b_1$ . Są to założenia pierwszej wersji kryterium porównawczego; stosując je, kończymy dowód.  $\square$

**Przykład 4.15.** Jeśli  $q \in (0, 1)$ , to szereg o wyrazach  $a_n = nq^n$  jest zbieżny. Istotnie, weźmy dowolne  $s \in (q, 1)$ . Ponieważ  $(n+1)/n \rightarrow 1$ , więc dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$  jest

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} q < s = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{gdzie } b_n = s^n.$$

Ponieważ dla każdego  $s \in (0, 1)$  szereg geometryczny  $\sum s^n$  jest zbieżny, więc szereg  $\sum nq^n$  jest zbieżny. To wynika z punktu (a) ostatniego kryterium.  $\square$

**Przykład 4.16.** Postępując praktycznie tak samo, jak w poprzednim przykładzie, można stwierdzić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$ , gdzie  $k$  jest ustaloną liczbą naturalną i  $q \in (0, 1)$ , jest zbieżny.  $\square$

**Przykład 4.17.** Obliczymy sumę szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ , posługując się wzorem na sumę postępu geometrycznego. Otóż, zauważając, że  $kq^k$  jest sumą  $k$  składników równych  $q^k$ , i grupując wyrazy, otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_n := q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n &= q + q^2 + q^3 + \dots + q^n && \text{(w każdym wierszu} \\ &\quad + q^2 + q^3 + \dots + q^n && \text{trójkątnej 'tabelki' obok} \\ &\quad + q^3 + \dots + q^n && \text{widać postęp geometryczny!)} \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + q^n \\ &= \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^2 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^3 - q^{n+1}}{1 - q} + \dots + \frac{q^n - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1}{1 - q} (q + q^2 + \dots + q^n - nq^{n+1}) \\ &= \frac{q - q^{n+1} - nq^{n+1}(1 - q)}{(1 - q)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{q}{(1 - q)^2}, \end{aligned}$$

gdyż  $q^n \rightarrow 0$  i  $nq^n \rightarrow 0$  (można stwierdzić to na wiele sposobów – my w tej chwili możemy już powiedzieć, że wynika to np. ze zbieżności szeregu  $\sum nq^n$ , udowodnionej we wcześniejszym przykładzie!). Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1 - q)^2} \quad \text{dla } q \in (0, 1). \tag{4.4}$$

Czytelnik może sam sprawdzić, że taki sam wzór ma miejsce dla  $q \in (-1, 0]$ .

**Stwierdzenie 4.18 (kryterium zagęszczeniowe).** *Jeśli  $(a_n)$  jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, to szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \text{gdzie } b_n = 2^n a_{2^n},$$

*są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.*

**Dowód.** Niech  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ . Zauważmy, że dzięki monotoniczności ciągu  $(a_k)$  i równości  $2^k + 2^k = 2^{k+1}$  jest

$$\underbrace{a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \dots + a_{2^{n+1}}}_{\substack{2^n \text{ składników; każdy jest} \\ \leq a_{2^n}}} \leq 2^n a_{2^n} = b_n$$

$$= 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} \leq 2 \cdot \left( \underbrace{a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \dots + a_{2^n}}_{\substack{2^{n-1} \text{ składników; każdy jest} \\ \geq a_{2^n}}} \right).$$

Sumując te nierówności dla  $n = 1, 2, \dots, N$ , otrzymujemy

$$s_{2^{N+1}} - a_1 - a_2 \leq t_N = \sum_{n=1}^N b_n \leq 2s_{2^N}$$

(proszę zauważyć, że zaczynamy od  $a_3 + a_4 \leq b_1 = 2a_2$ , stąd kosmetyczny dodatek  $-a_1 - a_2$  po lewej stronie wyżej). Zatem, ciągi monotoniczne  $(t_N)$  i  $(s_m)$  są albo jednocześnie ograniczone, albo jednocześnie nieograniczone. Teza kryterium zagęszczeniowego wynika więc ze Stwierdzenia 4.11.  $\square$

Zaleta tego kryterium jest taka, że (dzięki dodatkowemu założeniu o monotoniczności ciągu  $a_n$ ) szereg o wyrazach  $b_n$  zachowuje się – używając przenośni – tak samo, co szereg o wyrazach  $a_n$ , tylko w sposób bardziej oczywisty, łatwiejszy do zauważenia. Najlepiej zobaczyć to na przykładach.

**Przykład 4.19.** Oto trzeci dowód rozbieżności szeregu harmonicznego: jeśli  $a_n = 1/n$ , to

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1,$$

a szereg z samych jedynek jest oczywiście rozbieżny.  $\square$

**Przykład 4.20.** Szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

jest rozbieżny. Istotnie, dla  $a_n = 1/(n \ln n)$  otrzymujemy

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{n \ln 2},$$

więc rozbieżność rozważanego szeregu wynika z rozbieżności szeregu harmonicznego i kryterium zagęszczeniowego.  $\square$

Proszę zauważyć, że dla dużych  $n$  liczba  $1/(n \ln n)$  jest dużo mniejsza od  $1/n$  (iloraz tych liczb dąży do 0 dla  $n \rightarrow \infty$ ), więc sumy częściowe ostatniego szeregu rosną wolniej niż sumy częściowe szeregu harmonicznego. Jednak dzięki zastosowaniu kryterium zagęszczeniowego, tzn. dzięki odpowiedniemu grupowaniu wyrazów, potrafimy łatwo wykazać rozbieżność.

**Przykład 4.21.** Szereg<sup>3</sup>

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (4.5)$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $s > 1$ . Dla  $s \leq 0$  rozbieżność jest oczywista: nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności, gdyż dla takich  $s$  mamy  $a_n = n^{-s} \rightarrow +\infty$ . Niech więc  $s > 0$ . Wyrazy  $a_n = n^{-s}$  maleją do zera; zastosujmy kryterium zagęszczeniowe. Otóż

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^s} = \frac{1}{(2^{s-1})^n} = q^n, \quad \text{gdzie } q = 2^{1-s},$$

a więc zagęszczenie prowadzi do szeregu geometrycznego  $\sum b_n = \sum q^n$ , który (jak już wiemy) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $|q| = 2^{1-s} < 1 = 2^0$ , tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy  $1 - s < 0$ .  $\square$

**Przykład 4.22.** Jeśli  $a_n = 1/(n(\ln n)^s)$ , gdzie  $s \in \mathbb{R}$ , to  $\sum a_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $s > 1$ . Kryterium zagęszczeniowe daje:

$$b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\ln(2^n))^s} = c \cdot \frac{1}{n^s}, \quad \text{gdzie } c = 1/(\ln 2)^s.$$

Wystarczy teraz spojrzeć na poprzedni przykład.  $\square$

Dla porządku odnotujmy też nieco ogólniejszą wersję kryterium zagęszczeniowego.

**Stwierdzenie 4.23 (kryterium zagęszczeniowe, wariant).** *Jeśli  $(a_n)$  jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, a  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , to szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \text{gdzie } b_n = k^n a_{k^n},$$

*są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.*

**Dowód.** Niezbyt trudne ćwiczenie dla zainteresowanych.  $\square$

Warto zdawać sobie sprawę, że istnieją przykłady, które wymagają nieco subtelniejszej analizy, nie polegającej na szybkim stosowaniu gotowych kryteriów. Popatrzymy na dwa z nich.

**Przykład 4.24.** Niech  $p_n$  oznacza  $n$ -tą z kolei liczbę pierwszą, tzn.  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \dots$  Wykażemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \quad (4.6)$$

---

<sup>3</sup>Suma tego szeregu odgrywa bardzo ważną rolę w teorii liczb i jest nazywana *funkcją dzeta Riemanna*.

jest rozbieżny. Ustalmy liczbę  $N$ . Niech  $\mathcal{P}_N = \{p : p \text{ pierwsza}, p \leq N\}$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{p \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{p}\right) &= \prod_{p \in \mathcal{P}_N} \exp(1/p) \\ &\geq \prod_{p \in \mathcal{P}_N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad \text{gdyż } \exp(x) \geq 1 + x \\ &\geq \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \text{ bezkwadr.}}} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

W ostatniej linijce występuje suma odwrotności wszystkich liczb bezkwadratowych<sup>4</sup>  $n$ ,  $n \leq N$ ; nietrudno zauważać, że mnożąc wszystkie nawiasy  $(1 + \frac{1}{p})$  szkolną metodą ‘każdy z każdym’, otrzymamy tylko odwrotności liczb bezkwadratowych: wszystkich liczb bezkwadratowych  $\leq N$  i niektórych liczb bezkwadratowych  $> N$ .

Wiemy już, że  $2 > \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^2}$  dla każdego  $N$  (patrz Przykład 4.10); mnożąc tę nierówność przez poprzednią, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2 \exp\left(\sum_{p \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{p}\right) &\geq \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \text{ bezkwadr.}}} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^2}\right) \\ &\geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \stackrel{(4.2)}{\geq} \ln(N+1). \end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{p} \geq \ln \ln(N+1) - \ln 2,$$

a więc sumy częściowe szeregu (4.6) nie są ograniczone.<sup>5</sup>  $\square$

**Przykład 4.25 (szereg Kempnera).** Niech  $\mathcal{A}$  będzie zbiorem tych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym w ogóle nie występuje cyfra 9. Wtedy szereg

$$\sum_{n \in \mathcal{A}} \frac{1}{n}$$

jest *zbieżny*, a jego suma  $S$  nie przekracza liczby 80. Aby się o tym przekonać, oznaczmy

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A} \cap [10^{N-1}, 10^N - 1]$$

(jak widać,  $\mathcal{A}_N$  to podzbiór zbioru  $\mathcal{A}$ , złożony z liczb  $N$ -cyfrowych). Liczba elementów  $\mathcal{A}_N$  jest równa

$$\#\mathcal{A}_N = 8 \cdot 9^{N-1},$$

---

<sup>4</sup>Mówimy, że  $n$  jest liczbą bezkwadratową, jeśli  $n$  nie dzieli się przez żaden pełny kwadrat różny od 1; równoważnie,  $n$  jest liczbą bezkwadratową, gdy jest iloczynem parami różnych liczb pierwszych.

<sup>5</sup>Rozbieżność szeregu odwrotności liczb pierwszych wykazał L. Euler w 1737 roku, w nieco inny sposób od zaprezentowanego tutaj.

gdyż pierwszą cyfrę różną od dziewiątki, *niezerową*, można wybrać na 8 sposobów, a każdą z  $N - 1$  kolejnych na 9 sposobów. Zatem

$$\sum_{n \in \mathcal{A}_N} \frac{1}{n} \leq 8 \cdot 9^{N-1} \cdot \frac{1}{10^{N-1}} = 8 \left( \frac{9}{10} \right)^{N-1}.$$

Sumując te nierówności, nietrudno stwierdzić, że  $S \leq 80 = 8 \sum q^j$ , gdzie  $q = 9/10 \in (0, 1)$ , a indeks  $j = N - 1$  przybiera wartości  $0, 1, 2, \dots$ .  $\square$

Podamy, na zakończenie tego podrozdziału, jeszcze jedno bardzo ogólne kryterium zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

**Stwierdzenie 4.26 (kryterium Kummera).** Założmy, że  $a_n > 0$  dla wszystkich  $n > n_1$ . Wówczas szereg  $\sum a_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba  $\theta > 0$  oraz liczby nieujemne  $b_n$ , że

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \theta \quad \text{dla wszystkich } n \geq n_0. \quad (4.7)$$

Dowód. Jeśli szereg  $\sum a_n$  jest zbieżny, to przyjmujemy  $b_n = (1/a_n) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  dla  $n > n_1$ . Wtedy

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{1 \cdot a_n}{a_n \cdot a_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1,$$

więc warunek (4.7) zachodzi dla  $\theta = 1$  i  $n \geq n_1$ . Na odwrót, stosując (4.7) dla  $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$ , otrzymujemy

$$a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq \theta a_{n+1} > 0 \quad (4.8)$$

więc począwszy od miejsca  $n_2$  ciąg  $a_n b_n$  jest malejący i ma wyrazy dodatnie, tzn. ma granicę skończoną. Przeto szereg o wyrazach  $\theta^{-1}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$  jest zbieżny: jego sumy częściowe to  $s_N = \theta^{-1}(a_1 b_1 - a_N b_N)$ . Z kryterium porównawczego i nierówności (4.8) wynika teraz zbieżność szeregu  $\sum a_n$ .  $\square$

**Przykład 4.27.** Kładąc w (4.7)  $b_n = n$ , otrzymujemy łatwo tzw. *kryterium Raabego*.<sup>6</sup>

Jeśli  $a_n > 0$  i istnieje taka liczba  $s > 1$ , że

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq s \quad \text{dla wszystkich } n \geq n_0, \quad (4.9)$$

to szereg  $\sum a_n$  jest zbieżny.

(Uwaga: Czytelnik może sprawdzić, że wykorzystując warunek (4.9) i własności funkcji wykładowniczej, można wykazać, że dla  $r \in (1, s)$  i wszystkich dostatecznie dużych  $n$  jest  $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ , gdzie  $b_n = 1/n^r$ . Szereg  $\sum 1/n^r$  jest zbieżny dla  $r > 1$ . Zatem, niezależnie od kryterium Kummera, każdy szereg  $\sum a_n$  spełniający warunek (4.9) jest zbieżny na mocy ilorazowej wersji kryterium porównawczego, patrz Stw. 4.14.)

**Ćwiczenie 4.28.** Proszę sprawdzić, jaki wniosek otrzymamy, biorąc w kryterium Kummera  $b_n \equiv 1$  dla wszystkich  $n$ .

---

<sup>6</sup>A raczej: tę jego część, która służy do uzasadniania zbieżności szeregów, patrz np. książka Fichtenholza.

Czytelnik, który zetknął się z powyższymi kryteriami i przykładami, a także samodzielnie rozwiązał pewną liczbę zadań, może zadać sobie pytanie: czy istnieje jakiś *idealny, wzorcowy szereg*, którego zawsze można byłoby używać w kryterium porównawczym? Odpowiedź jest negatywna: dla każdego szeregu zbieżnego istnieje szereg, który jest zbieżny wolniej...

**Przykład 4.29.** Założmy, że  $b_n > 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$  i szereg  $\sum b_n$  jest zbieżny. Niech

$$R_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j$$

oznacza różnicę między sumą szeregu  $\sum b_n$  i jego  $n$ -tą sumą częściową. Wtedy oczywiście  $R_n$  maleje do 0, gdy  $n \rightarrow \infty$ . Przymijmy  $a_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$  dla  $n \geq 2$ . Mamy

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sqrt{R_1} - \sqrt{R_n}$$

(suma liczb  $a_j$  jest teleskopowa), a więc szereg  $\sum_{n \geq 2} a_n$  jest zbieżny i ma sumę równą  $\sqrt{R_1}$ . Jednak

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}}{R_{n-1} - R_n} = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \longrightarrow +\infty,$$

czyli zbieżności szeregu  $\sum a_n$  nie można wywnioskować ze zbieżności  $\sum b_n$  i kryterium porównawczego!

## 4.2 Interludium: zbieżność ciągów i szeregów zespolonych

Do tej pory mówiliśmy wyłącznie o ciągach i szeregach w  $\mathbb{R}$ . Wiele obserwacji i wniosków, dotyczących takich ciągów i szeregów, można przenieść na ciągi i szeregi liczb zespolonych.<sup>7</sup> Nam w najbliższym czasie takie ciągi i szeregi przydadzą się do trzech rzeczy:

- określenia  $\exp(z)$  dla  $z \in \mathbb{C}$ ,
- ścisłego wprowadzenia funkcji trygonometrycznych,
- wskazania jasnego związku funkcji trygonometrycznych z funkcją wykładniczą.

Zacznijmy ponownie od definicji. Są one prostym uogólnieniem tego, co już znamy. Założymy, że Czytelnik zna (np. z wykładów algebry liniowej) pojęcie liczby zespolonej i jej modułu.

**Definicja 4.30.** Ciąg  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  jest zbieżny do granicy  $z \in \mathbb{C}$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że  $|z_n - z| < \varepsilon$  dla wszystkich  $n > n_0$ .

---

<sup>7</sup> Użycie takich ciągów i szeregów jest rzeczą wygodną, nawet wtedy, gdy koniec końców interesują nas wyłącznie obliczenia mające fizyczny lub praktyczny sens. Podczas studiów matematycznych Czytelnik przecona się wielokrotnie, że liczby zespolone są niezwykle użytecznym narzędziem obliczeniowym; często bywa tak, że najkrótsza droga do nietrywialnego wzoru czy twierdzenia dotyczącego liczb rzeczywistych prowadzi przez dziedzinę zespoloną.

Intuicja związana z tą definicją jest prosta i w gruncie rzeczy taka sama, jak w  $\mathbb{R}$ : do każdej, choćby i bardzo małej, liczby dodatniej  $\varepsilon$  potrafimy dobrać taki moment  $n_\varepsilon$ , że począwszy od tego momentu wszystkie wyrazy ciągu  $(z_n)$  będą oddalone od  $z$  mniej niż o  $\varepsilon$  — tzn. znajdują się wewnątrz dysku  $D(z, \varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$ .

Podobnie określa się zbieżne szeregi liczb zespolonych.

**Definicja 4.31.** Niech  $(z_n) \subset \mathbb{C}$ . Szereg  $\sum z_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych  $s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$  ma granicę  $s \in \mathbb{C}$ .

Zauważmy, że jeśli  $w = a + ib \in \mathbb{C}$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ , to

$$\max(|a|, |b|) \leq |w| \leq |a| + |b|. \quad (4.10)$$

Interpretacja geometryczna tej nierówności jest oczywista: przeciwprostokątna trójkąta o wierzchołkach  $0, a, w = a + ib \in \mathbb{C}$  jest dłuższa, niż każda przyprostokątna z osobna, ale krótsza od sumy przyprostokątnych. Z tej łatwej nierówności otrzymujemy szybko następujące użyteczne wnioski.

**Stwierdzenie 4.32.** Ciąg liczb  $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$ , gdzie  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ , jest zbieżny do granicy  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Dowód. Zapisujemy (4.10) dla  $w = z_n - z$ ,  $a = x_n - x$  i  $b = y_n - y$ , a następnie korzystamy z definicji granicy i twierdzenia o trzech ciągach.  $\square$

**Stwierdzenie 4.33.** Szereg  $\sum z_n$ , gdzie  $z_n = x_n + iy_n$  dla pewnych  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ , jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są oba szeregi  $\sum x_n$ ,  $\sum y_n$ .  $\square$

**Stwierdzenie 4.34.** Ciąg  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego:

(C) Dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  takie, że dla wszystkich  $m, k > n_\varepsilon$  zachodzi nierówność  $|z_m - z_k| < \varepsilon$ .

Dowód. Ze Stwierdzenia 4.32 i Twierdzenia 2.38 wynika, że zbieżność  $(z_n)$  jest równoważna koniunkcji warunków Cauchy'ego dla ciągów  $(x_n) = (\operatorname{Re} z_n)$  i  $(y_n) = (\operatorname{Im} z_n)$ . Wobec nierówności (4.10),  $(x_n)$  i  $(y_n)$  spełniają warunek Caychy'ego (w  $\mathbb{R}$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $(z_n)$  spełnia warunek Cauchy'ego.  $\square$

**Stwierdzenie 4.35.** Szereg liczb zespolonych  $\sum z_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

(S) Dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  takie, że

$$|z_k + z_{k+1} + \dots + z_m| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } m > k > n_\varepsilon.$$

Dowód. To wynika z definicji szeregu zbieżnego i poprzedniego stwierdzenia.  $\square$

## 4.3 Szeregi o wyrazach dowolnych

### 4.3.1 Zbieżność bezwzględna i warunkowa

**Definicja 4.36.** Szereg  $\sum z_n$  jest *bezwzględnie zbieżny* wtedy i tylko wtedy, gdy szereg  $\sum |z_n|$  jest zbieżny.

Szereg, który jest zbieżny, ale nie bezwzględnie, nazywa się *warunkowo zbieżny*. Przykłady takich szeregów zobaczymy później; jednym z nich jest  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$  (który nie jest bezwzględnie zbieżny, gdyż  $\sum 1/n = \infty$ ).

**Stwierdzenie 4.37.** Jeśli szereg  $\sum z_n$  jest bezwzględnie zbieżny, to  $\sum z_n$  jest zbieżny.

Dowód. Jeśli szereg  $\sum z_n$  jest bezwzględnie zbieżny, to, z definicji, szereg liczb nieujemnych  $\sum |z_n|$  jest zbieżny, a więc spełnia warunek Cauchy'ego dla szeregów. Mamy jednak

$$|z_k + z_{k+1} + \cdots + z_m| \leq |z_k| + |z_{k+1}| + \cdots + |z_m|$$

dla wszystkich  $m > k$ , więc skoro  $\sum |z_n|$  spełnia warunek Cauchy'ego, to i  $\sum z_n$  spełnia ten warunek. To zaś oznacza, że  $\sum z_n$  jest zbieżny.  $\square$

Pojęcie zbieżności bezwzględnej jest ważne z uwagi na następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.38.** Założmy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest bezwzględnie zbieżny, a  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jest dowolną bijekcją. Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$  jest zbieżny, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

Innymi słowy, wyrazy szeregu bezwzględnie zbieżnego można dowolnie przestawiać; nie wpływa to ani na jego zbieżność, ani na wartość jego sumy.

Dowód. Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Dobierzmy  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, aby

$$|z_k| + |z_{k+1}| + \cdots + |z_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla wszystkich } m > k \geq n_0$$

(istnienie takiej liczby  $n_0$  wynika z bezwzględnej zbieżności  $\sum z_n$  i warunku Cauchy'ego). Biorąc  $k = n_0$  i przechodząc do granicy  $m \rightarrow \infty$ , otrzymujemy

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |z_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Niech  $m_j \in \mathbb{N}$  będzie taką liczbą, że  $\sigma(m_j) = j$ , gdzie  $j = 1, 2, \dots$ , tzn.  $m_j := \sigma^{-1}(j)$ . Dla  $n \in \mathbb{N}$  położmy  $k(n) = n + \max(m_1, m_2, \dots, m_n)$ . Wtedy  $k(n)$  jest ciągiem rosnącym i  $k(n) > n$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .

Sformalizujmy teraz następującą obserwację: ‘dalekie’ liczby permutacji  $\sigma$  musi przestawać ‘daleko’. Zauważmy w tym celu, że dla numerów  $l > k(n_0)$  mamy  $\sigma(l) > n_0$ , gdyż  $\sigma$  jest bijekcją i wartości  $1, 2, \dots, n_0$  przymuje w liczbach  $m_1, m_2, \dots, m_{n_0}$  nie większych

od  $k(n_0)$ . Zatem, dla wszystkich  $m > k > n_1 = \max(n_0, k(n_0)) = k(n_0)$  spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned} |z_{\sigma(k)} + z_{\sigma(k+1)} + \cdots + z_{\sigma(m)}| &\leq |z_{\sigma(k)}| + |z_{\sigma(k+1)}| + \cdots + |z_{\sigma(m)}| \\ &\leq \sum_{j=n_0}^{\infty} |z_j| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$  spełnia więc warunek Cauchy'ego, tzn. jest zbieżny.

Ponadto, dla wszystkich  $n \geq n_0$  jest

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^{k(n)} z_{\sigma(j)} \right| \leq \sum_{j \geq n_0} |z_j| < \varepsilon$$

a więc granica ciągu  $s_n = z_1 + \cdots + z_n$  i granica wskazanego wyżej podciągu (o numerach  $k(n)$ ) sum częściowych szeregu  $\sum z_{\sigma(n)}$  różnią się co najwyżej o  $\varepsilon$ . Z dowolności  $\varepsilon$  wynika zatem, że obie wspomniane granice są równe, a więc sumy obu szeregów są równe. To kończy cały dowód.  $\square$

Założenie bezwzględnej zbieżności w ostatnim twierdzeniu jest istotne. Bez niego teza nie zachodzi. Co więcej, ma miejsce następujący zaskakujący fakt.

**Twierdzenie 4.39 (B. Riemann).** *Jeśli  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  i szereg  $\sum a_n$  jest warunkowo (ale nie bezwzględnie!) zbieżny, to dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  istnieje taka bijekcja  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$$

Dowód. Opiszemy dowód słowami, gdyż dzięki temu będzie bardziej zrozumiałym. Zainteresowany Czytelnik zdoła samodzielnie uzupełnić drobne szczegóły.

Nietrudno zauważyc, że szereg  $\sum a_n$  ma nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych, gdyż w przeciwnym razie wszystkie wyrazy o dostatecznie dużych numerach byłyby tego samego znaku, a więc  $\sum a_n$  byłby nie tylko zbieżny, ale i bezwzględnie zbieżny.

Bez zmniejszenia ogólności założymy, że żadna z liczb  $a_n$  nie jest zerem. Niech  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  będą kolejnymi numerami wyrazów ujemnych, a  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$  — kolejnymi numerami wyrazów dodatnich szeregu  $\sum a_n$ . Zauważmy, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} = -\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} = +\infty.$$

Gdyby tak nie było, to wobec zbieżności szeregu  $\sum a_n$  oba powyższe szeregi byłyby zbieżne, a wtedy cały szereg  $\sum a_n$  byłby zbieżny bezwzględnie.

Bijekcję  $\sigma$  budujemy indukcyjnie. Oto pierwsze dwa kroki konstrukcji.

Wybieramy najmniejszą liczbę  $m$  taką, że  $a_{k_1} + \cdots + a_{k_m} > x$ . Kładziemy  $\sigma(1) = k_1$ ,  $\sigma(2) = k_2, \dots, \sigma(m) = k_m$ . Następnie zmniejszamy uzyskaną sumę, korzystając z ujemnych wyrazów szeregu: wybieramy najmniejszą liczbę  $s$  taką, że

$$a_{k_1} + \cdots + a_{k_m} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_s} < x$$

Przyjmujemy teraz  $\sigma(m+1) = n_1, \sigma(m+2) = n_2, \dots, \sigma(m+s) = k_s$ . Zarówno  $m$ , jak i  $s$ , są dobrze określone, gdyż szeregi wyrazów dodatnich i wyrazów ujemnych są rozbieżne. Niech  $m_1 = m, m_2 = m + s$ .

Załóżmy teraz, że wykonaliśmy  $N$  podobnych kroków, definiując  $\sigma(j)$  dla wszystkich  $j \leq m_N$ , gdzie  $m_N \geq N$ . Wyrazy o numerach  $\leq m_N$  są już *wykorzystane*, a wyrazy o numerach  $> m_N$  — *jeszcze dostępne*. Założymy ponadto, że (1) jeśli  $N$  jest nieparzyste, to

$$S_{m_N} = \sum_{j \leq m_N} a_{\sigma(j)} > x,$$

natomiast (2) jeśli  $N$  jest parzyste, to

$$S_{m_N} = \sum_{j \leq m_N} a_{\sigma(j)} < x$$

W kolejnym kroku w przypadku (1) dobieramy kolejne dostępne jeszcze (tzn. niewykorzystane wcześniej) ujemne wyrazy  $a_{k_j}$  szeregu, aż do momentu, gdy uzyskamy sumę częściową mniejszą od  $x$ . Można to osiągnąć, gdyż szereg wyrazów ujemnych jest rozbieżny. Natomiast w przypadku (2) dobieramy kolejne dostępne jeszcze wyrazy dodatnie, aż do momentu, gdy uzyskamy sumę częściową większą od  $x$ . Numery wyrazów, które wybieramy w  $(N+1)$ -szym kroku, to wartości  $\sigma$  w liczbach  $m_N + 1, \dots, m_{N+1}$ .

Postępując indukcyjnie, definiujemy  $\sigma: N \rightarrow N$ . Jest to bijekcja, gdyż każdy wyraz wykorzystujemy tylko raz i każdy wyraz zostaje kiedyś wykorzystany. Łatwo zauważać, że  $\sigma(n) \rightarrow \infty$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ . Sumy częściowe  $S_n$  szeregu  $\sum a_{\sigma(n)}$  oscylują wokół liczby  $x$ , gdyż tak były wybierane. W dodatku różnice między tymi sumami i liczbą  $x$  są coraz mniejsze, gdyż  $a_n \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$  (to jest warunek konieczny zbieżności szeregu  $\sum a_n$ ).

Ścisłej, nie jest trudno sprawdzić, że ciąg  $S_n$  spełnia warunek Cauchy'ego. To wynika z konstrukcji  $\sigma$  i zbieżności  $a_n \rightarrow 0$ . Ponadto, ciąg  $S_{m_N}$  jest zbieżny do  $x$ . Zatem, cały ciąg  $S_n$  też jest zbieżny do  $x$ .  $\square$

**Uwaga.** Nietrudno sprawdzić, że jeśli  $\sum a_n$  jest tylko warunkowo zbieżny, to można tak przestawić wyrazy, żeby po przestawieniu ciąg sum częściowych był rozbieżny do  $+\infty$  (albo do  $-\infty$ ). Czytelnik, po zapoznaniu się z dowodem twierdzenia Riemanna, bez większego trudu wskaże odpowiednie permutacje wyrazów.

**Uwaga (twierdzenie Riemanna na płaszczyźnie zespolonej).** Jako ciekawostkę powiadamy następujący fakt: jeśli szereg liczb zespolonych  $\sum z_n$  jest zbieżny warunkowo, ale nie bezwzględnie, to na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$  istnieje taka prosta  $\ell$ , że dla każdej liczby  $w \in \ell$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = w$$

dla pewnej bijekcji  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

### 4.3.2 Przekształcenie Abela

W tym podrozdziale zajmiemy się opisem warunków, które pozwalają wnioskować, że szereg  $\sum a_n b_n$  jest zbieżny. Wygodnie będzie przyjąć następującą konwencję: jeśli wyrazy szeregu oznaczamy jakąś małą literą (np.  $a, b, \dots$ ), to sumy częściowe tego szeregu oznaczamy odpowiednią wielką literą ( $A, B, \dots$ ).

**Twierdzenie 4.40 (N. H. Abel).** *Niech  $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ . Założmy, że istnieje taka liczba  $M > 0$ , że  $|A_n| = |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq M$  dla wszystkich  $n$ , a ponadto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty \quad \text{oraz} \quad b_n \rightarrow 0 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$

Wówczas szereg  $\sum a_n b_n$  jest zbieżny.

Dowód. Najpierw zapiszmy pomocniczy

**Lemat.** *Jeśli  $(\alpha_n)$  jest ograniczonym ciągiem w  $\mathbb{C}$ , a szereg  $\sum \beta_n$  jest bezwzględnie zbieżny, to szereg  $\sum \alpha_n \beta_n$  jest bezwzględnie zbieżny.*

(Dla dowodu wystarczy zauważyc, że jeśli  $|\alpha_n| \leq M$  dla wszystkich  $n$ , to wtedy  $|\alpha_n \beta_n| \leq M |\beta_n|$ , a więc ze zbieżności szeregu  $\sum |\beta_n|$  i kryterium porównawczego wynika zbieżność szeregu  $\sum |\alpha_n \beta_n|$ ).

Teraz wykonujemy przekształcenie Abela, tzn. zapisujemy sumy częściowe szeregu  $\sum a_n b_n$  w innej postaci, korzystając z równości  $a_k = A_k - A_{k-1}$ :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k = b_1 A_1 + \sum_{k=2}^n b_k (A_k - A_{k-1}) \\ &= \underbrace{A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \dots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n)}_{\text{patrz Lemat!}} + A_n b_n. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ostatni składnik,  $A_n b_n$ , jest zbieżny do zera, gdyż  $|A_n| \leq M$  i  $b_n \rightarrow 0$ . Pozostała, oznaczona klamrą, część sumy  $S_n$ , tzn.

$$A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \dots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$$

też ma granicę dla  $n \rightarrow \infty$ . To wynika z lematu, zastosowanego dla  $\alpha_n = A_n$  oraz dla  $\beta_n = b_n - b_{n+1}$ .  $\square$

**Wniosek 4.41 (kryterium Dirichleta).** *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych  $b_n$  maleje do zera, a sumy częściowe  $A_n$  szeregu  $\sum a_n$  tworzą ciąg ograniczony, to szereg  $\sum a_n b_n$  jest zbieżny.*

Dowód. Ponieważ  $b_n \geq b_{n+1} > 0$  i  $b_n \rightarrow 0$ , więc

$$\sum_{n=1}^N |b_n - b_{n+1}| = \sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{N+1} \rightarrow b_1 \quad \text{dla } N \rightarrow \infty.$$

Można więc stosować twierdzenie Abela: spełnione są wszystkie jego założenia.  $\square$

**Wniosek 4.42 (kryterium Leibniza).** *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych  $b_n$  maleje do zera, to szereg naprzemienny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

*jest zbieżny.*

Dowód. Przyjmujemy w kryterium Dirichleta  $a_n = (-1)^{n+1}$ ; wtedy  $|A_n| \leq 1$  dla wszystkich  $n$ .  $\square$

**Przykład 4.43.** Szereg naprzemienny  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  jest zbieżny (ale oczywiście nie jest bezwzględnie zbieżny).

**Przykład 4.44.** Jeśli  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = 1$ ,  $z \neq 1$ , to szereg  $\sum z^n/n$  jest zbieżny. To wynika z kryterium Dirichleta zastosowanego do  $a_n = z^n$  i  $b_n = 1/n$ . Ciąg  $b_n = 1/n$  maleje do zera, natomiast wartości bezwzględne sum częściowych

$$z + z^2 + \dots + z^n = z \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

są, niezależnie od  $n$ , ograniczone przez liczbę  $M = 2/|1 - z|$ , gdyż  $|1 - z^n| \leq 1 + |z|^n = 2$ . Ponieważ  $|z^n/n| = 1/n$ , więc rozpatrywany szereg *nie jest bezwzględnie zbieżny*.

W tym przykładzie można zamiast  $1/n$  użyć dowolnego ciągu  $b_n$  malejącego do zera i takiego, że  $b_n \geq 1/n$  — żadna konkluzja nie ulegnie zmianie.  $\square$

**Zadanie 4.45.** Udowodnić kryterium Leibniza bezpośrednio, nie posługując się twierdzeniem Abela. (Wskazówka: zbadać monotoniczność i ograniczonosć ciągów  $(s_{2k})$  i  $(s_{2k+1})$ , gdzie  $s_n$  oznacza  $n$ -tą sumę częściową rozważanego szeregu.)

**Zadanie 4.46.** Udowodnić następujące twierdzenie, nazywane czasem kryterium Abela:

*Jeśli  $b_n$  jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, a szereg  $\sum a_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum a_n b_n$  jest zbieżny.*

**Wskazówka.** Wykorzystać pierwszą linijkę (4.11) i wykazać, że ciąg  $S_n$  sum częściowych szeregu  $\sum a_n b_n$  spełnia warunek Cauchy'ego.

### 4.3.3 Mnożenie szeregów i twierdzenie Mertensa

Ze zdroworozsądkowego punktu widzenia, mnożenie szeregów  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  powinno polegać na próbie sprawdzenia, czy zbieżny będzie szereg, który (w jakimś porządku) zawiera wszystkie składniki  $a_i b_j$ , które uzyskalibyśmy, mnożąc formalnie jedną sumę przez drugą. Czytelnik rozumie już, że zbieżność takiego szeregu może zależeć od tego, jak uporządkujemy liczby  $a_i b_j$ .

**Definicja 4.47.** Jeśli  $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ , to iloczynem Cauchy'ego szeregów  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  nazywamy szereg o wyrazach

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

Innymi słowy, w iloczynie Cauchy'ego grupujemy  $a_i b_j$  tak, aby w każdej grupie suma  $i + j$  miała stałą wartość — tzn. postępujemy tak, jak przy mnożeniu wielomianów w szkole, gdzie nauczono nas grupować składniki z tą samą potegą zmiennej  $x$ .

**Twierdzenie 4.48 (F. Mertens).** Jeśli szereg  $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, a szereg  $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  jest zbieżny bezwzględnie, to ich iloczyn Cauchy'ego, tzn. szereg

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right)$$

jest zbieżny. Ponadto, jeśli szereg  $A$  jest zbieżny bezwzględnie, to i szereg  $C$  jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód. Niech, dla  $n \geq 0$ , zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją,  $C_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n$  oznacza  $n$ -tą sumę częściową szeregu  $C$ . Wykorzystując definicję  $c_n$ , porządkujemy  $C_N$ , grupując wyrazy zawierające wspólny czynnik  $b_j$ :

$$\begin{aligned} C_N &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_N + a_1 b_{N-1} + \dots + a_N b_0) \\ &= b_0(a_0 + a_1 + \dots + a_N) + b_1(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}) + \dots + b_N a_0 \\ &= \sum_{j=0}^N b_j A_{N-j}, \end{aligned}$$

gdzie  $A_k = a_0 + \dots + a_k$  dla  $k \geq 0$ . Wykażemy, że  $\lim C_N = AB$ . Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i liczbę  $\eta > 0$ , którą dopasujemy do  $\varepsilon$  później.

Mamy

$$|C_N - AB| = |C_N - AB_r + AB_r - AB| \leq |C_N - AB_r| + |A||B_r - B|. \quad (4.12)$$

Każdy ze składników prawej strony oszacujemy osobno, odpowiednio dobierając  $r$ .

Istnieje takie  $n_1$ , że dla wszystkich  $r > n_1$  jest  $|B_r - B| < \eta$  i  $|A||B_r - B| \leq |A|\eta$ , bo  $\lim_{r \rightarrow \infty} B_r = B$ . Ustalmy jedną z takich liczb  $r$ , wybierając ją tak, żeby spełniony był również warunek:  $|A_n - A| < \eta$  dla wszystkich  $n > r$ .

Teraz oszacujemy składnik  $|C_N - AB_r|$ . Niech

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|,$$

i niech  $M = \sup_n |A_n|$  ( $M < \infty$ , bo ciąg  $A_n$  jest zbieżny do  $A$ , a więc ograniczony). Wobec wykonanych wcześniej obliczeń i równości  $B_r = b_0 + \dots + b_r$ , dla wszystkich  $N > 2r$  mamy

$$\begin{aligned} |C_N - AB_r| &= \left| \sum_{j=0}^N b_j A_{N-j} - A \sum_{j=0}^r b_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^r b_j (A_{N-j} - A) + \sum_{j=r+1}^N b_j A_{N-j} \right| \\ &\leq \sup_{0 \leq j \leq r} |A_{N-j} - A| \cdot \sum_{j=0}^r |b_j| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |A_n| \cdot \left| \sum_{j=r+1}^{\infty} b_j \right| \\ &\leq \eta \cdot \beta + M|B_r - B| \quad \text{bo } N > 2r, \text{ a więc } n = N - j > r \\ &\leq \eta(\beta + M). \end{aligned}$$

Wracając teraz do (4.12) i dodając uzyskane oszacowania obu składników prawej strony, otrzymujemy

$$|C_N - AB| \leq \eta(\beta + M + |A|) < \eta(\beta + M + |A| + 1) \quad \text{dla wszystkich } N > 2r.$$

Wybierając  $\eta = \varepsilon(\beta + M + |A| + 1)^{-1}$ , kończymy dowód zbieżności  $C_N$  do  $AB$ .

Aby wykazać ostatnią część twierdzenia, tzn. zbieżność *bezwzględnej* szeregu  $C$  przy założeniu bezwzględnej zbieżności *obu* szeregów  $A$  i  $B$ , zauważamy, że

$$|c_n| \leq \sum_{j=0}^n |a_j| \cdot |b_{n-j}|$$

i stosujemy pierwszą część twierdzenia do iloczynu zbieżnych bezwzględnie szeregów  $\sum |a_n|$ ,  $\sum |b_n|$ , otrzymując zbieżność szeregu  $\sum |c_n|$  z kryterium porównawczego.  $\square$

Założenie zbieżności bezwzględnej jednego z szeregów  $A, B$  jest w twierdzeniu Mertensa istotne.

**Przykład 4.49.** Niech  $a_n = b_n = (-1)^n / \sqrt{n+1}$ . Szeregi  $A = \sum a_n$  i  $B = \sum b_n$  są wtedy zbieżne. To wynika z kryterium Leibniza. Jednak

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right| = |(-1)^n| \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{j+1} \cdot \sqrt{n-j+1}} \\ &\geq \sum_{j=0}^n \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1. \end{aligned}$$

Zatem  $c_n \not\rightarrow 0$ , więc szereg  $C = \sum c_n$  jest rozbieżny. (Aby uzyskać środkową nierówność, zastosowaliśmy nierówność między średnimi:  $\sqrt{j+1} \cdot \sqrt{n-j+1} \leq \frac{(j+1)+(n-j+1)}{2} = \frac{n+2}{2}$ .)

Na zakończenie tego podrozdziału sformułujemy jeszcze jedno twierdzenie, które uzupełnia twierdzenie Mertensa.

**Twierdzenie 4.50 (E. Cesàro).** Jeśli szeregi  $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  oraz  $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  są zbieżne, to ich iloczyn Cauchy'ego, tzn. szereg

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right),$$

gdzie  $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$ , ma następującą własność: ciąg jego sum częściowych  $C_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n$  spełnia warunek

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_N}{N+1} = AB.$$

Szkic dowodu. Jak w dowodzie twierdzenia Mertensa, sprawdzamy, że

$$C_k = b_0 A_k + b_1 A_{k-1} + \dots + b_k A_0.$$

Sumując takie równości dla  $k = 0, 1, \dots, N$ , otrzymujemy

$$C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_N = B_0 A_N + B_1 A_{N-1} + \dots + B_N A_0 = \sum_{j=0}^N B_j A_{N-j}.$$

Dlatego

$$\frac{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_N}{N+1} - AB = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N (B_j A_{N-j} - AB) \equiv (*).$$

Jeśli zarówno  $j$ , jak i  $N - j$  są odpowiednio duże, to składnik  $B_j A_{N-j} - AB$  jest mały. Trzeba jednak uporać się z oszacowaniem wielu takich składników, oraz uwzględnić inne! Dlatego weźmiemy  $N \gg 3k \gg 1$  i podzielimy ostatnią sumę (\*) na trzy części:

- *ogon lewy*, tzn.  $k$  składników o numerach  $j = 0, 1, \dots, k-1$ ;
- *środek*, tzn.  $(N+1) - 2k$  składników takich, gdzie zarówno  $j$ , jak i  $N - j$  są równe co najmniej  $k$ ;
- *ogon prawy*, tzn.  $k$  składników o numerach  $j$  takich, że  $N - j = 0, 1, \dots, k-1$ .

Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i  $\eta > 0$ . Ciągi  $A_s, B_s$  są ograniczone, gdyż są zbieżne. Niech

$$M > 1 + \sup_{s \in \mathbb{N}} |A_s| + \sup_{s \in \mathbb{N}} |B_s| + |A| + |B| > 0.$$

Każdy składnik lewego ogona jest nie większy od  $2M^2$  (brutalne użycie nierówności trójkąta pozwala oszacować różnicę iloczynów przez sumę modułów iloczynów), a zatem cały lewy ogon ma sumę równą co najwyżej  $2M^2 \cdot k / (N+1)$ . Podobnie, suma prawego ogona nie przekracza  $2M^2 \cdot k / (N+1)$ . Ustalmy teraz  $k = k(\eta)$  tak, aby

$$\max(|A_j - A|, |B_j - B|) < \eta \quad \text{dla wszystkich } j \geq k.$$

Nietrudno sprawdzić, że przy takim warunku *środek* ma sumę nie większą niż

$$\frac{N+1-2k}{N+1} \cdot 2M \cdot \eta < 2M\eta$$

(liczba składników środka razy oszacowanie składnika z góry<sup>8</sup>). Dlatego

$$|(*)| \leq |\text{ogon lewy}| + |\text{środek}| + |\text{ogon prawy}| \leq \frac{2M^2 k}{N+1} + 2M\eta + \frac{2M^2 k}{N+1}.$$

Biorąc  $\eta = \varepsilon/4M$  i  $N > N_1 = \max(3k, (8M^2 k)/\varepsilon)$ , otrzymamy powyżej prawą stronę mniejszą od  $\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$ .  $\square$

**Zadanie 4.51.** Korzystając z twierdzenia Cesàro, wykazać, że jeśli iloczyn Cauchy'ego szeregów  $A = \sum a_n$  i  $B = \sum b_n$  jest zbieżny, to jego suma  $C$  jest równa  $AB$ .

**Wskazówka:** skorzystać z twierdzenia Stolza i Przykładu 2.45.

## 4.4 Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej

Zacznijemy, jak w przypadku zmiennej rzeczywistej, od twierdzenia, które mówi o istnieniu pewnej granicy.

**Twierdzenie 4.52.** Dla każdej liczby zespolonej  $z \in \mathbb{C}$  ciąg  $a_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$  i ciąg  $b_n(z)$  sum częściowych szeregu

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

są zbieżne do tej samej granicy. Szereg  $b(z)$  jest zbieżny bezwzględnie dla każdego  $z \in \mathbb{C}$ .

---

<sup>8</sup>Bardzo uważny Czytelnik zechce sprawdzić, że można zamiast  $2M$  napisać  $M$ ; to i tak nie ma szczególnego znaczenia.

Dowód. *Krok 1.* Ponieważ dla wszystkich  $n > 2|z|$  jest

$$\left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \frac{|z|}{n+1} < \frac{1}{2} = \frac{(1/2)^{n+1}}{(1/2)^n},$$

więc z ilorazowej wersji kryterium porównawczego wynika, że szereg  $b(z)$  jest zbieżny bezwzględnie dla każdej liczby  $z \in \mathbb{C}$ .

*Krok 2.* Wykażemy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z) = b(z)$ . Mamy

$$|a_n(z) - b(z)| \leq |a_n(z) - b_k(z)| + |b_k(z) - b(z)|.$$

Każdy składnik oszacujemy osobno, dobierając najpierw dużą liczbę  $k$ , a potem dostatecznie duże  $n > k$ . Z dwumianu Newtona otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_n(z) - b_k(z) &= \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{z^j}{n^j} - \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} \\ &= 1 + z + \sum_{j=2}^n \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n^j} - \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} \\ &= \alpha_{k,n}(z) + \beta_{k,n}(z), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_{k,n}(z) &= \sum_{j=2}^k \frac{z^j}{j!} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) - 1 \right], \\ \beta_{k,n}(z) &= \sum_{j=k+1}^n \frac{z^j}{j!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Stąd

$$|a_n(z) - b(z)| \leq |\alpha_{k,n}(z)| + |\beta_{k,n}(z)| + |b_k(z) - b(z)|. \quad (4.13)$$

Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i rozpatrzmy składniki prawej strony (4.13). Po pierwsze,

$$\begin{aligned} |\alpha_{k,n}(z)| &\leq \sum_{j=2}^k \frac{|z|^j}{j!} \cdot \max_{2 \leq j \leq k} \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \right] \\ &\leq b(|z|) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k\right) \quad (\text{i sumę, i maksimum szacujemy osobno}) \\ &\leq b(|z|) \cdot \frac{k^2}{n}. \end{aligned}$$

Aby napisać ostatnią linijkę, skorzystaliśmy dla liczb  $k$  oraz  $n > k$  z nierówności Bernoulli'ego  $(1 - k/n)^k \geq 1 - k^2/n$ .

Po drugie, z nierówności trójkąta,

$$|\beta_{k,n}(z)| \leq \sum_{j=k+1}^n \frac{|z|^j}{j!} = b_n(|z|) - b_k(|z|) = |b_n(|z|) - b_k(|z|)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dla wszystkich  $n > k > n_0$ , gdyż ciąg  $b_n(|z|)$  jest zbieżny jako ciąg sum częściowych zbieżnego szeregu  $b(|z|)$ , a więc spełnia warunek Cauchy'ego.

Ustalmy teraz jakiekolwiek konkretne  $k > n_0$ , tak, aby prócz powyższej nierówności na  $|\beta_{k,n}(|z|)|$  mieć także  $|b_k(z) - b(z)| < \varepsilon/3$ . Jest to możliwe, gdyż  $b_k(z) \rightarrow b(z)$  dla  $k \rightarrow \infty$ .

Na koniec wybierzmy  $n_1 > k$ , tak, aby dla wszystkich  $n > n_1$  mieć

$$|\alpha_{k,n}(z)| \leq b(|z|) \frac{k^2}{n} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Widać, że wystarczy wziąć  $n_1 > 3k^2b(|z|)/\varepsilon$ . Przy takim doborze  $n_1$  każdy z trzech składników prawej strony nierówności (4.13) będzie mniejszy od  $\varepsilon/3$ . Zatem, wprost z definicji granicy,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z) = b(z)$ .  $\square$

**Definicja 4.53.** Dla każdej liczby zespolonej  $z \in \mathbb{C}$  kładziemy

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Jak widać, dla rzeczywistych  $z$  określamy tę samą funkcję, co w poprzednim rozdziale.

**Twierdzenie 4.54 (własności  $\exp$  w dziedzinie zespolonej).** Funkcja  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ma następujące własności:

- (i)  $\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$  dla wszystkich  $z, w \in \mathbb{C}$ ;
- (ii) Dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$  jest  $\exp z \neq 0$ ,  $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$ .
- (iii) Dla  $z = iy$ , gdzie  $y \in \mathbb{R}$ , mamy  $\overline{\exp(iy)} = \exp(-iy)$  oraz  $|\exp(iy)| = 1$ .
- (iv) Dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$  jest  $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ .
- (v) Dla każdego zbieżnego do zera ciągu  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  ( $z_n \neq 0$  dla wszystkich  $n$ ) i dla każdego  $w \in \mathbb{C}$  zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(w + z_n) - \exp(w)}{z_n} = \exp(w). \quad (4.14)$$

Dowód. Własność (i) udowodnimy, posługując się twierdzeniem Mertensa i równością

$$\exp(z) = b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ponieważ szereg  $b(z)$  jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich  $z$ , więc  $b(z)b(w)$  jest, wobec twierdzenia Mertensa, sumą iloczynu Cauchy'ego (szeregu  $b(z)$  i szeregu  $b(w)$ ). Inaczej mówiąc, iloczyn  $\exp(z)\exp(w)$  to

$$\begin{aligned} b(z)b(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \right) \quad (\text{z definicji iloczynu Cauchy'ego i tw. Mertensa}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j \cdot w^{n-j} \right) \quad (\text{dopisujemy } n! \text{ w liczniku i mianowniku}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n \quad (\text{korzystamy z dwumianu Newtona}) \\ &= b(z + w) = \exp(z + w). \end{aligned}$$

Własność (ii) wynika z równości  $\exp(0) = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots = 1$  i własności (i), gdyż  $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z + (-z)) = \exp(0) = 1$ .

Aby sprawdzić (iii), korzystamy z równości  $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{z_k} = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} z_k}$ , która łatwo wynika ze Stwierdzenia 4.32. Piszemy

$$\overline{\exp(iy)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\left(1 + \frac{iy}{k}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{iy}{k}\right)^k = \exp(-iy).$$

Stąd

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy) \cdot \overline{\exp(iy)} = \exp(iy) \exp(-iy) = \exp(iy + (-iy)) = 1.$$

Własność (iv) jest prostą konsekwencją (iii) oraz (i). Jeśli  $z = x + iy$ , gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$ , to

$$|\exp(z)| = |\exp(x)| \cdot |\exp(iy)| = |\exp(x)| \cdot 1 = \exp(x).$$

Ostatnią równość piszemy bez wahania, gdyż dla  $x \in \mathbb{R}$  jest  $\exp(x) = (\exp(x/2))^2 > 0$ .

Została nam do udowodnienia własność (v). Podobnie jak w przypadku funkcji wykładniczej zmiennej rzeczywistej, nietrudno zauważyc, że wystarczy wykazać, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} = 1 \quad (4.15)$$

dla każdego ciągu  $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $z_n \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Dla wszystkich liczb  $z$  takich, że  $|z| \leq 1$ , mamy<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} |\exp(z) - 1 - z| &= \left| \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right| \\ &\leq \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + \dots \\ &\leq |z|^2 \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \right) \quad (\text{bo } 1 \geq |z|^2 \geq |z|^3 \geq |z|^4 \geq \dots) \\ &= |z|^2(e - 2). \end{aligned}$$

Zatem, jeśli  $z_n \rightarrow 0$ ,  $z_n \neq 0$ , to dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$  jest

$$0 \leq \left| \frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} - 1 \right| = \left| \frac{\exp(z_n) - 1 - z_n}{z_n} \right| \leq |z_n|(e - 2).$$

Równość (4.15) wynika teraz z twierdzenia o trzech ciągach.  $\square$

**Wniosek 4.55 (ciągłość funkcji  $\exp$  na  $\mathbb{C}$ ).** Jeśli  $(\xi_n) \subset \mathbb{C}$  i  $\xi_n \rightarrow \xi$  dla  $n \rightarrow \infty$ , to wówczas  $\exp(\xi_n) \rightarrow \exp(\xi)$  dla  $n \rightarrow \infty$ .

Dowód. Niech najpierw  $\xi_n \rightarrow 0$ . Wtedy, wobec własności (v) z poprzedniego twierdzenia oraz arytmetycznych własności granicy, dla  $\xi_n \neq 0$  mamy

$$\exp(\xi_n) = \xi_n \cdot \underbrace{\frac{\exp(\xi_n) - 1}{\xi_n}}_{\rightarrow 1, \text{ własność (v)}} + 1 \longrightarrow 0 \cdot 1 + 1 = 1 = \exp(0).$$

---

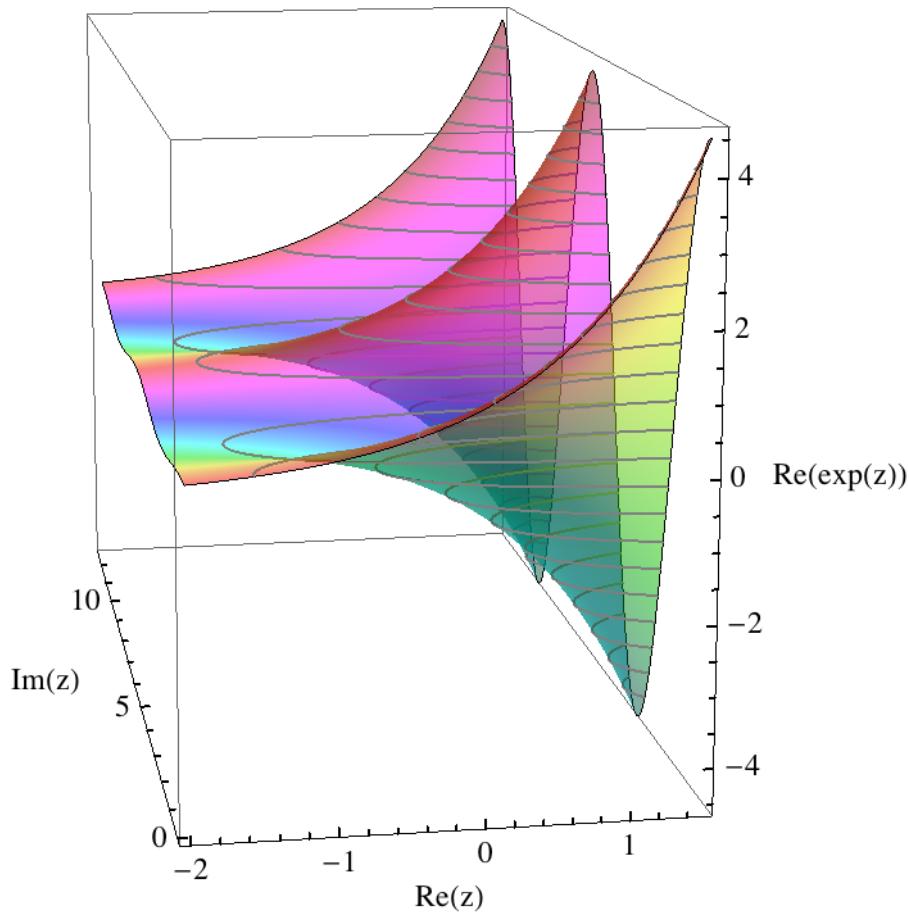
<sup>9</sup>Uwaga: formalnie biorąc, zaprezentowany tu rachunek jest oczywisty. Korzystamy w nim jednak z ciągłości modułu: jeśli  $w_k \rightarrow w$ , to  $|w_k| \rightarrow |w|$  dla  $k \rightarrow \infty$ .

(Jeśli  $\xi_n = 0 = \xi$ , to  $\exp(\xi_n) = \exp(\xi)$ .) Korzystając z tych równości i z własności grupowej  $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$ , w przypadku ogólnym piszemy

$$\exp(\xi_n) = \exp(\xi_n - \xi) \cdot \exp(\xi) \rightarrow 1 \cdot \exp(\xi) = \exp(\xi),$$

gdyż  $\xi_n - \xi \rightarrow 0$ . Dowód jest zakończony.  $\square$

**Uwaga.** Czytelnik zechce zauważać, że schemat dowodu jest w gruncie rzeczy taki sam, jak w przypadku rzeczywistym: dowodzimy *najpierw* różniczkowalności  $\exp$ , a potem ciągłości  $\exp$ . Kluczem do obu własności jest oszacowanie modułu różnicy  $\exp(z) - 1 - z$  dla małych  $z$ . W przypadku rzeczywistym *najpierw* dowodziliśmy oszacowania (E6) w Twierdzeniu 3.2, a z niego wynikała i różniczkowalność, i ciągłość funkcji wykładniczej.



**Portret  $\exp$ , I.** Wykres funkcji  $f(x, y) = \operatorname{Re}(\exp(x + iy))$  nad prostokątem  $-2 \leq x \leq 1.5$ ,  $0 \leq y \leq 12.56$ ; innymi słowy, wysokość punktu powierzchni nad dolnym dnem pudełka jest równa  $\operatorname{Re}(\exp(x + iy))$ . Szare linie to poziomice (jak na mapie: wysokość na poziomicy ma jedną, ustaloną wartość. Kolory powierzchni zależą liniowo od części urojonej liczby  $\exp(x + iy)$ ). Przednia krawędź powierzchni odpowiada wartości  $y = \operatorname{Im} z = 0$ : widzimy wykres  $\exp$  na  $\mathbb{R}$ .

Na zakończenie tego podrozdziału wykażemy, że funkcja wykładnicza jest *jednoznacznie wyznaczona* przez dwie swoje własności.

**Twierdzenie 4.56 (charakteryzacja  $\exp$ ).** Założmy, że funkcja  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  spełnia dwa warunki:

- (i) Dla wszystkich  $z, w \in \mathbb{C}$  jest  $f(z+w) = f(z)f(w)$ ;
- (ii) Dla każdego zbieżnego do zera ciągu liczb zespolonych  $z_n$  ( $z_n \neq 0$  dla wszystkich  $n$ ) zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - 1}{z_n} = 1.$$

Wówczas  $f(z) = \exp(z)$  dla każdego  $z \in \mathbb{C}$ .

Zanim podamy dowód tego twierdzenia, sformułujemy zespolony odpowiednik lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1.

**Lemat 4.57.** Jeśli  $\varepsilon_n$  jest ciągiem liczb zespolonych takim, że  $n\varepsilon_n \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ , to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_n)^n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\right)^n = \exp z$$

dla każdego  $z \in \mathbb{C}$ .

Dowód LEMATU 4.57. Najpierw udowodnimy pierwszą równość. Z nierówności trójkąta, zastosowanej do sumy, którą otrzymujemy, rozpisując  $(1 + \varepsilon_n)^n - 1$  z użyciem dwumianu Newtona, wynika, że

$$0 \leq |(1 + \varepsilon_n)^n - 1| \leq (1 + |\varepsilon_n|)^n - 1$$

Jednak z Lematu 3.1 wynika, że ciąg  $(1 + |\varepsilon_n|)^n - 1$  jest zbieżny do 0, więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach  $(1 + \varepsilon_n)^n \rightarrow 1$ .

Druga podana w lemacie równość wynika łatwo z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów i definicji funkcji wykładniczej, gdyż

$$\left(1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\right)^n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \cdot (1 + \varepsilon'_n)^n$$

dla  $\varepsilon'_n = \varepsilon_n / (1 + \frac{z}{n})$ . Oczywiście  $n\varepsilon'_n \rightarrow 0$ , więc z pierwszej części lematu  $(1 + \varepsilon'_n)^n \rightarrow 1$ , a zatem każda ze stron powyższej równości ma dla  $n \rightarrow \infty$  granicę równą  $\exp(z)$ .  $\square$

Dowód TWIERDZENIA 4.56. Ustalmy dowolny punkt  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ . Oznaczmy

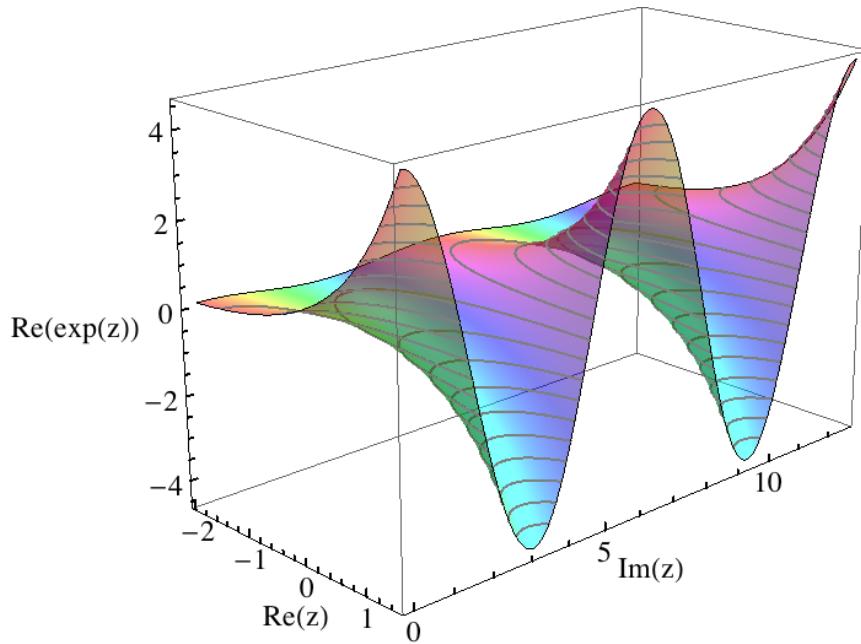
$$\delta_n = \frac{f(z/n) - 1}{z/n} - 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Z założenia (ii) wynika, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 1 - 1 = 0$ . Używając wzoru definiującego  $\delta_n$  do wyznaczenia wartości  $f(z/n)$ , otrzymujemy

$$f\left(\frac{z}{n}\right) = 1 + \frac{z + z\delta_n}{n} = 1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n,$$

gdzie  $\varepsilon_n = z\delta_n/n$  jest ciągiem liczb zespolonych takim, że  $n\varepsilon_n \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Z Lematu 4.57 i założenia (i) otrzymujemy teraz

$$f(z) = f\left(\frac{z}{n} + \dots + \frac{z}{n}\right) = f\left(\frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{z}{n} + \varepsilon_n\right)^n \rightarrow \exp(z) \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$



**Portret exp, II.** Wykres funkcji  $f(x, y) = \operatorname{Re}(\exp(x + iy))$  nad prostokątem  $-2 \leq x \leq 1.5, 0 \leq y \leq 12.56$ . Widok z innej strony. Przednia krawędź nie bez powodu wygląda tak, jak sinusoida. Związek funkcji wykładniczej z trygonometrycznymi poznamy w następnym podrozdziale. Tu widać, że zarówno wysokości, jak i kolory powtarzają się w kierunku osi urojonej. Wykażemy później, że funkcja wykładnicza jest okresowa — w kierunku osi urojonej!

Lewa strona nie zależy w ogóle od  $n$ , więc mamy po prostu  $f(z) = \exp(z)$ . Teza wynika z dowolności  $z$ ; wprawdzie pominęliśmy w rozważaniach  $z = 0$ , ale  $f(0) = f(0 + 0) = f(0)^2$ , tzn.  $f(0) = 0$  lub  $1$  — pierwszą możliwość odrzucamy, gdyż prowadziłaby do  $f \equiv 0$ , co jest sprzeczne z założeniem (ii).  $\square$

Dla zainteresowanych przytoczymy jeszcze kilka linijek kodu, które posłużyły do narysowania powyższych wykresów w programie Mathematica (jest on dostępny w laboratorium komputerowym MIM). Różne widoki powierzchni można było uzyskać, obracając gotowy rysunek myszką na ekranie.

```
Plot3D[Re[Exp[x + I*y]], {x, -2, 1.5}, {y, 0, 4*Pi},
  PlotPoints -> {100, 100},
  BoxRatios -> {1, 2, 1.3}, PlotRange -> All,
  TicksStyle -> Directive[Black, Thick, 24],
  PlotStyle -> Directive[Opacity[0.5]],
  ColorFunction -> (Hue[(Arg[Exp[#1 + I/#2]])/(2*Pi)] &),
  ColorFunctionScaling -> False,
  MeshFunctions -> (#3 &),
  MeshStyle -> {Gray, Thick},
  Mesh -> 20, ImageSize -> 700,
  PerformanceGoal -> "Quality",
  AxesLabel
    -> (Style[#, 24] & /@ {"Re(z)", "Im(z)", "Re(exp(z))"})
]
```

## 4.5 Funkcje trygonometryczne

Istnieje wiele równoważnych sposobów ścisłego definiowania funkcji trygonometrycznych. Jeden z nich polega na wykorzystaniu ich związku z funkcją wykładniczą zmiennej zespolonej.

**Definicja 4.58.** Dla każdej liczby zespolonej  $z \in \mathbb{C}$  przyjmujemy

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Wzory użyte w tej definicji będziemy nazywać *wzorami Eulera*.

**Twierdzenie 4.59 (własności funkcji trygonometrycznych).** Dla każdego  $z \in \mathbb{C}$  zachodzą równości:

(T1)  $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$ .

(T2)  $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$ , a ponadto

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, \quad (4.16)$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad (4.17)$$

(i oba szeregi są bezwzględnie zbieżne).

Wreszcie,

(T3) dla każdego ciągu  $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , który jest zbieżny do zera, zachodzą równości

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos z_n - 1}{z_n} = 0.$$

Dowód. Wprost z definicji funkcji trygonometrycznych i równości

$$\exp(z) \exp(w) = \exp(z+w)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\cos z)^2 + (\sin z)^2 &= \left( \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \right)^2 + \left( \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{\exp(2iz) + 2 + \exp(-2iz)}{4} + \frac{\exp(2iz) - 2 + \exp(-2iz)}{-4} \\ &= \frac{4}{4} = 1, \end{aligned}$$

tz. własność (T1). Mamy także

$$\cos z + i \sin z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} + i \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \exp(iz).$$

Z definicji cosinusa,

$$2 \cos z = \exp(iz) + \exp(-iz) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{i^k z^k}{k!} + \frac{(-i)^k z^k}{k!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} (i^k + (-i)^k).$$

Ponieważ

$$i^k + (-i)^k = (1 + (-1)^k) i^k = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k \text{ jest nieparzyste,} \\ 2, & \text{gdy } k \text{ jest podzielne przez 4,} \\ -2, & \text{gdy } k = 4l - 2 \text{ dla pewnego } l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

więc łatwo wynika stąd wzór (4.16) (zostają tylko składniki o parzystych numerach, ze znakami na przemian). Zbieżność bezwzględna szeregu (4.16), tzn. zbieżność szeregu

$$1 + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^4}{4!} + \frac{|z|^6}{6!} + \dots$$

wynika stąd, że  $j$ -ta suma częściowa nie przekracza  $(2j-1)$ -szej sumy częściowej szeregu

$$1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + \frac{|z|^5}{5!} + \dots = \exp(|z|).$$

Podobnie dowodzimy wzoru (4.17) i bezwzględnej zbieżności występującego w nim szeregu. To kończy dowód własności (T2).

Dla dowodu (T3) ustalmy ciąg  $z_n \rightarrow 0$  ( $z_n \neq 0$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ ) i napiszmy

$$\frac{\sin z_n}{z_n} = \frac{\exp(iz_n) - \exp(-iz_n)}{2iz_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\exp(iz_n) - 1}{iz_n} + \frac{\exp(-iz_n) - 1}{-iz_n} \right).$$

Z własności (v) zespolonej funkcji wykładniczej wynika, że każdy ze składników w nawiasie ma dla  $n \rightarrow \infty$  granicę równą 1, więc z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic otrzymujemy  $(\sin z_n)/z_n \rightarrow 1$ . Podobnie radzimy sobie z cosinusem, pisząc

$$\frac{\cos z_n - 1}{z_n} = \frac{\exp(iz_n) + \exp(-iz_n) - 2}{2z_n} = \frac{i}{2} \left( \frac{\exp(iz_n) - 1}{iz_n} + \frac{\exp(-iz_n) - 1}{iz_n} \right).$$

Tym razem dla  $n \rightarrow \infty$  pierwszy składnik w nawiasie ma granicę równą 1, a drugi granicę równą -1. Dlatego ich suma ma granicę 0.  $\square$

Ze wzorów (4.16), (4.17) otrzymujemy natychmiast

**Wniosek 4.60.** *Dla każdego  $z \in \mathbb{C}$  jest  $\cos(-z) = \cos z$ ,  $\sin(-z) = -\sin z$ .*  $\square$

**Wniosek 4.61.** *Jeśli  $x \in \mathbb{R}$ , to  $\sin x, \cos x \in \mathbb{R} \cap [-1, 1]$ . Ponadto,  $\cos 0 = 1$ ,  $\sin 0 = 0$ .*

**Dowód.** Sumy szeregów (4.16) i (4.17) są, rzecz jasna, liczbami rzeczywistymi, gdy  $z = x \in \mathbb{R}$ . To, że  $\sin x$  oraz  $\cos x$  należą do przedziału  $[-1, 1]$ , wynika z własności (T1). Wartości sinusa i cosinusa w zerze obliczamy, wstawiając  $z = 0$  we wzorach (4.17) i (4.16).  $\square$

**Wniosek 4.62 (ciągłość funkcji trygonometrycznych).** *Dla każdego ciągu  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  takiego, że  $\lim z_n = z \in \mathbb{C}$ , mamy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin z_n = \sin z, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos z_n = \cos z.$$

Dowód. To wynika ze wzorów Eulera i Wniosku 4.55 (ciągłości funkcji wykładniczej).  $\square$

**Stwierdzenie 4.63.** *Dla dowolnych liczb zespolonych  $z, w \in C$  zachodzą równości*

$$\begin{aligned}\cos z - \cos w &= -2 \sin \frac{z-w}{2} \sin \frac{z+w}{2}, \\ \sin z - \sin w &= 2 \sin \frac{z-w}{2} \cos \frac{z+w}{2}.\end{aligned}$$

Dowód. Oba wzory uzyskujemy z czysto szkolnych rachunków, stosując definicję sinusa i cosinusa oraz własność  $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ . Sprawdźmy dla przykładu wzór na różnicę cosinusów. Jego prawa strona to

$$\begin{aligned}-2 \sin \frac{z-w}{2} \sin \frac{z+w}{2} &= \frac{-2}{2i \cdot 2i} \left( e^{i(z-w)/2} - e^{-i(z-w)/2} \right) \left( e^{i(z+w)/2} - e^{-i(z+w)/2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz} - e^{iw} - e^{-iw} + e^{iz}) \\ &= \cos z - \cos w.\end{aligned}$$

Wzór na różnicę sinusów uzyskujemy podobnie. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

$\square$

## 4.6 Liczba $\pi$

Czytelnik, który zna funkcje trygonometryczne ze szkoły, zauważał zapewne, że dotychczas nie dysponujemy formalnym opisem miejsc zerowych tych funkcji. Aby ten opis uzyskać i przy okazji zdefiniować liczbę  $\pi$ , udowodnimy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.64.** *W przedziale  $(0, 2)$  funkcja  $\cos$  ma dokładnie jedno miejsce zerowe.*

Dowód tego twierdzenia poprzedzimy serią nieskomplikowanych lematów, które komuś, kto myśli: *przecież widziałem już kiedyś wykresy sinusa i cosinusa, a ponadto wiem, że jedyne miejsce zerowe cosinusa w przedziale  $(0, 2)$  to  $\pi/2 = 1,57\dots$ , mogą się wydawać oczywiste, ale pamiętajmy: funkcje trygonometryczne to dla nas obiekty zdefiniowane wzorami Eulera! Chcemy sprawdzić ich własności, odwołując się wyłącznie do definicji i do tego, co już wykazaliśmy w sposób ścisły.*

**Lemat 4.65.** *Dla każdego  $y \in (0, 2]$  zachodzą nierówności  $y > \sin y > 0$ .*

Dowód. Dzięki (4.17) mamy

$$\sin y = y - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(y),$$

gdzie

$$s_n(y) = \left( \frac{y^3}{3!} - \frac{y^5}{5!} \right) + \left( \frac{y^7}{7!} - \frac{y^9}{9!} \right) + \dots + \left( \frac{y^{4n-1}}{(4n-1)!} - \frac{y^{4n+1}}{(4n+1)!} \right).$$

Każdy z nawiasów jest dodatni dla  $y \in (0, 2]$ , gdyż dla  $n \in \mathbb{N}$  mamy  $4n+1 > 3$  i  $4n > 2$ , a więc

$$1 > \frac{2^2}{2 \cdot 3} \geq \frac{y^2}{4n(4n+1)} > 0 \Rightarrow \frac{y^{4n-1}}{(4n-1)!} > \frac{y^{4n+1}}{(4n+1)!}.$$

Zatem  $s_n(y)$  rośnie i ma wyrazy dodatnie. Dlatego  $\lim s_n(y) > 0$  i  $\sin y < y$  dla  $y \in (0, 2]$ . Podobnie sprawdzamy, że  $\sin y > 0$  dla  $y \in (0, 2]$ : to wynika stąd, że każdy składnik po prawej stronie równości

$$\sin z = \left( y - \frac{y^3}{3!} \right) + \left( \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} \right) + \dots$$

jest dodatni, gdy  $y \in (0, 2]$ .  $\square$

**Lemat 4.66.** *Cosinus jest malejący na przedziale  $[0, 2]$ , tzn.*

$$x_1, x_2 \in [0, 2], \quad x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad \cos x_2 < \cos x_1. \quad (4.18)$$

Ponadto, dla wszystkich  $x_1, x_2 \in [0, 2]$  jest

$$|\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1|.$$

Dowód. Korzystając ze wzoru na różnicę cosinusów (patrz Stwierdzenie 4.63), piszemy dla  $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [0, 2]$

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \quad \text{dla } x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [0, 2].$$

Jednak  $y = \frac{x_2 - x_1}{2} \in (0, 1]$ , więc zgodnie z poprzednim Lematem jest  $\sin y > 0$ . Podobnie,  $\sin \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$ , gdyż  $(x_1 + x_2)/2 \in (0, 2]$ . Oba sinusy w powyższej równości są więc dodatnie, a stąd  $\cos x_2 - \cos x_1 < 0$ .

Ponadto, przy założeniu  $2 \geq x_2 > x_1 \geq 0$  jest

$$|\cos x_2 - \cos x_1| = 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \leq x_2 - x_1.$$

W ostatniej nierówności skorzystaliśmy z tego, że  $\sin y \leq y$  na  $(0, 2]$ .  $\square$

**Lemat 4.67.** *Dla każdej liczby  $x \in [0, 1)$  jest  $\cos x > 0$ , a dla każdej liczby  $y \in [\frac{40}{23}, 2]$  jest  $\cos y < 0$ .*

Dowód. Po pierwsze, dla każdej liczby  $x \in [0, 1)$  mamy wobec nierówności z poprzedniego Lematu:  $|1 - \cos x| = |\cos 0 - \cos x| \leq |0 - x| = x < 1$ , a więc  $\cos x > 0$ . Oszacujemy teraz liczbę  $\cos 2$ . Mamy

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \left( \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} \right) + \left( \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} \right) + \dots \\ &= -1 + \left( \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} \right) + \left( \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} \right) + \dots \\ &\leq -1 + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^8}{8!} + \dots \quad (\text{opuszczamy ujemne składniki w nawiasach}) \\ &< -1 + \frac{2^4}{4!} \left( 1 + \frac{2^4}{5^4} + \frac{2^8}{5^8} + \dots \right) \\ &= -1 + \frac{16}{24} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4} < -1 + \frac{16}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{24}} = -\frac{7}{23}, \quad \text{gdyż } \left(\frac{2}{5}\right)^4 < \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Jeśli  $y \in [\frac{40}{23}, 2]$ , to  $|y - 2| \leq \frac{6}{23}$ , a więc, dzięki nierówności  $|\cos 2 - \cos y| \leq |2 - y| \leq \frac{6}{23}$  (z poprzedniego Lematu) i powyższemu oszacowaniu liczby  $\cos 2$ , z pewnością jest

$$\cos y \leq -\frac{7}{23} + \frac{6}{23} = -\frac{1}{23} < 0.$$

Dowód Lematu 4.67 jest zakończony.  $\square$

**Dowód Twierdzenia 4.64.** Ponieważ  $\cos x$  maleje na  $[0, 2]$ , więc ma w tym przedziale co najwyżej jedno miejsce zerowe. Niech

$$A = \{x \in [0, 2] : \cos x > 0\}.$$

Z monotoniczności cosinusa wynika, że ten zbiór jest przedziałem. Z ostatniego lematu wynika ponadto, że

$$[0, 1) \subset A, \quad A \subset [0, 40/23],$$

a więc kres górnny  $x_0$  przedziału  $A$  jest pewną liczbą z przedziału  $[1, 40/23] \subset [1, 7/4)$ .

Ponadto,  $\cos x_0 = 0$ . Istotnie, liczba  $x_0$  jest granicą ciągu  $x_n = x_0(1 - \frac{1}{n}) \in A$  i dlatego z ciągłości cosinusa  $\cos x_0 = \lim \cos x_n \geq 0$ . Gdyby  $\cos x_0 > 0$ , to wobec równości

$$0 < \cos x_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \cos(x_0 + m^{-1})$$

byłoby  $\cos(x_0 + \frac{1}{m}) > 0$  dla wszystkich dostatecznie dużych  $m$ , tzn.

$$x_0 + \frac{1}{m} \in A, \quad x_0 + \frac{1}{m} > x_0 = \sup A,$$

to zaś jest sprzeczność.  $\square$

**Definicja 4.68 (liczba  $\pi$ ).** Liczba  $\pi$  to liczba rzeczywista równa  $2x_0$ , gdzie  $x_0 \in (0, 2)$  jest jedyną w przedziale  $(0, 2)$  liczbą taką, że  $\cos x_0 = 0$ .

**Twierdzenie 4.69.** Zachodzą wzory

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

**Dowód.** Wiemy już, że  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Zatem, z równości

$$\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

wynika, że  $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1 = 1$ , bo wiemy już, że  $\sin x > 0$  na  $(0, 2)$ . Zatem  $\exp(i\frac{\pi}{2}) = 0 + 1 \cdot i = i$ . Stąd wynika, że

$$e^{\pi i} = \left(e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}\right)^2 = i^2 = -1.$$

To kończy dowód.  $\square$

**Definicja 4.70.** Liczba  $T \neq 0$  jest okresem funkcji  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (odpowiednio: funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(z + T) = f(z)$  dla każdego  $z \in \mathbb{C}$  (odpowiednio: dla każdego  $z \in \mathbb{R}$ ).

**Twierdzenie 4.71 (okresowość  $\exp$  na  $\mathbb{C}$ ).** Dla każdej liczby  $z \in \mathbb{C}$  i każdego  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  zachodzi równość

$$\exp(2\pi ik + z) = \exp(z),$$

tzn.  $2\pi ik$  jest okresem funkcji wykładniczej. Ponadto, jeśli liczba  $T$  jest okresem funkcji wykładniczej, to  $T = 2\pi ik$  dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ .

Dowód. Jeśli  $T = 2\pi ik$ , gdzie jest całkowite, to wtedy dla każdej liczby zespolonej  $z$  mamy

$$\exp(z + T) = \exp(z) \exp(T) = \exp(z) \exp(2\pi i)^k = \exp(z),$$

gdyż  $\exp(2\pi i) = \exp(\pi i)^2 = (-1)^2 = 1$ . Dlatego każda liczba  $T = 2\pi ik$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , jest okresem funkcji wykładniczej.

Pozostaje wykazać, że innych okresów nie ma. Jeśli  $\exp(z + T) = \exp(z)$  dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$ , to z pewnością  $\exp T = 1$ . Niech  $T = t + is$ , gdzie  $t, s \in \mathbb{R}$ . Wtedy

$$1 = |\exp T| = |\exp(t + is)| = \exp t,$$

a zatem  $t = 0$  i  $T = is$  dla pewnego  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Przypuśćmy, że  $s$  nie jest całkowitą wielokrotnością  $2\pi$ . Ponieważ suma okresów funkcji jest okresem tej funkcji, więc z pierwszej części dowodu wynika, że dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  liczba  $i(s + 2\pi k)$  też jest okresem  $\exp$ . Dobierzmy  $k \in \mathbb{Z}$  tak, aby  $s' = (s + 2k\pi) \in (0, 2\pi)$ . Oczywiście,

$$\exp(is') = \cos s' + i \sin s' = 1.$$

Stąd

$$\cos(s'/4) + i \sin(s'/4) = \exp(is'/4) \in \{1, -1, i, -i\},$$

gdyż innych pierwiastków czwartego stopnia z jedynki nie ma. Ponieważ jednak  $0 < s'/4 < \frac{\pi}{2} < 2$ , więc  $1 > \cos(s'/4) > 0$  i  $\sin(s'/4) > 0$ . To jest sprzeczność, bo w  $\{1, -1, i, -i\}$  nie ma żadnej liczby, która spełniałaby naraz obie nierówności  $\operatorname{Re} z > 0$   $\operatorname{Im} z > 0$ .

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że  $s$  musi być całkowitą wielokrotnością  $2\pi$ . To kończy dowód całego twierdzenia.  $\square$

Zauważmy, że dowodząc ostatniego twierdzenia, wykazaliśmy także następujący fakt.

**Wniosek 4.72. Równość**

$$\exp(i\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{C}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\xi = 2\pi k$  dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Wniosek 4.73 (okresowość funkcji trygonometrycznych).** Jeśli  $T = 2\pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , to  $T$  jest okresem obu funkcji

$$\sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ponadto, jeśli  $T$  jest okresem cosinusa (lub sinusa), to  $T$  jest całkowitą wielokrotnością  $2\pi$ .

Dowód. To, że każda liczba  $T = 2\pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , jest okresem zarówno sinusa, jak i cosinusa, wynika z poprzedniego twierdzenia i wzorów Eulera.

Wykażemy drugą część twierdzenia. Niech  $T$  będzie okresem cosinusa (lub, odpowiednio, sinusa). Ponieważ  $\exp(\pm i\pi/2) = \pm i$ , więc ze wzorów Eulera otrzymujemy

$$\cos(z + \pi/2) = \frac{e^{i(z+\pi/2)} + e^{-i(z+\pi/2)}}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\sin z \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}. \quad (4.19)$$

Podobnie sprawdzamy, że

$$\sin(z + \pi/2) = \cos z \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}. \quad (4.20)$$

Z obu tych wzorów<sup>10</sup> wynika, że  $T$  jest także okresem sinusa (lub, odpowiednio, cosinusa). Zatem dla dowolnego  $z \in \mathbb{C}$  jest

$$\exp(i(z+T)) = \cos(z+T) + i \sin(z+T) = \cos z + i \sin z = \exp(iz),$$

tz. liczba  $iT$  jest okresem  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Na mocy poprzedniego twierdzenia,  $iT$  jest całkowitą wielokrotnością  $2\pi i$ , tzn.  $T = 2\pi k$  dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Wniosek 4.74.** (i) *Jedynymi zespolonymi rozwiązaniami równania  $\sin z = 0$  są liczby  $z = k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .*

(ii) *Jedynymi zespolonymi rozwiązaniami równania  $\cos z = 0$  są liczby  $z = (k + \frac{1}{2})\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .*

**Dowód.** Jeśli  $\sin z = 0$ , to  $\cos z = \pm 1$ , więc  $\exp(iz) = \pm 1 + i \cdot 0 = \pm 1$ , a stąd  $\exp(2iz) = 1$ . Na mocy Wniosku 4.72 otrzymujemy

$$2z = 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem tylko liczby  $z = k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , mogą być rozwiązaniami równania  $\sin z = 0$ . Na odwroć, jeśli  $z = k\pi$  i  $k \in \mathbb{Z}$  jest dowolne, to

$$\exp(ik\pi) = (\exp(i\pi))^k = (-1)^k = (-1)^k + 0 \cdot i = \cos k\pi + i \sin k\pi,$$

więc  $\sin z = 0$ . To kończy dowód pierwszej części wniosku. Druga część wynika z pierwszej i z tożsamości  $\cos(z + \pi/2) = -\sin z$ .  $\square$

## 4.7 Wzór de Moivre'a

Odnajdujmy prostą konsekwencję związków między funkcją wykładniczą i funkcjami trygonometrycznymi.

**Stwierdzenie 4.75** (wzór de Moivre'a). *Jeśli  $\alpha \in \mathbb{R}$ , to wówczas dla każdego  $n \in \mathbb{N}$*

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$$

**Dowód.** Z własności  $\exp$  i wzorów Eulera wynika, że lewa strona to, inaczej,  $\exp(in\alpha) = \exp(i\alpha)^n = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ .  $\square$

---

<sup>10</sup>Wzory (4.19), (4.20) bywają nazwywane wzorami redukcyjnymi.

**Wniosek 4.76.** Jeśli  $\alpha \in \mathbb{R}$  i  $n \in \mathbb{N}$ , to

$$\cos n\alpha = \operatorname{Re} (e^{i\alpha})^n, \quad \sin n\alpha = \operatorname{Im} (e^{i\alpha})^n.$$

Znając wzór de Moivre'a (i dwumian Newtona) można bez trudu wyrażać  $\cos n\alpha$  oraz  $\sin n\alpha$  przez  $\cos \alpha$  i  $\sin \alpha$ . Ciekawsze, i ważniejsze jest zastosowanie do wyznaczania sum sinusów oraz cosinusów kolejnych wielokrotności  $\alpha$  — aby takie sumy obliczać, wystarczy umieć sumować postęp geometryczny, bowiem

$$\sum_{n=k_1}^{k_2} \cos n\alpha = \sum_{n=k_1}^{k_2} \operatorname{Re} (e^{i\alpha})^n = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=k_1}^{k_2} (e^{i\alpha})^n \right).$$

(Dla sum sinusów trzeba użyć części urojonej.)

**Zadanie 4.77.** Sprawdzić, że jeśli  $x \in \mathbb{R}$  i  $\exp(ix) \neq 1$ , to

$$\sum_{n=0}^N \sin nx = \frac{\sin(Nx/2) \sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

Znaleźć analogiczny wzór na sumę cosinusów. Jak zmienią się oba wzory, gdy przestaniemy zakładać, że  $\exp(ix) \neq 1$ ?

Na tym zakończymy pierwsze spotkanie z szeregami. Chciałbym, żeby Czytelnik tego tekstu nie tylko uważały szeregi za pewne obiekty matematyczne, które (być może) warto poznawać i badać same w sobie, ale widział w nich *przede wszystkim* narzędzie, służące m.in. do definiowania różnych funkcji, systematycznego badania ich własności, oraz obliczania ich wartości. To ma szczególne znaczenie praktyczne wtedy, gdy – mówiąc nieprecyzyjnie – szeregi są zbieżne *sztywno*. Tak właśnie jest w przypadku szeregów  $\exp$ ,  $\sin$  i  $\cos$ , z uwagi na błyskawiczne tempo wzrostu silni. Dopóki obliczamy np. wartości  $e^x$  dla niezbyt dużych  $x$ , możemy w praktyce traktować funkcję  $\exp$  jako wielomian, złożony z pewnej liczby składników szeregu  $\sum(x^n/n!)$ ; np.  $e^3$  różni się od  $\sum_{n=0}^{50} 3^n/n!$  naprawdę niewiele: około  $10^{-42}$ .

In[1]:= N[Exp[3], 44]

Out[1]= 20.085536923187667740928529654581717896987908

In[2]:= N[Sum[3^n/n!, {n, 0, 50}], 44]

Out[2]= 20.085536923187667740928529654581717896987906

Gdybyśmy chcieli z taką dokładnością określić odległość Ziemi od Słońca, nanometry byłyby zdecydowanie za dużymi jednostkami. Jeśli ktoś woli myśleć o wielkościach związanych z ekonomią, a nie z astronomią czy fizyką, może sprawdzić, jakie jest zadłużenie budżetu USA. Strona

[http://www.brillig.com/debt\\_clock/](http://www.brillig.com/debt_clock/)

podaje je z dokładnością do 1 centa, aktualizując wartości co parę sekund. Taka precyzja z praktycznego punktu widzenia graniczy z absurdem, ale dokładność przybliżenia

$$\sum_{n=0}^{50} \frac{3^n}{n!} \approx e^3$$

jest i tak o 25 rzędów wielkości lepsza.

Takie uwagi mogą kogoś zaciekawić, jednak – aby lepiej rozumieć, co się naprawdę za nimi kryje – musimy w miarę systematycznie poznać takie pojęcia, jak *ciągłość, różniczkowalność i zbieżność jednostajna*. Ich ścisłe definicje oraz własności poznamy w kolejnych rozdziałach.

## Rozdział 5

# Funkcje ciągłe

Jak wspomnieliśmy na samym początku wykładu, do najważniejszych zastosowań analizy należy badanie własności różnych funkcji, określonych na podzbiorach przestrzeni liniowych — w najprostszym przypadku, na podzbiorach  $\mathbb{R}$ . Jedną z najważniejszych własności funkcji zmiennej rzeczywistej jest *ciągłość*. Intuicyjnie biorąc, jeśli funkcja określona na pewnym przedziale w  $\mathbb{R}$  jest ciągła, to małym zmianom argumentu odpowiadają małe zmiany wartości funkcji; inaczej, z geometrycznego punktu widzenia, *wykres funkcji można narysować bez odrywania ołówka od papieru*. Te określenia są jednak szalenie nieprecyzyjne. Zaczniemy od sformułowania odpowiednich definicji.

Założymy w tym rozdziale, że Czytelnik zna definicję funkcji z wykładów *Wstęp do matematyki* i rozumie takie terminy, jak *dziedzina funkcji, obraz i przeciwoobraz*. Ich znaczenie będziemy przypominać w razie potrzeby.

Podkreślimy jedno: w analizie matematycznej mamy często do czynienia z funkcjami, które są określone konkretnymi wzorami, np.  $g(x) = \ln(1 + \exp(x^2 + \cos x))$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Otóż należy pamiętać, że z formalnego punktu widzenia *sam wzór* jeszcze funkcji nie określa: trzeba powiedzieć, dla jakich argumentów funkcja ma być określona (a jeśli chcemy posługiwać się wzorem, należy sprawdzić, że ma on dla odpowiednich argumentów sens). Proszę zauważać, że definiując pierwiastki  $n$ -tego stopnia, funkcję wykładniczą, logarytm naturalny i funkcje trygonometryczne, postępowaliśmy właśnie w taki sposób.

### 5.1 Punkty skupienia. Granica funkcji.

W analizie używa się dwóch definicji granicy funkcji: jednej podanej przez Heinego i drugiej, równoważnej, podanej przez Cauchy'ego. Pierwszą z nich będzie nam łatwiej sformułować, korzystając z wcześniejszej omówionych pojęć. Drugą zajmiemy się później.

Mówiąc o granicy funkcji, będziemy posługiwać się zbiorem  $\bar{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , aby opisywać zarówno niewłaściwe wartości granic (tzn. to, że wartości funkcji eksplodują w pobliżu pewnej wartości argumentu), jak i zachowanie funkcji dla bardzo dużych argumentów. Najpierw powiemy, w jakich punktach będziemy znajdować granice funkcji.

**Definicja 5.1 (punkt skupienia).** Niech  $A \subset \mathbb{R}$ . Powiemy, że punkt  $p \in \bar{\mathbb{R}}$  jest punktem skupienia zbioru  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg  $(a_n) \subset A \setminus \{p\}$  taki, że  $\lim a_n = p$ .

Gdy  $p = \pm\infty$ , to w definicji punktu skupienia chodzi oczywiście o granicę niewłaściwą.

**Przykład 5.2.** Niech  $A$  będzie zbiorem skończonym,  $A = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}$ . Wtedy  $A$  nie ma w ogóle punktów skupienia: żaden ciąg utworzony z elementów zbioru  $A$  z pewnością nie dąży do  $\pm\infty$ , tzn.  $p_{1,2} = \pm\infty$  nie są punktami skupienia. Jeśli zaś  $p \in \mathbb{R}$  i weźmiemy

$$0 < \varepsilon_0 < \min_{x \in A, x \neq p} |x - p|,$$

to w przedziale  $(p - \varepsilon_0, p + \varepsilon_0)$  nie ma żadnych elementów zbioru  $A \setminus \{p\}$ , więc żaden ciąg  $(a_n) \subset A \setminus \{p\}$  nie jest zbieżny do  $p$ .  $\square$

**Przykład 5.3.** Niech  $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ . Liczba 0 jest punktem skupienia  $A$ . Jeśli  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ , ale  $x \neq 0$ , to  $x$  nie jest punktem skupienia  $A$ . Sprawdamy to łatwo, posługując się definicją granicy podobnie, jak w poprzednim przykładzie.  $\square$

Zatem: punkt skupienia zbioru  $A$  nie musi należeć do  $A$ .

**Przykład 5.4.** Jedynym punktem skupienia zbioru  $\mathbb{N}$  jest  $p = +\infty$ . Istotnie, ciąg o wyrazach  $a_n = n$  ma granicę  $p = +\infty$ , a jego wyrazy oczywiście są różne od  $p$ .

Ponadto, ciąg  $(a_n)$  liczb naturalnych ma granicę  $p \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy od pewnego miejsca jest stały. Wtedy jednak  $p$  nie może być różne od wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$ , gdyż  $p = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a_n$  dla wszystkich  $n$  dostatecznie dużych.

Podobnie stwierdzamy, że jedynymi punktami skupienia  $\mathbb{Z}$  są  $\pm\infty$ .  $\square$

**Przykład 5.5.** Zbiór punktów skupienia przedziału  $A = (0, 1)$  składa się z wszystkich punktów przedziału domkniętego  $[0, 1]$ . Czytelnik zechce to sprawdzić samodzielnie.  $\square$

**Definicja 5.6 (definicja Heinego granicy funkcji).** Założmy, że  $f: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  i  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ . Mówimy, że  $f$  ma w punkcie  $p$  granicę  $g \in \overline{\mathbb{R}}$ , i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu  $(x_n) \subset A \setminus \{p\}$  takiego, że  $\lim x_n = p$ , granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

istnieje i jest równa  $g$ .

**Uwaga:** gdy  $g$  lub  $p \notin \mathbb{R}$ , to w odpowiednich miejscach chodzi, rzecz jasna, o granice niewłaściwe odpowiednich ciągów.

Poniższe twierdzenie jest natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 2.11 (i własności granic niewłaściwych). Odnotujmy je dla porządku, zanim przejdziemy do przykładów.

**Twierdzenie 5.7 (arytmetyczne własności granicy funkcji).** Założmy, że  $A \subset \mathbb{R}$ , zaś  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ . Niech

$$f, g: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$$

dla pewnych  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Wówczas:

- Jeśli wynik działania  $a + b$  jest określony w  $\overline{\mathbb{R}}$ , to  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)) = a + b$ .

2. Jeśli wynik działania  $a \cdot b$  jest określony w  $\overline{\mathbb{R}}$ , to  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$ .
3. Jeśli wynik działania  $a - b$  jest określony w  $\overline{\mathbb{R}}$ , to  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - g(x)) = a - b$ .
4. Jeśli wynik działania  $\frac{a}{b}$  jest określony w  $\overline{\mathbb{R}}$  i  $g(x) \neq 0$  dla  $x \in A$ , to  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ .

Zanim przejdziemy do prostych przykładów, podkreślmy dwie rzeczy: Po pierwsze, o granicy  $f$  w  $p$  można mówić także wtedy, gdy  $f$  nie jest w ogóle określona w punkcie  $p$ ;  $p$  ma być punktem skupienia dziedziny funkcji  $f$ , nie musi do tej dziedziny należeć. Po drugie, nawet gdy  $f$  jest określona w punkcie  $p$ , to liczby

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) \quad \text{oraz} \quad f(p)$$

nie muszą mieć ze sobą nic wspólnego. Ilustruje to banalny przykład: niech  $p = 0$ , a  $f(x) = 0$  dla  $x \neq 0$  i  $f(0) = 2010 + \pi + e$ . Dla każdego ciągu  $(x_n)$  liczb różnych od 0 ciąg  $f(x_n)$  składa się z samych zer, więc ma granicę równą zero. Dlatego  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Wartością  $f$  w zerze możemy manipulować dowolnie, nie zmieniając granicy  $f$  w 0.

**Przykład 5.8.** Niech  $k \in \mathbb{N}$  będzie ustaloną liczbą i niech

$$g(x) = \frac{1}{x^k}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dla dowolnego ciągu  $x_n \rightarrow +\infty$  mamy  $1/(x_n)^k \rightarrow 0$ , więc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

**Przykład 5.9.** Wprost z Twierdzenia 3.2 – patrz punkt (E8) – wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

(Warunek podany w tym twierdzeniu jest powtórzeniem warunku z definicji Heinego dla funkcji określonej wzorem  $f(x) = (e^x - 1)/x$  na  $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .)

**Przykład 5.10.** Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie wielomianem stopnia  $n \in \mathbb{N}$ , tzn.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie  $a_i$  są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli  $p \in \mathbb{R}$ , to z twierdzenia o granicy sumy i iloczynu ciągów wnioskujemy, że dla każdego ciągu  $x_m \rightarrow p$  jest

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n = f(p),$$

nawet bez konieczności zakładania, że  $x_m \neq p$ . Zatem, z definicji,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Obliczmy teraz granice  $f$  w punktach  $\pm\infty$ . Założymy dla ustalenia uwagi, że  $a_n > 0$ . Niech  $g(x) = f(x)/x^n$  dla  $x \neq 0$ . Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right) + a_n = a_n > 0,$$

więc na mocy twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_n \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$$

Mamy także  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = (-1)^n \cdot +\infty$ , więc przy założeniu  $a_n > 0$  jest

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ +\infty & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

(Dla  $a_n < 0$  znaki w odpowiedzi trzeba zamienić).

**Przykład 5.11.** Wprost z Twierdzenia 4.59 wynika, że

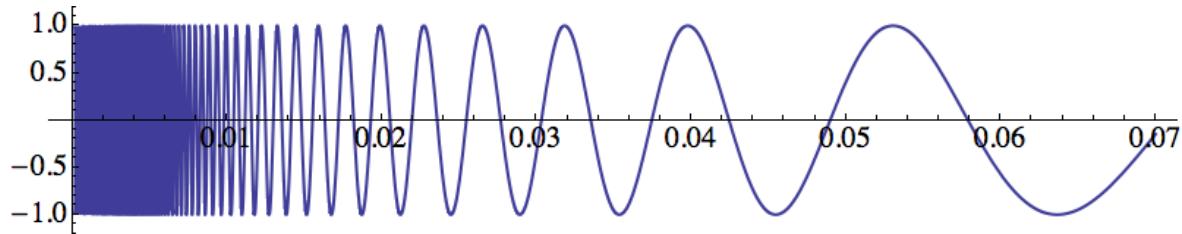
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

To, że w obu przypadkach zachodzi warunek, podany w definicji Heinego, jest treścią ostatniej, trzeciej części Twierdzenia 4.59.

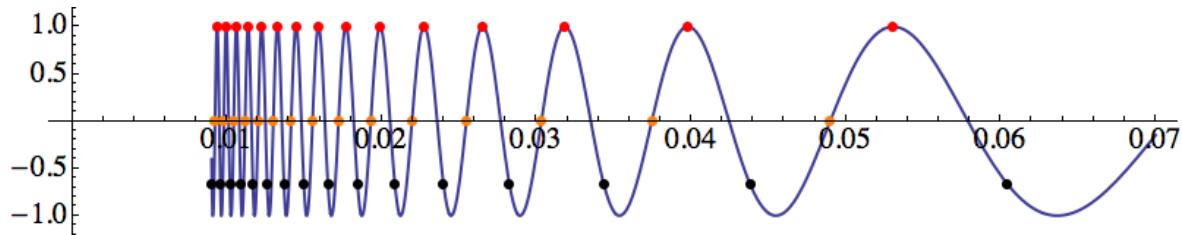
**Przykład 5.12.** Granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos \frac{1}{x} \right)$$

nie istnieje: dla ciągu  $x_k = 1/(2k\pi)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  mamy  $x_k \rightarrow 0$  i  $\cos(1/x_k) = \cos 2k\pi = 1$ , a dla ciągu  $z_k = 1/(2k\pi + \pi/2)$ , także zbieżnego do zera, jest  $\cos z_k = \cos(2k\pi + \pi/2) = 0$ . Zatem dla  $x_k \rightarrow 0$  ciąg  $\cos(1/x_k)$  może mieć różne granice (a także może być rozbieżny).



**Funkcja  $f(x) = \cos(1/x)$  w otoczeniu zera.** Oscylacje wykresu są coraz gęstsze, gdyż funkcja  $x \mapsto 1/x$  przekształca  $(0, 1)$  na całą półosią  $(1, \infty)$ . Dlatego w każdym przedziale  $(0, \varepsilon)$  funkcja  $f$  przyjmuje każdą z wartości  $y \in [-1, 1]$  nieskończonie wiele razy.



**Funkcja  $f(x) = \cos(1/x)$  w otoczeniu zera, II.** Można wykazać (zainteresowany Czytelnik zechce to zrobić samodzielnie), że dla każdego  $y \in [-1, 1]$  istnieje taki ciąg  $x_n \rightarrow 0$ , że  $f(x_n) \rightarrow y$ . Na rysunku zaznaczono punkty  $(x_n, f(x_n))$  dla trzech różnych takich ciągów; przedstawiono tylko wartości  $0,009 \leq x \leq 0,07$ .

**Przykład 5.13.** Niech  $A = (-1, \infty) \setminus \{0\}$ ,  $p = 0$ . Zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

To łatwo wynika ze znanych nam już własności funkcji wykładniczej i logarytmu naturalnego. Istotnie, z definicji potęgi o dowolnej podstawie i wykładniku,

$$f(x) := (1+x)^{1/x} = \exp\left(\ln\left((1+x)^{1/x}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

Niech  $(x_n) \subset A$  będzie ciągiem zbieżnym do zera. Położmy  $y_n = (x_n)^{-1} \cdot \ln(1+x_n)$ . Stosując punkt (L6) Twierdzenia 3.6, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1.$$

Ponieważ  $f(x_n) = \exp y_n$ , więc na mocy Twierdzenia 3.2, punkt (E7),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(y_n) = \exp(1) = e.$$

**Przykład 5.14.** Granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

nie istnieje. Dla ciągu  $x_n = 1/n \rightarrow 0$  mamy bowiem  $1/x_n = n \rightarrow +\infty$ , natomiast dla innego ciągu,  $-x_n = -1/n$ , także zbieżnego do zera, jest  $f(x_n) \rightarrow -\infty$ . Nie ma więc wspólnej granicy wszystkich ciągów  $1/x_n$ , gdzie  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \neq 0$ .

Z intuicyjnego punktu widzenia jest jasne, że nieistnienie granicy w Przykładzie 5.12 to zjawisko innego rodzaju niż nieistnienie granicy  $1/x$  w zerze. Dla rozróżnienia takich sytuacji wprowadza się pojęcie granicy jednostronnej.

**Definicja 5.15 (granica lewostronna).** Niech  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  i niech  $p$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  takim, że  $p = \lim a_n$  dla pewnego ciągu  $(a_n) \subset A \setminus \{p\}$ ,  $a_n < p$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ . Jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = a$$

dla każdego ciągu  $(x_n) \subset A \setminus \{p\}$  takiego, że  $x_n < p$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  i  $x_n \rightarrow p$  dla  $n \rightarrow \infty$ , to mówimy, że  $f$  ma w  $p$  granicę lewostronną równą  $a$ , i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = a.$$

Podobnie (zmieniając obie nierówności w powyższej definicji na przeciwnie) definiujemy granicę prawostronną

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x).$$

Jest rzeczą jasną, że w przykładzie 5.14 istnieją obie granice jednostronne:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

**Stwierdzenie 5.16.** Założmy, że  $p$  jest punktem skupienia zbioru  $A \subset \mathbb{R}$  i istnieją ciągi  $(x_n), (y_n) \subset A$ ,  $x_n, y_n \rightarrow p$ ,  $x_n < p < y_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Następujące warunki są równoważne:

- (i)  $f$  ma w  $p$  granicę równą  $a$ ;
- (ii)  $f$  ma w  $p$  obie granice jednostronne i każda z nich jest równa  $a$ .

Prosty dowód, polegający na sprawdzeniu warunków z definicji granicy (granicy jednostronnej) i wykorzystaniu Stwierdzenia 2.37, wiążącego zbieżność ciągu ze zbieżnością jego podciągów do wspólnej granicy, pozostawiamy Czytelnikowi.

Podamy teraz drugą definicję granicy, sformułowaną przez Cauchy'ego. Zamiast używać pojęcia granicy ciągu, operuje się w niej odpowiednio sprecyzowanym pojęciem *bliskości* punktów. Wyróżnimy w tej definicji wiele przypadków.

**Definicja 5.17 (definicja Cauchy'ego granicy funkcji).** Niech  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  i niech  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  oraz  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Mówimy, że funkcja  $f$  ma w  $p$  granicę równą  $a$ , symbolicznie:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. (Przypadek  $a, p \in \mathbb{R}$ ): dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że gdy  $0 < |x - p| < \delta$  i  $x \in A$ , to  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .
2. (Przypadek  $p \in \mathbb{R}$ ,  $a = \pm\infty$ , granica niewłaściwa w pewnym punkcie prostej): dla każdej liczby  $M > 0$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że gdy  $0 < |x - p| < \delta$  i  $x \in A$ , to  $\pm f(x) > M$ .
3. (Przypadek  $p = \pm\infty$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , tzn. granica właściwa w nieskończoności): dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $T > 0$  takie, że gdy  $\pm x > T$  i  $x \in A$ , to  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .
4. (Przypadek  $p = \pm\infty$ ,  $a = \pm\infty$ , tzn. granica niewłaściwa w  $\pm\infty$ ): dla każdej liczby  $M > 0$  istnieje  $T > 0$  takie, że gdy  $\pm x > T$  i  $x \in A$ , to  $\pm f(x) > M$ .

Proszę zauważyć, że punkty 2 i 3 kryją w sobie po dwa podprzypadki, a punkt 4 — aż cztery podprzypadki (bo są wtedy 4 możliwości dokonania konkretnego wyboru znaków  $\pm$ ). O wszystkich warunkach, sformułowanych w tej definicji dla różnych na pozór sytuacji, należy myśleć tak: jeśli argument przyjmuje wartości odpowiednio bliskie  $p$ , to funkcja przyjmuje wartości bliskie  $a$ . To, jak należy precyzyjnie pojmować termin *bliskie*, zależy od tego, czy  $a, p = \pm\infty$ , czy nie.

**Twierdzenie 5.18 (równoważność obu definicji granicy).** Założmy, że  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  i  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ . Jeśli  $f$  ma w  $p$  granicę  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  według definicji Heinego, to  $f$  ma w  $p$  granicę  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  według definicji Cauchy'ego, i na odwrót.

Dowód. Zajmiemy się tylko jednym przypadkiem w definicji granicy według Cauchy'ego. Czytelnik zainteresowany dogłębnym rozumieniem treści całego wykładu zechce samodzielnie uzupełnić szczegóły pozostałych przypadków. (Schemat dowodu jest identyczny).

Niech  $a, p \in \mathbb{R}$ . Założmy, że

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \quad \text{wg. definicji Heinego.}$$

Pokażemy metodą sprowadzenia do niedorzeczności, że  $f$  ma w  $p$  granicę  $a$  także wg. definicji Cauchy'ego. W tym celu założymy, że nie zachodzi warunek z definicji Cauchy'ego. Skoro tak, to zachodzi jego zaprzeczenie:

*Istnieje  $\varepsilon_0 > 0$  takie, że dla każdego  $\delta > 0$  istnieje punkt  $x \in A$ , który spełnia nierówności  $0 < |x - p| < \delta$ , ale  $|f(x) - a| \geq \varepsilon_0 > 0$ .*

Wykorzystując ten warunek dla  $\delta_k = 1/k$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots$ , znajdziemy ciąg punktów

$$(x_k) \subset A \setminus \{p\}, \quad 0 < |x_k - p| < \frac{1}{k} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

taki, że  $|f(x_k) - p| \geq \varepsilon_0$ . Z (5.1) wynika, że  $A \ni x_k \rightarrow p$  dla  $k \rightarrow \infty$  i  $x_k \neq p$ , więc zgodnie z definicją Heinego powinno być  $f(x_k) \rightarrow a$ . Mamy jednak  $|f(x_k) - a| > \varepsilon_0$  dla wszystkich  $k$ , więc granica ciągu  $f(x_k)$  nie może być równa  $a$ , tzn. nie zachodzi warunek podany w definicji Heinego. Uzyskana sprzeczność kończy pierwszą część dowodu.

Teraz założmy, że

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \quad \text{wg. definicji Cauchy'ego.}$$

Niech  $(x_k) \subset A \setminus \{p\}$  będzie dowolnym ciągiem takim, że  $x_k \rightarrow p$  dla  $k \rightarrow \infty$ . Wykażemy, posługując się definicją granicy ciągu, że  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$ , tzn. sprawdzimy, że istotnie zachodzi warunek podany w definicji Heinego.

Ustalmy w tym celu  $\varepsilon > 0$ . Dobierzmy doń  $\delta > 0$ , posługując się definicją Cauchy'ego granicy. Ponieważ  $x_k \rightarrow p$  i  $x_k \neq p$ , więc istnieje takie  $k_1 = k_1(\delta)$ , że

$$0 < |x_k - p| < \delta \quad \text{dla wszystkich } k > k_1.$$

Wtedy jednak, wobec definicji Cauchy'ego granicy funkcji, mamy

$$|f(x_k) - a| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } k > k_1.$$

Zatem, ciąg  $(f(x_k))$  ma granicę równą  $a$ . To wynika wprost z definicji granicy ciągu.  $\square$

Zanim wprowadzimy formalną definicję ciągłości, odnotujmy kilka twierdzeń o granicach funkcji, które natychmiast wynikają z tego, co już wiemy o zbieżności ciągów.

**Twierdzenie 5.19 (o trzech funkcjach).** *Jeśli*

$$f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{dla } x \in A,$$

*a  $p$  jest takim punktem skupienia zbioru  $A$ , że*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x),$$

*(tzn. obie powyższe granice istnieją i są równe), to granica  $\lim_{x \rightarrow p} h(x)$  też istnieje i zachodzi równość*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x).$$

Dowód. Teza wynika wprost z definicji Heinego i twierdzenia o trzech ciągach.  $\square$

**Twierdzenie 5.20 (warunek Cauchy'ego istnienia granicy).** Założmy, że  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  i  $p \in \mathbb{R}$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ . Wówczas  $f$  ma w  $p$  granicę równą  $a \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek Cauchy'ego:

Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że dla wszystkich  $t, s \in A \setminus \{p\}$  z nierównością  $|t - p| < \delta$ ,  $|s - p| < \delta$  wynika, że  $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ .

Dowód. Ćwiczenie dla zainteresowanych.  $\square$

Czytelnik zechce samodzielnie sformułować warunek Cauchy'ego istnienia granicy funkcji w punkcie  $p = \pm\infty$ . To łatwe zadanie: trzeba posłużyć się intuicyjnym rozumieniem warunku Cauchy'ego: jeśli argumenty  $s, t$  są odpowiednio bliskie  $p$ , to wartości funkcji w punktach  $s, t$  są bliskie – i dokonać przekładu na ścisły język.

**Twierdzenie 5.21.** Założmy, że  $A, B \subset \mathbb{R}$ ,

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: B \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(A) \subset B,$$

a jest punktem skupienia zbioru  $A$ , b jest punktem skupienia zbioru  $B$ , a ponadto

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c, \quad f(x) \neq b \quad \text{dla } x \in A.$$

Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

Dość oczywisty dowód, wykorzystujący którykolwiek z równoważnych definicji granicy, pominiemy. Proszę tylko zauważyc, że obliczając w Przykładzie 5.13 granicę funkcji  $f(x) = (1+x)^{1/x}$  w zerze, *de facto* posłużyliśmy się właśnie taką argumentacją, podając uzasadnienie.

## 5.2 Funkcje monotoniczne

**Definicja 5.22.** Kresem dolnym (odpowiednio: górnym) funkcji  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy kres dolny (odpowiednio: górny) zbioru  $f(A)$  wartości tej funkcji. Piszemy

$$\inf_A f \equiv \inf_{x \in A} f(x) := \inf f(A), \quad \sup_A f \equiv \sup_{x \in A} f(x) := \sup f(A).$$

Gdy zbiór wartości  $f$  nie jest ograniczony z góry, piszemy  $\sup f = +\infty$ . Gdy zbiór wartości  $f$  nie jest ograniczony z dołu, piszemy  $\inf f = -\infty$ .

**Definicja 5.23.** Funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest:

- (i) *malejąca*, gdy  $f(x) > f(y)$  dla wszystkich  $x, y \in A$  takich, że  $x < y$ ;
- (ii) *niemalejąca*, gdy  $f(x) \leq f(y)$  dla wszystkich  $x, y \in A$  takich, że  $x < y$ ;
- (iii) *rosnąca*, gdy  $f(x) < f(y)$  dla wszystkich  $x, y \in A$  takich, że  $x < y$ ;
- (iv) *nierosnąca*, gdy  $f(x) \geq f(y)$  dla wszystkich  $x, y \in A$  takich, że  $x < y$ .

Funkcja, która spełnia któryś z warunków (i)–(iv) tej definicji, jest *monotoniczna*. Funkcje rosnące i malejące nazywamy *ściśle monotonicznymi*.

**Twierdzenie 5.24 (granice jednostronne funkcji monotonicznych).** Założmy, że  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest monotoniczna i  $p$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ . Wówczas:

(i) Jeśli istnieje ciąg  $(x_n) \subset A \cap (-\infty, p)$  zbieżny do  $p$ , to  $f$  ma w  $p$  granicę lewostronną.

(ii) Jeśli istnieje ciąg  $(x_n) \subset A \cap (p, +\infty)$  zbieżny do  $p$ , to  $f$  ma w  $p$  granicę prawostronną.

Dowód. Udowodnimy tylko punkt (i); dowód (ii) jest taki sam. Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy, że  $f$  jest niemalejąca; jeśli nie jest, to można rozpatrzyć funkcję  $(-f)$ .

Niech

$$M = \sup \{f(x) : x \in A, x < p\}.$$

(Uwaga: dopuszczać możliwość  $M = +\infty$ ; Czytelnik zechce wskazać przykłady takich sytuacji). Pokażemy, że  $f$  ma w  $p$  granicę lewostronną równą  $M$ .

Weźmy jakikolwiek ciąg  $(x_n) \subset A \cap (-\infty, p)$  zbieżny do  $p$ . Ustalmy dowolne  $M' < M$ .<sup>1</sup> Z definicji kresu górnego, istnieje  $x \in A \cap (-\infty, p)$  taki, że  $M' < f(x) \leq M$ . Ponieważ  $x_n \rightarrow p > x$ , więc istnieje takie  $n_1 \in \mathbb{N}$ , że dla wszystkich  $n > n_1$  mamy

$$x < x_n < p,$$

stąd zaś, dzięki monotoniczności  $f$ ,

$$M' < f(x) \leq f(x_n) \leq M = \sup \{f(x) : x \in A, x < p\} \quad \text{dla wszystkich } n > n_1.$$

Zatem, wprost z definicji granicy ciągu,  $\lim f(x_n) = M$ . Z dowolności  $(x_n)$  i definicji granicy lewostronnej wynika więc, że  $f$  ma w  $p$  granicę lewostronną  $M$ .  $\square$

### 5.3 Ciągłość funkcji

Zdefiniujemy teraz jedną z najważniejszych klas funkcji, badanych w całej analizie. Z odpowiednikami tej definicji dla funkcji wielu zmiennych rzeczywistych, a także funkcji określonych na tzw. przestrzeniach metrycznych i topologicznych, Czytelnik zetknie się na drugim roku studiów.

**Definicja 5.25.** Niech  $f: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  i niech  $p \in A$ . Powiemy, że  $f$  jest ciągła w punkcie  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z dwóch poniższych warunków:

1. Punkt  $p$  nie jest punktem skupienia zbioru  $A$ .
2. Punkt  $p$  jest punktem skupienia zbioru  $A$  i  $f$  ma w  $p$  granicę równą  $f(p)$ .

**Definicja 5.26.** Mówimy, że funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła (na zbiorze  $A$ ), jeśli  $f$  jest ciągła w każdym punkcie zbioru  $A$ .

---

<sup>1</sup>Proszę myśleć o tym następująco: gdy  $M \in \mathbb{R}$ , to  $M' = M - \varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon > 0$ , a gdy  $M = +\infty$ , to  $M'$  jest dowolną liczbą. Taki zapis pozwala uniknąć oddzielnej analizy 2 przypadków; nic innego się w tym nie kryje.

Najczęściej będziemy mówić po prostu “ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła”. Takie zdanie oznacza zawsze ciągłość  $f$  we wszystkich punktach  $A$ .

Jeśli zbiór  $A$  jest przedziałem, to z intuicyjnego punktu widzenia ciągłość funkcji oznacza, że jej wykres można narysować jednym pociągnięciem ołówka, bez odrywania go od papieru.

**Stwierdzenie 5.27.** *Niech  $f: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  i niech  $p \in A$ . Wówczas  $f$  jest ciągła w punkcie  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $\delta > 0$ , że dla wszystkich  $x \in A \cap (p - \delta, p + \delta)$  zachodzi nierówność  $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ .*

Dowód. Jeśli  $p$  nie jest punktem skupienia  $A$ , to istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że  $(p - \delta, p + \delta) \cap A = \{p\}$ . Wtedy warunek z tezy jest banalny: dla wszystkich  $x \in A \cap (p - \delta, p + \delta)$  mamy po prostu  $|f(x) - f(p)| = |f(p) - f(p)| = 0 < \varepsilon$ .

Jeśli  $p$  jest punktem skupienia  $A$ , to warunek z tezy twierdzenia jest powtórzeniem, w języku definicji Cauchy'ego granicy funkcji, zdania “ $f$  ma w  $p$  granicę równą  $f(p)$ .”  $\square$

Z poznanych dotyczących twierdzeń o własnościach granicy natychmiast otrzymujemy następujące wnioski.

**Twierdzenie 5.28.** *Jeśli  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągłe w punkcie  $p \in A$ , to  $f \pm g$  i  $f \cdot g$  są ciągłe w  $p$ . Jeśli ponadto  $g \neq 0$  we wszystkich punktach zbioru  $A$ , to  $f/g$  jest określona na  $A$  i ciągła w punkcie  $p$ .*  $\square$

**Uwaga:** nietrudno się przekonać, że założenie  $g \neq 0$  na  $A$  jest potrzebne, żeby o ilorazie  $f/g$  można było mówić w punktach zbioru  $A$ . Do samej ciągłości  $f/g$  w  $p$  wystarczy — w obu przypadkach objętych definicją ciągłości — założenie  $g(p) \neq 0$ .

**Wniosek 5.29.** *Jeśli funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w  $p \in A$ , a  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie zbiór  $B$  zawiera zbiór  $f(A)$  wartości funkcji  $f$ , jest ciągła w punkcie  $f(p)$ , to złożenie  $g \circ f$  jest ciągłe w punkcie  $p$ .*

Omawialiśmy wcześniej funkcję wykładniczą, logarytm naturalny, funkcje trygonometryczne oraz (krótko) potęgi o dowolnym wykładniku i podstawie dodatniej. Dla  $f = \exp, \ln, \sin$  i  $\cos$  formułowaliśmy twierdzenia: jeśli  $(x_n)$  jest dowolnym ciągiem zbieżnym do  $x$ , to ciąg  $f(x_n)$  ma granicę  $f(x)$ . Ich dowody wymagały przeprowadzenia konkretnych oszacowań i rachunków. Widzimy teraz, poznawszy definicję Heinego granicy i definicję ciągłości, że za każdym razem chodziło po prostu o ciągłość odpowiedniej funkcji. Za to teraz możemy łatwo podać serię przykładów.

**Przykład 5.30.** Następujące funkcje są ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny:

- a) Funkcja stała  $f(x) = c$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .
- b) Funkcja  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . To wynika natychmiast z definicji (i ma tautologiczny charakter).
- c) Dowolny wielomian  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  stopnia  $n$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ . Ciągłość wielomianów wynika, przez indukcję względem stopnia, z twierdzenia o ciągłości sumy i iloczynu funkcji ciągłych.

- d) Funkcja  $f(x) = (x+1)/(x-1)$  jest określona i ciągła w każdym punkcie zbioru  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . To wynika z twierdzenia o ilorazie funkcji ciągłych. Ogólniej, każda funkcja wymierna, tzn. funkcja  $f(x) = P(x)/Q(x)$ , gdzie  $P, Q$  są wielomianami i  $x \in Z_Q$ , gdzie

$$Z_Q := \mathbb{R} \setminus \{\text{wszystkie pierwiastki wielomianu } Q\},$$

jest ciągła w każdym punkcie zbioru  $Z_Q$ .

- e) Funkcja  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła; patrz Twierdzenie 3.2, punkt (E7).
- f) Funkcje  $\sin, \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągłe. Ten fakt był treścią Wniosku 4.62.
- g) Funkcja  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, patrz Twierdzenie 3.6. Ciągłość logarytmu można wywnioskować także z ogólnego twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej, którym zajmiemy się w następnym podrozdziale.

**Definicja 5.31 (tangens i cotangens).** Kładziemy

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2: k \in \mathbb{Z}\},$$

oraz

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Twierdzenie 5.32.** *Funkcje*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2: k \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \operatorname{ctg}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

są ciągłe.  $\square$

Oczywiście nie wszystkie funkcje są ciągłe.

**Przykład 5.33.** a) Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

jest nieciągła w zerze i ciągła w pozostałych punktach prostej  $\mathbb{R}$ .

b) Tzw. funkcja Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest nieciągła w każdym punkcie prostej. To wynika stąd, że każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych i pewnego ciągu liczb niewymiernych.

- c) Ten przykład będzie nieco subtelniejszy. Jego celem jest wskazanie, że punkty ciągłości i nieciągłości funkcji mogą być “dość dokładnie wymieszane”. Otóż, tzw. funkcja Riemanna  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{gdy } x = p/q > 0, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{N} \text{ i ułamek } p/q \text{ jest nieskracalny,} \\ 0 & \text{gdy } x > 0 \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

jest nieciągła we wszystkich punktach wymiernych i ciągła we wszystkich punktach niewymiernych. Oto dowód tego twierdzenia.

Każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb niewymiernych. Dlatego, gdyby  $f$  miała być ciągła w  $w \in \mathbb{Q}$ , musiałaby spełniać warunek  $f(w) = 0$ . Jednak  $f(w) \neq 0$  dla wszystkich  $w \in \mathbb{Q}$ .

Udowodnimy teraz ciągłość funkcji  $f$  w punktach niewymiernych. Ustalmy liczbę  $x > 0$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , oraz  $\varepsilon > 0$ . Wybierzmy  $q_0 \in \mathbb{N}$  tak, aby  $1/q_0 < \varepsilon$ . W przedziale  $(0, x + 1)$  jest tylko skończenie wielu liczb wymiernych  $w$ , które mają w postaci nieskracalnej zapis  $w = p/q$  dla pewnego  $q \leq q_0$ . Innymi słowy, zbiór

$$\{|x - w| : w \in \mathbb{Q}, w = p/q < x + 1, p \in \mathbb{N}, q = 1, \dots, q_0, \text{NWD}(p, q) = 1\}$$

jest skończony i ma tylko elementy dodatnie (tu korzystamy z niewymierności  $x$ ). Dlatego liczba

$$\delta := \min(x, \inf A)$$

jest dodatnia! Dla każdego  $t > 0$  takiego, że  $|t - x| < \delta$ , mamy  $|f(t) - f(x)| < 1/q_0 < \varepsilon$ : dla  $t$  niewymiernych różnica  $f(t) - f(x)$  jest po prostu zerem, a dla  $t$  wymiernych  $f(t) - f(x) = f(t) = 1/q$  dla pewnego  $q > q_0$ , bo mniejsze mianowniki wykluczyliśmy, definiując liczbę  $\delta$ .

**Uwaga:** Można wykazać, że nie istnieje żadna funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , która byłaby ciągła tylko w punktach wymiernych.

**Przykład 5.34.** W fizyce funkcje nieciągłe spotykamy m.in. w opisie wszelkich zjawisk związanych z pękaniem i rozrywaniem różnych materiałów, a także w opisie przemian fazowych. Z przejściem ustalonej masy wody ze stanu ciekłego w stały (tzn. zamarznięciem) wiąże się skokowy wzrost objętości. Dlatego zamarzający lód potrafi np. rozsadzić zamknięte szklane naczynie.

**Przykład 5.35.** Jeśli założymy, że czas  $t$  ma wartości rzeczywiste dodatnie, a wszelkie kwoty pieniędzy mierzmy w groszach i ich całkowitych wielokrotnościach<sup>2</sup>, to w ekonomii we wszystkich ciekawych przypadkach będziemy, z formalnego punktu widzenia, mieć do czynienia wyłącznie z funkcjami nieciągłymi zmiennej  $t$ !

Kluczowe znaczenie mają w analizie dwie własności funkcji ciągłych. Pierwsza z nich orzeka, że funkcja ciągła na przedziale domkniętym przyjmuje swoje kresy.

**Twierdzenie 5.36 (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów).** *Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to istnieją punkty  $x_0, x'_0 \in [a, b]$  takie, że*

$$f(x_0) = \sup_{[a,b]} f, \quad f(x'_0) = \inf_{[a,b]} f.$$

<sup>2</sup>To nawet w praktyce nie jest prawdą: wystarczy spojrzeć na tabele kursów walut, gdzie podawane są ułamki groszy, centów itp.

Zauważmy, że z tego twierdzenia wynika, że  $\sup f$  i  $\inf f$  są liczbami rzeczywistymi, tzn. są skończone. Zauważmy także, że założenie ciągłości  $f$  na przedziale domkniętym jest istotne.

**Przykład 5.37.** Funkcja  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = x^2$  jest ciągła na  $(0, 1)$ , ale ani  $\sup f = 1$ , ani  $\inf f = 0$  nie są elementami zbioru  $f((0, 1)) = (0, 1)$  wartości funkcji.

**Przykład 5.38.** Funkcja  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , jest ciągła, ale zbiór jej wartości nie jest ograniczony ani z góry, ani z dołu.

**Dowód Twierdzenia 5.36.** Niech  $M = \sup f \in \overline{\mathbb{R}}$ . Z definicji kresu górnego wynika, że istnieje ciąg  $(x_n) \subset [a, b]$  taki, że  $f(x_n) \rightarrow M$  dla  $n \rightarrow \infty$ .<sup>3</sup>

Ciąg  $(x_n) \subset [a, b]$  jest ograniczony, więc na mocy Twierdzenia Bolzano–Weierstrassa ma podciąg  $(x_{n_k})_{k=1,2,\dots}$  zbieżny do pewnej liczby  $x_0 \in [a, b]$ . Ciąg liczb  $f(x_{n_k})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , jest zbieżny, gdyż jest podciągiem ciągu zbieżnego. Zatem

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0);$$

ostatnia równość zachodzi dlatego że  $f$  jest ciągła.

Tak samo dowodzimy, że  $m = \inf f$  jest równe  $f(x'_0)$  dla pewnego  $x'_0 \in [a, b]$ .  $\square$

Z drugą ważną własnością funkcji ciągłych, tak zwaną własnością Darboux (przyjmowaniem wartości pośrednich), mieliśmy już *de facto* do czynienia kilkakrotnie, w sposób niejawny: zetknęliśmy się z nią, dowodząc surjektywności  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ , definiując liczbę  $\pi$ , a także dowodząc istnienia pierwiastków  $n$ -tego stopnia z liczb rzeczywistych.

**Twierdzenie 5.39 (własność Darboux).** Jeśli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i dla pewnych liczb  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$ , jest

$$f(x) < c < f(y) \quad \text{albo} \quad f(x) > c > f(y)$$

to istnieje  $t \in (x, y)$  takie, że  $f(t) = c$ .

**Dowód.** Można ograniczyć rozważania do przypadku  $f(x) < c < f(y)$  (jeśli zachodzą nierówności przeciwe, to rozpatrujemy  $-f$  zamiast  $f$ ). Poóżmy

$$Z := \{s \in [x, y]: f(s) < c\}.$$

Ponieważ  $x \in Z$ , więc  $Z \neq \emptyset$ . Ponadto,  $Z$  jest ograniczony z góry przez  $y$ . Zatem,  $Z$  ma skończony kres górny. Niech  $t = \sup Z$ .

Wykażemy, że  $f(t) = c$ . Z definicji kresu górnego wynika, że istnieje ciąg  $(s_n) \subset Z$  taki, że  $s_n \rightarrow t$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Z ciągłości  $f$  i warunku  $f(s_n) < c$  otrzymujemy

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) \leq c.$$

Przypuśćmy na chwilę, że  $f(t) < c$ . Wtedy  $\varepsilon := c - f(t) > 0$ . Dobierzmy liczbę  $\delta > 0$  tak, żeby mieć  $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$  dla wszystkich  $s \in (t - \delta, t + \delta) \subset (x, y)$  (można w tym celu wykorzystać Stwierdzenie 5.27). Wtedy jednak

$$f(s) < f(t) + \varepsilon = f(t) + c - f(t) = c \quad \text{dla wszystkich } s \in (t, t + \delta),$$

co矛盾.  $(t, t + \delta) \subset Z$  i  $t = \sup Z$ , a to jest sprzeczność. Zatem musi być  $f(t) = c$ .  $\square$

---

<sup>3</sup>Gdy  $M = \infty$ , to zbiór  $f([a, b])$  jest nieograniczony z góry, tzn. istnieje ciąg  $(x_n)$  taki, że  $f(x_n) \rightarrow +\infty = M$ .

**Wniosek 5.40.** *Każdy wielomian  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nieparzystego stopnia o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.*

Dowód. Mnożąc w razie potrzeby  $P$  przez liczbę różną od zera (to nie wpływa na pierwiastki wielomianu  $P$ ), możemy założyć, że

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \\ &= x^{2n+1} \left( 1 + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right) \quad \text{dla } x \neq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right) = 0,$$

więc istnieje taka liczba  $M > 0$ , że

$$\left( 1 + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right) \geq 1 - \left| \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right| > \frac{1}{2} > 0 \quad \text{dla } |x| > M.$$

Dla  $x \neq 0$  liczby  $x^{2n+1}$  i  $x$  mają ten sam znak (zwróćmy uwagę: *tylko tu* korzystamy z nieparzystości stopnia wielomianu  $P$ ). Zatem, dla każdego  $x_0 > M$  jest  $P(x_0) > 0 > P(-x_0)$ . Stosując własność Darboux do  $f = P$ ,  $c = 0$  na przedziale  $[-x_0, x_0]$ , kończymy dowód.  $\square$

**Uwaga.** Oczywiście, założenie nieparzystości stopnia jest istotne. Dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  wielomian  $Q(x) = x^{2k} + 1 = (x^k)^2 + 1$  przyjmuje na prostej tylko wartości dodatnie.

## 5.4 Ciągłość funkcji odwrotnej

W tym podrozdziale wykażemy, że funkcja odwrotna do funkcji ciągłej i różniczkowalnej na pewnym przedziale  $I \subset \mathbb{R}$  jest ciągła. Dowód tego twierdzenia poprzedzimy sformułowaniem dwóch faktów pomocniczych.

**Lemat 5.41.** *Załóżmy, że  $I \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem, a  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  — funkcją ciągłą na  $I$ . Wówczas  $f$  jest różniczkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  jest ścisłe monotoniczna.*

Dowód. Oczywiście, ścisła monotoniczność  $f$  gwarantuje jej różniczkowalność. Wykażemy drugą implikację. Cały dowód polega na umiejętności stosowania własności Darboux i rozumowaniu przez zaprzeczenie.

Jeśli  $I$  jest zbiorem jednopunktowym, to nie ma czego dowodzić. Niech więc  $x, y \in I$ ,  $x < y$ . Bez zmniejszenia ogólności przyjmiemy  $c = f(x) < f(y) = d$ ; w przeciwnym przypadku rozpatrujemy funkcję  $-f$ .

Niech  $z \in (x, y) \subset I$ . Gdyby  $f(z) < f(x) = c$ , to stosując własność Darboux do  $f$  na odcinku  $[z, y]$ , znaleźćlibyśmy  $x_1 \in (z, y)$  takie, że  $f(x_1) = c = f(x)$ , co przeczyłoby różniczkowalność  $f$ . Gdyby  $f(z) > f(y) = d$ , to, podobnie, stosując własność Darboux do  $f$  na odcinku  $[x, z]$ , znaleźćlibyśmy  $y_1 \in (x, z)$  takie, że  $f(y_1) = d = f(y)$ . Jak wcześniej, przeczyłoby to różniczkowalność  $f$ . Zatem musi być  $f(x) < f(z) < f(y)$ .

Niech teraz  $z \in I$ ,  $z > y$ . Gdyby  $f(z) < f(y)$ , to istniałaby liczba  $c'$  taka, że

$$f(x) < c' < f(y) \quad \text{oraz} \quad f(z) < c' < f(y).$$

Stosując własność Darboux do  $f$  na każdym z odcinków  $[x, y]$ ,  $[y, z]$ , znaleźćlibyśmy punkty

$$z_1 \in (x, y), \quad z_2 \in (y, z) \quad \text{takie, że} \quad f(z_1) = f(z_2) = c_1.$$

To przecieżoby różnowartościowości  $f$ , zatem musi być  $f(z) > f(y)$ . Podobnie wykazujemy, że dla  $I \ni z < x$  jest  $f(z) < f(x)$ .

Podsumujmy: wykazaliśmy, że jeśli istnieją dwa punkty  $x, y \in I$ ,  $x < y$ , takie, że  $f(x) < f(y)$ , to

$$f(s) < f(x) < f(t) < f(y) < f(r) \quad \text{dla } s \in I \cap (-\infty, x), t \in (x, y) \text{ i } r \in I \cap (y, \infty).$$

To oznacza, że  $f$  jest rosnąca. (Gdy  $f(x) > f(y)$  dla pewnych  $x < y \in I$ , to oczywiście  $f$  jest malejąca, bo wtedy  $-f$  jest rosnąca).  $\square$

Następny lemat wynika natychmiast z definicji funkcji odwrotnej.

**Lemat 5.42.** Jeżeli  $A, B \subset \mathbb{R}$  i  $f: A \rightarrow B$  jest ścisłe monotoniczną bijekcją, to  $f^{-1}: B \rightarrow A$  też jest ścisłe monotoniczną bijekcją.  $\square$

**Twierdzenie 5.43.** Założymy, że  $I \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem, a  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  jest ścisłe monotoniczna i ciągła. Wówczas

$$f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

też jest ścisłe monotoniczna i ciągła.

Dowód. Ścisła monotoniczność  $f^{-1}$  wynika z poprzedniego Lematu. Dla ustalenia uwagi założymy, że  $f$  jest rosnąca; wtedy  $f^{-1}$  jest rosnąca. Wykażemy ciągłość  $f^{-1}$ .

Niech  $(y_n) \subset f(I)$  będzie zbieżny do  $y_0 \in f(I)$ . Przypuśćmy, że ciąg  $x_n = f^{-1}(y_n)$  nie jest zbieżny do  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ . Wtedy istnieje liczba  $\varepsilon_0 > 0$  i podciąg  $(x'_n)$  ciągu  $(x_n)$  taki, że

$$|x'_n - x_0| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \text{dla wszystkich } n. \quad (5.2)$$

Ciąg  $y'_n = f(x'_n)$  jest podciągiem ciągu  $(y_n)$ , więc też jest zbieżny do  $y_0$ . Posługując się lematem Sierpińskiego 2.34, możemy z  $(y'_n)$  wybrać podciąg monotoniczny  $(y''_n)$ . Oczywiście

$$\lim y''_n = \lim y'_n = \lim y_n = y_0.$$

Ponadto,  $y''_n$  jest ograniczony przez  $y_0$  z odpowiedniej strony: z góry, gdy jest niemalejący, a z dołu, gdy jest nierosnący. Ponieważ  $f^{-1}$  jest rosnąca, więc  $x''_n = f^{-1}(y''_n)$  też jest ciągiem monotonicznym, ograniczonym (z odpowiedniej strony!) przez liczbę  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ . Dlatego

$$\lim x''_n = x \in I;$$

liczba  $x$  należy do  $I$ , gdyż należy do odcinka o końcach  $f^{-1}(y_0)$  i  $f^{-1}(y'_1)$ , zawartego w  $I$ . Dzięki ciągłości  $f$  otrzymujemy

$$f(x) = \lim f(x''_n) = \lim y''_n = y_0,$$

a stąd  $x_0 = f^{-1}(y_0) = x$ . Z definicji granicy,  $|x''_n - x_0| < \varepsilon_0$  dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$ , co przeczy warunkowi (5.2).  $\square$

**Uwaga.** Powyższe twierdzenie może komuś, z intuicyjnego punktu widzenia, wydawać się czymś zupełnie oczywistym: skoro ciągłość oznacza możliwość rysowania wykresu bez odrywania ołówka od papieru, a wykres  $f$  i wykres  $f^{-1}$  to ta sama linia, czegoż jeszcze dowodzić? Podkreślmy jednak, że jest rzeczą istotną, iż rozpatrujemy funkcje na przedziałach, ciągłe w każdym punkcie dziedziny.

**Zadanie 5.44.** Znaleźć przykład bijekcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że  $f(0) = 0$  i  $f$  jest ciągła w zerze, ale  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest nieciągła w zerze.

**Wskazówka.** Zacząć od próby określenia  $f^{-1}$  tak, żeby pewien ciąg  $(y_n)$  zbieżny do zera przekształcić na ciąg  $(x_n)$ , który nie jest zbieżny do zera.

Najważniejsze zastosowanie Twierdzenia 5.43 polega na możliwości wnioskowania o ciągłość funkcji odwrotnych do znanych funkcji ciągłych.

**Przykład 5.45.** Wiemy już, że logarytm naturalny jest funkcją ciągłą. Teraz możemy stwierdzić, że wynika to (także) stąd, że

$$f \equiv \exp: I = \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) = f(\mathbb{R})$$

jest ciągła, a  $\ln = f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 5.4.1 Funkcje cyklometryczne.

Określmy teraz funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych. Ponieważ funkcje trygonometryczne nie są różnowartościowe, więc należy jasno powiedzieć, na jakich zbiorach będziemy rozważać funkcje do nich odwrotne.

Zauważmy, że na przedziale  $[0, \pi/2] \subset [0, 2]$  cosinus maleje od 1 do 0 (patrz Lemat 4.66 i definicja liczby  $\pi$ ). Ponadto, dzięki wzorom (4.19) i (4.20) oraz parzystości cosinusa mamy

$$\cos(\pi - x) = -\sin(\pi/2 - x) = -\cos(-x) = -\cos x .$$

Stąd, posługując się własnością Darboux, od razu wnioskujemy, że  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  jest malejącą, ciągłą bijekcją z przedziału  $[0, \pi]$  na przedział  $[-1, 1]$ .

**Definicja 5.46.** Arcus cosinus to funkcja

$$\text{arc cos } = (\cos)^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] ,$$

odwrotna do  $\cos|_{[0, \pi]}$ .

Ze wskazanych wyżej własności cosinusa i z Twierdzenia 5.43 wynika, że funkcja  $\text{arc cos}$  jest ciągła i malejąca;  $\text{arc cos}(-1) = \pi$  i  $\text{arc cos} 1 = 0$ .

Ponieważ  $\sin x = -\cos(x + \pi/2)$ , więc  $\sin: [-\pi/2, \pi/2]$  jest ciągłą funkcją rosnącą, której zbiorem wartości jest  $[-1, 1]$ .

**Definicja 5.47.** Arcus sinus to funkcja

$$\text{arc sin } = (\sin)^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] ,$$

odwrotna do  $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ .

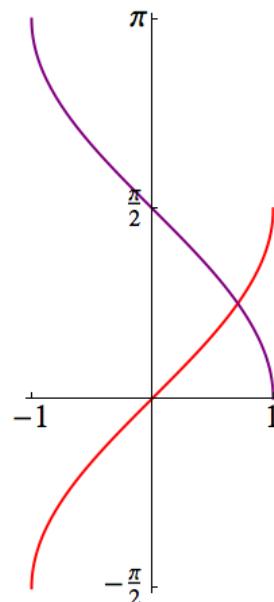
Podobnie jak przed chwilą, z Twierdzenia 5.43 wynika, że funkcja  $\text{arc sin}$  jest ciągła i rosnąca. Mamy  $\text{arc sin}(\pm 1) = \pm \pi/2$ .

Podobnie definiujemy funkcje *arcus tangens* i *arcus cotangens*. Aby wykazać, że kolejne dwie definicje są poprawne, Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić<sup>4</sup>, że  $\operatorname{tg}: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą rosnącą,  $\operatorname{ctg}: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  — funkcją ciągłą malejącą, a zbiór wartości każdej z tych funkcji jest równy  $\mathbb{R}$ .

**Definicja 5.48.** Arcus tangens to funkcja

$$\operatorname{arc tg} = (\operatorname{tg})^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2]$$

odwrotna do  $\operatorname{tg}|_{(-\pi/2, \pi/2)}$ .



**Definicja 5.49.** Arcus cotangens to funkcja

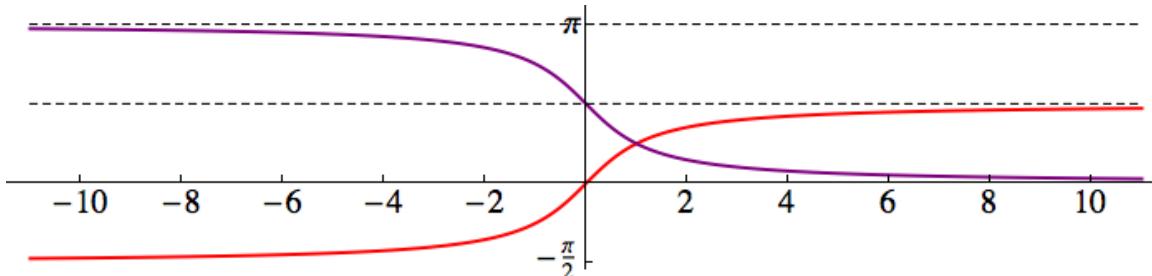
$$\operatorname{arc ctg} = (\operatorname{ctg})^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

odwrotna do  $\operatorname{ctg}|_{(0, \pi)}$ .

Arcus tangens rośnie na całej prostej  $\mathbb{R}$ , natomiast Arcus sinus i arcus cosinus arcus cotangens maleje na całej prostej  $\mathbb{R}$ . Z Twierdzenia 5.43 wynika, że obie funkcje są ciągłe.

Nietrudno też sprawdzić, że  $\operatorname{arc tg} 0 = 0 = \operatorname{arc ctg} 0 - \pi/2$ , a ponadto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arc tg} x = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arc ctg} x = \frac{\pi}{2}(1 \mp 1) = \begin{cases} \pi, & (x \rightarrow -\infty) \\ 0, & (x \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (5.3)$$



Arcus tangens i arcus cotangens.

**Zadanie 5.50.** Wykazać, że  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  jest surjekcją.

## 5.5 Jednostajna ciągłość

**Definicja 5.51.** Niech  $A \subset \mathbb{R}$ . Mówimy, że funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest jednostajnie ciągła (na zbiorze  $A$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że dla wszystkich  $x, y \in A$  z warunku  $|x - y| < \delta$  wynika, że  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

<sup>4</sup>Należy użyć przytoczonych nieco wyżej informacji o monotoniczności sinusa i cosinusa na odpowiednich przedziałach.

Jednostajna ciągłość jest warunkiem mocniejszym od ciągłości. Konkretne, dość proste przykłady są sformułowane dalej w tym podrozdziale. Podkreślimy jedno – kolejność kwantyfikatorów w definicji ciągłości  $f$  na  $A$  i w definicji jednostajnej ciągłości  $f$  na  $A$  jest różna:

**Ciągłość  $f$  we wszystkich  $x \in A$ :**  $\boxed{\forall x \in A} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_{x,\varepsilon} > 0 \quad \forall y \in A \quad \dots$

**Jednostajna ciągłość  $f$  na  $A$ :**  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \quad \boxed{\forall x \in A} \quad \forall y \in A \quad \dots$

Zatem, badając ciągłość  $f$  w każdym punkcie  $x \in A$ , dobieramy do  $\varepsilon > 0$  liczbę  $\delta > 0$ , ale robimy to dla każdego punktu  $x \in A$  osobno. Badając jednostajną ciągłość, dobieramy do  $\varepsilon > 0$  liczbę  $\delta > 0$ , która jest wspólna dla wszystkich punktów  $x \in A$ . Z intuicyjnego punktu widzenia: chcemy mierzyć wartość funkcji z dokładnością do  $\varepsilon$  i wiemy, że w każdym miejscu dziedziny dopuszczalny błąd pomiaru argumentu wynosi  $\delta$ . Jest rzeczą dość oczywistą, że taki wspólny wybór liczby  $\delta$ , dobrej dla wszystkich  $x$  naraz, może być czymś bardziej skomplikowanym niż wybór, którego dokonuje się dla każdego  $x$  z osobna.

**Stwierdzenie 5.52.** Niech  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Następujące warunki są równoważne:

(i) funkcja  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $A$ ;

(ii) dla każdych dwóch ciągów  $(x_n), (y_n) \subset A$  z warunku  $\lim(x_n - y_n) = 0$  wynika, że  $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ .

Dowód. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Założmy, że  $(x_n), (y_n) \subset A$  i  $x_n - y_n \rightarrow 0$ . Przypuśćmy, wbrew tezie (ii), że ciąg różnic  $(f(x_n) - f(y_n))$  nie jest zbieżny do zera. Wtedy istnieje liczba  $\varepsilon_0 > 0$  i podciąg  $(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}))$  takiego, że

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \text{dla wszystkich } n_k. \quad (5.4)$$

Dobierzmy do  $\varepsilon_0 > 0$  liczbę  $\delta > 0$ , korzystając z definicji jednostajnej ciągłości. Dla wszystkich dostatecznie dużych numerów  $n_k$  jest wtedy

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \delta,$$

a zatem  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon_0$ , co przeczy warunkowi (5.4). Uzyskana sprzeczność kończy dowód implikacji ' $\Rightarrow$ '.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Ponownie dowodzimy przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że warunek z definicji jednostajnej ciągłości nie zachodzi. Wtedy istnieje  $\varepsilon_0 > 0$  takie, że dla  $\delta_k = \frac{1}{k}$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots$ , istnieją punkty  $x_k, y_k \in A$  spełniające warunki  $|x_k - y_k| < \delta_k = 1/k$  oraz  $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon_0$ . Wybieramy dla każdego  $k$  taką parę punktów  $x_k, y_k$ . Otrzymujemy wtedy

$$0 \leq |x_k - y_k| \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0, \quad \text{ale} \quad f(x_k) - f(y_k) \not\rightarrow 0.$$

Zatem, warunek (ii) nie zachodzi, wbrew założeniu — uzyskujemy sprzeczność.  $\square$

**Przykład 5.53.** Funkcja  $f(x) = x^2$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ , nie jest jednostajnie ciągła. To wynika z ostatniego stwierdzenia, gdyż warunek (ii) nie zachodzi. Biorąc  $x_n = n$  i  $y_n = n + 1/n$  otrzymujemy  $x_n - y_n = -1/n \rightarrow 0$ , ale

$$f(y_n) - f(x_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

**Definicja 5.54 (warunek Lipschitza).** Mówimy, że funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek Lipschitza (ze stałą  $L$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich  $x, y \in A$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

**Stwierdzenie 5.55.** Jeśli  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia na  $A$  warunek Lipschitza, to  $f$  jest jednostajnie ciągła.

Dowód. Jeśli  $f$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L$ , to dla dowolnego  $\varepsilon > 0$ , biorąc  $\delta = \varepsilon/L$ , otrzymujemy:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = L \cdot (\varepsilon/L) = \varepsilon, \quad \text{gdy } |x - y| < \delta \text{ i } x, y \in A.$$

Warunek z Definicji 5.51 jest więc spełniony.  $\square$

**Przykład 5.56.** Funkcja  $\exp: A = [-M, M] \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L = \exp M$ . Istotnie, dla  $x, y \in A$ ,  $x > y$ , mamy

$$|e^x - e^y| = e^x - e^y = e^x(1 - e^{y-x}) \leq e^x \cdot (x - y) \leq e^M |x - y|.$$

Pierwsza nierówność wynika stąd, że  $1 + t \leq e^t$  dla  $t = y - x$ , tzn.  $1 - e^t \leq -t$  dla  $t = y - x$ .

Natomiast funkcja  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nie spełnia warunku Lipschitza z żadną stałą  $L > 0$ . Gdyby bowiem taki warunek spełniała, to mielibyśmy

$$|\exp(x+1) - \exp(x)| \leq L|(x+1) - x| = L$$

dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ , ale przecież

$$|\exp(x+1) - \exp(x)| = \exp(x)(e-1) \geq \exp(x) > L$$

dla wszystkich  $x > \ln L$ . Intuicja wiążąca się z tym przykładem jest prosta: na ograniczonych przedziałach wykres funkcji wykładniczej nie jest nadmiernie stromy, ale na całej prostej może być dowolnie stromy. To stanie się jaśniejsze, gdy zaczniemy mówić o pochodnej i różniczkowalności.

**Twierdzenie 5.57 (Cantora o jednostajnej ciągłości, wersja I).** Każda funkcja ciągła  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest jednostajnie ciągła na przedziale  $[a, b]$ .

Dowód. Rozumujemy przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że  $f$  jest ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła na  $[a, b]$ . Wtedy nie zachodzi warunek (ii) ze Stwierdzenia 5.52. Znajdziemy zatem dwa ciągi  $(x_k), (y_k) \subset [a, b]$  takie, że  $x_k - y_k \rightarrow 0$ , ale  $f(x_k) - f(y_k) \not\rightarrow 0$ . Wybierając w razie potrzeby odpowiedni podciąg, możemy bez zmniejszenia ogólności założyć, że dla pewnego  $\varepsilon > 0$  jest

$$|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon > 0 \quad \text{dla wszystkich } k \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że ciąg  $(y_k)$  ma podciąg zbieżny  $(y_{k_l})$ ,  $\lim y_{k_l} = y \in [a, b]$ . Mamy także

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l} = \lim_{l \rightarrow \infty} y_{k_l} + \lim_{l \rightarrow \infty} (x_{k_l} - y_{k_l}) = y + 0 = y.$$

Zatem, z ciągłości  $f$ ,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (f(x_{k_l}) - f(y_{k_l})) = \lim_{l \rightarrow \infty} f(x_{k_l} - \lim_{l \rightarrow \infty} f(y_{k_l})) = f(y) - f(y) = 0.$$

wbrew warunkowi (5.5).  $\square$

Założenie, że  $f$  rozpatrujemy na przedziale *domkniętym*, ma w twierdzeniu Cantora fundamentalne znaczenie.

**Przykład 5.58.** Funkcja  $f(x) = \cos(1/x)$ , gdzie  $x \in I = (0, 1]$ , jest ciągła na przedziale  $I$ , ale nie jest na nim jednostajnie ciągła. Jeśli np.  $x_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ ,  $y_n = 1/2n\pi$ , to

$$x_n - y_n \rightarrow 0, \quad \text{ale} \quad f(x_n) - f(y_n) = \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = -1 \not\rightarrow 0.$$

Zatem, nie zachodzi jeden z równoważnych warunków Stwierdzenia 5.52.

**Przykład 5.59.** Niech  $f(x) = 1/x$ ,  $x \in (0, 1]$ . Dla ciągów  $x_n = 1/n$  i  $y_n = x_{n+1}$  mamy oczywiście  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , ale  $f(y_n) - f(x_n) = n + 1 - n = 1 \not\rightarrow 0$ .

## 5.6 Zbiory zwarte

Czytelnik dostrzegł być może, że w twierdzeniach Weierstrassa o przyjmowaniu kresów i Cantora o jednostajnej ciągłości zakładaliśmy, że mamy do czynienia z funkcjami ciągłymi na przedziałach domkniętych. Przykłady wskazują, że w żadnym z tych twierdzeń nie można zastąpić przedziału domkniętego np. przedziałem otwartym. Istotne jest jednak nie to, że dziedzina funkcji jest akurat przedziałem, tylko to, że w obu dowodach można stosować twierdzenie Bolzano–Weierstrassa, tzn. można z ciągów punktów dziedziny funkcji wybierać podciagi zbieżne, których granice też należą do dziedziny.

W różnych działach analizy rozpatruje się ważną klasę zbiorów, którym przysługuje taka własność.

**Definicja 5.60 (zbiór zwarty).** Powiemy, że zbiór  $K \subset \mathbb{R}$  jest zwarty, jeśli z każdego ciągu  $(x_n) \subset K$  można wybrać taki podciąg zbieżny  $(x_{n_k})$ , że  $x = \lim x_{n_k} \in K$ .

**Zadanie 5.61.** Wykazać, że każdy zbiór zwarty  $K \subset \mathbb{R}$  jest ograniczony.<sup>5</sup>

**Stwierdzenie 5.62.** Jeśli  $K \subset \mathbb{R}$  jest zbiorem zwartym, a  $(x_n) \subset K$  jest ciągiem zbieżnym, to  $x = \lim x_n \in K$ .

DOWÓD. Z definicji zbioru zwartego wynika, że  $(x_n)$  ma podciąg  $(x_{n_k})$  zbieżny do elementu  $x' \in K$ . Ponieważ  $(x_n)$  jest zbieżny, więc wszystkie jego podciagi są zbieżne do tej samej granicy, co cały ciąg, tzn.  $x' = \lim x_{n_k} = \lim x_n = x$ . Zatem  $x = x' \in K$ .  $\square$

Należy zdawać sobie sprawę z tego, że klasa wszystkich zbiorów zwartych  $K \subset \mathbb{R}$  jest znacznie bogatsza niż klasa przedziałów domkniętych.

**Przykład 5.63.** a) Każdy przedział domnięty  $[a, b]$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ , jest zbiorem zwanym. To wynika z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa i stąd, że granica ciągu liczb z przedziału  $[a, b]$  też należy do  $[a, b]$ .

---

<sup>5</sup>Zadanie jest nietrudne; Czytelnik może zatrzymać się na podrozdziale 7.5 i sprawdzić, że teza zadania wynika łatwo z udowodnionego tam Lematu 7.40.

- b) Suma skończonej rodziny zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym. Istotnie, jeśli  $K_1, \dots, K_N \subset \mathbb{R}$  są zwarte i  $K = K_1 \cup \dots \cup K_N$ , to każdy ciąg  $(x_n) \subset K$  ma nieskończony podciąg zawarty w pewnym  $K_i$ , a ten podciąg ma, dzięki zwartości  $K_i$ , podciąg zbieżny do pewnego  $x \in K_i \subset K$ . Zatem np. suma skończonej rodziny przedziałów domkniętych jest zbiorem zwartym.
- c) Zbiór  $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\}$  jest zwarty. Czytelnik zechce to sprawdzić samodzielnie.
- d) Jeśli  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  jest dowolną rodziną niepustych, zwartych podzbiorów prostej  $\mathbb{R}$ , takich, że  $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ , to

$$K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset \mathbb{R}$$

też jest niepustym zbiorem zwartym. Istotnie, weźmy ciąg  $(x_n) \subset K$ . Korzystając ze zwartości zbioru  $K_1$ , wybierzmy podciąg zbieżny  $(x_{n_k})$ ,  $x_{n_k} \rightarrow x \in K_1$ .

Wykażemy, że  $x$  należy do każdego ze zbiorów  $K_j$ . Ustalmy  $j \in \mathbb{N}$ . Ponieważ  $(x_{n_k}) \subset K \subset K_j$ , a zbiór  $K_j$  jest zwarty, więc  $x = \lim x_{n_k} \in K_j$  na mocy [Twierdzenia 5.62](#). Zatem  $x \in K_j$  dla dowolnego  $j \in \mathbb{N}$ , czyli  $x \in K = \bigcap K_j$ .

Udowodnijmy jeszcze, że  $K \neq \emptyset$ . Weźmy w tym celu dowolne  $x_1 \in K_1$ ,  $x_2 \in K_2$ ,  $x_3 \in K_3$ , ... Ponieważ  $K_n \subset K_1$  dla każdego  $n$ , więc ciąg  $(x_n) \subset K_1$ . Wybierzmy podciąg zbieżny  $x_{n_k} \rightarrow x \in K_1$ . Ustalmy teraz dowolne  $j$ ; począwszy od pewnego numeru  $n_{k_0}$  wszystkie punkty  $x_{n_k}$  należą do  $K_j$ , więc w istocie  $x = \lim x_{n_k} \in K_j$  na mocy [Twierdzenia 5.62](#). Z dowolności  $j$  wynika, że  $x \in \bigcap K_j$ . Zatem  $K = \bigcap K_j \neq \emptyset$ .

- e) (**Zbiór Cantora**). Spójrzmy na jeden ze szczególnych przypadków sytuacji, opisanej w poprzednim podpunkcie. Niech

$$K_1 = [0, 1], \quad K_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \quad K_3 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \quad \dots$$

Ogólnie, niech  $K_{j+1}$  powstaje z  $K_j$  przez usunięcie środkowej części z każdego spośród  $2^{j-1}$  odcinków, tworzących  $K_j$  (usuwamy odcinki otwarte i zostawiamy domknięte). Nietrudno udowodnić przez indukcję, że  $K_j$  jest sumą  $2^{j-1}$  rozłącznych odcinków domkniętych  $I_{j,m}$ ,  $m = 1, \dots, 2^{j-1}$ . Zatem  $K_j$  jest zwarty. Zbiór Cantora to

$$K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Z poprzedniego podpunktu wynika, że  $K$  jest niepustym zbiorem zwartym. Zauważmy, że suma długości odcinków otwartych, które usuwamy w kolejnych krokach konstrukcji zbioru Cantora, jest równa

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots + 2^{j-1} \cdot \frac{1}{3^j} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Intuicyjnie, można byłoby więc uznać, że stopniowo usuwamy z odcinka  $[0, 1]$  “całą jego długość”. Jednak, co ciekawe, zbiór  $K$  jest nieprzeliczalny! Nie będziemy tego szczegółowo uzasadniać, ale zainteresowany Czytelnik zdoła bez większego trudu

stwierdzić, że każdy punkt  $x \in K$  można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z nieskończonym ciągiem liter  $L$  i  $P$ , stanowiącym ‘adres’ punktu  $x$  w zbiorze  $K$ . Ów adres powstaje następująco. Przystępując do  $j$ -tego kroku konstrukcji, mamy zbiór  $K_j = \bigcup_m I_{j,m}$ . Punkt  $x$  należy do któregoś z odcinków  $I_{j,m}$ . W  $j$ -tym kroku dzielimy  $I_{j,m}$  na trzy odcinki; dwa z nich to  $I_{j+1,k}$  i  $I_{j+1,k+1}$ , zawarte w  $K_{j+1}$ . Na  $j$ -tym miejscu adresu punktu  $x$  zapisujemy, czy  $x$  należy do lewego, czy do prawego z tych odcinków.

Inny (równoważny) sposób opisu zbioru Cantora jest następujący:

$$K = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}, \text{ gdzie } a_j \in \{0, 2\} \right\}.$$

Sprawdzenie, że określamy ten sam zbiór, co wcześniej, pozostawimy Czytelnikowi. (Proszę posłużyć się rozwinięciami trójkowymi liczb rzeczywistych i zbadać, jakie liczby są usuwane w  $j$ -tym kroku konstrukcji  $K$ , gdy usuwamy środkowe części odcinków.)

Teraz możemy sformułować dwa twierdzenia: ogólne wersje twierdzeń Weierstrassa i Cantora dla zbiorów zwartych.

**Twierdzenie 5.64 (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów, wersja ogólna).** Jeżeli

$$f: K \rightarrow \mathbb{R}$$

jest ciągła, a  $K \subset \mathbb{R}$  jest zusty i niepusty, to istnieją punkty  $x_0, x'_0 \in K$  takie, że

$$f(x_0) = \sup_K f, \quad f(x'_0) = \inf_K f.$$

**Twierdzenie 5.65 (Cantora o jednostajnej ciągłości, wersja ogólna).** Jeżeli  $K \subset \mathbb{R}$  jest zbiorem zarytym, to każda funkcja ciągła  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  jest jednostajnie ciągła na  $K$ .

Dowody obu twierdzeń są, praktycznie biorąc, takie same, jak w przypadku  $K = [a, b]$ , tylko zamiast twierdzenia Bolzano–Weierstrassa trzeba w odpowiednim miejscu skorzystać z definicji zarystości.

**Uwaga 5.66.** Zarówno definicję zbioru zarytego, jak i twierdzeniami Weierstrassa i Cantora, można posługiwać się także dla podzbiorów  $K \subset \mathbb{C}$ . Żadne istotne szczegóły w przytoczonych dowodach nie ulegają wtedy zmianie. Przykładem zbioru zarytego w  $\mathbb{C}$  jest np. każdy kwadrat z brzegiem, a także koło domnięte o środku  $z_0 \in \mathbb{C}$  i promieniu  $R > 0$ , tzn.  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ .

## 5.7 Funkcje wypukłe

Na zakończenie rozdziału o ciągłości powiemy, co to jest funkcja wypukła. Poznamy sens geometryczny tego pojęcia. Aby mówić o funkcjach wypukłych, potrzebne jest pojęcie *zbioru wypukłego*. Zbiór jest wypukły, jeśli dowolne dwa jego punkty można połączyć odcinkiem, zawartym w tym zbiorze. Zbiorami wypukłymi na prostej są wszystkie przedziały. Zbiorami wypukłymi na płaszczyźnie są np.: każdy kwadrat, każde koło, każda półplaszczyzna. Nie jest zbiorem wypukłym np. pięciokąt gwiazdisty.

**Definicja 5.67.** Niech  $P$  będzie zbiorem wypukłym. Funkcja  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  nazywa się wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich  $x, y \in P$  i dowolnej liczby  $t \in (0, 1)$  zachodzi nierówność

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y). \quad (5.6)$$

Warunek (5.6) nazywamy nierównością Jensen'a. Gdy powyższa nierówność jest ostra dla każdego  $t \in (0, 1)$  i każdej pary *różnych* punktów  $x \neq y \in P$ , to  $f$  nazywa się *ściśle wypukła*.

Zastępując (5.6) nierównością przeciwną,

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y), \quad (5.7)$$

otrzymujemy definicję funkcji wklęszej.

Ponieważ nierówności wolno dodawać stronami, zachodzi następujący oczywisty fakt.

**Stwierdzenie 5.68.** Jeśli zbiór  $P$  jest wypukły i  $f_1, \dots, f_N: P \rightarrow \mathbb{R}$  są wypukłe, to  $f = f_1 + \dots + f_N$  jest wypukła. Jeśli co najmniej jedna z funkcji  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) jest ściśle wypukła, to także  $f$  jest ściśle wypukła.  $\square$

(Rzecz jasna, analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe także dla funkcji wklęsłych.)

**Interpretacja geometryczna wypukłości.** Warunek podany w definicji funkcji wypukłej ma bardzo prosty sens geometryczny: *każdy odcinek, który łączy dwa punkty wykresu funkcji wypukłej, leży nad wykresem tej funkcji* (być może go dotyka).

Sprawdźmy, że w istocie tak jest. Niech  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  (gdzie  $I \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem) i niech  $a \neq b \in I$ . Prosta, która przechodzi przez punkty  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$ , ma równanie

$$y = l_{a,b}(x) = Ax + B,$$

gdzie

$$A = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \quad B = f(b) - Ab.$$

Ponieważ  $l_{a,b}(tx + (1 - t)y) = tl_{a,b}(x) + (1 - t)l_{a,b}(y)$  dla wszystkich  $t, x, y$ , a ponadto

$$\begin{aligned} tl_{a,b}(a) + (1 - t)l_{a,b}(b) &= tAa + (1 - t)Ab + B \\ &= tAa + (1 - t)Ab + f(b) - Ab \\ &= tA(a - b) + f(b) = tf(a) + (1 - t)f(b), \end{aligned}$$

więc warunek  $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$  oznacza tyle samo, co  $f(ta + (1 - t)b) \leq l_{a,b}(ta + (1 - t)b)$ . Innymi słowy, w dowolnym punkcie  $ta + (1 - t)b$ , gdzie  $t \in (0, 1)$ ,  $f$  ma mniejszą wartość niż funkcja liniowa  $l_{a,b}$ . Trzeba jeszcze zauważyć, że jeśli  $a < b$ , to  $ta + (1 - t)b \in (a, b)$  dla każdego  $t \in (0, 1)$  i każdy punkt przedziału  $(a, b)$  można przedstawić w takiej postaci dla pewnego  $t \in (0, 1)$ .

Podamy teraz proste przykłady funkcji wypukłych.

**Przykład 5.69.** a) Funkcja  $f(x) = x^2$  jest ściśle wypukła na  $\mathbb{R}$ . Mamy bowiem

$$\begin{aligned} tf(x) + (1 - t)f(y) &= tx^2 + (1 - t)y^2, \\ f(tx + (1 - t)y) &= t^2x^2 + 2t(1 - t)xy + (1 - t)^2y^2; \end{aligned}$$

odejmując te równości stronami i zauważając, że  $t - t^2 = (1-t) - (1-t)^2 = t(1-t)$ , otrzymujemy

$$tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) = t(1-t)(x-y)^2 \geq 0.$$

Dla  $t \in (0, 1)$  i wszystkich  $x \neq y$  ostatnia nierówność jest ostra, więc istotnie  $f(x) = x^2$  jest ściśle wypukła na całej prostej.  $\square$

- b) Funkcja  $g(x) = |x|$  jest wypukła na  $\mathbb{R}$ , ale nie jest ściśle wypukła. Wypukłość  $g$  wynika natychmiast z nierówności trójkąta dla modułu: dla dowolnych  $t \in (0, 1)$  oraz  $x, y \in \mathbb{R}$  mamy

$$g(tx + (1-t)y) = |tx + (1-t)y| \leq |tx| + |(1-t)y| = tg(x) + (1-t)g(y).$$

Nietrudno zauważyc, że powyższa nierówność staje się równością np. dla  $t = \frac{1}{2}$  i dla wszystkich  $x, y > 0$ , więc  $g$  nie jest ściśle wypukła.  $\square$

- c) Dla każdego  $a \in \mathbb{R}$  funkcja  $g(x) = |x - a|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , jest wypukła. Ze Stwierdzenia 5.68 wynika więc, że dla dowolnego doboru stałych  $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$  funkcja

$$h(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_N|, \quad x \in \mathbb{R},$$

jest wypukła.

Oczywiście, badanie za każdym razem wypukłości wprost z definicji byłoby rzeczą kłopotliwą. Niedługo nauczymy się, jak (w pewnych przypadkach) badać wypukłość za pomocą pochodnych. Teraz podamy proste twierdzenie.

**Twierdzenie 5.70 (kryterium wypukłości funkcji ciągłych).** *Jeśli  $P \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem i funkcja ciągła  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek*

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} \quad \text{dla wszystkich } x, y \in P, \quad (5.8)$$

*to  $f$  jest wypukła. Ponadto, jeśli nierówność (5.8) jest ostra dla wszystkich  $x \neq y \in P$ , to  $f$  jest ściśle wypukła.*

**Dowód. Krok 1.** Wykażemy przez indukcję względem  $n$  następujący fakt: jeśli  $t = k/2^n$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$  i  $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n$ , to

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in P. \quad (5.9)$$

(Intuicja jest prosta: wiemy, że wartość  $f$  w środku odcinka nie przekracza średniej wartości  $f$  na końcach odcinka; stosujemy ten fakt wielokrotnie, znajdując kolejne punkty wykresu położone poniżej odcinka siecznej. Proszę pomyśleć o geometrycznej interpretacji tego warunku.)

Dla  $n = 1$  podany warunek to po prostu założenie twierdzenia (uzupełnione tautologiami dla  $k = 0, 2$ ). To jest baza indukcji. Założymy, że podany fakt zachodzi dla pewnej liczby  $n \in \mathbb{N}$ . Niech  $t = k/2^{n+1}$ , gdzie  $k = 1, \dots, 2^{n+1} - 1$ . Wtedy  $1-t = l/2^{n+1}$  dla

$l = 2^{n+1} - k$ . Jedna z liczb  $k, l$  jest nie większa niż  $\frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} = 2^n$ . Z uwagi na symetrię oznaczeń, możemy założyć, że  $k \leq 2^n$ . Zatem,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \frac{l}{2^{n+1}}y\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + \frac{l - 2^n + k}{2^{n+1}}y\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + \frac{1}{2}y\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{k}{2^n}x + \frac{2^n - k}{2^n}y\right) + \frac{1}{2}f(y) \quad \text{z założenia} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}f(x) + \frac{2^n - k}{2^n}f(y)\right) + \frac{1}{2}f(y) \quad \text{dzięki (5.9) dla liczby } n \\ &= tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

To kończy dowód indukcyjny. Zauważmy jeszcze, że jeśli  $f$  jest ściśle wypukła, to w (5.9) otrzymujemy ostrą nierówność dla  $x \neq y$  i  $t = k/2^n$ , gdzie  $0 < k < 2^n$ .

*Krok 2.* Jeśli  $t \in (0, 1)$ , to  $t = \lim t_n$  dla pewnego ciągu ułamków  $t_n = k_n/2^n$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$  i  $0 < k_n < 2^n$ . Korzystając z pierwszego kroku dowodu i przechodząc do granicy  $n \rightarrow \infty$  otrzymujemy, dzięki ciągłości  $f$ ,

$$f(tx + (1-t)y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n x + (1-t_n)y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n f(x) + (1-t_n)f(y)) = tf(x) + (1-t)f(y).$$

Zatem  $f$  jest wypukła.

*Krok 3.* Trzeba jeszcze sprawdzić, że jeśli nierówność (5.8) jest ostra dla  $x \neq y$ , to  $f$  jest ściśle wypukła. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy dla pewnego  $t \in (0, 1)$  i pewnych punktów  $x < y \in P$  jest

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y). \quad (5.10)$$

Niech  $r$  będzie dowolną liczbą taką, że  $0 < r < t$ . Oznaczmy

$$z = tx + (1-t)y, \quad w = rx + (1-r)y.$$

Wtedy  $x < z < w < y$  (proszę sprawdzić środkową nierówność samodzielnie!) i dla pewnego  $\lambda \in (0, 1)$  jest  $z = \lambda x + (1-\lambda)w$ . Liczba  $\lambda$  spełnia warunek

$$\lambda + (1-\lambda)r = t.$$

Korzystając z (5.10) i dwukrotnie stosując definicję wypukłości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} tf(x) + (1-t)f(y) &= f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)w) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(w) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)(rf(x) + (1-r)f(y)) \\ &= tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

Zatem, wszystkie nierówności w powyższym ciągu napisów są równościami, a stąd

$$f(w) = f(rx + (1-r)y) = rf(x) + (1-r)f(y) \quad \text{dla każdego } r \in (0, t).$$

Jednak w pierwszym kroku dowodu stwierdziliśmy, że jeśli  $f$  spełnia ostrą wersję założenia (5.8), to dla każdego  $r = k/2^n$ , gdzie  $0 < k < 2^n$ , takie nierówności powinny być ostre. Dobierając  $r = k/2^n \in (0, t)$ , uzyskujemy sprzeczność, która kończy cały dowód.  $\square$

Podkreślmy: ścisły zapis całego dowodu jest dość długi, jednak wiążąca się z powyższym twierdzeniem intuicja jest bardzo prosta. W końcu dowodu sprawdzaliśmy w istocie następujący fakt geometryczny: jeśli odcinek  $I$  ma oba końce na wykresie funkcji wypukłej  $f$ , a ponadto trzeci, różny od końców, punkt  $I$  też należy do wykresu  $f$ , to cały odcinek  $I$  jest zawarty w wykresie  $f$ .

Spójrzmy na zastosowania tego twierdzenia.

**Przykład 5.71.** a) Funkcja  $f(x) = \exp x$  jest ściśle wypukła na  $\mathbb{R}$ . Istotnie, ostra nierówność

$$L = \exp((x+y)/2) < \frac{\exp x + \exp y}{2} = P$$

zachodzi dla  $x \neq y$ . Aby się o tym przekonać, kładziemy  $t = \exp(x/2)$  i  $s = \exp(y/2)$ . Wtedy  $t \neq s$ , gdy  $x \neq y$ , i nietrudno zauważyc, że  $L = ts$ , a  $P = (t^2 + s^2)/2$ , zatem nierówność  $L < P$  jest równoważna innej,  $(t-s)^2/2 > 0$  dla  $t \neq s$ .  $\square$

b) Funkcja  $g(x) = \ln x$  jest ściśle wklęsła na  $(0, \infty)$ . Istotnie, dla  $x \neq y > 0$  mamy  $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$ , a stąd, dzięki monotoniczności logarytmu naturalnego,

$$\ln \frac{x+y}{2} > \ln \sqrt{xy} = \frac{1}{2} \ln xy = \frac{\ln x + \ln y}{2}.$$

Dzięki wiedzy o wypukłości rozmaitych funkcji można wykazać szereg konkretnych nierówności. Podamy tu dwie z nich.

**Lemat 5.72 (Nierówność Younga).** *Jeśli  $p, q > 1$  i  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , to dla wszystkich  $x, y \geq 0$  jest*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

**Dowód.** Jeśli  $xy = 0$ , to nierówność jest oczywista. Niech więc  $x, y > 0$ . Skorzystamy z wklęsłości logarytmu naturalnego. Oznaczmy  $t = 1/p \in (0, 1)$ ; wtedy  $1-t = 1/q$ . Położmy  $x^p = z$ ,  $y^q = w$ . Przy tych oznaczeniach, mamy

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) &= \ln(tz + (1-t)w) \\ &\geq t \ln(z) + (1-t) \ln w \\ &= pt \ln x + (1-t)q \ln y = \ln x + \ln y = \ln(xy). \end{aligned}$$

Logarytm naturalny jest funkcją rosnącą, więc wynika stąd teza lematu.  $\square$

**Twierdzenie 5.73 (nierówność Höldera).** *Jeśli  $p, q > 1$  i  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , to dla dowolnych liczb nieujemnych  $x_1, \dots, x_n$  oraz  $y_1, \dots, y_n$  jest*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}. \quad (5.11)$$

**Uwaga:** dla  $p = q = 2$  nierówność Höldera nazywa się nierównością Schwarza i wyraża następujący fakt geometryczny: iloczyn skalarny wektorów  $x, y \in \mathbb{R}^n$  nie przekracza iloczynu długości tych wektorów.

Dowód. Niech

$$S_x := \sum_{i=1}^n x_i^p, \quad S_y := \sum_{i=1}^n y_i^q.$$

*Krok 1.* Założymy na początek, że  $S_x = S_y = 1$ . Z nierówności Younga,  $x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q$ . Sumując takie nierówności dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{p} S_x + \frac{1}{q} S_y = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = (S_x)^{1/p} (S_y)^{1/q},$$

czyli nierówność Höldera w przypadku  $S_x = S_y = 1$ .

*Krok 2.* Jeśli  $S_x = 0$  lub  $S_y = 0$ , to wszystkie  $x_i$  lub wszystkie  $y_i$  znikają, zaś nierówność Höldera przybiera banalną postać  $0 \leq 0$ .

*Krok 3 (przypadek ogólny).* Niech  $S_x > 0, S_y > 0$ . Położymy

$$a_i = \frac{x_i}{(S_x)^{1/p}}, \quad b_i = \frac{y_i}{(S_y)^{1/q}}.$$

Wtedy

$$S_a := \sum_{i=1}^n a_i^p = 1, \quad S_b := \sum_{i=1}^n b_i^q = 1.$$

Stosując nierówność uzyskaną w pierwszym kroku dowodu do liczb  $a_i, b_i$ , otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1,$$

a po pomnożeniu obu stron przez iloczyn  $(S_x)^{1/p} \cdot (S_y)^{1/q}$  — tezę twierdzenia.  $\square$

**Stwierdzenie 5.74 (nierówność Jensen'a).** Założmy, że  $P$  jest zbiorem wypukłym i  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła. Jeśli  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in P$ , a  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$  i  $\sum t_i = 1$ , to wówczas

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Dowód. Indukcja względem  $n$ . Dla  $n = 2$  nierówność podana w tezie wynika wprost z definicji wypukłości. Założymy, że nierówność Jensen'a zachodzi dla liczby  $n$  i dowolnych punktów  $x_1, \dots, x_n \in P$  oraz wag  $t_1, t_2, \dots, t_n$  o sumie równej 1. Niech  $y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in P$  i niech  $s_i \geq 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $s_1 + s_2 + \dots + s_{n+1} = 1$ . Bez zmniejszenia ogólności założymy, że  $s_{n+1} > 0$ . Wtedy

$$\begin{aligned} & f(s_1 y_1 + \dots + s_n y_n + s_{n+1} y_{n+1}) \\ &= f\left(s_1 y_1 + \dots + s_{n-1} y_{n-1} + (s_n + s_{n+1}) \left(\frac{s_n}{s_n + s_{n+1}} y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}} y_{n+1}\right)\right) \\ &\leq s_1 f(y_1) + \dots + s_{n-1} f(y_{n-1}) + (s_n + s_{n+1}) f\left(\frac{s_n}{s_n + s_{n+1}} y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}} y_{n+1}\right), \end{aligned}$$

na mocy założenia indukcyjnego zastosowanego do  $t_i = s_i$ ,  $x_i = y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) oraz  $t_n = s_n + s_{n+1}$  i  $x_n = \frac{s_n}{s_n + s_{n+1}}y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}}y_{n+1}$  (proszę sprawdzić, że  $\sum t_i = 1$ ). Szacując teraz ostatni składnik wprost z definicji wypukłości,

$$f\left(\frac{s_n}{s_n + s_{n+1}}y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}}y_{n+1}\right) \leq \frac{s_n}{s_n + s_{n+1}}f(y_n) + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}}f(y_{n+1}),$$

kończymy dowód.  $\square$

**Uwaga terminologiczna.** Liczby nieujemne  $t_i$  o sumie równej 1 będziemy nazywać *wagami*. Sumę

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i$$

nazywamy średnią ważoną (albo inaczej: kombinacją wypukłą)  $x_i$ , z wagami  $t_i$ .

**Przykład 5.75.** Wypisując nierówność Jensaena dla funkcji wypukłej  $f(x) = -\ln x$  z równymi wagami  $t_i = \frac{1}{n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) dla dodatnich  $x_i$ , otrzymujemy nierówność między średnimi arytmetyczną i geometryczną:

$$-\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-\ln x_i) = -\ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Funkcja  $(-\ln)$  jest malejąca, a zatem

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Podamy teraz charakteryzację funkcji wypukłych w języku tzw. ilorazów różnicowych. Posłużymy się nią w Rozdziale 6, podając różne dostateczne warunki wypukłości.

**Twierdzenie 5.76.** Niech  $P \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem i niech  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ . Następujące warunki są równoważne:

(i)  $f$  jest wypukła;

(ii) dla wszystkich  $x < y < z$  należących do  $P$  zachodzą nierówności

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x};$$

(iii) dla wszystkich  $x < y < z$  należących do  $P$  zachodzą nierówności

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y};$$

(iv) dla wszystkich  $x < y < z$  należących do  $P$  zachodzą nierówności

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Jeśli  $f$  jest ściśle wypukła, to w każdym z punktów twierdzenia nierówności są ostre, i na odwrót.

Czytelnik zechce wykonać rysunek i zinterpretować twierdzenie w języku geometrii.

**Szkic dowodu.** Wykażemy równoważność dwóch pierwszych warunków; dowody (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) oraz (i)  $\Leftrightarrow$  (iv) są identyczne i nie będziemy ich wypisywać.

Ustalmy  $x, z \in P$ . Wtedy każdy punkt  $y \in (x, z)$  można zapisać jako

$$y = \frac{z-y}{z-x} \cdot x + \frac{y-x}{z-x} \cdot z = tx + (1-t)z, \quad \text{gdzie } t := \frac{z-y}{z-x} \in (0, 1).$$

(Na odwrót, dla każdej liczby  $t \in (0, 1)$  prawa strona powyższego wzoru wyznacza pewien punkt  $y \in (x, z)$ .) Dodając do obu stron nierówności (ii)  $f(x)/(y-x)$  i mnożąc obie strony przez  $y-x$ , otrzymujemy równoważną nierówność

$$f(tx + (1-t)z) = f(y) \leq \left(1 - \frac{y-x}{z-x}\right) \cdot f(x) + \frac{y-x}{z-x} \cdot f(z) = tf(x) + (1-t)f(z).$$

Zatem, warunek (ii) jest równoważny wypukłości  $f$ .  $\square$

**Twierdzenie 5.77.** Niech  $P \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym. Wtedy każda funkcja wypukła  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła.

**Szkic dowodu.** Wykażemy, że

$$\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = f(x) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y). \quad (5.12)$$

Udowodnimy tylko pierwszą z tych równości. Dowód drugiej jest w pełni analogiczny.

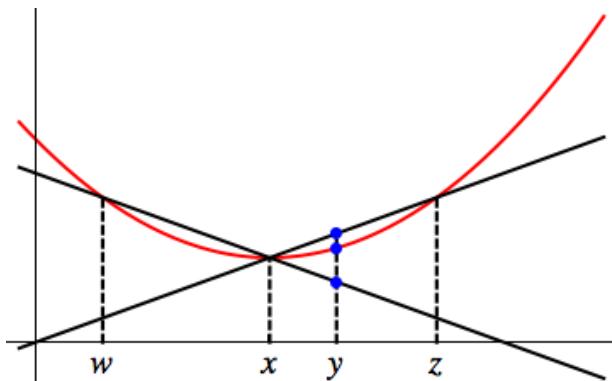
Ustalmy  $x \in P$  oraz dwa inne<sup>6</sup> punkty  $z, w \in P$  takie, że  $w < x < z$ . Niech  $y \in (x, z)$ . Wtedy

$$y = tx + (1-t)z, \quad x = sw + (1-s)y,$$

gdzie  $t = t(y) = (z-y)/(z-x)$  i  $s = s(y) = (y-x)/(y-w)$ . Wyznaczając z nierówności

$$f(x) \leq sf(w) + (1-s)f(y)$$

wartość  $f(y)$ , otrzymujemy (patrz też rysunek) z wypukłości  $f$  dwie nierówności,



**Ciągłość funkcji wypukłej.** Nierówność (5.13) wyraża fakt, że fragment wykresu  $f$  na przedziale  $[x, z]$  zawiera się między dwiema siecznymi. Dlatego granica prawostronna  $f$  w punkcie  $x$  istnieje. Tak samo dowodzimy istnienia granicy lewostronnej.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - s(y)f(w)}{1 - s(y)} &\leq f(y) \\ &\leq t(y) \cdot f(x) + (1 - t(y))f(z). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Przechodząc do granicy  $y \rightarrow x^+$  i stosując twierdzenie o trzech funkcjach, otrzymujemy tezę, tzn. lewą z równości (5.12), gdyż  $t(y) \rightarrow 1$  i  $s(y) \rightarrow 0$  dla  $y \rightarrow x$ .  $\square$

**Uwaga 5.78.** Założenie otwartości przedziału  $P$  jest istotne. Nietrudno sprawdzić, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ 2011, & x = 1 \end{cases}$$

jest wypukła i nieciągła w punkcie  $x = 1$ .

<sup>6</sup>Uwaga: z otwartością przedziału  $P$  korzystamy właśnie tu!

# Dodatki do rozdziału 5

## 5.A Zasadnicze twierdzenie algebry

Bardzo ważnym twierdzeniem, wykorzystywanyem w różnych działyach matematyki, jest następujący wynik.

**Twierdzenie 5.79 (zasadnicze twierdzenie algebry).** *Każdy różny od stałej wielomian zmiennej zespolonej o współczynnikach zespolonych ma w ciele  $\mathbb{C}$  co najmniej jeden pierwiastek.*

Podamy tu — opowiedziany we współczesnym języku — dowód tego twierdzenia, wykorzystujący własności funkcji ciągły i podany przez C.F. Gaussa na przełomie XVIII i XIX wieku. Dowód wykorzystuje dwa lematy. Pierwszy z nich orzeką, że każdy wielomian zespolony osiąga kres dolny swojego modułu. To nie jest fakt całkowicie oczywisty, gdyż płaszczyzna  $\mathbb{C}$  nie jest zbiorem zwartym.

**Lemat 5.80.** *Jeśli  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  dla  $z \in \mathbb{C}$ , gdzie  $n \geq 1$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  i  $a_n \neq 0$ , to istnieje punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  taki, że*

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$$

Dowód LEMATU 5.80. Bez zmniejszenia ogólności, mnożąc w razie potrzeby wielomian przez stałą, przyjmiemy, że  $a_n = 1$ . Niech  $R > 1$  będzie dużą liczbą, której konkretną wartość dobierzemy za chwilę. Niech  $M = 1 + n \max_{j=0, \dots, n-1} |a_j|$ . Dla wszystkich  $|z| \geq R$  otrzymujemy po prostym rachunku, korzystając z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |z|^n \left( 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \\ &\geq |z|^n \left( 1 - \frac{|a_{n-1}| + \dots + |a_0|}{R} \right) \quad \text{gdyż } |z|^n > |z|^{n-1} > \dots > |z| \geq R > 1 \\ &> R^n \left( 1 - \frac{M}{R} \right) \quad \text{gdyż } |z| \geq R \text{ i } M > |a_{n-1}| + \dots + |a_0| \\ &> \frac{R^n}{2} > |a_0| + 1 = |P(0)| + 1, \end{aligned}$$

pod warunkiem, że liczba  $R > 1$  została wybrana tak, aby

$$\frac{M}{R} < \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad R > \sqrt[n]{2(|a_0| + 1)},$$

co łatwo można zagwarantować. Zatem, poza kołem domkniętym  $K_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R\}$  funkcja  $|P|$  przyjmuje wartości większe od liczby  $|P(0)| + 1$ . Ponieważ  $0 \in K_R$ , więc

$$\inf_{z \in K_R} |P(z)| \leq |P(0)| < |P(0)| + 1 \leq \inf_{z \in \mathbb{C} \setminus K_R} |P(z)|$$

i dlatego

$$\inf_{z \in K_R} |P(z)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

Koło domknięte  $K_R$  jest zbiorem zwartym, a  $|P|: K_R \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą. Z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów (patrz Twierdzenie 5.64 i Uwaga 5.66) wynika, że istnieje taki punkt  $z_0 \in K_R$ , iż

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in K_R} |P(z)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|. \quad \square$$

**Lemat 5.81.** *Jeśli  $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$  dla  $z \in \mathbb{C}$ , gdzie  $n \geq 1$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  i  $a_n \neq 0$ , a  $z_0 \in \mathbb{C}$  jest punktem takim, że*

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|,$$

to wówczas  $P(z_0) = 0$ .

Dowód LEMATU 5.81. Dla wielomianów stopnia 1 lemat jest oczywisty: każdy taki wielomian ma pierwiastek  $z_0$  i w nim osiąga kres dolny swojego modułu.

Niech więc  $P$  będzie wielomianem zespolonym stopnia  $n > 1$ . Przypuśćmy, że

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| > 0$$

Rozpatrzmy wielomian pomocniczy  $Q(z) = P(z + z_0) \cdot \overline{P(z_0)}$  (przesuwamy wielomian  $P$  i mnożymy go przez stałą). Mamy  $Q(0) = P(z_0) \cdot \overline{P(z_0)} = |P(z_0)|^2 > 0$ , więc  $Q$  spełnia zależność

$$|Q(0)| = Q(0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| > 0. \quad (5.14)$$

Wyróżnijmy teraz najniższą dodatnią potęgę  $z$ , która w  $Q$  występuje ze współczynnikiem różnym od zera, tzn. wybierzmy  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tak, aby

$$Q(z) = b_0 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n = b_0 + b_k z^k + z^k q(z),$$

gdzie  $b_0 = Q(0) > 0$  i  $q(z) = b_{k+1} z + b_{k+2} z^2 + \cdots + b_n z^{n-k}$ . Gdy  $k = n$ , to po prostu  $q(z) = 0$ .

Oszacujemy  $|Q(z)|$ , starając się wskazać punkt  $z$  tak, aby otrzymać  $|Q(z)| < |Q(0)| = Q(0) = b_0$  i uzyskać sprzeczność, która zakończy dowód. Na mocy nierówności trójkąta

$$|Q(z)| \leq |b_0 + b_k z^k| + |z|^k |q(z)|.$$

Niech  $z = re^{it}$ , gdzie  $r = |z| > 0$  i  $t = \arg z \in \mathbb{R}$ . Ustalmy małą liczbę  $\varepsilon > 0$ , której wartość dobierzemy później.

Ponieważ  $q$  jest (jak każdy wielomian) funkcją ciągłą i  $q(0) = 0$ , więc istnieje  $\delta > 0$  takie, że dla wszystkich  $|z| = r \in (0, \delta)$  jest  $|q(z)| < \varepsilon$ . Wtedy

$$|Q(z)| < |b_0 + b_k z^k| + r^k \varepsilon.$$

Argument  $t$  liczby  $z$  wybierzymy tak, aby  $b_k z^k = b_k r^k \exp(itk)$  było liczbą rzeczywistą ujemną. Zapiszmy  $b_k$  w postaci  $b_k = |b_k| \exp(is)$ , gdzie  $s = \arg b_k$ . Wtedy

$$b_k z^k = |b_k| \exp(is) \cdot r^k \exp(itk) = |b_k| r^k \exp(i(s + tk)) = -|b_k| r^k < 0$$

np. dla  $s + tk = \pi$ , tzn. dla

$$t = \frac{\pi - s}{k} = \frac{\pi - \arg b_k}{k}.$$

Zatem, dla  $z = re^{it}$ , gdzie  $r \in (0, \delta)$  i  $t = \frac{\pi - \arg b_k}{k}$ , jest

$$\begin{aligned} |Q(z)| &< |b_0 - |b_k|r^k| + r^k\varepsilon \\ &= b_0 - |b_k|r^k + r^k\varepsilon \quad \text{gdy } r < \delta_1 := \min\left(\frac{b_0}{\sqrt[k]{|b_k|}}, \delta\right) \\ &= b_0 - \frac{|b_k|}{2}r^k \quad \text{gdy } r < \delta_1 \text{ oraz } \varepsilon = \frac{|b_k|}{2} \\ &< b_0 = Q(0) = |Q(0)|. \end{aligned}$$

To jest sprzeczność, gdyż  $|Q(0)| = \inf |Q|$ . Musi więc być  $Q(0) = |P(z_0)|^2 = 0$ .  $\square$

Czytelnik–koneser zauważał, że w ostatnim dowodzie posługiwały się w gruncie rzeczy rozwinięciem Taylora–Maclaurina wielomianu  $Q$  w zerze, wyodrębniawszy zeń najważniejszy składnik  $b_k z^k$ . Wielomian  $q(z)$  to wynik dzielenia reszty przez  $z^k$ .

**DOWÓD ZASADNICZEGO TWIERDZENIA ALGEBRY.** Niech  $P$  będzie różnym od stałej wielomianem zespolonym. Na mocy Lematu 5.80, istnieje  $z_0 \in \mathbb{C}$  takie, że

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

Z Lematu 5.81 wynika, że  $P(z_0) = 0$ .  $\square$

**Definicja 5.82.** Niech  $k \in \mathbb{N}$ . Liczba  $z_0$  nazywa się  $k$ -krotnym pierwiastkiem wielomianu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $P$  jest podzielny przez jednomian  $(z - z_0)^k$ , ale nie jest podzielny przez  $(z - z_0)^{k+1}$ .

**Wniosek 5.83 (rozkład wielomianu zespolonego na czynniki liniowe).** Jeśli  $P$  jest wielomianem zespolonym stopnia  $n \geq 1$ ,  $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ,  $a_n \neq 0$ , to istnieją liczby  $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$  takie, że  $z_j$  jest  $k_j$ -krotnym pierwiastkiem  $P$  dla  $j = 1, \dots, m$  oraz

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Zachodzi równość

$$P(z) = a_n \cdot \prod_{j=1}^m (z - z_j)^{k_j}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Dowód.** Dla  $n = 1$  teza wniosku jest oczywista. Dla  $n > 1$  tezy dowodzimy przez indukcję, posługując się zasadniczym twierdzeniem algebry.  $\square$

**Wniosek 5.84 (rozkład wielomianu rzeczywistego na czynniki).** Jeżeli  $P$  jest wielomianem rzeczywistym stopnia  $n \geq 1$ ,  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  (gdzie  $a_j \in \mathbb{R}$  dla  $j = 0, 1, \dots, n$  i  $a_n \neq 0$ ), to  $P$  jest iloczynem czynników liniowych i takich trójmianów kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych, które nie mają pierwiastków rzeczywistych. Niektóre z tych czynników mogą być równe.

Dowód. Na mocy poprzedniego wniosku,

$$P(x) = a_n \cdot \prod_{j=1}^m (x - z_j)^{k_j}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

gdzie  $z_j$  są zespolonymi pierwiastkami wielomianu  $P$ . Ponieważ wszystkie współczynniki wielomianu są rzeczywiste, więc mamy także

$$P(x) = \overline{P(\bar{x})} = a_n \cdot \prod_{j=1}^m (x - \bar{z}_j)^{k_j}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zatem: jeśli  $z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  jest pierwiastkiem  $P$ , to i  $\bar{z}_j$  jest pierwiastkiem  $P$ . Ponieważ

$$(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = x^2 - 2\operatorname{Re} z_j \cdot x + |z_j|^2$$

jest trójmianem kwadratowym o współczynnikach rzeczywistych, którego nie można w  $\mathbb{R}$  rozłożyć na czynniki liniowe (bo pierwiastki są w  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ !), więc łącząc w pary odpowiednie czynniki prawej strony (5.15), rozłożymy  $P$  na pewną liczbę czynników liniowych (odpowiadających rzeczywistym pierwiastkom  $P$ , liczonym z krotnościami) i pewną liczbę czynników kwadratowych (odpowiadającym parom pierwiastków  $z_j, \bar{z}_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  wielomianu  $P$ , również liczonym z krotnościami). Żaden czynnik kwadratowy nie ma pierwiastków w  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Zadanie 5.85.** Wykazać, że  $x_0 \in \mathbb{R}$  jest  $k$ -krotnym pierwiastkiem wielomianu  $P$  o współczynnikach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(x_0) = P'(x_0) = \dots = P^{(k-1)}(x_0), \quad P^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

**Wskazówka.** Posłużyć się definicją, twierdzeniem Bezout (znanym ze szkolnego kursu matematyki) i wzorem Leibniza na wyższe pochodne iloczynu dwóch funkcji.

**Zadanie 5.86.** Niech

$$Q(z_1, \dots, z_m) = \sum_{\text{skończ.}} a_{k_1 k_2 \dots k_m} z^{k_1} \cdot z^{k_2} \cdot \dots \cdot z^{k_m}$$

będzie różnym od stałej wielomianem  $m > 1$  zmiennych zespolonych o współczynnikach  $a_{k_1 k_2 \dots k_m} \in \mathbb{C}$ . Wykazać, że  $Q$  ma co najmniej jeden pierwiastek. Czy zbiór pierwiastków takiego wielomianu może być skończony?

## Rozdział 6

# Rachunek różniczkowy

Bardzo ważnym działem Analizy Matematycznej jest rachunek różniczkowy. Poznając go, opanujemy narzędzia, umożliwiające systematyczne badanie zachowania odpowiednio regularnych funkcji jednej zmiennej. Nauczymy się, jak określić tempo wzrostu funkcji i jak znajdować przedziały, na których funkcja rośnie (lub maleje), jest wypukła (lub wklęsła). Poznamy także dodatkowe wygodne narzędzia, służące do przybliżania funkcji za pomocą wielomianów i obliczania granic.

### 6.1 Pojęcie pochodnej

Pojęcie pochodnej, obok pojęcia granicy, jest jednym z najważniejszych pojęć całej analizy.

**Definicja 6.1.** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  i niech  $a \in A$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$ . Powiemy, że funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \quad (6.1)$$

Liczbę  $f'(a)$  nazywamy pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $a$ . Stosunek  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  nazywamy ilorazem różnicowym funkcji  $f$ .

W różnych źródłach można także spotkać oznaczenia

$$f'(a) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}, \quad f'(a) = \frac{df}{dx}(a),$$

którymi będziemy się posługiwać rzadko.

**Uwaga 6.2.** Wzoru (6.1) można użyć, by zdefiniować (w taki sam sposób):

- Pochodną funkcji zespolonej  $f: \mathbb{C} \supset A \rightarrow \mathbb{C}$  w punkcie skupienia  $a \in A$  zbioru  $A$ ;  $f'(a)$  (o ile istnieje) jest wtedy liczbą zespoloną.
- Pochodną funkcji wektorowej  $f: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{K}^N$  w punkcie skupienia  $a \in A$  zbioru  $A$ , gdzie  $\mathbb{K}$  jest ciałem  $\mathbb{R}$  liczb rzeczywistych lub ciałem  $\mathbb{C}$  liczb zespolonych;  $f'(a)$  (o ile istnieje) jest wtedy pewnym wektorem z przestrzeni  $\mathbb{K}^N$ .

W obu powyższych przypadkach ma sens dzielenie przez  $x - a$ , czyli mnożenie przez  $(x - a)^{-1}$ . Czytelnik powinien jednak rozumieć, że takie postępowanie straciłoby sens, gdybyśmy rozpatrywali funkcje wielu zmiennych rzeczywistych (lub zespolonych). Wtedy pojęcie pochodnej trzeba definiować inaczej. Wróćmy do tej sprawy na początek drugiego roku studiów.

### 6.1.1 Związek różniczkowalności z ciągłością

Różniczkowalność, zarówno w dziedzinie rzeczywistej, jak i zespolonej, jest warunkiem silniejszym od ciągłości.

**Stwierdzenie 6.3.** *Jeśli funkcja  $f: \mathbb{K} \supset A \rightarrow \mathbb{K}$  (gdzie  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  lub  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) jest różniczkowalna w punkcie  $a \in A$ , to jest ciągła w punkcie  $a$ .*

Dowód. Piszemy

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

i przechodzimy do granicy przy  $x \rightarrow a$ , korzystając z twierdzenia o granicy iloczynu. Ponieważ  $f$  jest różniczkowalna w  $a$ , otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = f'(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Zatem  $f$  jest ciągła w punkcie  $a$ .  $\square$

Nie wszystkie funkcje ciągłe są jednak różniczkowalne.

**Przykład 6.4.** Funkcja  $f(x) = |x|$  dla  $x \in \mathbb{R}$  nie jest różniczkowalna w punkcie  $a = 0$ . Istotnie, granica we wzorze (6.1) nie istnieje dla  $a = 0$ , gdyż różne są wtedy granice jednostronne ilorazów różnicowych:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}.$$

**Zadanie 6.5.** Niech  $f(z) = \bar{z}$  dla  $z \in \mathbb{C}$ . Wykazać, że jeśli pochodną zespoloną definiujemy tak, jak w Uwadze 6.2 (a), to  $f$  nie ma pochodnej zespolonej w żadnym punkcie  $a \in \mathbb{C}$ .

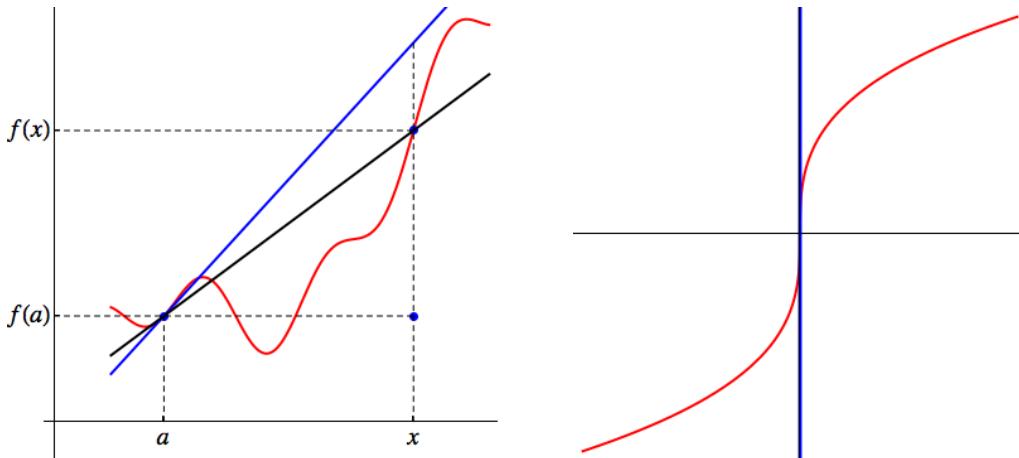
**Wskazówka.** Zbadać ilorazy różnicowe  $f$  dla ciągu przyrostów  $h_n = i^n/n$ , gdzie  $i^2 = -1$ .

Istnieją także funkcje ciągłe  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które nie mają pochodnej w żadnym punkcie. Konstrukcja przykładów takich funkcji jest jednak trudniejsza i wymaga albo bardziej zaawansowanej wiedzy matematycznej (np. z zakresu topologii), albo subtelnej analizy funkcji, określonych za pomocą szeregów. Tą sprawą zajmiemy się przy okazji omawiania tzw. zbieżności jednostajnej w następnym rozdziale.

### 6.1.2 Interpretacja pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej

**Interpretacja geometryczna pochodnej.** Niech  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna w punkcie  $a \in I$  i niech  $I$  będzie przedziałem. Rozważmy wykres  $f$ , tzn. zbiór punktów

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\}.$$



Po lewej: styczna do wykresu funkcji. Po prawej: przypadek, gdy granica ilorazów różnicowych jest nieskończona. Nie mówimy wtedy, że funkcja jest różniczkowalna, ale styczna do wykresu istnieje i jest prostą pionową.

Iloraz różnicowy  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  jest tangensem kąta nachylenia siecznej, przechodzącej przez punkty  $(a, f(a))$  i  $(x, f(x))$ , do osi  $x$ -ów. Intuicja podpowiada, że gdy funkcja  $f$  jest odpowiednio “porządną”, to dla  $x$  bliskich  $a$  taka sieczna powinna być przybliżeniem stycznej do wykresu funkcji. Istnienie pochodnej w punkcie  $a$ , a więc granicy ilorazów różnicowych, oznacza *istnienie stycznej do wykresu  $f$  w punkcie  $(a, f(a))$* . Liczba  $f'(a)$  jest współczynnikiem kierunkowym tej stycznej. Styczna to prosta, opisana równaniem

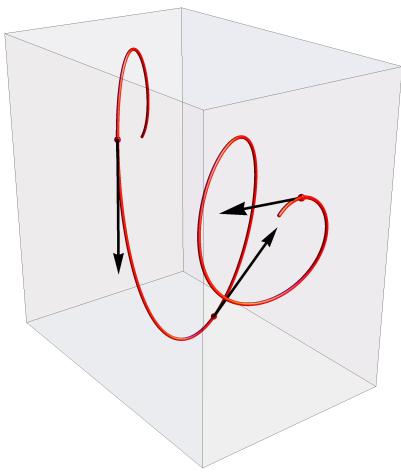
$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

**Uwaga 6.6 (pochodne nieskończone).** Definiując pochodną, wpisaliśmy w definicję warunek skończości granicy ilorazów różnicowych. Może się zdarzyć, że ilorazy różnicowe mają w jakimś punkcie granicę nieskończoną. Jest tak np. dla funkcji  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ , w punkcie  $x = 0$ , gdyż

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

Zgodnie z naszą definicją, funkcja  $f$  nie jest różniczkowalna w zerze, bo nie ma tam skończonej granicy ilorazów różnicowych. Mówiąc czasem w takich przypadkach, że  $f$  ma pochodną nieskończoną (dla odróżnienia tej sytuacji od takiej, gdy granica ilorazów różnicowych w ogóle nie istnieje). Geometryczna interpretacja tego, że granica ilorazów różnicowych jest w jakimś punkcie dziedziny funkcji nieskończona, jest nietrudna: styczna do wykresu  $f$  istnieje i jest pionowa.

**Interpretacja kinematyczna pochodnej.** Założymy, że pewien punkt porusza się w sposób ciągły, tzn. dla każdej chwili czasu  $t \geq 0$  określona jest droga  $s(t) \in [0, \infty)$ , przebyta od chwili początkowej  $t_0 = 0$  do chwili  $t$ , i  $s(t)$  jest ciągłą funkcją  $t$ . Różniczkowalność funkcji  $s$  w punkcie  $t_1$ , tzn. istnienie granicy ilorazów różnicowych  $(s(t_2) - s(t_1))/(t_2 - t_1)$  dla  $t_2 \rightarrow t_1$ , oznacza, że w tym ruchu można określić *prędkość chwilową*, tzn. granicę stosunku przebytej drogi do czasu, w jakim została przebyta, gdy ów czas dąży do zera.



Mówiąc nieco dokładniej, gdy funkcja

$$s: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

jest torem ruchu punktu materialnego w przestrzeni (patrz rysunek obok), to wektor

$$s'(t) = (s'_1(t), s'_2(t), s'_3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

jest wektorem prędkości chwilowej w chwili  $t$ . Zwrot tego wektora jest wyznaczony przez chwilowy kierunek ruchu, a długość jest równa szybkości chwilowej. Z taką interpretacją można spotkać się zarówno w mechanice, jak i w geometrii.

### 6.1.3 Arytmetyczne własności pochodnej

**Stwierdzenie 6.7 (pochodna sumy).** Jeśli  $f, g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  są różniczkowalne w punkcie skupienia  $a \in A$  zbioru  $A$ , to istnieje pochodna  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ .

Dowód. Obliczymy pochodną sumy wprost z definicji. Piszemy

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

i przechodzimy do granicy przy  $x \rightarrow a$ . Prawa strona ma granicę  $f'(a) + g'(a)$ , więc pochodna  $(f + g)'(a)$  istnieje i jest równa właśnie  $f'(a) + g'(a)$ .  $\square$

**Stwierdzenie 6.8 (pochodna iloczynu).** Jeśli  $f, g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  są różniczkowalne w punkcie skupienia  $a \in A$  zbioru  $A$ , to istnieje pochodna

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Dowód. Obliczymy pochodną sumy wprost z definicji. Postępujemy podobnie, jak w rozdziale 2, w dowodzie twierdzenia o granicy iloczynu ciągów. Piszemy

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \frac{(f(x)g(x) - f(a)g(x)) + (f(a)g(x) - f(a)g(a))}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \end{aligned}$$

i przechodzimy do granicy przy  $x \rightarrow a$ . Ze Stwierdzenia 6.3 wynika ciągłość  $g$  w  $a$ . Zatem, z twierdzenia o granicy sumy i iloczynu, prawa strona ostatniej równości ma granicę równą

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Dowód został zakończony.  $\square$

**Stwierdzenie 6.9.** Jeśli  $g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie skupienia  $a \in A$  zbioru  $A$  oraz  $g(x) \neq 0$  dla  $x \in A$ , to istnieje pochodna

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Dowód. Ponownie, spójrzmy na iloraz różnicowy

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x) \cdot (x - a)}.$$

Jak w poprzednim dowodzie, możemy skorzystać ze Stwierdzenia 6.3 i stwierdzić, że ponieważ  $g$  jest ciągła w punkcie  $a$ , to na mocy twierdzenia o iloczynie granic, prawa strona ostatniej równości ma dla  $x \rightarrow a$  granicę równą

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x) \cdot (x - a)} = \frac{1}{g(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{x - a} = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

Zatem, funkcja  $(1/g)$  jest różniczkowalna w  $a$  i zachodzi równość podana w tezie tego stwierdzenia.  $\square$

**Wniosek 6.10 (pochodna ilorazu).** Jeśli  $f, g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$  są różniczkowalne w punkcie skupienia  $a \in A$  zbioru  $A$  i  $g(x) \neq 0$  dla  $x \in A$ , to istnieje pochodna

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Dowód. Korzystamy z równości  $f/g = f \cdot (1/g)$  i poprzednich stwierdzeń. Czytelnik zechce sam sprawdzić rachunki.  $\square$

**Uwaga 6.11.** Wzory na pochodną sumy, iloczynu i ilorazu można stosować, gdy  $f, g$  są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej zespolonej o wartościach zespolonych, gdyż w dowodach nie korzystamy nigdzie w sposób istotny z tego, że wartości i argumenty funkcji są rzeczywiste, a nie zespolone. Ponadto, wzór na pochodną sumy zachodzi dla funkcji wektorowych  $f, g: R \supset A \rightarrow \mathbb{R}^N$ , a wzór na pochodną iloczynu – dla funkcji wektorowej  $f: R \supset A \rightarrow \mathbb{R}^N$  i funkcji  $g: \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ , której wartości są skalarami, tzn. liczbami rzeczywistymi (trzeba tylko odpowiednio rozumieć prawą i lewą stronę – mamy wtedy do czynienia z mnożeniem wektorów przez liczby).

#### 6.1.4 Pochodna złożenia i funkcji odwrotnej

Aby wyprowadzić znany wzór na pochodną złożenia dwóch funkcji różniczkowalnych, powdamy najpierw ważną charakteryzację pochodnej. Można się nią posługiwać zarówno dla funkcji zmiennej rzeczywistej, jak i zmiennej zespolonej, więc wszystkie fakty tego podrozdziału sformułujemy ogólnie (każdy z nich ma dwie wersje: jedną dla  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , drugą dla  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

**Lemat 6.12.** Niech  $A \subset \mathbb{K}$  i niech  $a \in A$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$ . Funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{K}$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba  $k \in \mathbb{K}$  oraz funkcja  $r_a: A \rightarrow \mathbb{K}$  taka, że

$$f(x) = f(a) + k \cdot (x - a) + r_a(x) \cdot (x - a) \quad \text{dla } x \in A, \quad \lim_{x \rightarrow a} r_a(x) = 0.$$

Mamy wtedy  $k = f'(a)$ .

Sens tego lematu jest następujący: różniczkowalność funkcji  $f$  w punkcie  $a$  oznacza tyle, że funkcję  $f$  można przybliżać funkcją liniową  $l(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ , a błąd  $b(x) = r_a(x)(x - a)$  tego przybliżenia spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{b(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} r_a(x) = 0.$$

Innymi słowy, dla  $x$  bliskich  $a$  błąd  $b(x)$  jest mniejszego rzędu, niż różnica  $x - a$ . Istnienie pochodnej  $f'(a)$  jest równoważne istnieniu najlepszego przybliżenia liniowego funkcji  $f$  w pobliżu punktu  $a$ .

**Dowód.** Jeśli  $f'(a)$  istnieje, to funkcja

$$r_a(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

spełnia oba warunki podane w tezie lematu, gdy weźmiemy  $k = f'(a)$ . Na odwrót, jeśli odpowiednia funkcja  $r_a$  istnieje, to istnieje także

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (k + r_a(x)) = k.$$

To spostrzeżenie kończy dowód lematu.  $\square$

**Uwaga.** Lemat 6.12 wygląda na fakt niepozorny i dość oczywisty, jednak zdecydowanie warto go zapamiętać: ukryty jest w nim pomysł, dzięki któremu można zdefiniować pochodną funkcji wielu zmiennych.

**Stwierdzenie 6.13.** Niech  $g: \mathbb{K} \supset A \rightarrow \mathbb{K}$  i  $f: \mathbb{K} \supset B \rightarrow \mathbb{K}$ , gdzie  $B \supset g(A)$ . Założymy, że  $a \in A$  jest punktem skupienia zbioru  $A$  i  $b = g(a)$  jest punktem skupienia zbioru  $B$ . Jeśli  $g$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$  i  $f$  jest różniczkowalna w  $b = g(a)$ , to wtedy złożenie  $f \circ g$  jest funkcją różniczkowaną w punkcie  $a$  i ma pochodną

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

**Dowód.** Niech  $y = g(x)$ ,  $b = g(a)$ . Z poprzedniego lematu wynika, że

$$f(y) = f(b) + f'(b) \cdot (y - b) + r_b(y) \cdot (y - b)$$

dla pewnej funkcji  $r_b: B \rightarrow \mathbb{K}$ , która ma granicę równą zero, gdy  $y \rightarrow b$ . Zatem

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= \frac{f(y) - f(b)}{x - a} \\ &= \frac{f'(b) \cdot (y - b) + r_b(y) \cdot (y - b)}{x - a} \\ &= f'(b) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + r_b(y) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Na mocy Stwierdzenia 6.3 funkcja  $g$  jest ciągła w  $a$ , tzn.  $y = g(x) \rightarrow g(a) = b$ , gdy  $x \rightarrow a$ . Dlatego  $\lim_{x \rightarrow a} r_b(g(x)) = 0$ . Zatem, przechodząc w równości (6.2) do granicy przy  $x \rightarrow a$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= f'(b) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} r_b(g(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a),\end{aligned}$$

co dowodzi różniczkowalności  $f \circ g$  w punkcie  $a$  i równości, podanej w tezie.  $\square$

**Uwaga.** Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego właściwie posłużyliśmy się w tym dowodzie poprzednim lematem, zamiast operować tylko ilorazami różnicowymi funkcji  $f$  i funkcji  $g$ , jak w dowodach wzorów na pochodną sumy czy iloczynu funkcji różniczkowalnych.

**Stwierdzenie 6.14.** *Niech  $f: \mathbb{K} \supset A \rightarrow B = f(A) \subset \mathbb{K}$  będzie funkcją różnowartościową, różniczkowalną w punkcie  $a \in A$  skupienia zbioru  $A$ . Jeśli  $f'(a) \neq 0$  i funkcja  $g = f^{-1}$  odwrotna do  $f$  jest ciągła w punkcie  $b = f(a)$ , to  $g$  jest różniczkowalna w  $b \in B$  i zachodzi wzór*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

**Dowód.** Niech  $(y_n) \subset B \setminus \{b\}$ ,  $b = f(a)$ . Ponieważ  $f$  jest bijekcją z  $A$  na  $B$ , więc znajdziemy punkty  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq a$ , takie, że  $y_n = f(x_n)$ , tzn.  $x_n = g(y_n)$ . Z ciągłości  $g$  w  $b$  wynika, że  $x_n \rightarrow g(b) = f^{-1}(b) = a$ . Zatem

$$\frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \frac{1}{\frac{y_n - b}{g(y_n) - g(b)}} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}$$

(wszystkie ułamki mają sens, gdyż funkcje  $f$  i  $g = f^{-1}$  są różnowartościowe). Biorąc  $n \rightarrow \infty$  i posługując się definicją Heinego granicy funkcji, otrzymujemy równość

$$g'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

To kończy dowód.  $\square$

**Uwaga 6.15.** Założenia ostatniego twierdzenia mają skomplikowaną postać, gdyż z ciągłości i różniczkowalności  $f$  w jednym punkcie nie wynika ciągłość funkcji odwrotnej do  $f$ . (Czytelnik może się zastanowić nad odpowiednim przykładem – to nie jest szczególnie łatwe, gdyż przykład nie jest naturalny). Gdyby mówić tylko o funkcjach  $f$  różniczkowalnych w każdym punkcie przedziału  $A$ , to założenie ciągłości  $g$  można byłoby oczywiście pominąć, patrz Twierdzenie 5.43 o ciągłości funkcji odwrotnej.

Czytelnik może się zastanowić nad (nietrudną) interpretacją geometryczną ostatniego stwierdzenia dla funkcji zmiennej rzeczywistej.

## 6.2 Pochodne funkcji elementarnych

Poświęcimy teraz nieco miejsca, aby wyprowadzić konkretne wzory na pochodne funkcji elementarnych.

**Stwierdzenie 6.16.** *Jeśli  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$  i  $f: \mathbb{K} \supset A \rightarrow \mathbb{K}$  jest funkcją stałą, to  $f'(a) = 0$  w każdym punkcie skupienia zbioru  $A$ .*

Dowód. Wszystkie ilorazy różnicowe funkcji stałej są równe zero.  $\square$

**Stwierdzenie 6.17.** *Jeśli  $f(x) = x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , to  $f'(a) = 1$  dla każdego  $a \in \mathbb{R}$ .*

Dowód. Wszystkie ilorazy różnicowe funkcji  $f(x) = x$  są równe 1.  $\square$

**Stwierdzenie 6.18.** *Jeśli  $n \in \mathbb{N}$  i  $f(x) = x^n$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , to  $f'(x) = nx^{n-1}$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .*

Dowód. Można postąpić na dwa sposoby: udowodnić ten fakt przez indukcję, korzystając z poprzedniego stwierdzenia i wzoru na pochodną iloczynu, albo obliczyć pochodną funkcji  $f$  wprost z definicji, stosując wzór (1.3) na różnicę  $n$ -tych potęg w celu uproszczenia ilorazów różnicowych. Czytelnik zechce samodzielnie uzupełnić szczegóły jednego z tych dowodów.  $\square$

**Wniosek 6.19.** *Jeśli  $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  jest wielomianem, to*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

(wzór zachodzi zarówno dla wielomianów zmiennej rzeczywistej, jak i dla wielomianów zmiennej zespolonej.)

Dowód. Dla każdego  $k$  jest  $(a_kx^k)' = ka_kx^{k-1}$ , zatem teza wynika z twierdzenia o pochodnej sumy funkcji.  $\square$

**Uwaga 6.20.** Stwierdzenie 6.17 zachodzi nie tylko w dziedzinie rzeczywistej, ale także dla funkcji identycznościowej na  $\mathbb{C}$ : jej pochodna istnieje w każdym punkcie płaszczyzny i jest równa 1. Dlatego Wniosek 6.19 zachodzi zarówno w dziedzinie rzeczywistej, jak i w dziedzinie zespolonej.

**Stwierdzenie 6.21.** *Dla każdej liczby  $w \in \mathbb{C}$  zachodzi wzór*

$$\frac{d}{dz}(\exp z)_{z=w} = \exp w$$

Dowód. To wynika wprost ze wzoru (4.14), który udowodniliśmy, opisując w Twierdzeniu 4.54 własności funkcji wykładniczej.  $\square$

**Stwierdzenie 6.22.** *Dla każdej liczby  $w \in \mathbb{C}$  zachodzą wzory*

$$\frac{d}{dz}(\sin z)_{z=w} = \cos w, \quad \frac{d}{dz}(\cos z)_{z=w} = -\sin w,$$

Dowód. Skorzystamy ze wzorów Eulera i wzoru na pochodną funkcji wykładniczej, oraz wzoru na pochodną złożenia. Mamy

$$\frac{d}{dz}(\exp(\pm iz))_{z=w} = \pm i \cdot \exp(\pm iw)$$

na mocy Stwierdzenia 6.13. Zatem, dzięki wzorowi na pochodną sumy i iloczynu,

$$\frac{d}{dz}(\sin z)_{z=w} = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)_{z=w} = \frac{ie^{iw} - (-i)e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \cos w.$$

Tak samo dowodzimy wzoru na pochodną cosinusa:

$$\frac{d}{dz}(\cos z)_{z=w} = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)_{z=w} = \frac{ie^{iw} + (-i)e^{-iw}}{2} = -\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = -\sin w$$

(pisząc przedostatnią równość, skorzystaliśmy z tego, że  $i = -1/i$ ).  $\square$

**Uwaga.** Znając pochodną sinusa, wzór na pochodną cosinusa można wyprowadzić ze wzorów redukcyjnych. Można także obliczyć obie pochodne wprost, korzystając z definicji, że ze wzorów na różnicę sinusów i różnicę cosinusów (patrz Stwierdzenie 4.63), istnienia granicy

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

oraz ciągłości sinusa i cosinusa.

**Stwierdzenie 6.23.** Funkcja  $f(x) = \tg x$  ma pochodną w każdym punkcie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Zachodzi wzór

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tg^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dowód. Korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu oraz znanych już wzorów na pochodne sinusa i cosinusa, otrzymujemy we wszystkich punktach dziedziny tangensa równość

$$(\tg x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Oczywiście,  $1/\cos^2 x = 1 + \tg^2 x$  na mocy ‘jedynki trygonometrycznej’.  $\square$

**Zadanie 6.24.** Udowodnić, że funkcja cotangens jest różniczkowalna we wszystkich punktach swojej dziedziny i ma pochodną równą  $-1 - \ctg^2 x$ .

**Stwierdzenie 6.25.** Funkcja  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w każdym punkcie  $y \in (0, \infty)$  i zachodzi wzór

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{y}, \quad y > 0.$$

Dowód. Granicę ilorazów różnicowych logarytmu naturalnego obliczyliśmy już wcześniej, opisując w Twierdzeniu 3.6 własności logarytmu naturalnego.  $\square$

**Uwaga.** Można także posłużyć się wzorem na pochodną funkcji odwrotnej: jeśli  $y \in (0, \infty)$  jest ustalonym punktem i  $\ln y = x$ , tzn.  $e^x = y$ , to wobec Stwierdzenia 6.14 zachodzą równości

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

**Stwierdzenie 6.26.** Niech  $a > 0$  i  $a^z := \exp(z \ln a)$ . Wtedy

$$\frac{d}{dz}(a^z)_{z=w} = \ln a \cdot a^w, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Dowód. Mamy  $a^z = \exp(z \cdot \ln a)$ . Wystarczy posłużyć się wzorem na pochodną funkcji wykładniczej i pochodną złożenia.  $\square$

**Zadanie 6.27.** Posługując się definicją logarytmu o dowolnej podstawie i wzorem na zamianę podstawy logarytmu, udowodnić, że

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$$

dla każdej podstawy  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Stwierdzenie 6.28.** Funkcja potęgowa  $g(x) = x^\omega$ , gdzie  $x > 0$ , a  $\omega \in \mathbb{R}$  jest ustaloną liczbą, ma w każdym punkcie  $x \in (0, \infty)$  pochodną

$$g'(x) = \omega x^{\omega-1}.$$

Dowód. Piszemy  $x^\omega = \exp(\omega \ln x)$  i stosując wzór na pochodną złożenia, otrzymujemy

$$(x^\omega)' = (\exp(\omega \ln x))' = \exp(\omega \ln x) \cdot \omega \cdot (\ln x)' = x^\omega \cdot \omega \cdot \frac{1}{x} = \omega x^{\omega-1}.$$

$\square$

**Wniosek 6.29.** Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi wzór

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0.$$

Dowód. Stosujemy poprzednie stwierdzenie dla  $\omega = 1/n$ .  $\square$

**Uwaga 6.30.** Czytelnik sprawdzi samodzielnie, że gdy  $n$  jest liczbą nieparzystą (i można definiować pierwiastek stopnia  $n$  z dowolnej liczby rzeczywistej), to wzór podany w ostatnim wniosku zachodzi w istocie dla wszystkich  $x \neq 0$ . To wynika np. z nieparzystości funkcji  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  dla nieparzystych stopni pierwiastka  $n$ .

**Stwierdzenie 6.31.** Funkcje  $F(y) = \arcsin y$  i  $G(y) = \arccos y$  są różniczkowalne w każdym punkcie przedziału  $(-1, 1)$ ; zachodzą wzory

$$F'(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}, \quad G'(y_0) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y_0^2}}, \quad y_0 \in (-1, 1).$$

Dowód. Określając arcus sinus i arcus cosinus, sprawdziliśmy, że sinus jest funkcją rosnącą na  $[-\pi/2, \pi/2]$ , a cosinus jest funkcją malejącą na  $[0, \pi]$ .

Aby zastosować twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej do obliczenia pochodnej  $F(y) = \arcsin y$  w punkcie  $y_0 = \sin x_0$ , musimy sprawdzić, że pochodna sinusa nie znika w  $x_0$ . Tak jednak jest, gdyż  $\cos x_0 \neq 0$  dla każdego  $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Zatem, na mocy

Stwierdzenia 6.14 zastosowanego do  $f = \sin$  i  $g = f^{-1} = F$  w punktach  $a = x_0$ ,  $b = y_0$ , otrzymujemy

$$F'(y_0) = g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin x_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Zauważmy: skorzystaliśmy w powyższym rachunku z tego, że cosinus jest dodatni na przedziale  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

Podobnie obliczmy pochodną funkcji  $G(y) = \arccos y$ . Tym razem stosujemy Stwierdzenie 6.14<sup>1</sup> do  $f = \cos$  i  $g = f^{-1} = G$  w punktach  $a = x_0$ ,  $b = y_0 = \cos x_0$ , gdzie  $y_0 \in (-1, 1)$  i  $x_0 \in (0, \pi)$ . Otrzymujemy

$$G'(y_0) = g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{-1}{\sin x_0} = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\cos x_0)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Korzystaliśmy z tego, że  $\sin x_0 > 0$  dla  $x_0 \in (0, \pi)$ .  $\square$

**Stwierdzenie 6.32.** *Funkcja  $H(y) = \operatorname{arc tg} y$  jest różniczkowalna w każdym punkcie  $y \in \mathbb{R}$ ; mamy*

$$H'(y) = \frac{1}{1 + y^2} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Dowód. Jak poprzednio, stosujemy twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej — tym razem do pary funkcji  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , oraz  $g(y) = f^{-1}(y) = H(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , biorąc punkty  $y, x$  powiązane zależnością  $y = \operatorname{tg} x$ . Wolno to zrobić: pochodna tangensa, tzn.  $1 + \operatorname{tg}^2 x$ , jest zawsze liczbą większą od 1, a więc różną od zera. Otrzymujemy

$$H'(y) = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{1 + y^2}$$

dla każdego  $y \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Stosując powyższe wzory i twierdzenia o pochodnej sumy, iloczynu, ilorazu i złożenia funkcji, można obliczać pochodne dowolnych funkcji elementarnych. Zakończmy ten podrozdział przykładem, ilustrującym sposób obliczania pochodnych w jeszcze jednej sytuacji.

**Przykład 6.33.** Niech  $f(x) = x^x$  dla  $x > 0$ . Wtedy, ze wzorów na pochodną złożenia i pochodną iloczynu,

$$f'(x) = \left( e^{x \ln x} \right)' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x \ln x} \cdot (1 + \ln x).$$

(Ważne jest to, że nie stosujemy bezpośrednio ani wzoru na pochodną funkcji wykładniczej, ani wzoru na pochodną funkcji potęgowej. Nie wolno tego robić, bo *ani podstawa, ani wykładnik potęgi nie są w tym przykładzie stałymi*).

---

<sup>1</sup>Proszę samodzielnie sprawdzić, że spełnione są założenia tego stwierdzenia!

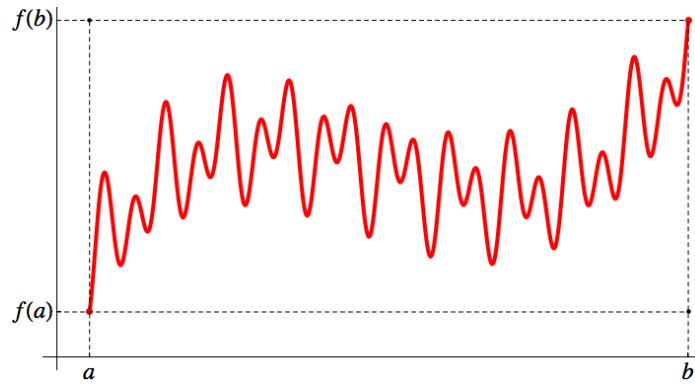
### 6.3 Najważniejsze własności funkcji różniczkowalnych

W tym podrozdziale zajmiemy się opisem własności funkcji różniczkowalnych i związkiem pochodnej z monotonicznością oraz ekstremami. Będziemy zajmować się funkcjami określonymi na przedziałach prostej rzeczywistej. Termin *funkcja różniczkowalna* będzie oznaczał funkcję, która jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny.

**Definicja 6.34 (ekstremum lokalne).** Niech  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $I$  jest przedziałem w  $\mathbb{R}$ . Mówimy, że funkcja  $f$  ma w punkcie  $a \in I$  maksimum lokalne (odpowiednio: minimum lokalne), jeśli istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że dla wszystkich  $x \in I$ ,  $|x - a| < \delta$ , zachodzi nierówność  $f(a) \geq f(x)$  (odpowiednio:  $f(a) \leq f(x)$ ).

Jeśli dla wszystkich  $x \in I$ ,  $0 < |x - a| < \delta$ , nierówności są ostre, to mówimy wtedy, że  $f$  ma w punkcie  $a$  maksimum (lub minimum) właściwe.

Słowo *ekstremum* jest wspólną nazwą minimum i maksimum: w zależności od kontekstu i potrzeby może oznaczać jedno lub drugie. Z definicji wynika, że funkcja może mieć ekstremum lokalne także w końcu przedziału. Czytelnik powinien pamiętać, że wartość funkcji w punkcie ekstremum lokalnego nie musi być najmniejszą ani największą wartością funkcji na danym przedziale. Ekstremów może być wiele, a ponadto jeśli przedział jest otwarty, to funkcja w ogóle nie musi przyjmować swoich kresów.



Funkcja  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , która ma dużo ekstremów lokalnych wewnętrz  $(a, b)$ , jednak w żadnym z nich nie jest osiągany kres dolny ani górny zbioru  $f((a, b))$ .

**Lemat 6.35 (lemat Fermata).** Jeśli  $I$  jest odcinkiem otwartym,  $a \in I$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$  i  $f$  ma w  $a$  ekstremum lokalne, to  $f'(a) = 0$ .

Geometryczna interpretacja lematu Fermata jest prosta: styczna do wykresu funkcji różniczkowej w punkcie ekstremum lokalnego jest pozioma.

Dowód. Dla ustalenia uwagi założmy, że  $f$  ma w  $a$  maksimum lokalne (w drugim przypadku dowód jest taki sam; można także rozważyć funkcję  $-f$ , która ma maksima tam, gdzie  $f$  ma minima). Wybierzmy  $\delta > 0$  tak, aby przedział  $J := (a - \delta, a + \delta)$  był zawarty w  $I$  i aby  $f(x) \leq f(a)$  dla wszystkich  $x \in J$ .

Dla  $0 < |h| < \delta$  mamy wtedy  $f(a + h) - f(a) \leq 0$ . Dlatego iloraz różnicowy  $(f(a + h) - f(a))/h$  jest nieujemny dla  $-\delta < h < 0$  i niedodatni dla  $0 < h < \delta$ . Nierówności nieostre

zachowują się w granicy, a pochodna  $f'(a)$  istnieje, więc

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0.$$

Stąd już wynika, że  $f'(a) = 0$ .  $\square$

**Uwaga 6.36.** Podkreślmy bardzo ważny fakt: lematu Fermata nie można odwrócić: z faktu, że funkcja różniczkowalna  $f$  ma w pewnym punkcie pochodną równą zero, *nie wynika*, że  $f$  ma w tym punkcie ekstremum lokalne. Najprostszym przykładem jest  $f(x) = x^3$ , różniczkowalna na całej prostej  $\mathbb{R}$ . Mamy  $f'(x) = 3x^2$ , a więc  $f'(0) = 0$ , jednak  $f$  jest rosnąca i nie ma ekstremum w zerze. Pochodna funkcji ciągłej, rosnącej, może znikać na zbiorze nieskończonym, a nawet na zbiorze gęstym.<sup>2</sup>

**Twierdzenie 6.37 (Rolle'a).** Założmy, że  $a < b$ , zaś funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na  $[a, b]$  i różniczkowalna w każdym punkcie  $x \in (a, b)$ . Jeśli  $f(a) = f(b)$ , to istnieje taki punkt  $x_0 \in (a, b)$ , że  $f'(x_0) = 0$ .

Dowód. Jeśli  $f$  jest funkcją stałą, to  $f'$  znika w każdym punkcie  $x \in (a, b)$  i nie ma czego dowodzić. Założymy więc, że  $f$  nie jest funkcją stałą. Położymy

$$m := \inf_{[a,b]} f, \quad M := \sup_{[a,b]} f.$$

Ponieważ  $f$  nie jest stała i  $f(a) = f(b)$ , to musi być  $m < f(a) = f(b)$  lub  $M > f(a) = f(b)$ . Z twierdzenia Weierstrassa (patrz Tw. 5.36 w rozdziale 5) wiemy, że  $m$  i  $M$  są wartościami  $f$ , zatem przynajmniej jedna z tych wartości jest przyjmowana w punkcie *wewnętrzny*  $x_0$ , należącym do przedziału otwartego  $(a, b)$ . Funkcja  $f$  ma oczywiście w tym punkcie ekstremum lokalne. Z lematu Fermata wynika, że  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.38 (Cauchy'ego).** Niech  $a < b$  i niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami ciągłymi na  $[a, b]$ , różniczkowalnymi w każdym punkcie przedziału  $(a, b)$ . Założymy ponadto, że  $g'(x) \neq 0$  dla  $x \in (a, b)$ . Wówczas istnieje taki punkt  $\xi \in (a, b)$ , że

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że  $g(a) \neq g(b)$ , gdyż w przeciwnym przypadku na mocy twierdzenia Rolle'a istniałby punkt, w którym  $g'$  znika, a zakładamy, że  $g' \neq 0$  na  $(a, b)$ . Dlatego prawa strona wzoru z tezy twierdzenia ma sens.

Rozpatrzmy teraz funkcję pomocniczą

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)).$$

Z założeń o  $f$  i  $g$  wynika, że  $h$  jest funkcją ciągłą na  $[a, b]$  i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Ponadto,  $h(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) = h(a)$ . Zatem,  $h$  spełnia

---

<sup>2</sup>Samodzielna konstrukcja odpowiednich przykładów może być ciekawym zadaniem dla ambitnych Czytelników.

wszystkie założenia twierdzenia Rolle'a. Istnieje więc punkt  $\xi \in (a, b)$  taki, że  $h'(\xi) = 0$ . Mamy jednak

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Dlatego równość  $h'(\xi) = 0$  jest równoważna tezie twierdzenia.  $\square$

Odnosimy bardzo ważny wniosek z twierdzenia Cauchyego.

**Wniosek 6.39 (twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej).** Założmy, że  $a < b$ , zaś funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na  $[a, b]$  i różniczkowalna w każdym punkcie  $x \in (a, b)$ . Wówczas istnieje taki punkt  $\xi \in (a, b)$ , że

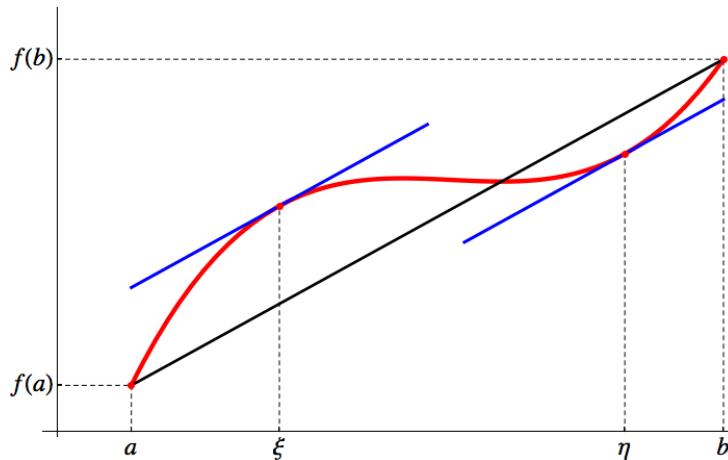
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Stosujemy twierdzenie Cauchyego do  $f$  i do funkcji  $g(x) = x$ ,  $x \in [a, b]$ .  $\square$

**Zadanie 6.40.** Podać przykład, świadczący o tym, że jeśli  $f$  jest ciągła na  $[a, b]$ , ale  $f'$  nie istnieje choćby w jednym punkcie, to teza twierdzenia Lagrange'a nie musi zachodzić.

**Przykład 6.41.** Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej **nie zachodzi** (w powyższej postaci) dla funkcji o wartościach wektorowych, np. zespolonych. Oto banalny przykład: niech  $f(t) = \exp(2\pi it)$  dla  $t \in [0, 1]$ . Wtedy, dla każdego  $c \in (0, 1)$ , mamy  $0 = f(1) - f(0) \neq f'(c) = 2\pi i \cdot \exp(2\pi ic)$ .

Twierdzenie Lagrange'a ma bardzo prostą interpretację geometryczną: w przedziale  $(a, b)$  istnieje taki punkt, w którym styczna do wykresu  $f$  jest równoległa do siecznej, poprowadzonej przez dwa końce łuku wykresu.



Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a: Istnieje co najmniej jeden punkt, w którym styczna do wykresu funkcji jest równoległa do siecznej. (Może się zdarzyć, że takich punktów jest więcej).

**Wniosek 6.42.** Założmy, że  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $[c, d] \subset A$ ,  $c < d$ , a funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na  $[c, d]$  i różniczkowalna w  $(c, d)$ . Zachodzą wówczas następujące implikacje:

- (i) Jeśli  $f'(x) \geq 0$  dla każdego  $x \in (c, d)$ , to  $f$  jest niemalejąca na  $[c, d]$ .

- (ii) Jeśli  $f'(x) > 0$  dla każdego  $x \in (c, d)$ , to  $f$  jest rosnąca na  $[c, d]$ .
- (iii) Jeśli  $f'(x) < 0$  dla każdego  $x \in (c, d)$ , to  $f$  jest malejąca na  $[c, d]$ .
- (iv) Jeśli  $f'(x) \leq 0$  dla każdego  $x \in (c, d)$ , to  $f$  jest nierosnąca na  $[c, d]$ .

Dowód. Wystarczy zapisać tezę twierdzenia Lagrange'a w postaci

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a) \quad \text{dla pewnego } \xi \in (a, b),$$

a następnie podstawić za  $a$  i  $b$  dowolne pary punktów przedziału  $[c, d]$ .  $\square$

**Wniosek 6.43.** Jeśli funkcja ciągła  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek:  $f'(\xi) = 0$  dla każdego  $\xi \in (a, b)$ , to  $f$  jest funkcją stałą.

Dowód. Stosując twierdzenie Lagrange'a dla  $f$  na dowolnym przedziale  $[a, x] \subset [a, b]$ , stwierdzamy, że  $f(a) = f(x)$  dla każdego  $x \in [a, b]$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.44.** Założmy, że  $c < d$ , zaś funkcja  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na  $[c, d]$  i różniczkowalna w każdym punkcie  $x \in (c, d)$ . Następujące warunki są równoważne:

- (i) Funkcja  $f$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $M$ ;
- (ii) Dla każdego  $x \in (c, d)$  zachodzi nierówność  $|f'(x)| \leq M$

Dowód. Jeśli  $f$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $M$ , to dla dowolnych  $y, x \in (c, d)$ ,  $y \neq x$  zachodzi nierówność

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq M.$$

Wykonując przejście graniczne  $y \rightarrow x$ , otrzymujemy  $|f'(x)| \leq M$ .

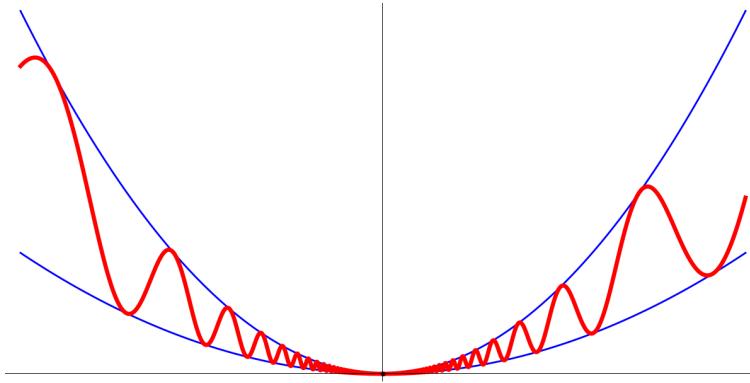
Na odwrót, jeśli  $f$  spełnia warunek (ii), to dla dowolnych  $a, b \in [c, d]$ ,  $a \neq b$ , dobierając do  $a$  i  $b$  punkt  $\xi \in (a, b)$  tak, jak w tezie twierdzenia Lagrange'a, możemy napisać

$$|f(b) - f(a)| = |f'(\xi)| \cdot |b - a| \stackrel{\text{(ii)}}{\leq} M |b - a|.$$

Funkcja  $f$  spełnia więc warunek Lipschitza ze stałą  $M$ .  $\square$

**Uwaga 6.45.** Funkcja ciągła na odcinku  $[a, b]$  (a więc jednostajnie ciągła na tym odcinku) i różniczkowalna w  $(a, b)$  może mieć nieograniczoną pochodną. Przykład:  $f(x) = \sqrt{x}$  dla  $x \in [0, 1]$ ; wtedy  $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$  dla  $x \in (0, 1]$  i  $f'$  nie jest ograniczona w żadnym otoczeniu zera.

Na zakończenie tego podrozdziału spróbujemy udzielić częściowych odpowiedzi na dwa pytania: jakie funkcje mogą być pochodnymi, i czy pochodna funkcji różniczkowalnej musi być funkcją ciągłą. Odpowiedź na drugie pytanie jest prosta: pochodna nie musi być funkcją ciągłą.



Funkcja z Przykładu 6.46 w otoczeniu zera (dla nieco większej czytelności rysunku, oś  $y$  została liniowo rozciągnięta). Wykres oscyluje między dwiema parabolami,  $y = x^2$  i  $y = 3x^2$ . Pochodna istnieje w każdym punkcie, jednak nie jest ciągła w zerze i zmienia znak nieskończonie wiele razy w każdym przedziale wokół zera.

**Przykład 6.46.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2 + \sin(1/x)), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dla  $x \neq 0$  otrzymujemy, stosując wzory na pochodną iloczynu i pochodną złożenia,

$$f'(x) = 2x \cdot \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2}) = 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}. \quad (6.3)$$

Zatem na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  pochodna  $f$  istnieje i jest tam funkcją ciągłą.

Ponieważ sinus na  $\mathbb{R}$  przyjmuje tylko wartości z przedziału  $[-1, 1]$ , więc  $|f(x)| \leq 3x^2$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ . Dlatego

$$0 \leq \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \left| \frac{f(h)}{h} \right| \leq 3|h| \rightarrow 0 \quad \text{dla } h \rightarrow 0.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach wynika zatem, że  $f'(0) = 0$ . Jednak  $f'$  nie jest ciągła w zerze. To wynika stąd, że pierwszy składnik po prawej stronie (6.3) dąży do zera dla  $x \rightarrow 0$  (moduł tego składnika nie przekracza  $6|x|$ ), jednak drugi składnik,  $-\cos 1/x$ , nie ma granicy dla  $x \rightarrow 0$  (patrz Przykład 5.12). Dlatego granica  $f'$  w zerze nie istnieje.

Nietrudno zauważyć jeszcze jedno:  $f(x) = 0$  tylko dla  $x = 0$ , a dla  $x \neq 0$  jest  $f(x) \geq x^2 > 0$ . Zatem  $f$  ma w zerze minimum lokalne właściwe (a nawet osiąga w zerze swój kres dolny). Jednak dla dowolnej liczby  $\delta > 0$  funkcja  $f'$  zmienia znak nieskończonie wiele razy w przedziale  $(0, \delta)$ . Podobnie jest w przedziale  $(-\delta, 0)$ : tam też  $f'$  zmienia znak nieskończonie wiele razy.<sup>3</sup> Zatem prawdziwy jest następujący fakt, dla kogoś być może lekko zaskakujący i przeczący naiwnej intuicji.

*Może się zdarzyć, że  $f$  jest ciągła na  $\mathbb{R}$  i ma w punkcie  $x_0 \in \mathbb{R}$  ekstremum lokalne właściwe, jednak nie jest monotoniczna na żadnym przedziale  $(x_0, x_0 + \delta)$ , ani na żadnym przedziale  $(x_0 - \delta, x_0)$ , gdzie  $\delta > 0$ .*  $\square$

<sup>3</sup>Czytelnik zechce, naśladowując rozumowanie z Przykładu 5.12, precyzyjnie to uzasadnić.

**Twierdzenie 6.47 (własność Darboux dla pochodnej).** Założmy, że  $a < b$ , zaś funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i różniczkowalna na  $[a, b]$ . Dla każdej liczby  $c \in [f'(a), f'(b)]$  istnieje punkt  $x \in [a, b]$  taki, że  $f'(x) = c$ .

Uwaga: nie zakładamy, że  $f'(a) < f'(b)$ . Napis  $[f'(a), f'(b)]$  oznacza przedział o końcach  $f'(a)$  i  $f'(b)$ , być może zdegenerowany do jednego punktu. Podkreślmy też wyraźnie: nie zakładamy tu ciągłości  $f'$ .

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy  $f'(a) < f'(b)$ . Rozpatrzmy funkcję pomocniczą<sup>4</sup>  $\phi(x) = f(x) - cx$ . Spełnia ona warunki:

$$\phi'(a) = f'(a) - c \leq 0, \quad \phi'(b) = f'(b) - c \geq 0.$$

Jeśli  $\phi'(a) = 0$  lub  $\phi'(b) = 0$ , to teza twierdzenia zachodzi (można wziąć  $x = a$  lub  $x = b$ ). Założymy więc odtąd, że  $\phi'(a) < 0 < \phi'(b)$ .

Funkcja  $\phi$  jest ciągła na  $[a, b]$ , zatem, z Twierdzenia 5.36 wynika, że istnieje punkt  $x \in [a, b]$  taki, że

$$\phi(x) = \inf_{[a,b]} \phi.$$

Zauważmy, że gdyby  $x = a$ , to mielibyśmy dla małych  $h > 0$

$$\frac{\phi(a+h) - \phi(a)}{h} \geq 0, \quad \text{a zatem } \phi'(a) \geq 0.$$

Ponieważ jednak  $\phi'(a) < 0$ , więc  $x \neq a$ . Tak samo pokazujemy, że  $x \neq b$ . Z lematu Fermata otrzymujemy teraz  $\phi'(x) = f'(x) - c = 0$ .  $\square$

Odpowiedź na inne naturalne pytanie: *czy każda funkcja ciągła jest pochodną pewnej funkcji?* jest też twierdząca, ale na jej uzasadnienie Czytelnik będzie musiał poczekać.

## 6.4 Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora

### 6.4.1 Definicja pochodnych wyższych rzędów

Jeśli funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $A \subset \mathbb{R}$ , jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru  $A$ , to funkcję  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $g(a) = f'(a)$  dla każdego  $a \in A$ , nazywamy *pierwszą pochodną* funkcji  $f$ . Pochodne wyższych rzędów definiuje się indukcyjnie. Służą one, jak się przekonamy, do aproksymacji funkcji wielomianami, do badania ekstremów, a także (druga pochodna) do określania wypukłości. Zaczniemy od definicji.

**Definicja 6.48 (pochodne wyższych rzędów).** Niech  $n \in \mathbb{N}$  i niech  $P$  będzie przedziałem otwartym w  $\mathbb{R}$ ,  $a \in P$ . Jeśli w każdym punkcie przedziału  $P$  funkcja  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  ma pochodne do rzędu  $(n-1)$  włącznie, to mówimy, że  $f$  ma  $n$ -tą pochodną w  $a$  (lub: pochodną rzędu  $n$  w  $a$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $f^{(n-1)}$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$ . Przyjmujemy

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

---

<sup>4</sup>Nietrudno zobaczyć, że  $\phi$  dobieramy tak, aby mieć  $\phi' = 0 \Leftrightarrow f' = c$ .

Krótko mówiąc, górny indeks w nawiasie oznacza liczbę wykonanych różniczkowań. Zatem,  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f'' = (f')'$ ,  $f^{(3)} = (f^{(2)})' = (f'')' = f'''$ . Primów nie używamy do oznaczania pochodnych rzędu wyższego niż trzeci. Ogólna, indukcyjna reguła podana w definicji orzeka, iż  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$  w tych punktach, w których funkcja  $f^{(n-1)}$  jest różniczkowalna.

**Przykład 6.49.** a) Jeśli  $f(x) = \exp(x)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , to – jak już wiemy –  $f'(x) = \exp(x) = f(x)$ . Nietrudno stąd wywnioskować, że  $f$  ma pochodne wszystkich rzędów:  $f'' = (f')' = f' = f$ ,  $f''' = (f'')' = f' = f$  i ogólnie  $f^{(n)} = f$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Posługując się wzorami na pochodne sinusa i cosinusa (patrz Stwierdzenie 6.22), łatwo sprawdzamy, że

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x, \quad (\sin x)^{(2n-1)} = (-1)^{n+1} \cos x, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.4)$$

$$(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x, \quad (\cos x)^{(2n-1)} = (-1)^n \sin x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

c) Ze wzoru na pochodną logarytmu naturalnego (patrz Stwierdzenie 6.25) i pochodną funkcji potęgowej otrzymujemy dla  $n \geq 1$

$$(\ln y)^{(n)} = (y^{-1})^{(n-1)} = (-y^{-2})^{(n-2)} = \dots = (-1)^{n-1}(n-1)!y^{-n}, \quad y > 0, \quad (6.6)$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, \quad x > -1. \quad (6.7)$$

(Obu wzorów dowodzi się tak samo, przez łatwą indukcję.)

d) Jeśli  $m, k \in \mathbb{Z}$  są nieujemne, to wówczas

$$(x^m)^{(k)} = \begin{cases} m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)x^{m-k}, & 0 \leq k \leq m, \\ 0, & k > m. \end{cases} \quad (6.8)$$

Pochodna  $n$ -tego rzędu sumy dwóch funkcji  $n$ -krotnie różniczkowalnych jest sumą  $n$ -tych pochodnych składników, tzn.  $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ . Dowód jest oczywisty i wynika ze wzoru na pochodną sumy. Wzory na wyższe pochodne złożenia funkcji i funkcji odwrotnej są dość zawiłe, ale w razie potrzeby można je wyrowadzić, wykonując czysto mechaniczną pracę. Odnotujmy natomiast wzór Leibniza na  $n$ -tą pochodną iloczynu. Z mnemotechnicznego punktu widzenia jest on “taki sam”, jak dwumian Newtona.

**Stwierdzenie 6.50 (wzór Leibniza).** Jeśli  $P \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem,  $a \in P$  i  $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$  są  $n$ -krotnie różniczkowalne w  $a$ , to wówczas

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)}(a)g^{(n-j)}(a).$$

**Szkic dowodu.** Dowód jest łatwy; prowadzi się go przez indukcję, korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu i tożsamości  $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$ . Sprawdzimy tylko wzór na  $(fg)''$ :

$$(fg)'' = ((fg)')' = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg'',$$

pozostawiając resztę szczegółów zainteresowanym.  $\square$

### 6.4.2 Wzór Taylora

Najważniejszym wzorem w Analizie, wykorzystującym pochodne wyższych rzędów, jest tak zwany wzór Taylora. Służy on do przybliżania funkcji  $n$ -krotnie różniczkowalnych wielomianami, z pewną kontrolą błędu przybliżenia (jakość i stopień tej kontroli zależą od tego, ile wiemy o danej funkcji). W najprostszym przypadku, dla wielomianów, wynika on ze związku między współczynnikami wielomianu i wartościami pochodnych wielomianu w zerze, który z kolei łatwo otrzymać ze wzoru (6.8).

Prześledźmy odpowiedni rachunek. Niech

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

będzie wielomianem stopnia  $n$  o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas

$$\begin{aligned} P'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} = \sum_{j=1}^n j a_j x^{j-1}, \\ P''(x) &= 2a_2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{j=2}^n j(j-1) a_j x^{j-2}, \\ &\vdots \\ P^{(k)}(x) &= \sum_{j=k}^n j(j-1) \cdot \dots \cdot (j-k+1) a_j x^{j-k} \quad \text{dla } k \leq n. \end{aligned}$$

W szczególności,  $P^{(n)}(x) = n! a_n$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , a ponadto

$$P^{(k)}(0) = k! a_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (6.9)$$

**Stwierdzenie 6.51 (Wzór Taylora dla wielomianów).** *Jeśli  $P$  jest wielomianem stopnia  $n$ , to wówczas*

$$P(x) = P(0) + \frac{P^{(1)}(0)}{1!} x + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(0)}{j!} x^j; \quad (6.10)$$

$$P(w) = P(x_0) + \frac{P^{(1)}(x_0)}{1!} (w - x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (w - x_0)^n \quad (6.11)$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(x_0)}{j!} (w - x_0)^j. \quad (6.12)$$

**Dowód.** Pierwszy wzór wynika z relacji (6.9) między współczynnikami wielomianu  $P$  i jego pochodnymi w zerze. Aby otrzymać drugi wzór, wystarczy zastosować pierwszy do wielomianu  $Q$ , gdzie  $Q(w - x_0) = P(w)$ . Wtedy  $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(x_0)$  dla dowolnego  $k$ .  $\square$

Jeśli  $k > n$ , to oczywiście  $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)^{(k)} = 0$  dla wszystkich  $x$ . Okazuje się, że taki warunek spełniają na prostej tylko wielomiany odpowiedniego stopnia. Odnotujmy ten fakt.

**Stwierdzenie 6.52.** Jeśli  $f: \mathbb{R} \supset P \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $P$  jest przedziałem, jest  $k$ -krotnie różniczkowalna i  $f^{(k)} \equiv 0$ , to  $f$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $k - 1$ .

Dowód. Dowodzimy przez indukcję względem  $k$ . Jeśli  $k = 1$ , to z Wniosku 6.43 wynika, że  $f = \text{const}$ , a więc  $f$  jest wielomianem stopnia 0 i teza zachodzi.

Załóżmy prawdziwość stwierdzenia dla liczby  $k$ . Niech  $f$  będzie  $(k + 1)$ -krotnie różniczkowalna i  $f^{(k+1)} \equiv 0$ . Wówczas  $f^{(k)}(x) \equiv c \in \mathbb{R}$  na mocy Wniosku 6.43. Rozpatrzmy  $\varphi(x) = f(x) - cx^k/k!$ . Oczywiście,

$$\varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - k! \cdot c/k! = 0.$$

a więc na mocy założenia indukcyjnego  $\varphi$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $k - 1$ . Zatem,  $f(x) = \varphi(x) + a_k x^k$ , gdzie  $a_k = c/k!$ , jest wielomianem stopnia co najwyżej  $k$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.53 (wzór Maclaurina z resztą w postaci Peano).** Niech  $P \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem,  $0 \in P$ . Załóżmy, że  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  ma  $(k - 1)$  pochodnych w przedziale  $P$  i  $k$ -tą pochodną w punkcie 0. Wtedy

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + r(x), \quad (6.13)$$

gdzie reszta  $r(x)$  spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^k} = 0. \quad (6.14)$$

Intuicyjny sens tego twierdzenia jest jasny: funkcję, która ma  $(k - 1)$  pochodnych w pewnym przedziale i  $k$ -tą pochodną w pewnym ustalonym punkcie (jak zobaczymy później, zero nie odgrywa tu żadnej szczególnej roli), to w pobliżu tego punktu można tę funkcję przybliżać wielomianami stopnia  $k$ , przy czym błąd przybliżenia ma, dla małych  $x$ -ów, mniejszy rząd niż  $x^k$ .

Liczne przykłady zastosowań tego twierdzenia Czytelnik zobaczy później (także na ćwiczeniach). Najpierw przytoczymy

**Dowód. Krok 1.** Niech najpierw  $k = 1$ . Wtedy wzór Maclaurina przybiera postać  $f(x) = f(0) + f'(0)x + r(x)$ , a równość

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right) = 0$$

wynika wprost z definicji pochodnej.

**Krok 2.** Rozpatrzmy teraz przypadek szczególny: niech funkcja  $\phi: P \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunek

$$\phi^{(j)}(0) = 0 \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, k. \quad (6.15)$$

Dla takiej  $\phi$  prawa strona (6.13) składa się z samej ‘reszty’, tzn. wzór Maclaurina przybiera postać  $\phi(x) = r(x)$ . Trzeba więc wykazać, że dla każdej takiej funkcji zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{x^k} = 0. \quad (6.16)$$

Udowodnimy to przez indukcję względem  $k$ . Przypadek  $k = 1$  już rozpatrzyliśmy.

Niech  $\phi$  spełnia warunek (6.15) dla  $k = q + 1$ . Wtedy  $\psi = \phi'$  spełnia ten sam warunek dla  $k = q$ . Piszemy, stosując do  $\phi$  twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej na odcinku o końcach 0 i  $x$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x)}{x^{q+1}} &= \frac{\phi(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^q} = \phi'(tx) \cdot \frac{1}{x^q} \quad \text{dla pewnego } t \in (0, 1) \\ &= \psi(tx) \cdot \frac{1}{(tx)^q} \cdot t^q \longrightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow 0\end{aligned}$$

na mocy założenia indukcyjnego, zastosowanego do funkcji  $\psi$ . To kończy dowód wzoru Maclaurina dla funkcji  $\phi$ , spełniających dodatkowy warunek (6.15).

*Krok 3.* Przypadek ogólny. Dla  $f$  spełniającej założenia twierdzenia kładziemy

$$\phi(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j,$$

tzn. po prostu  $\phi(x) = r(x)$ . Nietrudno sprawdzić, że  $\phi^{(j)}(0) = f^{(j)}(0) - f^{(j)}(0) = 0$ , więc  $\phi$  spełnia założenie (6.15). Zgodnie z poprzednim krokiem dowodu, zachodzi więc warunek (6.16), tzn.  $\phi(x)/x^k = r(x)/x^k \rightarrow 0$  dla  $x \rightarrow 0$ .  $\square$

Podkreślmy: w całym twierdzeniu chodziło tylko o zbadanie zachowania reszty  $r(x)$  dla małych  $x$ . To był kluczowy problem.

Otrzymany wzór Maclaurina można “przesunąć” na dowolny inny przedział  $P \subset \mathbb{R}$ , z wyróżnionym punktem  $x_0$ . Jeśli  $f(x) = \varphi(x - x_0)$ , to  $f^{(j)}(x_0) = \varphi^{(j)}(0)$  dla wszystkich  $j$ , dla których pochodne rzędu  $j$  istnieją. Zachodzi więc także następujący fakt.

**Wniosek 6.54 (wzór Taylora z resztą w postaci Peano).** *Niech  $P \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym,  $x_0 \in P$ . Założmy, że  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  ma  $(k-1)$  pochodnych na  $P$  i  $k$ -tą pochodną w punkcie  $x_0$ . Wówczas*

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + r(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

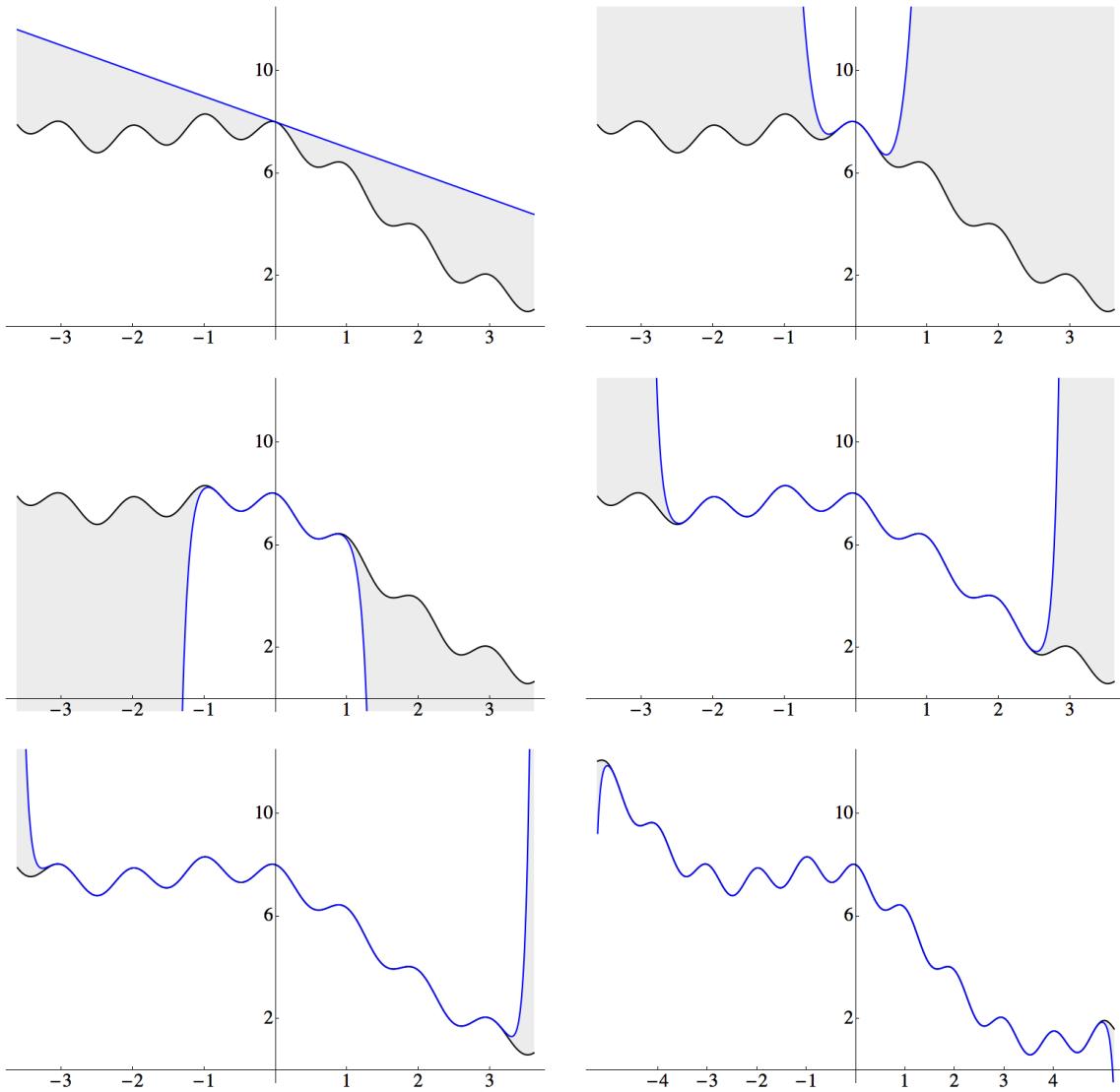
**Uwaga 6.55 (terminologia).** Wielomian

$$\sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

nazywa się  $k$ -tym wielomianem Taylora funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  (gdy  $x_0 = 0$ , używamy nazwy wielomian Maclaurina). Zamiast podawać warunek (6.14), pisze się czasem  $r(x) = o(x^k)$  dla  $x \rightarrow 0$ . Symbol po prawej stronie to tzw. “o małe”; napis

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{dla } x \rightarrow a$$

oznacza po prostu, że granica  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = 0$ . Taki język jest czasem bardzo wygodny, co zobaczymy w konkretnych przykładach.



Funkcja  $f(x) = 6 - x + \frac{3}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos(2\pi x)$  i jej wielomiany Taylor–Maclaurina w punkcie  $x_0 = 0$  dla  $n = 1$  (styczna do wykresu), dla  $n = 5$  (górnne rysunki), dla  $n = 15$  i  $n = 40$  (środkowe rysunki), i wreszcie dla  $n = 52$  i  $n = 82$  (dolne rysunki). Jak widać, wykresy  $f$  i  $T_{82}$  na przedziale  $[-4, 4]$  pokrywają się praktycznie idealnie. Jednak dla  $|x| \rightarrow \infty$  funkcja  $g = |f - T_{82}|$  ma oczywiście granicę  $+\infty$ . Przybliżenie, jakie zapewnia wzór Taylora, ma *charakter lokalny*.

Z praktycznego punktu widzenia, przybliżenie, jakie zapewnia wzór Taylora, jest wystarczające do wielu celów praktycznych, np. choćby do obliczania wartości funkcji. Nawet ktoś zupełnie niezainteresowany teorią może zobaczyć to na rysunkach. Te, które widać w skrypcie, zostały wykonane dla konkretnej funkcji (wybranej tak, aby uzyskać rozsądną ilość przedziałów monotoniczności i wykres, który w otoczeniu zera wygląda dość przypadkowo)

$$f(x) = 6 - x + \frac{3}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos(2\pi x); \quad (6.17)$$

jej wykres jest zaznaczony kolorem czarnym. Kolorem niebieskim zaznaczono wykresy

wielomianów Taylora–Maclaurina,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k,$$

dla różnych  $n$ . Jak widać, im wyższy stopień wielomianu Taylora, tym (w danym przypadku) większa długość przedziału, na którym przybliżenie jest dokładne, i tym mniejszy błąd przybliżenia. Zobaczmy później, jakie są teoretyczne oszacowania reszty we wzorze Taylora.<sup>5</sup>

Oto fragment kodu, który zainteresowanym pozwoli na prowadzenie w wydziałowym laboratorium komputerowych własnych eksperymentów z wielomianami Taylora. Można samodzielnie zmieniać funkcję i dwoma suwakami zmieniać rozmiar przedziału oraz stopień wielomianu Taylora:

```
Manipulate[
 Plot[
 Evaluate[
 {1.5 Cos[x] + .5 Cos[2 * Pi * x] - x + 6,
 Normal[Series[1.5 Cos[x] + .5 Cos[2 * Pi * x] - x + 6, {x, 0, n}]]}
 ], {x, -x0, x0},
 PlotRange -> {-5, 12.5}, PlotPoints -> 120, MaxRecursion -> 3,
 PlotStyle -> {{Black, Thick}, {Blue, Thick}},
 TicksStyle -> Directive[Black, 26],
 Ticks -> {{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4}, {2, 6, 10}},
 Filling -> {2}, FillingStyle -> Directive[Opacity[.15], Gray],
 ImageSize -> {800, 500}, ImagePadding -> 20
 ],
 {{n, 5, "stopień wielomianu"}, 1, 80, 1},
 {{x0, 5, "wielkość przedziału"}, .5, 8}
 ]
```

Przejdziemy teraz do konkretnych przykładów, wskazujących m.in., jak przydatny jest wzór Taylora przy obliczaniu granic. Najpierw jednak wypiszemy rozwinięcia Taylora kilku ważnych funkcji.

**Przykład 6.56.** Posługując się wzorami na pochodne wyższych rzędów funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych, podanymi w Przykładzie 6.49, możemy teraz łatwo wypisać wzory MacLaurina dla tych funkcji. Można to zrobić dla dowolnej liczby  $n$ , gdyż rozpatrywane funkcje mają pochodne wszystkich rzędów na całej prostej.

- a) Niech  $f(x) = \exp(x)$ . Wówczas  $f^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$  dla dowolnego  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , więc wzór (6.13) dla funkcji wykładniczej przybiera postać

$$\exp(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + o(x^n) \quad \text{dla } x \rightarrow 0.$$

<sup>5</sup>Zobaczmy też, niestety, że istnieją tak ‘złośliwe’ funkcje, dla których prawa strona wzoru Taylora w pewnych punktach składa się, dla dowolnego  $n$ , z samej reszty – wtedy przybliżanie wielomianami Taylora nie wnosi żadnej informacji.

- b) Dla  $f(x) = \sin x$  mamy  $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sin 0 = 0$  (tzn. w (6.13) nie ma w ogóle składników o numerach parzystych), natomiast  $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \cos 0 = (-1)^n$  dla  $n = 0, 1, \dots$ . Wzór MacLaurina dla sinusa jest więc następujący:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r(x),$$

gdzie  $r(x) = o(x^{2n+1})$  dla  $x \rightarrow 0$ , gdyż skończyliśmy wypisywanie wielomianu MacLaurina na pochodnej rzędu  $(2n+1)$ . Zauważmy, że w tym przypadku można w istocie twierdzić, że  $r(x) = o(x^{2n+2})$  dla  $x \rightarrow 0$ , gdyż kolejny, parzysty, składnik w rozwinięciu Maclaurina jest zerem (parzyste pochodne sinusa znikają w zerze).

- c) Dla  $f(x) = \cos x$  mamy  $f^{(2n+1)}(0) = 0$  dla każdego  $n = 0, 1, \dots$ , natomiast  $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$  i dlatego

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r(x),$$

gdzie  $r(x) = o(x^{2n})$  dla  $x \rightarrow 0$  (i, jak w poprzednim podpunkcie, można zauważyć, że w istocie mamy nawet  $r(x) = o(x^{2n+1})$ , gdyż kolejny, nieparzysty, składnik rozwinięcia Maclaurina jest zerem).  $\square$

**Uwaga.** Czytelnik zauważył zapewne, że wielomiany Maclaurina w ostatnim przykładzie wyglądają tak samo, jak odpowiednie sumy częściowe szeregów, którymi posługiwieliśmy się w rozdziale 4. To nie jest przypadkowy fakt: jak zobaczymy za jakiś czas, jeśli funkcja  $f$  jest sumą szeregu,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , zbieżnego na pewnym przedziale otwartym wokół zera, to wówczas  $f$  ma pochodne wszystkich rzędów i  $f^{(k)}(0) = k! a_k$  dla każdego  $k$ .

**Przykład 6.57.** Niech  $f(x) = \ln x$  i  $x_0 = 1$ . Tym razem zastosujemy wzór Taylora w punkcie  $x_0 = 1$ . Mamy  $f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$  (patrz Przykład 6.49), a więc

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + r(x), \quad \text{gdzie } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{r(x)}{(x-1)^n} = 0.$$

Podstawiając  $x-1 = t$ , otrzymamy

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n) \quad \text{dla } t \rightarrow 0.$$

Tym wzorem też można się posługiwać dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N}$ , gdyż logarytm naturalny ma na  $(0, \infty)$  pochodne wszystkich rzędów.  $\square$

**Przykład 6.58.** Obliczymy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\ln(1+x^3)}.$$

Mamy  $\ln(1+t) = t + o(t)$ ; biorąc  $t = x^3$  stwierdzamy, że mianownik jest równy  $x^3$  z dokładnością do wyrazów niższego rzędu. Dlatego znajdziemy rozwinięcie Taylora licznika też z dokładnością do wyrazów z  $x^3$ . Wiemy, że  $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$  dla  $x \rightarrow 0$ . Zatem

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{(\sin x)^3}{6} + o((\sin x)^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{dla } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Skomentujmy ten prosty skądinąd rachunek. Po pierwsze, nie musieliszy wcześnie różniczkować złożenia  $\sin \circ \sin$ . Podstawialiśmy jeden wzór Taylora do drugiego, kontrolując błąd. Po drugie, napis ‘ $o(x^3)$ ’ oznaczał w różnych miejscach różne wyrażenia! Wiemy tylko, że ‘ $o(x^3)$  dla  $x \rightarrow 0$ ’ to funkcja, która po podzieleniu przez  $x^3$  ma w zerze granicę 0. Dlatego<sup>6</sup>  $o(x^3) + o(x^3) = o(x^3)$  oraz  $o((\sin x)^3) = o(x^3)$ , gdyż  $\frac{\sin x}{x}$  ma zerze granicę 1. Ostatecznie,

$$\frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\ln(1+x^3)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}},$$

a więc szukana granica wynosi  $1/6$ . Podkreślimy ponownie: w liczniku i mianowniku ostatniego ułamka pod tym samym symbolem  $o(x^3)$  kryją się różne wyrażenia – reszty ze wzoru Maclaurina dla różnych funkcji! Ich wspólną własnością jest jednak to, że po podzieleniu przez  $x^3$  dążą do zera. Dlatego umiemy udzielić odpowiedzi.  $\square$

Podamy teraz ogólne twierdzenie, pozwalające dokładniej szacować resztę we wzorze Taylora.

**Twierdzenie 6.59 (wzór Taylora z resztą Schlömilcha-Roche'a).** *Niech  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ma w przedziale  $(a, b)$  pochodne do rzędu  $(k+1)$  włącznie. Założmy, że  $x_0, x_0 + d \in (a, b)$ ,  $d > 0$ . Oznaczmy*

$$r_k(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Wówczas dla każdego  $x \in (x_0, x_0 + d)$  i każdego  $p > 0$  istnieje liczba  $\theta \in (0, 1)$  taka, że

$$r_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{k! \cdot p} (1 - \theta)^{k+1-p} (x - x_0)^{k+1}. \quad (6.18)$$

**Dowód.** Ustalmy  $x \in (x_0, x_0 + d)$  i rozważmy funkcję pomocniczą

$$\varphi(y) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(y)}{j!} (x - y)^j, \quad \text{gdzie } x_0 \leq y \leq x.$$

Wtedy  $\varphi(x) = 0$  i  $\varphi(x_0) = r_k(x)$ ; ponadto,  $\varphi$  jest różniczkowalna w  $[x_0, x]$ , gdyż  $f$  ma  $k+1$  pochodnych na większym przedziale. Obliczmy

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= 0 - f'(y) - \left( \frac{f^{(2)}(y)}{1!} (x - y) - \frac{f^{(1)}(y)}{1!} \right) - \left( \frac{f^{(3)}(y)}{2!} (x - y)^2 - \frac{f^{(2)}(y)}{1!} (x - y) \right) \\ &\quad - \dots - \left( \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x - y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} (x - y)^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Opuszczając nawiasy, otrzymujemy po dokonaniu redukcji

$$\varphi'(y) = -\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x - y)^k. \quad (6.19)$$

---

<sup>6</sup>To jeden z powodów, dla których tej symboliki trzeba używać z wyczuciem i ostrożnie!

Niech teraz  $\psi$  będzie funkcją ciągłą w  $[x_0, x]$ , różniczkowalną w  $(x_0, x)$ , której pochodna nie znika nigdzie w  $(x_0, x)$ . Stosując Twierdzenie Cauchy'ego (patrz Tw. 6.38; proszę samodzielnie sprawdzić, że spełnione są wszystkie założenia), otrzymujemy

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \quad \text{dla pewnego } c \in (x_0, x).$$

Korzystając z tej równości, obliczamy

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \varphi(x_0) = \underbrace{\varphi(x)}_{=0} - (\psi(x) - \psi(x_0)) \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \\ &\stackrel{(6.19)}{=} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!} (x - c)^k \cdot \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Aby zakończyć dowód, pozostaje odpowiednio dobrąć funkcję  $\psi$  i użyć powyższego wzoru dla niej. Weźmy  $\psi(y) = (x - y)^p$ . Wtedy  $\psi$  jest ciągła na  $[x_0, x]$  i  $\psi'(y) = -p(x - y)^{p-1}$  nie znika w  $(x_0, x)$ . Ponadto,  $\psi(x) = 0$  i  $\psi(x_0) = (x - x_0)^p$ . Niech  $\theta \in (0, 1)$  będzie takie, że  $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ . Wzór (6.20) przepisujemy teraz w postaci

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{k!} (x - x_0 - \theta(x - x_0))^k \cdot \frac{-(x - x_0)^p}{-p(x - x_0 - \theta(x - x_0))^{p-1}} \\ &= \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{k! \cdot p} (x - x_0)^k (1 - \theta)^k \cdot \frac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^{p-1} (1 - \theta)^{p-1}} \\ &= \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{k! \cdot p} (x - x_0)^{k+1} (1 - \theta)^{k+1-p}. \end{aligned}$$

To jest właśnie szukana postać reszty, (6.18). Dowód jest zakończony.  $\square$

Dobierając różne wartości  $p$ , można otrzymać różne konkretne postacie reszty. Bardzo znana jest tzw. reszta Lagrange'a, którą otrzymujemy dla  $p = k + 1$ . Wtedy  $k + 1 - p = 0$ , a  $k! \cdot p = (k + 1)!$ . Dlatego zachodzi następujący fakt.

**Wniosek 6.60 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a).** Założmy, że funkcja  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ma w przedziale  $(a, b)$  pochodne do rzędu  $(k+1)$  włącznie. Wówczas, dla każdego  $x_0 \in (a, b)$  i każdego  $x \in (a, b)$  istnieje taki punkt  $c$ , pośredni między  $x_0$  i  $x$ , że

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

#### 6.4.3 Warunki dostateczne istnienia ekstremów lokalnych

Posługując się wzorem Taylora, nietrudno sformułować warunki dostateczne istnienia ekstremów lokalnych, wyrażone za pomocą pochodnych wyższych rzędów. Wiemy już, że zerowanie pierwszej pochodnej funkcji nie jest warunkiem dostatecznym istnienia ekstremum lokalnego (przykład:  $f(x) = x^3$  jest ścisłe rosnąca, ale  $f'(0) = 0$ ). Jeśli jednak wiadomo, które pochodne wyższych rzędów danej funkcji znikają, a które nie, to można łatwo określić, czy w danym punkcie jest ekstremum lokalne, czy nie. Służy do tego wzór Taylora.

**Stwierdzenie 6.61.** Założmy, że  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ma w  $(a, b)$  pochodne do rzędu  $(2k - 1)$  włącznie, a ponadto istnieje  $f^{(2k)}(x_0)$ . Jeśli

$$f^{(j)}(x_0) = 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, 2k - 1, \quad \text{zas } f^{(2k)}(x_0) \neq 0,$$

to  $f$  ma w  $x_0$  ekstremum lokalne właściwe. Dokładniej, jeśli  $f^{(2k)}(x_0) > 0$ , to  $f$  ma w  $x_0$  minimum lokalne właściwe, a jeśli  $f^{(2k)}(x_0) < 0$ , to  $f$  ma w  $x_0$  maksimum lokalne właściwe.

Dowód. Rozpatrzymy tylko przypadek  $f^{(2k)}(x_0) > 0$ ; w drugim przypadku dowód jest analogiczny. Ze wzoru Taylora z resztą w postaci Peano otrzymujemy, uwzględniając założenie o znikaniu pochodnych  $f^{(j)}(x_0)$  dla  $j = 1, \dots, 2k - 1$ ,

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{2k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + r(x) = \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k} + r(x),$$

gdzie  $r(x) = o((x - x_0)^{2k})$  dla  $x \rightarrow x_0$ . Dobierzmy liczbę  $\delta > 0$  tak, aby

$$\left| \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2k}} \right| < \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} \quad \text{dla } 0 < |x - x_0| < \delta;$$

można to zrobić, posługując się wprost definicją granicy, gdyż  $\varepsilon = f^{(2k)}(x_0)/(2 \cdot (2k)!) > 0$ . Zatem, z nierówności trójkąta,

$$f(x) - f(x_0) = \left( \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} + \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2k}} \right) (x - x_0)^{2k} > \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k} > 0$$

dla wszystkich  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ . Dowód jest zakończony.  $\square$

**Stwierdzenie 6.62.** Założmy, że  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ma w  $(a, b)$  pochodne do rzędu  $2k$  włącznie, a ponadto istnieje  $f^{(2k+1)}(x_0)$ . Jeśli

$$f^{(j)}(x_0) = 0 \quad \text{dla } j = 1, \dots, 2k, \quad \text{ale } f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0,$$

to  $f$  nie ma ekstremum w punkcie  $x_0$ .

SZKIC DOWODU. Postępując tak, jak w poprzednim dowodzie, otrzymujemy

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k)!} (x - x_0)^{2k+1} + r(x),$$

przy czym dla pewnej liczby  $\delta > 0$  jest

$$\left| \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2k+1}} \right| < \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!} \right| \quad \text{dla } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Ponieważ wyrażenie  $(x - x_0)^{2k+1}$  nie ma stałego znaku, więc łatwo jest stąd wywnioskować, że i różnica  $f(x) - f(x_0)$  nie ma stałego znaku dla  $x$  bliskich  $x_0$ .  $\square$

#### 6.4.4 Warunki dostateczne wypukłości. Punkty przegięcia.

W ostatniej części tego podrozdziału powiemy o związkach pochodnej z wypukłością.

**Twierdzenie 6.63.** Założymy, że  $f: P = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna. Wówczas  $f$  jest wypukła na  $P$  (odpowiednio: ścisłe wypukła na  $P$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $f'$  jest niemalejąca na  $P$  (odpowiednio: rosnąca na  $P$ ).

Dowód. Znamy już Twierdzenie 5.76, które podaje równoważne warunki wypukłości. Trzeci warunek w tym twierdzeniu orzeka, że  $f$  jest wypukła na  $P = (a, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich  $x < y < z$  należących do  $P$  zachodzą nierówności

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Jeśli  $f$  jest ścisłe wypukła, to dla każdej trójki punktów nierówności są ostre.

Ustalmy teraz dowolne  $x < y < z \in P$  i założymy, że  $f$  jest różniczkowalna, a  $f'$  jest funkcją niemalejącą. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieją  $c_1 \in (x, y)$  oraz  $c_2 \in (y, z)$  takie, że

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

gdzie środkowa nierówność zachodzi, gdyż  $f'$  jest niemalejąca i  $c_1 < y < c_2$ . Jeśli ponadto  $f'$  jest rosnącą, to  $f'(c_1) < f'(c_2)$ . To kończy dowód w jedną stronę.

Pokażemy teraz, że jeśli  $f$  jest wypukła i  $f'$  istnieje, to  $f'(x) \leq f'(z)$  dla  $x < z \in P$ . Z Twierdzenia 5.76 wynika, że dla  $0 < h < y - x$ , gdzie  $y = \frac{x+z}{2}$  jest środkiem odcinka  $(x, z)$ , zachodzą nierówności

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq \frac{f(z) - f(z-h)}{h}.$$

Ponieważ nierówności nieostre zachowują się w granicy, więc wykonując przejście graniczne  $h \rightarrow 0$ , otrzymujemy

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq f'(z). \quad (6.21)$$

Zatem  $f'$  jest niemalejąca. Jeśli ponadto  $f$  jest ścisłe wypukła, to środkowa nierówność jest ostra, co oznacza, że wtedy  $f'(x) < f'(z)$ .  $\square$

**Uwaga.** Aby sprawdzić, że monotoniczność  $f'$  jest warunkiem dostatecznym wypukłości  $f$ , można też postąpić inaczej. Niech  $x_1 \leq x \leq y = x_2 \in P$ ,  $t \in (0, 1)$ . Funkcja

$$\psi(x) = f((1-t)x + ty) - (1-t)f(x) - tf(y)$$

ma pochodną  $\psi'(x) = (1-t)(f'((1-t)x + ty) - f'(x))$ . Zauważmy, że  $(1-t)x + ty = x + t(y-x) > x$ , gdy  $x < y$  i  $t > 0$ . Dlatego, jeśli  $f'$  jest niemalejąca, to  $\psi' \geq 0$  na  $[x_1, x_2]$ . Stąd  $\psi(x_1) \leq \psi(x_2) = 0$ , a warunek  $\psi(x_1) \leq 0$  jest po prostu nierównością Jensaena. Zauważmy, że gdy  $f'$  jest rosnącą, to nierówności w ostatnim zdaniu można zmienić na ostre.

**Wniosek 6.64.** Załóżmy, że  $f: P = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna. Wówczas:

- (i) Jeśli  $f'' > 0$  na  $P$ , to  $f$  jest ścisłe wypukła na  $P$ ;
- (ii) Jeśli  $f'' \geq 0$  na  $P$ , to  $f$  jest wypukła na  $P$ ;
- (iii) Jeśli  $f'' < 0$  na  $P$ , to  $f$  jest ścisłe wklesła na  $P$ ;
- (iv) Jeśli  $f'' \leq 0$  na  $P$ , to  $f$  jest wklesła na  $P$ .

Dowód. Wystarczy zastosować poprzednie twierdzenie i Wniosek 6.42, podający warunki dostateczne monotoniczności funkcji różniczkowej.  $\square$

**Uwaga.** Należy pamiętać, że mówimy tu tylko o *dostatecznych* warunkach wypukłości. Funkcja wypukła może przecież w pewnych punktach nie mieć nawet pierwszej pochodnej (przykład:  $f(x) = |x|$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ), a tym bardziej drugiej. Stosując Twierdzenie 5.76, można dość łatwo wykazać, że funkcja wypukła ma w każdym punkcie pochodne jednostronne i jest różniczkowalna poza zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Szczegóły pozostawiamy w charakterze zadania.

**Definicja 6.65 (punkty przegięcia).** Niech  $f: P = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła i niech ma w punkcie  $x_0 \in P$  skończoną lub nieskończoną pochodną. Załóżmy, że istnieje taka liczba  $\delta_0 > 0$ , że dla każdej  $\delta \in (0, \delta_0)$  funkcja  $f$  nie jest liniowa na żadnym z przedziałów  $(x_0, x_0 - \delta)$  i  $(x_0, x_0 + \delta)$ , a ponadto na jednym z nich jest wypukła, zaś na drugim – wklesła. Mówimy wtedy (i tylko wtedy), że  $f$  ma punkt przegięcia w  $x_0$ .

Można spotkać w literaturze inne, *nierównoważne* powyższej, definicje punktów przegięcia – np. taką:

Niech  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna w  $x_0 \in (a, b)$  i niech  $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  będzie styczną do wykresu  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$ . Mówimy, że  $f$  ma w  $x_0$  punkt przegięcia, gdy funkcja  $f(x) - y(x)$  zmienia znak w punkcie  $x_0$ .

Geometricznie biorąc, powyższe określenie oznacza, że wykres  $f$  przechodzi z jednej strony stycznej na drugą. *Nie wymagamy*, żeby na ustalonym przedziale z jednej strony  $x_0$  funkcja była wklesła, a z drugiej wypukła.

**Zadanie 6.66.** Niech

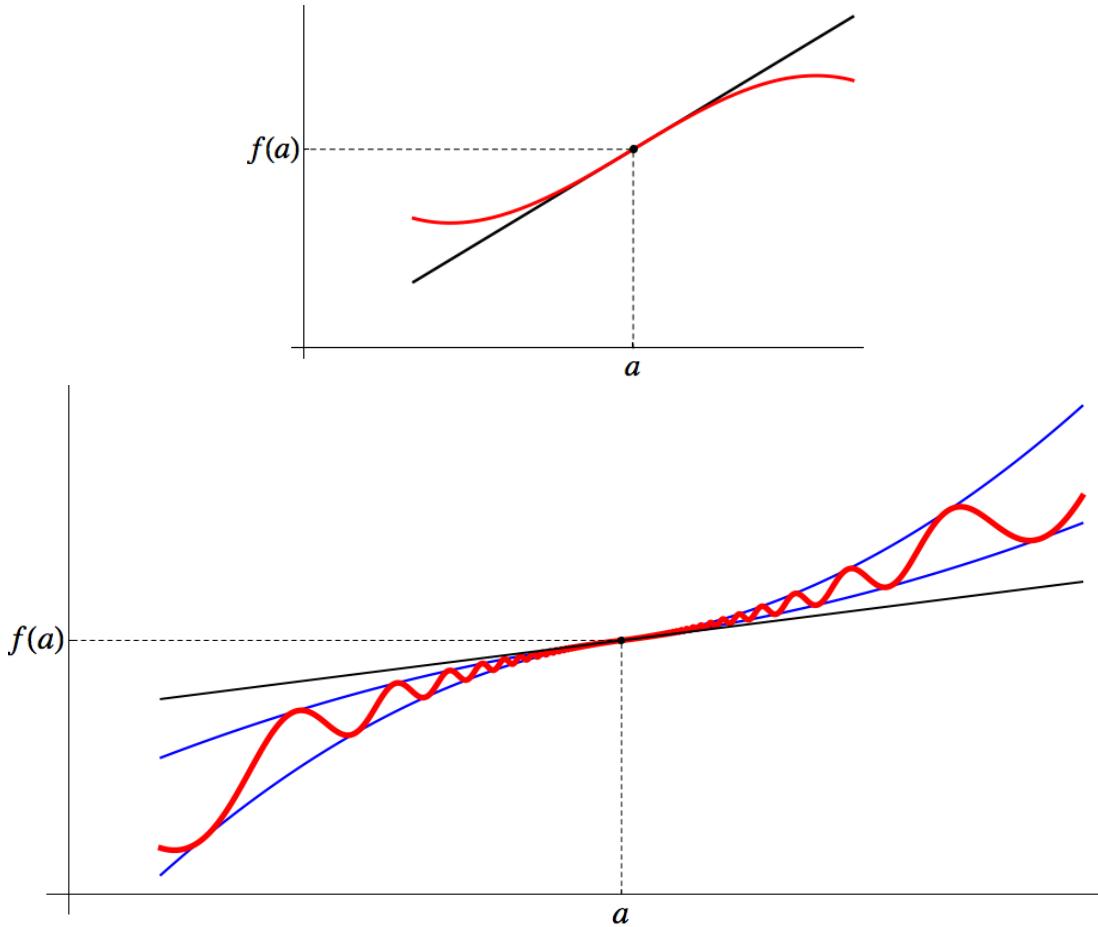
$$f(x) = \begin{cases} x^2(2 + \sin(1/x)), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

będzie funkcją z Przykładu 6.46 i niech  $g(x) = f(x)$  dla  $x \geq 0$ ,  $g(x) = -f(x)$  dla  $x < 0$ . Sprawdzić, że  $g$  nie ma w  $x_0 = 0$  punktu przegięcia w sensie Definicji 6.65, ale funkcja

$$g(x) - (g(x_0) + g'(x - x_0)(x - x_0))$$

jest dodatnia dla  $x > x_0 = 0$  i ujemna dla  $x < x_0 = 0$ , tzn. wykres  $g$  przechodzi w zerze z jednej strony stycznej na drugą.

**Stwierdzenie 6.67.** Załóżmy, że  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna na  $(a, b)$  i trzykrotnie różniczkowalna w  $x_0 \in (a, b)$ , przy czym  $f^{(3)}(x_0) \neq 0 = f''(x_0)$ . Wtedy  $f$  ma w  $x_0$  punkt przegięcia.



U góry: punkt przegięcia. U dołu: wykres funkcji przechodzi na drugą stronę stycznej, jednak w dowolnie małym przedziale  $(a, a + \delta)$  są zarówno odcinki, na których funkcja jest wklęsła, jak i odcinki, na których funkcja jest wypukła. Konkretny przykład takiej sytuacji można znaleźć w Zadaniu 6.66.

**Dowód.** Bez zmiany ogólności założymy, że  $f^{(3)}(x_0) > 0$ . Ponieważ

$$0 < f^{(3)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h) - f''(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h)}{h},$$

więc dla wszystkich dostatecznie małych  $h > 0$  jest  $f''(x_0 + h) > 0 > f''(x_0 - h)$ . Zatem  $f$  jest ściśle wypukła na pewnym przedziale  $(x_0, x_0 + \delta_0)$  i ściśle wklęsła na pewnym przedziale  $(x_0 - \delta_0, x_0)$ . Na żadnym z tych przedziałów (ani na mniejszych przedziałach, w nich zawartych)  $f$  oczywiście nie jest liniowa, a ponadto  $f'(x_0)$  istnieje, gdyż  $f$  jest dwukrotnie różniczkowalna. Spełnione są więc wszystkie warunki Definicji 6.65.  $\square$

**Uwaga 6.68.** Przy założeniach ostatniego stwierdzenia funkcja

$$h(x) = f(x) - \left( f(x_0) + f'(x - x_0)(x - x_0) \right)$$

zmienia znak w punkcie  $x_0$ , gdyż ze wzoru Taylora z resztą w postaci Peano wynika, że

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3) \\ &= \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3) \quad \text{dla } x \rightarrow x_0; \end{aligned}$$

znak prawej strony określamy tak samo, jak w dowodzie Stwierdzenia 6.62. Z intuicyjnego punktu widzenia, przy założeniach  $f^{(3)}(x_0) \neq 0 = f''(x_0)$  różnica  $h$  między  $f$  i styczną do wykresu  $f$  zachowuje się w otoczeniu punktu  $x_0$  – z dokładnością do zaniedbywalnego błędu – tak, jak pewna wielokrotność  $(x - x_0)^3$ . Widać, że przy takich założeniach oba przytoczone określenia punktu przegięcia są równoważne (a patologie takie, jak w Zadaniu 6.66, są wykluczone).

**Zadanie 6.69.** Sprawdzić, że przy założeniach Stwierdzenia 6.62  $f$  ma w  $x_0$  punkt przegięcia.

**Wskazówka.** Spróbować naśladować dowód Stwierdzenia 6.67.

## 6.5 Reguła de l'Hospitala

Sformułujemy teraz kilka wariantów tak zwanej reguły de l'Hospitala, która ułatwia obliczanie granic wyrażeń nieoznaczonych typu  $\frac{0}{0}$  i  $\frac{\infty}{\infty}$ . Jest to narzędzie wygodne i warto je znać. Zobaczmy jednak przykłady sytuacji, gdy reguła de l'Hospitala prowadzi do koszmarnych rachunków i z kretesem przegrywa konkurencję z wzorem Taylora.

**Twierdzenie 6.70.** Założmy, że  $f, g: \mathbb{R} \supset P \rightarrow \mathbb{R}$  są różniczkowalne w punkcie skupienia  $a \in P$  zbioru  $P \subset \mathbb{R}$ , a ponadto  $f(a) = g(a) = 0 \neq g'(a)$ . Wtedy granica

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

istnieje i jest równa  $f'(a)/g'(a)$ .

**Dowód.** Z założen  $f(a) = g(a) = 0 \neq g'(a)$  wynika, że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)}$$

(ostatni ułamek ma sens: blisko punktu  $a$  jest  $g(x) \neq g(a)$ , gdyż  $g'(a) \neq 0$ ). Z twierdzenia o granicy iloczynu i definicji pochodnej wynika natychmiast, że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \rightarrow f'(a) \cdot \frac{1}{g'(a)} \quad \text{gdy } x \rightarrow a. \quad \square$$

**Twierdzenie 6.71.** Założmy, że  $f, g: \mathbb{R} \supset P \rightarrow \mathbb{R}$  są  $(k-1)$ -krotnie różniczkowalne w przedziale  $P \subset \mathbb{R}$ . Jeśli  $a$  jest punktem wewnętrznym  $P$  i

$$f^{(j)}(a) = g^{(j)}(a) = 0 \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, k-1, \quad \text{ale } g^{(k)}(a) \neq 0,$$

to granica

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

istnieje i jest równa  $f^{(k)}(a)/g^{(k)}(a)$ .

Dowód. Posługując się wzorem Taylora z resztą Peano i założeniem o znikaniu odpowiednich pochodnych  $f$  i  $g$ , możemy napisać:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k)}{\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k)} = \frac{f^{(k)}(a) + \frac{o((x-a)^k)}{(x-a)^k}}{g^{(k)}(a) + \frac{o((x-a)^k)}{(x-a)^k}} \quad \text{dla } x \rightarrow a.$$

(Zauważmy, że w otoczeniu punktu  $a$  mianownik nie będzie się zerował, gdyż  $g^{(k)}(a) \neq 0$ .) Stąd natychmiast wynika teza.  $\square$

Kolejny wariant od dwóch poprzednich różni się tym, że *nie zakładamy różniczkowalności* obu funkcji w punkcie  $a$ .

**Twierdzenie 6.72.** Założymy, że funkcje ciągłe  $f, g: [a, a+d] \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $d > 0$ , są różniczkowalne w przedziale otwartym  $(a, a+d)$ ,  $g'(x) \neq 0$  na  $(a, a+d)$  i  $f(a) = g(a) = 0$ . Jeśli istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow a} (f'(x)/g'(x)) = A$ , to istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$  i też jest równa  $A$ .

Szkic dowodu. Tym razem skorzystamy z twierdzenia Cauchy'ego i napiszemy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}, \quad \text{gdzie } a < \xi_x < x. \quad (6.22)$$

Posługując się wprost definicją granicy (wg. Cauchy'ego), nietrudno stwierdzić, że dla  $x \rightarrow a$  prawa strona dąży do  $A$ , a więc i lewa strona dąży do  $A$ . Czytelnik zechce uzupełnić wszystkie szczegóły rozumowania.  $\square$

**Uwaga 6.73.** Regułę de l'Hospitala w wersji podanej w Twierdzeniu 6.72 wolno stosować nie tylko dla  $A \in \mathbb{R}$ , ale także w przypadku  $A = \pm\infty$ . Jeśli np.  $A = +\infty$ , to dla dowolnej liczby  $M > 0$  znajdziemy  $\eta > 0$  takie, że  $f'(\xi)/g'(\xi) > M$  na przedziale  $(a, a+\eta)$ . Jeśli  $x \in (a, a+\eta)$ , to  $\xi_x$  we wzorze (6.22) też jest punktem przedziału  $(a, a+\eta)$  i dlatego dla  $x \in (a, a+\eta)$  lewa strona (6.22) jest większa od  $M$ .

**Uwaga 6.74.** W Twierdzeniu 6.72 punkt  $a \in \mathbb{R}$  można zastąpić przez  $\pm\infty$ . Uzasadnienie nie jest skomplikowane. Wystarczy przyjąć, że

$$F(t) = f(1/t), \quad G(t) = g(1/t);$$

wtedy (powiedzmy, że  $a = +\infty$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)}.$$

Mamy też, dzięki wzorowi na pochodną złożenia,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^{-2}f'(1/t)}{-t^{-2}g'(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

W ostatniej wersji reguła de l'Hospitala przenosi się na nieoznaczone typu  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Twierdzenie 6.75.** Niech  $f, g$  będą różniczkowalne w przedziale  $(a, a+d)$ ,  $g'(x) \neq 0$  na  $(a, a+d)$  i  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ . Jeśli istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow a} (f'(x)/g'(x)) = A$ , to istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$  i też jest równa  $A$ .

**Dowód.** Dla ustalenia uwagi rozpatrzymy przypadek  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  i  $A \in \mathbb{R}$ . Niech  $a < x < x_0 < a + d$ . Wtedy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - (f(x_0)/f(x))}{1 - (g(x_0)/g(x))}.$$

Dla ustalonego  $x_0$ , ułamek

$$U(x_0, x) = \frac{1 - (g(x_0)/g(x))}{1 - (f(x_0)/f(x))}$$

ma dla  $x \rightarrow a$  granicę równą 1, gdyż  $f, g \rightarrow +\infty$  dla  $x \rightarrow a$ . Posługując się twierdzeniem Cauchy'ego, by wyrazić stosunek przyrostów funkcji  $f$  i  $g$ , piszemy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot U(x_0, x) = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot U(x_0, x), \quad \text{gdzie } a < x < \xi_x < x_0. \quad (6.23)$$

Dlatego

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| &= \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} + \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| \\ &\stackrel{(6.23)}{=} \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} (U(x_0, x) - 1) + \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| \\ &\leq \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \right| \cdot |U(x_0, x) - 1| + \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right|. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ustalmy  $\varepsilon \in (0, 1)$  i liczbę  $\eta \in (0, 1)$ , którą dobierzemy do  $\varepsilon$  później. Korzystając z założenia o istnieniu granicy ilorazu pochodnych, weźmy taki punkt  $x_0 \in (a, a+d)$ , aby  $|\frac{f'(t)}{g'(t)} - A| < \eta$  dla wszystkich  $t \in (a, x_0)$ . Wreszcie, ustaliwszy już  $x_0$ , wybierzmy liczbę  $\delta \in (0, |x_0 - a|)$  tak, aby  $|U(x_0, x) - 1| < \eta$  dla wszystkich  $x \in (a, a+\delta)$ . Szacując prawą stronę (6.24), otrzymujemy teraz

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \right| \cdot \eta + \eta \leq (|A| + \eta)\eta + \eta < (|A| + 1 + 1)\eta < \varepsilon$$

dla wszystkich liczb  $x \in (a, a+\delta)$ ; aby zachodziła ostatnia nierówność, wystarczy wziąć np.  $\eta = \varepsilon/(|A| + 3)$ .  $\square$

**Zadanie 6.76.** Przeprowadzić dowód ostatniego twierdzenia dla  $A = \pm\infty$ .

Założenie o *istnieniu* granicy ilorazu  $f'/g'$  jest istotnie i nie można go pominać.

**Przykład 6.77.** Oczywiście,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{2x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{2x}}{1 - \frac{\sin x}{2x}} = 1.$$

Jednak, oznaczając  $f(x) = 2x + \sin x$ ,  $g(x) = 2x - \sin x$ , otrzymujemy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x},$$

a ten iloraz nie ma granicy dla  $x \rightarrow \infty$ . (Można wykazać, że każda liczba  $z \in [\frac{1}{3}, 3]$  jest granicą ciągu  $f'(x_n)/g'(x_n)$  dla pewnego ciągu  $(x_n)$ , który dąży do nieskończoności).

Teraz omówimy kilka przykładów zastosowań reguły de l'Hospitala.

**Przykład 6.78.** Zaczniemy od nieoznaczoności typu  $\frac{0}{0}$ . Obliczmy granicę  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ , gdzie  $f(x) = e^x - e^{-x} - x$  i  $g(x) = \sin x - 2x$ . Mamy  $f(0) = g(0) = 0$ . Jest  $f'(x) = e^x + e^{-x} - 1$  i  $g'(x) = \cos x - 2$ , więc  $f'(0)/g'(0) = 1/(-1) = -1$ . Dlatego granica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - x}{\sin x - 2x}$$

istnieje i jest równa  $-1$ . (Posłużyliśmy się Twierdzeniem 6.70).

**Przykład 6.79.** Obliczmy granicę  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ , gdzie  $f(x) = e^x - e^{-x} - x$  i  $g(x) = \sin x - x$ . Mamy  $f(0) = g(0) = 0$ . Jest  $f'(x) = e^x + e^{-x} - 1$  i  $g'(x) = \cos x - 1$ , więc wartości  $f'(0)/g'(0)$  nie można określić. Iloraz  $f'(x)/g'(x) \rightarrow -\infty$  dla  $x \rightarrow 0^+$  ilatego granica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - x}{\sin x - x}$$

istnieje i jest równa  $-\infty$ . (Tym razem posłużyliśmy się Twierdzeniem 6.72 i Uwagą 6.73).

**Przykład 6.80.** Obliczmy granicę  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ , gdzie tym razem  $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$  oraz  $g(x) = \sin x - x$ . Łatwo sprawdzić, że

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = g(0) = g'(0) = g''(0) = 0, \quad \text{ale } g'''(0) = -\cos 0 = -1.$$

Ponieważ  $f'''(0) = e^0 + e^{-0} = 2$ , więc na mocy Twierdzenia 6.71

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'''(0)}{g'''(0)} = -2.$$

**Przykład 6.81.** Ten przykład jest nieco bardziej skomplikowany. Obliczymy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}.$$

Niech  $f(x) = (1+x)^{1/x} - e$  dla  $x > 0$ . W punkcie  $x = 0$  kładziemy  $f(0) = 0$ . Ponieważ  $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$  dla  $x \rightarrow 0^+$  (to można sprawdzić, obliczając granicę prawostronną w zerze funkcji  $\ln((1+x)^{1/x}) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ ), a następnie korzystając z ciągłości funkcji wykładniczej), więc otrzymamy w ten sposób funkcję ciągłą  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , różniczkowalną dla  $x > 0$ .

Ponadto, niech  $g(x) = x$ . Wtedy  $g(0) = 0$  i  $g'(x) = 1$  dla wszystkich  $x$ . Aby zastosować Twierdzenie 6.72, obliczamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \right)' \\ &= \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \cdot \left( \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) \\ &= (1+x)^{1/x} \cdot \left( \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Twierdzenie 6.72 pozwala teraz sprowadzić istnienie granicy  $f/g$  do istnienia granicy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)}. \quad (6.26)$$

Niech teraz  $F(x) = x - (x+1)\ln(1+x)$ ,  $G(x) = x^2(x+1) = x^3 + x^2$ . Mamy

$$F'(x) = 1 - \ln(1+x) - 1 = -\ln(1+x), \quad G'(x) = 3x^2 + 2x,$$

więc  $F(0) = G(0) = F'(0) = G'(0) = 0$ , natomiast

$$F''(x) = -\frac{1}{1+x}, \quad G''(x) = 6x + 2,$$

tzn.  $F''(0) = -1$ ,  $G''(0) = 2$  i na mocy Twierdzenia 6.71 otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) \stackrel{(6.26)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} \stackrel{\text{Tw. 6.71}}{=} \frac{F''(0)}{G''(0)} = -\frac{1}{2}.$$

Podstawiając ten wynik do (6.25) i korzystając z równości  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e$ , otrzymujemy teraz, stosując Twierdzenie 6.72,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{e}{2}.$$

Ponieważ  $-e/2 < -1$ , więc otrzymujemy z ostatniego przykładu następujący wniosek.

**Wniosek 6.82.** Dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$  zachodzi nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e - \frac{1}{n}$$

Dowód. Dla ciągu  $x_n = \frac{1}{n}$ , przy oznaczeniach z ostatniego przykładu, z pewnością zachodzi warunek:  $f(x_n)/g(x_n) < -1$  dla wszystkich dostatecznie dużych  $n$  (posługujemy się definicją Heinego granicy funkcji i Stwierdzeniem 2.14). Równoważnie,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = f(x_n) + e < e - g(x_n) = e - \frac{1}{n},$$

a to jest teza wniosku.  $\square$

Widzimy zatem, że ciąg  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  jest zbieżny do swojej granicy, liczby  $e$ , dość wolno: odstęp  $e - a_n$  jest większy od  $\frac{1}{n}$ . Do wszelkich celów związanych z praktycznymi obliczeniami używa się rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg, które poznaliśmy w Rozdziale 4.

**Przykład 6.83.** Logarytm rośnie w nieskończoności wolniej, niż dowolna funkcja potęgowa o wykładniku dodatnim. Innymi słowy, dla każdego  $\omega > 0$  jest

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\omega} = 0,$$

gdyż dla  $f(x) = \ln x$  i  $g(x) = x^\omega$  mamy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1/x}{\omega x^{\omega-1}} = \frac{1}{\omega x^\omega} \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty.$$

Zauważmy: tym razem chodziło o nieoznaczoność typu  $\frac{\infty}{\infty}$  i skorzystaliśmy z Twierdzenia 6.75.

**Zadanie 6.84.** Proszę samodzielnie wykazać, używając metody z ostatniego przykładu, że dla dowolnych liczb  $\omega > 0$  i  $a > 1$  jest

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\omega}{a^x} = 0.$$

Ile razy trzeba zastosować regułę de l'Hospitala, żeby uzyskać odpowiedź?

Z ostatniego zadania i ostatniego przykładu wynika ponownie morał, który skądinął Czytelnik miał szansę poznać wcześniej, rozwiązuając elementarnymi metodami wiele konkretnych zadań o granicach ciągów:

Dla  $x \rightarrow +\infty$ :

1. Logarytm naturalny dąży do nieskończoności wolniej, niż dowolna funkcja potęgowa o wykładniku dodatnim;
2. Funkcja wykładnicza dąży do nieskończoności szybciej, niż dowolny wielomian.

**Przykład 6.85.** W ostatnim przykładzie wskażemy granicę, którą można względnie łatwo określić, stosując wzór Taylora, natomiast używanie reguły de l'Hospitala jest raczej skazane na porażkę. Obliczymy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x - \sin x)^{4/3} \ln(1/\cos x)}{(\exp(x - \sin x) - 1)^2}.$$

Korzystając z rozwinięć Taylora–Maclaurina funkcji trygonometrycznych,  $\exp t$  i  $\ln(1+t)$ , które poznaliśmy w poprzednim podrozdziale, możemy dla  $x \rightarrow 0$  napisać

$$\begin{aligned} \ln(1/\cos x) &= -\ln \cos x = -\ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2); \\ \exp(x - \sin x) - 1 &= \exp \left(x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right) - 1 = \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Funkcja  $h(x) = \arcsin x$  ma pochodne

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}, \\ h''(x) &= -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = x(1-x^2)^{-3/2}, \\ h'''(x) &= (1-x^2)^{-3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(1-x^2)^{-5/2} \cdot (-2x) = (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

Zatem  $h(0) = h''(0) = 0$ ,  $h'(0) = h'''(0) = 1$ , i ze wzoru Maclaurina z resztą Peano otrzymujemy

$$\arcsin x = h(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{dla } x \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{In[9]:=} & \mathbf{D}[(\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{4/3} * \text{Log}[1/\cos[x]], \{x, 3\}] \\
 \text{Out[9]=} & \left\{ 4 \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos[x] \right) \sec[x]^2 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{1/3} + \right. \\
 & \text{Log}[\sec[x]] \left( -\frac{8 \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos[x] \right)^3}{27 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{5/3}} + \frac{4}{3} \left( \frac{3 x^2}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} + \cos[x] \right) \right. \\
 & \left. \left. (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{1/3} + \frac{4 \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos[x] \right) \left( \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} + \sin[x] \right)}{3 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{2/3}} \right) + \right. \\
 & 2 \sec[x]^2 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{4/3} \tan[x] + \\
 & \left. 3 \left( \frac{4 \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos[x] \right)^2}{9 (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{2/3}} + \frac{4}{3} (\text{ArcSin}[x] - \sin[x])^{1/3} \left( \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} + \sin[x] \right) \right) \tan[x] \right\}
 \end{aligned}$$

Stosowanie reguły de l'Hospitala nie zawsze jest dobrym pomysłem. Trzecią pochodną funkcji

$$(\arcsin x - \sin x)^{4/3} \cdot \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

można obliczyć, ułatwiając sobie pracę: załączony zrzut ekranu pokazuje wynik obliczeń symbolicznych, wykonanych przez komputer. Czytelnik powinien sobie teraz wyobrazić, że przedstawiony wynik ma trzykrotnie zróżniczkować za pomocą kartki i ołówka. Obliczanie granicy z Przykładu 6.85 tylko przy użyciu reguły de l'Hospitala jest zajęciem dość absurdalnym.

Stąd, ponieważ  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  dla  $x \rightarrow 0$ ,

$$\arcsin x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Teraz możemy zakończyć rachunki. Otóż,

$$\begin{aligned}
 \frac{(\arcsin x - \sin x)^{4/3} \ln(1/\cos x)}{(\exp(x - \sin x) - 1)^2} &= \frac{\left(\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)^2} \quad \text{dla } x \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

(pisząc drugą równość, po prostu skróciliśmy ułamek przez  $x^6$ ). Dlatego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x - \sin x)^{4/3} \ln(1/\cos x)}{(\exp(x - \sin x) - 1)^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{4/3} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 6^2 \cdot 3^{-4/3} 2^{-1} = 2 \cdot 3^{2/3}.$$

Proszę zauważyc: o wartości granicy wnioskowaliśmy, dzieląc licznik i mianownik przez  $x^6$ . To oznacza, że ważne były wartości szóstych pochodnych licznika i mianownika w zerze! Jednak różniczkując licznik i mianownik, otrzymujemy coraz bardziej skomplikowane wyrażenia; nic się wtedy nie upraszcza...

Warto zatem pamiętać, że wzór Taylora jest znacznie bardziej uniwersalnym narzędziem niż reguła de l'Hospitala.

**Przykład 6.86.** Wskażemy funkcję, dla której prawa strona wzoru Taylora-Maclaurina zawsze składa się *tylko z reszty*; wszystkie inne składniki są zerami. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że  $f$  jest ciągła w zerze. Nietrudno też zauważyc, a następnie wykazać przez indukcję, że dla  $x \neq 0$  zachodzi wzór

$$f^{(n)}(x) = \exp(-1/x^2) \cdot W_n(1/x),$$

gdzie  $W_n(t)$  jest pewnym wielomianem zmiennej  $t$  o współczynnikach całkowitych. Korzystając z tej własności, nietrudno udowodnić, że  $f^{(n)}(0) = 0$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Istotnie, dla  $n = 0$  wynika to wprost z definicji  $f$ , a jeśli wiemy już, że  $f^{(n)}(0) = 0$ , to

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(-1/x^2) \cdot W_n(1/x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t W_n(t)}{e^t} = 0$$

na mocy reguły de l'Hospitala. Dla tej funkcji używanie wzoru Taylora–Maclaurina do jej przybliżania nic nie daje!

# Dodatki do rozdziału 6

## 6.A Metoda stycznych (Newtona)

Omówimy w tym podrozdziale prostą wersję tak zwanej metody stycznych Newtona, służącej do przybliżonego rozwiązywania równań typu  $f(x) = 0$ .

Zacznijmy od przytoczenia zadania, które w połowie lat 90-tych dwudziestego wieku pojawiło się na zawodach drugiego etapu Olimpiady Matematycznej.

**Zadanie 6.87.** Dane są dwa ciągi liczb rzeczywistych,  $x_1 = y_1 = 1$  oraz

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 2}{y_n + 1}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykazać, że  $x_{n+1} = y_{2^n}$  dla wszystkich  $n = 1, 2, 3, \dots$

Zadanie ma kilka rozwiązań. To, które przedstawimy, nie jest najkrótsze, ale ma tę zaletę, że pozwala głębiej zrozumieć, skąd pochodzi problem i co jest w nim istotne.

**Rozwiązanie.** Wypiszmy tabelkę z początkowymi wyrazami obu ciągów.

$n$	1	2	3	4	5
$y_n$	1	1,5	1,4	1,416...	1,41379...
$y_n^2$	1	2,25	1,96	2,006...	1,9988...
$x_n$	1	1,5	1,416...	1,4142...	1,4142135...
$x_n^2$	1	2,25	2,006...	2,000006...	2,000000000004...

Widać, że kwadraty liczb  $x_n$  są coraz bliższe 2 (podobnie zresztą jak kwadraty liczb  $y_n$ ). Łatwo jest zauważyc, że *gdyby ciąg  $x_n$  był zbieżny, to jego granicą byłaby liczba  $g = \sqrt{2}$ .* Dlaczego? Jeśli  $\lim x_n = g$  istnieje, to musi spełniać równość<sup>7</sup>  $2g \cdot g = g^2 + 2$ , lub równoważnie  $g^2 = 2$ . Ponieważ wszystkie  $x_n$  są dodatnie, więc możliwość  $g = -\sqrt{2}$  odrzucamy.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla ciągu  $y_n$ . Jeśli  $\lim y_n = g$ , to liczba  $g$  spełniałaby równość  $g = (g + 2)/(g + 1)$  i była nieujemna, więc byłoby  $g = \sqrt{2}$ .

Pokażemy, że oba ciągi są zbieżne do  $\sqrt{2}$ . W tym celu wyrazimy zarówno  $x_n$ , jak i  $y_n$ , jawnymi wzorami.

<sup>7</sup>Mnożymy obie strony wzoru rekurencyjnego przez  $2x_n$  i przechodzimy do granicy, korzystając z twierdzenia o granicy sumy i iloczynu ciągów zbieżnych

Zbadajmy, jak zmieniają się różnice  $y_n - \sqrt{2}$  i  $x_n - \sqrt{2}$ , gdy zmienia się liczba  $n$ . Ze wzoru na  $y_{n+1}$  wynika, że

$$\begin{aligned} y_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{y_n + 2}{y_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{y_n + 2 - y_n\sqrt{2} - \sqrt{2}}{y_n + 1} \\ &= \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + 1} (1 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Gdy do  $y_{n+1}$  dodamy pierwiastek z dwóch, otrzymamy

$$y_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{y_n + \sqrt{2}}{y_n + 1} (1 + \sqrt{2}).$$

(Wystarczy przepisać poprzedni rachunek, zastępując wszystkie minusy plusami). Krótko mówiąc,

$$y_{n+1} \pm \sqrt{2} = \frac{y_n \pm \sqrt{2}}{y_n + 1} (1 \pm \sqrt{2}).$$

Można te dwa równania podzielić stronami,

$$\frac{y_{n+1} - \sqrt{2}}{y_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}},$$

i wywioskować stąd, że ciąg

$$z_n = \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}}$$

jest geometryczny, a jego iloraz jest równy  $a = (1 - \sqrt{2})/(1 + \sqrt{2})$ ; dlatego

$$z_{n+1} = a \cdot z_n = a \cdot (a \cdot z_{n-1}) = \dots = a^n \cdot z_1 = a^{n+1}.$$

Stąd łatwo wyliczamy (rozwiązujejąc równanie z jedną niewiadomą):

$$y_n = \sqrt{2} \cdot \frac{1 + a^n}{1 - a^n}, \quad \text{gdzie } a = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}. \quad (6.27)$$

Ponieważ  $|a| < 1$ , więc  $a^n \rightarrow 0$ , a zatem  $y_n \rightarrow \sqrt{2}$ .

Z ciągiem  $x_n$  postępujemy tak samo: obliczamy  $x_{n+1} \pm \sqrt{2}$ , posługując się w tym celu zależnością  $x_{n+1}$  od  $x_n$ . Otrzymujemy tym razem

$$\begin{aligned} x_{n+1} \pm \sqrt{2} &= \frac{x_n^2 - 2x_n \cdot \sqrt{2} + 2}{2x_n} \\ &= \frac{(x_n \pm \sqrt{2})^2}{2x_n}. \end{aligned}$$

Jak wcześniej, dzielimy te dwa równania stronami, żeby pozbyć się niewygodnego mianownika:

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \left( \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} \right)^2.$$

Krótko mówiąc, jeśli  $w_n = (x_n - \sqrt{2})/(x_n + \sqrt{2})$ , to

$$w_{n+1} = w_n^2 = (w_{n-1}^2)^2 = \dots = w_1^{2^n}.$$

Zachodzi więc równość

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = w_1^{2^n} = a^{2^n}.$$

Stąd

$$x_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 + a^{2^n}}{1 - a^{2^n}}, \quad \text{gdzie } a = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}. \quad (6.28)$$

Teza zadania jest prostym wnioskiem z otrzymanych wzorów (6.27), (6.28).  $\square$

Wykazaliśmy więcej, niż wymagał autor zadania. Zanleźliśmy konkretne wzory na  $x_n$  i  $y_n$ . Sprawdziliśmy też, że każdy z tych ciągów składa się z wymiernych przybliżeń  $\sqrt{2}$ . Które przybliżenia są lepsze? Oczywiście te, które daje ciąg  $x_n$ . Wszak  $x_{n+1} = y_{2^n}$ . Z równości  $w_{n+1} = w_n^2$ , którą spełniają liczby  $w_n = (x_n - \sqrt{2})/(x_n + \sqrt{2})$ , można wywnioskować, że liczba cyfr znaczących przybliżenia  $x_n \approx \sqrt{2}$  ulega z grubsza podwojeniu, gdy zwiększamy  $n$  o 1. (Intuicyjnie biorąc, powód jest taki:  $w_n \approx 0$  z dużą dozą dokładności; przechodząc do  $w_{n+1}$ , błąd przybliżenia podnosimy do kwadratu. Proszę sprawdzić, jak zmienia się przy takiej operacji liczba zer po przecinku.) Postawmy teraz naturalne pytanie: *no dobrze, ale skąd właściwie wzięły się oba ciągi?* Czy to tylko przypadkowy temat jakiegoś olimpijskiego zadania?

Otoż nie. Ciąg  $y_n$  to kolejne przybliżenia  $\sqrt{2}$  za pomocą ułamków łańcuchowych. Co to znaczy? Ponieważ  $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$ , więc

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}.$$

Postępując dalej podobnie, tzn. zastępując różnicę  $\sqrt{2} - 1$  ułamkiem  $1/(2 + (\sqrt{2} - 1))$ , otrzymamy coraz bardziej fantazyjne piętrowe ułamki:

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}}}, \quad \dots$$

Gdybyśmy usunęli nawiasy  $(\sqrt{2} - 1)$  i zostawili tylko jedynki w kolejnych licznikach, dwójki, plusy i kreski ułamkowe, otrzymalibyśmy liczby  $y_n - 1$  (z przesunięciem numeracji i zapisane w niewygodnej postaci). Można to udowodnić przez indukcję.

Natomiast ciąg  $x_n$  to kolejne przybliżenia  $\sqrt{2}$  otrzymywane metodą stycznych.<sup>8</sup> Jest to bardzo użyteczny sposób, który pozwala szybko i wygodnie znajdować przybliżone rozwiązania bardzo wielu równań – także i takich, których nie potrafimy rozwiązać jawnie.

Sformułujmy teraz precyzyjny, ogólny wynik.

---

<sup>8</sup>Wg. historyków matematyki, metodę stycznych Newton obmyślił ok. roku 1670.

**Twierdzenie 6.88 (metoda stycznych).** Załóżmy, że  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą na  $[a, b]$  i dwukrotnie różniczkowalną w  $(a, b)$ . Załóżmy także, że  $f(a) < 0 < f(b)$  oraz istnieją stałe  $m_1 > 0$  i  $M_2 > 0$  takie, że

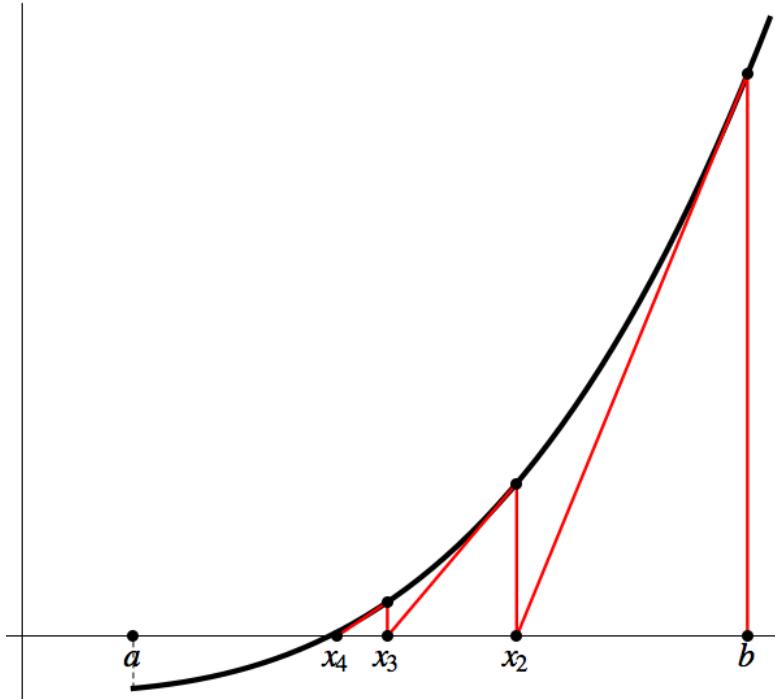
$$f'(x) > m_1 > 0, \quad 0 < f''(x) < M_2 \quad \text{dla wszystkich } x \in (a, b). \quad (6.29)$$

Wówczas ciąg rekurencyjny

$$x_1 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

jest malejący, a jego granica  $c = \lim x_n$  jest jedynym punktem przedziału  $[a, b]$  takim, że  $f(c) = 0$ . Ponadto, zachodzi oszacowanie

$$|c - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |c - x_n|^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.30)$$



Metoda stycznych:  $f$  jest rosnąca i wypukła na  $(a, b)$ , wewnętrz tego przedziału ma jedno miejsce zerowe.

**Uwaga 6.89.** Nietrudno zauważyc, że  $x_{n+1}$  jest miejscem zerowym stycznej do wykresu  $f$ , poprowadzonej w punkcie  $(x_n, f(x_n))$ ; ma ona równanie

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

a zatem  $y = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x - x_n = -f(x_n)/f'(x_n)$ , a więc wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = x_{n+1}$ . (Patrz także zamieszczony rysunek, który ułatwia zrozumienie całej sytuacji).

Dowód. Z założeń wynika, że  $f$  jest rosnąca i ściśle wypukła na  $[a, b]$ . Ponieważ  $f(b) > 0 > f(a)$ , więc  $f$  ma w  $(a, b)$  dokładnie jedno miejsce zerowe  $c$  (jedyność wynika z monotoniczności, a istnienie z własnością Darboux).

Funkcja  $f$  jest ściśle wypukła, więc jej wykres leży nad dowolną swoją styczną. Korzystając z tej obserwacji i z założenia  $f(x_1) = f(b) > 0$ , łatwo dowodzimy przez indukcję, że  $f(x_n) > 0$  oraz  $c < x_{n+1} < x_n \leq b$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ . Istotnie,  $b = x_1$ , więc  $f(x_1) > 0$ , a stąd  $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) < x_1$ , gdyż  $f' > 0$ . Wykres  $f$  leży nad styczną poprowadzoną w punkcie  $(x_1, f(x_1))$ , a  $x_2$  jest miejscem zerowym tej stycznej, zatem  $f(x_2) > 0$  i  $c < x_2$ . To jest początek indukcji; krok indukcyjny wygląda praktycznie tak samo – szczegółowo pozostawiamy Czytelnikowi.

Ponieważ  $(x_n)$  jest malejący i ograniczony z dołu (przez  $c$ ), więc ma granicę. Z ciągłości  $f$  i  $f'$  (zagwarantowanej przez istnienie  $f''$ ) wynika, że  $g = \lim x_n$  spełnia równość  $g = g - f(g)/f'(g)$ . Stąd  $f(g) = 0$ , tzn.  $g = c$ , gdyż wiemy, że  $c$  jest jedynym miejscem zerowym funkcji  $f$  w przedziale  $(a, b)$ .

Pozostaje wykazać nierówność (6.30). Wykorzystamy w tym celu wzór Taylora z resztą Lagrange'a (patrz Wniosek 6.60). Wynika z niego, że

$$0 = f(c) = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(c - x_n)^2 \quad \text{dla pewnego } \xi_n \in (c, x_n).$$

Dzieląc przez  $f'(x_n)$ , otrzymujemy

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + c - x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2,$$

lub równoważnie

$$c - x_{n+1} = c - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2.$$

Ponieważ prawa strona jest ujemna, więc

$$|c - x_{n+1}| = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2 < \frac{M_2}{2m_1}|c - x_n|^2.$$

(Skorzystaliśmy z oszacowań  $0 < f'' < M_2$  i  $f' > m_1 > 0$ ). Dowód jest zakończony.  $\square$

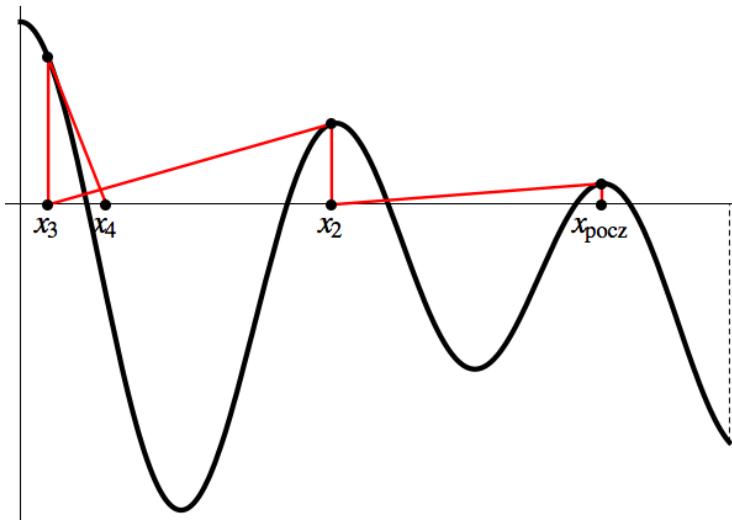
**Uwaga 6.90.** Ciąg  $x_n$  jest nie tylko zbieżny do  $c$ , ale spełnia zależność

$$|c - x_{n+1}| \leq A \cdot |c - x_n|^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie  $A$  jest stałą; dlatego tempo zbieżności jest bardzo szybkie. Aby to zrozumieć, przyjmijmy na chwilę bez zmniejszenia ogólności, że  $A > 1$ . Gdy już wiemy, że dla pewnego  $n$  jest  $|c - x_n| < 1/A^2$ , to wówczas

$$|c - x_{n+1}| < \frac{1}{A^3}, \quad |c - x_{n+2}| < \frac{1}{A^5}, \quad |c - x_{n+3}| < \frac{1}{A^9}, \quad \dots, \quad |c - x_{n+k}| < \frac{1}{A^{2k+1}}, \quad \dots$$

Zatem od pewnego momentu  $n = n_0$  odstęp  $|c - x_{n+k}|$  maleje wraz ze wzrostem  $k$  w takim tempie, jak  $1/A^{2^k+1}$ , czyli znacznie szybciej, niż np. ciąg geometryczny  $1/A^k$ .



Metoda stycznych:  $f$  ma kilka minimów i maksimów, nie jest ani wklęsła, ani wypukła.

**Przykład 6.91.** Niech  $f(x) = x^2 - 2$  dla  $x \in [a, b]$ , gdzie  $a = 1$  i  $b = 2$ . Mamy  $f'(x) = 2x > 2$  na  $(a, b)$  i  $f''(x) \equiv 2$ , a ponadto  $f(a) = -1 < 0 < f(b) = 2$ , więc  $f$  spełnia wszystkie założenia Twierdzenia 6.88. W tym przypadku mamy

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - 2)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

Zatem, począwszy od  $x_2$ , otrzymujemy właśnie ciąg  $(x_n)$  z Zadania 6.87. Tylko pierwszy wyraz jest inny, wszystkie następne są identyczne

**Uwaga 6.92.** Założenie o monotoniczności i wypukłości  $f$  jest niezwykle istotne. Analogiczne twierdzenia można sformułować i udowodnić dla funkcji rosnących i wklęszych, malejących i wypukłych, oraz malejących i wklęszych. Czytelnik zechce zastanowić się nad sformułowaniemi i zmianami w dowodzie. Ważna jest ogólna reguła: “rysowanie stycznych należy zaczynać od tego końca przedziału, gdzie  $|f'|$  jest większy (tzn. wykres ma większe nachylenie)”.

Jeśli  $f$  ma minima i maksima, a także przedziały wklęsłości i wypukłości, to nie ma żadnej gwarancji, że ciąg wyprodukowany metodą stycznych (1) w ogóle będzie zbieżny, (2) będzie zbieżny akurat do tego pierwiastka równania  $f(c) = 0$ , który leży najbliżej punktu  $x_1$ . Jeden z możliwych prostych przykładów takiej sytuacji przedstawiony jest na rysunku. Pełna i kompletna analiza zachowań takich ciągów dla różnych wyborów  $x_1$  i dowolnych funkcji  $f$  dwukrotnie różniczkowalnych jest, w ogólności, zagadnieniem wykraczającym poza możliwości współczesnej matematyki. Takimi problemami zajmuje się dziedzina, nazywana *teorią układów dynamicznych*.

## Rozdział 7

# Zbieżność jednostajna

Kilkakrotnie mieliśmy już do czynienia z granicami ciągów, zależnych od dodatkowego parametru, który mógł być liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Przyjęliśmy np. definicję funkcji wykładniczej

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}.$$

Dla każdego  $z \in \mathbb{C}$  wartość  $\exp(z)$  funkcji wykładniczej jest więc granicą wartości konkretnych wielomianów. Można zadać naturalne pytania: jeśli, ogólnie,  $f(z) = \lim_n f_n(z)$  dla wszystkich  $z$  z pewnego podzbioru prostej lub płaszczyzny, to które własności wszystkich funkcji  $f_n$  (ciągłość? różniczkowalność? ...) dziedziczy graniczna funkcja  $f$ ? Czy dziedziczy je w każdym przypadku, czy może potrzebne są dodatkowe założenia?

W tym rozdziale postaramy się przynajmniej częściowo wyjaśnić te kwestie.

### 7.1 Definicje i przykłady

Niech  $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ , a  $X$  oznacza (na razie) zupełnie dowolny zbiór.

**Definicja 7.1 (zbieżność punktowa).** Powiemy, że ciąg funkcji  $(f_n)$  jest *zbieżny punktowo do  $f$  na zbiorze  $X$*  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu  $x \in X$  zachodzi równość

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Piszemy wtedy:  $f_n \rightarrow f$  na  $X$ .

**Definicja 7.2 (zbieżność jednostajna).** Powiemy, że ciąg funkcji  $(f_n)$  jest *zbieżny jednostajnie do  $f$  na zbiorze  $X$*  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek: dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  takie, że dla wszystkich  $x \in X$  i wszystkich  $n > n_0$  jest

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Piszemy wtedy:  $f_n \rightrightarrows f$  na  $X$ .

**Uwaga.** Mówimy, że szereg funkcji  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x)$  jest zbieżny punktowo (odpowiednio: jednostajnie) do funkcji  $f(x)$  na zbiorze  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych

$S_n = \sum_{k=k_0}^n f_k$  tego szeregu jest zbieżny do  $f$  punktowo (odpowiednio: jednostajnie) na zbiorze  $X$ . Zwykle będziemy mieć do czynienia z sytuacją  $k_0 = 0$  lub  $k_0 = 1$ .

Aby ostro uwidoczyć różnicę między oboma pojęciami, zapiszemy Definicje 7.1 i 7.2, używając kwantyfikatorów, potrzebnych do określenia granicy:

**Zbieżność punktowa**  $f_n \rightarrow f$  na  $X$ :  $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) > 0 \quad \forall n > n_0$   
 zachodzi warunek  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ .

**Zbieżność jednostajna**  $f_n \rightrightarrows f$  na  $X$ :  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in X \quad \forall n > n_0$   
 zachodzi warunek  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ .

Różnica polega na tym, że liczbę  $n_0$  w pierwszym przypadku wybieramy, ustaliwszy wcześniej zarówno  $x \in X$ , jak i  $\varepsilon > 0$ . Dlatego  $n_0$  może zależeć zarówno od  $\varepsilon$ , jak i od punktu  $x \in X$ . Natomiast w drugim przypadku najpierw ustalamy  $\varepsilon > 0$ , a potem wybieramy liczbę  $n_0$  niezależną od  $x \in X$ , tak, aby warunek  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  zachodził dla wszystkich  $n > n_0$  i wszystkich  $x \in X$  jednocześnie.<sup>1</sup>

Zaczniemy od standardowego przykładu, wskazującego, że różnica między obiema definicjami jest istotna.

**Przykład 7.3.** Niech  $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  i niech  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dana wzorem  $f_n(x) = x^n$ . Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = f(x): = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Innymi słowy, ciąg  $f_n$  jest zbieżny punktowo na  $[0, 1]$  do funkcji  $f$ . Nie jest to jednak zbieżność jednostajna: dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  jest

$$f_n(2^{-1/n}) - f(2^{-1/n}) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

a zatem warunek z definicji zbieżności jednostajnej nie zachodzi dla żadnej liczby  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ .

**Przykład 7.4.** Jak poprzednio, niech  $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Położmy

$$f(x) = \exp(x), \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Z Twierdzenia 4.52, orzekającego o równoważności dwóch definicji funkcji wykładniczej, wynika, że  $f_n \rightarrow f$  na  $[0, 1]$ , tzn. dla każdego  $x \in [0, 1]$  szereg  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$  jest zbieżny do

---

<sup>1</sup>Z podobnym rozróżnieniem spotkaliśmy się już, definiując ciągłość jednostajną.

$\exp(x)$ . Mamy ponadto

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{2}{n!}. \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy oszacowanie *niezależne od liczby*  $x \in [0, 1]$ . Jeśli  $\varepsilon > 0$ , to biorąc  $n_0 = [2/\varepsilon] + 1 > 2/\varepsilon$ , otrzymujemy

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{2}{n!} < \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in [0, 1] \text{ i } n > n_0.$$

Dlatego tym razem  $f_n \rightrightarrows f$  na  $[0, 1]$ .

Zauważmy jeszcze, że do podobnego oszacowania można dojść, posługując się wzorem Taylora–MacLaurina z resztą Lagrange'a:

$$\exp(x) = f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{dla pewnego } c_n \in (0, x) \subset (0, 1),$$

a zatem, ponieważ w tym przykładzie  $f^{(j)} \equiv f$  dla wszystkich  $j$ ,

$$f(x) = f_n(x) + r_n, \quad \text{gdzie} \quad |r_n| = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!},$$

**Zadanie 7.5.** Wykazać, że ciąg funkcji

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

jest zbieżny jednostajnie do  $f(z) = \exp z$

- (a) na każdym ograniczonym przedziale  $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ ;
- (b) na każdym kole domkniętym  $K_M = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq M \subset \mathbb{C}\}$ .

To, że w poprzednim przykładzie, a także w ostatnim zadaniu, mamy do czynienia ze zbiorami *ograniczonymi*, jest rzeczą istotną.

**Przykład 7.6.** Na zbiorze  $X = \mathbb{R}$  ciąg

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

nie jest zbieżny jednostajnie do funkcji wykładniczej. Udowodnimy to przez zaprzeczenie.

Załóżmy przez chwilę, że dla  $\varepsilon = 1 > 0$  istnieje  $n_0$  takie, że  $|f_n(x) - f(x)| < 1 = \varepsilon$  dla wszystkich  $n > n_0$  i  $x \in \mathbb{R}$ . Ustalmy  $n > n_0$ . Dla  $x > 0$  jest

$$|f(x) - f_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Wstawiając do tego oszacowania  $x_n = ((n+1)!)^{1/(n+1)}$ , otrzymujemy

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1,$$

to zaś jest sprzeczność, bo dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ , a więc także dla  $x = x_n$ , powinna zgodnie z założeniem zachodzić nierówność przeciwna. Warunek z definicji jednostajnej zbieżności nie jest więc w tym przypadku spełniony.  $\square$

### **Norma jednostajna. Interpretacja geometryczna zbieżności jednostajnej**

Nietrudno zauważyc, że Definicja 7.2 jest równoważna następującej:

*Ciąg  $f_n \rightrightarrows f$  na  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy*

$$d_n \equiv d(f_n, f) := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$$

*jest zbieżny do zera dla  $n \rightarrow \infty$ .*

Wprowadza się czasem oznaczenie

$$\|g\|_{\infty, X} = \sup_{x \in X} |g(x)|$$

(ma to sens wtedy, gdy rozważa się funkcje ograniczone; w przeciwnym przypadku kres górnny może być nieskończony). Indeks  $X$  opuszczamy, gdy wiadomo dobrze, o jaki zbiór chodzi. Liczbę  $\|g\|_{\infty, X}$  nazywamy *normą jednostajną* funkcji  $g$  (na zbiorze  $X$ ). Przy takich oznaczeniach,

$$d_n \equiv d(f_n, f) = \|f_n - f\|_{\infty, X}.$$

Tę liczbę można traktować jak – abstrakcyjnie zdefiniowaną! – *odległość funkcji  $f_n$  i  $f$* . Jeśli przez  $Y$  oznaczymy zbiór wszystkich funkcji ograniczonych  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , to funkcja

$$Y \times Y \ni (f, g) \longmapsto d(f, g) = \|f - g\|_{\infty, X} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

spełnia trzy naturalne warunki, które spełnia np. zwykła odległość punktów na płaszczyźnie czy w przestrzeni:

1. Dla wszystkich  $f, g \in Y$  warunek  $d(f, g) = 0$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $f = g$ ;
2. Dla wszystkich  $f, g \in Y$  jest  $d(f, g) = d(g, f)$ .
3. Dla wszystkich  $f, g, h \in Y$  zachodzi *nierówność trójkąta*

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Pierwsze dwa warunki są oczywiste. Trzeci wynika z nierówności trójkąta w  $\mathbb{R}$  i definicji kresu górnego: dla każdego  $x \in X$  jest

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{t \in X} |f(t) - h(t)| + \sup_{t \in X} |h(t) - g(t)| = d(f, h) + d(h, g); \end{aligned}$$

biorąc teraz supremum lewej strony względem  $x \in X$ , otrzymujemy

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Mówiąc skrótnie, że  $d$  jest metryką na zbiorze  $Y$ . Z ogólnym pojęciem przestrzeni metrycznej i metryki Czytelnik zapozna się bliżej na II roku studiów, na zajęciach z Topologii i z Analizy. Podkreślimy jednak już teraz dwie rzeczy:

1. Zbieżność jednostajna funkcji ograniczonych  $f_n \rightrightarrows f$  na  $X$  jest równoważna temu, że odległość

$$d(f_n, f) = \|f_n - f\|_{\infty, X} \rightarrow 0 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$

Traktujemy zatem funkcje ograniczone tak jak punkty zbioru  $Y$ ; zbieżność jednostajna  $f_n \rightrightarrows f$  to zbieżność (odpowiednio określonej) odległości punktów  $f_n$  i  $f$  w zbiorze  $Y$  do zera.

2. Warunek

$$d(f, g) = \|f - g\|_{\infty, X} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$$

jest oczywiście równoważny następującemu:

$$f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

Oznacza to, że  $d(f, g) \leq \varepsilon$ , gdy wykres  $g$  zawiera się w krzywoliniowym pasku o wysokości  $2\varepsilon$ , narysowanym wokół wykresu funkcji  $f$  (patrz rysunek).

### Ciągłość granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego

Zakończymy ten wstępny podział prostym, ale ważnym twierdzeniem, które wyjaśnia jeden z powodów wprowadzenia pojęcia jednostajnej zbieżności ciągów funkcyjnych.

**Twierdzenie 7.7.** Założmy, że  $P \subset \mathbb{R}$  jest dowolnym przedziałem. Niech  $f_n: P \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami ciągłymi na  $P$ . Jeśli  $f_n \rightrightarrows f$  na  $P$ , to  $f$  jest ciągła na  $P$ .

Dowód. Ustalmy  $x \in P$  oraz dowolną liczbę  $\varepsilon > 0$ , a także liczbę  $\eta > 0$ , którą dobierzemy do  $\varepsilon$  pod koniec dowodu. Wskażemy liczbę  $\delta > 0$  taką, że

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{dla } y \in P, |y - x| < \delta. \quad (7.1)$$

(Na mocy Stwierdzenia 5.27, wyniknie stąd ciągłość  $f$  w punkcie  $x \in P$ .)

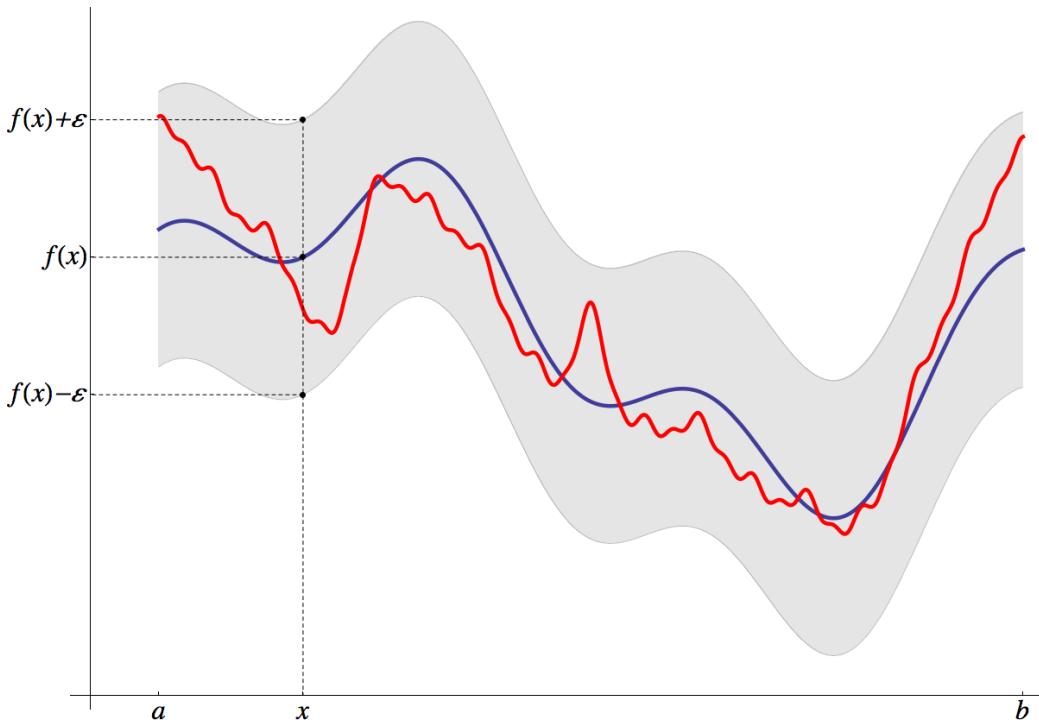
Ponieważ  $f_n \rightrightarrows f$ , więc istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że  $|f_n(t) - f(t)| < \eta$  dla wszystkich  $t \in P$ . Ustalmy jakąkolwiek liczbę  $n > n_0$ . Z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \eta + |f_n(x) - f_n(y)| + \eta = 2\eta + |f_n(x) - f_n(y)|. \end{aligned}$$

Funkcja  $f_n$  jest ciągła w  $x \in P$ . Istnieje zatem liczba  $\delta > 0$  taka, że  $|f_n(x) - f_n(y)| < \eta$  dla wszystkich  $y \in P$ , spełniających nierówność  $|x - y| < \delta$ . Dlatego

$$|f(x) - f(y)| < 2\eta + |f_n(x) - f_n(y)| < 3\eta.$$

dla  $y \in P$  takich, że  $|y - x| < \delta$ . Wybierając  $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$ , otrzymujemy warunek (7.1) i kończymy dowód.  $\square$



Warunek  $d(f, g) = \|f - g\|_\infty < \varepsilon$  oznacza, że wykres  $g$  mieści się w “pasku o wysokości  $2\varepsilon$ ” wokół wykresu  $f$ .

**Uwaga 7.8.** Udowodniliśmy w istocie nieco więcej: jeśli  $f_n \rightrightarrows f$  na przedziale  $P$  i wszystkie funkcje  $f_n$  są ciągłe w  $x_0 \in P$ , to  $f$  jest ciągła w  $x_0$ .

**Uwaga 7.9.** Omówiony wcześniej przykład ciągu  $f_n(x) = x^n$ , zbieżnego na  $[0, 1]$  punktowo (ale nie jednostajnie!) do funkcji  $f = \chi_{[0,1]}$  nieciągłej w  $x_0 = 1$  wskazuje, że założenie jednostajnej zbieżności jest w tym twierdzeniu istotne.

**Uwaga 7.10.** Może się zdarzyć, że ciąg funkcji  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest zbieżny punktowo (ale nie jednostajnie) do funkcji ciągły  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Oto przykład takiej sytuacji:  $f(x) = 1$  jest funkcją stałą. Wybieramy  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ciągłą i taką, że

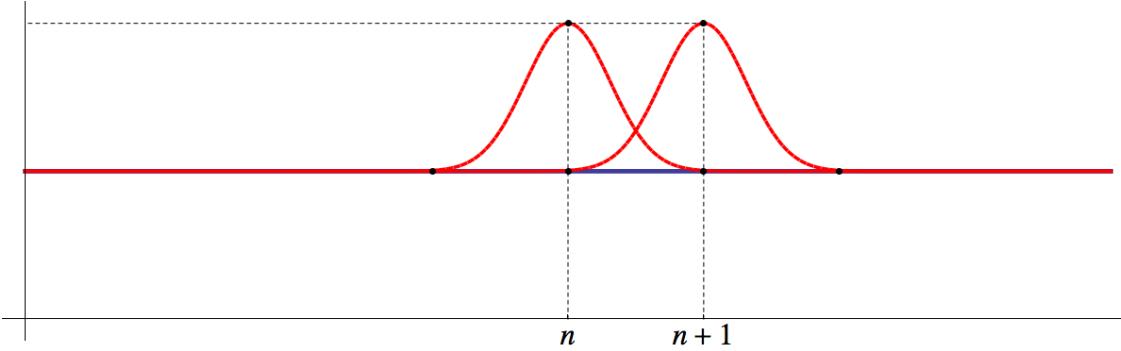
$$g(x) = 0 \quad \text{dla } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \quad g(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (-1, 1), \quad \sup g = 1.$$

Następnie, kładziemy  $f_n(x) = 1 + g(x - n)$  dla  $x \in \mathbb{R}$  i  $n \in \mathbb{N}$ . Wykresy funkcji  $f_n$  wyglądają jak garby, przesuwające się w równym tempie w stronę  $+\infty$  (patrz rysunek). Przy ustalonym  $x \in \mathbb{R}$  mamy po prostu  $f_n(x) = 1 = f(x)$  dla  $n > x + 1$ . Nietrudno sprawdzić, że w tej sytuacji oczywiście  $f_n \rightarrow f$  na  $\mathbb{R}$ , ale  $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup g = 1$ , czyli  $f_n \not\rightrightarrows f$ .

**Uwaga 7.11.** Tak samo definiuje się zbieżność jednostajną ciągów funkcji  $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$  (moduł oznacza wtedy wszędzie po prostu moduł liczb zespolonych). Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

*Jeśli ciąg funkcji ciągłych  $f_n: \mathbb{C} \supset X \rightarrow \mathbb{C}$  jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ , to  $f$  jest ciągła na  $X$ .*

Dowód jest taki sam, jak w przypadku rzeczywistym.



“Wędrujący garb”: ciąg funkcji  $g_n \rightarrow f$  punktowo, ale  $d(g_n, f) = \|g_n - f\|_\infty = \text{const} > 0$  dla wszystkich  $n$ .

## 7.2 Najprostsze kryteria zbieżności jednostajnej

**Stwierdzenie 7.12.** Niech  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Następujące warunki są równoważne:

- (a) Ciąg  $(f_n)$  jest zbieżny jednostajnie na  $X$  do pewnej funkcji  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- (b) Ciąg  $(f_n)$  spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego: dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że dla wszystkich  $m, n > n_0$  i wszystkich  $x \in X$  zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Dowód. Całe rozumowanie polega na zastosowaniu warunku Cauchy'ego dla ciągów liczbowych (patrz Twierdzenie 2.38) i uważnej lekturze definicji. Oto szczegóły.

Część I. (a)  $\Rightarrow$  (b). Ustalmy liczbę  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ  $f_n \rightrightarrows f$  na  $X$ , więc istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  dla wszystkich  $n > n_0$  i  $x \in X$ . Zatem, dla wszystkich  $m, n > n_0$  i wszystkich  $x \in X$  otrzymujemy z nierówności trójkąta

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Część I. (b)  $\Rightarrow$  (a). Założymy, że  $(f_n)$  spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego b. Wtedy dla każdego  $x \in X$  ciąg liczbowy  $(f_n(x))_{n=1,2,\dots}$  spełnia warunek Cauchy'ego, a więc na mocy Twierdzenia 2.38 ma granicę w  $\mathbb{R}$ . Oznaczmy tę granicę  $f(x)$ . Ustalmy liczbę  $\varepsilon > 0$  i zastosujmy (b) do liczby  $\varepsilon/2$ : istnieje takie  $n_0$  (zależne tylko od  $\varepsilon$ !), że dla wszystkich  $m, n > n_0$  i  $x \in X$  jest  $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Ustalmy teraz liczbę  $n$  i przejdźmy do granicy  $m \rightarrow \infty$ . Ponieważ w granicy zachowują się nierówności nieostre, więc otrzymamy

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } n > n_0 \text{ i } x \in X.$$

Zatem istotnie  $f_n \rightrightarrows f$  na  $X$ .  $\square$

**Stwierdzenie 7.13 (kryterium Weierstrassa).** Niech  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Jeśli

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

a szereg liczbowy  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to wówczas szeregi funkcyjne

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

są zbieżne jednostajnie na  $X$ .

**Uwaga terminologiczna.** W takiej sytuacji mówimy, że szereg  $\sum f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.

Dowód. Niech

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^m |f_n(x)|$$

oznacza  $m$ -tą sumę częściową szeregu  $\sum |f_n|$ . Z założenia  $|f_n(x)| \leq a_n$ , a więc gdy  $m, k \in \mathbb{N}$  i  $m > k$ , to

$$|S_m(x) - S_k(x)| = S_m(x) - S_k(x) \leq a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m \quad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

Szereg liczbowy zbieżny  $\sum a_n$  spełnia warunek Cauchy'ego dla szeregów, patrz Stwierdzenie 4.4. Zatem dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  takie, że

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m = |a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

dla wszystkich  $m > k > n_0$ . Stąd

$$|S_m(x) - S_k(x)| \leq a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in X \text{ i } m > k > n_0.$$

Ciąg funkcyjny  $(S_m)$  spełnia więc jednostajny warunek Cauchy'ego na  $X$ , tzn. na mocy poprzedniego stwierdzenia jest jednostajnie zbieżny. Z definicji, oznacza to zbieżność jednostajną szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  na zbiorze  $X$ .

Dowód jednostajnej zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest analogiczny. Trzeba tylko zauważać, że dla  $m > k$  jest

$$\left| \sum_{n=1}^m f_n(x) - \sum_{n=1}^k f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^m f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |f_n(x)| \leq a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m.$$

Łatwo stąd (podobnie, jak w pierwszej części dowodu) wywnioskować, że ciąg sum częściowych szeregu  $\sum f_n$  spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na  $X$ .  $\square$

**Uwaga 7.14.** Oba stwierdzenia przenoszą się bez zmian na przypadek funkcji o wartościach zespolonych.

### 7.3 Twierdzenia Weierstrassa i Diniego

**Oznaczenia.** Niech  $P \subset \mathbb{R}$ . W dalszym ciągu symbolem  $C(P)$  będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji ciągłych  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ .

Udowodnimy teraz fundamentalne twierdzenie, które ma liczne zastosowania w Analizie Matematycznej. Niektóre z nich poznamy wkrótce.

**Twierdzenie 7.15 (Weierstrass).** *Jeśli  $a, b \in \mathbb{R}$  i  $f \in C([a, b])$ , to istnieje ciąg wielomianów  $P_n$  o współczynnikach rzeczywistych taki, że  $P_n \rightrightarrows f$  na  $[a, b]$ .*

Zauważmy najpierw, że wystarczy udowodnić twierdzenie w szczególnym przypadku: dla  $a = 0$  i  $b = 1$ . Dla innych przedziałów uzyskamy wtedy tezę, składając odpowiednie funkcje z funkcjami liniowymi

$$[0, 1] \ni t \longmapsto x = a + t(b - a) \in [a, b].$$

Istotnie, przypuśćmy, że dla dowolnej  $f \in C([0, 1])$  istnieją wielomiany  $P_n$  takie, że  $P_n \rightrightarrows f$  na  $[0, 1]$ . Dla ustalonej  $g \in C([a, b])$  niech  $f(t) = g(a + t(b - a))$ , gdzie  $t \in [0, 1]$ ;  $f$  jest funkcją ciągłą na  $[0, 1]$ . Wybierzmy ciąg wielomianów  $P_n \rightrightarrows f$  na  $[0, 1]$  i położmy

$$Q_n(x) := P_n\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Wtedy  $Q_n$  są wielomianami i  $Q_n \rightrightarrows g$  na  $[a, b]$ , gdyż  $\|Q_n - g\|_{\infty, [a, b]} = \|P_n - f\|_{\infty, [0, 1]}$ .

Dlatego ograniczymy się do dowodu następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 7.16 (S. N. Bernstein).** *Niech  $f \in C([0, 1])$ . Położmy*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Wówczas  $B_n(f) \rightrightarrows f$  na  $[0, 1]$ .

**Uwaga terminologiczna.** Wielomian  $B_n(f)$  nazywa się *n-tym wielomianem Bernsteina funkcji f*.

**Dowód.** Najpierw udowodnimy trzy pomocnicze fakty:

- (a) Jeśli  $f_1(x) \equiv 1$  na  $[0, 1]$ , to  $B_n(f_1) \equiv 1$  na  $[0, 1]$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Jeśli  $f_2(x) = x$  na  $[0, 1]$ , to  $B_n(f_2)(x) = x$  na  $[0, 1]$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .
- (c) Jeśli  $f_3(x) = x^2$  na  $[0, 1]$ , to  $B_n(f_3)(x) = x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}$  na  $[0, 1]$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

Własność (a) wynika natychmiast z dwumianu Newtona. Istotnie, jeśli  $f_1 \equiv 1$ , to

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1.$$

Dla dowodu (b) zauważmy, że  $\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$  dla  $k \geq 1$  (a dla  $k = 0$  lewa strona jest zerem). Dlatego dla funkcji  $f_2(x) = x$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} B_n(f_2)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x. \end{aligned}$$

(Przechodząc do trzeciej linijki, podstawiliśmy  $j = k - 1$ ). Aby sprawdzić (c), piszemy

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2 - k}{n^2} + \frac{k}{n^2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

i rachujemy podobnie jak poprzednio:

$$\begin{aligned} B_n(f_3)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} \cdot x^2 \cdot (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} B_n(f_2)(x) \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j \cdot (1-x)^{n-2-j}}_{= 1 \text{ (dwumian Newtona)}} + \frac{x}{n} = x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

Teraz przejdziemy do zasadniczej części dowodu. Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ  $f$  jest jednoznacznie ciągła na  $[0, 1]$ , więc istnieje  $\delta > 0$  takie, że  $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$ , gdy  $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ . Różnicę między  $f$  i jej  $n$ -tym wielomianem Bernsteina szacujemy następująco:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =: S_1(n) + S_2(n), \end{aligned} \tag{7.2}$$

gdzie

$$S_i(n) = \sum_{k \in A_i} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad i = 1, 2,$$

dla zbiorów indeksów

$$A_1 = \left\{ k = 0, 1, \dots, n : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\} \quad \text{oraz} \quad A_2 = \left\{ k = 0, 1, \dots, n : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \right\}.$$

(po prostu dzielimy całą sumę na dwie inne, odpowiednio dobrane). Oszacowanie sumy  $S_1(n)$  jest łatwe: gdy  $|\frac{k}{n} - x| < \delta$ , to  $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$  i dlatego

$$S_1(n) \leq \sum_{k \in A_1} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{(a)}{=} \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.3}$$

Kluczowy krok to szacowanie sumy  $S_2$ . Niech  $M = \sup_{[0,1]} |f|$ . Zauważmy, że

$$\delta \leq \left| x - \frac{k}{n} \right|, \quad \text{stąd zaś} \quad 1 \leq \left( \frac{k-nx}{n\delta} \right)^2 \quad \text{dla } k \in A_2.$$

Ponadto, oczywiście  $|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq |f(x)| + |f(\frac{k}{n})| \leq 2M = 2 \sup |f|$ . Dlatego

$$\begin{aligned} S_2(n) &\leq 2M \sum_{k \in A_2} \left( \frac{k-nx}{n\delta} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left( \frac{k^2}{n^2} - 2x \frac{k}{n} + x^2 \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = S_3(n) \end{aligned}$$

(zwiększymy zakres sumowania z  $k \in A_2$  do wszystkich  $0 \leq k \leq n$ ). Ostatnią sumę można łatwo wyrazić przez wielomian Bernsteina funkcji  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = x$  i  $f_3(x) = x^2$ , a następnie obliczyć, korzystając z pomocniczych faktów (a)–(c); prowadzi to do oszacowania

$$\begin{aligned} S_2(n) \leq S_3(n) &= \frac{2M}{\delta^2} \left( B_n(f_3)(x) - 2x \cdot B_n(f_2)(x) + x^2 B_n(f_1)(x) \right) \\ &= \frac{2M}{\delta^2} \left( x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n} - 2x^2 + x^2 \right) \\ &= \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{M}{2n\delta^2}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

gdyż  $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$  na  $\mathbb{R}$ .

Wstawiając oszacowania (7.3) i (7.4) do (7.2), otrzymujemy

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in [0, 1]$$

i dla  $n > n_0 := \lceil M/(\varepsilon\delta^2) \rceil + 1$ . To kończy dowód.  $\square$

Jedno z zastosowań twierdzenia Weierstrassa zobaczymy nieco później w tym rozdziale, w dowodzie twierdzenia, orzekającego, że każda funkcja ciągła  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  na przedziale  $P \subset \mathbb{R}$  jest pochodną pewnej funkcji  $F: P \rightarrow \mathbb{R}$ . Jest to jeden z podstawowych faktów, wykorzystywanych w rachunku całkowym.

Podamy teraz dwa niezbyt trudne twierdzenia, ilustrujące związek zbieżności jednostajnej z monotonicznością.

**Twierdzenie 7.17 (pierwsze twierdzenie Diniego).** Założmy, że funkcje  $f, f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$  i  $K \subset \mathbb{R}$  jest zbiorem zwarte, są ciągłe. Jeśli  $f_n \rightarrow f$  punktowo na  $K$ , a ponadto

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq f_n \leq \dots \quad \text{na } K,$$

to wówczas  $f_n \Rightarrow f$  na  $K$

Dowód. Przypuśćmy, że zbieżność  $f_n \rightarrow f$  nie jest jednostajna. Istnieje wtedy  $\varepsilon > 0$  takie, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  znajdziemy  $m > n$  i punkt  $x_m \in K$ , dla których

$$|f(x_m) - f_m(x_m)| = f(x_m) - f_m(x_m) \geq \varepsilon > 0. \tag{7.5}$$

Opuszczając moduł, skorzystaliśmy z założenia o monotoniczności ciągu  $(f_m)$ .

Zbiór  $K$  jest zowany, więc ciąg  $(x_m)$  ma podciąg zbieżny do pewnego  $x \in K$ . Przechodząc do tego podciągu, możemy bez zmniejszenia ogólności rozważań założyć, że po prostu  $x_m \rightarrow x$  dla  $m \rightarrow \infty$ . Weźmy teraz dowolne  $k \in \mathbb{N}$ . Dla  $m > k$  zachodzą nierówności

$$f_k(x_m) \leq f_m(x_m) \stackrel{(7.5)}{\leq} f(x_m) - \varepsilon$$

i dlatego, dzięki ciągłości  $f$ ,

$$f_k(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_k(x_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) - \varepsilon = f(x) - \varepsilon.$$

To jednak przeczy punktowej zbieżności  $f_k \rightarrow f$ : granica ciągu liczbowego ( $f_k(x)$ ) powinna być równa  $f(x)$ .  $\square$

**Twierdzenie 7.18 (drugie twierdzenie Diniego).** *Jeśli funkcje  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są niemalejące i ciąg ( $f_n$ ) jest punktowo zbieżny na  $[a, b]$  do funkcji ciągłej  $f$ , to wówczas  $f_n \rightrightarrows f$ .*

**Dowód.** Niech  $\varepsilon > 0$  i  $\eta > 0$ . Ponieważ na mocy Twierdzenia 5.57  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $[a, b]$ , więc istnieje  $\delta > 0$  takie, że  $|f(x) - f(y)| < \eta$ , gdy  $|x - y| < \delta$ . Podzielmy  $[a, b]$  na  $N$  przedziałów o równych długościach  $\frac{b-a}{N} < \delta$ . Niech  $x_0, x_1, \dots, x_N$  oznaczają końce tych przedziałów. Wybierzmy teraz  $n_0$  tak, aby

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \eta \quad \text{dla wszystkich } n > n_0 \text{ i } k = 0, 1, \dots, N. \quad (7.6)$$

Niech  $x \in [a, b]$ . Wtedy  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  dla pewnego  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Funkcja  $f$  jest niemalejąca jako ciągu granica funkcji niemalejących, więc dzięki (7.6) otrzymujemy dla  $n > n_0$  nierówności

$$\underbrace{f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k+1})}_{\text{monotoniczność } f}, \quad f(x_k) - \eta \stackrel{(7.6)}{<} \underbrace{f_n(x_k) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{k+1})}_{\text{monotoniczność } f_n} \stackrel{(7.6)}{<} f(x_{k+1}) + \eta.$$

Stąd już wynika, że zarówno  $f(x)$ , jak i  $f_n(x)$ , należą do przedziału  $I$  o końcach  $f(x_k) - \eta$  i  $f(x_{k+1}) + \eta$ . Odstępy między punktami  $x_k$  są mniejsze od  $\delta$ , więc dzięki dobiorowi  $\delta$  do  $\eta$  długość przedziału  $I$  jest mniejsza od  $3\eta$ . Biorąc teraz  $\eta = \varepsilon/3$  otrzymujemy

$$|f(x) - f_n(x)| < 3\eta = \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in [a, b] \text{ i } n > n_0,$$

co kończy dowód.  $\square$

Zauważmy, że w dowodzie *nie było potrzebne* założenie o ciągłości  $f_n$ . Istotna jest oczywiście ciągłość funkcji  $f$  oraz monotoniczność wszystkich rozpatrywanych funkcji.

## 7.4 Różniczkowanie ciągów funkcyjnych

Udowodnimy teraz ważne twierdzenie, które w wielu sytuacjach pozwala wnioskować, że funkcja, określona jako granica ciągu (lub suma szeregu) funkcyjnego, ma pochodną.

### 7.4.1 Przypadek rzeczywisty

**Twierdzenie 7.19.** *Załóżmy, że  $f_n: \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ , są różniczkowalne. Jeśli ciąg  $f'_n \rightrightarrows g$  na  $[a, b]$ , a ponadto istnieje taki punkt  $x_0 \in [a, b]$ , że ciąg ( $f_n(x_0)$ ) jest zbieżny, to wówczas:*

- (a) *Ciąg  $f_n$  jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ;*
- (b) *Funkcja  $f$  jest różniczkowalna na  $[a, b]$  i  $f' = g$ .*

Dowód. Najpierw sprawdzimy, że ciąg  $(f_n)$  spełnia na przedziale  $[a, b]$  jednostajny warunek Cauchy'ego.

**Lemat 7.20.** *Niech  $\Delta_{n,m} = f_n - f_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Założmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 7.19. Wówczas dla każdej liczby  $\eta > 0$  istnieje takie  $n_0 \in \mathbb{N}$ , że dla wszystkich  $n, m > n_0$  i wszystkich  $x, y \in [a, b]$  zachodzi nierówność*

$$|\Delta_{n,m}(x) - \Delta_{n,m}(y)| < \eta|x - y|.$$

Dowód LEMATU 7.20. Ustalmy  $\eta > 0$ . Funkcja  $\Delta_{n,m}$  jest różniczkowalna na  $[a, b]$  i  $\Delta'_{n,m} = f'_n - f'_m$ . Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że

$$|\Delta_{n,m}(x) - \Delta_{n,m}(y)| = |f'_n(\theta_{x,y}) - f'_m(\theta_{x,y})| \cdot |x - y| \quad \text{dla pewnego } \theta_{x,y} \in (x, y)$$

(zakładamy bez zmiany ogólności, że  $x < y$ ). Jednak ciąg  $(f'_n)$  jest jednostajnie zbieżny, a więc na mocy Stwierdzenia 7.12 istnieje takie  $n_0 \in \mathbb{N}$ , że

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \eta \quad \text{dla wszystkich } t \in [a, b] \text{ i } m, n > n_0.$$

Wstawiając to oszacowanie do poprzedniego, kończymy dowód lematu.  $\square$

Przejdźmy teraz do zasadniczej części dowodu twierdzenia.

*Krok 1. Zbieżność ciągu  $(f_n)$ .* Niech  $\varepsilon > 0$  i  $\eta = \varepsilon/2(b - a)$ . Dobierzmy do  $\eta$  liczbę  $n_0$  z Lematu 7.20. Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| \\ &= |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |\Delta_{n,m}(x) - \Delta_{n,m}(x_0)| \\ &< |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2(b - a)} \cdot |x - x_0| \\ &\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik jest niegroźny: ciąg  $(f_n(x_0))$  jest zbieżny, a zatem istnieje  $n_1$  takie, że  $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  dla wszystkich  $m, n > n_1$ . Dlatego dla  $m, n > \max(n_0, n_1)$  i dla wszystkich  $x \in [a, b]$  zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

co oznacza, że ciąg  $(f_n)$  spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, a więc na mocy Stwierdzenia 7.12 jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , która oczywiście jest ciągła (patrz Twierdzenie 7.7).

*Krok 2. Różniczkowalność funkcji  $f$ .* Wykażemy, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x) \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Ustalmy w tym celu  $x \in [a, b]$  i liczby  $\eta, \varepsilon > 0$ ; znajdziemy  $\delta > 0$  takie, że

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| < \varepsilon \quad \text{dla } |h| < \delta. \tag{7.7}$$

Przekształcimy prawą stronę nierówności (7.7), próbując przybliżyć  $f$  przez  $f_n$  i  $g$  przez  $f'_n$ . Mamy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \\ &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x+h) - f_n(x+h) - (f(x) - f_n(x))}{h} \right| + \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| \\ &=: A + B. \end{aligned}$$

Każdy ze składników oszacujemy osobno.

*Oszacowanie składnika A.* Z Lematu 7.20 wynika, że dla  $m, n > n_0 = n_0(\eta)$  jest

$$|f_m(x+h) - f_n(x+h) - (f_m(x) - f_n(x))| = |\Delta_{m,n}(x+h) - \Delta_{m,n}(x)| < \eta|h|.$$

Ponieważ  $f_m(t) \rightarrow f(t)$  dla każdego  $t \in [a, b]$ , więc przechodząc do granicy  $m \rightarrow \infty$ , a następnie dzieląc obie strony przez  $|h|$  otrzymujemy

$$A = \left| \frac{f(x+h) - f_n(x+h) - (f(x) - f_n(x))}{h} \right| \leq \eta$$

dla wszystkich  $|h| > 0$  i  $n > n_0$ .

*Oszacowanie składnika B.* Z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} B &= \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| = \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) + f'_n(x) - g(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right| + |f'_n(x) - g(x)| < \eta + \eta = 2\eta, \end{aligned}$$

o ile  $n$  jest ustalone i dostatecznie duże, a  $|h|$  dostatecznie małe. Aby się o tym przekonać, ustalmy najpierw liczbę  $n > n_0$  tak, aby  $|f'_n(x) - g(x)| < \eta$  dla wszystkich  $x \in [a, b]$ ; możemy to zrobić, gdyż  $f'_n \rightrightarrows g$ . Następnie, korzystając z różniczkowalności  $f_n$  w punkcie  $x$ , wybierzmy  $\delta > 0$  takie, by

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right| < \eta \quad \text{dla } |h| < \delta.$$

Wtedy istotnie  $B < 2\eta$ .

Ostatecznie, kładąc  $\eta = \varepsilon/3$  i używając obu oszacowań, otrzymujemy dla  $0 < |h| < \delta$  nierówność

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \leq A + B < \eta + 2\eta = 3\eta = \varepsilon.$$

Zachodzi więc warunek (7.7). To kończy dowód całego twierdzenia.  $\square$

Oczywiście, odpowiednik tego twierdzenia zachodzi dla szeregów funkcyjnych: to tylko kwestią zmiany języka.

**Wniosek 7.21.** Załóżmy, że  $f_n: \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ , są różniczkowalne. Jeśli szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$  jest zbieżny jednostajnie na  $[a, b]$  do funkcji  $g$ , a ponadto istnieje taki punkt  $x_0 \in [a, b]$ , że szereg liczbowy  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  jest zbieżny, to wówczas:

- (a) Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłyj  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- (b) Funkcja  $f$  jest różniczkowalna na  $[a, b]$  i  $f' = g$ .

**Przykład 7.22.** Niech  $g(x) = 1/(1-x)$ , gdzie  $|x| \leq q < 1$ . Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego,

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Powyższy szereg jest na przedziale  $[-q, q]$  zbieżny jednostajnie. To wynika z kryterium Weierstrassa (patrz Stwierdzenie 7.13), gdyż  $|x^n| \leq q^n$  na  $[-q, q]$ , a  $\sum q^n$  jest zbieżnym szeregiem liczb dodatnich.

Poóżmy  $f_n(x) = x^{n+1}/(n+1)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $x \in [-q, q]$ . Wtedy  $f'_n(x) = x^n$ . Stwierdziliśmy już, że szereg  $\sum f'_n = \sum x^n$  jest na  $[-q, q]$  zbieżny jednostajnie. Szereg  $\sum f_n$  jest zbieżny (co najmniej) w jednym punkcie: dla  $x_0 = 0$  wszystkie składniki są zerami. Dlatego, na mocy Wniosku 7.21,

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{dla wszystkich } |x| \leq q.$$

Innymi słowy, nieskończoną sumę  $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$  wolno na tym przedziale różniczkować tak samo, jak sumę skońzoną: pochodna sumy jest sumą pochodnych. Należy jednak pamiętać, że **bez założenia zbieżności jednostajnej szeregu pochodnych** to nie musi być prawdą! Przykład takiej sytuacji zobaczymy w następnym podrozdziale.

Zauważmy jeszcze, że funkcje  $f(x) = \sum f_n(x) = \sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$  oraz  $\varphi(x) = -\ln(1-x)$  mają na przedziale  $[-q, q]$  tę samą pochodną, równą  $1/(1-x)$ . Dlatego  $(f - \varphi)' = 0$  na  $[-q, q]$ , więc  $f - \varphi = \text{const} = f(0) - \varphi(0) = 0 - 0 = 0$ . Ostatecznie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \quad \text{dla wszystkich } |x| < 1,$$

gdyż całe rozumowanie można przeprowadzić na  $[-q, q]$  dla dowolnego  $q < 1$ .  $\square$

**Przykład 7.23.** Niech  $f_n(x) = n^{-1} \arctg(x/n)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Dla  $x_0 = 0$  mamy  $f_n(x_0) = 0$  dla każdego  $n$ , więc szereg funkcyjny  $\sum f_n$  jest zbieżny w  $x_0$ . Pochodna  $f'_n$  spełnia nierówności

$$0 < f'_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(x/n)^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ponieważ szereg liczbowy  $\sum 1/n^2$  jest zbieżny, więc z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg  $\sum f'_n$  jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Dlatego szereg

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctg \frac{x}{n}$$

jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale  $[a, b] \in \mathbb{R}$  i dla każdej liczby  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi wzór

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

**Uwaga 7.24.** Jeśli ciąg (lub szereg) funkcyjny jest zbieżny jednostajnie na wszystkich zwartych podzbiorach pewnego ustalonego podzbioru  $P \subset \mathbb{R}$  (bądź  $P \subset \mathbb{C}$ ), to mówimy, że jest *zbieżny niemal jednostajnie na P*. W ostatnim przykładzie mieliśmy do czynienia właśnie z taką sytuacją.

### 7.4.2 Przypadek zespolony

Uważny Czytelnik spostrzegłby może, że w dowodzie Twierdzenia 7.19 posłużyliśmy się twierdzeniem Lagrange'a o wartości średniej, które nie zachodzi dla funkcji o wartościach zespolonych, patrz Przykład 6.41. Dlatego zespolona wersja twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych wymaga nieco innego dowodu, który pokrótce naszkicujemy.

Ustalmy najpierw terminologię.

**Definicja 7.25.** Zbiór  $Z \subset \mathbb{C}$  nazywa się *domknięty* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu zbieżnego  $(z_n) \subset Z$  jest  $z = \lim z_n \in Z$ .

Przykład: koło domknięte  $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R\}$  jest zbiorem domkniętym (nierówności nieostre zachowują się po przejściu granicznym), a koło otwarte  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$  nie jest zbiorem domkniętym (nierówności ostre mogą po przejściu granicznym zmienić się w nieostre).

**Definicja 7.26.** Zbiór  $Z \subset \mathbb{C}$  nazywa się *ograniczony* wtedy i tylko wtedy, gdy  $Z$  zawiera się w pewnym kole.

**Twierdzenie 7.27.** Założmy, że  $W$  jest domkniętym, wypukłym i ograniczonym podzbiorem  $\mathbb{C}$ , a funkcje  $f_n: \mathbb{C} \supset W \rightarrow \mathbb{C}$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ , są różniczkowalne (w sensie zespolonym). Jeśli ciąg  $f'_n \Rightarrow g$  na  $W$ , a ponadto istnieje taki punkt  $z_0 \in W$ , że ciąg  $(f_n(z_0))$  jest zbieżny, to wówczas:

- (a) Ciąg  $f_n$  jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- (b) Funkcja  $f$  jest różniczkowalna na  $W$  i  $f' = g$ .

**Szkic dowodu.** Jednym miejscem w dowodzie Twierdzenia 7.19, gdzie skorzystaliśmy z faktu, że mamy do czynienia z funkcjami zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych, był Lemat 7.20 (w jego dowodzie skorzystaliśmy z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej). Podamy “zespolony” odpowiednik tego fragmentu rozumowania. Sformułowanie zespolonej wersji twierdzenia o wartości średniej poprzedzimy technicznym lematem.

**Lemat 7.28.** Niech  $\varphi, \psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będą ciągłe na  $[0, 1]$  i różniczkowalne w  $(0, 1)$ . Jeśli  $a > 1$ , to funkcja

$$\Phi_a(t) = (\varphi^2(t) + \psi^2(t))^{a/2}$$

jest różniczkowalna w  $(0, 1)$  i zachodzi nierówność

$$|\Phi'_a(t)| \leq a (\varphi^2(t) + \psi^2(t))^{(a-1)/2} \cdot \left( (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \right)^{1/2}.$$

**Dowód. Przypadek 1.** Jeśli  $\varphi^2(t) + \psi^2(t) > 0$ , to różniczkowalność  $\Phi_a$  w punkcie  $t$  wynika z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej. Ponieważ

$$|\varphi\varphi' + \psi\psi'| \leq (\varphi^2 + \psi^2)^{1/2} ((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{1/2}$$

z nierówności Schwarza, więc mamy w takim punkcie

$$\begin{aligned} |\Phi'_a| &= \frac{a}{2} (\varphi^2 + \psi^2)^{\frac{a}{2}-1} \cdot 2|\varphi\varphi' + \psi\psi'| \\ &\leq a (\varphi^2 + \psi^2)^{\frac{a}{2}-1} (\varphi^2 + \psi^2)^{1/2} ((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{1/2} \\ &= a (\varphi^2 + \psi^2)^{(a-1)/2} \cdot ((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

To jest szukana nierówność.

**Przypadek 2.** Jeśli  $\varphi^2(t) + \psi^2(t) = 0$ , to  $\Phi'_a(t) = 0$ . Wykażemy to, posługując się definicją pochodnej. W takim punkcie  $t$  jest  $\Phi_a(t) = 0$ , a ponadto

$$(\varphi^2 + \psi^2)^{1/2} \leq |\varphi| + |\psi|,$$

więc dla wszystkich dostatecznie małych  $h$  zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi_a(t+h) - \Phi_a(t)}{h} \right| &= \left| \frac{\Phi_a(t+h)}{h} \right| \\ &\leq \frac{|\varphi(t+h)| + |\psi(t+h)|}{|h|} \cdot (\varphi^2(t+h) + \psi^2(t+h))^{(a-1)/2} \\ &\leq (|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| + 2) \cdot (\varphi^2(t+h) + \psi^2(t+h))^{(a-1)/2}. \end{aligned}$$

Pisząc ostatnią linijkę, skorzystaliśmy z nierówności  $|\varphi(t+h)|/|h| < |\varphi'(t)| + 1$ , która zachodzi dla wszystkich małych  $|h|$ , oraz z analogicznej nierówności dla  $\psi$ . Przechodząc do granicy  $h \rightarrow 0$ , otrzymujemy  $\Phi'_a(t) = 0$ , gdyż czynnik

$$(\varphi^2(t+h) + \psi^2(t+h))^{(a-1)/2} \rightarrow 0,$$

bowiem  $\varphi^2(t+h) + \psi^2(t+h) \rightarrow \varphi^2(t) + \psi^2(t) = 0$  dla  $h \rightarrow 0$ , a mamy  $a > 1$ .  $\square$

**Uwaga:** w ostatnim kroku jest istotne, że  $a > 1$ !

**Wniosek 7.29.** Niech  $\varphi, \psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będą ciągłe na  $[0, 1]$  i różniczkowalne w  $(0, 1)$ . Jeśli  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$  oraz  $h(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$  dla  $t \in [0, 1]$ , to wówczas

$$|h(1)| \leq \sup_{t \in (0,1)} |h'(t)|.$$

**Dowód.** Przyjmijmy takie oznaczenia, jak w poprzednim lemacie. Ponieważ  $\psi(0) = \varphi(0) = 0$ , więc

$$|h(1)|^a = |\Phi_a(1)| = |\Phi_a(1) - \Phi_a(0)| = |\Phi'_a(c)|$$

dla pewnego  $c \in (0, 1)$ . Wiemy jednak, że

$$\begin{aligned} |\Phi'_a(c)| &\leq a (\varphi^2(c) + \psi^2(c))^{(a-1)/2} \cdot ((\varphi'(c))^2 + (\psi'(c))^2)^{1/2} \\ &\leq a \cdot \left( \sup_{t \in [0,1]} |h(t)| \right)^{(a-1)/2} \cdot \sup_{t \in (0,1)} |h'(t)|. \end{aligned}$$

Dlatego

$$|h(1)|^a \leq a \cdot \left( \sup_{t \in [0,1]} |h(t)| \right)^{(a-1)/2} \cdot \sup_{t \in (0,1)} |h'(t)|;$$

przechodząc do granicy  $a \rightarrow 1^+$ , otrzymujemy tezę wniosku.  $\square$

**Wniosek 7.30 (twierdzenie o wartości średniej, wariant zespolony).** Założmy, że  $W \subset \mathbb{C}$  jest zbiorem wypukłym, a  $H: W \rightarrow \mathbb{C}$  funkcją różniczkowalną na  $W$ . Wówczas dla wszystkich punktów  $z, w \in W$  zachodzi nierówność

$$|H(z) - H(w)| \leq |z - w| \cdot \sup_{\zeta \in W} |H'(\zeta)|.$$

**Dowód.** Gdy  $w = z$ , nierówność jest banalna:  $0 \leq 0$ . Założymy, że  $z \neq w$ . Położymy

$$h(t) = H(w + t(z - w)) - H(w) \quad \text{dla } t \in [0, 1], \quad \varphi = \operatorname{Re} h, \quad \psi = \operatorname{Im} h.$$

Wtedy  $\varphi, \psi$  i  $h$  spełniają wszystkie założenia poprzedniego wniosku. Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} |H(z) - H(w)| &= |h(1)| \leq \sup_{t \in (0,1)} |h'(t)| = \sup_{t \in (0,1)} |H'(w + t(z - w))| \cdot |z - w| \\ &\leq |z - w| \sup_{\zeta \in W} |H'(\zeta)|, \end{aligned}$$

gdziż  $I = \{z + t(w - z) : t \in [0, 1]\} \subset W$ .  $\square$

**Wniosek 7.31.** Założmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 7.27. Niech  $\Delta_{n,m} = f_n - f_m: W \rightarrow \mathbb{C}$ . Wówczas dla każdej liczby  $\eta > 0$  istnieje takie  $n_0 \in N$ , że dla wszystkich  $n, m > n_0$  i wszystkich  $z, w \in W$  zachodzi nierówność

$$|\Delta_{n,m}(z) - \Delta_{n,m}(w)| < \eta |z - w|.$$

**Dowód WNIOSKU 7.31** (szkic). Stosujemy poprzedni wniosek do funkcji  $H = \Delta_{n,m}$ . Wtedy  $H' = \Delta'_{n,m} = f'_n - f'_m$ . Otrzymujemy

$$|\Delta_{n,m}(z) - \Delta_{n,m}(w)| \leq |z - w| \cdot \sup_{\zeta \in W} |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)|.$$

Ponieważ ciąg  $(f'_n)$  jest jednostajnie zbieżny na  $W$ , więc dla ustalonego  $\eta$ , posługując się jednostajnym warunkiem Cauchy'ego, znajdziemy  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że

$$\sup_{\zeta \in W} |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| < \eta \quad \text{dla wszystkich } m, n > n_0.$$

To kończy dowód wniosku.  $\square$

Dalszy ciąg dowodu twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych w przypadku zespolonym jest, począwszy od tego miejsca, taki sam, jak w przypadku rzeczywistym. Czytelnik, zainteresowany rozumieniem teorii, zechce samodzielnie sprawdzić wszystkie szczegóły.

### 7.4.3 Istnienie funkcji pierwotnej

Udowodnimy teraz zapowiedziane wcześniej twierdzenie: każda funkcja ciągła jest pochodną pewnej funkcji. Najpierw wprowadzimy tradycyjną terminologię.

**Definicja 7.32.** Niech  $P \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem, a  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  dowolną funkcją. Funkcja różniczkowalna  $F: P \rightarrow \mathbb{R}$  nazywa się *funkcją pierwotną*  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $F'(x) = f(x)$  dla każdego  $x \in P$ .

**Stwierdzenie 7.33.** Jeżeli  $P \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem, a  $F_1, F_2: P \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ , to wówczas  $F_1 - F_2$  jest funkcją stałą na  $P$ .

Dowód. Wprost z definicji wynika, że  $(F_1 - F_2)' = F'_1 - F'_2 = f - f = 0$ . Zatem, na mocy Wniosku 6.43, funkcja  $F_1 - F_2$  jest stała na  $P$ .  $\square$

**Twierdzenie 7.34.** Niech  $P \subset \mathbb{R}$  będzie (dowolnym) przedziałem. Każda funkcja ciągła  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  ma funkcję pierwotną.

Dowód. Przedstawmy przedział  $P$  jako sumę wstępującego ciągu przedziałów domkniętych  $[a_k, b_k]$ , tzn. niech

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k], \quad \text{gdzie } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots, \quad b_1 \leq b_2 \leq b_3 \dots$$

Bez zmniejszenia ogólności założymy, że 0 jest punktem wspólnym wszystkich przedziałów  $[a_k, b_k]$ . Z Twierdzenia 7.15 wynika, że istnieje ciąg wielomianów  $P_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taki, że

$$\sup_{x \in [a_k, b_k]} |P_k(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.8)$$

Dla każdego  $k$  znajdziemy wielomian  $Q_k$  taki, że  $Q'_k(x) = P_k(x)$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  i  $Q_k(0) = 0$ . Istotnie, jeśli  $P_k(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ , to podane warunki spełnia

$$Q_k(x) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Ustalmy teraz  $k$ . Zauważmy, że ciąg liczbowy  $(Q_n(0))_{n \geq k}$  jest zbieżny (bo składa się z samych zer), natomiast wobec (7.8) ciąg  $(P_n)_{n \geq k}$ , tzn. ciąg pochodnych wielomianów  $Q_n$ , jest zbieżny jednostajnie do  $f$  na  $[a_k, b_k]$ . Spełnione są więc założenia Twierdzenia 7.19, wynika zeń, że ciąg  $(Q_n)_{n \geq k}$  jest zbieżny jednostajnie na  $[a_k, b_k]$  do funkcji  $F_k: [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że  $F'_k = f$  na  $[a_k, b_k]$  i  $F_k(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(0) = 0$ .

Zauważmy, że dla  $m > k$  uzyskane w ten sposób funkcje  $F_m$  i  $F_k$  pokrywają się na  $[a_m, b_m] \cap [a_k, b_k] = [a_k, b_k]$ . Istotnie,

$$F'_m(x) - F'_k(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{dla } x \in [a_k, b_k],$$

więc  $F_m - F_k = \text{const}$ , ale  $F_m(0) = F_k(0) = 0$ . Dlatego  $F_m = F_k$  na  $[a_k, b_k]$ . Można więc określić funkcję  $F: P = \bigcup [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$F(x) := F_k(x) \quad \text{dla } x \in [a_k, b_k].$$

Sprawdziliśmy, że prawa strona nie zależy od wyboru liczby  $k$ , a zatem definicja jest poprawna. Ponieważ dla wszystkich  $k$  jest  $F'_k = f$  na  $[a_k, b_k]$ , więc  $F' = f$ .  $\square$

#### 7.4.4 Inne przykłady

Podamy teraz przykłady dwóch funkcji ciągły. Każda z nich jest określona jako suma pewnego szeregu funkcyjnego. Jedna z nich nie ma pochodnej w żadnym punkcie, druga natomiast ma pochodne wszystkich rzędów.

**Przykład 7.35 (van der Waerden; funkcja ciągła nigdzie nieróżniczkowalna).**

Niech

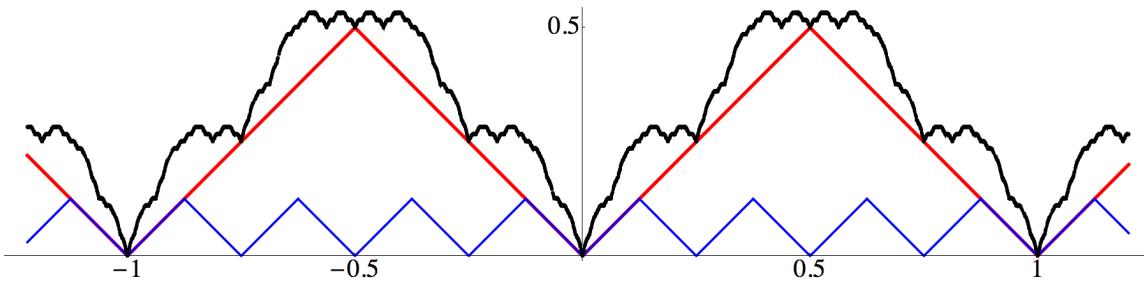
$$d(x) = \inf\{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Innymi słowy,  $d(x)$  jest odległością  $x$  od najbliższej liczby całkowitej. Można sprawdzić, że  $d(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$  dla  $x \in [0, 1]$  i  $d$  jest ciągłą, kawałkami liniową, funkcją okresową o okresie 1. Pochodna funkcji  $d$  istnieje w punktach  $x \neq k/2$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , i jest w nich równa  $\pm 1$ . Wykres funkcji  $d$  jest przedstawiony na rysunku. Mamy  $\inf d = 0$ ,  $\sup d = \frac{1}{2}$ .

Położymy

$$d_n(x) = \frac{d(4^n x)}{4^n}, \quad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ  $|d_n(x)| = |4^{-n} d(4^n x)| \leq 4^{-n} \cdot \frac{1}{2}$ , a szereg geometryczny  $\sum 4^{-n}$  jest zbieżny, więc z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg definiujący funkcję  $W$  jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny na  $\mathbb{R}$ . Dlatego  $W: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą.



Funkcje  $d = d_0$  (środkowy zygzak),  $d_1$  (drobniejszy, dolny zygzak) oraz  $d_0 + d_1 + \dots + d_7$  (nieregularna, czarna krzywa). W żargonie Mathematici użyto definicji  $d[x_] := \text{Abs}[x - \text{Round}[x]]$ .

Wykażemy, że  $W$  nie ma skończonej pochodnej w żadnym punkcie. Ustalmy dowolne  $x \in \mathbb{R}$  i  $m \in \mathbb{N}$ . Funkcja  $4^{-m} d(4^m x)$  jest liniowa na przedziałach długości  $4^{-m} \cdot \frac{1}{2}$ ; wybierzmy taki z nich, do którego należy punkt  $x$ . Dobierzmy teraz liczbę  $h_m$  tak, żeby spełnione były dwa warunki:

- $|h_m| = 4^{-m-1}$ ;
- W przedziale  $I$  o końcach  $x$  i  $x + h_m$  funkcja  $d_m(x) = 4^{-m} d(4^m x)$  jest liniowa.

Obliczymy teraz iloraz różnicowy  $(W(x + h_m) - W(x)) / h_m$ .

Otoż,  $d_m(x + h_m) - d_m(x) = \pm h_m$  dzięki dobiorowi  $h_m$  do  $x$ . Podobnie, dla wszystkich  $n < m$  jest  $d_n(x + h_m) - d_n(x) = \pm h_m$ , gdyż dla  $n < m$  funkcja  $d_n$  jest liniowa na przedziale  $I$ , na którym liniowa jest funkcja  $d_m$ . Dlatego

$$\frac{d_n(x + h_m) - d_n(x)}{h_m} = \pm 1, \quad n = 0, 1, \dots, m. \quad (7.9)$$

Natomiast dla  $n > m$  funkcja  $d_n$  ma okres  $4^{-n}$ . Liczba  $|h_m| = 4^{-m-1} = 4^{-n} \cdot 4^{n-m-1}$  jest wtedy wielokrotnością  $4^{-n}$ , więc także jest okresem  $d_n$ . Dlatego w tym przypadku  $d_n(x + h_m) = d_n(x)$ . Zatem

$$\frac{d_n(x + h_m) - d_n(x)}{h_m} = 0, \quad n = m+1, m+2, m+3, \dots \quad (7.10)$$

Z bezwzględnej zbieżności szeregu definiującego  $W(x)$  wynika, że

$$\frac{W(x + h_m) - W(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x + h_m) - d_n(x)}{h_m} \stackrel{(7.10)}{=} \sum_{n=0}^m \frac{d_n(x + h_m) - d_n(x)}{h_m} \stackrel{(7.9)}{=} \sum_{n=0}^m \pm 1.$$

Jednak suma parzystej liczby składników  $\pm 1$  jest parzystą liczbą całkowitą, a suma nieparzystej liczby  $\pm 1$  jest nieparzystą liczbą całkowitą. Dlatego ciąg  $(W(x + h_m) - W(x))/h_m$  ma na przemian wyrazy parzyste i nieparzyste i z pewnością nie spełnia warunku Cauchy'ego, a więc nie może być zbieżny do granicy skończonej.  $\square$

**Przykład 7.36.** Niech<sup>2</sup>

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t), \quad t > 0. \quad (7.11)$$

Wówczas funkcja  $f$  ma na  $(0, \infty)$  ciągłe pochodne wszystkich rzędów. Wykażemy przez indukcję, że

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 t), \quad t > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.12)$$

Niech  $0 < \varepsilon < M < \infty$  będą dowolne. Wystarczy sprawdzić, że wzór (7.12) zachodzi na  $[\varepsilon, M]$ . Dla  $k = 0$  mamy na tym przedziale  $0 < \exp(-n^2 t) \leq (e^{-\varepsilon})^n = q^n$ . Liczba  $q = e^{-\varepsilon} \in (0, 1)$ , więc na mocy kryterium Weierstrassa szereg (7.12) jest dla  $k = 0$  jednostajnie zbieżny na  $[\varepsilon, M]$ , a jego suma  $f$  jest funkcją ciągłą.

Załóżmy teraz, że (7.12) zachodzi dla pewnej liczby  $k$ . Różniczkując kolejno składniki prawej strony, otrzymujemy szereg o wyrazach

$$\frac{d}{dt} \left( (-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 t) \right) = (-1)^{k+1} n^{2(k+1)} \exp(-n^2 t). \quad (7.13)$$

Na przedziale  $[\varepsilon, M]$  jest

$$\left| \frac{d}{dt} \left( (-1)^k n^{2k} \exp(-n^2 t) \right) \right| = n^{2(k+1)} \exp(-n^2 t) \leq n^{2(k+1)} (e^{-\varepsilon})^n$$

i dlatego szereg zbudowany ze składników (7.13), tzn. pochodnych składników szeregu (7.12), jest, na mocy kryterium Weierstrassa<sup>3</sup>, jednostajnie zbieżny na  $[\varepsilon, M]$ . Sam szereg (7.12) też jest zbieżny na całym przedziale  $[\varepsilon, M]$ ; to jest założenie indukcyjne. Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów i szeregów funkcyjnych wynika teraz, że wzór (7.12) zachodzi także dla liczby  $k + 1$ .

Na mocy zasady indukcji zupełnej, (7.12) zachodzi dla wszystkich  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

<sup>2</sup>W późniejszym okresie studiów matematycznych Czytelnik zobaczy, że podobne szeregi pojawiają się we wzorach na rozwiązania równań różniczkowych, opisujących proces rozchodzenia się ciepła.

<sup>3</sup>Czytelnik zechce przypomnieć sobie Przykłady 4.15–4.16, gdzie była mowa o zbieżności szeregów liczbowych  $\sum n^k q^n$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$  jest ustalone, a  $q \in (0, 1)$ .

## 7.5 Twierdzenie Arzeli–Ascoliego

Udowodnimy w tym podrozdziale ważne twierdzenie, określające warunki konieczne i dośćateczne na to, aby z *każdego* ciągu funkcyjnego, zawartego w pewnej rodzinie funkcji ciągłych  $\mathcal{F}$  można było wybrać podciąg jednostajnie zbieżny, którego granica też należy do rodziny  $\mathcal{F}$ . Najpierw wprowadzimy kilka definicji.

**Definicja 7.37** ( $\delta$ -sieć). Niech  $\delta > 0$ . Powiemy, że podzbiór  $A_1$  zbioru  $A \subset \mathbb{R}$  jest  $\delta$ -siecią w  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $x \in A$  istnieje  $y \in A_1$  takie, że  $|x - y| < \delta$ .

**Przykład 7.38.** Zbiór  $A_1 = \{k/2 : k \in \mathbb{Z}\}$  jest  $\delta$ -siecią w  $A = \mathbb{R}$  dla każdej liczby  $\delta > \frac{1}{4}$ . Zbiór liczb wymiernych  $A_1 = \mathbb{Q}$  jest  $\delta$ -siecią w  $A = \mathbb{R}$  dla każdej liczby  $\delta > 0$ .

**Definicja 7.39.** Zbiór niepusty  $A \subset \mathbb{R}$  nazywa się całkowicie ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby  $\delta > 0$  w  $A$  istnieje skończona  $\delta$ -sieć.

**Lemat 7.40.** Każdy niepusty zbiór zwarty  $K \subset \mathbb{R}$  jest całkowicie ograniczony.

Dowód. Przypuśćmy, że lemat jest fałszywy. Niech  $K \subset \mathbb{R}$  będzie niepustym zbiorem zwartym, w którym dla pewnego  $\delta > 0$  nie ma skończonej  $\delta$ -sieci. Weźmy dowolne  $x_1 \in K$ . Zbiór  $\{x_1\}$  nie jest  $\delta$ -siecią w  $K$ , więc istnieje  $x_2 \in K$  takie, że  $|x_2 - x_1| \geq \delta$ . Zbiór  $\{x_1, x_2\}$  nie jest  $\delta$ -siecią w  $K$ , więc istnieje  $x_3 \in K$  takie, że  $|x_3 - x_j| \geq \delta$  dla  $j = 1, 2$ . Postępując dalej w taki sposób, znajdziemy ciąg punktów  $(x_n) \subset K$  taki, że  $|x_i - x_j| \geq \delta$  dla wszystkich  $i \neq j$ . Żaden podciąg ciągu  $(x_n)$  nie spełnia warunku Cauchy'ego, więc żaden podciąg ciągu  $(x_n)$  nie jest zbieżny. To jest sprzeczność: każdy ciąg  $(x_n) \subset K$  powinien zawierać podciąg zbieżny, gdyż  $K$  jest zwarty.  $\square$

Wprowadzimy teraz kilka określeń, opisujących własności rodzin funkcji. Zanim podamy twierdzenie Arzeli–Ascoliego, zilustrujemy te własności prostymi przykładami.

**Definicja 7.41.** Rodzina  $\mathcal{F} \subset C(K)$  nazywa się *zwarta* wtedy i tylko wtedy, gdy z dowolnego ciągu funkcji  $(f_n) \subset \mathcal{F}$  można wybrać podciąg  $(f_{n_j})$  zbieżny jednostajnie na  $K$  do pewnej funkcji  $f \in \mathcal{F}$ .

Okazuje się, że jeśli  $K \subset \mathbb{R}$  jest zbiorem zwartym, to zwartość dowolnej rodziny funkcji  $\mathcal{F} \subset C(K)$  można dość łatwo scharakteryzować. Kluczowym pojęciem, służącym do tego celu, jest *równociągłość*.

**Definicja 7.42.** Powiemy, że rodzina  $\mathcal{F} \subset C(K)$  jest *równociągła*<sup>4</sup> wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $\delta > 0$ , że dla każdej funkcji  $f \in \mathcal{F}$  i wszystkich punktów  $x, y \in K$ ,  $|x - y| < \delta$ , zachodzi nierówność  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Czytelnik zechce zwrócić uwagę na kolejność kwantyfikatorów w definicji. Chodzi o to, że liczbę  $\delta > 0$  można wybrać jednocześnie dla wszystkich funkcji  $f \in \mathcal{F}$ .

**Przykład 7.43.** Rodzina  $\mathcal{F} \subset C([0, 1])$  wszystkich funkcji, spełniających warunek Lipschitza ze stałą 2011, jest równociągła: dla każdego  $\varepsilon > 0$  warunek podany w definicji spełnia liczba  $\delta = \varepsilon/2011$ . Jeśli bowiem  $|x - y| \in [0, 1]$ ,  $|x - y| < \delta = \varepsilon/2011$  i  $f$  jest jakąkolwiek funkcją, spełniającą na  $[0, 1]$  warunek Lipschitza ze stałą 2011, to

$$|f(x) - f(y)| \leq 2011|x - y| < 2011\delta = \varepsilon.$$

<sup>4</sup>Mówi się też zamiennie: *jednakowo ciągła*.

**Przykład 7.44.** Rodzina funkcji  $f_n(x) = \sin nx$ , gdzie  $x \in [0, 2\pi]$  i  $n = 1, 2, \dots$ , nie jest równociągła na  $[0, 2\pi]$ . Istotnie, niech  $\varepsilon = 1/2$ . Jeśli  $\delta > 0$ , a  $n$  wybierzemy tak, żeby  $\pi/2n < \delta$ , to  $|f_n(0) - f_n(\pi/2n)| = |\sin 0 - \sin \frac{\pi}{2}| = 1 > \varepsilon$

**Definicja 7.45.** Powiemy, że rodzina  $\mathcal{F} \subset C(K)$  jest *wspólnie ograniczona* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała  $M > 0$  taka, że  $\|f\|_{\infty, K} \leq M$  dla każdej funkcji  $f \in \mathcal{F}$ .

**Przykład 7.46.** Rodzina wszystkich wielomianów na  $[0, 1]$  nie jest wspólnie ograniczona, gdyż zawiera dowolnie duże funkcje stałe. Rodzina  $f_n(x) = \sin nx$ , gdzie  $x \in [0, 2\pi]$  i  $n = 1, 2, \dots$ , jest wspólnie ograniczona przez liczbę  $M = 1$ .

**Definicja 7.47.** Powiemy, że rodzina  $\mathcal{F} \subset C(K)$  jest *domknięta* wtedy i tylko wtedy, gdy granica każdego jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji z rodziny  $\mathcal{F}$  też należy do  $\mathcal{F}$ .

**Przykład 7.48.** Rodzina  $\mathcal{W}$  wszystkich wielomianów na  $[0, 1]$  nie jest domknięta. Istnieje bowiem ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie na  $[0, 1]$  do  $f(x) = \exp(x)$ , tzn. do funkcji, nie należącej do  $\mathcal{W}$ .

**Twierdzenie 7.49** (Arzela, Ascoli). *Niech  $K \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem zwartym i niech  $\mathcal{F} \subset C(K)$ . Następujące warunki są wówczas równoważne:*

- (i)  $\mathcal{F}$  jest zwarta;
- (ii)  $\mathcal{F}$  jest domknięta, wspólnie ograniczona i równociągła.

Dowód. Najpierw wykażemy nieco łatwiejszą implikację (i)  $\Rightarrow$  (ii). Niech  $\mathcal{F} \subset C(K)$  będzie rodziną zowątą. Domkniętość rodziny  $\mathcal{F}$  jest oczywista: jeśli  $(f_n) \subset \mathcal{F}$  jest jednostajnie zbieżnym ciągiem funkcji, to jego granica  $f$  z pewnością należy do  $\mathcal{F}$ , gdyż  $f$  jest granicą każdego podciagu ciągu  $(f_n)$ .

Udowodnimy teraz, że  $\mathcal{F}$  jest wspólnie ograniczona. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy dla każdego  $m \in \mathbb{N}$  istnieje  $f_m \in \mathcal{F}$  taka, że  $\|f_m\|_{\infty} > m$ , tzn., z definicji normy jednostajnej,  $|f_m(x_m)| > m$  dla pewnego  $x_m \in K$ . Z ciągu  $(f_m)$  można, dzięki z wartości rodzinie  $\mathcal{F}$ , wybrać podciąg  $f_{m_j} \rightrightarrows f$  na  $K$ . Funkcja  $f$  jest ciągła, a więc jest ograniczona na  $K$ ; niech  $M = \sup |f| + 1$ . Jeśli  $m_j > M$  jest dostatecznie duże, to  $|f - f_{m_j}| < 1$  na  $K$  z definicji jednostajnej zbieżności. Zatem, z nierówności trójkąta,

$$|f(x_{m_j})| \geq |f_{m_j}(x_{m_j})| - |f_{m_j}(x_{m_j}) - f(x_{m_j})| > m_j - 1 > M - 1 = \sup |f|,$$

a to jest oczywista sprzeczność. Rodzina  $\mathcal{F}$  musi więc być wspólnie ograniczona.

Wreszcie, sprawdzimy, że  $\mathcal{F}$  jest równociągła. Jeszcze raz będziemy rozumować przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że rodzina  $\mathcal{F}$  nie jest równociągła. Istnieje wtedy liczba  $\varepsilon_0 > 0$  taka, że dla każdej liczby  $\delta_n = \frac{1}{n}$  istnieje funkcja  $f_n \in \mathcal{F}$  i punkty  $x_n, y_n \in K$  takie, że  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ , ale  $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon_0$ . Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że  $x_n - y_n \rightarrow 0$ .

Ponieważ rodzina  $\mathcal{F}$  jest zowała, więc – przechodząc w razie potrzeby do podciagu zbieżnego – możemy bez zmniejszenia ogólności przyjąć, że ciąg  $(f_n) \subset \mathcal{F}$  jest jednostajnie zbieżny. Funkcja  $f = \lim f_n$  jest ciągła na  $K$ , a więc na mocy twierdzenia Cantora jest jednostajnie ciągła. Wybierzmy teraz  $n_0$  tak, żeby  $\|f_n - f\|_{\infty} < \varepsilon_0/3$  dla wszystkich  $n > n_0$ . Wtedy, z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &\geq |f_n(x_n) - f_n(y_n)| - |f_n(x_n) - f(x_n)| - |f_n(y_n) - f(y_n)| \\ &\geq \varepsilon_0 - 2\|f_n - f\|_{\infty} > \frac{\varepsilon_0}{3}. \end{aligned}$$

Zatem  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , ale  $f_n(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$ . To przeczy jednostajnej ciągłości  $f$  na  $K$ . Dowód implikacji (i)  $\Rightarrow$  (ii) jest zakończony.

Przejdziemy teraz do dowodu ciekawszej i ważniejszej implikacji (ii)  $\Rightarrow$  (i). Udowodnimy najpierw następujący fakt:

*Jeśli rodzina  $\mathcal{F} \subset C(K)$  jest wspólnie ograniczona i równociągła, to z każdego ciągu  $(f_n) \subset \mathcal{F}$  można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny.*

Z Lematu 7.40 wynika, że dla każdego  $m \in \mathbb{N}$  w  $K$  istnieje skończona  $\frac{1}{m}$ -sieć. Suma  $P$  tych wszystkich sieci jest zbiorem przeliczalnym. Ponumerujmy punkty poszczególnych sieci tak, aby  $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$ .

Ustalmy ciąg  $(f_n) \subset \mathcal{F}$ . Wykażemy, że z  $(f_n)$  można wybrać taki podciąg  $g_k = f_{n_k}$ , że ciąg liczbowy  $(g_k(x_m))_{k=1,2,\dots}$  jest zbieżny dla każdego ustalonego  $m \in \mathbb{N}$ . (Wykorzystamy w tym celu metodę przekątniową). Następnie udowodnimy, że wybrany podciąg funkcji jest nie tylko zbieżny w każdym z punktów  $x_m$ , ale także jednostajnie zbieżny na  $K$ .

Rodzina  $\mathcal{F}$  jest wspólnie ograniczona, więc ciąg liczb  $f_n(x_1)$  jest ograniczony. Poługując się twierdzeniem Bolzano–Weierstrassa, można zeń wybrać podciąg zbieżny. Oznaczmy go  $f_{1,n}(x_1)$ . Aby wybrać następny podciąg, zauważmy, że ciąg  $f_{1,n}(x_2)$  jest ograniczony, a więc zawiera podciąg zbieżny  $f_{2,n}(x_2)$ . Odnotujmy, że ciąg  $f_{2,n}(x_1)$  też jest zbieżny, gdyż jest podciągiem zbieżnego ciągu  $f_{1,n}(x_1)$ . Założymy teraz, że dla pewnej liczby  $k$  wybraliśmy już podciągi  $f_{i,n}$ , gdzie  $i = 1, \dots, k$ , o następujących własnościach:

- Gdy  $j > i$ , to  $(f_{j,n})$  jest podciągiem  $(f_{i,n})$ ;
- Ciągi liczbowe  $(f_{k,n}(x_i))_{n=1,2,\dots}$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, k$ , są zbieżne.

Rozpatrzmy teraz ciąg  $(f_{k,n}(x_{k+1}))_{n=1,2,\dots}$ . Jest on ograniczony, więc ma podciąg zbieżny  $(f_{k+1,n}(x_{k+1}))_{n=1,2,\dots}$ . Podciąg  $f_{k+1,n}$  jest oczywiście podciągiem każdego z ciągów  $f_{i,n}$  dla  $i \leq k$ , więc wszystkie ciągi liczbowe  $(f_{k+1,n}(x_i))_{n=1,2,\dots}$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, k+1$ , są zbieżne. Kontynuując tę procedurę, otrzymamy nieskończenie wiele podciągów  $f_{k,n}$  wyjściowego ciągu  $(f_n)$ ;  $k$ -ty z tych podciągów,  $f_{k,n}$ , jest zbieżny w punktach  $x_1, \dots, x_k$ . Wygodnie jest zapisać te podciągi w nieskończonej tabeli

$k$	1	2	3	$\dots$
$f_{1,1}$	$f_{2,1}$	$f_{3,1}$	$\dots$	
$f_{1,2}$	$f_{2,2}$	$f_{3,2}$	$\dots$	
$f_{1,3}$	$f_{2,3}$	$f_{3,3}$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	

Ciąg w  $k$ -tej kolumnie jest podciągiem każdej z wcześniejszych kolumn i jest zbieżny w punktach  $x_1, \dots, x_k$ . Położymy teraz  $g_n = f_{n,n}$ . (Jest to ciąg funkcji, wypisanych na głównej przekątnej powyższej tabeli). Zauważmy, że dla każdego ustalonego  $m$  ciąg  $g_n(x_m)$  jest, począwszy od  $m$ -tego miejsca, podciągiem  $f_{m,n}(x_m)$ . Dlatego granica  $\lim_n g_n(x_m)$  istnieje dla każdego  $m \in \mathbb{N}$ .

Wykażemy teraz, że ciąg  $g_n$  jest jednostajnie zbieżny na  $K$ . W tym celu udowodnimy, że  $(g_n)$  spełnia na  $K$  jednostajny warunek Cauchy'ego. Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Dobierzmy do  $\varepsilon/3 > 0$

liczbę  $\delta > 0$ , korzystając z definicji równociągłości. Ustalmy teraz  $N$  tak duże, aby wśród punktów  $x_1, \dots, x_N$  zbioru  $P$  znalazła się pewna  $\delta$ -sieć w zbiorze  $K$ . Jest to możliwe, gdyż zbiór przeliczalny  $P$  był sumą skończonych  $\frac{1}{n}$ -sieci dla  $K$ .

Ponieważ ciągi  $g_n(x_j)$  są zbieżne dla każdego  $j = 1, \dots, N$ , więc – na mocy warunku Cauchy'ego dla ciągów liczbowych – istnieje  $n_0$  takie, że

$$|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla wszystkich } m, n > n_0 \text{ i wszystkich } j = 1, \dots, N. \quad (7.14)$$

Niech  $x \in K$ . Istnieje  $j \in \{1, \dots, N\}$  takie, że  $|x - x_j| < \delta$ . Zatem, dla  $n, m > n_0$ ,

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_m(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dwa skrajne składniki oszacowaliśmy, korzystając z równociągłości i doboru  $\delta$  do  $\varepsilon/3$ , środkowy zaś – korzystając z (7.14). Otrzymujemy ostatecznie  $|g_n - g_m| < \varepsilon$  na  $K$  dla wszystkich  $m, n > n_0$ , więc ciąg  $g_n$ , tzn. podciąg  $f_n$  wybrany metodą przekątniąwą, jest zbieżny jednostajnie na  $K$ .

Z domkniętości rodziny  $\mathcal{F}$  wynika, że granica ciągu  $g_n$  też należy do  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Bardzo często jest w analizie używany natychmiastowy wniosek z powyższego dowodu.

**Wniosek 7.50.** Założmy, że  $K$  jest zbiorem zwartym w  $\mathbb{R}$ , a rodzina funkcji  $\mathcal{F} \subset C(K)$  jest wspólnie ograniczona i równociągła. Wówczas każdy ciąg  $(f_n) \subset \mathcal{F}$  zawiera podciąg jednostajnie zbieżny.

## Rozdział 8

# Szeregi potęgowe

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie  $z_0 \in \mathbb{C}$  i współczynnikach  $a_n \in \mathbb{C}$  nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (8.1)$$

gdzie  $z \in \mathbb{C}$ . Z szeregami tego typu mieliśmy już do czynienia, omawiając funkcję wykładniczą, sinus i cosinus.

W tym rozdziale, wyposażeni w wiedzę o zbieżności jednostajnej, omówimy ogólne własności funkcji, które można definiować wzorami typu (8.1).

### 8.1 Dygresja: granica górnna i dolna

Niech  $(b_n)$  będzie ciągiem liczb rzeczywistych.

**Definicja 8.1.** Granicą górną ciągu  $(b_n)$  nazywamy element zbioru  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , określony następująco:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left( \sup_{m \geq n} b_m \right).$$

Granicą dolną ciągu  $(b_n)$  nazywamy element zbioru  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , określony następująco:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( \inf_{m \geq n} b_m \right).$$

Symbole ‘ $\limsup$ ’ i ‘ $\liminf$ ’ pochodzą od łacińskich nazw *limes superior* oraz *limes inferior*.

**Uwaga.** Nietrudno sprawdzić, że zachodzą równości

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left( \sup_{m \geq n} b_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{m \geq n} b_m \right), \quad (8.2)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( \inf_{m \geq n} b_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{m \geq n} b_m \right). \quad (8.3)$$

Istotnie, ciąg  $B_n = \sup_{m \geq n} b_m$  jest nierosnący (zwiększając  $n$ , obliczamy kres górny mniejszego lub tego samego zbioru). Dlatego ciąg  $B_n$  ma granicę (właściwą lub niewłaściwą):

nie wiemy wszak, czy  $B_n$  jest ograniczony), która zarazem jest kresem dolnym wszystkich liczb  $B_n$ . (Patrz Twierdzenie 2.23, Wniosek 2.24 i Twierdzenie 2.29). To dowodzi pierwszej z podanych równości; drugą można sprawdzić analogicznie.

### Inna definicja granicy górnej i dolnej. Granice częściowe

Równoważna definicja granicy górnej i dolnej jest następująca. Oznaczmy literą  $\mathcal{B}$  zbiór wszystkich tych podciągów ciągu  $(b_n)$ , które są zbieżne do granicy właściwej lub niewłaściwej. Niech  $\Gamma$  oznacza zbiór wszystkich granic podciągów  $(b_{n_k}) \in \mathcal{B}$ . Inaczej mówiąc, element  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  należy do  $\Gamma$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $c = \lim b_{n_k}$  dla pewnego podciągu  $(b_{n_k})$  ciągu  $(b_n)$ .

Tak określony zbiór  $\Gamma$  nazywamy *zbiorem granic częściowych* ciągu  $(b_n)$ . Zachodzą równości

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup \Gamma, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \Gamma. \quad (8.4)$$

Ich sprawdzenie w oparciu o Definicję 8.1 pozostawimy jako nietrudne zadanie dla Czytelnika.

**Przykład 8.2.** Ciąg  $b_n = (-1)^n$  ma granicę górną 1 i granicę dolną -1. Zbiór granic częściowych tego ciągu to zbiór dwuelementowy  $\{-1, 1\}$ . Ciąg

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{5}, \quad \dots$$

ma granicę górną 1 i granicę dolną 0. Zbiór granic częściowych tego ciągu to przedział  $[0, 1]$ .

**Zadanie 8.3.** Niech  $(b_n)$  będzie ciągiem liczb rzeczywistych, a  $\Gamma$  zbiorem granic częściowych tego ciągu. Wykazać, że jeśli ciąg  $(g_n) \subset \Gamma$  ma granicę (właściwą lub niewłaściwą)  $g$ , to  $g \in \Gamma$ .

Posługując się wnioskiem 2.36, nietrudno udowodnić, że ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny (do granicy właściwej lub niewłaściwej) wtedy i tylko wtedy, gdy jego granica górna i dolna są równe.

Zanotujmy jeszcze jedną własność granicy górnej, którą wykorzystamy w tym rozdziale.

**Stwierdzenie 8.4.** Jeśli  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , to dla każdego  $b' > b$  istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że  $b_n < b'$  dla wszystkich  $n > n_0$ .

**Dowód.** Wiemy, że  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} b_m)$ ; patrz (8.2). Jeśli  $b' > b$ , to dla dostatecznie dużych  $n$  jest  $\sup_{m \geq n} b_m < b'$ , tzn.  $b_m < b'$  dla wszystkich dostatecznie dużych  $m$ .  $\square$

## 8.2 Promień zbieżności; ciągłość sumy szeregu potegowego

Rozpatrzmy szereg potęgowy

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (8.5)$$

o środku w punkcie  $z_0 = 0$ .

**Stwierdzenie 8.5.** Założmy, że szereg  $S(\xi)$  jest zbieżny w pewnym punkcie  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Jeśli  $0 < \varrho < |\xi|$ , to w kole domkniętym  $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \varrho\}$  szereg  $S(z)$  jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.

Dowód. Z warunku koniecznego zbieżności szeregu wynika, że  $a_n \xi^n \rightarrow 0$ , a więc istnieje liczba  $M$  taka, że  $|a_n \xi^n| \leq M$  dla wszystkich  $n$ . Jeśli  $z \in D_\varrho$ , to

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \varrho^n = |a_n \xi^n| \cdot \frac{\varrho^n}{|\xi|^n} \leq M \varrho^n,$$

gdzie  $q = \varrho/|\xi| \in (0, 1)$ , gdyż  $0 < \varrho < |\xi|$ . Szereg o wyrazach  $M q^n$  jest więc zbieżnym szeregiem liczbowym (po prostu: szeregiem geometrycznym). Teza stwierdzenia wynika z kryterium Weierstrassa.  $\square$

**Stwierdzenie 8.6.** Założmy, że szereg  $S(\xi)$  jest rozbieżny w pewnym punkcie  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Jeśli  $|z| > |\xi|$ , to szereg  $S(z)$  jest rozbieżny.

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie i szereg  $S(z)$  jest zbieżny. Ponieważ  $|\xi| < |z|$ , więc z poprzedniego stwierdzenia wynika wtedy, że zbieżny jest szereg  $S(\xi)$ , sprzeczność.  $\square$

Z obu powyższych stwierdzeń wynika, że szereg potęgowy (8.5) jest zbieżny w pewnym kole otwartym  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$  i rozbieżny poza kołem domkniętym o tym samym promieniu, tzn. na zbiorze  $\{z \in \mathbb{C}: |z| > R\}$ . Okazuje się, że liczbę  $R$ , nazywaną *promieniem zbieżności szeregu* (8.5), można wyznaczyć, znając współczynniki  $a_n$  tego szeregu.

**Twierdzenie 8.7 (wzór Cauchy'ego–Hadamarda).** Niech  $(a_n)$  będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych i niech

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (8.6)$$

Wtedy szereg potęgowy  $S(z)$  jest, dla każdego  $\varrho < R$ , zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w kole  $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \varrho\}$ , oraz rozbieżny w punktach zbioru  $\{z \in \mathbb{C}: |z| > R\}$ .

Dowód. Rozpatrzmy najpierw przypadek  $R > 0$ . Ustalmy  $\varrho < R$ . Wybierzmy liczby rzeczywiste  $R_1, R_2$  tak, aby  $\varrho < R_1 < R_2 < R$ . Niech  $\xi$  będzie (jakimkolwiek) punktem okręgu  $\gamma_{R_1} = \{w \in \mathbb{C}: |w| = R_1\}$ . Ponieważ  $1/R_2 > 1/R$ , więc na mocy Stwierdzenia 8.4 istnieje takie  $n_0$ , że dla wszystkich  $n > n_0$  jest

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R_2},$$

lub równoważnie  $|a_n| < (R_2)^{-n}$ . Dlatego

$$|a_n \xi^n| = |a_n| R_1^n < \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^n \quad \text{dla } n > n_0,$$

a więc na mocy kryterium porównawczego szereg  $S(\xi)$  jest zbieżny (nawet bezwzględnie). Ze Stwierdzenia 8.5 wynika teraz pierwsza część tezy:  $S(z)$  zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w kole  $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \varrho\}$ .

Niech teraz  $|z| > R$ . Ustalmy  $R_3 \in \mathbb{R}$  tak, aby mieć  $R < R_3 < |z|$ . Z definicji granicy górnej wynika, że istnieje podciąg  $n_j$  taki, że  $|a_{n_j}|^{1/n_j} \rightarrow 1/R > 1/R_3$ . Dla dostatecznie dużych  $n_j$  jest więc  $|a_{n_j}| > R_3^{-n_j}$ , a zatem

$$|a_{n_j} z^{n_j}| > R_3^{-n_j} |z|^{n_j} > R_3^{-n_j} R_3^{n_j} = 1.$$

Przetoż szereg  $S(z)$  nie może być zbieżny, gdyż pewien podciąg ciągu jego wyrazów nie dąży do zera: nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

Wreszcie, gdy  $R = 0$ , to po prostu dla każdego  $z \neq 0$  szereg  $S(z)$  jest rozbieżny. Aby to sprawdzić, Czytelnik zechce prześledzić ostatni fragment rozumowania, wpisując wszędzie  $R = 0, 1/R = \infty$ .  $\square$

**Definicja 8.8.** Koło  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ , gdzie liczba  $R$  jest dana wzorem Cauchy'ego–Hadamarda (8.6), nazywamy kołem zbieżności szeregu (8.5).

Wiemy z poprzedniego rozdziału, że suma szeregu jednostajnie zbieżnego na pewnym podzbiorze płaszczyzny  $\mathbb{C}$  (lub prostej  $\mathbb{R}$ ) jest na tym zbiorze funkcją ciągłą. Ponieważ na każdym kole domkniętym  $D_\varrho$  zawartym we wnętrzu koła zbieżności szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie, więc otrzymujemy natychmiast następujący wniosek.

**Wniosek 8.9.** Suma  $S(z)$  szeregu potęgowego (8.5) jest funkcją ciągłą wewnątrz koła  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ , gdzie liczba  $R$  jest dana wzorem (8.6). (Jeśli  $1/R = 0$ , to  $S(\cdot)$  jest funkcją ciągłą na całej płaszczyźnie  $\mathbb{C}$ .)

**Przykład 8.10.** Szereg

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ma promień zbieżności  $R = \infty$ , gdyż  $a_n = 1/n!$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = 0.$$

Ostatnią równość można otrzymać, posługując się tezą Zadania 2.47, albo (znacznie mniej subtelnym) oszacowaniem  $(n!)^2 \geq n^n$ , z którego wynika, że

$$0 < \frac{1}{(n!)^{1/n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Możemy więc – niezależnie od tego, co znacznie wcześniej udowodniliśmy w zupełnie innym sposobie – stwierdzić, że funkcja  $\exp(z)$  jest ciągła na całej płaszczyźnie  $\mathbb{C}$ .

**Przykład 8.11.** Szereg

$$\sin(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

też ma promień zbieżności  $R = \infty$ . Zauważmy, że tym razem  $a_n = 0$  dla  $n$  parzystych. Dla  $n$  nieparzystych mamy do czynienia z podciągiem ciągu  $(n!)^{-1/n}$ , który rozpatrzyliśmy w poprzednim przykładzie.

**Przykład 8.12.** Niech  $k \in \mathbb{N}$ . Każdy z szeregów

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad S_{2,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{kn}}{n}, \quad S_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

ma promień zbieżności  $R = 1$ . Nietrudno to stwierdzić, posługując się równością

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1.$$

Zauważmy jednak, że szereg  $S_1$  jest rozbieżny we wszystkich punktach okręgu  $|z| = 1$ . Szereg  $S_3$  jest zbieżny bezwzględnie we wszystkich punktach tego okręgu, gdyż dla  $|z| = 1$  jest  $|z^n/n^2| = 1/n^2$ . Szereg  $S_{2,k}(\xi)$  jest rozbieżny, gdy  $\xi^k = 1$  (bo wtedy jego sumy częściowe są sumami częściowymi rozbieżnego szeregu  $\sum \frac{1}{n}$ ) i zbieżny – warunkowo, ale nie bezwzględnie – w pozostałych punktach okręgu jednostkowego. Aby udowodnić ostatnią własność, można posłużyć się kryterium Dirichleta; zrobiliśmy to w istocie w Przykładzie 4.44 (proszę do niego zatrzymać i podstawić  $z = \xi^k$ ).

Widac więc, że zachowanie szeregu potęgowego na brzegu koła zbieżności jest rzeczą delikatną: bez szczególnego badania współczynników nic naprawdę ogólnego nie da się tu powiedzieć.

### 8.3 Różniczkowalność sumy szeregu potęgowego

Szeregi potęgowe mają bardzo wygodną własność: ich sumy mają pochodne wszystkich rzędów, które wolno obliczać tak samo, jak pochodne wielomianów – różniczkując kolejne składniki sumy.

**Twierdzenie 8.13.** Założymy, że  $R > 0$  jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Wtedy funkcja  $S$  ma pochodną w każdym punkcie  $z \in \{w \in \mathbb{C}: |w| < R\}$  i zachodzi wzór

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \tag{8.7}$$

**Dowód.** Przy dowolnym ustalonym  $z$ , szereg po prawej stronie wzoru (8.7) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg o wyrazach  $n a_n z^n$ . (Mnożymy po prostu szereg (8.7) przez ustaloną liczbę). Ponieważ  $n^{1/n} \rightarrow 1$  dla  $n \rightarrow \infty$ , więc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |n a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Dlatego szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ , tzn. szereg utworzony z pochodnych kolejnych składników szeregu  $S(z)$ , jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na każdym kole  $D_{\varrho} = \{z: |z| \leq \varrho\}$ , gdzie  $\varrho < R$ . Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych (stosujemy jego wariant zespolony – wolno to zrobić, gdyż koło jest zbiorem wypukłym) wnioskujemy, że istotnie zachodzi wzór (8.7).  $\square$

**Przykład 8.14.** Korzystając z powyższego twierdzenia, obliczamy

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos z. \end{aligned}$$

(Podstawiliśmy wyżej  $k = n - 1$ .)

Ponieważ pochodna sumy szeregu potęgowego wyraża się przez nowy szereg potęgowy o tym samym promieniu zbieżności, więc ostatnie twierdzenie oczywiście wolno stosować wielokrotnie.

**Wniosek 8.15.** Założmy, że  $R > 0$  jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Funkcja  $S$  ma w kole  $z \in \{w \in \mathbb{C}: |w| < R\}$  ciągłe pochodne wszystkich rzędów. Zachodzi wzór

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n z^{n-k}. \quad (8.8)$$

Dla każdego  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  jest  $k! a_k = S^{(k)}(0)$ .

**Dowód.** Ogólny wzór (8.8) otrzymujemy, stosując  $k$ -krotnie poprzednie twierdzenie. Podstawiając w (8.8)  $z = 0$ , otrzymujemy po prawej stronie tylko jeden niezerowy składnik sumy (dla  $n = k$ ), równy właśnie  $k! a_k$ .  $\square$

**Wniosek 8.16 (jednoznaczność rozwinięcia w szereg potęgowy).** Założmy, że sumy dwóch szeregów potęgowych,

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{oraz} \quad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

są równe w pewnym kole  $|z| < \varrho$ . Wtedy  $a_n = b_n = S^{(n)}(0)/n!$  dla wszystkich  $n = 0, 1, 2, \dots$

Innymi słowy, żadnej funkcji nie można przedstawić w postaci zbieżnego szeregu potęgowego o środku w zerze na dwa istotnie różne sposoby.

**Dowód.** Skoro  $S(z) = T(z)$  w kole  $|z| < \varrho$ , to promień zbieżności obu szeregów jest przynajmniej taki, jak  $\varrho$ . Ponadto, z poprzedniego wniosku wynika, że  $S^{(k)}(z) = T^{(k)}(z)$  dla wszystkich  $|z| < \varrho$  i wszystkich  $k$ , a w szczególności

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{T^{(n)}(0)}{n!} = b_n.$$

Dowód jest zakończony.  $\square$

### 8.3.1 Pojęcie funkcji analitycznej

**Uwaga 8.17.** Wszystko, co powiedzieliśmy do tej pory w tym rozdziale, przenosi się bez zmian na szeregi potęgowe zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych. Trzeba tylko zastąpić koło zbieżności  $|z| < R$  przedziałem zbieżności  $|x| < R$ . Wzór na promień zbieżności  $R$ , a także wzory na pochodne sumy szeregu potegowego i jego współczynniki, nie ulegają zmianie.

**Uwaga 8.18.** Zauważmy, że wzory na współczynniki szeregu potegowego funkcji  $S$ , tzn. równości  $a_n = S^{(n)}(0)/n!$ , otrzymane we Wnioskach 8.15–8.16, są takie same, jak wzory na kolejne współczynniki Taylora–Maclaurina. Jednak wzór Taylora z resztą w postaci Peano (lub innej) ma charakter lokalny; jak widzieliśmy w Przykładzie 6.86, funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

ma na prostej pochodne wszystkich rzędów i  $f^{(n)}(0) = 0$  dla wszystkich  $n$ . Zatem  $f$  nie jest sumą żadnego zbieżnego szeregu potegowego – gdyby  $f(x) = \sum a_n x^n$ , to musiałoby być  $a_n = f^{(n)}(0)/n! = 0$ , tzn.  $f \equiv 0$ , ale przecież  $f$  wcale nie znika tożsamościowo.

Niech  $P$  będzie otwartym przedziałem w  $\mathbb{R}$ . Wprowadźmy następujące oznaczenia.

$C^k(P)$  : zbiór wszystkich funkcji  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ , mających w  $P$  ciągłe pochodne do rzędu  $k$  włącznie;

$C^\infty(P)$  : zbiór wszystkich funkcji  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ , mających w  $P$  ciągłe pochodne wszystkich rzędów;

$C^\omega(P)$  : zbiór wszystkich funkcji  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ , dla których dla każdego  $a \in P$  istnieje  $R_a > 0$  takie, że  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ , gdy  $|x-a| < R_a$ .

Funkcje  $f \in C^\infty(P)$  nazywamy *gładkimi*, a funkcje  $f \in C^\omega(P)$  – *analitycznymi* (*w sensie rzeczywistym*). Są to istotnie różne pojęcia: analityczność to coś więcej, niż gładkość.

**Wniosek 8.19.** Dla każdego przedziału otwartego  $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}$  jest  $C^\omega(P) \subsetneq C^\infty(P)$ .

Dowód. Niech  $a \in P$ . Funkcja  $f(x-a)$ , gdzie  $f$  jest dana wzorem (8.9), jest gładka w  $P$ , ale nie jest sumą żadnego szeregu potegowego  $\sum a_n(x-a)^n$ , więc  $f \notin C^\omega(P)$ .  $\square$

Sprawdzimy jeszcze, że funkcja, która jest sumą szeregu potegowego  $\sum a_n z^n$ , zbieżnego w kole  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ , rozwija się w szereg potegowy wokół każdego innego punktu  $z_0$ , należącego do tego koła. Najpierw udowodnimy pomocniczy lemat, który pozwala zamieniać kolejność dwóch nieskończonych sum.

**Lemat 8.20.** Niech  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  dla  $i, j \in \mathbb{N}$ . Załóżmy, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i < +\infty. \quad (8.10)$$

Wówczas

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Dowód.<sup>1</sup> Niech  $E = \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ . Załóżmy, że  $x_i$  są parami różne i  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Zdefiniujmy funkcje  $f_i, g: \mathbb{R}$  następująco:

$$\begin{aligned} f_i(x_0) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \quad \text{dla } i \in \mathbb{N}, \\ f_i(x_n) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad \text{dla } i, n \in \mathbb{N}, \\ g(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \quad \text{dla } x \in E. \end{aligned}$$

Wprost z definicji sumy szeregu wynika, że  $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x_0)$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Zatem każda z funkcji  $f_i$  jest ciągła w  $x_0 \in E$ . Ponieważ  $|f_i(x)| \leq b_i$  na  $E$ , więc na mocy kryterium Weierstrassa i zbieżności szeregu  $\sum b_i$  szereg definiujący funkcję  $g$  jest zbieżny jednostajnie na  $E$ . Wynika stąd, że  $g$  jest ciągła w  $x_0$ . Dlatego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \end{aligned}$$

Przedostatnia równość wynika z własności sumy skończenie wielu szeregów, patrz Stwierdzenie 4.6. □

**Twierdzenie 8.21.** Załóżmy, że szereg

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{8.11}$$

jest zbieżny w kole  $K_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ . Niech  $\xi \in K_R$ . Funkcję  $S$  można rozwinać w szereg potęgowy, który ma środek w punkcie  $\xi$  i jest zbieżny w każdym punkcie z takim, że  $|z - \xi| < R - |\xi|$ . Zachodzi przy tym równość

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(\xi)}{n!} (z - \xi)^n, \quad |z - \xi| < R - |\xi|. \tag{8.12}$$

Dowód. Podstawiając  $z = (z - \xi) + \xi$  we wzorze na  $S$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((z - \xi) + \xi)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - \xi)^k \xi^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} \xi^{n-k} \right)}_{=(\text{ozn.}) c_k} (z - \xi)^k. \end{aligned} \tag{8.13}$$

---

<sup>1</sup>Patrz Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, rozdział 8.

Pisząc ostatnią równość, zmieniliśmy kolejność sumowania; sprawdzimy, że dla  $|z - \xi| < R - |\xi|$  można to zrobić dzięki Lematowi 8.20. Po pierwsze, wzór

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

pozwala określić symbol Newtona dla wszystkich  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; mamy  $\binom{n}{k} = 0$  dla  $k > n$ . Wobec tego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left| a_n \binom{n}{k} (z - \xi)^k \xi^{n-k} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_n \binom{n}{k} (z - \xi)^k \xi^{n-k} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - \xi| + |\xi|)^n$$

Podstawmy  $t = |z - \xi| + |\xi|$ . Szereg  $\sum_n |a_n| t^n$  ma taki sam promień zbieżności, jak wyjściowy szereg  $S(z)$ ; dlatego szereg podwójny po lewej stronie ostatniego wzoru jest zbieżny dla  $t = |z - \xi| + |\xi| < R$  i wtedy, posługując się Lematem 8.20, można zmienić kolejność sumowania we wzorze (8.13). Wzory na współczynniki szeregu funkcji  $S$  wokół punktu  $\xi$ , tzn. równości  $c_k = S^{(k)}(\xi)/k!$ , wynikają z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy (patrz Wniosek 8.16).  $\square$

Czytelnik zechce samodzielnie sformułować ‘rzeczywisty’ wariant ostatniego twierdzenia i sprawdzić, że podany dowód przenosi się bez zmian.

**Uwaga 8.22.** Może się okazać, że szereg (8.12) w poprzednim twierdzeniu jest zbieżny na zbiorze większym, niż koło  $\{z \in \mathbb{C}: |z - \xi| < R - |\xi|\}$ . Oto prosty przykład. Mamy

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Nietrudno rozwinać tę funkcję w szereg potęgowy o środku w innym punkcie  $\xi$  koła jednostkowego. Otóż,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\xi-(z-\xi)} = \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-\xi}{1-\xi}} = \frac{1}{1-\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-\xi}{1-\xi} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (z-\xi)^n,$$

gdzie  $b_n = (1-\xi)^{-n-1}$ . Otrzymany szereg potęgowy jest znów szeregiem geometrycznym, zbieżnym, gdy liczba  $|\frac{z-\xi}{1-\xi}| < 1$ , tzn. gdy  $|z - \xi| < |1 - \xi|$ . Np. dla  $\xi = 1/2$  otrzymujemy więc promień zbieżności  $1/2$ , ale dla  $\xi = -1/2$  szereg jest zbieżny wtedy, gdy  $|z + \frac{1}{2}| < 3/2$ , tzn. w kole otwartym o środku  $-1/2$  i promieniu  $3/2$ , które zawiera całe koło  $|z| < 1$  i wiele punktów spoza niego. Czytelnik zechce zrobić odpowiednie rysunki i zobaczyć, że w każdym przypadku punkt  $z_0 = 1$ , w którym funkcja  $1/(1-z)$  przestaje być określona, leży na brzegu koła zbieżności odpowiedniego szeregu.

## 8.4 Przykłady

**Przykład 8.23.** Zastosujemy wzór (8.8), aby obliczyć sumę szeregu

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n, \quad |z| < 1.$$

Ponieważ  $n^2 = n(n-1) + n$ , a szereg  $T$  jest zbieżny bezwzględnie na każdym kole  $|z| \leq \varrho$  (gdzie  $\varrho < 1$ ), więc

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \\ &= z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} + z \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \\ &\stackrel{(8.8)}{=} z^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^{''} + z \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^{'} \\ &= z^2 \left( \frac{1}{1-z} \right)^{''} + z \left( \frac{1}{1-z} \right)^{'} \\ &= \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}. \end{aligned}$$

Proszę zauważyć: wykorzystaliśmy jedynie wzór na pierwszą i drugą pochodną szeregu potęgowego, a następnie dwukrotnie zróżniczkowaliśmy funkcję  $1/(1-z)$ .  $\square$

**Przykład 8.24 (wzór Bineta na liczby Fibonacciego).** Skorzystamy z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy, aby wyznaczyć jawnym wzorem liczby Fibonacciego ( $a_0 = a_1 = 1$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Niech

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Łatwo sprawdzić, że  $0 < a_n \leq 2^n$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ . Dlatego  $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n} \leq 2$  i szereg określający funkcję  $\Phi$  jest zbieżny (przynajmniej) w kole  $|z| < \frac{1}{2}$ . Wewnątrz tego koła wszystkie rachunki, które będziemy prowadzić, mają sens dzięki bezwzględnej zbieżności odpowiednich szeregów.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} z\Phi(z) &= a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + a_3 z^4 + \dots, \\ z^2\Phi(z) &= \quad a_0 z^2 + a_1 z^3 + a_2 z^4 + \dots. \end{aligned}$$

Dodając te równości stronami i korzystając z rekurencyjnej definicji ciągu Fibonacciego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (z+z^2)\Phi(z) &= z + (a_1+a_0)z^2 + (a_2+a_1)z^3 + (a_3+a_2)z^4 + \dots \\ &= a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots = \Phi(z) - 1. \end{aligned}$$

Stąd  $\Phi(z) = 1/(1-z-z^2)$ . Trójmian kwadratowy  $T(z) = 1-z-z^2$  ma pierwiastki  $z_1 = -(\sqrt{5}+1)/2$ ,  $z_2 = (\sqrt{5}-1)/2$ . Łatwo sprawdzić (rozwiązujejąc układ równań liniowych z niewiadomymi  $a, b$ ), że

$$\Phi(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{a}{z_1-z} + \frac{b}{z_2-z} \quad \text{dla } a = -b = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Stosując, podobnie jak w Uwadze 8.22, wzór na sumę szeregu geometrycznego, zapisujemy teraz  $\Phi(z)$  jako

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{1}{z_1\sqrt{5}} \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} + \frac{1}{z_2\sqrt{5}} \frac{1}{1-\frac{z}{z_2}} \\ &= -\frac{1}{z_1\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \frac{1}{z_2\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (z_2^{-n-1} - z_1^{-n-1}) z^n.\end{aligned}$$

Dzięki jednoznaczności rozwinięcia  $\Phi$  w szereg potęgowy o środku w zerze,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (z_2^{-n-1} - z_1^{-n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Jest to tak zwany *wzór Bineta*.  $\square$

Podobnymi metodami można znajdować ‘jawne’ wzory na wyrazy innych ciągów, określonych liniowymi wzorami rekurencyjnymi.

**Uwaga 8.25.** Wzór Bineta można także wyprowadzić metodami algebry liniowej. Otóż, definicję rekurencyjną ciągu Fibonacciego można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix},$$

lub krótko  $v_{n+1} = Mv_n$ , gdzie

$$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przez indukcję otrzymujemy natychmiast  $v_{n+1} = M^n v_0$ . Potęgowanie macierzy  $M$  nie jest zajęciem pouczającym. Jednak w bazie złożonej z wektorów własnych przekształcenie  $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ma macierz diagonalną

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Wystarczy więc wyrazić  $v_0$  jako kombinację wektorów własnych  $u, w$  przekształcenia  $M$ ,  $v_0 = \alpha u + \beta w$ . Wtedy

$$v_n = M^n (\alpha u + \beta w) = \alpha \lambda_1^n u + \beta \lambda_2^n w.$$

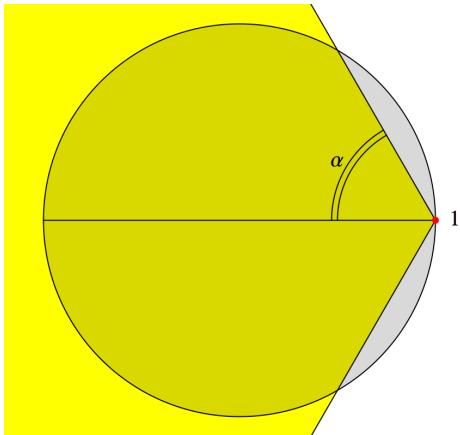
Zainteresowany Czytelnik zechce uzupełnić nietrudne rachunki (trzeba znaleźć wartości i wektory własne  $M$ , oraz dobrać stałe  $\alpha, \beta$  tak, aby  $v_0 = \alpha u + \beta w$ ), a następnie odczytać z podanego wyżej wzoru na  $v_n$  wzór na  $a_n$  (czyli na drugą współrzędną wektora  $v_n$ ).

## 8.5 Twierdzenie Abela o granicach kątowych

Widzieliśmy już proste przykłady, wskazujące, że na brzegu koła zbieżności  $|z| < R$  szereg potęgowy może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny. Udowodnimy teraz klasyczne twierdzenie, które mówi, jak zachowuje się suma szeregu potęgowego w pobliżu tych punktów okręgu  $|z| = R$ , gdzie szereg jest zbieżny.

Wprowadźmy najpierw odpowiednie oznaczenia. Niech  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Położymy

$$T(1, \alpha) = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \quad 1 - z = re^{i\theta} \text{ dla pewnych } \theta \in (-\alpha, \alpha), r > 0\}. \quad (8.14)$$



Nietrudno jest sprawdzić, że  $T(1, \alpha)$  stanowi część wspólną dysku jednostkowego  $K_1 = \{z: |z| < 1\}$  oraz kąta o rozwartości  $2\alpha$ , wierzchołka w punkcie  $1 \in \mathbb{C}$  oraz dwusiecznej pokrywającej się z półprostą  $(-\infty, 1]$  na osi rzeczywistej.

**Definicja 8.26.** Powiemy, że funkcja  $f: K_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  ma w punkcie  $1$  granicę kątową równą  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  funkcja

$$f_\alpha \equiv f \Big|_{T(1, \alpha)} : T(1, \alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$$

ma w punkcie  $1$  granicę równą  $A$ ; równoważnie,  $f: K_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  ma w punkcie  $1$  granicę kątową równą  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego kąta  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  i każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $\delta > 0$ , że jeśli  $z \in T(1, \alpha)$  i  $|z - 1| < \delta$ , to wówczas  $|f(z) - A| < \varepsilon$ .

**Definicja 8.27.** Funkcja  $g: K_R = \{|z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$  ma granicę kątową równą  $A$  w punkcie  $z_0 \in \gamma_R = \{|z| = R\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(z) = g(z \cdot z_0)$  ma granicę kątową równą  $A$  w punkcie  $1$ .

**Twierdzenie 8.28 (Abela o granicy kątowej).** Niech

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{dla } |z| < R, \quad \text{gdzie } \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Założmy, że szereg potęgowy definiujący funkcję  $g$  jest zbieżny w pewnym punkcie  $z_0$  należącym do okręgu  $\gamma_R = \{|z| = R\} \subset \mathbb{C}$  i ma w tym punkcie sumę równą  $S$ . Wówczas  $g$  ma w punkcie  $z_0$  granicę katową równą  $S$ .

**Dowód.** Posługując się definicją granicy kątowej można bez zmniejszenia ogólności założyć, że  $R = 1$  i  $z_0 = 1$ ; szereg

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest zbieżny wewnątrz koła jednostkowego, tzn. dla  $|z| < 1$ , a ponadto

$$S = g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{C}.$$

Będziemy szacować  $|g(z) - S|$  dla  $z$  bliskich 1 i należących do zbioru  $T(1, \alpha)$ . Ustalmy liczbę  $\varepsilon > 0$  i kąt  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Niech  $\eta > 0$ . Konkretną wartość  $\eta$  dobierzymy do  $\alpha$  i  $\varepsilon$  na końcu dowodu.

*Krok 1.* Niech

$$\psi_{p,q}(z) = \sum_{n=p+1}^{p+q} a_n(z^n - 1), \quad \psi_p(z) = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n(z^n - 1).$$

Wykażemy, że istnieje taka liczba  $p_0 \in \mathbb{N}$ , że dla wszystkich  $p \geq p_0$  zachodzi nierówność

$$|\psi_p(z)| \leq \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|}, \quad |z| < 1. \quad (8.15)$$

W tym celu udowodnimy, że analogiczny warunek zachodzi dla  $\psi_{p,q}(z)$  przy dowolnym  $q \in \mathbb{N}$ . Oznaczmy  $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$ . Ze wzoru na różnicę  $n$ -tych potęg otrzymujemy<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \psi_{p,q}(z) &= (z-1) \sum_{n=p+1}^{p+q} a_n(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) \\ &= (z-1) \left\{ (S_{p+q} - S_p) \cdot 1 + (S_{p+q} - S_p) \cdot z + \cdots \right. \\ &\quad \left. + (S_{p+q} - S_p) \cdot z^p + (S_{p+q} - S_{p+1}) \cdot z^{p+1} + \cdots + (S_{p+q} - S_{p+q-1}) \cdot z^{p+q-1} \right\}. \end{aligned}$$

$S_N$  są sumami częściowymi szeregu zbieżnego. Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje takie  $p_0$ , iż dla wszystkich  $k, l \geq p_0$  zachodzi nierówność  $|S_k - S_l| \leq \eta$ . Z nierówności trójkąta otrzymujemy zatem dla  $p \geq p_0$  i dowolnego  $q \in \mathbb{N}$

$$|\psi_{p,q}(z)| \leq |z-1| \cdot \eta \cdot \sum_{j=0}^{p+q-1} |z|^j \leq |z-1| \cdot \eta \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |z|^j = \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|}$$

Przechodząc teraz do granicy  $q \rightarrow \infty$ , otrzymujemy warunek (8.15).

*Krok 2.* Oszacujmy różnicę  $g(z) - S$  następująco:

$$\begin{aligned} |g(z) - S| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - 1) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^p a_n (z^n - 1) \right| + \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n (z^n - 1) \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^p a_n (z^n - 1) \right| + |\psi_p(z)| \stackrel{(8.15)}{\leq} \left| \sum_{n=0}^p a_n (z^n - 1) \right| + \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|}. \end{aligned}$$

Liczba  $p \geq p_0$  jest odtąd ustalona. Wielomian  $W(z) = \sum_{n=0}^p a_n (z^n - 1)$  jest ciągły i mamy  $W(1) = 0$ . Dlatego istnieje liczba  $\delta_1 > 0$  taka, że  $|W(z)| < \eta$  dla  $|1-z| < \delta_1$ . Zatem

$$|g(z) - S| < \eta + \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|} \quad \text{dla } |z| < 1, |1-z| < \delta_1. \quad (8.16)$$

---

<sup>2</sup>Proszę sobie przypomnieć dowód kryterium Abela: tam wykonywaliśmy podobny rachunek.

**Krok 3.** Jeśli  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , to istnieje taka liczba  $\delta_2 > 0$ , że

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos \alpha} \quad \text{dla } z \in T(1, \alpha), |1-z| < \delta_2. \quad (8.17)$$

Istotnie, niech  $1-z = re^{i\theta}$ , gdzie wobec definicji zbioru  $T(1, \alpha)$  kąt  $\theta \in (-\alpha, \alpha)$ . Mamy

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (1 - re^{i\theta}) \cdot (1 - re^{-i\theta}) = 1 - 2r \cos \theta + r^2$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{|1-z|}{1-|z|} &= \frac{|1-z|(1+|z|)}{1-|z|^2} = \frac{r(1+|z|)}{2r \cos \theta - r^2} = \frac{1+|z|}{2 \cos \theta - r} \\ &\leq \frac{2}{2 \cos \theta - r} \quad \text{dla } z = 1 - re^{i\theta} \in T(1, \alpha). \end{aligned}$$

Niech  $\delta_2 = \cos \alpha$ . Dla  $\theta \in (-\alpha, \alpha)$  jest  $\cos \theta > \cos \alpha > 0$ . Jeśli  $|1-z| = r < \delta_2 = \cos \alpha$ , to wtedy

$$2 \cos \theta - r > 2 \cos \theta - \cos \alpha > \cos \alpha.$$

Dlatego

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2 \cos \theta - r} \leq \frac{2}{\cos \alpha}, \quad z \in T(1, \alpha), \quad |1-z| < \delta_2 = \cos \alpha$$

Otrzymaliśmy więc (8.17).

**Krok 4. Zakończenie dowodu.** Niech  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Gdy  $|1-z| < \delta$  i  $z \in T(1, \alpha)$ , możemy jednocześnie korzystać z oszacowań (8.16) i (8.17). Otrzymujemy dla takich  $z$  nierówność

$$|g(z) - S| \stackrel{(8.16)}{<} \eta + \eta \cdot \frac{|1-z|}{1-|z|} \stackrel{(8.17)}{\leq} \eta \left(1 + \frac{2}{\cos \alpha}\right) < \varepsilon,$$

o ile np.

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{\cos \alpha}\right)^{-1}.$$

Dowód twierdzenia Abela jest zakończony.  $\square$

Jest oczywiste, że stosując twierdzenie Abela do funkcji analitycznych zmiennej rzeczywistej, otrzymujemy następujący fakt.

**Wniosek 8.29.** Niech  $a_n \in \mathbb{R}$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$  i niech

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{dla } x \in (-R, R), \quad \text{gdzie } \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Założmy, że szereg potęgowy definiujący funkcję  $g$  jest zbieżny w którymś końcu przedziału  $(-R, R)$  i ma w nim sumę równą  $S$ . Wówczas  $g$  ma w tym końcu przedziału zbieżności granicę jednostronną równą  $S$ .

Inaczej mówiąc, zachodzi następujący wniosek.

**Wniosek 8.30 (ciągłość szeregu potęgowego w końcu przedziału zbieżności).** Załóżmy, że szereg potęgowy

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

o współczynnikach rzeczywistych ma promień zbieżności równy  $R$ . Jeśli suma  $g(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  jest skończona, to funkcja  $g$  jest ciągła na  $(-R, R]$ .

**Przykład 8.31 (suma szeregu anharmonicznego).** Rozważmy szereg potęgowy

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Łatwo sprawdzić, że ma on promień zbieżności 1. Ponadto, różniczkując wyraz po wyrazie otrzymujemy

$$g'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}.$$

Dlatego  $g(x) = \ln(1+x)$  na  $(-1, 1)$ : pochodna różnicicy tych funkcji znika, więc różnica jest stała, ale dla  $x = 0$  jest równa 0, więc jest równa zero dla wszystkich  $|x| < 1$ . (Podobny argument widzieliśmy w Przykładzie 7.22).

Dla  $x = 1$  szereg  $g(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  jest zbieżny (kryterium Leibniza). Na mocy Wniosku 8.30 jest więc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Wykorzystaliśmy więc twierdzenie Abela, żeby obliczyć sumę  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ .  $\square$

**Przykład 8.32 (szereg Leibniza o sumie  $\frac{\pi}{4}$ ).** Niech

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Podobnie jak poprzednio, sprawdzamy, że

$$g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Mamy też  $(\arctg x)' = 1/(1+x^2)$  i  $\arctg 0 = g(0) = 0$ . Wnioskujemy, że  $g(x) = \arctg x$  dla  $|x| < 1$ . Jednak dla  $x = 1$  szereg definiujący funkcję  $g$  jest szeregiem zbieżnym (znów wolno użyć kryterium Leibniza). Dlatego na mocy Wniosku 8.30

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctg x = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Szereg po lewej stronie nie nadaje się w praktyce do obliczania  $\pi$ , gdyż jest zbieżny bardzo wolno. Obliczając np. sumę 1000 początkowych wyrazów, otrzymujemy przybliżenie  $\pi \approx 3,14059\dots$ , różniące się od  $\pi$  już na trzecim miejscu po przecinku.

**Zadanie 8.33.** Wykazać, że istnieje taka stała  $c > 0$ , że

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \right| \geq \frac{c}{N} \quad \text{dla } N = 1, 2, \dots$$

## 8.6 Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy

Do tej pory omijaliśmy następujący ogólny problem. Niech  $f: K_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ , lub  $f: \mathbb{R} \supset (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ . Kiedy  $f$  rozwija się w szereg potęgowy, zbieżny do  $f$  w pewnym otoczeniu zera?

Odpowiedź na to pytanie jest inna w przypadku zespolonym, inna zaś w przypadku rzeczywistym. W dziedzinie zespolonej warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwijalności funkcji w szereg potęgowy jest istnienie  $f'$ ; Czytelnik pozna ten zaskakujący na pierwszy rzut oka fakt, ucząc się teorii funkcji analitycznych. Natomiast w przypadku rzeczywistym założenie  $f \in C^\infty$  jest koniecznym warunkiem rozwijalności w szereg potęgowy, ale nawet ono nie wystarcza: wspomnieliśmy o tym, omawiając funkcję (8.9).

Jeśli  $f$  jest w pewnym otoczeniu zera gładka, tzn. ma pochodne wszystkich rzędów, to dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  możemy napisać, posługując się np. wzorem Taylora,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x). \quad (8.18)$$

**Lemat 8.34.** *Niech  $f: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją klasy  $C^\infty$ . Następujące warunki są równoważne.*

- (a)  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  w przedziale  $|x| < \eta \leq R$ ;
- (b) Dla każdego  $x \in (-\eta, \eta)$  reszta  $r_n(x)$ , określona wzorem (8.18), dąży do zera dla  $n \rightarrow \infty$ .

**Dowód.** Jeśli  $f$  jest na przedziale  $(-\eta, \eta)$  sumą zbieżnego szeregu potęgowego, to  $r_n$ , równa różnicy  $f$  i  $n$ -tej sumy częściowej tego szeregu, dąży do zera, gdy  $n \rightarrow \infty$ . Na odwrót, gdy  $r_n(x) \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow \infty$ , to przechodząc do granicy  $n \rightarrow \infty$  we wzorze (8.18), otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = f(x).$$

**Przykład 8.35 (szereg dwumienny).** Niech  $a \in \mathbb{R}$ . Wykażemy, że funkcja

$$f(x) = (1+x)^a, \quad \mathbb{R} \ni x > -1,$$

jest sumą szeregu potęgowego zbieżnego na przedziale  $(-1, 1)$ . Położmy

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} \quad (8.19)$$

(Dla  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq n$ , definicja jest taka sama, jak definicja współczynnika dwumianowego, z którą spotykaliśmy się wcześniej). Wykażemy, że

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad |x| < 1. \quad (8.20)$$

Dla  $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  wzór (8.20) wynika wprost z dwumianu Newtona. Współczynniki dwumianowe (8.19) są wtedy zerami dla wszystkich  $n > a$  i suma w (8.20) jest skończona.

Ustalmy liczbę  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$ . Niech  $a_n = \binom{a}{n}$ . Wtedy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{a(a-1) \cdots (a-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a(a-1) \cdots (a-n+1)} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right| \rightarrow 1, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Dlatego  $|a_n|^{1/n} \rightarrow 1$ , gdy  $n \rightarrow \infty$  (patrz Przykład 2.46). Szereg po prawej stronie (8.20) ma więc promień zbieżności 1. Obliczając pochodne funkcji  $f(x) = (1+x)^a$ , łatwo stwierdzamy, że

$$f^{(n)}(x) = a(a-1) \cdots (a-n+1)(1+x)^{a-n} \quad (8.21)$$

i dlatego

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!} = \binom{a}{n}.$$

Wiemy już zatem, że jeśli  $f$  rozwija się wokół zera w szereg potęgowy, to jest to szereg (8.20). Pozostaje sprawdzić warunek z ostatniego lematu, tzn. zbieżność reszty  $r_n(x)$  do zera dla  $n \rightarrow \infty$ . Posłużymy się w tym celu wzorem na resztę w postaci Schlömilcha–Roche'a,

$$f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = r_n(x) \stackrel{(6.18)}{=} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n! p} (1-\theta)^{n+1-p} x^{n+1}, \quad \theta = \theta(x, n, p) \in (0, 1).$$

(Patrz Twierdzenie 6.59, wzór (6.18) – użyliśmy numeru  $n$  zamiast  $k$ , a punkt  $x_0 = 0$ .) Będziemy pracować z  $p = 1$ ; w tym przypadku reszta Schlömilcha–Roche'a nazywa się resztą Cauchy'ego. Podstawiając  $f(x) = (1+x)^a$  i  $p = 1$ , otrzymujemy dzięki (8.21)

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{a(a-1) \cdots (a-n)(1+\theta x)^{a-n-1}}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \binom{a-1}{n} x^n \cdot a(1+\theta x)^{a-n-1} \cdot x(1-\theta)^n \\ &= \binom{a-1}{n} x^n \cdot \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \cdot ax(1+\theta x)^{a-1}. \end{aligned}$$

Przeanalizujmy teraz zachowanie każdego z trzech czynników w ostatnim wyrażeniu. Ustalmy  $x \in (-1, 1)$ . Po pierwsze,

$$\binom{a-1}{n} x^n \rightarrow 0 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$

Jest to warunek konieczny (zbadanej wcześniej) zbieżności szeregu po prawej stronie (8.20) dla parametru  $a-1$  (zamiast  $a$ ). Po drugie,  $(1-\theta)/(1+\theta x) \in (0, 1)$ , gdy  $x > -1$  i  $\theta \in (0, 1)$ . Dlatego

$$\left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \in (0, 1) \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}, x \in (-1, 1).$$

Po trzecie wreszcie, mamy  $2 > 1+\theta x \geq 1-\theta|x| > 1-|x| > 0$ . Dlatego czynnik  $ax(1+\theta x)^{a-1}$  też jest ograniczony,<sup>3</sup> gdyż funkcja  $t \mapsto t^{a-1}$  jest ograniczona na przedziale  $[1-|x|, 2]$ . Reszta  $r_n(x)$  jest zatem (przy ustalonym  $x$ ) iloczynem czynników, który zbiega do zera przy  $n \rightarrow \infty$  oraz dwóch czynników, które są ograniczone. Mamy więc  $r_n(x) \rightarrow 0$ ; to kończy dowód wzoru (8.20).  $\square$

---

<sup>3</sup>Wprawdzie w zapisie tego czynnika nie widać jawniej zależności od  $n$ , ale pamiętajmy, że liczba  $\theta$  zależy i od  $x$ , i od  $n$ .

# Rozdział 9

## Całka

W tym rozdziale zajmujemy się całkowaniem. Jest to, obok różniczkowania i znajdowania wszelakich granic, jedna z najważniejszych operacji w całej analizie matematycznej.

Mówiąc niezbyt precyzyjnie, całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania. Dlatego wiele reguł i twierdzeń, opisujących własności różniczkowania, można natychmiast, bez żadnego trudu, przełożyć na odpowiednie własności całkowania. Jednak, o ile różniczkowanie funkcji elementarnych jest zajęciem mechanicznym (wystarczy nauczyć się pewnej liczby wzorów i uważnie je stosować), o tyle całkowanie funkcji elementarnych wymaga większej biegłości i wiąże się (czasem) z różnymi utrudnieniami, o których jeszcze wspomnimy.

Zobaczmy, że obliczanie całki (oznaczonej) polega w istocie na uśrednianiu wartości funkcji (na pewnym przedziale). Taki jest podstawowy sens operacji całkowania. Dzięki temu całkowanie przydaje się m.in. w geometrii, do obliczania długości krzywych oraz pól i objętości różnych figur i brył, a także wszędzie tam – np. w fizyce i matematycznych metodach finansów i ekonomii – gdzie trzeba znaleźć średnią wartość jakiejś wielkości, która zmienia się np. wraz z biegiem czasu.

### 9.1 Całka nieoznaczona

**Definicja 9.1.** Niech  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $P \subset \mathbb{R}$  jest dowolnym przedziałem. *Całką nieoznaczoną* funkcji  $f$  nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji  $f$ .

Przypomnijmy, że  $F$  jest funkcją pierwotną  $f$  na  $P$ , gdy  $F' = f$  na  $P$ . Wiemy już, że każda funkcja ciągła  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  ma funkcję pierwotną (patrz Twierdzenie 7.34) i że dowolne dwie funkcje pierwotne  $F_1, F_2: P \rightarrow \mathbb{R}$  tej samej funkcji  $f$  różnią się o stałą (patrz Stwierdzenie 7.33).

Używa się zwykle zapisu

$$\int f(x) dx = F(x) + \text{const}, \quad (9.1)$$

gdzie  $F$  jest dowolnie wybraną funkcją pierwotną  $f$  na danym przedziale.

**Uwaga 9.2.** Jeśli naturalną dziedziną  $f$  nie jest przedział, tylko suma dwóch lub więcej rozłącznych przedziałów, to wtedy różnica dwóch funkcji pierwotnych  $f$  *nie musi* być stała.

Niech np.  $f(x) = -1/\sin^2 x$  dla  $x \in U = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Wiemy, że  $F_1(x) = \operatorname{ctg} x$  jest na zbiorze  $U$  funkcją pierwotną  $f$ , bo  $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$ . Niech

$$F_2(x) = \operatorname{ctg} x + k \quad \text{dla } x \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Na każdym z przedziałów  $(k\pi, (k+1)\pi)$  przesuwamy wykres cotangensa o inną stałą). Wtedy także  $F'_2(x) = -1/\sin^2 x$ , ale  $F_2 - F_1$  nie jest funkcją stałą na dziedzinie cotangensa, tylko funkcją stałą na każdym przedziale zawartym w dziedzinie cotangensa. O takich funkcjach mówi się czasem, że są *lokalnie stałe*.

Warto zatem interpretować literę  $C$  we wzorze (9.1) jako *funkcję lokalnie stałą*. Jeśli dziedzina  $f$  jest przedziałem, chodzi po prostu o stałą.

**Przykład 9.3.** Dzięki wzorom na pochodne wybranych funkcji elementarnych otrzymujemy natychmiast długą listę wzorów na całki nieoznaczone:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1; \quad (9.2)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad (9.3)$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad (9.4)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad (9.5)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad (9.6)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad (9.7)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad (9.8)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc tg} x + C. \quad (9.9)$$

Wzór (9.2) wolno stosować na każdym przedziale, na którym można określić funkcję  $x^a$  – w szczególności, dla wymiernych  $a = p/q$ , gdzie  $p \in Z$  i  $q \in N$ ,  $q = 2k+1$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$ , wzór ten ma sens na całej prostej.

Posługując się wzorami (9.3) i (9.7), należy pamiętać, że litera  $C$  może oznaczać inną stałą na każdym z przedziałów, których suma stanowi dziedzinę całkowanej funkcji. Mamy tu do czynienia z tym samym zjawiskiem, o którym była mowa w Uwadze 9.2.

Powyzsza lista wzorów nie jest kompletna. Nie ma na niej np. wzoru na całkę z tangensa czy z logarytmu naturalnego, bo  $\operatorname{tg}$  i  $\ln$  nie znalazły się wśród wyników wzorów na pochodne w podrozdziale 6.2. Aby obliczyć takie całki, trzeba nauczyć się kilku dodatkowych reguł. Wspomnijmy jednak, że bywa i tak, że całki z funkcji elementarnej *nie można* wyrazić przez funkcje elementarne (choć wiadomo z Twierdzenia 7.34). Najważniejszy przykład takiej sytuacji to  $\int \exp(-x^2) dx$ , która nie wyraża się przez funkcje elementarne, tzn. przez skończoną liczbę operacji algebraicznych i składania na wielomianach, funkcji wykładniczej, funkcjach trygonometrycznych i funkcjach odwrotnych do nich.

### 9.1.1 Własności całek nieoznaczonych

**Stwierdzenie 9.4 (liniowość całki).** Jeśli  $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągłe, zaś  $a, b \in \mathbb{R}$ , to

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

(Dzięki powyższemu wzorowi można obliczać np. całki wszystkich wielomianów.)

**Dowód.** Stosujemy wzór na pochodną sumy: jeśli  $F' = f$  i  $G' = g$ , to dla wszystkich stałych  $a, b \in \mathbb{R}$  jest  $(aF + bG)' = af + bg$ .  $\square$

**Stwierdzenie 9.5 (wzór na całkowanie przez części).** Jeśli  $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$  są różniczkowalne, to

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

**Dowód.** Całkujemy obie strony wzoru na pochodną iloczynu,  $(fg)' = fg' + f'g$ , a następnie jedną z całek przerzucamy z prawej strony na lewą.  $\square$

**Przykład 9.6.** 1. Obliczymy  $\int \ln x dx$ . Niech  $g'(x) = 1$ ,  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = x$  (uwaga w nawiasie: funkcja  $g$  nie jest określona jednoznacznie przez wybór  $g'$ ; ustalamy  $g$  w sposób najwygodniejszy z możliwych) oraz  $f'(x) = 1/x$ . Zatem

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C. \quad (9.10)$$

2. Obliczymy całki  $I = \int \sin^2 x dx$  oraz  $J = \int \cos^2 x dx$ . Zastosujmy wzór na całkowanie przez części do  $I$ . Biorąc  $f(x) = \sin x$  i  $g(x) = -\cos x$ , otrzymamy

$$\int \sin^2 x dx = \int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx,$$

tzn.  $I - J = -\sin x \cos x = -\frac{1}{2} \sin 2x$ . Natomiast

$$I + J = \int (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int 1 dx = x + C.$$

Dodając otrzymane równania stronami, otrzymujemy  $2I = x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$ . Zatem

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C, \quad \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

(Zmieniliśmy oznaczenie stałej, ale to przecież nam wolno.)

Inne zastosowania wzoru na całkowanie przez części będziemy widywać regularnie.

**Stwierdzenie 9.7 (wzór na całkowanie przez podstawienie).** Niech  $f, g'$  będą ciągłe i niech  $F$  będzie funkcją pierwotną  $f$ . Wtedy

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

**Uwaga 9.8.** Dla pełnej precyzji, należałoby zakładać, że  $g, g'$  są ciągłe na pewnym przedziale  $I$ , zaś  $f = F'$  i  $F$  są ciągłe na przedziale  $J = g(I)$ .

Dowód. Stosujemy wzór na pochodną złożenia:  $(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$ .  $\square$

**Przykład 9.9.** Niech  $f(y) = 1/y$ ,  $g(x) = \cos x$  oraz  $F(y) = \ln |y|$ . Otrzymujemy

$$\int \tg x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int f(g(x))g'(x) \, dx = -F(g(x)) + C = -\ln |\cos x| + C.$$

Łatwo sprawdzić, że taką samą metodą otrzymamy nieco ogólniejszy wzór

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C. \quad (9.11)$$

(Dla dowodu, można też po prostu zróżniczkować obie strony).

Zanim omówimy kolejne przykłady zastosowań wzoru na całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie, wspomnimy o tradycyjnych obyczajach, związanych z robo-czym zapisem rachunków takich, jak w ostatnim przykładzie.

**Uwaga 9.10 (tradycyjny sposób manewrowania symbolami  $dx, dy$ ).** Nie wyjaśniliśmy dotąd znaczenia symbolu  $dx$ . Samo oznaczenie pochodzi jeszcze z czasów Newtona i Leibniza i wiąże się z geometryczną interpretacją całek oznaczonych, którą poznamy niedługo.

Jeśli  $y = g(x)$ , gdzie  $g: I \rightarrow g(I) \subset \mathbb{R}$  jest różniczkowalna na przedziale  $I$ , to będziemy pisać  $dy = g'(x) dx$ . Zauważmy, że jeśli funkcja  $g$  jest różnowartościowa, a jej pochodna  $g'$  nie zniką, to wtedy  $x = g^{-1}(y)$  i zgodnie z przyjętą przed chwilą konwencją

$$dx = (g^{-1}(y))' dy \stackrel{\text{Stw. 6.14}}{=} \frac{1}{g'(x)} dy$$

dzięki wzorowi na pochodną funkcji odwrotnej. Jest więc tak, jakby wzór  $dy = g'(x) dx$  można było przekształcać tak, jak równość dotycząca liczb rzeczywistych.

Wzór na całkowanie przez podstawienie zapisuje się czasem

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{=y}) \underbrace{g'(x) dx}_{=dy} = \int f(y) dy = F(y) + C = F(g(x)) + C.$$

Taki zapis być może lepiej wyjaśnia nazwę całkowanie przez podstawienie.

**Przykład 9.11.** Aby obliczyć całkę  $\int x \exp(-x^2) dx$  podstawiamy  $y = x^2$ ,  $dy = 2x dx$  i rachujemy:

$$\int x \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} \int \exp(-y) dy = -\frac{1}{2} \exp(-y) + C = -\frac{1}{2} \exp(-x^2) + C.$$

### 9.1.2 Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcją wymierną nazywamy każdą funkcję  $W(x) = P(x)/Q(x)$ , gdzie  $P$  i  $Q$  są wielomianami. Będziemy zakładać, że  $P$  i  $Q$  mają współczynniki rzeczywiste, oraz mówić, że  $W$  jest funkcją wymierną zmiennej rzeczywistej. Za dziedzinę  $W$  uznajemy – przy założeniu, że ilorazu  $P/Q$  nie można skrócić przez żaden czynnik liniowy  $(x - a)$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$  – zbiór  $\mathbb{R}$  z usuniętymi pierwiastkami wielomianu  $Q$ .

Najwygodniej jest od razu zakładać, że wielomiany  $P$  i  $Q$  są *względnie pierwsze*, tzn. nie mają żadnego wspólnego dzielnika  $D$ , który byłby wielomianem dodatniego stopnia.

Okazuje się, że całkę z każdej funkcji wymiernej  $W$  można wyrazić przez funkcje elementarne, rozkładając  $W$  na sumę odpowiednich składników.

**Definicja 9.12 (ułamki proste pierwszego rodzaju).** Każdą funkcję wymierną

$$\frac{A}{(x-a)^k},$$

gdzie  $a, A \in \mathbb{R}$  i  $k \in \mathbb{N}$ , nazywamy *ułamkiem prostym pierwszego rodzaju*.

**Definicja 9.13 (ułamki proste drugiego rodzaju).** Każdą funkcję wymierną

$$\frac{Cx+D}{(x^2+cx+d)^k},$$

gdzie  $c, d, C, D \in \mathbb{R}$ ,  $c^2 - 4d < 0$  i  $k \in \mathbb{N}$ , nazywamy *ułamkiem prostym drugiego rodzaju*.

Algorytm całkowania funkcji wymiernych oparty jest na następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie 9.14 (rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste).** *Każda funkcja wymierna  $W(x) = P(x)/Q(x)$  jest sumą pewnego wielomianu i skończonej liczby ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju. Mianowniki tych ułamków prostych są dzielnikami wielomianu  $Q$ .*

**Uwaga 9.15.** Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności składników), jeśli założyć, że składnik o danym mianowniku może występować tylko jeden raz.

Twierdzenie o rozkładzie na ułamki proste należy bardziej do algebry, niż do analizy. Dlatego nie będziemy przedstawiać jego kompletnego, szczegółowego dowodu.

**Szkic dowodu Twierdzenia 9.14.** *Krok 1.* Wykonując dzielenie  $P$  przez  $Q$  z resztą, można zapisać  $W = P_1 + (P_2/Q)$ , gdzie  $P_1$  i  $P_2$  są wielomianami i stopień  $P_2$  jest mniejszy, niż stopień  $Q$ . Wystarczy zatem rozpatrzyć przypadek  $W = P/Q$ , gdzie  $\deg P < \deg Q$ . Najważniejszym narzędziem jest prosty fakt z algebry, który sformułujemy tu jako zadanie.

**Zadanie 9.16.** Jeśli wielomiany  $Q_1, Q_2$  są względnie pierwsze, to istnieją wielomiany  $V_1, V_2$  o współczynnikach z  $\mathbb{R}$  takie, że  $V_1(x)Q_1(x) + V_2(x)Q_2(x) = 1$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

**Wskazówka.** Niech  $\mathcal{W}$  oznacza zbiór wszystkich wielomianów  $V_1(x)Q_1(x) + V_2(x)Q_2(x)$  (dla różnych  $V_1, V_2$ ). Sprawdzić, że  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{W}$ . Oznaczyć przez  $D$  taki wielomian w zbiorze  $\mathcal{W}$ , który ma najmniejszy stopień<sup>1</sup> i współczynnik 1 przy najstarszej potędze  $x$ . Posługując się twierdzeniem Bezouta, wykazać, że  $D$  dzieli  $Q_1$  i  $Q_2$ . Wywnioskować, że  $D \equiv 1$ .

<sup>1</sup>W każdym niepustym podzbiorze  $\mathbb{N}$  istnieje element najmniejszy.

Dalszy ciąg dowodu Twierdzenia 9.14 jest następujący: jeśli  $Q = Q_1 Q_2$ , gdzie  $Q_i$  są względnie pierwsze, to dobieramy  $V_1, V_2$ , o których mówi powyższe zadanie, i piszemy

$$\frac{P}{Q} = \frac{P \cdot 1}{Q} = \frac{P(V_1 Q_1 + V_2 Q_2)}{Q_1 Q_2} = \frac{PV_1}{Q_2} + \frac{PV_2}{Q_1}.$$

Następnie powtarzamy *krok 1* dla każdego z tych ułamków. Cały zabieg kontynuujemy dopóty, dopóki mianowniki można rozkładać na czynniki, które są względnie pierwsze. (Patrz Wniosek 5.84). Po skończonej liczbie kroków dojdziemy do przedstawienia

$$W(x) = P_N(x) + \sum_{j=1}^{M_1} \frac{L_{1,j}(x)}{(x - a_j)^{k_j}} + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{L_{2,j}(x)}{(x^2 + c_j x + d_j)^{n_j}} \quad (9.12)$$

gdzie  $\deg L_{1,j} < k_j$  i  $\deg L_{2,j} < 2n_j$ .

Dzieląc liczniki  $L_{1,j}$  przez  $(x - a_j)$ , a  $L_{2,j}$  przez  $(x^2 + c_j x + d_j)$ , można po skończonej liczbie kroków<sup>2</sup>, ewentualnie zwiększaając liczbę składników po prawej stronie (9.12), dojść do sytuacji, gdy wszystkie liczniki  $L_{1,j}$  są stałymi, a wszystkie liczniki  $L_{2,j}$  – wielomianami liniowymi. □

Aby scałkować funkcję wymierną, wystarczy rozłożyć ją na ułamki proste i scałkować każdy z nich. Popatrzmy na konkretne przykłady.

**Przykład 9.17.** Obliczymy całkę

$$I = \int \frac{x^6}{(x-1)(x+1)^2} dx.$$

Dzieląc licznik  $x^6$  przez  $(x-1)(x+1)^2 = (x^2-1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$ , otrzymujemy wynik  $x^3 - x^2 + 2x - 2$  i resztę  $3x^2 - 2$ . Dlatego

$$\begin{aligned} I &= \int (x^3 - x^2 + 2x - 2) dx + \int \frac{3x^2 - 2}{(x-1)(x+1)^2} dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + \int \frac{3(x^2-1)+1}{(x-1)(x+1)^2} dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 3 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 3 \ln|x+1| + \underbrace{\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}}_{=(\text{ozn.}) J}. \end{aligned}$$

Pozostaje obliczyć całkę  $J$ . Znajdziemy w tym celu stałe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  takie, że

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}.$$

(Ogólnie, jeśli  $(x-a)^k$  dzieli mianownik funkcji wymiernej, to przewidujemy, że w rozkładzie na ułamki proste znajdą się  $A_j/(x-a)^j$  dla wszystkich  $j = 1, 2, \dots, k$ ). Sprowadzając składniki lewej strony do wspólnego mianownika  $(x-1)(x+1)^2$ , dodając ułamki i

<sup>2</sup>Jeśli  $L(x) = K(x)(x-a) + R$ , gdzie  $\deg K < \deg L$ , to  $L(x)/(x-a)^k = R/(x-a)^k + K(x)/(x-a)^{k-1}$ . Potem dzielimy  $K(x)$  przez  $x-a$  itd. Podobnie robimy ze składnikami drugiej sumy w (9.12).

przyczynając otrzymany licznik do licznika prawej strony, otrzymujemy – z porównania współczynników przy  $x^2$ ,  $x$  i  $x^0 = 1$  – układ równań:

$$a + b = 0, \quad 2a + c = 0, \quad a - b - c = 1.$$

Stąd  $a = -b$  (pierwsze równanie) i  $3a - b = 1$  (suma drugiego i trzeciego równania), tzn.  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = -\frac{1}{4}$ ,  $c = -2a = -\frac{1}{2}$ . Zatem

$$J = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} \stackrel{(9.2)}{=} \stackrel{(9.3)}{=} \frac{1}{4} \ln \frac{|x-1|}{|x+1|} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + C.$$

Ostatecznie więc

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + 3 \ln |x+1| + J \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + \frac{11}{4} \ln |x+1| + \frac{1}{4} \ln |x-1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

**Przykład 9.18.** Znajdziemy całkę nieoznaczoną funkcji  $1/(1+x^4)$ . Rozłożymy mianownik na czynniki. Otóż,  $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$ . (Czytelnik może także rozwiązać równanie  $x^4 + 1$  w  $\mathbb{C}$  i pogrupować w pary liczb sprzężonych jego pierwiastki, żeby wyznaczyć ten rozkład nieco inną metodą).

Spodziewamy się zatem, że

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Jak w poprzednim przykładzie, dodając ułamki i porównując współczynniki liczników obu stron przy  $x^k$  dla  $k = 3, 2, 1, 0$ , otrzymujemy układ równań

$$A + C = 0, \quad B + D + \sqrt{2}(A - C) = 0, \quad A + C + \sqrt{2}(B - D) = 0, \quad B + D = 1.$$

Z pierwszego i trzeciego równania otrzymujemy  $B - D = 0$ , więc dzięki czwartemu równaniu jest  $B = D = \frac{1}{2}$ . Dalej,  $A = -C$  i z równania drugiego  $1 + \sqrt{2} \cdot (-2C) = 0$ , a więc  $C = \frac{1}{2\sqrt{2}} = -A$ . Zatem

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}. \quad (9.13)$$

Scałkujemy drugi ułamek. Sprowadzając trójmian w mianowniku do postaci kanonicznej, a następnie zapisując licznik jako kombinację pochodnej mianownika i stałej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{(2x + \sqrt{2}) + \sqrt{2}}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left( (x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \underbrace{\int \frac{dx}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}}_{=J}. \end{aligned}$$

Ostatnią całkę łatwo obliczamy przez podstawienie, pisząc

$$J = 2 \int \frac{dx}{\left( \underbrace{\sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_t \right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \sqrt{2} \cdot \arctg t + C = \sqrt{2} \cdot \arctg(x\sqrt{2} + 1) + C.$$

Dodając otrzymane wyrażenia, otrzymujemy

$$\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg(x\sqrt{2} + 1) + C.$$

Drugi z ułamków w (9.13) można albo scałkować tak samo, albo (lepiej!) zauważając, że podstawienie  $-x = y$ ,  $-dx = dy$  pozwoli skorzystać z już wykonanych rachunków:

$$\begin{aligned} \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx &= - \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}y + \frac{1}{2}}{y^2 + y\sqrt{2} + 1} dy \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(y^2 + y\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg(y\sqrt{2} + 1) + C \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg(-x\sqrt{2} + 1) + C. \end{aligned}$$

Dodając całki z obu ułamków prostych i korzystając z nieparzystości arcus tangensa, otrzymujemy wynik

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} (\arctg(x\sqrt{2} + 1) + \arctg(x\sqrt{2} - 1)) + C. \quad (9.14)$$

Oto drugi, nieco inny sposób obliczenia tej samej całki. Mamy

$$\frac{2}{1+x^4} = \frac{1-x^2}{1+x^4} + \frac{1+x^2}{1+x^4}.$$

Zajmijmy się drugim składnikiem. Jest

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{x^{-2}+1}{x^{-2}+x^2} = \frac{(x-x^{-1})'}{(x-x^{-1})^2+2}.$$

Dlatego, stosując podstawienie  $y = x - x^{-1}$ ,  $dy = (x - x^{-1})' dx$ , otrzymujemy

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int \frac{dy}{y^2+2} =: J.$$

Teraz, podstawiając  $y = t\sqrt{2}$ , znajdujemy

$$J = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg t + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{y}{\sqrt{2}} + C,$$

co, po powrocie do zmiennej  $x$ , daje wynik

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\sqrt{2}} \right) + C.$$

Podobnie można obliczyć całkę funkcji  $(1 - x^2)/(1 + x^4)$ . Tym razem warto skorzystać z podstawienia  $y = x + x^{-1}$ ,  $dy = (1 - x^{-2}) dx$ . Stosując je, dostaniemy

$$\int \frac{1 - x^2}{1 + x^4} dx = - \int \frac{dy}{y^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{y + \sqrt{2}}{y - \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + C.$$

(Środkową równość otrzymujemy, rozkładając  $1/(y^2 - 2)$  na sumę ułamków prostych o mianownikach  $y \pm \sqrt{2}$ ). Dodając oba wyniki, otrzymamy tym razem

$$2 \int \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\sqrt{2}} \right) + C. \quad (9.15)$$

Na pierwszy rzut oka, ten wzór różni się od (9.14). Formalnie biorąc, prawa strona nie jest określona dla  $x = 0$ , choć wyjściowa funkcja była ciągła na  $\mathbb{R}$ , a więc powinna mieć na całej prostej funkcję pierwotną.

**Zadanie 9.19.** Udowodnić tożsamość

$$\arctg t + \arctg s = \arctg \left( \frac{t + s}{1 - ts} \right), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad t \cdot s \neq 1.$$

Sprawdzić, że wzory (9.14) i (9.15) dają w istocie ten sam wynik. Jak należy interpretować wzór (9.15) w punkcie  $x = 0$ ?

Pokażemy jeszcze, jak oblicza się całki z ułamków prostych drugiego rodzaju, których mianownik jest  $k$ -tą potęgą trójmianu kwadratowego dla jakiegoś  $k > 1$ . Można to zrobić rekurencyjnie, w następujący sposób.

Po pierwsze, całkując przez podstawienie ( $y = 1 + x^2$ ) otrzymujemy

$$J_k = \int \frac{2x dx}{(1 + x^2)^k} = \int \frac{dy}{y^k} = \frac{1}{(1 - k)} y^{1-k} + C = \frac{1}{(1 - k)} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}} + C. \quad (9.16)$$

Jest

$$\int \frac{Ax + B}{(1 + x^2)^k} dx = \frac{A}{2} J_k + BI_k, \quad \text{gdzie} \quad I_k = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^k}.$$

Pozostaje zobaczyć, jak się oblicza  $I_k$ . Piszemy, całkując przy przejściu do drugiej linijki przez części, z wykorzystaniem wzoru (9.16),

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)^k} dx = I_{k-1} - \int \underbrace{\frac{x}{2}}_{=f} \cdot \underbrace{\frac{2x}{(1 + x^2)^k}}_{=g'} dx \\ &= I_{k-1} - \underbrace{\frac{x}{2(1 - k)} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}}}_{=f \cdot g} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1 - k)} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}} dx \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2 - 2k} \right) I_{k-1} - \frac{x}{2(1 - k)} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Po skończonej liczbie takich kroków dojdziemy do całki  $I_1$ , tzn. do całki z pochodnej arctangensa. Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju z mianownikiem innym,

niż  $x^2 + 1$ , można sprowadzić do powyższego, zapisując trójmian z mianownika w postaci kanonicznej i dokonując liniowych zamian zmiennych. Właśnie tak postępowaliśmy, całkując wzór (9.13).

**Uwaga 9.20.** Jak widzieliśmy, nie zawsze warto rozkładać funkcję wymierną na ułamki proste. Czasem całkowanie przez podstawienie szybciej prowadzi do wyniku. Oto jeszcze jeden przykład takiej sytuacji:

$$I = \int \frac{6x^5}{1+x^6} dx = \int \frac{dy}{1+y} = \ln|1+y| + C = \ln(1+x^6) + C.$$

Zastosowaliśmy podstawienie  $x^6 = y$ ,  $6x^5 dx = dy$ .

### 9.1.3 Podstawienia Eulera, podstawienia trygonometryczne

Szereg całek można za pomocą odpowiednich podstawień sprowadzić do całkowania funkcji wymiernych.

**Definicja 9.21.** Wielomianem dwóch zmiennych o współczynnikach rzeczywistych nazywamy funkcję

$$P(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_{ij} x^i y^j, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(Przyjmujemy umowę  $x^0 \equiv 1 \equiv y^0$ .) Funkcją wymierną dwóch zmiennych nazywamy funkcję  $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ , gdzie  $P$  i  $Q$  są wielomianami dwóch zmiennych.

Okazuje się, że jeśli  $R$  jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, to obliczenie każdej z następujących całek:

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{Ax+B}{Cx+D}}\right) dx, \quad \text{gdzie } AD - BC \neq 0, \quad (9.17)$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad (9.18)$$

$$\int R(\cos x, \sin x) dx \quad (9.19)$$

można za pomocą odpowiednich podstawień sprowadzić do całkowania funkcji wymiernych jednej zmiennej.

**CAŁKA (9.17).** Wykonujemy podstawienie

$$\sqrt{\frac{Ax+B}{Cx+D}} = t. \quad (9.20)$$

Stąd  $t^2(Cx+D) = (Ax+B)$ , więc

$$x = \frac{Dt^2 - B}{A - Ct^2}; \quad (9.21)$$

różniczkując, otrzymujemy

$$dx = \frac{2Dt(A - Ct^2) + 2Ct(Dt^2 - B)}{(A - Ct^2)^2} dt = \frac{2t(AD - BC)}{(A - Ct^2)^2} dt. \quad (9.22)$$

Wstawiając (9.20)–(9.22) do całki (9.17), otrzymujemy całkę z funkcji wymiernej, którą można obliczyć, stosując algorytm opisany w poprzednim podrozdziale.

**CAŁKA (9.18).** Do tej całki można zastosować wiele podstawień. Najpierw opiszemy tak zwane podstawienia Eulera.

*Pierwsze podstawienie Eulera.* Jeśli  $a > 0$ , to podstawiamy

$$t \pm x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (9.23)$$

(można użyć zarówno plusa, jak i minusa). Po podniesieniu obu stron równania do kwadratu zredukuję się składnik  $ax^2$  i wyznaczamy

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}. \quad (9.24)$$

Widać, że zarówno  $x$ , jak i pierwiastek z trójmianu kwadratowego  $ax^2 + bx + c$  wyrażają się przez funkcje wymierne zmiennej  $t$ ; ponadto, różniczkując prawą stronę pierwszego z równań (9.24), otrzymujemy

$$dx = \frac{2t(b \mp 2t\sqrt{a}) \pm 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{(b \mp 2t\sqrt{a})^2} dt = \frac{\mp 2t^2\sqrt{a} + 2tb \mp 2c\sqrt{a}}{(b \mp 2t\sqrt{a})^2} dt. \quad (9.25)$$

Wstawiając (9.24) i (9.25), otrzymamy całkę z funkcji wymiernej jednej zmiennej.

*Drugie podstawienie Eulera.* Jeśli  $c > 0$ , to podstawiamy

$$tx - \sqrt{c} = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (9.26)$$

Tym razem po podniesieniu obu stron równania do kwadratu zredukuję się wyraz wolny  $c$ , a następnie obie strony będzie można skrócić przez  $x$ . Otrzymamy po takim zabiegu

$$t^2x - 2t\sqrt{c} = ax + b, \quad \text{tzn.} \quad x = \frac{b + 2t\sqrt{c}}{t^2 - a}. \quad (9.27)$$

Dalej postępujemy tak, jak w poprzednim przypadku: widzimy, że  $dx = W(t) dt$ , gdzie  $W$  jest funkcją wymierną, która jest pochodną prawej strony drugiego równania (9.27). Czytelnik zechce sam uzupełnić szczegóły.

*Trzecie podstawienie Eulera.* Jeśli trójmian  $ax^2 + bx + c$  ma pierwiastki rzeczywiste  $r, s$ , to

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm(x - r)\sqrt{a \cdot \frac{x - s}{x - r}}$$

(znak zależy od przedziału). Zatem, jak już widzieliśmy, można skorzystać z podstawienia

$$t = \sqrt{a \cdot \frac{x - s}{x - r}}. \quad (9.28)$$

Dla porządku dodajmy, że wszystkich szczegółów rachunków (9.23)–(9.28), związanych z podstawieniami Eulera, nie warto pamiętać. Dobra jest wiedzieć, na jakiej sztuczce oparte jest działanie każdego z tych podstawień, tzn. znać wzory (9.23), (9.26) i (9.28) i rozumieć, że każdy z nich pozwala wyznaczyć  $x$  jako pewną funkcję wymierną zmiennej

*t.* Resztę rachunków i tak zwykle wykonuje się w razie potrzeby dla konkretnych danych liczbowych.

**CAŁKA (9.18), INNA METODA.** Zapisując trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem w postaci kanonicznej i używając liniowych zamian zmiennych  $y = ax + \beta$ , można sprowadzić całkę (9.18) do postaci

$$\int R_1(y, \sqrt{\dots}) dy$$

gdzie  $R_1$  jest funkcją wymierną, a drugim argumentem jest (w zależności od  $a, b$  i  $c$ ) jeden z pierwiastków: (1)  $\sqrt{1+y^2}$ , (2)  $\sqrt{1-y^2}$ , lub wreszcie (3)  $\sqrt{y^2-1}$ . Można wtedy użyć funkcji trygonometrycznych, a także tzw. *funkcji hiperbowich*, zdefiniowanych następująco:

$$\cosh x = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (9.29)$$

$$\sinh x = -i \sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (9.30)$$

Jak łatwo sprawdzić,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}. \quad (9.31)$$

Dzięki tej tożsamości, dla  $y = \sinh w$  jest  $\sqrt{1+y^2} = \cosh w$ . Zachodzą też wzory na pochodne

$$(\cosh w)' = \sinh w, \quad (\sinh w)' = \cosh w,$$

z których otrzymujemy  $dy = \cosh w dw$ . Zatem

$$I = \int R_1(y, \sqrt{1+y^2}) dy = \int R_1(\sinh w, \cosh w) \cosh w dw = \int R_2(e^w) dw,$$

gdzie  $R_2$  jest pewną funkcją wymierną jednej zmiennej. Podstawiając teraz  $z = e^w$ , otrzymujemy  $dz = e^w dw = z dw$ , co daje wynik

$$I = \int R_2(z) \frac{dz}{z}.$$

Teraz można np. zastosować wiadomy algorytm całkowania funkcji wymiernych.

**Zadanie 9.22.** Podstawiając  $y = \operatorname{tg} \varphi$ , sprowadzić  $\int R_1(y, \sqrt{1+y^2}) dy$  do całki typu (9.19).

Aby pozbyć się pierwiastka  $\sqrt{y^2-1}$ , stosujemy podstawienie  $y = \cosh w$ . Reszta rachunków jest podobna; Czytelnik może wypisać je samodzielnie. Można także użyć podstawienia  $y = 1/\cos \varphi$ , które sprowadzi całkę  $\int R_1(y, \sqrt{y^2-1}) dy$  do postaci (9.19).

W ostatnim z trzech przypadków, gdy mamy do czynienia z pierwiastkiem  $\sqrt{1-y^2}$ , można stosować podstawienie  $y = \sin \varphi$ . Pokażemy jego działanie na przykładzie.

**Przykład 9.23.** Obliczymy całkę

$$\int \sqrt{1-x^2} dx.$$

Dla wygody ustalmy, że funkcję podcałkową rozpatrujemy na przedziale  $[0, 1]$ . Niech  $x = \sin \theta$ , gdzie  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Wtedy  $dx = \cos \theta d\theta$  i  $\sqrt{1 - x^2} = \cos \theta$ . Zatem, ze wzoru na całkowanie przez podstawienie i tożsamości  $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ ,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - x^2} dx &= \int \cos^2 \theta d\theta = \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + C \\ &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4} + C \\ &= \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1 - x^2}) + C.\end{aligned}$$

(Wyznaczając  $\int \cos^2 \theta d\theta$ , można też użyć Przykładu 9.6, tzn. całkować przez części).

Czytelnik może spróbować zastosować do obliczenia tej całki trzecie lub drugie podstawienie Eulera. Oba prowadzą do znacznie gorszych rachunków i wyniku zapisanego w innej postaci.

**CAŁKA (9.19) I UNIWERSALNE PODSTAWIENIE TRYGONOMETRYCZNE.** Całkę z funkcji wymiernej dwóch zmiennych  $\cos x$  i  $\sin x$  można zawsze sprowadzić do całki z funkcji wymiernej jednej zmiennej  $t$ , podstawiając  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ . Zauważmy, że wtedy

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

a ponadto

$$dt = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1 + t^2}{2} dx,$$

tz.  $dx = 2(1+t^2)^{-1} dt$ . Podstawiając te zależności do całki (9.19), oczywiścietrzymamy całkę z funkcji wymiernej jednej zmiennej. Więcej przykładów można znaleźć w drugim tomie książki Fichtenholza.

Na tym zakończymy przegląd metod obliczania całek nieoznaczonych. Więcej przykładów Czytelnik zobaczy z pewnością na ćwiczeniach.

## 9.2 Całka Newtona

**Definicja 9.24.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą. Całką oznaczoną funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$  nazywamy liczbę

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \tag{9.32}$$

gdzie  $F$  jest dowolną funkcją pierwotną funkcji  $f$ .

**Uwaga 9.25.** Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru funkcji  $F$  pierwotnej dla  $f$ : jeśli  $F_1$  jest inną funkcją pierwotną  $f$ , to  $F_1 = F + \text{const}$  (Stwierdzenie 7.33) i dlatego  $F_1(b) - F_1(a) = F(b) - F(a)$ .

Zgodnie z rozpowszechnioną konwencją, wzór (9.32) będziemy uznawać za definicję całki oznaczonej także w przypadku  $b < a$ .

Ze znanych już własności całek nieoznaczonych natychmiast otrzymujemy następujące stwierdzenia. Łatwe dowody (por. podrozdział 9.1.1) pominiemy.

**Stwierdzenie 9.26 (liniowość całki oznaczonej).** *Jeśli  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągłe, zaś  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , to*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

**Stwierdzenie 9.27 (wzór na całkowanie przez części dla całek oznaczonych).** *Jeśli  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są klasy  $C^1$ , to*

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

**Oznaczenia.** Stosując ten wzór i definicję całki oznaczonej, będziemy czasem pisać

$$F\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad fg\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

**Stwierdzenie 9.28 (wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych).** *Niech  $g: [a, b] \rightarrow [g(a), g(b)]$  będzie funkcją klasy  $C^1$  i niech  $f$  będzie ciągła na przedziale  $[g(a), g(b)]$ . Wówczas*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = F(g(b)) - F(g(a)),$$

gdzie  $F$  oznacza dowolną funkcję pierwotną  $f$ .

Całka oznaczona jest szczególnie ważna z uwagi na swoją interpretację geometryczną. Zanim o niej powiemy, udowodnimy ściśle kilka kolejnych prostych własności całki.

**Stwierdzenie 9.29 (addytywność całki jako funkcji przedziału).** *Załóżmy, że  $f$  jest ciągła na przedziale  $I \subset \mathbb{R}$  i niech  $a, b, c \in I$ . Wtedy*

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \tag{9.33}$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \tag{9.34}$$

**Dowód.** Niech  $F$  będzie funkcją pierwotną  $f$  na  $I$ . Wzór (9.34) wynika z równości

$$F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a),$$

natomiaszt (9.33) to kwestia interpretacji definicji całki oznaczonej.  $\square$

**Stwierdzenie 9.30 (monotoniczność całki).** *Jeśli  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągłe i  $f \geq g$  na  $[a, b]$ , to*

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

*Jeśli dodatkowo  $f > g$  na  $(a, b)$ , to  $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$ .*

Dowód. Niech  $\Psi$  będzie funkcją pierwotną  $f - g$  na  $[a, b]$ . Ponieważ  $\Psi' = f - g \geq 0$ , więc  $\Psi$  jest niemalejąca. Dlatego

$$0 \leq \Psi(b) - \Psi(a) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Jeśli dodatkowo  $f > g$  na  $(a, b)$ , to z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wnioskujemy, że  $\Psi$  jest (ściśle) rosnąca na  $[a, b]$ ; dlatego w tym przypadku nierówność między całkami jest ostra.  $\square$

**Wniosek 9.31.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła. Wówczas

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f, \quad (9.35)$$

a ponadto, dla pewnego punktu  $\xi \in (a, b)$ , jest

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Dowód. Nierówności (9.35) otrzymujemy, stosując dwukrotnie poprzednie twierdzenie do  $f$  i funkcji stałych  $g_1 = \inf f \leq f$  oraz  $g_2 = \sup f \geq f$ . Trzeba tylko zauważyć, że dla dowolnej stałej  $m \in \mathbb{R}$  jest  $\int_a^b m dx = mx|_a^b = m(b-a)$ .

Drugą część wniosku otrzymujemy, zauważając, że

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$$

gdzie  $F$  jest funkcją pierwotną  $f$ . Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że prawa strona jest równa  $f(\xi)$  dla pewnego  $\xi \in (a, b)$ .  $\square$

**Wniosek 9.32.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła. Wówczas

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (9.36)$$

Dowód. Ponieważ  $f \leq |f|$ , więc  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$  (Stwierdzenie 9.30). Podobnie,

$$-\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (-f(x)) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Stąd już wynika teza.  $\square$

**Twierdzenie 9.33 (przybliżanie całki sumami całkowymi).** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła i niech  $\varepsilon > 0$ . Istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że jeśli

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{dla wszystkich } i = 1, 2, \dots, n,$$

oraz  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , to

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon. \quad (9.37)$$

Dowód. Ze wzoru (9.34) przez indukcję otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Zatem, z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \Delta. \end{aligned}$$

Aby oszacować  $\Delta$ , skorzystajmy z jednostajnej ciągłości  $f$  na  $[a, b]$  i wybierzmy liczbę  $\delta > 0$  tak, aby  $|f(s) - f(t)| < \eta = \varepsilon/(b-a)$ , gdy  $|s - t| < \delta$ . Z Wniosku 9.31 wynika, że

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{dla pewnego } \xi \in (x_{i-1}, x_i).$$

Ponieważ przedział  $[x_{i-1}, x_i]$  jest krótszy, niż  $\delta$ , więc dla dowolnego  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  mamy

$$\left| f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right| = |f(t_i) - f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) < \eta \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Przeto

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \eta \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \eta(b-a) = \varepsilon.$$

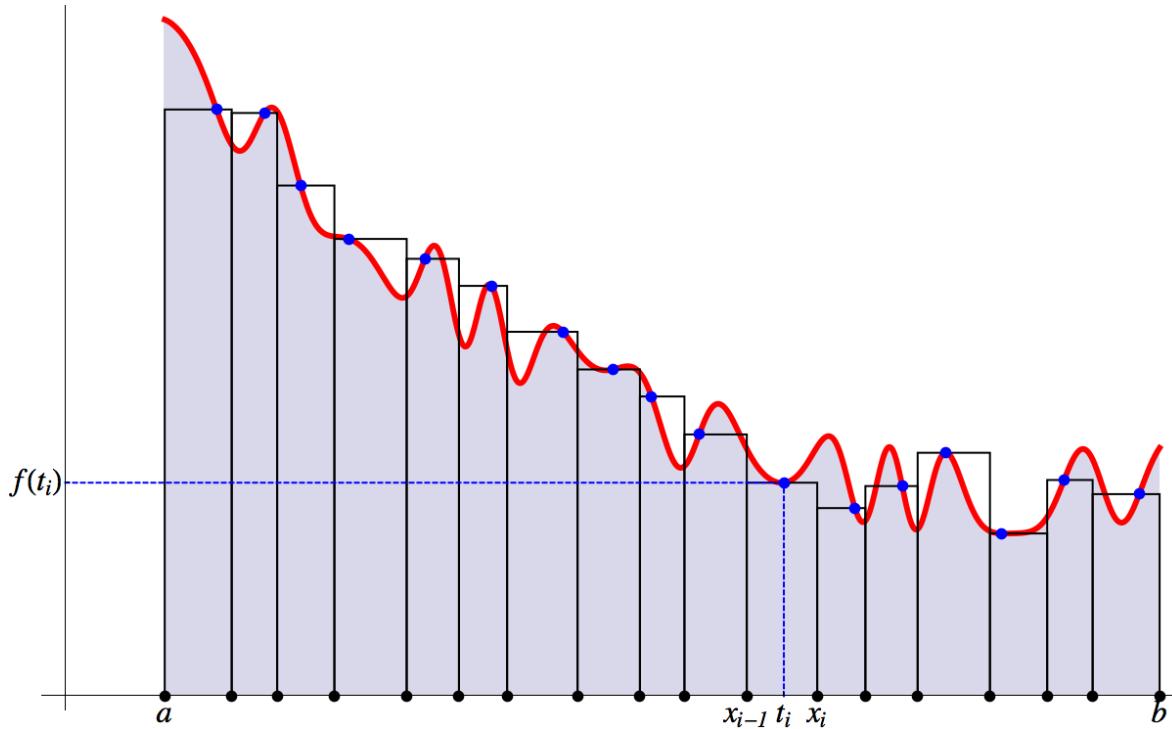
Uzyskana nierówność kończy cały dowód.  $\square$

### Interpretacja geometryczna całki jako pola

W udowodnionym twierdzeniu kryje się istota geometrycznej interpretacji całki oznaczonej jako pola pod wykresem funkcji. Przypuśćmy, że  $f$  jest ciągła i dodatnia na  $[a, b]$ . Suma  $\sum f(t_i)(x_i - x_{i-1})$  to suma pól prostokątów, które mają wysokości równe  $f(t_i)$  i odcinki  $[x_{i-1}, x_i]$  za podstawy. Gdy podział odcinka  $[a, b]$  punktami  $x_i$  jest odpowiednio ‘drobny’, to intuicja podpowiada, że suma pól takich prostokątów powinna z dobrym przybliżeniem dawać pole pod wykresem  $f$ , tzn. pole figury, ograniczonej osią  $x$ -ów, prostymi  $x = a$  i  $x = b$  oraz wykresem funkcji (patrz rysunek).

Najpoważniejszy kłopot z pełnym uściśleniem tej intuicji jest następujący: nie dysponujemy ścisłą definicją *pola figury*. Jednak w świetle powyższych wyjaśnień można zdefiniować pole pod wykresem funkcji (ciąglej, dodatniej) jako całkę z tej funkcji po odpowiednim przedziale.

Można też postąpić odwrotnie i zdefiniować całkę oznaczoną jako granicę odpowiednich sum całkowych  $\sum f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ , otrzymanych dla coraz drobniejszych podziałów odcinka  $[a, b]$  punktami  $x_i$ . W taki sposób określa się tzw. całkę Riemanna. Dla funkcji ciągłych pokrywa się ona z całką Newtona, ale nad nią pewną przewagę. Dla całki Riemanna obszerniejsza jest klasa funkcji całkowalnych; można wygodnie całkować także i



Suma  $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$  to suma pól prostokątów. Dla dużych  $n$ , gdy podstawy wszystkich prostokątów są małe, wartość tej sumy jest dobrym przybliżeniem całki  $\int_a^b f(x) dx$ , tzn. pola zacienianego obszaru.

(niektóre) takie funkcje, które nie mają funkcji pierwotnej, np. funkcje schodkowe.<sup>3</sup> Powiemy o tym więcej w podrozdziale 9.3.

**Przykład 9.34 (pole koła).** Posłużymy się geometryczną interpretacją całki i obliczymy pole  $P$  koła jednostkowego. Ćwiartka tego koła stanowi obszar pod wykresem funkcji  $y = \sqrt{1 - x^2}$  na przedziale  $[0, 1]$ . Zatem

$$P = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 4 \cdot \frac{1}{2} \left( \arcsin x + x\sqrt{1 - x^2} \right) \Big|_0^1 = 2(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \pi.$$

(Posłużyliśmy się wzorem na całkę nieoznaczoną funkcji  $y = \sqrt{1 - x^2}$ , znalezionym wcześniej, w Przykładzie 9.23).

Zapiszmy jeszcze wniosek, który łatwo wynika z Twierdzenia 9.33.

**Wniosek 9.35.** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

**Dowód.** Punkty  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ , gdzie  $k = 0, 1, \dots, n$ , dzielą  $[a, b]$  na  $n$  równych części. Wystarczy skorzystać z definicji granicy ciągu i zastosować Twierdzenie 9.33 właśnie dla tych konkretnych  $x_k$ , przyjmując ponadto  $t_k = x_k$ .  $\square$

<sup>3</sup>Funkcja schodkowa, tzn. funkcja przedziałami stała, nie ma oczywiście własności Darboux (chyba, że w ogóle jest stała), a więc nie jest pochodną żadnej funkcji.

**Przykład 9.36.** Korzystając z ostatniego wniosku, można (czasem) obliczać granice ciągów, których  $n$ -ty wyraz jest sumą  $n$  składników  $s_k = f(k/n)$ , gdzie  $1 \leq k \leq n$ .

1. Niech

$$c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

Nietrudno zauważyć, że  $c_n$  jest ograniczony (z góry przez 1, z dołu przez  $\frac{1}{2}$ ) i rosnący, więc jest zbieżny. Możemy zapisać

$$c_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie  $f(x) = 1/(1+x)$ . Na mocy Wniosku 9.35,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

2. Niech

$$d_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

Tym razem, skracając liczniki i mianowniki przez  $n^2$ , otrzymujemy

$$d_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie  $f(x) = 1/(1+x^2)$ . Na mocy Wniosku 9.35,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

### 9.2.1 Całka Newtona a zbieżność jednostajna

Poniższe twierdzenie ma zarówno znaczenie teoretyczne, jak i praktyczne (pozwala przybliżać całki oznaczone z dowolnych funkcji ciągłych np. całkami oznaczonymi z wielomianów, albo z funkcji kawałkami liniowymi).

**Twierdzenie 9.37 (o przejściu granicznym pod znakiem całki).** Założmy, że funkcje  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągłe i  $f_n \rightrightarrows f$  na przedziale  $[a, b]$ . Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Dowód PIERWSZY.** Dla  $n = 1, 2, \dots$  wybierzmy funkcje pierwotne  $F_n, F$  funkcji  $f_n, f$  tak, aby  $F_n(a) = F(a) = 0$  dla każdego  $n$ . Ponieważ ciąg pochodnych  $(f_n) = (F'_n)$  jest zbieżny jednostajnie na  $[a, b]$ , a ciąg funkcji  $F_n$  jest zbieżny w jednym punkcie  $x_0 = a$ , więc – na mocy Twierdzenia 7.19 o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych – ciąg  $F_n$  jest zbieżny

jednostajnie na  $[a, b]$  do funkcji  $G$ , której pochodna jest równa  $f$ . Musi też być  $G(a) = F_n(a) = 0 = F(a)$ , a stąd  $G \equiv F$ . Dlatego  $F_n(b) \rightarrow F(b)$  dla  $n \rightarrow \infty$ , a więc

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(b) - F_n(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

**Dowód drugi.** Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Dobierzmy  $n_0 \in N$  tak, aby  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$  dla wszystkich  $n > n_0$  i  $x \in [a, b]$ . Oznaczmy

$$I_n = \int_a^b f_n(x) dx, \quad I = \int_a^b f(x) dx.$$

Na mocy Wniosków 9.31 i 9.32, dla  $n > n_0$  jest

$$\begin{aligned} |I_n - I| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \stackrel{(9.36)}{\leq} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n - f| < (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem, wprost z definicji granicy ciągu,  $\lim I_n = I$ .  $\square$

**Definicja 9.38.** Powiemy, że  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest *kawałkami liniowa*, jeśli  $g$  jest ciągła na  $[a, b]$  i przedział  $[a, b]$  jest sumą skończenie wielu przedziałów  $[x_{i-1}, x_i]$ , na których  $g(x) = \alpha_i x + \beta_i$  dla pewnych  $\alpha_i, \beta_i$ .

**Zadanie 9.39.** Wykazać, że każda funkcja ciągła  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest granicą jednostajnie zbieżnego na  $[a, b]$  ciągu funkcji kawałkami liniowych.

### 9.2.2 Wzór Wallisa i wzór Stirlinga

W 1655 roku angielski matematyk John Wallis, profesor Uniwersytetu w Oksfordzie<sup>4</sup> udowodnił znany wzór na liczbę  $\pi$ .

**Twierdzenie 9.40 (wzór Wallisa).** Niech

$$A_n = \frac{1}{n} \left( \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wówczas  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \pi$ .

**Dowód.** Oznaczmy

$$I_k = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^k dx.$$

Całki  $I_k$  można obliczyć, całkując przez części. Wykażemy, że zachodzi wzór rekurencyjny

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2} \quad \text{dla } k \geq 2, \quad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1. \tag{9.38}$$

---

<sup>4</sup>Wallis żył w latach 1616–1703. Ciekawostka: podczas wojny domowej w Anglii pracował także jako kryptograf.

Równości  $I_0 = \pi/2$  oraz  $I_1 = 1$  są oczywiste. Dla  $k \geq 2$  jest, na mocy wzoru na całkowanie przez części dla całek oznaczonych,

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-1} \cdot (-\cos x)' dx \\ &= -\cos x (\sin x)^{k-1} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} ((\sin x)^{k-1})' \cdot \cos x dx \\ &= 0 + (k-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-2} \cos^2 x dx \\ &= (k-1)(I_{k-2} - I_k), \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z równości  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ . Wyznaczając stąd niewiadomą  $I_k$ , otrzymujemy (9.38).

Z rekurencyjnej zależności (9.38) wnioskujemy, że

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \dots, \quad I_{2n} = \frac{(2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2n \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

natomiast dla nieparzystych indeksów

$$I_{2n-1} = \frac{(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3} \cdot I_1 = \frac{(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3}.$$

Zatem

$$\pi \cdot \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \pi \cdot 2n \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3} \right)^2 = \frac{1}{n} \left( \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2.$$

Aby zakończyć dowód wzoru Wallisa, wystarczy więc wykazać, że ciąg  $a_n = I_{2n-1}/I_{2n}$  ma granicę równą 1. Dla  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  jest  $\sin x \in [0, 1]$ ; dlatego  $(\sin x)^{k+1} \leq (\sin x)^k$  dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ . Zatem ciąg  $I_k$  jest, na mocy Stwierdzenia 9.30, nierosnący. Dzieląc nierówność

$$I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

przez liczbę dodatnią  $I_{2n}$ , otrzymujemy

$$1 \leq a_n = \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \stackrel{(9.38)}{=} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \leq \frac{2n}{2n-1},$$

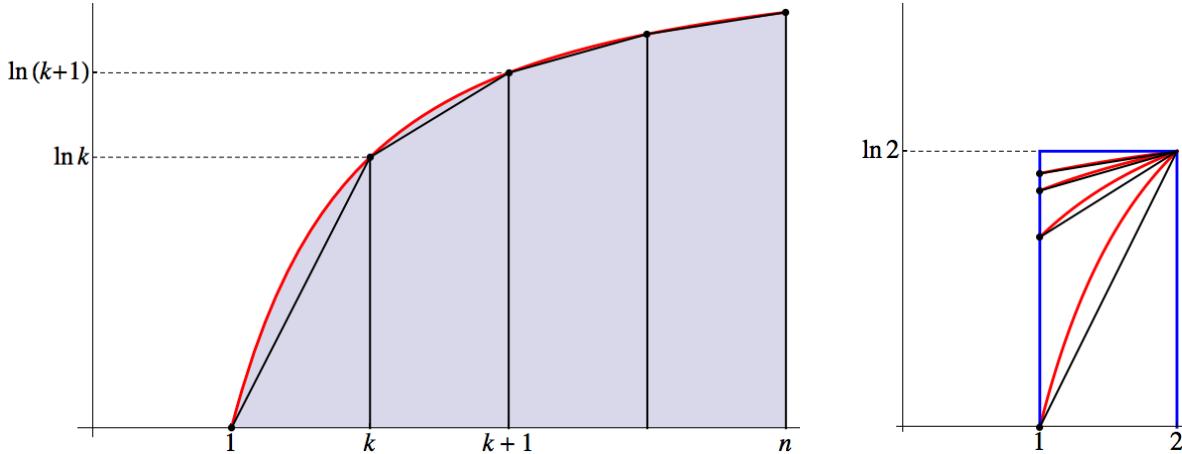
gdyż  $I_{2n-1} \leq I_{2n-2}$ . Wobec twierdzenia o trzech ciągach,  $a_n \rightarrow 1$  dla  $n \rightarrow \infty$ . Dowód wzoru Wallisa jest zakończony.  $\square$

Korzystając ze wzoru Wallisa, wyprowadzimy wzór Stirlinga,<sup>5</sup> opisujący tempo wzrostu  $n!$ . Jest on przydatny w wielu zastosowaniach, m.in. w rachunku prawdopodobieństwa.

**Twierdzenie 9.41 (wzór Stirlinga).** Istnieje taki ciąg liczb dodatnich  $\rho_n$ , że

$$n! = \left( \frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \rho_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1. \quad (9.39)$$

<sup>5</sup>James Stirling żył w latach 1692–1770. Wzór Stirlinga pochodzi z okolic roku 1730. Są historycy matematyki, którzy utrzymują, że mniej więcej w tym samym czasie niezależnie wykazał ten wzór inny brytyjski matematyk, Abraham de Moivre.



Pole pod wykresem logarytmu (skala na osi pionowej zniekształcona, dla większej czytelności rysunku) przybliżamy przez sumę pól trapezów o wysokości 1. Indeks  $k$  we wzorze (9.42) spełnia  $1 \leq k < k + 1 \leq n$ . Błąd, tzn. suma pól małych "piórek", jest ograniczony przez stałą  $\ln 2$  niezależnie od liczby trapezów. To grube szacowanie.

**Dowód. Krok 1.** Zaczniemy od wykazania, że ciąg

$$a_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{n} \quad (9.40)$$

ma skończoną granicę  $g > 0$ . W tym celu obliczymy dwoma sposobami całkę oznaczoną  $\int_1^n \ln x \, dx$ .

*Sposób pierwszy.* Z definicji,

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln x \, dx &= (x \ln x - x) \Big|_1^n \\ &= n \ln n - n + 1 = \ln \left( \frac{n}{e} \right)^n + 1. \end{aligned} \quad (9.41)$$

*Sposób drugi.* Podzielimy obszar pod wykresem  $\ln x$  dla  $x \in [1, n]$  na  $(n-1)$  pasów szerokości 1, prowadząc pionowe proste o równaniach  $x = i$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots, n$ . Każdy z pasów składa się z trapezu<sup>6</sup> o wysokości 1 i o podstawach  $\ln(k-1)$  i  $\ln k$  oraz z wąskiego "piórka", ograniczonego łukiem wykresu funkcji i sieczną wykresu (patrz lewy rysunek). Dzięki geometrycznej interpretacji całki, numerując trapezy od 1 do  $n-1$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln x \, dx &= \text{suma pól } (n-1) \text{ trapezów} + \text{suma pól } (n-1) \text{ piórek} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k \\ &= \sum_{k=1}^n \ln k - \frac{1}{2} \ln n + \sum_{k=1}^{n-1} p_k = \ln \frac{n!}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k, \end{aligned} \quad (9.42)$$

<sup>6</sup>Pierwszy trapez jest zdegenerowany, tzn. jest trójkątem

gdzie  $p_k$  oznacza pole  $k$ -tego piórka. Porównując prawe strony (9.41) i (9.42), otrzymujemy równość

$$\ln \left( \frac{n}{e} \right)^n - \ln \frac{n!}{\sqrt{n}} = -1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k,$$

tzn. równoważnie, zgodnie z oznaczeniem (9.40),

$$\ln a_n = -1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k. \quad (9.43)$$

Zauważmy teraz, że szereg  $\sum p_k$  jest zbieżny. To wynika z wkleśliwości logarytmu. Istotnie, wszystkie piórka można, dokonując przesunięć równoległych (wzdłuż siecznych), umieścić w prostokącie  $P$ , ograniczonym prostymi  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  i  $y = \ln 2$  jako obszary rozłączne, patrz prawy rysunek.<sup>7</sup> Ponieważ przesunięcie zachowuje pole figury, więc suma pól wszystkich piórek nie przekracza pola prostokąta  $P$  i dlatego

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k \in (0, \ln 2].$$

Wobec (9.43), ciąg  $a_n$  ma granicę  $g = \exp(-1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k) > 0$ .

**Krok 2.** Wyrazimy liczbę  $g$  w jawnym sposobie, posługując się wzorem Wallisa. Położymy  $b_n = (a_n)^2/a_{2n}$ . Ponieważ  $\lim a_n = g > 0$ , więc ciąg  $b_n$  ma granicę  $g^2/g = g$ . Sprawdzamy, że

$$b_n = \frac{(a_n)^2}{a_{2n}} = \underbrace{\frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{n^{2n}}{e^{2n}} \cdot n}_{=(a_n)^2} \cdot \underbrace{\frac{(2n)!}{2^{2n}} \cdot \frac{e^{2n}}{n^{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{=1/a_{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 4^n} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Niech  $c_n = 4^{-n}(2n)!/(n!)^2$ ; wtedy

$$b_n = c_n \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Mamy

$$c_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{4(n+1)^2 \cdot (n!)^2 4^n} = \frac{2n+1}{2n+2} c_n, \quad c_1 = \frac{2!}{4} = \frac{1}{2}.$$

Zatem, przez indukcję,

$$c_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2},$$

a więc

$$\frac{1}{b_n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n} \left( \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2.$$

Ze wzoru Wallisa, patrz Twierdzenie 9.40, otrzymujemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/b_n^2) = 2\pi$ , stąd zaś  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/\sqrt{2\pi}$ . Ostatecznie więc

$$a_n \sqrt{2\pi} = \frac{1}{n!} \left( \frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \longrightarrow 1 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$

Kładąc  $1/\rho_n = a_n \sqrt{2\pi}$ , otrzymujemy wzór Stirlinga (9.39).  $\square$

<sup>7</sup>Piórko o numerze  $k$ , gdzie  $k = 2, 3, \dots$ , należy przesunąć równolegle o wektor  $(-k+1, -\ln k)$ .

$$\begin{aligned} \text{rang} \left( \frac{\phi}{\omega} \right) &= \frac{\phi}{\omega - \frac{\phi\phi}{3\omega - \frac{\phi\phi}{5\omega - \frac{\phi\phi}{7\omega - \frac{\phi\phi}{9\omega - \ddots}}}}} \\ &\quad && \end{aligned}$$

Skan fragmentu pracy Lambert'a (źródło: Wikipedia).

### 9.2.3 Niewymierność liczby $\pi$ . Informacje o liczbach przestępnych.

W 1761 roku niemiecki matematyk Johann Heinrich Lambert udowodnił niewymierność liczby  $\pi$ . Jego dowód<sup>8</sup> opierał się na rozwinięciu funkcji tangens w ułamekłańcuchowy (patrz rysunek) i rzadko jest dziś przytaczany w książkach, bo wykazywanie zbieżności tego rozwinięcia do tangensa wymaga wysiłku, a znane są prostsze dowody. Opiszemy tu jeden z nich.

Zacznijmy od nietrudnego, pomocniczego lematu.

**Lemat 9.42.** Niech  $w(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$  dla  $x \in [0, 1]$ . Wówczas

1.  $0 < w(x) \leq 4^{-n}/n! < 1/n!$  dla każdego  $x \in (0, 1)$ ;
2.  $w(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k$ , gdzie wszystkie współczynniki  $c_k$  są całkowite;
3. Liczby  $w^{(k)}(0)$  i  $w^{(k)}(1)$  są całkowite dla każdego  $k = 0, 1, \dots$ ; ponadto,  $w^{(k)}(0) = w^{(k)}(1) = 0$  dla wszystkich  $k < n$  i  $k > 2n$ .

Dowód. Dla  $x \in (0, 1)$  jest  $0 < x(1-x) \leq 1/4$ . Podnosząc tę nierówność do  $n$ -tej potęgi i dzieląc przez  $n!$ , otrzymujemy pierwszy punkt tezy. Drugi punkt tezy wynika natychmiast z równości

$$n!w(x) = x^n(1-x)^n = x^n \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} x^l$$

(współczynniki dwumianowe Newtona są całkowite). Aby wykazać trzecią własność wielomianu  $w$ , zauważmy, że  $w(x) = w(1-x)$  i dlatego  $w^{(k)}(x) = (-1)^k w^{(k)}(1-x)$ , tzn.  $w^{(k)}(1) = \pm w^{(k)}(0)$ . Wystarczy więc zbadać liczby  $w^{(k)}(0)$ . Z drugiego punktu tezy wynika, że  $w^{(k)}(0) = 0$  dla  $k < n$  i  $k > 2n$  (dla  $k > 2n$  funkcja  $w^{(k)}$  jest wielomianem stopnia  $2n$ ). Natomiast dla  $k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}$  mamy

$$w^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k \in \mathbb{Z},$$

gdyż wtedy  $n!$  jest dzielnikiem  $k!$ .  $\square$

Zanotujmy też oddziennie inny nietrudny fakt, który przyda się nam nie tylko do dowodu niewymierności  $\pi$ .

---

<sup>8</sup>Zainteresowanych odsyłam np. do pracy: M. Laczkovich, Lambert's proof of the irrationality of  $\pi$ , Amer. Math. Monthly **104**, no. 5 (1997), 439–443.

**Lemat 9.43 (wzór na wielokrotne całkowanie przez części).** Niech  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami klasy  $C^N$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g^{(N)}(x) dx &= \left( fg^{(N-1)} - f'g^{(N-2)} + \cdots + (-1)^{N-1}f^{(N-1)}g \right) \Big|_a^b \\ &\quad + (-1)^N \int_a^b f^{(N)}(x)g(x) dx. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Dowód. Stosujemy  $N$ -krotnie wzór na całkowanie przez części, przerzucając w każdym kroku jedno różniczkowanie z  $g$  na  $f$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g^{(N)}(x) dx &= fg^{(N-1)} \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g^{(N-1)}(x) dx \\ &= \left( fg^{(N-1)} - f'g^{(N-2)} \right) \Big|_a^b + \int_a^b f^{(2)}(x)g^{(N-2)}(x) dx \\ &\vdots \\ &= \left( fg^{(N-1)} - f'g^{(N-2)} + \cdots + (-1)^{N-1}f^{(N-1)}g \right) \Big|_a^b \\ &\quad + (-1)^N \int_a^b f^{(N)}(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

Całkujemy zawsze funkcję typu  $f^{(k)}g^{(N-k)}$  i dlatego pojawia się składnik  $\pm f^{(k)}g^{(N-k-1)} \Big|_a^b$ ; nietrudno zauważać i wypisać regułę, określającą znaki kolejnych składników.  $\square$

**Twierdzenie 9.44.** Liczba  $\pi$  jest niewymierna.

Dowód. Będziemy dowodzić tezy przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że  $\pi = l/m$  dla pewnych  $l, m \in \mathbb{N}$ . Rozpatrzmy liczbę

$$A_n = m^n \pi^{2n+1} \int_0^1 w(x) \sin \pi x dx,$$

gdzie

$$w(x) \equiv w_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n$$

oznacza wielomian z Lematu 9.42. Wykażemy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$  i  $A_n$  jest liczbą całkowitą dodatnią dla każdego  $n$ . Ta oczywista sprzeczność zakończy dowód.

**Krok 1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ . Istotnie, z nierówności  $0 < \sin \pi x \leq 1$ , pierwszego punktu tezy Lematu 9.42 i monotoniczności całki wynika, że

$$0 < A_n \leq \pi (m\pi^2)^n \int_0^1 \frac{1}{n!} \sin \pi x dx = \pi \frac{(m\pi^2)^n}{n!} \int_0^1 \sin \pi x dx \leq \pi \frac{(m\pi^2)^n}{n!}.$$

Ciąg  $y^n/n! \rightarrow 0$  dla każdego  $y \in \mathbb{R}$ , gdyż szereg potęgowy funkcji wykładniczej jest zbieżny na całej prostej.

*Krok 2.* Liczby  $A_n$  są całkowite dodatnie. Wiemy już, że  $A_n > 0$  dla każdego  $n$ . Aby stwierdzić, że  $A_n \in \mathbb{Z}$ , posłużymy się wzorem na wielokrotne całkowanie przez części, biorąc przedział  $[a, b] = [0, 1]$ , liczbę  $N = 2n + 1$ ,  $f(x) = w(x)$ , oraz

$$g^{(N)}(x) = \pi^{2n+1} \sin \pi x = \mp (\cos \pi x)^{(N)} \quad \text{tzn.} \quad g(x) = \mp \cos \pi x.$$

(Znak nie będzie odgrywał istotnej roli w rachunkach). Ponieważ  $w = w_n$  jest wielomianem stopnia  $2n$ , a  $N = 2n + 1 > 2n$ , więc  $w^{(N)} \equiv 0$  i całka  $\int w^{(N)} g dx$  po prawej stronie wzoru (9.44) znika. Dlatego

$$\begin{aligned} A_n &= m^n \left( w g^{(N-1)} - w' g^{(N-2)} + \cdots + (-1)^{N-1} w^{(N-1)} g \right) \Big|_0^1 \\ &= m^n \left( (-1)^n w^{(n)} g^{(N-n-1)} + (-1)^{n+1} w^{(n+1)} g^{(N-n-2)} + \cdots + (-1)^{N-1} w^{(2n)} g \right) \Big|_0^1, \end{aligned} \quad (9.45)$$

gdzie  $w^{(k)}$  znika w punktach 0 i 1 dla  $k < n$  (patrz Lemat 9.42, punkt 3). Sprawdzamy teraz, że każdy składnik w nawiasie jest liczbą wymierną postaci  $p/m^s$ , gdzie  $p \in \mathbb{Z}$ , natomiast  $s \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Stąd już wyniknie teza  $A_n \in \mathbb{Z}$ .

Pochodne funkcji  $w$  w punktach 0 i 1 są całkowite (Lemat 9.42). Mamy też

$$|g^{(s)}(x)| = \begin{cases} \pi^s |\sin \pi x| & \text{dla } s \text{ nieparzystych,} \\ \pi^s |\cos \pi x| & \text{dla } s \text{ parzystych.} \end{cases}$$

W drugiej linii wzoru (9.45) występują pochodne  $g^{(s)}$  dla  $s = 0, 1, 2, \dots, N-n-1$ , tzn. dla  $s = 0, 1, 2, \dots, n$ . Funkcje  $\pm \sin \pi x$  i  $\pm \cos \pi x$  przyjmują w punktach 0, 1 wartości 0 i  $\pm 1$ . Dlatego  $g^{(s)}(x)$  przyjmuje w tych punktach wartości

$$0, \quad \pm \pi^s = \pm \frac{l^s}{m^s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Iloczyny  $m^n \cdot (\pm w^{(N-1-s)}(x) g^{(s)}(x))$  są więc, dla  $x \in \{0, 1\}$ , całkowite. Liczba  $A_n$ , która jest sumą takich iloczynów, też więc jest całkowita.  $\square$

**Uwaga 9.45.** W podobny sposób można wykazać niewymierność liczby  $\pi^2$  (patrz np. książka: M. Aigner, G.M. Ziegler, *Dowody z księgi*), a także niewymierność wszystkich liczb  $r$ , dla których  $\cos r$  jest liczbą wymierną.

Niewymierność drugiej z najważniejszych stałych, z którymi Czytelnik spotyka się w analizie matematycznej, liczby  $e$ , można udowodnić znacznie łatwiej: gdyby  $e = p/q$  dla pewnych  $p, q \in \mathbb{N}$ , to mielibyśmy

$$x := q! \left( e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right) = p(q-1)! - \sum_{n=0}^q \frac{q!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

gdzie  $n!$  dzieli  $q!$  dla  $n \leq q$ ; z drugiej strony, ponieważ  $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ , więc

$$0 < x = q! \left( e - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots = \frac{1}{q} < 1.$$

To jest sprzeczność, gdyż w  $(0, 1)$  nie ma żadnej liczby całkowitej.

Przytoczony dowód niewymierności  $\pi$  jest dużo młodszy od oryginalnego dowodu Lambertego. Podobny charakter ma dowód *przestępności* liczby  $e$ .

**Definicja 9.46.** Liczba  $z \in \mathbb{C}$  nazywa się *algebraiczną*, jeśli dla pewnych  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi równość

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0.$$

Liczba zespolona, która nie jest algebraiczna, nazywa się *przestępna*.

Łatwo zauważyc, że wszystkie liczby wymierne są algebraiczne:  $x = p/q \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  jest rozwiązaniem równania liniowego  $p - qx = 0$  o współczynnikach całkowitych  $p, q$ . Zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny, gdyż dla każdej z przeliczalnie wielu wartości  $n = 1, 2, \dots$  istnieje tylko przeliczalnie wiele wielomianów  $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$  o współczynnikach całkowitych, a każdy z nich ma co najwyżej  $n$  pierwiastków rzeczywistych. Jednak  $\mathbb{R}$  jest zbiorem nieprzeliczalnym, więc w  $\mathbb{R}$  istnieją liczby przestępne. Pierwszy konkretny przykład takiej liczby,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}},$$

podał w latach 40-tych XIX wieku Joseph Liouville. W 1873 roku Charles Hermite udowodnił przestępnośc  $e$ .

**Twierdzenie 9.47.** *Liczba  $e$  jest przestępna.*

**Dowód.** Będziemy dowodzić przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0$$

dla pewnych  $a_i \in \mathbb{Z}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Dobierając powyższy wielomian o współczynnikach całkowitych tak, aby miał minimalny możliwy stopień, można założyć, że  $a_0 \neq 0$ .

**Krok 1.** Niech  $W$  oznacza dowolny wielomian zmiennej rzeczywistej, stopnia  $m$ . Sprawdzimy, że jeśli całka  $I(x)$  określona jest wzorem

$$I(x) = \int_0^x e^{x-u} W(u) du, \quad (9.46)$$

to

$$I(x) = e^x \sum_{j=0}^m W^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m W^{(j)}(x). \quad (9.47)$$

Istotnie, całkując przez części, przekonujemy się, że

$$I(x) = e^x \int_0^x e^{-u} W(u) du = e^x \left( -e^u W(u) \Big|_0^x + \int_0^x e^{-u} W'(u) du \right),$$

stąd zaś przez indukcję (pamiętajmy, że  $W^{(m+1)} \equiv 0$ )

$$I(x) = -e^{x-u} \left( W(u) + W'(u) + W''(u) + \cdots + W^{(m)}(u) \right) \Big|_0^x = e^x \sum_{j=0}^m W^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m W^{(j)}(x).$$

Można również dowieść (9.47), stosując od razu wzór na wielokrotne całkowanie przez części.

*Krok 2: dobór wielomianu W.* Niech  $p$  będzie dostatecznie dużą liczbą pierwszą.<sup>9</sup> Położymy

$$W(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdot \dots \cdot (x-n)^p \quad (9.48)$$

i rozpatrzmy całkę

$$J = \sum_{k=0}^n a_k I(k),$$

gdzie liczby  $a_k$  są całkowitymi współczynnikami wielomianu znikającego w punkcie  $e$ . Niech  $m = (n+1)p - 1 = \deg W$ . Ze wzoru (9.47) otrzymujemy

$$\begin{aligned} J = \sum_{k=0}^n a_k I(k) &= \sum_{k=0}^n a_k \left( e^k \sum_{j=0}^m W^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m W^{(j)}(k) \right) \\ &= - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_k W^{(j)}(k), \end{aligned} \quad (9.49)$$

gdyż  $\sum a_k e^k = 0$  z założenia o algebraiczności  $e$ .

*Krok 3: wartości wielomianu W i jego pochodnych w punktach  $0, 1, \dots, n$ .* Aby zbadać wartość  $J$ , wyznaczmy pochodne  $W$  w punktach  $0, 1, \dots, n$ . Posługując się wzorem Leibniza na wyższe pochodne iloczynu dwóch funkcji, łatwo otrzymać następujące zależności:

$$W^{(j)}(k) = 0 \quad \text{dla } j < p \text{ i } k = 1, 2, \dots, n, \quad (9.50)$$

$$W^{(j)}(0) = 0 \quad \text{dla } j < p-1. \quad (9.51)$$

Dla przykładu sprawdźmy równość (9.50). (Tak samo sprawdza się (9.51).) Jest  $W(x) = f(x) \cdot g(x)$  dla  $f(x) = (x-k)^p$  i  $g(x)$  zdefiniowanego jako iloczyn pozostałych czynników po prawej stronie (9.48). Dlatego, ze wzoru Leibniza,

$$W^{(j)}(k) \stackrel{\text{Stw. 6.50}}{=} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} f^{(i)}(k) g^{(j-i)}(k) = 0,$$

gdyż  $f^{(i)}(k) = p(p-1)\dots(p-i+1)(x-k)^{p-i}|_{x=k} = 0$  dla każdego  $i = 0, 1, \dots, j$ , gdy  $j < p$ . Zauważmy jeszcze, że dla  $k > 0$  jest  $f^{(p)}(k) = p!$  i  $f^{(j)}(k) = 0$  dla  $j > p$ , a więc  $f^{(j)}(k)$  jest liczbą podzielną przez  $p!$ .

Nietrudno teraz wywnioskować, że dla  $j = 0, 1, 2, \dots, m$  i  $k = 0, 1, \dots, n$

$$W^{(j)}(k) \in \mathbb{Z} \text{ jest liczbą podzielną przez } p!, \text{ chyba, że } j = p-1, k = 0; \quad (9.52)$$

natomast

$$W^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p. \quad (9.53)$$

Ostatnią równość też można sprawdzić, posługując się wzorem Leibniza, podobnie jak (9.50). Dla liczb pierwszych  $p > n$  liczba  $W^{(p-1)}(0)$  jest więc podzielna przez  $(p-1)!$ , ale niepodzielna przez  $p!$ .

*Krok 4.* Niech odtąd

$$p > M := \max(n, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|).$$

---

<sup>9</sup>Szereg odwrotności liczb pierwszych jest rozbieżny, więc liczb pierwszych jest nieskończonym wiele.

Wstawiając obliczone wartości pochodnych  $W$  do wzoru (9.49) na całkę  $J$ , sprawdzamy, że  $J$  jest liczbą całkowitą podzielną przez  $(p-1)!$  i niepodzielną przez  $p!$ . To wynika stąd, że wszystkie za wyjątkiem jednego składniki sumy w (9.49) są podzielne przez  $p!$ , zaś jeden,  $a_0 W^{(p-1)}(0)$ , wobec (9.53) dzieli się przez  $(p-1)!$ , ale wskutek doboru  $p$  już nie przez  $p!$ .

Dlatego  $J \neq 0$  i  $|J| \geq (p-1)!$ . Z drugiej strony, posługując się monotonicznością całki i szacując dość brutalnie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |J| &\leq \sum_{k=0}^n |a_k| |I(k)| \\ &\leq M \sum_{k=0}^n |I(k)| \quad \text{z definicji } M \\ &\leq M e^n \sum_{k=0}^n k \cdot \max_{x \in [0,k]} |W(x)| \quad \text{z definicji } I(k) \text{ oraz (9.36)–(9.35)} \\ &\leq M n^2 e^n \cdot \max_{x \in [0,n]} |W(x)| \\ &\leq M n^2 e^n \cdot n^{p-1} n^{np} = A \cdot B^p, \end{aligned}$$

gdzie stałe  $A = M n e^n$  i  $B = n^{n+1}$  zależą od  $n$  i współczynników  $a_k$  wielomianu, zerującego się w  $e$ , ale nie od liczby  $p$ . Porównując uzyskane oszacowania całki  $J$ , otrzymujemy

$$(p-1)! \leq |J| \leq AB \cdot B^{p-1},$$

lub równoważnie

$$1 \leq AB \cdot \frac{B^{p-1}}{(p-1)!}.$$

To jest sprzeczność dla dużych  $p$ , gdyż  $B^k/k! \rightarrow 0$  dla  $k \rightarrow \infty$  i każdego  $B \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Rok po dowodzie Hermite'a Georg Cantor wprowadził pojęcie mocy zbioru i wykazał, że zbiór liczb przestępnych jest nieprzeliczalny. Niecałe 10 lat później, w roku 1882, Ferdinand von Lindemann<sup>10</sup> wykazał, że liczba  $\pi$  jest przestępna. Wynika stąd, że kwadratury koła nie można przeprowadzić za pomocą cyrkla linijki. Dowód przestępności  $\pi$  jest zbliżony do dowodu przestępności  $e$ , choć wymaga minimalnie głębszej wiedzy z algebra. Zainteresowany czytelnik odnajdzie go w książce Alana Bakera *Transcendental number theory*.<sup>11</sup>

**Uwaga 9.48.** W 1900 roku David Hilbert umieścił na swojej słynnej liście 23 problemów matematycznych (jako problem nr 7) pytanie o to, czy  $\alpha^\beta$  jest przestępna, gdy  $\alpha > 0$  jest liczbą algebraiczną, zaś  $\beta$  liczbą algebraiczną i niewymierną. Twierdzącą odpowiedź podali Gelfond i Schneider w 1934 roku.

#### 9.2.4 Wzór Taylora z resztą w postaci całkowej

W poprzednich podrozdziałach wykorzystaliśmy wzór na wielokrotne całkowanie przez części do dowodów niewymiarości  $\pi$  i przestępności  $e$ . Teraz wskażemy jeszcze jedno zastosowanie tego wzoru, bardzo przydatne (także do analizowania funkcji wielu zmiennych, z którymi Czytelnik wielokrotnie zetknie się w późniejszych swoich studiach).

<sup>10</sup>promotor prac doktorskich Davida Hilberta i Hermanna Minkowskiego

<sup>11</sup>Cambridge University Press, 1975 r.; dostępna w bibliotece MIM.

**Twierdzenie 9.49 (wzór Taylora z resztą całkową).** Niech  $g \in C^{k+1}([a, b])$ ,  $a < x < b$ . Wówczas

$$g(x) = g(a) + \sum_{j=1}^k \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t) dt. \quad (9.54)$$

Dowód. Ustalmy  $x \in (a, b)$ . Obliczymy całkę we wzorze (9.54), posługując się wzorem (9.44) z Lematu 9.43 na przedziale  $[a, x]$ . Niech  $N = k + 1$ ,  $f(t) = (x-t)^k/k!$ . Przy takich oznaczeniach

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t) dt &= \int_a^x f(t) g^{(N)} dt \\ &= \left( fg^{(N-1)} - f'g^{(N-2)} + \dots + (-1)^{N-1} f^{(N-1)} g \right) \Big|_a^x \\ &\quad + (-1)^N \int_a^x f^{(N)}(t) g(t) dx \\ &= \left( fg^{(N-1)} - f'g^{(N-2)} + \dots + (-1)^{N-1} f^{(N-1)} g \right) \Big|_a^x \end{aligned} \quad (9.55)$$

gdzie  $f^N \equiv 0$ , bowiem  $f$  jest wielomianem stopnia  $k < N = k + 1$ . Różniczkując  $f$ , otrzymujemy

$$f^{(j)}(t) = (-1)^j \frac{(x-t)^{k-j}}{(k-j)!}, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Dlatego dla  $0 \leq j < k = N - 1$  jest

$$(-1)^j f^{(j)} g^{(N-1-j)} \Big|_a^x = -\frac{(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} g^{(N-1-j)}(a) = -\frac{(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} g^{(k-j)}(a),$$

natomiast dla  $j = k = N - 1$  otrzymujemy  $f^{(k)} \equiv (-1)^k$  i

$$(-1)^j f^{(j)} g^{(N-1-j)} \Big|_a^x = g(x) - g(a)$$

Podstawiając te wyrażenia do wzoru (9.55), znajdujemy wartość ostatniej sumy i sprawdzamy, że

$$\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t) dt = g(x) - g(a) - \sum_{i=1}^k \frac{(x-a)^i}{i!} g^{(i)}(a)$$

(wygodnie jest zmienić indeks  $k - j$  na  $i$  i dopasować granice sumowania). Dowód jest zakończony.  $\square$

### 9.3 Całka Riemann'a

Omówimy teraz inne podejście do definicji całki oznaczonej. Z grubsza biorąc, chodzi o to, że definicję można oprzeć o geometryczną interpretację całki, omówioną przez nas wcześniej, przy okazji dowodu Twierdzenia 9.33. Takie podejście pozwala rozszerzyć klasę funkcji, dla których całka jest określona, o pewne funkcje nieciągłe. Dla funkcji ciągłych oba podejścia (całka Newtona, zdefiniowana jako przyrost funkcji pierwotnej, oraz całka

Riemanna) dają identyczny wynik. Definicja całki Newtona jest w teorii całki Riemanna twierdzeniem, natomiast o poprawności definicji całki Riemanna funkcji ciągłej przesądzają oszacowania sum całkowych, które poznaliśmy właśnie w Twierdzeniu 9.33.

Ustalmy przedział  $[a, b]$  osi rzeczywistej. Będziemy rozważać funkcje ograniczone (ale niekoniecznie ciągłe)  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definicja 9.50 (podział przedziału).** Podziałem  $P$  przedziału  $[a, b]$  nazwiemy każdy skończony ciąg punktów  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  taki, że

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b.$$

Piszemy  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Zbiór wszystkich podziałów odcinka  $[a, b]$  będziemy oznaczać literą  $\mathcal{P}$ . Będziemy też milcząco przyjmować, że napis  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  oznacza w tym podrozdziale ciąg *niemalejący*

**Definicja 9.51 (sumy całkowe Riemanna).** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ograniczoną, a  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$  – ustalonym podziałem  $[a, b]$ . Sumy

$$G(P, f) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i, \quad D(P, f) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i$$

nazywamy odpowiednio górną i dolną sumą Riemanna funkcji  $f$  dla podziału  $P$ .

Interpretacja geometryczna górnych i dolnych sum Riemanna funkcji ograniczonej, nieujemnej  $f$  jest dość oczywista: suma góarna jest sumą pól prostokątów, których podstawy są odcinkami podziału  $P$ , a wysokości dobrane zostały tak, żeby suma prostokątów przykryła (jak najdoszczędniej) cały zbiór  $Z = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}$  punktów pod wykresem  $f$ . Obliczając sumę dolną, dobieramy wysokości tak, aby jak najlepiej przybliżyć zbiór  $Z$  od wewnętrz.

**Definicja 9.52 (górna i dolna całka Riemanna).** Niech  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ograniczoną. Liczby

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} G(P, f), \quad \sup_{P \in \mathcal{P}} D(P, f)$$

nazywamy odpowiednio górną i dolną całką Riemanna funkcji  $f$  na odcinku  $[a, b]$ .

Zauważmy, że definicja jest poprawna: jeśli  $M = \sup |f|$ , to dla dowolnego podziału  $P \in \mathcal{P}$  jest

$$-M(b-a) \leq D(P, f) \leq G(P, f) \leq M(b-a),$$

gdyż na każdym odcinku podziału  $-M \leq f \leq M$ ; mnożąc tę nierówność przez  $\Delta x_i \geq 0$  i sumując, otrzymujemy oszacowanie sum dolnych i górnych. Wobec aksjomatu ciągłości, oba kresy, o których mowa w powyższej definicji, istnieją.

**Definicja 9.53 (funkcje całkowalne w sensie Riemanna).** Jeśli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ograniczona i

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} G(P, f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} D(P, f),$$

to mówimy, że  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna. Kładziemy wówczas

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{P \in \mathcal{P}} G(P, f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} D(P, f).$$

Zbiór wszystkich funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na przedziale  $[a, b]$  oznaczymy  $\mathcal{R}([a, b])$ .

Pytanie o to, które funkcje ograniczone są całkowalne w sensie Riemanna, jest dość subtelne. Zaczniemy od prostych przygotowań natury technicznej. Powiemy, że podział  $P_1$  jest *zagęszczeniem* podziału  $P$ , jeśli każdy punkt podziału  $P$  jest także punktem  $P_1$  (inaczej:  $P_1$  powstaje z  $P$  przez dorzucenie wielu punktów).

**Stwierdzenie 9.54.** *Jeśli  $P_1$  jest zagęszczeniem  $P$ , a  $f$  funkcją ograniczoną na  $[a, b]$ , to*

$$D(P, f) \leq D(P_1, f), \quad G(P_1, f) \leq G(P, f)$$

Inaczej mówiąc, zagęszczanie podziału zwiększa dolne sumy Riemanna i zmniejsza sumy górne. Dla kogoś, kto rozumie geometryczną interpretację sum całkowych, ten fakt powinien być praktycznie oczywisty.

Dowód. Dla porządku wykażemy pierwszą nierówność. Jeśli  $P_1$  powstaje z  $P$  przez dorzucenie jednego punktu  $y$  do odcinka  $[x_{s-1}, x_s]$ , to

$$m_1 := \inf_{[x_{s-1}, y]} f \geq \inf_{[x_{s-1}, x_s]} f =: m, \quad m_2 := \inf_{[y, x_s]} f \geq \inf_{[x_{s-1}, x_s]} f =: m,$$

gdyż kres dolny funkcji nie spada, gdy zawężamy jej dziedzinę. Sumy całkowe  $D(P, f)$  i  $D(P_1, f)$  różnią się tylko składnikami, odpowiadającymi podzbiorom odcinka  $[x_{s-1}, x_s]$ . Dlatego

$$\begin{aligned} D(P_1, f) - D(P, f) &= m_1(y - x_{s-1}) + m_2(x_s - y) - m(x_s - x_{s-1}) \\ &\geq m(y - x_{s-1} + x_s - y - (x_s - x_{s-1})) = 0. \end{aligned}$$

Jeśli  $P_1$  powstaje z  $P$  przez dorzucenie  $k$  punktów, to powyższe rozumowanie należy powtórzyć  $k$  razy. Dowód drugiej nierówności jest analogiczny.  $\square$

**Wniosek 9.55.** *Całka dolna Riemanna funkcji ograniczonej nie przekracza całki górnej tej funkcji.*

Dowód. Niech  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$  i niech  $P_3$  będzie zagęszczeniem zarówno  $P_1$ , jak i  $P_2$  – np. niech  $P_3$  składa się z punktów obu podziałów  $P_1$  i  $P_2$ . Z ostatniego stwierdzenia otrzymujemy

$$D(P_1, f) \leq D(P_3, f) \leq G(P_3, f) \leq G(P_2, f),$$

stąd zaś  $D(P_1, f) \leq G(P_2, f)$  dla wszystkich podziałów  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ . Biorąc najpierw – przy ustalonym  $P_1$  – kres dolny prawej strony względem  $P_2 \in \mathcal{P}$ , następnie zaś kres górny lewej strony względem  $P_1 \in \mathcal{P}$ , otrzymujemy tezę wniosku.  $\square$

**Wniosek 9.56.** *Funkcja ograniczona  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje podział  $P \in \mathcal{P}$  taki, że  $G(P, f) - D(P, f) < \varepsilon$ .*

Dowód. Niech  $I_g$  oznacza całkę górną, zaś  $I_d$  – całkę dolną funkcji  $f$ . Jeśli  $I_g = I_d$  i  $\varepsilon > 0$ , to wobec definicji kresu górnego i dolnego znajdziemy podziały  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$  takie, że

$$I_d - \frac{\varepsilon}{2} < D(P_1, f) \leq I_d = I_g \leq G(P_2, f) < I_g + \frac{\varepsilon}{2} = I_d + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech  $P_3$  będzie zagęszczeniem zarówno  $P_1$ , jak i  $P_2$ . Wtedy, wobec Stwierdzenia 9.54,

$$I_d - \frac{\varepsilon}{2} < D(P_1, f) \leq D(P_3, f) \leq G(P_3, f) \leq G(P_2, f) < I_d + \frac{\varepsilon}{2}$$

zatem liczby  $G(P_3, f) \geq D(P_3, f)$  należą do tego samego przedziału, krótszego niż  $\varepsilon$ . To kończy dowód implikacji  $\Rightarrow$ .

Implikacja  $\Leftarrow$  jest łatwiejsza: jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje podział  $P$ , dla którego sumy górna i dolna różnią się mniej, niż o  $\varepsilon$ , to wprost z definicji kresu górnego i dolnego

$$0 \leq I_g - I_d < \varepsilon$$

dla każdego  $\varepsilon > 0$ . Zatem  $I_d = I_g$ .  $\square$

**Twierdzenie 9.57.** *Każda funkcja  $f \in C([a, b])$  jest całkowalna w sensie Riemanna. Jej całka Riemanna i całka Newtona są równe.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że każda funkcja ciągła spełnia równoważny warunek całkowalności w sensie Riemanna, podany w poprzednim wniosku. To wynika wprost z Twierdzenia 9.33 i twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów: wobec ciągłości  $f$ , zarówno suma dolna, jak i suma górna dla dowolnego podziału  $P$  mają postać taką, jak sumy we wzorze (9.37). Jeśli więc  $\varepsilon > 0$  jest wybrane dowolnie, to — o ile tylko podział  $P$  jest dostatecznie drobny, patrz Twierdzenia 9.33 — obie sumy całkowe,  $D(P, f)$  i  $G(P, f)$ , spełniają warunek

$$|I_N - D(P, f)| < \varepsilon, \quad |I_N - G(P, f)| < \varepsilon, \quad (9.56)$$

stąd zaś  $G(P, f) - D(P, f) < 2\varepsilon$ , a więc na mocy poprzedniego wniosku  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Pozostaje wykazać równość obu całek  $f$ : Newtona i Riemanna. Oznaczmy je odpowiednio  $I_N$  i  $I_R$ . Jeśli  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$ , to znajdziemy  $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  takie, że

$$D(P, f) = \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta x_i, \quad G(P, f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

(korzystamy z faktu, że funkcja ciągła  $f$  osiąga swoje kresy na każdym odcinku domkniętym). Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z Twierdzenia 9.33 o aproksymacji całki sumami Riemanna wynika, że jeśli podział  $P$  jest odpowiednio drobny, to zachodzi warunek (9.56).

Zatem, trzy liczby  $I_N$ ,  $D(P, f)$  i  $G(P, f)$  spełniają nierówności

$$I_N - \varepsilon < D(P, f) \leq G(P, f) < I_N + \varepsilon$$

są wtedy w pewnym przedziale  $J$  krótszym niż  $2\varepsilon$ . Liczba  $I_R$  leży między  $D(P, f)$  i  $G(P, f)$  dla każdego  $P \in \mathcal{P}$ . Stąd, także  $I_R \in J$ .

Przeto,  $|I_N - I_R| < 2\varepsilon$ , a więc  $I_R = I_N$  wobec dowolności  $\varepsilon$ .  $\square$

**Twierdzenie 9.58.** *Jeśli  $f$  jest monotoniczna na  $[a, b]$ , to  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .*

Dowód. Wykażemy, że  $f$  spełnia warunek całkowalności z Wnioskiem 9.56. Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Dla ustalenia uwagi niech  $f$  będzie niemalejąca.<sup>12</sup> Wybierzmy podział  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$  odcinka  $[a, b]$  na  $n$  równych części. Wtedy  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = (b - a)/n$ . Ponieważ funkcja

<sup>12</sup>Dla funkcji nierosnących dowód jest w pełni analogiczny.

niemalejąca przyjmuje na każdym odcinku kres górny w prawym końcu tego odcinka, zaś kres dolny – w jego lewym końcu, więc dla podziału na równe części jest

$$0 \leq G(P, f) - D(P, f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} < \varepsilon,$$

jeśli  $n$  jest dostatecznie dużą liczbą.  $\square$

Z ostatniego twierdzenia wynika, że jest bardzo wiele funkcji nieciągłych, które są całkowalne w sensie Riemanna. Jeśli  $f = g - h$ , gdzie  $g$  i  $h$  są niemalejące, to  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Taka funkcja może mieć nieskończony (przeliczalny) zbiór punktów nieciągłości. Czytelnik łatwo skonstruuje konkretne przykłady takich funkcji.

Okazuje się, że zbiór funkcji całkowalnych w sensie Riemanna jest jeszcze bogatszy. Aby sformułować twierdzenie, które precyjnie wiąże całkowalność w sensie Riemanna z własnościami zbioru punktów nieciągłości danej funkcji, wprowadzimy najpierw jedno pojęcie.

**Definicja 9.59.** Powiemy, że  $Z \subset \mathbb{R}$  jest *zbiorem miary Lebesgue'a zero*, lub krótko: *zbiorem miary zero*, wtedy i tylko wtedy, gdy ma następującą własność: dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje przeliczalna rodzina  $\{I_j : j = 1, 2, \dots\}$  przedziałów otwartych  $I_j$  taka, że

$$Z \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon,$$

gdzie  $|I_j|$  oznacza długość przedziału  $I_j$ .

Każdy podzbiór zbioru miary zero też oczywiście jest zbiorem miary zero.

**Twierdzenie 9.60.** Założmy, że  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ograniczoną. Następujące warunki są wówczas równoważne:

- (i)  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ;
- (ii) Zbiór  $N(f)$  wszystkich punktów nieciągłości funkcji  $f$  jest zbiorem miary zero.

Nietrudno zauważyć, że zbiór Cantora  $K$ , tzn. zbiór zwarty  $K \subset [0, 1]$  opisany w Przykładzie 5.63, jest zbiorem miary zero. Istotnie,

$$K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j,$$

gdzie zbiory  $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K$  i  $K_j$  składa się z  $2^{j-1}$  odcinków długości  $3^{1-j}$ . Łączna długość odcinków wchodzących w skład  $K_j$  dąży więc do zera dla  $j \rightarrow \infty$  i dlatego  $K$  jest zbiorem miary zero. Zbiór Cantora jest nieprzeliczalny, a zatem zbiór miary zero może być nieprzeliczalny.

**Zadanie 9.61.** Skonstruować funkcję ograniczoną  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , która jest nieciągła we wszystkich punktach zbioru Cantora i ciągła poza tym zbiorem.

**Wskazówka.** Taka funkcja może być stała na każdym odcinku w uzupełnieniu zbioru Cantora. Określić  $f$  tak, aby (powiedzmy)  $f > 2/3$  na odcinkach usuwanych w kroku  $2j+1$  i  $f < 1/3$  na odcinkach usuwanych w kroku  $2j$ .

Wśród funkcji całkowalnych w sensie Riemanna są więc funkcje nieciągłe na pewnych zbiorach nieprzeliczalnych. Na drugim roku studiów Czytelnik zobaczy, że w wielu sytuacjach wygodniej jest posługiwać się jeszcze inną definicją całki, tak zwaną *całką Lebesgue'a*. W teorii tej całki twierdzenia o przejściu do granicy pod znakiem całki są znacznie wygodniejsze i mocniejsze. Naturalne uogólnienia wzoru na całkowanie przez części (obejmujące funkcje z nieciągłymi pochodnymi, a także funkcje ciągłe, które są w pewnych punktach nieróżniczkowalne), przydatne np. w teorii równań różniczkowych i jej konkretnych zastosowań, również wygodniej jest rozpatrywać w teorii całki Lebesgue'a.

Różnicę między całkami Newtona i Riemanna oraz całką Lebesgue'a można zobrazować poglądowo za pomocą następującej analogii. Przybliżając całkę Riemanna (a także nadając sens geometryczny całce Newtona), dodajemy pola kolejnych prostokątnych słupków, które mogą na przemian być wysokie i niskie. Gdy rozdrabniamy podział odcinka, wysokości słupków naśladują wszelkie wahania całkowanej funkcji. To tak, jakbyśmy obliczali sumę pieniędzy w portfelu, ułożyszywszy wiele banknotów w zupełnie przypadkowym porządku, mieszając nominały. Każdy wie jednak, że prościej jest ułożyć banknoty nominałami i dopiero wtedy liczyć pieniądze. Całka Lebesgue'a wykorzystuje właśnie takie podejście. Z grubsza biorąc, najpierw dzielimy dziedzinę funkcji na zbiory, na których funkcja przybiera z dobrym przybliżeniem mniej więcej tę samą wartość. Obliczamy ‘sumę pól słupków’, których podstawy mogą być dość dziwnymi zbiorami, a potem wykonujemy przejście graniczne. Dopecozowanie tej nieco mętnej intuicji, a także wyznaczenie bardzo szerokiej klasy funkcji, dla których takie podejście ma sens, wymaga jednak głębszego *wniknięcia w strukturę podzbiorów prostej rzeczywistej* (i ogólniej, przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ ).

Zaletą całek Newtona i Riemanna, które wystarczają do wielu praktycznych zastosowań rachunku całkowego, jest prostota definicji. W subtelniejszych zastosowaniach, a także w teorii, bardzo przydają się silne narzędzia z teorii całki Lebesgue'a, za które trzeba jednak zapłacić dłuższym szykowaniem pojęć tak zwanej *teorii miary*.

Warto, żeby Czytelnik o tej różnicy wiedział już teraz i pamiętał o niej w przyszłości.

## 9.4 Geometryczne zastosowania całki

Wiemy już, że dla funkcji  $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  ciągłej, albo ogólniej całkowalnej w sensie Riemanna, liczba  $\int_a^b f(x) dx$  jest polem obszaru  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Opiszemy w tym rozdziale kilka innych geometrycznych zastosowań całki, m.in. do obliczania długości krzywej, a także objętości i pól powierzchni brył obrotowych.

Nie będziemy precyzyjnie definiować objętości ani pola powierzchni brył w  $\mathbb{R}^3$ . Poprzeszliśmy na dość naturalnych intuicjach, a do tematu wróćmy podczas wykładów analizy matematycznej na drugim roku studiów. Wtedy omówimy go znacznie głębiej i ścisiej, nie ograniczając się tylko do brył obrotowych.

### 9.4.1 Długość krzywej

Będziemy rozpatrywać krzywe płaskie, będące wykresami funkcji jednej zmiennej  $y = f(x)$  na pewnym przedziale, a także krzywe opisane równaniami parametrycznymi,

$$\varphi : [a, b] \ni t \longmapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n. \quad (9.57)$$

Dla  $n = 2, 3$  są to krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni. Na przykład, obrazem przekształcenia  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$  jest okrąg jednostkowy na płaszczyźnie z kartezjańskim układem współrzędnych.

Będziemy na razie zakładać, że funkcja (9.57) jest różnicowalna, tzn. z geometrycznego punktu widzenia krzywa pozbawiona jest samoprzecięć. Dla prostoty, zajmiemy się szczegółowo przypadkiem  $n = 2$ . Przypadek  $n \geq 3$  jest w pełni analogiczny.

**Definicja 9.62.** Łamaną wpisaną w krzywą  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  nazwiemy sumę  $\ell$  odcinków o końcach  $(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ , zwanych wierzchołkami łamanej, gdzie  $i = 0, 1, \dots, n$ , zaś  $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  należy do zbioru  $\mathcal{P}$  wszystkich podziałów odcinka  $[a, b]$ .

Zbiór wszystkich łamanych wpisanych w daną krzywą będziemy oznaczać literą  $\mathcal{W}$ .

**Definicja 9.63.** Długością łamanej  $\ell \in \mathcal{W}$  o końcach  $(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ , gdzie  $i = 0, 1, \dots, n$  oraz  $P = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{P}$ , nazywamy liczbę

$$d(\ell) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})\right)^2 + \left(\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})\right)^2} \quad (9.58)$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że każdy składnik sumy (9.58) rzeczywiście jest długością odcinka, łączącego dwa sąsiednie wierzchołki łamanej.

**Definicja 9.64 (długość krzywej).** Niech  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Długością krzywej  $\varphi$  nazywamy kres gorny długości wszystkich łamanych wpisanych w tę krzywą, tzn. liczbę

$$d(\varphi) = \sup_{\ell \in \mathcal{W}} d(\ell), \quad (9.59)$$

Proszę zauważyć, że ta definicja jest zgodna z naturalną intuicją: odpowiednio gładką krzywą można z dobrą dokładnością zmierzyć linijką, przybliżającając długość krzywej długością łamanej o wielu wierzchołkach. Długość łamanej nie będzie większa od długości krzywej.

**Twierdzenie 9.65 (wzór na długość krzywej).** Założmy, że funkcja  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest różnicowalna i klasy  $C^1$ . Wtedy

$$d(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2} dt. \quad (9.60)$$

Twierdzenie wyraża jasną intuicję fizyczną: parametryzacja  $\varphi$  to opis sposobu, w jaki poruszamy się po danym torze ruchu, zaś  $\varphi'_1$  i  $\varphi'_2$  to składowe wektora prędkości. Liczba  $v(t) = \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2}$  jest długością wektora prędkości w chwili  $t$ , czyli chwilową szybkością ruchu. Dla fizyka iloczyn  $v(t) dt$  to przyrost drogi, uzyskany w czasie  $dt$ . Dla kogoś, kto tak myśli, wzór na długość krzywej to po prostu zależność między czasem, prędkością i drogą; ponieważ prędkość nie jest stała, więc dzielimy przedział czasu na mniejsze odcinki i przybliżamy całkę sumami Riemanna.

Podobnie jest w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Długość krzywej  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , gdzie  $\varphi_k \in C^1$  dla  $k = 1, 2, 3$ , określona jako kres gorny długości łamanych, wpisanych w tę krzywą, wynosi

$$d(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2 + \varphi'_3(t)^2} dt.$$

**Dowód.** *Krok 1. Oznaczenia i plan dowodu.* Wprowadźmy oznaczenia

$$v(t) = \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2}, \quad t \in [a, b], \quad I = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2} dt.$$

Wybierzmy dowolną łamana  $\ell \in W$ , odpowiadający jej podział  $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  odcinka  $[a, b]$ , oraz liczbę  $\varepsilon > 0$ . Z nierówności trójkąta wynika, że jeśli podział  $P_1$  powstaje z  $P$  przez zagęszczenie, to odpowiadająca mu łamana  $\ell_1$  ma długość  $d(\ell_1) \geq d(\ell)$ .

Wykażemy, że podział  $P_1$  można wybrać tak, aby uzyskać

$$d(\ell) \leq d(\ell_1) < I + \varepsilon, \quad |I - d(\ell_1)| < \varepsilon. \quad (9.61)$$

Następnie, przechodząc do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , otrzymamy  $d(\ell) \leq I$ , co wobec dowolności łamanej  $\ell$  oznacza

$$d(\varphi) = \sup_{\ell \in \mathcal{W}} d(\ell) \leq I.$$

Z drugiej nierówności (9.61) wynika jednak, że istnieją łamane  $\ell_1 \in \mathcal{W}$ , dla których liczba  $d(\ell_1)$  może znajdować się dowolnie blisko liczby  $I$ . Zatem nie może zachodzić ostra nierówność  $d(\varphi) < I$ ; musi zachodzić równość  $d(\varphi) = I$ . Pozostaje tylko wykazać (9.61).

*Krok 2. Nierówności (9.61).* Niech  $\eta > 0$ . Liczbę  $\eta$  dobierzemy do  $\varepsilon > 0$  później. Dokonując zagęszczenia podziału  $P$  i nie zmniejszając długości odpowiadającej mu łamanej, przyjmiemy odtąd, bez zmniejszenia ogólności, że  $P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ , gdzie

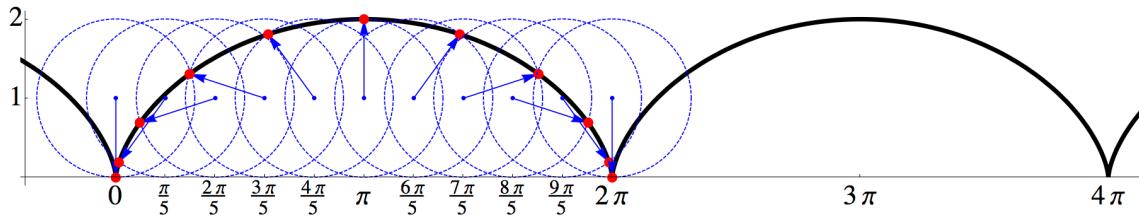
$$0 < \Delta t_i = t_i - t_{i-1} < \delta, \quad i = 1, \dots, n.$$

Liczbę  $\delta > 0$  dobierzemy za chwilę. Rozpatrzmy  $i$ -ty składnik we wzorze (9.58) na długość łamanej. Posługując się dwukrotnie twierdzeniem Lagrange'a o wartości średniej, dla funkcji  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})\right)^2 + \left(\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})\right)^2} \\ &= \Delta t_i \cdot \sqrt{\left(\frac{\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right)^2} \\ &= \Delta t_i \cdot \underbrace{\sqrt{\left(\varphi'_1(s_i)\right)^2 + \left(\varphi'_2(u_i)\right)^2}}_{= (\text{ozn.}) W(s_i, u_i)}, \quad \text{gdzie } t_{i-1} < s_i, u_i < t_i. \end{aligned}$$

Sprawdzimy teraz, że jeśli liczba  $\delta > 0$  jest dostatecznie mała, to  $|W(s, u) - v(s)| < \varepsilon$  dla wszystkich  $s, u \in [a, b]$  takich, że  $|s - u| < \delta$ . Jeśli  $W(s, u) = 0$ , to ów fakt łatwo wynika z ciągłości  $\varphi'_2$ . Jeśli  $W(s, u) \neq 0$ , to mamy

$$\begin{aligned} |W(s, u) - v(s)| &= \frac{|\varphi'_2(u)^2 - \varphi'_2(s)^2|}{W(s, u) + v(s)} \leq |\varphi'_2(u) - \varphi'_2(s)| \cdot \underbrace{\frac{|\varphi'_2(u)| + |\varphi'_2(s)|}{W(s, u)}}_{= (\text{ozn.}) \lambda} \\ &\leq |\varphi'_2(u) - \varphi'_2(s)| \cdot \sqrt{2} \quad (\text{gdyż wobec nier. Schwarza } \lambda \leq \sqrt{2}) \\ &< \eta \sqrt{2} \end{aligned}$$



Zbiór punktów  $\{(t - \sin t, 1 - \cos t) : t \in \mathbb{R}\}$  to cykloida. Zaznaczonych zostało 11 położień toczącego się okręgu (z ustalonym punktem na obwodzie i promieniem o końcu w tym punkcie), odpowiadających równym odstępom czasu  $\pi/5$ . Widać, że punkt toczącego się okręgu nie przemieszcza się wcale po cykloidzie ze stałą szybkością. To jasne:

$$v(t) = \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos t}, \quad \inf v = 0, \quad \sup v = 2.$$

o ile, korzystając z jednostajnej ciągłości  $\varphi'_2$  na  $[a, b]$ , dobierzemy  $\delta > 0$  tak, aby  $|\varphi'_2(s) - \varphi'_2(u)| < \eta$  dla wszystkich  $|s - u| < \delta$ . Rozważmy teraz dwie sumy,

$$d(\ell) = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot W(s_i, u_i), \quad S = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot v(s_i)$$

Z Twierdzenia 9.33 o aproksymacji całki  $I = \int_a^b v(s) ds$  sumami Riemanna wynika, że  $|I - S| < \varepsilon/2$ , gdy  $\delta > 0$  jest dostatecznie małe. Natomiast

$$|S - d(\ell)| \leq \sum_{i=1}^n \Delta t_i |W(s_i, u_i) - v(s_i)| < \eta \sqrt{2} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \eta \sqrt{2}(b - a) < \varepsilon/2$$

np. dla  $\eta = \varepsilon/(4(b - a))$ . Z nierówności trójkąta,  $|I - d(\ell)| < \varepsilon$ . Dowód jest zakończony.  $\square$

**Uwaga 9.66.** Kluczowej technicznej trudności w dowodzie dostarczało to, że stosując twierdzenie Lagrange'a do wyrażenia wzoru na długość łamanej za pomocą pochodnych, uzyskiwaliśmy wartości pochodnych  $\varphi'_1$  i  $\varphi'_2$  w różnych punktach  $s_i, u_i$  każdego odcinka podziału. Dlatego potrzebny był fragment z szacowaniem różnicy  $W(s, u)$  i  $v(s)$ .

**Wniosek 9.67.** Jeśli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją klasy  $C^1$ , to długość wykresu tej funkcji jest równa całce

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Dowód. Stosujemy twierdzenie do funkcji  $\varphi_1(x) = x$  i  $\varphi_2 = f$ .  $\square^{13}$

**Uwaga 9.68.** Warto zauważyć, że powyższe twierdzenie stosuje się także do takich krzywych, dla których obraz  $\varphi([a, b])$  odcinka  $[a, b]$  nie jest wykresem funkcji klasy  $C^1$ , tylko ma "dziobki". Przykład: biorąc

$$\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R},$$

otrzymujemy cykloidę, krzywą, jaką zakreśla ustalony punkt okręgu jednostkowego, toczącego się po linii prostej bez poślizgu i ze stałą prędkością. Pochodne parametryzacji

<sup>13</sup>Zainteresowany teorią Czytelnik zechce udowodnić ten wniosek bezpośrednio. Dowód jest prostszy, niż dowód Twierdzenia 9.65.

to  $\varphi'_1(t) = 1 - \cos t$  i  $\varphi'_2(t) = \sin t$ . W punktach  $t = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tzn. tam, gdzie  $\cos t = 1$ , stosunek  $\varphi'_2/\varphi'_1$  ma granicę lewostronną równą  $-\infty$ , a prawostronną równą  $+\infty$  (proszę spojrzeć na znak sinusa). Dlatego w tych punktach cykloida ma “dziobki.”

**Przykład 9.69 (długość okręgu).** Obliczymy długość okręgu jednostkowego, tzn. krzywej  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Mamy

$$v(t) = \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1; \quad \text{zatem} \quad d(\varphi) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Można zrobić to samo inaczej. Ćwiartka okręgu to wykres funkcji  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , gdzie  $x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ . Mamy

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(i teraz jest jasne, dlaczego wybraliśmy akurat taki przedział: na  $[0, 1]$  otrzymany wzór nie określa funkcji ciągiej, z uwagi na zero mianownika w jedynce). Dlatego

$$\frac{1}{4}d(\varphi) = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

**Przykład 9.70 (długość jednego łuku cykloidy).** Obliczymy długość jednego łuku cykloidy. Niech  $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  dla  $t \in [0, 2\pi]$ . Wtedy

$$v(t) = \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2} = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\sin \frac{t}{2}, \quad 0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi.$$

(Posłużyliśmy się jedynką trygonometryczną i wzorem  $\cos t = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$ .) Dlatego

$$d(\varphi) = \int_0^{2\pi} v(t) dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4\cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8.$$

Co ciekawe, wynik jest liczbą wymierną. Długość łuku cykloidy znali Gilles de Roberval i Christopher Wren w XVII wieku.

#### 9.4.2 Objętość bryły obrotowej. Pole powierzchni obrotowej

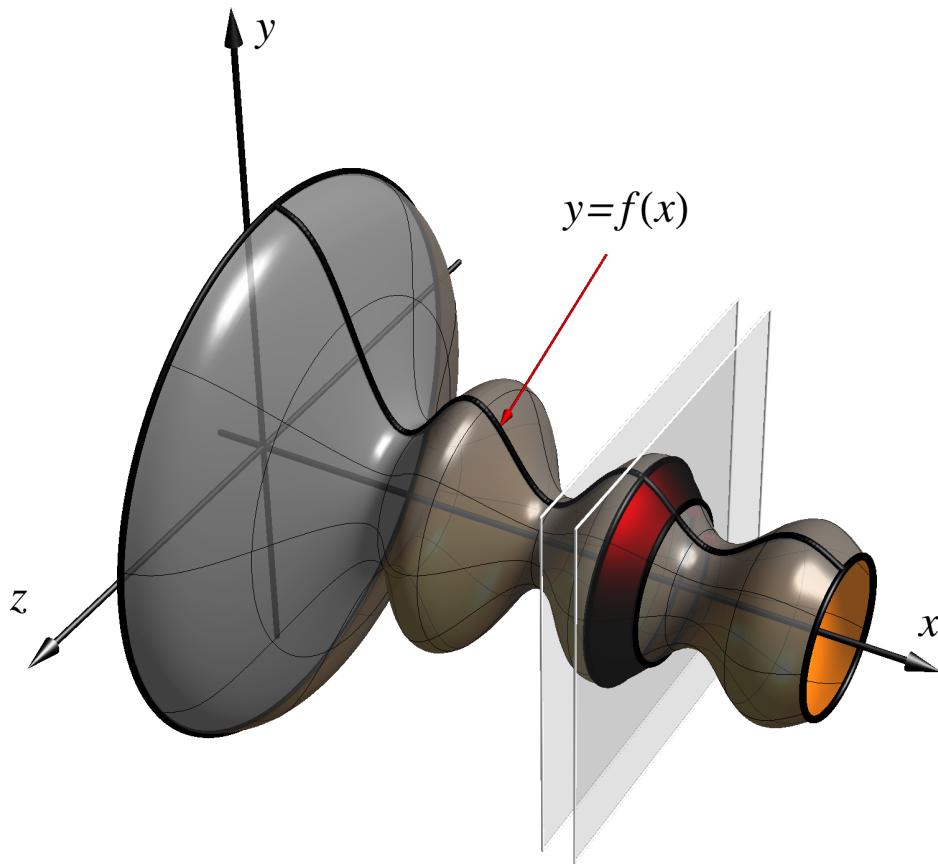
Założymy, że funkcja  $f: \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  jest klasy  $C^1$ . Obracając wykres  $f$  wokół osi  $x$ -ów, otrzymujemy powierzchnię obrotową (patrz rysunek). Powiemy, nie wnikając nadmiernie w kłopotliwe szczegóły techniczne, związane z formalnym definiowaniem objętości i pola powierzchni, jak znaleźć objętość bryły, ograniczonej w  $\mathbb{R}^3$  powstałą powierzchnią oraz dwiema płaszczyznami  $x = a$ ,  $x = b$ , a także pole powierzchni bocznej tej bryły.

**Objętość  $V$  takiej bryły** wyraża się całką

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \tag{9.62}$$

Z intuicyjnego punktu widzenia jest to dość jasne. Dzieląc odcinek  $[a, b]$  na  $n$  równych części punktami  $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  i prowadząc płaszczyznę  $x = x_k$  prostopadle do osi  $x$ -ów, potniemy bryłę na plasty. Składnik

$$\pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x_i$$



Obracając położony w płaszczyźnie  $(x, y)$  wykres funkcji  $y = f(x)$  (klasy  $C^1$ ) wokół osi  $x$  w  $\mathbb{R}^3$ , otrzymujemy pewną powierzchnię obrotową. Bliskie, równoległe płaszczyzny  $x = x_{i-1}$  i  $x = x_i$  wycinają z tej powierzchni część, która jest bardzo bliska powierzchni bocznej stożka ściętego o promieniach podstawy  $r_1 = f(x_{i-1})$ ,  $r_2 = f(x_i)$  i wysokości  $h = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

wyraża objętość walca o promieniu podstawy  $f(x_i)^2$  i wysokości  $\Delta x_i$ . Suma objętości takich walców, czyli suma Riemanna całki  $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$ , tym lepiej przybliża całkę – a więc objętość bryły – im gęściej prowadzimy płaszczyzny cięć.<sup>14</sup>

**Przykład 9.71 (objętość kuli).** Niech  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  dla  $x \in [-1, 1]$ . Wykres  $f$  jest połówką okręgu; obróciwszy go, otrzymujemy powierzchnię kuli jednostkowej. Objętość tej kuli jest równa

$$V = \pi \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \pi \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Objętość kuli o promieniu  $r$  wynosi  $4\pi r^3/3$ , gdyż objętość brył podobnych jest równa sześcianowi skali podobieństwa.

---

<sup>14</sup>Czytelnik powinien zdawać sobie sprawę, że to intuicja dobra i naturalna, ale jednak nie do końca ścisła, z dwóch powodów. Po pierwsze, nie powiedzieliśmy, czym jest objętość. Po drugie, szkolny wzór na objętość walca, będący uogólnieniem wzoru na objętość graniastosłupa, przyjęliśmy tu “na wiarę”.

**Pole  $A$  powierzchni bocznej takiej bryły** wyraża się całką

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (9.63)$$

Aby to zrozumieć, zauważmy, że dwie bardzo bliskie płaszczyzny  $x = x_i$  i  $x = x_{i-1}$  wyciąną z takiej powierzchni obrotowej fragment, który w bardzo dobrym przybliżeniu jest powierzchnią boczną stożka ściętego o promieniach o promieniach podstaw  $r_1 = f(x_{i-1})$ ,  $r_2 = f(x_i)$  i wysokości  $h = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  (patrz rysunek). Jak widzieliśmy, obliczając długość krzywej, tworzącą takiego stożka ma długość równą, z bardzo dobrym przybliżeniem,  $\Delta x_i \cdot \sqrt{1 + f'(x_i)^2}$ . Dlatego pole powierzchni bocznej takiego stożka ściętego wynosi, z zaniedbywalnym w granicy  $\Delta x_i \rightarrow 0$  błędem, tyle, co pole prostokątnego paska o bokach  $2\pi f(x_i)$  (obwód okręgu) i  $\Delta x_i \cdot \sqrt{1 + f'(x_i)^2}$ , a więc

$$2\pi f(x_i) \cdot \Delta x_i \cdot \sqrt{1 + f'(x_i)^2}.$$

Sumując i przechodząc do granicy, otrzymujemy całkę (9.63).

**Przykład 9.72 (Pole powierzchni sfery).** Jak wcześniej, niech  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  dla  $x \in [-1, 1]$ . Wtedy

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} = 2\pi \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\pi$$

jest po prostu funkcją stałą. Wynikają stąd dwa wnioski. Po pierwsze, pole powierzchni sfery jednostkowej w  $\mathbb{R}^3$  jest równe

$$A = 2\pi \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 1 dx = 4\pi.$$

Zatem, pole sfery jest równe polu powierzchni bocznej opisanego na niej walca.

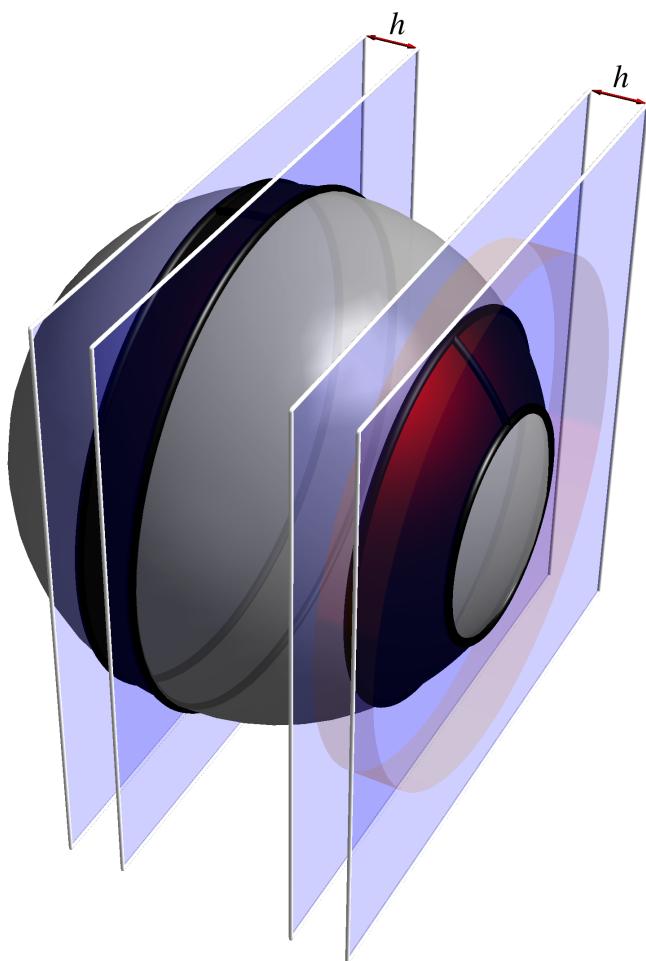
Po drugie, zauważmy, że obracając łuk okręgu, krzywą  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  dla  $x \in [a, b]$ , gdzie  $-1 \leq a < b \leq 1$ , otrzymujemy fragment, wycięty ze sfery dwiema równoległymi płaszczyznami  $x = a$  i  $x = b$ . Pole powierzchni tego fragmentu,

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_a^b 1 dx = 2\pi(b - a),$$

zależy tylko od różnicy  $b - a$ , nie zaś od liczb  $a$  i  $b$  z osobna.

Wiedział to wszystko już Archimedes ponad 2200 lat temu. Doszedł do tego wniosku bez użycia rachunku całkowego we współczesnej postaci, wykonując jednak *de facto* pewne przejście graniczne i stosując metodę, nazywaną *całkowaniem starożytnych* lub *metodą wyczerpywania*. (Czytelnik może dowiedzieć się więcej o tej metodzie, czytając np. *Wykłady z historii matematyki* Marka Kordosa).

Stosowanie tej metody wymagało **znacznie** większej pomysłowości, niż proste i mechaniczne obliczenie konkretnych całek, którymi posłużyliśmy się w tym podrozdziale, żeby wyznaczyć objętość kuli oraz pole sfery. (Aby zrozumieć sens tego zdania, proszę obliczyć pole figury, ograniczonej prostą i łukiem paraboli, nie posługując się naszą dziesiątą notacją i pojęciem całki. Można rozpatrzać sumy Riemanna wprost, ale to nie jest szczególnie wygodne.)



Wspomniana własność sfery (patrz też rysunek obok) nazywana bywa czasem **twierdzeniem Archimedesa**:

*Pole powierzchni obręczy, którą wycięto ze sfery o promieniu  $r$  dwiema równoległymi płaszczyznami, zależy tylko od odstępu  $h$  tych płaszczyzn i jest równe  $2\pi rh$ .*

Na rysunku oba ciemne fragmenty sfery, a także jaśniejsza, półprzezroczysta obrączka, wycięta przez dwie płaszczyzny z powierzchni bocznej opisanego na sferze walca, mają równe pola.

Jedno ze znanych, nietypowych zastosowań twierdzenia Archimedesa to krótki dowód następującego twierdzenia: jeśli koło o średnicy 1 jest pokryte za pomocą pewnej liczby pasów o szerokości  $1/N$  każdy, to liczba pasów wynosi przynajmniej  $N$ . (Zamiast zajmować się kołem, wystarczy spojrzeć na półsfére nad nim: nad każdym z płaskich pasków leży połówka obręczy, mająca – niezależnie od tego, gdzie jest ów pasek – pole  $\pi/2N$ , równe  $\frac{1}{N}$ -tej poli półsfery.)

# Dodatki do rozdziału 9

## 9.A Charakteryzacja całkowalności w sensie Riemanna

W tym podrozdziale udowodnimy Twierdzenie 9.60, mówiące, że funkcja ograniczona  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości jest miary zero.

Zacznijmy od łatwego spostrzeżenia: *suma przeliczalnie wielu zbiorów miary zero jest zbiorem miary zero*. Istotnie, jeśli  $|Z_j| = 0$  dla  $j = 1, 2, \dots$  i  $\varepsilon > 0$ , to dla każdego  $j = 1, 2, \dots$  znajdziemy przedziały  $I_{jk}$  takie, że

$$Z_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_{jk}| < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Rodzina wszystkich przedziałów  $I_{jk}$ , gdzie  $j, k = 1, 2, \dots$ , jest przeliczalna, gdyż suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna. Suma długości wszystkich tych odcinków jest mniejsza niż

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^j} + \dots = \varepsilon.$$

Ponieważ  $Z = \bigcup_j Z_j \subset \bigcup_{j,k} I_{jk}$ , więc wprost z definicji  $Z$  jest zbiorem miary zero.

**Dowód.** *Krok 1.* Zacznijmy od wprowadzenia oznaczeń. Niech  $I = [a, b]$ . Dla funkcji ograniczonej  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  i niepustego  $M \subset I$  położmy

$$\text{osc}(f, M) = \sup_M f - \inf_M f$$

oznacza *wahanie* funkcji  $f$  na  $M$ . Dla ustalonego  $x \in M$  funkcja

$$0 < r \mapsto \text{osc}(f, M \cap (x - r, x + r)) \in \mathbb{R}$$

jest niemalejąca, a więc ma granice jednostronne. Położymy

$$\sigma(f, M, x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \text{osc}(f, M \cap (x - r, x + r));$$

wobec monotoniczności wahania i ograniczoności  $f$  mamy  $\sigma(f, M, x) \leq \text{osc}(f, M) \leq 2 \sup |f|$  dla każdego  $x \in M \subset I$  i każdej funkcji ograniczonej  $f$ .

Niech  $\varepsilon > 0$ . Łatwo udowodnić, że zbiór  $Z_\varepsilon(f) = \{x \in I: \sigma(f, I, x) \geq \varepsilon\}$  jest zwarty.<sup>15</sup> Zbiór  $N(f)$  punktów nieciągłości funkcji  $f$  to, wobec definicji ciągłości,

$$N(f) = \{x \in I: \text{dla pewnego } \varepsilon > 0 \text{ jest } \sigma(f, I, x) \geq \varepsilon\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_{1/k}(f). \quad (9.64)$$

---

<sup>15</sup>  $Z_\varepsilon(f)$  jest ograniczony jako podzbiór odcinka  $I$ ; jeśli dla ciągu  $x_k \rightarrow x$  mamy  $\sigma(f, I, x_k) \geq \varepsilon$ , to graniczny punkt  $x$  jest środkiem dowolnie małych przedziałów, na których  $\text{osc}(f, I \cap (x - r, x + r)) \geq \varepsilon$ , a stąd wynika, że granica zbieżnego ciągu punktów zbioru  $Z_\varepsilon(f)$  sama też należy do  $Z_\varepsilon(f)$ .

Stąd i z faktu, że suma przeliczalnie wielu zbiorów miary zero wynika natychmiast następujący wniosek:

*Zbiór  $N(f)$  jest miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  zbiór  $Z_{1/k}(f)$  jest miary zero.*

*Krok 2.* Najpierw udowodnimy, że jeśli  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , to każdy ze zbiorów  $Z_{1/k}(f)$  jest miary zero. Ustalmy  $k \in \mathbb{N}$  i liczbę  $\varepsilon > 0$ .

Wobec kryterium całkowalności z Wniosku 9.56, istnieje podział  $P$  odcinka  $I$  taki, że

$$0 \leq G(P, f) - D(P, f) < \frac{\varepsilon}{2k} \quad (9.65)$$

Przyjmijmy, że  $P$  składa się z punktów  $x_0, x_1, \dots, x_N$ . Niech

$$A = \{s \in \mathbb{N}: 1 \leq s \leq N, (x_{s-1}, x_s) \cap Z_{1/k} \neq \emptyset\}$$

będzie zbiorem tych numerów  $s$ , dla których wnętrza kolejnych odcinków podziału  $P$  zawierają jakieś punkty zbioru  $Z_{1/k}$ . Oczywiście,

$$Z_{1/k}(f) \subset \bigcup_{s \in A} (x_{s-1}, x_s) \cup \{x_0, x_1, \dots, x_N\}. \quad (9.66)$$

Jeśli punkt  $x \in (x_{s-1}, x_s) \cap Z_{1/k}$ , to

$$\frac{1}{k} \leq \sigma(f, I, x) = \sigma(f, (x_{s-1}, x_s), x) \leq \text{osc } (f, [x_{s-1}, x_s]). \quad (9.67)$$

Z warunków (9.65) i (9.67) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{s \in A} (x_s - x_{s-1}) &\leq \sum_{s \in A} \sigma(f, I, x)(x_s - x_{s-1}) \\ &\leq \sum_{s \in A} \text{osc } (f, [x_{s-1}, x_s]) \cdot (x_s - x_{s-1}) \leq G(P, f) - D(P, f) < \frac{\varepsilon}{2k}, \end{aligned}$$

stąd zaś  $\sum_{s \in A} (x_s - x_{s-1}) < \varepsilon/2$ . Dorzucając do rodziny odcinków  $\{(x_{s-1}, x_s): s \in A\}$  pokrycie zbioru skończonego  $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  dostatecznie małymi odcinkami otwartymi (np. o długościach  $\varepsilon/4(N+1)$  i środkach  $x_j$ ), otrzymujemy wobec (9.66) pokrycie całego zbioru  $Z_{1/k}$  skońzoną rodziną odcinków otwartych o sumie długości  $< \varepsilon$ .

Z dowolnością  $\varepsilon$  i  $k \in \mathbb{N}$  wynika, że każdy ze zbiorów  $Z_{1/k}(f)$  jest miary zero, a więc także  $N(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_{1/k}(f)$  jest miary zero. To kończy dowód pierwszej z implikacji w Twierdzeniu 9.60.

*Krok 3.* Założymy teraz, że  $|N(f)| = 0$  i  $f$  jest ograniczona na  $I = [a, b]$ . Niech  $K = \sup |f|$ . Wykażemy, że  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . W tym celu sprawdzimy, że zachodzi warunek całkowalności z Wniosku 9.56. Ustalmy liczbę  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Skonstruujemy odpowiedni podział, składający się z dwóch rodzajów odcinków: *dobrych*, na których wahanie  $f$  jest małe, oraz *zły*, na których wahanie  $f$  można kontrolować tylko brutalnie, przez  $2|f|$ . Dzięki założeniu  $|N(f)| = 0$  okaże się jednak, że suma długości złych odcinków jest mała, co pozwoli zakończyć dowód.

Przejjdźmy do szczegółów.

Ponieważ  $Z_{\varepsilon_1}(f) \subset Z_{\varepsilon_2}(f)$  dla  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ , więc z opisu (9.64) zbioru punktów nieciągłości wynika, że  $|Z_\varepsilon(f)| = 0$ . Dlatego zbiór  $Z_\varepsilon(f)$  – jako zbiór zwarty! – można pokryć skończenie wieloma odcinkami otwartymi, powiedzmy  $J_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , które są parami rozłączne, mają parami różne końce i sumę długości mniejszą niż  $\varepsilon$ .

Końce odcinków  $J_\alpha$  oraz punkty  $a = x_0, b = x_N$  tworzą pewien podział  $P = (x_0, x_1, \dots, x_N)$  całego odcinka  $I$ .

Poza sumą odcinków  $J_\alpha = (x_{\alpha-1}, x_\alpha)$  jest  $\sigma(f, I, x) < \varepsilon$ . Dlatego, rozdrabniając w razie potrzeby te odcinki  $P$ , które są różne od  $J_\alpha$ , możemy bez przeszkód założyć dodatkowo,<sup>16</sup> że cały podział  $P$  składa się z dwóch rozłącznych podrodzin odcinków:

- Pierwsza z nich to *złe odcinki*,  $J_\alpha$  dla  $\alpha \in A$ . Suma długości tych odcinków jest mniejsza od  $\varepsilon$ , a suma ich wewnętrz pokrywa zbiór  $Z_\varepsilon(f)$ .
- Druga z nich to *dobre odcinki*,  $J_\beta$  dla  $\beta \in B$ ; te odcinki mają własność

$$\text{osc } (f, [x_{\beta-1}, x_\beta]) < \varepsilon \quad \text{dla każdego } \beta \in B = \{1, 2, \dots, N\} \setminus A.$$

Oszacujmy teraz  $G(P, f) - D(P, f)$ . Mamy

$$\begin{aligned} G(P, f) - D(P, f) &= \sum_{\alpha \in A} \text{osc } (f, [x_{\alpha-1}, x_\alpha]) |J_\alpha| + \sum_{\beta \in B} \text{osc } (f, [x_{\beta-1}, x_\beta]) |J_\beta| \\ &< 2 \sup_{\alpha \in A} |f| \sum_{\alpha \in A} |J_\alpha| + \varepsilon \sum_{\beta \in B} |J_\beta| \\ &< \varepsilon (2 \sup |f| + |b - a|). \end{aligned}$$

Oczywiście,  $\varepsilon (2 \sup |f| + |b - a|)$  jest równie dobrą ‘dowolnie małą liczbą dodatnią’, jak  $\varepsilon$ , więc warunek całkowalności z Wniosku 9.56 jest spełniony.

To kończy dowód całego Twierdzenia 9.60. □

---

<sup>16</sup>Aby to ściśle uzasadnić, można skorzystać ze zwartości zbioru  $S = I \setminus \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$ ; wobec doboru  $J_\alpha$  każdy punkt  $S$  jest środkiem pewnego odcinka otwartego, na którym  $f$  ma wahanie mniejsze niż  $\varepsilon$ , a więc istnieje skończone pokrycie  $S$  złożone z takich odcinków.

## Rozdział 10

# Całki niewłaściwe. Funkcje $\Gamma$ i $B$ Eulera oraz ich zastosowania

W tym rozdziale omówimy pojęcie całki niewłaściwej. Zajmiemy się też dwoma bardzo ważnymi konkretnymi typami takich całek: funkcjami  $\Gamma$  (gamma) i  $B$  (beta) Eulera, które stanowią, odpowiednio, naturalne uogólnienie silni oraz współczynników dwumianowych Newtona na wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie.

### 10.1 Całka niewłaściwa

**Definicja 10.1 (całka niewłaściwa na przedziale nieskończonym).** Założmy, że funkcja  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła. Jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) dx, \quad (10.1)$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji  $f$  na przedziale  $[a, \infty)$  (albo: od  $a$  do nieskończoności) i oznaczamy

$$\int_a^\infty f(x) dx.$$

Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa  $f$  na  $[a, \infty)$  jest *zbieżna*. Jeśli granica (10.1) nie istnieje, to mówimy, że całka  $\int_a^\infty f(x) dx$  jest *rozbieżna*.

Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą funkcji  $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , a także całkę niewłaściwą takiej funkcji  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (odpowiednio,  $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ), która dla każdego  $a < b < \infty$  (odpowiednio, każdego  $-\infty < b < a$ ) jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale domkniętym o końcach  $a, b$ .

Spójrzmy na proste przykłady.

**Przykład 10.2.** Niech  $f(x) = e^{-x}$  dla  $x \in [0, \infty)$ . Dla dowolnej liczby  $y > 0$  jest

$$\int_0^y e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^y = 1 - e^{-y}.$$

Ponadto,  $1 - e^{-y} \rightarrow 1$  dla  $y \rightarrow +\infty$ . Dlatego

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

**Przykład 10.3.** Niech  $f(x) = 1/x^s$ ,  $x \geq 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Wówczas

$$\int_1^y f(x) dx = \int_1^y \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \ln x \Big|_1^y = \ln y & \text{dla } s = 1, \\ \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_1^y = \frac{y^{1-s} - 1}{1-s} & \text{dla } s \neq 1. \end{cases}$$

Jeśli  $s = 1$ , to granica całek  $\int_1^y f(x) dx$  przy  $y \rightarrow \infty$  jest nieskończona, gdyż  $\ln y \rightarrow \infty$  dla  $y \rightarrow \infty$ . Całka niewłaściwa  $\int_1^\infty (1/x) dx$  jest zatem rozbieżna.

Jeśli  $s \neq 1$ , to granica całek  $\int_1^y f(x) dx$  przy  $y \rightarrow \infty$  jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja potęgowa  $y^{1-s}$  ma granicę skońzoną dla  $y \rightarrow \infty$ , a więc wtedy i tylko wtedy, gdy wykładnik  $1 - s < 0$ . Dla takich  $s$  mamy

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{1-s} - 1}{1-s} = \frac{1}{s-1} \quad (s > 1).$$

Dla wszystkich pozostałych  $s \in \mathbb{R}$  całka  $\int_1^\infty x^{-s} dx$  jest rozbieżna.

**Przykład 10.4.** Niech  $f(x) = 1/(1+x^2)$ ,  $x \geq 0$ . Dla każdego  $y > 0$  jest

$$\int_0^y f(x) dx = \int_0^y \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^y = \arctg y.$$

Dlatego

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \arctg y = \frac{\pi}{2}.$$

Z uwagi na parzystość funkcji podcałkowej, mamy także

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-\arctg y) = \frac{\pi}{2}$$

Zatem,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

**Uwaga 10.5.** Jeśli istnieje całka  $\int_a^\infty f(x) dx$ , to dla każdego  $b > a$  istnieje  $\int_b^\infty f(x) dx$  i zachodzi równość

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^\infty f(x) dx. \quad (10.2)$$

Istotnie, dla każdego  $y > b$  mamy przecież

$$\int_a^y f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^y f(x) dx.$$

Dlatego lewa strona ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy prawa strona ma granicę. Zachodzi też równość tych granic, czyli równość (10.2).

**Twierdzenie 10.6 (warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych).** Całka niewłaściwa  $\int_a^\infty f(x) dx$  jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek Cauchy'ego dla całek: dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $M > a$ , że dla wszystkich  $y_2 > y_1 > M$  zachodzi nierówność

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Dowód. Jeśli  $\int_a^\infty f(x) dx$  jest zbieżna, tzn. istnieje granica

$$g = \lim_{y \rightarrow \infty} I(y), \quad \text{gdzie} \quad I(y) = \int_a^y f(x) dx,$$

to zgodnie z definicją (Cauchy'ego) granicy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $M > 0$ , że dla wszystkich  $y > M$  jest  $|I(y) - g| < \varepsilon/2$ . Zatem, dla  $y_2 > y_1 > M$  jest

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| = |I(y_2) - I(y_1)| \leq |I(y_2) - g| + |g - I(y_1)| < \varepsilon.$$

Na odwrót, założymy, że zachodzi warunek podany w twierdzeniu. Niech  $(a_m) \subset [a, \infty)$  będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do nieskończoności. Warunek Cauchy'ego dla całek jest po prostu warunkiem Cauchy'ego dla ciągu liczbowego  $I(a_m)$ . Zatem, istnieje granica tego ciągu, pewna liczba  $g = \lim I(a_m) \in \mathbb{R}$ .

Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Dobierzmy do  $\varepsilon/2$  liczbę  $M > a$  tak, aby warunek Cauchy'ego dla całek zachodził dla wszystkich  $y_2 > y_1 > M$  z liczbą  $\varepsilon/2$  zamiast  $\varepsilon$  po prawej stronie nierówności. Niech  $y > M$ . Wybierzmy  $m \in \mathbb{N}$  tak, aby  $a_m > y$  oraz  $|I(a_m) - g| < \varepsilon/2$ . Wówczas,

$$|I(y) - g| = \left| I(a_m) - \int_y^{a_m} f(x) dx - g \right| \leq |I(a_m) - g| + \left| \int_y^{a_m} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zatem, wprost z definicji granicy  $I(y) \rightarrow g$  dla  $y \rightarrow \infty$ .  $\square$

Zajmiemy się teraz nieco bliżej związkiem całek niewłaściwych z szeregami.

**Definicja 10.7 (całkowalność bezwzględna i całkowalność warunkowa).** Niech  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Mówimy, że całka  $\int_a^\infty f(x) dx$  jest *zbieżna bezwzględnie*, a funkcja  $f$  jest *bezwzględnie całkowalna na  $[a, \infty)$* , wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka

$$\int_a^\infty |f(y)| dy.$$

Jeśli całka  $\int_a^\infty f(x) dx$  jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie, to mówimy, że jest zbieżna *warunkowo*. Mówimy wtedy, że  $f$  jest *warunkowo całkowalna na  $[a, \infty)$* .

**Wniosek 10.8.** Jeśli  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest bezwzględnie całkowalna na  $[a, \infty)$ , to całka  $\int_a^\infty f(x) dx$  jest zbieżna.

Dowód. Stosujemy kryterium całkowalności z Twierdzenia 10.6 i nierówność trójkąta dla całek,

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| < \int_{y_1}^{y_2} |f(x)| dx.$$

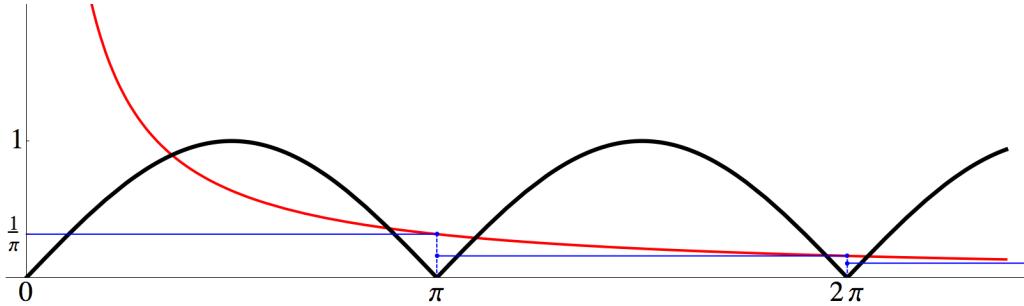
Jeśli całki z prawej strony nierówności są (dowolnie) małe dla wszystkich  $y_2 > y_1$  dostatecznie dużych, to i całki z lewej strony są (dowolnie) małe dla wszystkich  $y_2 > y_1$  dostatecznie dużych.  $\square$

Jest więc podobnie, jak dla szeregów: *bezwzględna zbieżność* implikuje zwykłą zbieżność. Nie musi być odwrotnie: spójrzmy na klasyczny przykład.

**Przykład 10.9.** Niech  $f(x) = x^{-1} \sin x$  dla  $x > 0$  i  $f(0) = 1$ . Wtedy funkcja  $f$  jest ciągła na  $[0, \infty)$ , gdyż  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$  dla  $x \rightarrow 0$ . Wykażemy, że całka niewłaściwa funkcji  $f$ , tzw. całka Dirichleta

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (10.3)$$

jest zbieżna tylko warunkowo, tzn. zbieżna, ale nie bezwzględnie zbieżna.



Na przedziale  $(k\pi, (k+1)\pi)$  jest  $1/x > 1/((k+1)\pi)$ .

Zacznijmy od rozbieżności całki niewłaściwej z funkcji  $|f(x)| = |\sin x|/x$ . Niech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Mamy

$$\frac{|\sin x|}{x} > \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} \quad \text{dla } x \in (k\pi, (k+1)\pi)$$

i dlatego

$$\begin{aligned} \int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j} \\ &\longrightarrow +\infty \quad \text{dla } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gdzie szereg harmoniczny  $\sum \frac{1}{n}$  jest rozbieżny. Zatem całka  $\int_0^\infty |\sin x| dx$  jest rozbieżna.

Oznaczmy teraz

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Aby wykazać zbieżność całki Dirichleta (10.3), sprawdzimy najpierw, że szereg liczbowy  $\sum_k I_k$  jest zbieżny. Posłużymy się w tym celu kryterium Leibniza (Wniosek 4.42). Za- uważmy najpierw, że dla każdego  $k = 0, 1, 2, \dots$  jest

$$I_{2k} > 0 > I_{2k+1}$$

To łatwo wynika z monotoniczności całki i faktu, że sinus jest dodatni na przedziałach  $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ , a ujemny na przedziałach  $(2k\pi + \pi, (2k+2)\pi)$ . Ponadto, ponieważ w każdej z całek  $I_k$  funkcja podcałkowa ma stały znak, więc dla każdego  $k = 0, 1, 2, \dots$  jest

$$\begin{aligned} |I_k| &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} |\sin y| dy \geq \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin y|}{y} dy = |I_{k+1}|. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z okresowości modułu sinusa (środkowa równość) oraz z nierówności

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \geq \frac{1}{y} \quad \text{dla wszystkich } 0 \leq k\pi < x \leq (k+1)\pi \leq y.$$

Zatem, znaki liczb  $I_k$  zmieniają się na przemian, zaś ciąg  $|I_k|$  jest malejący. Z wypisanych oszacowań wnioskujemy ponadto, że  $|I_{k+1}| \leq c/(k+1)$  dla  $c = 2/\pi$ . Spełnione są więc wszystkie założenia kryterium Leibniza; na mocy tego kryterium szereg  $\sum I_k$  jest zbieżny. Niech  $S$  oznacza sumę tego szeregu.

Ustalmy teraz liczbę  $\varepsilon > 0$ . Wybierzmy  $M \in \mathbb{N}$ , tak, aby spełnione były dwa warunki:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} I_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n > M$$

oraz

$$\frac{1}{x} < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad \text{dla } x > M.$$

Niech  $y > M\pi$  i  $n = [y/\pi]$ . Wtedy, z własności entier,  $0 \leq y - n\pi < \pi$ . Możemy więc oszacować

$$\begin{aligned} \left| \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx - S \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} I_k + \int_{n\pi}^y \frac{\sin x}{x} dx - S \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} I_k - S \right| + \int_{n\pi}^y \frac{|\sin x|}{x} dx < \frac{\varepsilon}{2} + (y - n\pi) \frac{\varepsilon}{2\pi} < \varepsilon. \end{aligned}$$

(Idea jest bardzo prosta: dla dużych  $y$  całka  $\int_0^y f dx$  różni się bardzo niewiele od odpowiednio dobranej sumy częściowej szeregu całek  $I_k$ ).

Otrzymaliśmy więc równość

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = S = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

**Uwaga 10.10.** Można wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dla funkcji nieujemnych zbieżność całek niewłaściwych można bardzo wyraźnie powiązać ze zbieżnością szeregow. Dla uproszczenia przyjmijmy  $a = 0$  (przedział całkowania zawsze można tak przesunąć, aby jego koniec znalazł się w zerze).

**Twierdzenie 10.11.** Niech  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  będzie funkcją ciągłą. Następujące warunki są wówczas równoważne:

- (i) Całka niewłaściwa  $\int_0^\infty f(x) dx$  jest zbieżna.
- (ii) Dla każdego rosnącego ciągu liczb nieujemnych  $(a_m)$  dążącego do  $+\infty$  szereg

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f(x) dx$$

jest zbieżny.

- (iii) Dla pewnego rosnącego ciągu liczb nieujemnych  $(a_m)$  dążącego do  $+\infty$  szereg

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f(x) dx$$

jest zbieżny.

Dowód. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Niech  $(a_m)$  będzie jakimkolwiek ciągiem rosnącym liczb nieujemnych. Mamy

$$\int_0^{a_{m+1}} f(x) dx = \int_0^{a_1} f(x) dx + \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx.$$

Z warunku (i) wynika, że lewa strona ma skońzoną granicę dla  $m \rightarrow \infty$ . Zatem prawa strona też ma skonczoną granicę, a to oznacza, że ciąg sum częściowych szeregu  $S$  jest zbieżny.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). To jest oczywiste.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Założymy, że szereg  $S$  jest zbieżny. Niech  $\varepsilon > 0$ . Z kryterium Cauchy'ego dla szeregow wynika, że istnieje  $M \in \mathbb{N}$  takie, że dla wszystkich  $N > M$  jest

$$\sum_{k=M}^N \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = \left| \sum_{k=M}^N \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

(pamiętajmy, że  $f \geq 0$ ). Niech teraz  $y_2 > y_1 > a_M$  będą dowolne. Wybierzmy  $N > M$  tak, aby  $a_{N+1} > y_2$ . Wówczas, dzięki monotoniczności całki,

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \right| = \int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \leq \int_{a_M}^{a_N} f(x) dx = \sum_{k=M}^N \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx < \varepsilon.$$

Zachodzi więc warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych, podany w Twierdzeniu 10.6. Dlatego całka  $\int_0^\infty f(x) dx$  jest zbieżna.  $\square$

Czytelnik może sprawdzić, że analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji nieujemnych, które są całkowalne w sensie Riemanna na każdym przedziale skończonym  $[0, b]$ .

**Twierdzenie 10.12.** Niech  $f: [a, \infty) \rightarrow [a, \infty)$ , gdzie  $a \geq 0$ , będzie funkcją nierosnącą. Następujące warunki są równoważne:

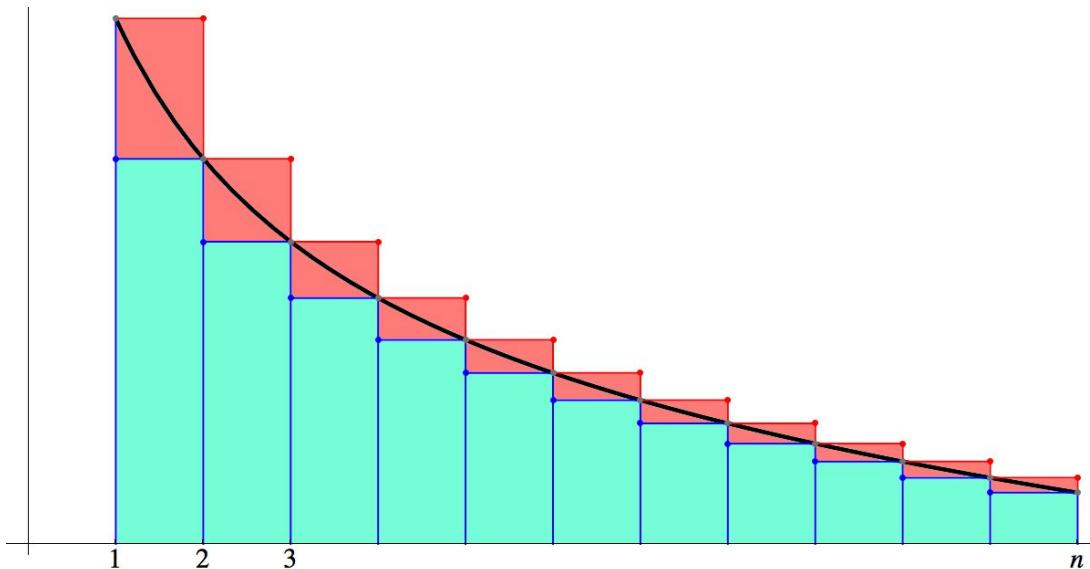
(i) Całka niewłaściwa  $\int_a^\infty f(x) dx$  jest zbieżna.

(ii) Szereg  $S = \sum_{n=[a+1]}^{\infty} f(n)$  jest zbieżny.

**Szkic dowodu.** Ponieważ  $f$  jest nieujemna i nierosnąca, więc dla  $n \geq a + 1$  mamy

$$\int_{n-1}^n f(x) dx \geq 1 \cdot \inf_{[n-1,n]} f = f(n) = 1 \cdot \sup_{[n,n+1]} f \geq \int_n^{n+1} f(x) dx .$$

Sumując takie nierówności względem  $n$ , łatwo porównujemy (z góry i z dołu, z dokładnością do stałych składników) sumy częściowe  $S_m$  szeregu  $S$  z całkami  $I(m) = \int_a^m f(x) dx$ . Zarówno sumy  $S_m$ , jak i całki  $I(m)$ , tworzą ciągi rosnące. Zatem jeden z tych ciągów jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest drugi z nich. (Patrz także rysunek).  $\square$



Jeśli  $f$  jest funkcją malejącą np. na  $[1, \infty)$ , to dla każdego  $n$  jest

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=2}^n f(k) .$$

**Uwaga 10.13.** Czytelnik zauważałbyć może, że w ostatnim twierdzeniu nie zakładaliśmy, że  $f$  jest ciągła (lub choćby całkowalna w sensie Riemanna na przedziałach ograniczonych). To nie jest potrzebne: zbiór punktów nieciągłości funkcji nierosnącej jest co najwyżej przeliczalny, więc z twierdzenia charakteryzującego funkcje całkowalne w sensie Riemanna wynika, że funkcja nierosnąca jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale skończonym.

**Zadanie 10.14.** Skonstruować przykład funkcji ciągłej  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , dla której całka niewłaściwa  $\int_0^\infty f(x) dx$  jest zbieżna, ale  $f$  nie ma granicy dla  $x \rightarrow +\infty$  i  $\sup f = |\inf f| = +\infty$ .

Aby podkreślić związki całek niewłaściwych z szeregami, sformułujemy jeszcze dwa kryteria zbieżności takich całek.

**Stwierdzenie 10.15 (kryterium porównawcze dla całek niewłaściwych).** *Jeśli  $f, g$  są nieujemne i ciągłe na przedziale  $[a, \infty)$  i istnieją  $a_1 \geq a$  i  $C > 0$  takie, że  $C \cdot f(x) \geq g(x)$  dla wszystkich  $x > a_1$ , to ze zbieżności całki  $\int_a^\infty f(x) dx$  wynika zbieżność całki  $\int_a^\infty g(x) dx$ , natomiast z rozbieżności całki  $\int_a^\infty g(x) dx$  wynika rozbieżność całki  $\int_a^\infty f(x) dx$ .*

Dowód pozostawiamy zainteresowanemu Czytelnikowi. Jest nietrudny i bardzo podobny do dowodu kryterium porównawczego dla szeregów.

Podamy też odpowiednik kryterium Abela i Dirichleta. W tym celu najpierw wykażemy pomocnicze twierdzenie o wartości średniej dla całek.

**Twierdzenie 10.16 (drugie twierdzenie o wartości średniej dla całki).**

1. Założmy, że  $f, h \in C([a, b])$  i  $h \geq 0$ . Wówczas istnieje taki punkt  $\xi \in [a, b]$ , że

$$f(\xi) \int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x)h(x) dx$$

2. Założmy, że  $f, g \in C([a, b])$ , a ponadto  $g$  jest funkcją monotoniczną. Wówczas istnieje taki punkt  $\xi \in [a, b]$ , że

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

**Dowód.** Najpierw udowodnimy pierwszy punkt. Ponieważ  $h \geq 0$ , więc dla każdego  $x \in [a, b]$  mamy  $h(x) \inf f \leq f(x)h(x) \leq h(x) \sup f$ . Dlatego, z monotoniczności całki,

$$\inf_{[a,b]} f \int_a^b h(x) dx \leq I = \int_a^b f(x)h(x) dx \leq \sup_{[a,b]} f \int_a^b h(x) dx.$$

Jeśli  $\int_a^b h(x) dx = 0$ , to  $fh \equiv 0$  i jako  $\xi$  można wybrać dowolny punkt przedziału  $[a, b]$ . Jeśli  $\int_a^b h(x) dx \neq 0$ , to liczba

$$\left( \int_a^b f(x)h(x) dx \right) \cdot \left( \int_a^b h(x) dx \right)^{-1}$$

należy do przedziału  $[\inf f, \sup f]$ , a więc na mocy własności Darboux jest wartością funkcji  $f$  w pewnym punkcie  $\xi \in [a, b]$ . To kończy dowód punktu pierwszego.

Aby wykazać drugą część twierdzenia, położymy  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  dla  $x \in [a, b]$ . Funkcja  $F$  znikła dla  $x = a$  i jest funkcją pierwotną  $f$ .

Dla ułatwienia założmy, że  $g$  jest funkcją klasy  $C^1$  i  $g' \geq 0$  (wpp. można  $g$  pomnożyć przez  $-1$ ). Całkując przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x) dx \quad \text{gdyż } F(a) = 0 \\ &= F(b)g(b) - F(\xi) \int_a^\xi g'(x) dx \quad \text{na mocy punktu 1.} \\ &= F(b)g(b) - F(\xi)(g(b) - g(a)) \\ &= g(b) \int_\xi^b f(x) dx + g(a) \int_a^\xi f(x) dx. \end{aligned}$$

Niech teraz  $g$  będzie dowolną funkcją ciągłą monotoniczną. Znajdziemy ciąg wielomianów  $g_n$  zbieżny do  $g$  jednostajnie na  $[a, b]$ . Można bez zmniejszenia ogólności zakładać, że każdy z wielomianów  $g_n$  jest monotoniczny na  $[a, b]$ . (To nietrudno wywnioskować np. z faktu, że wielomiany Bernsteina funkcji  $f$  zależą w sposób monotoniczny od  $f$ ). Zatem, dla każdego  $n$  istnieje  $\xi_n \in [a, b]$  takie, że

$$\int_a^b f(x)g_n(x) dx = g_n(a) \int_a^{\xi_n} f(x) dx + g_n(b) \int_{\xi_n}^b f(x) dx.$$

Ciąg  $\xi_n$  nie musi wprawdzie być zbieżny, lecz ma podciąg zbieżny; przyjmiemy więc, żeby nie komplikować oznaczeń, że  $\xi_n$  jest po prostu zbieżny. Przechodząc w powyższej równości do granicy  $n \rightarrow \infty$  i korzystając z Twierdzenia 9.37 (o przejściu do granicy pod znakiem całki), żeby wykonać przejście graniczne po lewej stronie, otrzymujemy tezę punktu drugiego w ogólnym przypadku (bez założenia różniczkowalności  $g$ ).

Dowód całego twierdzenia jest zakończony.  $\square$

**Twierdzenie 10.17 (kryterium Abela-Dirichleta dla całek).** Założmy, że

$$f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

są ciągłe, a ponadto:

1. Funkcja  $g$  jest monotoniczna i ma granicę równą zero dla  $x \rightarrow +\infty$ .
2. Istnieje taka liczba  $M > 0$ , że dla wszystkich  $x_2 > x_1 \geq a$  jest

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < M.$$

Wówczas całka

$$\int_a^\infty f(x)g(x) dx$$

jest zbieżna.

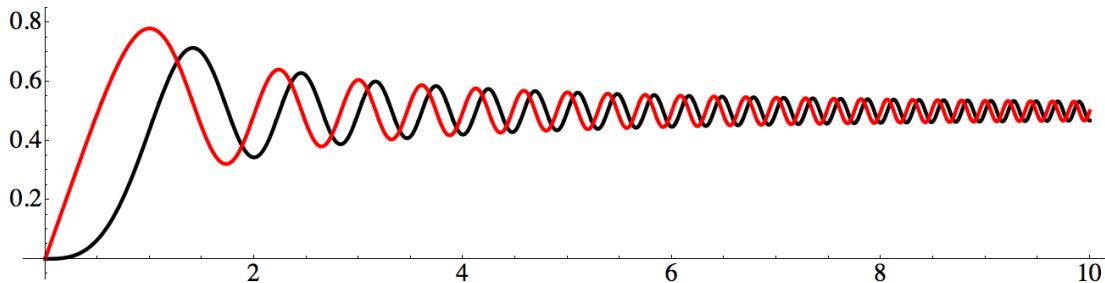
**Dowód.** Sprawdzamy warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych. Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Doierzmy  $K > a$  tak, aby mieć  $|g(x)| < \varepsilon/(2M)$  dla wszystkich  $x > K$ . Z drugiego twierdzenia o wartości średniej wnioskujemy, że dla dowolnych  $y_2 > y_1 > K$  znajdzie się punkt  $\xi \in [y_1, y_2]$  taki, że

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x)g(x) dx \right| = \left| g(y_1) \int_{y_1}^{\xi} f(x) dx + g(y_2) \int_{\xi}^{y_2} f(x) dx \right| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon.$$

(Skorzystaliśmy po prostu z nierówności trójkąta dla sumy. Obie całki z  $f$  szacują się przez  $M$ , a wartości  $g$  w punktach  $y_i$  – przez  $\varepsilon/(2M)$ ; są dwa takie składniki).  $\square$

**Przykład 10.18.** 1. Z podanego kryterium raz jeszcze można wywnioskować zbieżność całki Dirichleta

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$



Funkcje Fresnela

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt.$$

Czarny kolor odpowiada funkcji  $S(x)$ , gdyż  $S'(0) = 0$ ,  $C'(0) = 1 > 0$  (skale na osiach są różne).

Oczywiście można ograniczyć się do badania funkcji podcałkowej na  $I = (1, \infty)$ . Funkcja  $g(x) = 1/x$  jest na tym przedziale ciągła i monotonicznie maleje do zera, natomiast

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \sin x dx \right| = |\cos y_2 - \cos y_1| \leq 2$$

dla wszystkich  $y_1, y_2$ .

## 2. Całki Fresnela

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx, \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

są zbieżne, choć funkcje podcałkowe nie mają w ogóle granicy w nieskończoności! Znów, sprawdzimy, co się dzieje na przedziale  $[1, \infty)$ . Zamieniając zmienne ( $x^2 = \sqrt{t}$ ), otrzymujemy

$$\int_1^\infty \sin(x^2) dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$$

Funkcja  $g(t) = 1/2\sqrt{t}$  jest monotoniczna i ma w nieskończoności granicę 0. Ograniczość całek sinusa na dowolnym przedziale sprawdziliśmy wyżej. Tak samo można postąpić z drugą całką. (Tempo zbieżności obu całek jest powolne).

## Całki niewłaściwe na przedziale skończonym

Z bardzo podobną sytuacją mamy do czynienia, gdy funkcja  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła (lub ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna) na każdym przedziale  $[a + \varepsilon, b]$ , gdzie  $0 < \varepsilon < b - a$ , ale nie można jej przedłużyć do funkcji ciągłej (odpowiednio: ograniczonej i całkowalnej w sensie Riemanna) na  $[a, b]$ , gdyż np.  $f$  ma w  $a$  granicę nieskończoną, lub w ogóle nie ma granicy w punkcie  $a$ , ani nie jest ograniczona w żadnym otoczeniu tego punktu. Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna, gdy istnieje skończona granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$

Jeśli ta granica nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że całka jest rozbieżna.

**Przykład 10.19.** Całka

$$\int_0^1 x^{-s} dx$$

jest zbieżna dla  $s < 1$  i rozbieżna dla  $s \geq 1$ . Istotnie, mamy

$$\int_0^1 x^{-s} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-s} ds = \begin{cases} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \ln \frac{1}{\varepsilon} & \text{dla } s = 1, \\ \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1 - \varepsilon^{1-s}}{1 - s} & \text{dla } s \neq 1. \end{cases}$$

Gdy  $s = 1$ , to  $\ln(1/\varepsilon) \rightarrow +\infty$  dla  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Dla  $s \neq 1$  zbieżność rozpatrywanej całki jest równoważna istnieniu skończonej granicy  $\varepsilon^{1-s}$  przy  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , tzn. dodatniości wykładnika  $1 - s$ .  $\square$

Badając zbieżność całek niewłaściwych z nieograniczonych funkcji nieujemnych na przedziale ograniczonym, wolno oczywiście posługiwać się kryterium porównawczym: jeśli  $Cf(x) \geq g(x) \geq 0$  dla pewnej stałej  $C > 0$  i wszystkich  $x \in (a, b)$ , to ze zbieżnością całki  $\int_a^b f(x) dx$  wynika zbieżność całki  $\int_a^b g(x) dx$  i na odwrót, z rozbieżnością całki z funkcji  $g$  na  $(a, b)$  wynika rozbieżność całki z  $f$  na tym przedziale.

**Przykład 10.20.** Całka

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^3} dx$$

jest rozbieżna. Istotnie,  $1 - Cx^2 > \cos x$  na  $(0, 1)$ , gdy  $C > 0$  jest dostatecznie małą liczbą (wystellarz np. wziąć  $C = 1/\pi$ ; Czytelnik zechce to sprawdzić). Dlatego  $1 - \cos x \geq Cx^2$  i funkcja podcałkowa jest nie mniejsza od  $g(x) = C/x$ , zaś całka z tej ostatniej funkcji,  $\int_0^1 g(x) dx = C \int_0^1 x^{-1} dx$  jest oczywiście rozbieżna.

**Uwaga 10.21 (wzory rachunkowe dla całek niewłaściwych).** W poprzednim rozdziale zetknęliśmy się z kilkoma wzorami rachunkowymi dla całek oznaczonych, np. wzorem na całkowanie przez części i wzorem na całkowanie przez podstawienie. Odpowiednikami tych wzorów można się posługiwać także dla całek niewłaściwych, tylko trzeba pamiętać, że po obu stronach mamy do czynienia z granicami pewnych całek. Stosujemy po prostu odpowiedni wzór na mniejszym przedziale i przechodzimy następnie do odpowiedniej granicy z końcami przedziału. Np. mając do czynienia z wzorem na całkowanie przez części dla całek niewłaściwych, piszemy

$$\int_a^\infty f(x) \cdot g'(x) dx = fg \Big|_a^\infty - \int_a^\infty f'(x) \cdot g(x) dx,$$

interpretując każdą całkę jako całkę niewłaściwą i przyjmując, że

$$fg \Big|_a^\infty = \lim_{b \rightarrow \infty} f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Podobnie postępujemy z całkami niewłaściwymi na przedziałach skończonych: stosujemy odpowiedni wzór nie na  $[a, b]$ , tylko na mniejszym przedziale  $[a + \varepsilon, b]$ , a następnie przechodzimy do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Przy pewnej dozie ostrożności można po prostu całkować przez części i przez podstawienie *praktycznie tak samo*, jak dla zwykłych całek oznaczonych. Spotkamy się kilka-krotnie z taką sytuacją w następnym podrozdziale.

## 10.2 Funkcje $\Gamma$ i $B$

**Definicja 10.22.** Dla  $a > 0$  kładziemy

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (10.4)$$

Całkę (10.4) nazywamy funkcją gamma Eulera.

Nietrudno przekonać się, że definicja jest poprawna, tzn. całka jest zbieżna dla każdego parametru  $a > 0$ . Istotnie, ponieważ  $e^{-t} \leq 1$  dla  $t \geq 0$ , więc

$$\int_0^1 t^{a-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{t^a}{a} \Big|_0^1 = \frac{1}{a} < \infty. \quad (10.5)$$

Dla  $t > 1$  i  $k > a - 1$  jest też

$$e^{t/2} \geq \frac{(t/2)^k}{k!} \geq \frac{t^{a-1}}{k! \cdot 2^k}$$

(porównujemy funkcję  $e^t$  z  $k$ -tym wyrazem jej szeregu potęgowego, a następnie korzystamy z monotoniczności funkcji wykładniczej o podstawie  $t > 1$ ). Dlatego

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{a-1} dt \leq k! \cdot 2^k \int_1^\infty e^{-t} e^{t/2} dt = k! \cdot 2^k \int_1^\infty e^{-t/2} dt = k! \cdot 2^{k+1} e^{-1/2} < \infty. \quad (10.6)$$

Całka określająca funkcję gamma jest sumą całek (10.5) i (10.6), więc jest zbieżna.

**Stwierdzenie 10.23.** *Funkcja  $\Gamma$  ma następujące własności:*

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \text{dla wszystkich } a > 0, \quad (10.7)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \quad (10.8)$$

**Dowód.** Liczbę  $\Gamma(1)$  wyznaczamy wprost z definicji (patrz także Przykład 10.2):

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1.$$

Całkując przez części, sprawdzamy, że

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = \frac{t^a}{a} e^{-t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^a}{a} \cdot (-e^{-t}) dt = 0 + \frac{\Gamma(a+1)}{a}.$$

Otrzymaliśmy więc (10.7). Równość (10.8) łatwo udowodnić przez indukcję: dla  $n = 1$  wzór (10.8) zachodzi, i jeśli  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , to  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$ .  $\square$

Widzimy więc, że funkcja  $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  jest jednym z możliwych przedłużen funkcji  $n \mapsto n!$  ze zbioru liczb naturalnych na liczby dodatnie. Oczywiście wszystkich takich przedłużen jest nieskończenie wiele. Funkcję  $\Gamma$  wyróżnia spośród nich jedna własność: okazuje się, że  $\ln \Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją wypukłą. Wyjaśnijmy ten fakt możliwie starannie.

**Definicja 10.24.** Niech  $I$  będzie przedziałem w  $\mathbb{R}$  i niech  $f: I \rightarrow (0, \infty)$ . Mówimy, że  $f$  jest logarytmicznie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy  $\ln f: I \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją wypukłą.

Równoważnie,  $f: I \rightarrow (0, \infty)$  jest logarytmicznie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych  $x, y \in I$  oraz  $\lambda \in [0, 1]$  zachodzi nierówność

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}.$$

Logarytmując tę nierówność stronami, co wolno zrobić, gdyż  $\ln$  jest funkcją rosnącą, otrzymujemy nierówność Jensaena dla funkcji  $\ln f$  (patrz Definicja 5.67).

**Stwierdzenie 10.25.** *Iloczyn funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą.*

**Dowód.** Suma funkcji wypukłych jest wypukła. Dlatego, jeśli  $\ln f_i$  jest funkcją wypukłą dla  $i = 1, 2$ , to  $\ln(f_1 f_2)$  też jest funkcją wypukłą.  $\square$

Logarytmiczną wypukłość funkcji  $\Gamma$  można sprawdzić na kilka sposobów. My przypomnimy w tym celu nierówność Höldera dla sum skończonych, a następnie wyprowadzimy z niej łatwy wniosek: nierówność Höldera dla całek. Jak pamiętamy (patrz Twierdzenie 5.73), jeśli  $p, q > 1$  i  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , to dla dowolnych  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  oraz  $y_1, \dots, y_n \geq 0$  jest

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}. \quad (10.9)$$

Łatwo stąd otrzymać

**Stwierdzenie 10.26 (nierówność Höldera dla całek).** *Jeśli  $p, q > 1$  i  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , to dla dowolnych funkcji  $f, g$  całkowalnych na przedziale  $[a, b]$  zachodzi nierówność*

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left( \int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}. \quad (10.10)$$

**SZKIC DOWODU.** Z nierówności Höldera dla sum wynika, że dla każdego podziału  $P = (t_0, \dots, t_n)$  odcinka  $[a, b]$  i punktów pośrednich  $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$  jest

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(s_i)g(t_i)\Delta t_i \right| &\leq \sum_{i=1}^n |f(s_i)|(\Delta t_i)^{1/p} \cdot |g(s_i)|(\Delta t_i)^{1/q} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |f(s_i)|^p \cdot \Delta t_i \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |g(s_i)|^q \cdot \Delta t_i \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

gdzie  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Z takich nierówności dla sum całkowych otrzymujemy po przejściu granicznym nierówność Höldera dla całek.  $\square$

**Uwaga 10.27.** Nierówność Höldera (10.10) zachodzi także dla całek niewłaściwych. Wystarczy wypisać ją na mniejszych przedziałach (tam, gdzie całki oznaczone są właściwe), a następnie przejść do granicy z odpowiednim końcem (lub dwoma końcami) przedziału.

**Wniosek 10.28.** *Funkcja  $\Gamma$  jest logarytmicznie wypukła.*

**Dowód.** Ustalmy  $x, y > 0$  i liczbę  $\lambda \in (0, 1)$ . Posłużymy się nierównością Höldera z wykładnikami  $p = 1/\lambda$  i  $q = 1/(1 - \lambda)$ . Wtedy  $1/p = \lambda$ ,  $1/q = 1 - \lambda$  i warunek  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  jest spełniony. Prosty rachunek daje

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \int_0^\infty t^{\lambda x + (1 - \lambda)y - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t} \cdot t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t} dt \\ &\leq \left( \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right)^\lambda \cdot \left( \int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^\lambda \cdot \Gamma(y)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Dowód jest zakończony.  $\square$

**Uwaga 10.29.** Nieco inny dowód logarytmicznej wypukłości funkcji  $\Gamma$  przebiega według następującego schematu.

1. Najpierw trzeba sprawdzić, że suma (dwóch) funkcji logarytmicznie wypukłych też jest logarytmicznie wypukła. Można w tym celu skorzystać z kryterium wypukłości funkcji ciągłych, patrz Twierdzenie 5.70. Przez indukcję wynika stąd, że suma  $n$  funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła.
2. Następnie, sprawdza się, że sumy całkowe Riemanna,

$$\sum_{i=1}^n t_i^{a-1} e^{-t_i} \Delta t_i$$

przybliżające całkę

$$I_N(a) = \int_0^N t^{a-1} e^{-t} dt$$

są funkcjami logarytmicznie wypukłymi zmiennej  $a$ .

3. Łatwo jest wykazać, że granica punktowo zbieżnego ciągu funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła. Stąd i z logarytmicznej wypukłości sum Riemanna wnioskujemy najpierw o logarytmicznej wypukłości całek  $I_N(a)$ , a następnie – logarytmicznej wypukłości funkcji  $\Gamma(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N(a)$ .

Zainteresowany Czytelnik zechce samodzielnie uzupełnić wszystkie szczegóły takiego rozumowania.

Okazuje się, że własność (10.7) funkcji  $\Gamma$ , połączona z jej logarytmiczną wypukłością, jednoznacznie identyfikuje tę funkcję.

**Twierdzenie 10.30 (H. Bohr).** *Jeśli funkcja  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  jest logarytmicznie wypukła, a ponadto  $f(1) = 1$  i  $f(x+1) = xf(x)$  dla wszystkich  $x > 0$ , to wówczas  $f(x) = \Gamma(x)$  dla wszystkich  $x > 0$ .*

**Dowód. Krok 1.** Ponieważ  $f(1) = 1$  i  $f(x+1) = xf(x)$ , więc po pierwsze  $f(n) = (n-1)!$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ , po drugie zaś funkcja  $f$  jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości na odcinku  $(0, 1]$ . Podobną własność ma funkcja  $\Gamma$ : warunek (10.7) pozwala wyznaczyć jej wszystkie wartości, jeśli znamy  $\Gamma(x)$  dla  $x \in (0, 1]$ . Dlatego wystarczy sprawdzić, że

$$f(x) = \Gamma(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in (0, 1].$$

*Krok 2.* Ustalmy  $x \in (0, 1]$ . Skorzystamy teraz z logarytmicznej wypukłości  $f$ . Niech  $n \geq 2$  będzie dowolne. Ponieważ  $\ln f$  jest funkcją wypukłą, więc na mocy Twierdzenia 5.76 o monotoniczności ilorazów różnicowych otrzymujemy

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{1} \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{x} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{1}.$$

Upraszczając te wyrażenia z wykorzystaniem warunku  $f(k+1) = k!$ , a następnie mnożąc obie strony przez  $x > 0$ , otrzymujemy

$$\ln(n-1)^x = x \ln(n-1) \leq \ln f(x+n) - \ln(n-1)! \leq x \ln n = \ln n^x.$$

Przeto

$$\ln((n-1)! (n-1)^x) \leq \ln f(x+n) \leq \ln((n-1)! n^x),$$

stąd zaś

$$(n-1)! (n-1)^x \leq f(x+n) \leq (n-1)! n^x.$$

Jednak  $f(x+n) = (x+n-1)f(x+n-1) = \dots = (x+n-1) \dots (x+1)x f(x)$ . Podstawiając tę równość wyżej, otrzymujemy przybliżenie  $f$  z góry i z dołu:

$$\frac{(n-1)! (n-1)^x}{(x+n-1) \dots (x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)! n^x}{(x+n-1) \dots (x+1)x}$$

Ponieważ takie nierówności zachodzą dla każdego  $n \geq 2$ , więc możemy po lewej stronie zastąpić  $n$  przez  $n+1$ . Zatem

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) := \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \dots (x+1)x} &\leq f(x) \leq \frac{(n-1)! n^x}{(x+n-1) \dots (x+1)x} \\ &= \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \dots (x+1)x} \cdot \frac{x+n}{n} = \Gamma_n(x) \cdot \frac{x+n}{n}. \end{aligned}$$

Równoważnie, dla  $n \geq 2$  i  $x \in (0, 1]$  liczba  $\Gamma_n(x)$  spełnia

$$f(x) \cdot \frac{n}{n+x} \leq \Gamma_n(x) \leq f(x).$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach, granica  $\Gamma_n(x)$  dla  $n \rightarrow \infty$  istnieje i jest równa  $f(x)$ . Otrzymaliśmy więc konkretny wzór na funkcję  $f$ :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \dots (x+1)x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

Jednak funkcja  $\Gamma$  też spełnia założenia twierdzenia i dlatego musi wyrażać się tym samym wzorem. Zatem  $f \equiv \Gamma$  na przedziale  $(0, 1]$ , a więc (jak stwierdziliśmy wcześniej) także na całym zbiorze liczb dodatnich.  $\square$

Analizując powyższy dowód, nietrudno stwierdzić następujący fakt.

### Wniosek 10.31. Wzór

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x), \quad \text{gdzie} \quad \Gamma_n(x) = \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \dots (x+1)x}, \quad (10.11)$$

zachodzi dla wszystkich  $x > 0$ .

Dowód. Ponieważ

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{n! \cdot n^{x+1}}{(x+1+n) \cdot \dots \cdot (x+1+1)(x+1)} = x\Gamma_n(x) \cdot \frac{n}{x+1+n}, \quad (10.12)$$

więc jeśli granica w (10.11) istnieje dla liczby  $x$ , to istnieje także dla  $x+1$ . Widać także, że  $g(x) = \lim_n \Gamma_n(x)$  spełnia tożsamość  $g(x+1) = xg(x)$ . Widzieliśmy już, że  $g(x) = \Gamma(x)$  dla  $x \in (0, 1]$ . Z równości  $g(x+1) = xg(x)$  i  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  wynika, że (10.11) zachodzi dla wszystkich  $x > 0$ .  $\square$

**Wniosek 10.32.**  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

Dowód. Stosujemy poprzedni wniosek;

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{1/2}}{\left(\frac{1}{2} + n\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} n! \cdot n^{1/2}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{2\sqrt{n}}{2n+1} \\ &\longrightarrow \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

na mocy wzoru Wallisa (patrz Twierdzenie 9.40).  $\square$

Jak widać, w ostatnim dowodzie obliczamy po prostu granicę pewnego konkretnego ciągu. Jednak interpretacja tej granicy – tzn. umiejętność zauważenia jej związku z funkcją  $\Gamma$  z jednej strony i ze wzorem Wallisa z drugiej strony – wymaga solidnej znajomości rachunku całkowego.

**Wniosek 10.33 (całka Poissona).** Całka niewłaściwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx$$

jest zbieżna i równa  $\sqrt{\pi}$ .

Dowód. Sprawdźmy najpierw zbieżność całki. Dla  $x > 1$  jest  $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$ , więc

$$\int_1^{\infty} \exp(-x^2) dx < \int_1^{\infty} e^{-x} = \frac{1}{e}.$$

Przez symetrię,

$$\int_{-\infty}^{-1} \exp(-x^2) dx < \frac{1}{e}.$$

Stąd już wynika zbieżność rozważanej całki (na przedziale  $[-1, 1]$  funkcja  $e^{-x^2}$  jest ciągła). Ponadto, dokonując na przedziale  $(0, \infty)$  zamiany zmiennych  $x = \sqrt{t}$ ,  $dx = \frac{1}{2}t^{-1/2} dt$ , otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = 2 \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

To jest żądaný wynik.  $\square$

Zamieniając zmienne ( $x = t/\sqrt{2}$ ,  $dx = (1/\sqrt{2}) dt$ ) w równości  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ , otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2) dt = 1. \quad (10.13)$$

Funckja  $g(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$  nazywa się gęstością standardowego rozkładu normalnego. Czytelnik spotka ją na studiach wielokrotnie, na zajęciach z Rachunku Prawdopodobieństwa i ze Statystyki, a także w opisie rozwiązań równania przewodnictwa cieplnego.

Teraz zdefiniujemy funkcję  $B$  (beta Eulera) i omówimy związek, łączący  $\Gamma$  i  $B$ .

**Definicja 10.34.** Dla  $a, b > 0$  kładziemy

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt. \quad (10.14)$$

Całkę (10.14) nazywamy funkcją beta Eulera.

Zauważmy, że całka  $B(a, b)$  jest zbieżna dla wszystkich  $a, b > 0$ . Dla  $a, b \geq 1$  funkcja podcałkowa jest po prostu ciągła na  $[0, 1]$ . Dla pozostałych  $a, b$  piszemy

$$\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \int_0^{1/2} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt + \int_{1/2}^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

W pierwszej całce osobliwość jest tylko w zerze. Mamy

$$\int_0^{1/2} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \leq \int_0^{1/2} t^{a-1} (1-t)^{-1} dt \leq 2 \int_0^{1/2} t^{a-1} dt = 2 \cdot \frac{t^a}{a} \Big|_0^{1/2} < \infty.$$

Rozpatrywanie drugiej całki sprowadzamy do powyższego, zamieniając zmienne:

$$[1/2, 1] \ni t \mapsto s = 1 - t \in [0, 1/2],$$

zatem

$$\int_{1/2}^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \int_{1/2}^0 (1-s)^{a-1} s^{b-1} (-ds) = \int_0^{1/2} s^{b-1} (1-s)^{a-1} ds < \infty$$

dla wszystkich  $b > 0$  (szacujemy jak poprzednio, zamieniając  $a$  i  $b$  rolami).

**Lemat 10.35.** Dla wszystkich  $a, b > 0$  jest  $B(a, b) = B(b, a)$ . Ponadto, przy ustalonym  $a > 0$  funkcja  $B(a, \cdot): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  jest logarytmicznie wypukła.

**Szkic dowodu.** O równości  $B(a, b) = B(b, a)$  przekonujemy się łatwo, dokonując zamiany zmiennych  $t \mapsto s = 1 - t$ . Logarytmicznej wypukłości  $B(a, \cdot)$  dowodzi się tak samo, jak logarytmicznej wypukłości funkcji  $\Gamma$  – korzystając z nierówności Höldera. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie.  $\square$

**Twierdzenie 10.36.** Zachodzą następujące wzory:

$$B(a+1, b) + B(a, b+1) = B(a, b) \quad \text{dla } a, b > 0, \quad (10.15)$$

$$B(a, b+1) = \frac{b}{a+b} B(a, b) \quad \text{dla } a, b > 0, \quad (10.16)$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \text{dla } a, b > 0. \quad (10.17)$$

**Uwaga.** Wzór (10.17) bywa nazywany podstawowym związkiem między funkcjami  $\Gamma$  i  $B$ .

Dowód. Najpierw sprawdzimy wzory (10.15) i (10.16). Ustalmy liczby  $a, b > 0$ . Dodając całki, otrzymujemy

$$\begin{aligned} B(a+1, b) + B(a, b+1) &= \int_0^1 \left( t^a (1-t)^{b-1} + t^{a-1} (1-t)^b \right) dt \\ &= \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} \left( t + (1-t) \right) dt = B(a, b). \end{aligned}$$

To jest wzór (10.15). Aby sprawdzić (10.16), całkujemy najpierw przez części, zauważając, że funkcja  $g(x) = x^a (1-x)^b$  ma granicę równą zero zarówno dla  $x \rightarrow 0$ , jak i dla  $x \rightarrow 1$ . Dlatego w poniższym rachunku można zaniedbać wartości funkcji na końcach przedziału:

$$\begin{aligned} B(a, b+1) &= \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^b dt = \int_0^1 \left( \frac{t^a}{a} \right)' (1-t)^b dt \\ &= -\frac{1}{a} \int_0^1 t^a (-b) (1-t)^{b-1} dt \\ &= \frac{b}{a} \int_0^1 t^a (1-t)^{b-1} dt = \frac{b}{a} B(a+1, b). \end{aligned}$$

Zatem,

$$B(a, b+1) = \frac{b}{a} B(a+1, b) \stackrel{(10.15)}{=} \frac{b}{a} (B(a, b) - B(a, b+1)),$$

lub równoważnie  $(a+b)B(a, b+1) = bB(a, b)$ . To jest wzór (10.16).

Zajmijmy się teraz wzorem (10.17). Ustalmy  $a > 0$ . Niech

$$f(b) = \frac{B(a, b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \quad \text{dla } b > 0.$$

Ponieważ iloczyn funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą, więc  $f$  jest logarytmicznie wypukła. Mamy

$$f(1) = \frac{B(a, 1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \stackrel{(10.7)}{=} aB(a, 1) = a \int_0^1 t^{a-1} dt = 1.$$

Wreszcie, dzięki znanim już własnościom funkcji  $\Gamma$  i  $B$ ,

$$\begin{aligned} f(b+1) &= \frac{B(a, b+1)\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a)} \stackrel{(10.7)}{=} \frac{B(a, b+1)(a+b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \\ &\stackrel{(10.16)}{=} \frac{b}{a+b} \cdot \frac{B(a, b)(a+b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \\ &= b \cdot \frac{B(a, b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = bf(b). \end{aligned}$$

Zatem funkcja  $f$  spełnia założenia Twierdzenia 10.30, charakteryzującego funkcję  $\Gamma$ . Mamy więc

$$\Gamma(b) = f(b) = \frac{B(a, b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \quad \text{dla każdego } b > 0.$$

Ponieważ  $a > 0$  było w całym rozumowaniu dowolne, więc dowód jest zakończony.  $\square$

**Przykład 10.37.** Sprawdzimy powtórnie, że  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Na mocy wzoru podstawowego, zastosowanego dla  $a = b = 1/2$ ,  $a + b = 1$ , jest

$$\Gamma(1/2)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Aby obliczyć ostatnią całkę, dokonajmy zamiany zmiennych  $t = (1+u)/2$ . Zmiennej  $t \in (0, 1)$  odpowiadają wartości  $u \in (-1, 1)$ ; jest  $dt = \frac{1}{2} du$ , a ponadto

$$\sqrt{t(1-t)} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-u)(1+u)} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{2}.$$

Dlatego

$$\Gamma(1/2)^2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u \Big|_{-1}^1 = \pi.$$

(Jak widać, w ostatnim kroku obliczamy tę samą całkę, którą trzeba obliczyć, żeby wyznaczyć długość półokręgu o promieniu równym 1. To świadczy o tym, że całki niewłaściwe służą nie tylko do teoretycznych rachunków, ale także pojawiają się w prostych i naturalnych zagadnieniach geometrycznych).

### 10.3 Wzór iloczynowy Weierstrassa i kilka innych własności funkcji $\Gamma$

Zasadniczym celem tego i następnego podrozdziału jest po pierwsze uzyskanie pewnej liczby ciekawych wzorów, po drugie zaś – i to jest cel ważniejszy – przekonanie Czytelnika, że funkcjami, które są zdefiniowane jako całki zależne od parametru, lub granice wyrażeń zależnych od parametru, można operować niemal tak samo, jak dobrze znanymi funkcjami elementarnymi, prowadząc swobodnie najróżniejsze obliczenia.

To ilustracja tego, jaką rolę odgrywa w analizie pojęcie granicy i twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych oraz własnościach szeregów potęgowych. Cały ten aparat, łącznie z prostymi elementami rachunku różniczkowego, będzie obecny w dowodach i obliczeniach, jakie niżej przeprowadzimy. Tekst byłby znacznie krótszy, gdyby nie wyjaśniać, dlaczego można wykonać poszczególne kroki we wzorach, które z formalnego punktu widzenia są dość jasne.

Funkcja  $\Gamma$ , ważna w analizie, znakomicie się nadaje do przeprowadzenia takiej ilustracji. Zbieżność jednostajną ciągów i szeregów funkcyjnych oraz własności takich ciągów i szeregów wprowadza się i bada między innymi właśnie po to, żeby móc bez przeszkód operować funkcjami zdefiniowanymi w sposób nieelementarny.

**Twierdzenie 10.38 (wzór iloczynowy Weierstrassa).** Dla wszystkich  $x > 0$  zachodzi wzór

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}}, \quad (10.18)$$

gdzie  $\gamma$  oznacza tzw. stałą Eulera, tzn.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

**Dowód.** Dokonamy prostych przekształceń wzoru (10.11), uzyskanego we Wniosku 10.31.  
Mamy

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \cdot \dots \cdot (x+1)x} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot e^{x \ln n}}{(x+n) \cdot \dots \cdot (x+1)x} \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x \ln n}}{\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n})} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}}. \tag{10.19}
 \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że ciąg  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  ma granicę skońzoną. Istotnie, nietrudno zauważyc, że dla  $n > 1$  jest

$$\begin{aligned}
 b_n = a_n - \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \int_1^n \frac{1}{x} dx \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Zatem  $b_n$  jest ciągiem rosnącym; ponadto, dzięki monotoniczności  $1/x$ , zachodzi nierówność<sup>1</sup>

$$b_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Dlatego ciąg  $b_n$  jest zbieżny; liczba  $\lim a_n = \lim(b_n + \frac{1}{n}) = \lim b_n = \gamma$  nazywa się *stałą Eulera* lub *stałą Eulera–Mascheroniego*. Możemy więc skorzystać we wzorze (10.19) z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów zbieżnych i napisać

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n})} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\exp(x/k)}{1 + \frac{x}{k}}.$$

(Zauważmy: ostatnia granica istnieje, bo istnieje granica pierwszego czynnika, równa  $\exp(-\gamma x)$  oraz granica iloczynu obu czynników.)  $\square$

**Stwierdzenie 10.39 (wzór Legendre'a).** *Dla każdego  $x > 0$  jest*

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \Gamma(x). \tag{10.20}$$

---

<sup>1</sup>Czytelnik zechce porównać ten argument z dowodem całkowego kryterium zbieżności szeregów, patrz Twierdzenie 10.12 i towarzyszący mu rysunek – to takie samo rozumowanie!

Dowód. Raz jeszcze wykorzystujemy wzór (10.11). Rozszerzając ułamek tak, aby zauważyć wyrażenie  $\Gamma_{2n}(x)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 \cdot n^{x/2} \cdot n^{x/2} \cdot \sqrt{n}}{\frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{x}{2} + n\right) \cdot \frac{x+1}{2} \left(\frac{x+1}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{x+1}{2} + n\right)} \\ &= \frac{1}{2^x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+2}(n!)^2 \cdot (2n)^x \sqrt{n}}{x(x+2) \cdots (x+2n) \cdot (x+1)(x+3) \cdots (x+2n+1)} \\ &= \frac{1}{2^x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! \cdot (2n)^x \sqrt{n}}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+2n)} \cdot \left( \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \frac{4n}{x+2n+1},\end{aligned}\tag{10.21}$$

gdzię

$$2^{2n+2}(n!)^2 \sqrt{n} = 4n \cdot (2n)! \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

W ostatnim wyrażeniu we wzorze (10.21) mamy granicę trzech czynników. Pierwszy z nich,  $\Gamma_{2n}(x) \rightarrow \Gamma(x)$  dla  $n \rightarrow \infty$  – por. wzór (10.11). Drugi czynnik, rozważany już wcześniej w dowodzie Wniosku 10.32, na mocy wzoru Wallisa ma granicę  $\sqrt{\pi}$ . Ostatni czynnik,  $4n/(x+2n+1)$ , ma granicę 2. Dlatego

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2^{-x}\Gamma(x) \cdot 2\sqrt{\pi}.$$

Ta obserwacja kończy cały dowód.  $\square$

Dotychczas rozważaliśmy funkcję  $\Gamma$  tylko dla  $x > 0$ . Definicja  $\Gamma(x)$  jako całki niewłaściwej  $\int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$  ma sens tylko dla takich  $x$ . Gdy  $x \leq 0$ , całka jest rozbieżna, z uwagi na zachowanie funkcji podcałkowej w pobliżu zera.

Wiemy już jednak (patrz Wniosek 10.31), że

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x), \quad \text{gdzie} \quad \Gamma_n(x) = \frac{n! \cdot n^x}{(x+n) \cdots (x+1)x}.$$

Przypomnijmy: aby wykazać tę równość, skorzystaliśmy z tego, że granica istnieje dla  $x \in (0, 1]$  oraz z równości (10.12):

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x) \cdot \frac{n}{x+1+n}.$$

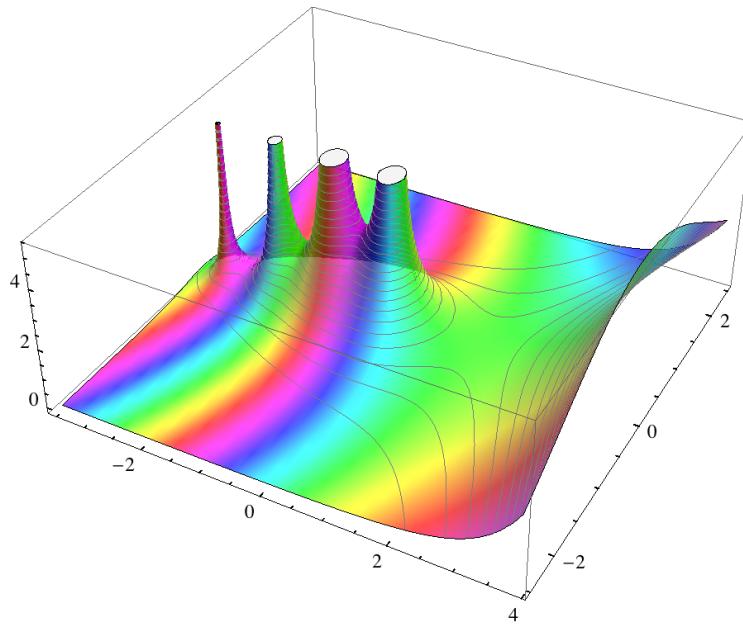
Podstawmy  $x = t - 1$ . Otrzymamy

$$\Gamma_n(t-1) = \frac{\Gamma_n(t)}{t-1} \cdot \frac{t+n}{n}$$

Wzór określający  $\Gamma_n(t)$  ma sens dla wszystkich  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ . Dlatego z powyższej równości wynika, że jeśli  $t \neq 0, -1, -2, \dots$  i  $\Gamma_n(t)$  ma granicę dla  $n \rightarrow \infty$ , to  $\Gamma_n(t-1)$  też ma granicę dla  $n \rightarrow \infty$ . Wiemy już jednak, że granica  $\lim_n \Gamma_n(t)$  istnieje dla wszystkich  $t > 0$  i jest równa funkcji  $\Gamma$ . Dlatego następująca definicja jest poprawna i pozwala rozszerzyć funkcję  $\Gamma$  na cały zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ .

**Definicja 10.40 (alternatywna definicja funkcji  $\Gamma$ ).** Dla  $t \in \mathbb{R}, t \neq 0, -1, -2, \dots$  przyjmujemy

$$\Gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(t).$$



Wykres funkcji  $z = (x, y) \mapsto |\Gamma(x + iy)|$ , tzn. zbiór punktów  $(x, y, |\Gamma(x + iy)|)$  w  $\mathbb{R}^3$ , gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0, -1, -2, \dots$ . Widoczne są osobliwości (tzw. biegunki) funkcji  $\Gamma$  w punktach  $0, -1, -2, \dots$ . Kolor powierzchni odpowiada argumentowi liczby  $\Gamma(x + iy)$ .

Dla  $t > 0$  definicja ta jest równoważna wcześniejszej, wykorzystującej wzór (10.4).

**Uwaga.** W istocie, funkcję  $\Gamma$  można zdefiniować tak, jak wyżej (albo wzorem iloczynowym Weierstrassa) dla wszystkich zespolonych  $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ . Nie będziemy jednak badać zachowania  $\Gamma$  dla argumentów spoza prostej rzeczywistej.

**Stwierdzenie 10.41.** Dla wszystkich  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  jest  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ .  $\square$

Ponieważ w dowodzie wzoru iloczynowego Weierstrassa i wzoru Legendre'a korzystaliśmy jedynie z istnienia granicy  $\Gamma_n(x)$  oraz z ciągłości funkcji wykładniczej, więc oba te wzory zachodzą dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$  z wyjątkiem liczb całkowitych niedodatnich.

**Stwierdzenie 10.42.** Dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0, -1, -2, \dots$  zachodzą wzory Weierstrassa i Legendre'a:

$$\Gamma(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{t} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(t/k)}{1 + \frac{t}{k}}, \quad (10.22)$$

$$\Gamma\left(\frac{t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{t-1}}\Gamma(t). \quad (10.23)$$

**Wniosek 10.43.**  $\Gamma: \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją klasy  $C^1$ .

**Dowód.** Dla  $x > 0$  mamy  $\Gamma(x) > 0$  wobec definicji (10.4) (gdyż  $\Gamma(x)$  jest całką dodatniej funkcji na niezerowym przedziale). Na mocy wzoru Weierstrassa dla  $x > 0$ , dzięki ciągło-

ści logarytmu naturalnego, jest

$$\begin{aligned}\ln \Gamma(x) &= -\gamma x - \ln x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{x}{k} - \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right) \right) \\ &= -\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{x}{k} - \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right) \right)\end{aligned}\quad (10.24)$$

Zauważmy: mamy pewność, że ostatni szereg jest zbieżny, gdyż zbieżny był iloczyn nieskończony występujący we wzorze Weierstrassa.

Sprawdzimy teraz w standardowy sposób, że  $g(x) = \ln \Gamma(x)$  jest różniczkowalna w sposób ciągły na  $(0, \infty)$ . Wystarczy w tym celu sprawdzić, czy szereg pochodnych, otrzymany przez różniczkowanie szeregu w (10.24) wyraz po wyrazie, jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale  $(0, M]$ , gdzie  $M < \infty$ . Po zróżniczkowaniu otrzymujemy szereg o wyrazach

$$a_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{k}{x+k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{x}{k(x+k)}.$$

Jeśli  $x \in (0, M]$ , to

$$0 < a_k(x) = \frac{x}{k(x+k)} < \frac{x}{k^2} \leq \frac{M}{k^2}.$$

Z kryterium Weierstrassa wynika zatem jednostajna zbieżność szeregu  $\sum_k a_k(x)$  na każdym przedziale  $(0, M]$ , a z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych – równość

$$g'(x) = (\ln \Gamma(x))' = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)}.$$

i ciągłość  $g'$  na  $(0, \infty)$ . Oczywiście  $\Gamma = e^{\ln \Gamma} = \exp \circ g$  też jest klasy  $C^1$  na przedziale  $(0, \infty)$ . Dla  $x < 0$ ,  $x \notin \mathbb{Z}$  różniczkowalność  $\Gamma$  i ciągłość jej pochodnej  $\Gamma'$  w punkcie  $x$  wynika łatwo z tożsamości  $\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$ .  $\square$

Korzystając ze wzorów Weierstrassa i Legendre'a wykażemy teraz dość prosty (choć dla niewtajemniczonych zupełnie nieoczekiwany) związek między funkcją  $\Gamma$  i sinusem. Okazuje się, że zachodzi następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 10.44.** *Dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  położmy*

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \Gamma(x) \Gamma(1-x) \sin \pi x.$$

*Wówczas funkcja  $\phi: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  jest stała i równa 1.*

**Dowód.** Plan postępowania jest następujący. Sprawdzimy, że funkcję  $\phi$  można określić w punktach  $k \in \mathbb{Z}$  tak, aby otrzymać funkcję okresową klasy  $C^1(\mathbb{R})$ , o okresie 1. Wzór Legendre'a pozwoli wypisać pewne równanie funkcyjne na  $\phi$ . W koncu sprawdzimy, że z tego równania wynika łatwo, że  $\ln \phi(x)$  jest funkcją stałą (bo ma pochodną zero). Oto szczegółowo.

**Krok 1.** Funkcja  $\phi$  jest okresowa i ma okres równy 1. Istotnie, niech

$$f(x) = \Gamma(x) \Gamma(1-x), \quad h(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Dzięki równościom  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  oraz  $\sin(y+\pi) = -\sin y$ , otrzymujemy dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  związki

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \Gamma(x+1)\Gamma(1-(x+1)) = x\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\Gamma(x)\Gamma(-x+1) = -f(x), \\ h(x+1) &= \frac{\sin \pi(x+1)}{\pi} = -\frac{\sin \pi x}{\pi} = -h(x). \end{aligned}$$

Stąd oczywiście  $\phi(x+1) = f(x+1)h(x+1) = (-1)^2 f(x)h(x) = \phi(x)$ .

*Krok 2.* Dla każdego  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  zachodzi tożsamość

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right)\phi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \phi(x). \quad (10.25)$$

Aby się o tym przekonać, skorzystamy (dwa razy: dla  $t = x$  i  $t = 1-x$ ) ze wzoru Legendre'a:

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{x}{2}\right)\phi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{1}{\pi^2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2} \\ &\quad \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\sin\frac{\pi(x+1)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi^2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(1-x)+1}{2}\right) \cdot \sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(1-x)-1}}\Gamma(1-x) \cdot \frac{1}{2}\sin\pi x \\ &= \frac{1}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x \\ &= \phi(x). \end{aligned}$$

*Krok 3.* Istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 1. \quad (10.26)$$

Istotnie,

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x = x\Gamma(x)\Gamma(1-x) \cdot \frac{\sin\pi x}{\pi x} = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x) \cdot \frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

Wiemy jednak, że  $\Gamma$  jest ciągła w 1,  $\Gamma(1) = 1$  i  $(\sin y)/y \rightarrow 1$  dla  $y \rightarrow 0$ . Stąd już wynika równość (10.26).

*Krok 4.* Funkcję  $\phi$  można przedłużyć do dodatniej funkcji klasy  $C^1(\mathbb{R})$ , mającej okres 1. Będziemy tę funkcję oznaczać nadal tą samą literą.

Wystarczy po prostu przyjąć

$$\phi(k) = \lim_{x \rightarrow k} \phi(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z okresowości  $\phi$  na  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  oraz (10.26) wynika, że ta granica istnieje i jest równa 1 dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$ . Otrzymana funkcja jest różniczkowalna w punktach  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , a jej pochodna  $\phi'$  jest na  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  ciągła, gdyż  $\Gamma(x)$  i  $\Gamma(1-x)$  są na tym zbiorze różniczkowalne w sposób ciągły. Ciągłość  $\phi$  w punktach  $\mathbb{Z}$  i jej okresowość na  $\mathbb{R}$  wynika wprost z definicji.

Pozostaje sprawdzić istnienie i ciągłość  $\phi'$  w punktach całkowitych. Korzystając (jak wyżej) z tożsamości  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , a następnie rozwijając w szereg potęgowy funkcję  $(\pi x)^{-1} \sin \pi x$ , piszemy

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{\pi} \Gamma(x)\Gamma(1-x) \sin \pi x = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x) \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi x} \\ &= \Gamma(1+x)\Gamma(1-x) \cdot \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \dots\right)\end{aligned}\quad (10.27)$$

Ostatni wzór ma sens dla wszystkich  $x \in (-1, 1)$ . Każdy z trzech czynników prawej strony jest na tym przedziale funkcją różniczkowalną w sposób ciągły (korzystamy z własności  $\Gamma$  i z twierdzenia o pochodnej sumy szeregu potęgowego). Dlatego  $\phi'(0)$  istnieje i  $\phi'$  jest ciągła w zerze. Zatem, wobec okresowości,  $\phi' \in C(\mathbb{R})$ .

*Krok 5.* Jest  $\phi'(0) = 0$ . Istotnie, różniczkując prawą stronę wzoru (10.27), otrzymujemy ze wzoru na pochodną iloczynu

$$\phi'(0) = \Gamma'(1) \cdot \Gamma(1) \cdot 1 - \Gamma(1) \cdot \Gamma'(1) \cdot 1 + \Gamma(1)^2 \cdot 0 = 0.$$

(pochodna szeregu potęgowego w (10.27) znika w zerze, gdyż nie ma wyrazu liniowego).

*Krok 6.* Wykażemy, że

$$L(x) = (\ln \phi(x))', \quad x \in \mathbb{R}$$

jest funkcją stałą, równą zero.

Funkcja  $L$  ma okres 1 i jest ciągła. Osiaga zatem swój kres górnny

$$M = \sup_{\mathbb{R}} L = \sup_{[0,1]} L = L(a)$$

w pewnym punkcie  $a \in [0, 1]$ . Z (10.25) po zlogarytmowaniu, a następnie po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\ln \phi\left(\frac{x}{2}\right) + \ln \phi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \ln \phi(x), \quad \frac{1}{2}L\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln L\left(\frac{x+1}{2}\right) = L(x).$$

Zatem

$$M = \sup_{\mathbb{R}} L = L(a) = \frac{1}{2}L\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln L\left(\frac{a+1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M.$$

Nierówność oczywiście nie może być ostra. Dlatego, w szczególności,  $L(a/2) = M$ . Przez indukcję  $L(a/2^n) = M$ . Stąd

$$L(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} L\left(\frac{a}{2^n}\right) = M.$$

Z drugiej strony,

$$L(0) = (\ln \phi(x))'\Big|_{x=0} = \frac{\phi'(0)}{\phi(0)} = \phi'(0) = 0.$$

Przeto,  $M = \sup L = 0$ .

W pełni analogiczne rozumowanie pozwala sprawdzić, że  $m = \inf L = 0$ . Dlatego  $L(x) = (\ln \phi(x))' \equiv 0$ , tzn.  $\ln \phi(x) \equiv \text{const} = \ln \phi(1) = \ln 1 = 0$ . Stąd już  $\phi \equiv 1$ .  $\square$

**Wniosek 10.45.** Dla wszystkich  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  zachodzi wzór

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \quad (10.28)$$

Dowód. Sprawdziliśmy, że

$$\phi(x) := \frac{1}{\pi} \Gamma(x)\Gamma(1-x) \sin \pi x \equiv 1 \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Stąd i z równości  $x\Gamma(x) = \Gamma(1+x)$  dla  $x \notin \mathbb{Z}$  wynika teza wniosku.  $\square$

**Uwaga.** Wzór (10.28) ma sens także w punktach  $x \in \mathbb{Z}$ . Wystarczy umówić się, że  $\Gamma = \infty$  w punktach  $\{0, -1, -2, \dots\}$  i  $1/\infty = 0$ . Co więcej, można sprawdzić (co wykracza poza ramy tego wykładu) że przy takiej umowie obie strony mają sens dla wszystkich punktów płaszczyzny zespolonej i są funkcjami analitycznymi zmiennej zespolonej na całej płaszczyźnie.

**Wniosek 10.46.** Dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi wzór

$$\sin \pi x = \pi x \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right). \quad (10.29)$$

Mówiąc nieformalnie, powyższy wzór pozwala patrzeć na funkcję  $\sin \pi x$  tak, jakby była wielomianem o nieskończonej liczbie miejsc zerowych w punktach całkowitych, równym (nieskończonemu) iloczynowi czynników  $1 \pm \frac{x}{k}$  (znikających w punktach  $x = \mp k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) oraz czynnika  $\pi x$ . Podobne przedstawienia funkcji w postaci iloczynów nieskończonych, zawierających czynniki liniowe, znikające tam, gdzie dana funkcja ma zera, odgrywają ważną rolę w analizie zespolonej.

Dowód Wniosku 10.46 pozostawimy jako zadanie, łatwe przy obecnej wiedzy Czytelnika. Trzeba skorzystać ze wzoru na dopełnienie podanego w poprzednim wniosku i wyrazić funkcję  $1/\Gamma(t)$  wzorem iloczynowym Weierstrassa 10.22, biorąc  $t = 1 \pm x$ .

**Przykład 10.47.** Sprawdzamy po raz trzeci, że  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Ze wzoru (10.28) i własności  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$  łatwo otrzymujemy

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Dla  $x = 1/2$  dostajemy stąd  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .  $\square$

## 10.4 Rozwinięcie cotangensa w szereg ułamków prostych

Z rozważań poprzedniego rozdziału wyprowadzimy teraz tożsamość, jaką spełnia funkcja  $\operatorname{ctg} \pi x$  w punktach  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , a następnie zastosujemy tę tożsamość do obliczenia sum szeregow

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Twierdzenie 10.48.** Dla wszystkich  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  zachodzi równość

$$\pi \operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right). \quad (10.30)$$

Dowód. Niech  $M > 0$ . Mamy

$$\left| \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right| = \left| \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| \leq \frac{4M}{n^2} \quad \text{dla } |x| \leq M, n^2 > 2M^2 \geq 2|x|^2. \quad (10.31)$$

Dlatego na zbiorze  $[-M, M] \setminus \mathbb{Z}$  szereg w (10.30) określa funkcję ciągłą (korzystamy z kryterium Weierstrassa). Z dowolności  $M$  wynika, że wzór (10.30) ma sens na  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

Oznaczmy

$$S_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Nietrudno sprawdzić, że dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  jest

$$\begin{aligned} S_N(x+1) &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)+N} + \frac{1}{(x+1)+N-1} + \cdots + \frac{1}{(x+1)+1} \\ &\quad + \frac{1}{(x+1)-1} + \frac{1}{(x+1)-2} + \cdots + \frac{1}{(x+1)-N} \\ &= S_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N+1} + \frac{1}{x+N}. \end{aligned}$$

Dlatego  $\lim_N S_N(x+1) = \lim_N S_{N-1}(x) = \lim_N S_N(x)$ . Prawa strona (10.30) jest więc na  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  funkcją okresową o okresie 1. Lewa strona (10.30) też ma tę własność. Dlatego wystarczy sprawdzić równość z tezy dla  $x \in (0, 1)$ .

Wobec Wniosku 10.46 i nierówności  $\sin \pi x > 0$ , która zachodzi dla  $x \in (0, 1)$ , możemy dla takich  $x$  napisać

$$\ln \sin \pi x = \ln \pi + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right) + \ln \left( 1 - \frac{x}{k} \right) \right).$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny.<sup>2</sup> Pochodna lewej strony jest równa  $\pi \operatorname{ctg} \pi x$ . Różniczkując prawą stronę wyraz po wyrazie, otrzymujemy

$$\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right).$$

Korzystając z wykazanej wcześniej jednostajnej zbieżności tego szeregu oraz twierdzenia o różniczkowaniu ciągów i szeregów funkcyjnych, kończymy dowód.  $\square$

**Przykład 10.49 (liczby Bernoullego i wartości funkcji dzeta Riemanna).** Opierając się na Twierdzeniu 10.48, można wyznaczyć liczby

$$\zeta(2m) = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \cdots, \quad m = 1, 2, \dots,$$

tzn. wartości w liczbach naturalnych parzystych funkcji *dzeta Riemanna*, wspomnianej przelotnie w Przykładzie 4.21.

---

<sup>2</sup>Można to sprawdzić bezpośrednio, ale można też po prostu odwołać się do udowodnionego już Wniosku 10.46 i ciągłości logarytmu naturalnego.

Trzeba w tym celu dwoma sposobami rozwiniąć funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \pi x \operatorname{ctg} \pi x, & x \in (-1, 1), x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

w szereg potęgowy wokół zera i porównać otrzymane współczynniki. (Zauważmy, że  $f$  jest ciągła w zerze).

Posługując się Twierdzeniem 10.48, wzorem na sumę szeregu geometrycznego i Lemma 8.20 o zmianie kolejności sumowania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \pi x \operatorname{ctg} \pi x &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{x+n} + \frac{x}{x-n} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{(1 - (x^2/n^2))} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x^2}{n^2} \right)^k \\ &= 1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} x^{2m} \zeta(2m). \end{aligned} \quad (10.32)$$

(przechodząc do ostatniej linijki, zmieniliśmy kolejność sumowania, a następnie wprowadziliśmy nowy indeks  $m = k + 1 = 1, 2, \dots$ ).

Aby uzyskać rozwinięcie  $f$  w szereg inną metodą, wykorzystamy wiedzę o funkcjach trygonometrycznych i funkcji wykładniczej, oraz ich związek, określony w Definicji 4.58. Otóż,

$$\begin{aligned} \pi x \operatorname{ctg} \pi x &= \pi x \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} \stackrel{\text{Def. 4.58}}{=} i\pi x \cdot \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \quad (\text{nied } z = 2\pi ix) \\ &= \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \\ &= \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Zauważmy, że funkcja

$$g(z) = f\left(\frac{z}{2i}\right) - \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1}$$

jest dobrze określona na zbiorze  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\pi\}$ . To wynika z faktu, że  $f$  nie ma osobliwości w zerze, a funkcja wykładnicza przyjmuje wartość 1 tylko w punktach  $z = 2\pi ik$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$  (patrz Wniosek 4.72).

Sprawdzimy teraz, że

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=2}^{\infty} b_m z^m, \quad (10.34)$$

gdzie współczynniki  $b_m$  spełniają zależność

$$\sum_{m=0}^N \frac{b_m}{(N+1-m)!} = \begin{cases} 1, & N=0, \\ 0, & N=1,2,\dots \end{cases} \quad (10.35)$$

Istotnie, pierwsza równość (10.34) jest równoważna innej,

$$\begin{aligned} 1 = \frac{e^z - 1}{z} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^N \frac{b_m}{(N-m+1)!} \right) z^N. \end{aligned}$$

Przechodząc do drugiej linii, wypisaliśmy iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów. Równość (10.35) wynika z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy i porównania współczynników. Wypada się tylko upewnić, że szereg potęgowy  $\sum b_m z^m$  ma dodatni promień zbieżności.<sup>3</sup> Jednak z (10.35) otrzymujemy  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -\frac{1}{2}$ , a następnie

$$b_N = -\frac{b_{N-1}}{2!} - \frac{b_{N-2}}{3!} - \dots - \frac{b_0}{(N+1)!}.$$

Łatwo wykazać przez indukcję, że  $|b_N| \leq 1$ . Istotnie, dla  $N = 0, 1$  teza zachodzi, a z nierówności trójkąta i założenia indukcyjnego  $|b_k| \leq 1$  dla  $k = 0, 1, \dots, N-1$  otrzymujemy

$$|b_N| \leq \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(N+1)!} < e - 2 < 1.$$

Zatem promień  $R$  zbieżności szeregu, występującego we wzorze (10.34), spełnia zależność  $R^{-1} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{|b_N|} \leq 1$ , tzn.  $R \geq 1$ . Podstawiając rozwinięcie (10.34) do wzoru (10.33), otrzymujemy

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} b_m (2\pi i x)^m.$$

Jednak lewa strona jest parzystą funkcją zmiennej  $x \in (-1, 1)$ . Dlatego  $b_{2s+1} = 0$  dla wszystkich  $s \in \mathbb{N}$  (pochodne nieparzystego rzędu funkcji parzystej są funkcjami nieparzystymi, a więc znikają w zerze). Możemy zatem napisać

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} (2\pi)^{2m} (-1)^m x^{2m} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m} (2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} (-1)^{m+1} x^{2m}, \quad (10.36)$$

gdzie

$$B_k = k! b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.37)$$

Liczby  $B_k$  nazywają się *liczbami Bernoullego*. Można je wyznaczać rekurencyjnie, korzystając z zależności (10.35). Porównując prawe strony wzorów (10.32) i (10.36), otrzymujemy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m} (2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} (-1)^{m+1} x^{2m} = \sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m) x^{2m}.$$

---

<sup>3</sup>To wynika z ogólnego twierdzenia, orzekającego, że jeśli  $g$  jest nieznikającą funkcją analityczną zmiennej rzeczywistej lub zespolonej, to  $1/g$  też jest funkcją analityczną. Nie dowodziliśmy jednak tego twierdzenia. Dlatego wskażemy prosty argument, dostosowany do rozważanego przypadku.

$n$	$B_n$	$n$	$B_n$	$n$	$B_n$
2	$\frac{1}{6}$	18	$\frac{43\,867}{798}$	34	$\frac{2\,577\,687\,858\,367}{6}$
4	$-\frac{1}{30}$	20	$-\frac{174\,611}{330}$	36	$-\frac{26\,315\,271\,553\,053\,477\,373}{1\,919\,190}$
6	$\frac{1}{42}$	22	$\frac{854\,513}{138}$	38	$\frac{2\,929\,993\,913\,841\,559}{6}$
8	$-\frac{1}{30}$	24	$-\frac{236\,364\,091}{2730}$	40	$-\frac{261\,082\,718\,496\,449\,122\,051}{13\,530}$
10	$\frac{5}{66}$	26	$\frac{8\,553\,103}{6}$	42	$\frac{1\,520\,097\,643\,918\,070\,802\,691}{1806}$
12	$-\frac{691}{2730}$	28	$-\frac{23\,749\,461\,029}{870}$	44	$-\frac{27\,833\,269\,579\,301\,024\,235\,023}{690}$
14	$\frac{7}{6}$	30	$\frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322}$	46	$\frac{596\,451\,111\,593\,912\,163\,277\,961}{282}$
16	$-\frac{3617}{510}$	32	$-\frac{7\,709\,321\,041\,217}{510}$	48	$-\frac{5\,609\,403\,368\,997\,817\,686\,249\,127\,547}{46\,410}$

Liczby  $B_2, B_4, \dots, B_{48}$ . Tabelkę wykonano w programie Mathematica, korzystając z wbudowanej funkcji `BernoulliB[ ]`.

Oba szeregi mają dodatni promień zbieżności; wobec jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy,

$$\zeta(2m) = \frac{B_{2m}(2\pi)^{2m}}{2 \cdot (2m)!} (-1)^{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10.38)$$

Ten wzór znał około 1750 roku Leonard Euler. Wyznaczył zeń wartości  $\zeta(2m)$  dla  $1 \leq m \leq 15$ , obliczając odpowiednie liczby Bernoullego. My zauważmy, że

$$b_2 = -\frac{b_1}{2} - \frac{b_0}{3!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}, \quad B_2 = 2! b_2 = \frac{1}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{B_2(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Jest także

$$b_4 = -\underbrace{\frac{b_3}{2!}}_{=0} - \frac{b_2}{3!} - \frac{b_1}{4!} - \frac{b_0}{5!} = -\frac{1}{72} + \frac{1}{48} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$

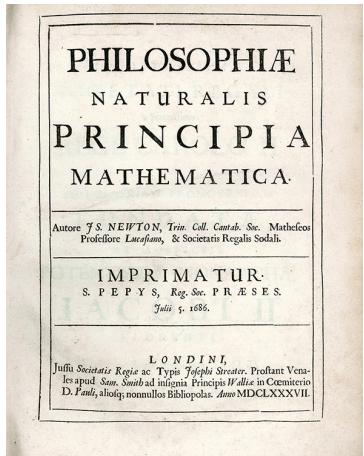
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = -\frac{B_4(2\pi)^4}{2 \cdot 4!} = \frac{16\pi^4}{30 \cdot 2 \cdot 24} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Na tych dwóch wzorach poprzestaniemy, zamieszczając tabelkę z wartościami  $B_{2k}$  dla  $2k \leq 48$ , którą program Mathematica produkuje, zużywając około  $10^{-4}$  sekundy.

Warto podkreślić, że o liczbach  $\zeta(2m+1)$  wiadomo znacznie mniej. Dopiero w 1978 roku niewymierność  $\zeta(3)$  wykazał Roger Apéry. Wśród liczb  $\zeta(2m+1)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , jest nieskończonie wiele liczb niewymiernych, ale tożsamości podobne do (10.38) nie są znane.

## Rozdział 11

# Zakończenie: eliptyczność orbit



Opiszmy na zakończenie jeden z największych historycznych sukcesów rachunku różniczkowego: *dowód*, że pod działaniem siły grawitacji planety poruszają się po elipsach.

Zgodnie z prawem grawitacji, dwa ciała o masach  $M$  i  $m$  przyciągają się z siłą skierowaną wzdłuż łączącej je prostej i proporcjonalną do iloczynu mas oraz odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości ciał. Ciało o masie  $M$  (Słońce) umieścimy w początku układu współrzędnych w  $\mathbb{R}^3$ . Zmienna  $t > 0$  to czas. Milcząco założymy, że wszystkie funkcje występujące w rachunkach są różniczkowalne.

W chwili  $t > 0$  planeta o masie  $m$  jest w punkcie  $y(t) \in \mathbb{R}^3$ . Słońce przyciąga ją z siłą

$$F = -\frac{GMm}{|y|^3}y,$$

gdzie  $|y|$  oznacza długość wektora  $y \in \mathbb{R}^3$ . Z drugiej zasady dynamiki wiadomo, że siła  $F$  nadaje przyspieszenie  $a = y''$  i zachodzi równość  $F = ma$ . Dlatego

$$y'' = -\frac{GM}{|y|^3}y.$$

Matematykowi wolno przyjąć, że wskutek doboru jednostek iloczyn  $GM = 1$ . Równanie różniczkowe, opisujące ruch planety wokół Słońca ma wtedy postać

$$y'' = -\frac{y}{|y|^3}. \tag{11.1}$$

**Twierdzenie 11.1 (Newton).** *Wszystkie rozwiązania równania (11.1) są krzywymi płaskimi. Jedyne krzywe zamknięte, spełniające (11.1), to elipsy (o ognisku w zerze).*

Dowód. Najpierw wykażemy, że ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie. W tym celu rozpatrzymy iloczyn wektorowy  $y \times y'$  i obliczymy jego pochodną:

$$\frac{d}{dt}(y \times y') = y' \times y' + y \times y'' = y \times y'' \stackrel{(11.1)}{=} 0.$$

(Łatwo sprawdzić, że wzór na pochodną iloczynu wektorowego funkcji  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  jest taki sam, jak zwykły wzór na pochodną iloczynu; ponadto  $a \times a = 0$  i dlatego otrzymujemy kolejne równości). Zatem

$$y \times y' \equiv \text{const} =: h \in \mathbb{R}^3, \quad (11.2)$$

to zaś oznacza, że płaszczyzna rozpięta na wektorach  $y, y'$  jest w każdej chwili prostopadła do wektora  $h$ . Zatem  $y, y' \perp h$  i ruch odbywa się w ustalonej płaszczyźnie.

Odtąd więc, obróciwszy układ współrzędnych, mamy prawo zakładać, że  $y = y(t) \in \mathbb{R}^2$ . Wprowadźmy w  $\mathbb{R}^2$  współrzędne biegunowe  $r, \theta$ . Będziemy pisać

$$e_r = (\cos \theta, \sin \theta), \quad e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta),$$

oraz

$$y = r \cdot e_r, \quad \text{gdzie } r = |y|. \quad (11.3)$$

Oczywiście,  $r, \theta: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami czasu  $t$ , określonymi tak długo, jak długo odbywa się ruch. Wyraźmy przyspieszenie w tym układzie współrzędnych.

Ze wzorów na pochodne sinusa i cosinusa wynika, że  $(e_r)' = \theta' e_\theta$  i  $(e_\theta)' = -\theta' e_r$ . Dlatego po prostym rachunku, różniczkując dwukrotnie, otrzymujemy

$$y' = r'e_r + r(e_r)' = r'e_r + r\theta' e_\theta, \quad (11.4)$$

$$y'' = (r'' - r(\theta')^2)e_r + (r\theta'' + 2r'\theta')e_\theta. \quad (11.5)$$

Jednak z równania (11.1) wynika, że wektor  $y''$  jest równoległy do  $y$ , tzn. do wektora jednostkowego  $e_r$ . Współrzędna w kierunku  $e_\theta$  musi więc zniknąć. Przeto

$$r\theta'' + 2r'\theta' = 0, \quad r^2\theta'' + 2rr'\theta' = \frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0, \quad r^2\theta' \equiv \text{const} = L. \quad (11.6)$$

Wspomnijmy o interpretacji geometrycznej ostatniej równości: wynika z niej, że całka

$$A(t) = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta$$

ma stałą pochodną  $A'(t) = L/2$ . Jest to tzw. *drugie prawo Keplera* – prędkość polowa planety jest stała (inaczej: w równych odcinkach czasu promień wodzący planety zamiatają figury o równych polach). Czytelnik zechce samodzielnie pomyśleć, dlaczego całka  $A(t)$  jest równa polu odpowiedniej figury.<sup>1</sup>

Z równań (11.5) i (11.6) otrzymujemy  $y'' = (r'' - r(\theta')^2)e_r = (r'' - r(\theta')^2)\frac{y}{|y|}$ . Porównując to wyrażenie z równaniem (11.1), sprawdzamy, że

$$r'' - r(\theta')^2 = -\frac{1}{|y|^2} = -\frac{1}{r^2}.$$

Jednak wobec równości (11.6) jest  $r(\theta')^2 = L^2/r^3$ , więc

$$r'' = r^{-3}L^2 - r^{-2}. \quad (11.7)$$

<sup>1</sup>Trzeba znać wzór na pole trójkąta i umieć posługiwać się sumami Riemanna.

Aby rozwiązać to równanie, użyjemy sztuczki. Niech  $u(\theta) := 1/r(t(\theta))$ , gdzie  $t = t(\theta)$  jest funkcją odwrotną do  $\theta = \theta(t)$ . Ze wzorów na pochodną złożenia i (11.6) otrzymujemy

$$\frac{d}{d\theta} u = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{L} r', \quad \frac{d^2}{d\theta^2} u = -\frac{1}{L} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\frac{r^2}{L^2} r''. \quad (11.8)$$

Stąd

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{r^2}{L^2} r'' + \frac{1}{r} \stackrel{(11.7)}{=} \frac{1}{L^2}.$$

Można wykazać – proszę spróbować zrobić to samodzielnie – że jedynymi rozwiązaniami równania  $u'' + u = L^{-2}$  są funkcje

$$u(\theta) = A \cos(\theta + B) + \frac{1}{L^2}, \quad \text{tzn.} \quad r = \frac{1}{u} = \frac{L^2}{1 + AL^2 \cos(\theta + B)}.$$

Gdy stała  $AL^2 \in (0, 1)$ , ostatnie równanie jest parametrycznym równaniem elipsy. Czytelnik zdoła to sam sprawdzić. Dla  $AL^2 \geq 1$  funkcja  $r = r(\theta)$  nie jest ograniczona. Trajektoria jest wtedy parabolą lub hiperbolą.  $\square$

W swoich *Principia Mathematica* Newton wykazał także, że jeśli wszystkie orbity zamknięte są elipsami, to wielkość siły musi być odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciał. Stała  $AL^2$  jest *mimośrodem elipsy*.

Przybliżone mimośrodys orbit planet w Układzie Słonecznym są następujące:

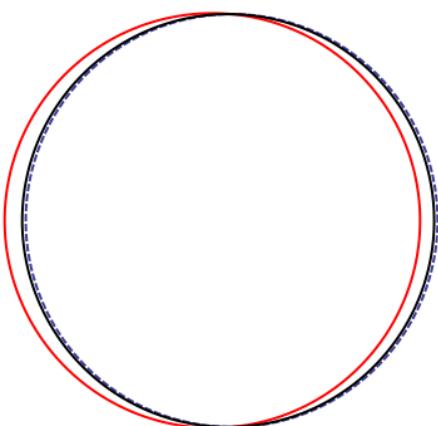
Merkury	Wenus	Ziemia	Mars
0,205	0,007	0,017	0,093
Jowisz	Saturn	Uran	Neptun
0,048	0,054	0,047	0,009

Orbita odbiegają więc od kołowych bardzo nienotycznie. Mimo to, na podstawie danych obserwacyjnych, które zgromadził astronom Tycho Brahe, Kepler zdołał w 1609 roku wysunąć przypuszczenie, że orbity planet są elipsami.

Czytelnik zgodzi się jednak, że czym innym jest *supozycja*, wysnuta z obserwacji, czym innym zaś *dowód*, stwierdzający, że przy pewnych założeniach orbita muszą być elipsami. (To zresztą tylko rozsądne przybliżenie rzeczywistości, gdyż naprawdę na ruch każdej z planet wokół Słońca wpływa siła przyciągania pozostałych planet, znikoma w porównaniu z przyciąganiem Słońca, ale przecież niezerowa. Dlatego orbity są elipsami jedynie w pewnym przybliżeniu, a ich mimośrodys podlegają wahaniom.)

\* \* \*

Siła Analizy Matematycznej tkwi więc zarówno w zastosowaniach, jak i w subtelnej teorii. Warto o tym pamiętać.



Okrąg (linia przerywana), elipsa o mimośrodzie takim, jak orbita Ziemi (cięgła linia czarna) i elipsa o mimośrodzie orbity Marsa (linia czerwona). Środek okręgu i jedno z ognisk każdej elipsy są w tym samym punkcie.

(Czytelnik zgodzi się jednak, że czym innym jest *supozycja*, wysnuta z obserwacji, czym innym zaś *dowód*, stwierdzający, że przy pewnych założeniach orbita muszą być elipsami. (To zresztą tylko rozsądne przybliżenie rzeczywistości, gdyż naprawdę na ruch każdej z planet wokół Słońca wpływa siła przyciągania pozostałych planet, znikoma w porównaniu z przyciąganiem Słońca, ale przecież niezerowa. Dlatego orbity są elipsami jedynie w pewnym przybliżeniu, a ich mimośrodys podlegają wahaniom.)

## Dodatek A

# Szeregi Fouriera

Teoria szeregów Fouriera wyrosła z prób przedstawiania obiektów skomplikowanych w postaci kombinacji obiektów bardzo prostych i dobrze znanych. Ten stary pomysł – widać go wszak np. w astronomii, w koncepcji Ptolemeusza, by składać wszelkie ruchy ciał niebieskich z krążenia po epicyklach – doprowadził do powstania rozległej i bogatej gałęzi analizy matematycznej, która ma liczne zastosowania, także w teorii równań różniczkowych cząstkowych.

### A.1 Motywacje, intuicje

Jean Baptiste Joseph Fourier zasłynął jako autor *La Théorie Analytique de la Chaleur*, wydanej drukiem w roku 1822, a napisanej wcześniej, głównie w latach 1805–1807, gdy był prefektem w Grenoble. We wstępie do tej książki pisał:

*...choć równania opisujące przepływ ciepła mają szczególnie prostą postać, to znane metody nie dostarczają żadnego ogólnego sposobu ich całkowania. Nie możemy zatem czerpać z nich wiadomości o temperaturze po upływie konkretnego czasu. Interpretacja liczbową jest jednak niezbędna; jak długo jej nie mamy, rozwiązania są niepełne i bezużyteczne, a prawda, którą chcielibyśmy odkryć, nie gorzej i nie mniej jest ukryta w formułach analizy matematycznej, niż była w oryginalnym zagadnieniu fizycznym. Rozwiążaniem tej kwestii zajęliśmy się z wszelkim staraniem i byliśmy w stanie pokonać trudności we wszystkich rozpatrzonych zagadnieniach.*

Przyjrzyjmy się przez chwilę jednemu z zagadnień, które rozpatrywał Fourier.

#### A.1.1 Model przepływu ciepła w jednorodnym pręcie

Wyidealizowany pręt to odcinek  $I = [0, \pi]$ ; temperatura w punkcie  $x \in I$  w chwili czasu  $t \geq 0$  to wartość funkcji dwóch zmiennych  $u(x, t)$ . Zmiany temperatury – przy odpowiednim doborze jednostek – opisuje równanie

$$u_t = u_{xx}; \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0, \tag{A.1}$$

(w równaniu występują tzw. *pochodne cząstkowe*<sup>1</sup>:  $u_t$  oznacza pochodną funkcji  $u(x, t)$  względem zmiennej  $t$ , przy czym  $x$  traktujemy jako ustalony parametr, natomiast  $u_{xx}$  – drugą pochodną funkcji  $u(x, t)$  względem  $x$ , gdzie tym razem  $t$  traktujemy jako ustalony parametr), które uzupełniamy warunkami

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad \text{dla } x \in (0, \pi), \quad t > 0. \quad (\text{A.2})$$

Inaczej mówiąc, zakładamy, że w chwili  $t = 0$  znany jest początkowy rozkład temperatury  $u(x, 0) = f(x)$ , a końca pręta cały czas mają temperaturę zero. (Wypada jeszcze przyjąć tzw. *warunki zgodności*  $f(0) = f(\pi) = 0$ .)

Nietrudno zauważyc, że samo równanie (A.1) ma rozwiązania

$$u_n(x, t) = \exp(-n^2 t) \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Każde z nich spełnia także warunek *brzegowy*  $u_n(0, t) = u(\pi, t) = 0$ .<sup>2</sup>

Równanie (A.1) jest liniowe, a zatem spełniać je będzie również dowolna kombinacja liniowa znalezionych rozwiązań,

$$u(x, t) = \sum_n b_n \exp(-n^2 t) \sin nx. \quad (\text{A.3})$$

(To formalny zapis. Nie wnikamy w to, czy suma jest skończona, czy nie; czy szereg jest zbieżny etc.) Dla  $t = 0$  otrzymujemy, znów formalnie,  $u(x, 0) = f(x) = \sum_n b_n \sin nx$ .

Jeśli więc umiemy przedstawić początkowy rozkład temperatury w postaci (być może nieskończonej...) sumy sinusów, to rozwiązanie w jawniej postaci – z dokładnością do sprawdzenia, czy otrzymany szereg wolno różniczkować wyraz po wyrazie – otrzymujemy mechanicznie: wystarczy dopisać czynniki  $\exp(-n^2 t)$ .

Wzór (A.3) pozwala też na jakościową analizę rozwiązania.

1. Jeśli ciąg  $b_n$  jest ograniczony (jak zobaczymy, jest tak już przy bardzo słabym założeniu o całkowalności funkcji  $f$ ), to wówczas – z uwagi na obecność szybko gasących czynników  $\exp(-n^2 t)$  – suma szeregu (A.3) ma ciągle pochodne wszystkich rzędów względem  $x$  i  $t$ .<sup>3</sup>
2. Ponownie, jeśli ciąg  $b_n$  jest ograniczony, to  $u(x, t) \rightarrow 0$  dla  $t \rightarrow +\infty$ . Zgadza się to z intuicją: jeśli koniec ogrzanego pręta są wbite w lód, to pręt w końcu wystygnie – niezależnie od tego, jaki był początkowy rozkład temperatury.
3. Jeśli  $b_1 \neq 0$ , to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{b_1 e^{-t} \sin x} = 1.$$

Zatem, dla dużych czasów  $T$ , wykres temperatury  $u(\cdot, T)$  przypomina wykres funkcji sinus pomnożonej przez pewną stałą: stygający pręt jest najcieplejszy w okolicy środka, z dala od zimnych końców.

<sup>1</sup>Rachunkiem różniczkowym funkcji wielu zmiennych zajmiemy się gruntownie na drugim roku studiów; teraz chodzi tylko o to, żeby powiedzieć, skąd się wzięły szeregi Fouriera.

<sup>2</sup>Jeden z pomysłów Fouriera polegał na tym, żeby nie zgadywać wzoru na  $u_n$  – jak my wyżej – tylko znaleźć go, poszukując rozwiązań postaci  $u(x, t) = v(x)\varphi(t)$ . Dla takich  $u$  równanie (A.1) przybiera postać  $\varphi_t/\varphi = v_{xx}/v$ . Ponieważ lewa strona zależy tylko od  $t$ , a prawa – tylko od  $x$ , więc każda z nich musi być stała. W ten sposób w równaniu dokonujemy *rodzienia zmiennych*. Otrzymane równania na  $\varphi$  i  $v$  można łatwo rozwiązać – Czytelnik nauczy się tego na drugim roku studiów matematycznych.

<sup>3</sup>Czytelnik zechce porównać tę sytuację z Przykładem 7.36.

Aby jednak takie rozumowania miały precyzyjny, matematyczny sens, należy rozstrzygnąć kilka kwestii.

- Czy dla danej funkcji  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  można znaleźć rozkład

$$f(x) = \sum_n b_n \sin nx?$$

- Jak to zrobić?
- Jak należy rozumieć równość, tzn. jaki jest charakter zbieżności szeregu?

Z prób odpowiedzi na te pytania wyrasta teoria szeregów Fouriera. Okazuje się, że drugie pytanie jest względnie łatwe, natomiast trzecie, nietrywialne, można interpretować na wiele sposobów.

### A.1.2 Wzory na współczynniki

Okazuje się, że jeśli funkcja okresowa  $f$  ma być sumą jednostajnie zbieżnego szeregu sinusów i cosinusów, to współczynniki tego szeregu muszą spełniać konkretne, proste wzory.

**Twierdzenie A.1.** *Jeśli funkcja okresowa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest sumą jednostajnie zbieżnego szeregu trygonometrycznego*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (\text{A.4})$$

*to współczynniki tego szeregu są dane wzorami*

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, & m &= 0, 1, 2, \dots, \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, & m &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

**Uwaga A.2.** Zauważmy, że jeśli  $f$  jest funkcją okresową *nieparzystą*, to z uwagi na parzystość cosinusa wzór (A.5) daje  $a_m = 0$  dla wszystkich  $m$ . Każdą funkcję  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $f(0) = f(\pi) = 0$ , można przedłużyć do nieparzystej funkcji  $2\pi$ -okresowej.

Dlatego w rozpatrywanym przez Fouriera modelu przepływu ciepła w jednorodnym przecie wystarczy ograniczyć się do poszukiwania rozwinięcia warunku początkowego w szeregu sinusów.

**Dowód.** Mnożąc obie strony równości (A.4) przez  $\sin mx$  i całkując wyraz po wyrazie (co wolno zrobić właśnie dzięki *jednostajnej* zbieżności szeregu – patrz Twierdzenie 9.37), dostaniemy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) dx \\ &= b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi b_m. \end{aligned}$$

Druga równość bierze się stąd, że

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= \pi \delta_{nm}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx &= 0,\end{aligned}$$

co łatwo sprawdzić, posługując się szkolnymi wzorami na iloczyny sinusów i cosinusów.

Współczynnik  $a_m$  znajdziemy podobnie, biorąc  $\cos mx$  zamiast  $\sin mx$  i powtarzając powyższe rozumowanie.  $\square$

Zauważmy jeszcze, że powyższe twierdzenie wcale nie rozstrzyga, czy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

o współczynnikach  $a_m, b_m$  danych wzorami (A.5) rzeczywiście jest zbieżny (punktowo? jeśli tak, to w jakich punktach? a może jednostajnie?) do danej funkcji  $f$ . Natomiast same wzory (A.5) na współczynniki mają sens dla każdej funkcji ciągłej, a także dla każdej funkcji całkowalnej w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ .

## A.2 Lemat Riemannna–Lebesgue'a. Kryterium Dini'ego

Aby analizować zbieżność szeregów trygonometrycznych, wygodnie jest przejść do zapisu zespolonego.

**Definicja A.3.** Powiemy, że  $n$ -ty współczynnik Fouriera funkcji  $2\pi$ -okresowej ciągłej, bądź całkowalnej w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ , to liczba

$$\hat{f}(n) \equiv c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx) dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.6})$$

Posługując się równością  $\exp(it) = \cos t + i \sin t$ , łatwo sprawdzić, że dla dodatnich  $n$  mamy  $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$  oraz  $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ , gdzie  $a_n$  i  $b_n$  są dane wzorami (A.5). Ponadto,  $c_0 = a_0/2$ .

**Definicja A.4.** Szereg Fouriera funkcji  $f$  to szereg

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp(inx);$$

jego  $N$ -ta suma częściowa w punkcie  $x$  to suma  $(2N+1)$  składników:

$$s_N f(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \exp(inx).$$

Piszemy

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp(inx);$$

symbolu falki używa się dla podkreślenia, że nie wiadomo, czy suma szeregu (a) jest dobrze określona, (b) jest równa  $f(x)$ . (Zobaczmy później, że istnieją funkcje ciągłe, których szeregi Fouriera są rozbieżne w wielu punktach).

Zanim przejdziemy do omawiania zbieżności  $s_N f$ , zanotujmy kilka własności współczynników Fouriera.

**Stwierdzenie A.5.** *Przekształcenie  $f \mapsto (\hat{f}(n))$  jest liniowe. Ponadto, wówczas*

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$$

*dla każdej funkcji całkowalnej w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ .*

Dowód. Pierwsza własność wynika natychmiast z liniowości całki, a druga z nierówności trójkąta dla całki.  $\square$

**Twierdzenie A.6 (lemat Riemann–Lebesgue'a).** *Jeśli  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ , to wówczas  $\hat{f}(n) \rightarrow 0$  dla  $|n| \rightarrow \infty$ .*

Z tym twierdzeniem kryje się następująca intuicja: jeśli funkcja jest ‘mniej więcej stała’ na jakimś odcinku  $(a, b)$ , to dla dużych  $m$  wkład z odcinka  $(a, b)$  do całek (A.5) jest znikomy: z uwagi na bardzo gęste oscylacje sinusa i cosinusa, sumy Riemanna na takich odcinkach są bliskie zera, gdyż składniki dodatnie i ujemne można w nich odpowiednio łączyć w pary i redukować.

Dowód. Ścisłe rozumowanie składa się z czterech części i wykorzystuje (a) liniową zależność współczynników Fouriera od funkcji oraz (b) możliwość przybliżania skomplikowanych funkcji innymi, znacznie prostszymi.

**Krok 1.** Sprawdzamy, że teza zachodzi, gdy  $f$  jest funkcją charakterystyczną przedziału  $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ . Istotnie, wtedy

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[a,b]}(x) \exp(-inx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \exp(-inx) dx = \frac{\exp(-ina) - \exp(-inb)}{2\pi in}.$$

Zatem, z nierówności trójkąta,  $|\hat{f}(n)| \leq 1/\pi|n|$ .

**Krok 2.** Dzięki temu, że przekształcenie  $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  jest liniowe, teza zachodzi także dla każdej funkcji schodkowej

$$g = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{J_k},$$

gdzie  $\alpha_k$  są stałymi, a  $\chi_{J_k}$  – funkcjami charakterystycznymi odcinków  $J_k \subset [-\pi, \pi]$ .

**Krok 3.** Wykażemy następujący prosty fakt:

**Lemat A.7.** *Jeśli teza lematu Riemann–Lebesgue'a zachodzi dla ciągu ciągu funkcji  $f_j$  całkowalnych w sensie Riemanna,  $j = 1, 2, \dots$ , a ponadto funkcja  $f$  całkowalna w sensie Riemanna spełnia warunek*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_j(x)| dx = 0,$$

*to  $\hat{f}(n) \rightarrow 0$  dla  $|n| \rightarrow \infty$ , tzn. teza lematu Riemann–Lebesgue'a zachodzi również dla  $f$ .*

**Dowód LEMATU A.7.** Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Skorzystajmy z założenia i najpierw wybierzmy liczbę  $j_0 \in \mathbb{N}$  tak, aby

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_{j_0}(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{A.7})$$

Ponieważ współczynniki Fouriera liniowo zależą od funkcji, więc

$$\hat{f}(n) = \widehat{f_{j_0}}(n) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_{j_0}(x)) \exp(-inx) dx,$$

a zatem, z nierówności trójkąta, ponieważ  $|e^{it}| = 1$  dla  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|\hat{f}(n)| \leq |\widehat{f_{j_0}}(n)| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_{j_0}(x)| dx.$$

Pierwszy składnik jest mniejszy od  $\varepsilon/2$  dla  $|n|$  dostatecznie dużych, gdyż teza lematu Riemanna-Lebesgue'a zachodzi dla  $f_{j_0}$ . Drugi jest mniejszy od  $\varepsilon/2$  dzięki (A.7).  $\square$

*Krok 4 (aproksymacja).* Aby zakończyć cały dowód, wystarczy teraz udowodnić następujący

**Lemat A.8.** Jeśli  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale  $[-\pi, \pi]$ , a  $\varepsilon > 0$  jest dowolną liczbą, to istnieje funkcja schodkowa

$$g = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{J_k}, \quad (\text{A.8})$$

taka, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - g| dx \leq \varepsilon.$$

**Dowód.** To wynika dość łatwo z kryterium całkowalności w sensie Riemanna, podanego we Wniosku 9.56: znajdujemy podział  $P = (x_0, x_1, \dots, x_N)$  odcinka  $[-\pi, \pi]$ , gdzie  $x_0 = -\pi$ ,  $x_N = \pi$ , taki, że dla tego podziału suma dolna  $D(P, f)$  i górną  $G(P, f)$  spełniają warunek

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leq D(P, f) \leq I := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \leq G(P, f) \leq I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wystarczy teraz położyć  $J_k = (x_{k-1}, x_k)$  dla  $k = 1, \dots, N$  i wziąć stałe  $\alpha_k$  równe wartościom  $f$  np. w środkach odcinków  $J_k$ , żeby funkcja  $g$  dana wzorem (A.8) spełniała warunek z tezy lematu. Istotnie, na każdym z odcinków  $J_k$  podziału  $P$  jest wtedy

$$|f - g| \leq \sup_{J_k} f - \inf_{J_k} f$$

i dlatego, z liniowości i monotoniczności całki,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - g| dx = \sum_{k=1}^N \int_{J_k} |f - g| dx \leq G(P, f) - D(P, f) \leq \varepsilon.$$

Ta obserwacja kończy dowód lematu.  $\square$

Korzystając teraz z Lematu A.8, znajdziemy dla danej funkcji  $f$  całkowalnej w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$  ciąg funkcji schodkowych  $f_j$ , spełniających założenia Lematu A.7, którego teza orzeka, że lemat Riemanna–Lebesgue'a zachodzi (także) dla  $f$ . Dowód całego twierdzenia jest więc zakończony.  $\square$

**Uwaga A.9.** Proszę zauważyc, że teza lematu Riemanna-Lebesgue'a zachodzi również wtedy, gdy funkcja  $|f|$  ma niewłaściwą (np. z uwagi na osobliwość  $f$  w jakimś konkretnym punkcie  $x_0$ ) całkę Riemanna zbieżną na  $[-\pi, \pi]$ . Istotnie, jeśli, powiedzmy,  $|f(x)| \rightarrow \infty$  dla  $x \rightarrow x_0$ , ale poza dowolnie małymi przedziałami wokół  $x_0$  funkcja  $f$  jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna, to wówczas piszemy

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\substack{|x-x_0|>\delta \\ x \in (-\pi, \pi)}} + \int_{\substack{|x-x_0|\leq\delta \\ x \in (-\pi, \pi)}} \right) f(x) \exp(-inx) dx;$$

dla ustalonej liczby  $\delta > 0$  pierwsza z całek dąży do zera dla  $|n| \rightarrow \infty$  (bo  $f$  zastąpiona zerem w małym otoczeniu  $x_0$  jest już całkowalna w sensie Riemanna), natomiast druga całka jest mała dla małych  $\delta$ , z uwagi na zbieżność całki niewłaściwej z  $|f|$ .

### A.2.1 Jądro Dirichleta

**Definicja A.10.** Funkcję  $D_N: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  daną wzorem

$$D_N(s) := \sum_{n=-N}^N e^{ins} = \begin{cases} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{1}{2}s}, & s \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \\ 2N + 1, & s = 0, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

nazywamy *jądrem Dirichleta*.

Drugą z równości w (A.9) wyprowadza się łatwo, stosując wzór na sumę ciągu geometrycznego i Definicję 4.58 funkcji sinus; rachunek pozostawiamy Czytelnikowi.

Zauważmy, że

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1, \quad (\text{A.10})$$

gdyż dla  $n \neq 0$  funkcja  $\exp(int)$  ma na przedziale  $[-\pi, \pi]$  całkę zero.

Z definicji współczynników Fouriera  $\hat{f}(n)$  otrzymujemy natychmiast

$$\begin{aligned} s_N f(x) &= \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \sum_{n=-N}^N e^{in(x-t)} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_N(s) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Ostatnią równość otrzymujemy, dokonując zamiany zmiennych  $x-t=s$  i korzystając z okresowości funkcji podcałkowej.

**Twierdzenie A.11 (kryterium Diniego).** Jeśli  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją  $2\pi$ -okresową, całkowalną w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ , zaś  $x_0 \in [-\pi, \pi]$  jest takim punktem, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty, \quad (\text{A.12})$$

to wówczas  $s_N f(x_0) \rightarrow f(x_0)$  dla  $N \rightarrow \infty$ .

**Uwaga A.12.** Zanim przejdziemy do dowodu, zauważmy, że założenia powyższego twierdzenia są spełnione w każdym punkcie  $x_0 \in [-\pi, \pi]$ , gdy np.

- (i)  $f$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $M$ , tzn.  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$  dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  – wtedy funkcja podcałkowa w (A.14) szacuje się po prostu przez stałą  $M$ ;
- (ii)  $f$  spełnia warunek Höldera ze stałą  $M$  i wykładnikiem  $\alpha \in (0, 1)$ , tzn.  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$  dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  – wtedy funkcja podcałkowa w (A.14) szacuje się przez  $M|t|^{\alpha-1}$ , a całka z ostatniej funkcji na przedziale  $[-\pi, \pi]$  jest zbieżna.

Dowód TWIERDZENIA A.11. Korzystając z równości (A.9)–(A.11), piszemy

$$\begin{aligned} f(x_0) - s_N f(x_0) &= f(x_0) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt \\ &= f(x_0) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0) - f(x_0 - t)}{t} \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \sin \left(N + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_{x_0}(t) \cdot \sin \left(N + \frac{1}{2}\right)t dt, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

gdzie

$$G_{x_0}(t) := \frac{f(x_0) - f(x_0 - t)}{t} \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}$$

jest taka, że  $\int_{-\pi}^{\pi} |G_{x_0}| dt < \infty$  wobec założenia (A.14), gdyż iloraz  $t/\sin(t/2)$  jest ograniczony na  $[-\pi, \pi]$ . Jednak całka po prawej stronie (A.13) zbiega do zera dla  $N \rightarrow \infty$  na mocy lematu Riemanna–Lebesgue'a (proszę zauważać, że zastąpienie  $N$  przez  $N + \frac{1}{2}$  nic nie zmienia w dowodzie tego lematu).  $\square$

**Wniosek A.13 (kryterium Diniego, wersja symetryczna).** Jeżeli  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją  $2\pi$ -okresową, całkowalną w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ , zaś  $x_0 \in [-\pi, \pi]$  jest takim punktem, że

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - 2S}{t} \right| dt < \infty, \quad (\text{A.14})$$

dla pewnej liczby  $S \in \mathbb{R}$ , to wówczas  $s_N f(x_0) \rightarrow S$  dla  $N \rightarrow \infty$ .

Dowód. Korzystając z parzystości jądra Dirichleta  $D_N$ , piszemy

$$\begin{aligned} s_N f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x_0 - t) + f(x_0 + t)) D_N(t) dt, \\ S &= S \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2S \cdot D_N(t) dt. \end{aligned}$$

Reszta dowodu przebiega tak, jak wyżej.  $\square$

**Przykład A.14.** Aby nie obracać się wyłącznie w kręgu abstrakcji, rozwinieme teraz konkretną funkcję w szereg Fouriera i wyniosujemy z tego rozwinięcia poznane już wcześniej wzory na sumy pewnych szeregów liczbowych.

Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Wówczas

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{4},$$

a pozostałe współczynniki znajdujemy bez trudnu, całkując przez części:

$$\pi a_n = \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

i podobnie (Czytelnik sam zechce sprawdzić ten rachunek)

$$\pi b_n = \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ostatecznie, w punktach  $x \in (-\pi, \pi)$  (gdzie można zastosować kryterium Diniego!) jest

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right) - \left( \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right).$$

Wstawiając tu  $x = 0$ , otrzymamy

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

skąd nietrudno otrzymać poznany wcześniej wzór  $\zeta(2) = \pi^2/6$ . Natomiast wstawiając  $x = \pi/2$ , otrzymamy  $\cos(2k+1)x = \sin 2kx = 0$ , a następnie

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots.$$

**Zadanie A.15.** Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją  $2\pi$ -okresową, równą  $x^2$  na  $[-\pi, \pi]$ . Rozwinąć  $f$  w szereg Fouriera; uzasadnić zbieżność punktową tego szeregu i wywnioskować stąd, że  $\zeta(2) = \pi^2/6$ .

### A.2.2 Współczynniki Fouriera pochodnych.

Okazuje się, że współczynniki Fouriera funkcji  $f$  i  $f'$  powiązane są prostą zależnością.

**Stwierdzenie A.16.** Jeśli  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją okresową klasy  $C^1$ , to

$$\widehat{f}'(n) = i n \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. Całkujemy przez części i korzystamy z okresowości  $f$ :

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}'(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \exp(-inx) dx \\ &= f(x) \exp(-inx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot in \exp(-inx) dx \\ &= in \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot in \exp(-inx) dx = 2\pi in \hat{f}(n). \quad \square \end{aligned}$$

**Wniosek A.17.** Dla każdej funkcji  $2\pi$ -okresowej  $f \in C^2$  mamy  $s_N f \rightharpoonup f$  dla  $N \rightarrow \infty$ .

Dowód. Stosując dwukrotnie Stwierdzenie A.16, widzimy, że dla  $f \in C^2$  zachodzi oszacowanie

$$n^2 |\hat{f}(n)| = |\widehat{f''}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''| dx =: K.$$

Stąd  $|\hat{f}(n) \exp(inx)| \leq K/n^2$ . Zatem, zbieżność jednostajna szeregu Fouriera  $f$  wynika z kryterium Weierstrassa (patrz Stwierdzenie 7.13).  $\square$

Założenia ostatniego wniosku można w istotny sposób osłabić.

**Zadanie A.18.** Wykazać, że jeśli  $f$  jest funkcją okresową spełniającą warunek Höldera ze stałą  $M$  i wykładnikiem  $\alpha \in (0, 1)$ , to sumy częściowe szeregu Fouriera  $f$  zbiegają do  $f$  jednostajnie.

### A.3 Szeregi Fouriera i całkowalność z kwadratem

Okazuje się, że bardzo naturalną rzeczą jest rozpatrywanie zbieżności szeregów Fouriera  $f$  nie w sensie punktowym, ani jednostajnym, tylko w nieco innej *metryce* na zbiorze funkcji okresowych.

W tym podrozdziale będziemy rozpatrywać funkcje  $2\pi$ -okresowe  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dla których zarówno  $\operatorname{Re} f$ , jak i  $\operatorname{Im} f$  mają całkę Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ . (Będziemy mówić krótk, że w takim przypadku  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ .<sup>4</sup>

**Definicja A.19.** Dla  $f, g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  całkowalnych w sensie Riemanna kładziemy

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \tag{A.15}$$

oraz

$$\|f\|_{L^2} := \langle f, f \rangle_{L^2}^{1/2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{A.16}$$

<sup>4</sup>Czytelnik przekona się później, podczas dalszych studiów matematycznych, że nie jest to optymalne podejście — wygodnie byłoby od razu rozważać bogatszą klasę funkcji całkowalnych z kwadratem względem miary Lebesgue'a; wtedy uzyskalibyśmy naturalną, wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między przestrzenią funkcji całkowalnych z kwadratem oraz przestrzenią ciągów (współczynników Fouriera) sumowalnych z kwadratem.

**Uwaga A.20.** Czytelnik łatwo sprawdzi, że  $\|f\|_{L^2}$  jest normą np. na przestrzeni funkcji ciągłych na  $[-\pi, \pi]$ . Formalnie biorąc,  $\|f\|_{L^2}$  nie jest normą na przestrzeni funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ , gdyż zmiana wartości funkcji np. w jednym punkcie nie powoduje zmiany całki. (Aby otrzymać normę, trzeba byłoby rozpatrywać klasy abstrakcji relacji równoważności, która utożsamia funkcje o równej całce).

Niech

$$e_n(x) = \exp(inx) \quad \text{dla } n \in \mathbb{Z}, x \in [-\pi, \pi].$$

Zauważmy, że funkcje  $e_n$  tworzą ciąg ortonormalny:

$$\langle e_n, e_m \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Ponadto,

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle_{L^2}.$$

Zapisując funkcję w postaci szeregu Fouriera, próbujemy ją zatem przedstawić jako nieskończoną kombinację parami prostopadłych, unormowanych ‘wektorów’  $e_n$ . Okazuje się, że tej intuicji można nadać precyzyjny sens.

Oznaczmy przez  $T_N$  zbiór wszystkich wielomianów trygonometrycznych stopnia  $N$ , tj. funkcji postaci

$$t = \sum_{n=-N}^N \alpha_n e_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.18})$$

$T_N$  jest podprzestrzenią liniową w przestrzeni wszystkich funkcji określonych na  $[-\pi, \pi]$ .

**Lemat A.21.** Suma częściowa  $s_N f$  szeregu Fouriera funkcji  $f$  jest rzutem ortogonalnym  $f$  na przestrzeń  $T_N$ , tzn. jeśli  $t \in T_N$  i  $t \neq s_N f$ , to wówczas

$$\|f - t\|_{L^2} > \|f - s_N f\|_{L^2}.$$

Ponadto,

$$\|f - s_N f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2. \quad (\text{A.19})$$

Inaczej mówiąc, wśród wszystkich przybliżeń funkcji  $f$  wielomianami trygonometrycznymi stopnia  $N$  istnieje takie, które jest najlepsze w normie  $L^2$ ; jest nim właśnie  $N$ -ta suma częściowa szeregu Fouriera.

Dowód. Wykorzystując warunki ortonormalności (A.17), sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że dla wielomianu  $t = \sum \alpha_n e_n$  zachodzi równość

$$\|f - t\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 + \sum_{n=-N}^N |\alpha_n - \hat{f}(n)|^2. \quad (\text{A.20})$$

Prawa strona osiąga minimum, gdy  $\alpha_n = \hat{f}(n)$  dla wszystkich  $n$  takich, że  $|n| \leq N$ , czyli właśnie dla  $t = s_N f$  (wstawiając takie  $t$ , otrzymujemy też drugą część tezy).  $\square$

Naszym zasadniczym celem będzie teraz dowód następującego twierdzenia.

**Twierdzenie A.22.** Dla każdej funkcji  $2\pi$ -okresowej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , całkowalnej w sensie Riemanna,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N f\|_{L^2} = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2. \quad (\text{A.22})$$

Pierwszą część tezy wyraża się czasem, mówiąc, że sumy częściowe szeregu Fouriera danej funkcji zbiegają do niej w sensie średniokwadratowym. Druga część tezy, wzór (A.22) mówiący, że całka z kwadratu funkcji wyraża się przez sumę kwadratów współczynników Fourierowskich, nazywa się *tożsamością Parsevala*. Można o niej myśleć jako o nieskończenie wymiarowym odpowiedniku twierdzenia Pitagorasa: kwadrat długości wektora  $f$  jest sumą kwadratów jego współrzędnych w ‘bazie’ ortonormalnej  $(e_n)$ .<sup>5</sup>

Dowód tego twierdzenia poprowadzimy nieco okrężną drogą. Najpierw zobaczymy, jak można aproksymować funkcje ciągłe konkretnymi wielomianami trygonometrycznymi, nie w normie  $L^2$ , tylko w normie supremum.

**Definicja A.23.** Funkcję  $F_N: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  daną wzorem

$$F_N(s) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(s) \quad (\text{A.23})$$

nazywamy *jądrem Fejera*.

**Lemat A.24.** Jądro Fejera ma następujące własności:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = 1, \quad F_N \geq 0,$$

a ponadto

$$\sup_{\pi \geq |t| \geq \delta} F_N(t) \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \quad \text{dla każdego } \delta > 0.$$

Dowód Lematu A.24. Po pierwsze,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N 1 = 1.$$

Po drugie, jawnego wzoru na  $F_N$  łatwo znajdziemy dzięki wzorowi na  $D_k$ , sumując ciąg geo-

---

<sup>5</sup>Proszę zwrócić uwagę, że nie jest to baza w sensie przyjętym w algebrze liniowej: biorąc skończone kombinacje liniowe wektorów  $e_n$  otrzymujemy tylko wielomiany trygonometryczne.

metryczny. Wobec drugiej z równości (A.9), mamy

$$\begin{aligned}
 (N+1)F_N(t) \sin \frac{t}{2} &= \sum_{k=0}^N \sin(k + \frac{1}{2})t \\
 &= \operatorname{Im} \sum_{k=0}^N \exp(k + \frac{1}{2})t \\
 &= \operatorname{Im} \left( e^{it/2} \frac{e^{i(N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left( e^{i(N+1)t/2} \frac{e^{i(N+1)t/2} - e^{-i(N+1)t/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \right) \\
 &= \frac{\sin(N+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} e^{i(N+1)t/2},
 \end{aligned}$$

a więc

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin(N+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \quad \text{dla } t \neq 0, \quad F_N(0) = N+1. \quad (\text{A.24})$$

Stąd już natychmiast wynika teza lematu.  $\square$

Okazuje się, że dla funkcji ciągłej  $f$  średnie arytmetyczne sum częściowych szeregu Fouriera  $f$  zbiegają do  $f$  jednostajnie.

**Twierdzenie A.25 (Fejer).** *Niech  $f \in C([-\pi, \pi])$ . Położmy*

$$\sigma_N f = \frac{s_0 f + s_1 f + \cdots + s_N f}{N+1}.$$

Wówczas ciąg  $\sigma_N f \rightrightarrows f$  na  $[-\pi, \pi]$ , gdy  $N \rightarrow \infty$ .

**Dowód.** Wprost z definicji jądra Fejera i wzoru (A.11) na sumy częściowe  $s_k f$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sigma_N f(x) &= \frac{s_0 f(x) + s_1 f(x) + \cdots + s_N f(x)}{N+1} \\
 &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sum_{k=0}^N D_n(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t) dt.
 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Aby porównać  $f$  i ciąg  $\sigma_N f$  sum Fejera, skorzystamy z powyższego wzoru i własności jądra Fejera.

Ustalmy funkcję  $f \in C([-\pi, \pi])$  oraz liczbę  $\varepsilon > 0$ . Korzystając z jednostajnej ciągłości  $f$ , dobierzmy teraz liczbę  $\delta > 0$  tak, aby  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  dla  $|x - y| < \delta$ .

Z Lematu A.24 i wzoru (A.25) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |\sigma_N f(x) - f(x)| &= \left| \sigma_N f(x) - f(x) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot F_N(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\substack{|x-x_0|>\delta \\ x \in (-\pi, \pi)}} + \int_{\substack{|x-x_0|\leq\delta \\ x \in (-\pi, \pi)}} \right) |f(x-t) - f(x)| \cdot F_N(t) dt \\
 &\leq \frac{2 \sup |f|}{(N+1) \sin^2 \frac{\delta}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

dla  $N$  dostatecznie dużych, *niezależnie od wyboru  $x$* , np. dla  $N > 4 \sup |f| \cdot (\sin \frac{\delta}{2})^{-2}$ . Ponieważ otrzymane oszacowanie jest jednostajne, więc dowód całego twierdzenia Fejera jest zakończony.<sup>6</sup>  $\square$

Dowód TWIERDZENIA A.22. Założymy najpierw, że  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  jest ciągłą funkcją  $2\pi$ -okresową. Wobec Lematu A.21 i Twierdzenia Fejera, mamy

$$\begin{aligned}
 \|f - s_N f\|_{L^2}^2 &\leq \|f - \sigma_N f\|_{L^2}^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_N f(x)|^2 dx \\
 &\leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - \sigma_N f(x)|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

To daje pierwszą część tezy; drugą (tożsamość Parsevala) otrzymujemy, przechodząc do granicy  $N \rightarrow \infty$  w równości (A.19) w Lematce A.21.

Jeśli  $f$  nie jest ciągła, a jedynie całkowalna w sensie Riemanna na  $[-\pi, \pi]$ , postępujemy tak: dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  najpierw znajdujemy taką funkcję schodkową  $g$  i taką funkcję ciągłą  $h$  (kawałkami liniową), żeby zachodziły nierówności

$$\|f - g\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|g - h\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(Czytelnik zastanowi się sam, jak to zrobić). Następnie, dobieramy  $N_0$  tak, aby dla  $N > N_0$  mieć  $\|h - s_N h\|_{L^2} < \varepsilon/3$ . Wtedy, na mocy Lematu A.21,

$$\|f - s_N f\|_{L^2} \leq \|f - s_N h\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} + \|g - h\|_{L^2} + \|h - s_N h\|_{L^2} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

dla  $N > N_0$ . Tożsamość Parsevala (jak dla funkcji ciągłych) wynika z (A.19).  $\square$

**Uwaga A.26.** Nietrudno stwierdzić rzekształcenie  $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  jest monomorfizmem z przestrzeni liniowej wszystkich funkcji ciągłych (lub, jeśli kto woli nieco większą ogólność, całkowalnych w sensie Riemanna)  $2\pi$ -okresowych w przestrzeń

$$\ell^2 := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

<sup>6</sup>Jak widać, w ostatniej fazie podzieliliśmy całkę na dwie: w pierwszej funkcja podcałkowa była mała dzięki temu, że  $F_N$  jest małe dla  $t$  oddzielonych od zera, natomiast w drugiej całce, dzięki jednostajnej ciągłości, mała była oscylacja funkcji na odpowiednio krótkim przedziale. Czytelnik, który chciałby widzieć – skądinąd powszechnie w analizie stosowany – mechanizm tego dowodu w nieco szerszym kontekście, może przypomnieć sobie dowód Twierdzenia 7.16 o aproksymacji wielomianami Bernsteina: we wzorze (7.2) podział sumy na dwie części był takim samym zabiegiem, jak powyższy podział całki.

W  $\ell^2$  można wprowadzić iloczyn skalarny i normę wzorami

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}, \quad \|a\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2;$$

przyporządkowanie funkcji  $f$  ciągu  $(\hat{f}(n))$  jej współczynników Fourierowskich zachowuje więc iloczyn skalarny i normę.

Jednak  $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  nie jest *epimorfizmem*: aby mieć przekształcenie ‘na’, trzeba – jak się Czytelnik dowie i przekona w przyszłości – jako dziedzinę rozważać zbiór wszystkich funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a.

## A.4 Funkcje ciągłe o rozbieżnych szeregach Fouriera

**Uwaga.** Ten fragment jest jeszcze niegotowy, będzie uzupełniony.

Pierwszy przykład funkcji ciągłej, której szereg Fouriera jest rozbieżny w pewnych punktach, podał w roku 1876 du Bois Reymond. Wskażemy teraz ogólną (późniejszą) metodę – tzw. *metodę kategorii* – która pozwala udowodnić, że takich funkcji ciągłych jest bardzo wiele (choć nie pozwala żadnej z nich konkretnie wskazać). W tym celu wprowadzimy i objaśnimy kilka prostych pojęć *analizy funkcyjonalnej*.

### A.4.1 Norma operatora liniowego. Operatory liniowe ciągłe.

**Definicja A.27.** Przestrzeń Banacha to przestrzeń liniowa, unormowana i zupełna.

Przestrzeniami Banacha są np.  $\mathbb{R}$  (z normą równą wartości bezwględnej liczby),  $\mathbb{R}^n$  (ze standardową normą euklidesową) i przestrzeń  $C([a, b])$  funkcji ciągłych na odcinku domkniętym  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  z normą supremum  $\|f\|_\infty$  (jak wiadomo z rozdziału 7, zbieżność w tej normie to zbieżność jednostajna).

**Definicja A.28.** Niech  $X, Y$  będą przestrzeniami liniowymi unormowanymi, a  $T: X \rightarrow Y$  — operatorem liniowym. Mówimy, że  $T$  jest ograniczony, jeśli

$$\|T\| := \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$$

(tzw. *norma operatora T*) jest skończona.

Czytelnik sam zechce podać przykład operatora liniowego (zdefiniowanego np. przez określenie wartości na bazie), który nie ma skończonej normy.

Okazuje się, że ograniczoność operatora liniowego jest równoważna jego ciągłości.

**Stwierdzenie A.29.** Niech  $X, Y$  będą przestrzeniami liniowymi unormowanymi, a  $T: X \rightarrow Y$  — operatorem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(i)  $T$  jest ciągły w każdym punkcie  $x \in X$ ;

(ii)  $T$  jest ciągły w zerze;

(iii)  $\|T\| < \infty$ .

### A.4.2 Sumy częściowe szeregu Fouriera jako funkcjonały liniowe.

Niech, dla  $X = C([-\pi, \pi])$  z normą supremum i dla  $Y = \mathbb{R}$  z normą  $|x|$ ,

$$T_N: X \rightarrow Y, \quad T_N(f) := s_N f(0) \in \mathbb{R}.$$

**Stwierdzenie A.30.** *Dla  $N = 1, 2, \dots$  mamy*

$$\|T_N\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt \geq c \ln N, \quad (\text{A.26})$$

gdzie  $c > 0$  jest stałą.

Podkreślmy wyraźnie: z powyższego stwierdzenia wynika, że normy funkcjonałów liniowych  $T_N$  nie są wspólnie ograniczone, tylko rosną nieograniczenie wraz z  $N$ .

### A.4.3 Twierdzenie Banacha–Steinhausa i jego zastosowanie.

## Dodatek B

# Pakiety do obliczeń symbolicznych

**napisali: Michał Jóźwikowski, Sławomir Kolasiński**

### B.1 Wprowadzenie

#### B.1.1 Programy typu CAS

Niniejszy dodatek ma na celu zaprezentowanie sytuacji, w których obliczenia komputerowe ułatwiają rozwiązywanie problemów matematycznych. Oczywiście komputer nie może zastąpić człowieka w procesie uzasadniania i dowodzenia różnych twierdzeń matematycznych. Może jednak przeprowadzić za nas żmudne obliczenia. Niekiedy sama obserwacja wystarczająco dużej porcji danych eksperymentalnych pozawala wyciągać wnioski natury ogólnej i naprowadza na poprawne rozwiązywanie zadania. Zaprezentujemy tutaj przykłady podobnych sytuacji.

Obecnie mamy do dyspozycji wiele narzędzi do prowadzenia obliczeń na komputerach. Są to programy typu CAS - z angielskiego *Computer Algebra System*. W [2] można znaleźć listę istniejących narzędzi tego typu wraz z podsumowaniem ich możliwości. Wiele z nich jest dostępnych jako wolne oprogramowanie, a funkcjonalność większości jest w zupełności wystarczająca do naszych zastosowań.

W niniejszym skrypcie będziemy posługiwać się dwoma programami: komercyjnym *Mathematica* oraz wolnym *Maxima*. Program *Mathematica* w wersji 6.0.1.0 jest dostępny dla studentów wydziału MIM w laboratorium komputerowym na maszynie students. Program *Maxima* każdy może zainstalować na własnym komputerze na zasadach wolnego oprogramowania. Warto też wspomnieć o narzędziu [9] dostępnym za darmo w formie serwisu internetowego. Serwis ten potrafi wykonywać podstawowe operacje matematyczne jak obliczanie granic funkcji, różniczkowanie, całkowanie i wiele więcej.

Skrypt podzielony jest na części, których objętość powinna odpowiadać mniej więcej jednym zajęciom laboratoryjnym. Na początku każdej części podajemy właściwy dla niej zakres materiału, a także podstawowe polecenia programu *Mathematica*, które Czytelnik powinien przyswoić. Zazwyczaj nie będziemy komentować treści i składni komend,

uważając że przykłady ich praktycznego użycia są same w sobie dostatecznym wyjaśnieniem. Domyślnie wszystkie obliczenia prowadzimy w *Mathematice*<sup>1</sup>. Aby przepisać je do programu *Maxima* należy użyć słownika podanego na początku każdej części. Niektóre polecenia nie posiadają swoich odpowiedników, lecz przy odrobinie wysiłku można je samemu zaimplementować. W zadaniach do samodzielnego rozwiązyania mogą także pojawić się nieopisane w skrypcie funkcje. Czytelnik sam będzie musiał znaleźć odpowiednie definicje w dokumentacji dostępnej w internecie, patrz [5] oraz [7].

### B.1.2 Obliczenia symboliczne

**Nowe umiejętności:** operacje algebraiczne, obliczenia numeryczne, przekształcanie wyrażeń, funkcje elementarne, definiowanie własnych funkcji.

**Skrypt:** Rozdziały 1.1, 3, 4.4. i 4.5.

**Nowe funkcje:**

<i>Mathematica</i>	<i>Maxima</i>	Komentarz
$2-4^5/7$	$2-4^5/7$	arytmetyka
$2 \cdot 3*7$	$2*3*7$	mnożenie w <i>Mathematice</i> można zapisać * lub spacją
$N[\text{Pi}]$ , $N[\text{Pi}, 5]$	<code>bfloat(%pi), fpprec: 5; bfloat(%pi)</code>	wartość numeryczna liczby (z ilością cyfr znaczących)
$\%, \%, \%$	<code>%, %th(i)</code>	użycie poprzednich wyników
<code>Simplify, FullSimplify</code>	<code>ratsimp, ratsimp, radcan, fullratsimp,</code>	upraszcza wyrażenie
$\text{Sin}[x], \text{Exp}[x], \text{Log}[x]$	<code>sin(x), exp(x), log(x)</code>	funkcje elementarne
$\text{Tan}[x], \text{ArcSin}[x]...$	<code>tan(x), asin(x)...</code>	
<code>Expand</code>	<code>expand</code>	wymnaża wyrażenie
<code>Collect</code>	<code>facsum</code>	porządkuje wyrażenie względem potęg
<code>Factor</code>	<code>factor</code>	sprowadza wyrażenie do postaci iloczynowej
<code>Together</code>	<code>ratsimp</code>	sprowadza ułamki do wspólnego mianownika
<code>Apart</code>	<code>partfrac</code>	rozkłada na ułamki proste
$f[x_]:=x^3$	<code>f(x):=x^3</code>	funkcje użytkownika
<code>Clear[f]</code>	<code>kill(f)</code>	usuwa definicję zmiennej

W tym rozdziale omówimy podstawy prowadzenia obliczeń, przekształcania wyrażeń i używania funkcji w programie *Mathematica*. Przedstawimy tu w sposób systematyczny szereg prostych operacji i procedur, które będą używane w dalszej części niniejszego skryptu. Ich stosowanie jest zazwyczaj intuicyjne, dlatego też pominięcie tego

<sup>1</sup>W wersji 7.0.1.0 dostępnej na wydziale MIM.

rozdziału nie powinno mieć wpływu na zrozumienie pozostałych. Niemniej polecamy go szczególnie tym Czytelnikom, którzy jeszcze nigdy nie używali programów typu CAS.

Prowadzenie obliczeń z użyciem podstawowych operacji algebraicznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie) jest bardzo naturalne i nie wymaga specjalnych wyjaśnień. Drobny niuansem jest fakt, że w programie *Mathematica* znak mnożenia „\*” można zastąpić spacją (przez co użycie jest prostsze i bardziej zbliżone do obliczeń które wykonujemy na piśmie). Przykładowo

$5*7 + 4/3 + (2 \ 3 - 1/3)^3$

daje w wyniku  $\frac{5894}{27}$ . Wartość numeryczna tego wyniku to około 218.296. Możemy to obliczyć wpisując polecenie

$N[\%]$ .

Użyliśmy tutaj  $N[\dots]$ , czyli funkcji zwracającej wartość numeryczną liczby i symbolu %, który zastępuje ostatni obliczony wynik. Operację % możemy iterować, a dokładność numeryczną zwiększać<sup>2</sup>, przykładowo

$N[%, 10]$

zwróci wartość 218.2962963.

Co ważne, programy typu CAS umożliwiają przeprowadzanie obliczeń symbolicznych na tzw. zmiennych ogólnych. Wpiszmy

$5*7 + 5 \ x + 3 \ y - (2 \ x + 3)$ .

*Mathematica* sama uprości to wyrażenie do postaci  $32 + 3x + 3y$ . Przy okazji warto zaznaczyć, że rachunek symboliczny wymaga pewnej ostrożności. Porównajmy następujące dwie komendy:

$x+x^2$   
 $x+x2.$

W pierwszym przypadku program zwróci wynik  $3x$ , interpretując spację jako mnożenie. W drugim *Mathematica* traktuje napis x2 jako nazwę nowej zmiennej.

Gdy zajmujemy się bardziej skomplikowanymi wyrażeniami do uzyskania uproszczonej formy wyniku konieczne może być użycie polecenia Simplify lub FullSimplify. Przykładowo wyrażenie

$5*7 + 5 \ x + 3 \ y - (2 \ x + 3)/3$

nie redukuje się samoczynnie do prostszej postaci. Ale już

$Simplify[%]$

---

<sup>2</sup>Domyślnie *Mathematica* podaje wynik z dokładnością do sześciu cyfr znaczących.

zwraca uporządkowany wynik  $34 + \frac{13x}{3} + 3y$ .

*Mathematica* obsługuje całą paletę funkcji elementarnych (Exp, Log, Sin, Cos, Tan, Cot, Sqrt, ArcSin, Sinh, itd.). Ich nazwy są albo, jak w wymienionych przykładach, takie same jak standardowo używane oznaczenia, albo też są opisem funkcji w języku angielskim (na przykład Floor, Ceiling, IntegerPart itp.). Podobnie jak z prostymi wyrażeniami symbolicznymi, również w przypadku funkcji, komputer potrafi sam, lub po zachęce komendą Simplify, dokonać pewnych uproszczeń. Przykładowo,

```
Exp[Sin[ArcCos[x]]] + Log[x^5] + Sin[2/3 Pi]
Simplify[Sin[x]^2 - Cos[x]^2].
```

W powyższym przykładzie użyliśmy symbolu Pi na oznaczenie liczby  $\pi$ . Również inne ważne stałe matematyczne, takie jak liczba urojona  $i$ , nieskończoność  $\infty$ , liczba  $e$ , czy liczba Eulera  $\gamma$ , oznaczamy w programie *Mathematica* w sposób intuicyjny:

```
I, Infinity, E, EulerGamma
```

Wracając do tematu redukcji wzorów do prostszej postaci, warto pamiętać że niektórych wyrażeń *Mathematica* nie uproszcza bez dodatkowych założeń. Najczęstszym powodem jest fakt, że dla programu domyślną dziedziną funkcji jest płaszczyzna zespolona  $\mathbb{C}$ , a nie prosta rzeczywista  $\mathbb{R}$ . Dodatkowe założenia możemy dodać na kilka równoważnych sposobów. Warto to prześledzić na przykładach:

```
Simplify[Sqrt[x^2], Element[x, Reals]]
Simplify[Sqrt[x^2], Assumptions -> {x < 0}]
Assuming[x > 0, Simplify[Log[x^5]]].
```

Do przydatnych narzędzi rachunkowych należą polecenia: Expand, Collect, Factor, Together i Apart, które często pomagają zaoszczędzić nieprzyjemnych rachunków związanych z przekształcaniem wzorów. Pierwsze z omawianych poleceń służy do rozwijania wyrażenia poprzez wymnożenie nawiasów. Wpiszmy

```
Expand[(x + y)^3 + (2 x + 5 y)^2].
```

Dostaliśmy wynik w postaci sumy. Możemy go teraz w prosty sposób uporządkować względem potęgi  $y$ :

```
Collect[%, y].
```

Komenda Factor jest odwrotnością Expand i służy do sprowadzania wyrażenia do postaci iloczynowej (o współczynnikach wymiernych). Na przykład Factor[x^2 + 5 x + 4] rozłoży dany wielomian na czynniki stopnia pierwszego. Ostatnie dwie z wymienionych wcześniej komend służą do przekształcania ułamków i funkcji wymiernych. Together pozwala sprowadzić wyrażenia do wspólnego mianownika, natomiast Apart szuka rozkładu na ułamki proste. Czytelnik może zaobserwować działanie tych funkcji wpisując kolejno polecenia

```
a = x + (x + 2)/((x^2 - 3) (x^2))
Together[a]
Apart[a].
```

Na koniec warto wspomnieć o definiowaniu własnych poleceń i oznaczeń. W poprzednim przykładzie przypisaliśmy zmiennej  $a$  wartość  $x + \frac{(x+2)}{((x^2-3)(x^2))}$ . Od tej pory  $a$  będzie stale przypisana taka właśnie wartość, w związku z czym, na przykład, polecenie

```
Simplify[x^2 (x^2-3) a]
```

zwróci jako wynik wielomian  $2 + x - 3x^3 + x^5$ . Warto pamiętać, że napis „ $a=b$ ” nie jest dla programu *Mathematica* zdaniem logicznym, tylko operacją przypisania zmiennej  $a$  wartości  $b$ . Natomiast podwójny znak równości  $a==b$  program potraktuje jako pytanie o wartość zdania logicznego „ $a = b$ ”. Czytelnik może łatwo sprawdzić różnicę wpisując polecenia  $2=3$  oraz  $2==3$  i porównując odpowiedzi programu.

Przypiszmy teraz zmiennej  $x$  wartość 2. W konsekwencji zmiana ulegnie również zależna od  $x$  wartość zmiennej  $a$ :

```
x=2
a.
```

Przypisywanie zmiennym wartości, a następnie traktowanie ich jakby były zmiennymi wolnymi to jedna z najczęstszych przyczyn błędów. Przykładowo, jeżeli będziemy chcieli teraz wykonać pewną operację na funkcji zmiennej  $x$ , wynik może nie być tym czego oczekiwaliśmy. Procedura

```
Simplify[Sin[x]^2 - Cos[x]^2]
```

zamiast oczekiwanej  $-\cos(2x)$  zwróci wynik obliczony w punkcie  $x = 2$ . Aby wyczyścić wartość przypisaną zmiennej używamy komendy `Clear[a]` (można też brutalnie zrestartować jądro programu poleciem `Exit[]`). Dla uniknięcia błędów przydatne może być zapytanie `?a`, które pozwala sprawdzić jaki jest obecny status danego symbolu lub polecenia.

*Mathematica* pozwala też definiować użytkownikowi własne funkcje i procedury. Oto składnia takiej operacji:

```
f[x_]:=x^3+2.
```

Zdefiniowaliśmy w ten sposób funkcję wielomianową  $f(x) = x^3 + 2$ . Dalej możemy swobodnie wykonywać operacje na tej funkcji posługując się oznaczeniem  $f(x)$ . Przykładowo wielkość `f[f[y]]` będzie teraz wielomianem dziewiątego stopnia zmiennej  $y$ , natomiast `f[1]` da w wyniku 3.

## B.2 Granice ciągów i funkcji

### B.2.1 Obliczanie prostych granic

**Nowe umiejętności:** obliczanie granic ciągów i funkcji, pętla for.

**Skrypt:** Rozdziały 2 i 5.

### Nowe funkcje:

<i>Mathematica</i>	<i>Maxima</i>	Komentarz
Limit[Sin[x], x->1] For[start,test,krok,ciął]	limit(sin(x), x, 1) for zmienna: start while test do ciął; done	granica funkcji pętla for

---

Programy typu CAS świetnie radzą sobie z obliczaniem granic funkcji elementarnych w danym punkcie. Dla przykładu, wykorzystując program *Mathematica* można szybko obliczyć granice

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x + 1} \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25}}$$

wpisując

```
Limit[(x^4+3*x^2-4)/(x+1),x->-1]
Limit[(Sqrt[x^2+1]-1)/(Sqrt[x^2+25] - 5),x->0].
```

Komputer poradzi sobie również z bardziej skomplikowanymi przykładami

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 1}{3x + 1} \right)^{2x-5}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}.$$

Wystarczy wpisać

```
Limit[((3x - 1)(3x + 1))^(2x-5), x->Infinity]
Limit[(1-x)Tan[x*Pi/2], x->1]
Limit[Cos[2x]/(Sin[x] - Cos[x]), x->Pi/4].
```

Trzeba jednak uważać, gdyż odpowiedź podawana przez programy CAS bywa błędna. Np. wpisując w *Mathematica*

```
Limit[Sqrt[1 - Cos[x]]/Sin[x], x->0]
```

otrzymamy odpowiedź  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , podczas gdy powyższa granica nie istnieje<sup>3</sup>. Łatwo to sprawdzić, obliczając granice jednostronne

```
f[x_]:=Sqrt[1 - Cos[x]]/Sin[x]
Limit[f[x], x->0, Direction -> 1]
Limit[f[x], x->0, Direction -> -1].
```

Zauważmy, że dla wygody w powyższych obliczeniach zdefiniowaliśmy funkcję  $f(x) := \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sin(x)}$ .

---

<sup>3</sup>Domyślnie *Mathematica* oblicza granicę prawostronną.

Do tej pory obliczaliśmy granice funkcji elementarnych, z którymi komputery radzą sobie bardzo dobrze. O wiele gorzej sprawy się mają gdy przejdziemy do granic funkcji nieelementarnych. Spróbujmy obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor.$$

Wpisujemy `Limit[x * Floor[1/x], x->0]`, lecz to nie daje żadnego rezultatu. *Mathematica* nie jest w stanie tego obliczyć, podczas gdy każdy student matematyki w mgnieniu oka poda poprawną odpowiedź.

Programy CAS nie radzą sobie też najlepiej z obliczaniem granic ciągów liczbowych, gdy parametr z którym przechodzimy do granicy przyjmuje tylko wartości naturalne. W *Mathematica* mamy do dyspozycji słówko `Assumptions`, które pomaga nam w takich sytuacjach

```
Limit[Sin[Pi*n], n->Infinity, Assumptions->Element[n,Integers]]
Limit[Cos[2*Pi*n], n->Infinity, Assumptions->Element[n,Integers]].
```

Jednak już poniższa granica nie zostanie obliczona prawidłowo

```
Limit[Cos[Pi*n], n->Infinity, Assumptions->Element[n,Integers]].
```

Zobaczmy, co się stanie, gdy poprosimy komputer o obliczenie granicy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x^2)$ , która nie istnieje:

```
Limit[Sin[x^2], x -> Infinity].
```

W odpowiedzi *Mathematica* podała przedział `Interval[{-1, 1}]` do którego należą wartości rozważanej funkcji. Można sprawdzić, że każda liczba z tego przedziału jest granicą ciągu  $\sin(x_n^2)$  dla pewnego ciągu  $x_n \rightarrow +\infty$ .

Dla pełni obrazu wspomnijmy jeszcze o jednym ciągu

$$a_n = n \sin(2\pi e n!).$$

Granicy  $a_n$  przy  $n \rightarrow \infty$  *Mathematica* nie obliczy. Co więcej, nawet wypisywanie na komputerze dowolnie wielu kolejnych elementów tego ciągu nic nie pomaga. Można to zrobić używając pętli `For` oraz polecenia `N` zwracającego wartość numeryczną liczby:

```
For[n = 1, n<100, n++;Print[N[Sin[2 Pi E n!]]]] .
```

W wypisany wyniku nie widać żadnych prawidłowości. W tym przykładzie błędy popełniane przez komputer przy obliczaniu wartości  $a_n$  są na tyle duże, że nie pomagają nam wyznaczyć granicy. Zainteresowany Czytelnik może sam spróbować obliczyć tę granicę wykorzystując fakt, że  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$  oraz to, że  $\sin(2k\pi + x) = \sin(x)$  dla  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie B.1.** Obliczyć następujące granice wspomagając się oprogramowaniem CAS

$$\begin{array}{lll} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}, & \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n), & \lim_{x \rightarrow 0} x^{1/x}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{n^n}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right)^{1/n}. \end{array}$$

**Zadanie B.2.** Obliczyć następującą granicę wspomagając się oprogramowaniem CAS

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i!}{\sum_{i=1}^n (i+1)!}.$$

**Zadanie B.3.** Obliczyć następującą granicę wspomagając się oprogramowaniem CAS

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2 + i}.$$

### B.2.2 Ciągi rekurencyjne

**Nowe umiejętności:** badanie ciągów rekurencyjnych, rozwiązywanie równań.

**Skrypt:** Rozdział 2

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Maxima	Komentarz
Solve[f[x]==0,x]	solve(f(x),x)	rozwiązywanie równań
Reduce[f[x]>g[x],x]	brak	rozwiązywanie nierówności
Simplify[formula]	radcan(formula)	upraszczanie wyrażenia

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy jak w programach typu CAS obliczać granice prostych funkcji oraz kiedy nie da się tego zrobić. W tym paragrafie zobaczymy jak wykorzystać komputer do badania ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie. W tej sytuacji odpowiedni program może okazać się niezastąpiony gdyż obserwacja wystarczająco wielu początkowych elementów ciągu często pozwala nam wyrobić sobie właściwą intuicję i zgadnąć rozwiązanie.

**Zadanie B.4.** Ciąg  $a_n$  o wyrazie początkowym  $a_1 = \frac{1}{5}$  zadany jest rekurencją

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{5}{a_n} \right). \quad (\text{B.1})$$

Zbadać zbieżność tego ciągu i obliczyć ewentualną granicę.

**Rozwiązańie:**

Ponieważ zależność (B.1) daje się zapisać w postaci  $a_{n+1} = f(a_n)$  zacznijmy od zdefiniowania odpowiedniej funkcji

$$f[x_] := 1/2 (x + 5/x).$$

Dla nabrania intuicji możemy wypisać kilkanaście pierwszych wyrazów ciągu.

```
a[1] = 0.2;
For[i=1, i<15, i++, a[i+1]=f[a[i]]; Print[N[a[i]]]].
```

Jak widzimy wyniki szybko stabilizują się blisko liczby 2,23607. Spodziewamy się zatem, że nasz ciąg będzie zbieżny do skończonej granicy  $g \approx 2,23607$ . Oczywiście jeśli takie  $g$  istnieje, to musi spełniać równanie<sup>4</sup>  $g = f(g)$ . By znaleźć  $g$  wpisujemy

```
Solve[f[x]==x, x].
```

Wynikiem są dwa rozwiązania  $g = \pm\sqrt{5}$ . Jest jasne, że startując z  $a_1 > 0$  nigdy nie dostaniemy  $a_n < 0$ , a zatem możemy odrzucić ujemne rozwiązanie. Został nam jeden kandydat na granicę  $g = \sqrt{5} \approx 2.23607$ .

Często owocnym pomysłem bywa badanie monotoniczność rozważanego ciągu<sup>5</sup>. Interesuje nas odpowiedź na pytanie kiedy  $a_{n+1} = f(a_n) > a_n$ ?

```
Reduce[{x>0, x<f[x]}, x].
```

Okazuje się, że ma to miejsce dokładnie wtedy, gdy  $a_n \in [0, \sqrt{5})$ . Zbadajmy z kolei, kiedy ten warunek ma miejsce.

```
Reduce[{x>0, f[x]<Sqrt[5]}, x].
```

Wynikiem jest `False`, co oznacza, że dla wszystkich  $x > 0$  zachodzi  $f(x) \geq \sqrt{5}$  (Czytelnik zechce to udowodnić na bazie nierówności średnimi).

Podsumujmy nasze rozważania. Wiemy, że  $f(x) \geq \sqrt{5}$  o ile tylko  $x > 0$ . Wobec tego wszystkie wyrazy ciągu  $a_n$  począwszy od  $a_2 = f(a_1)$  będą nie mniejsze niż  $\sqrt{5}$ . Ponadto, jeżeli  $x \geq \sqrt{5}$  to  $f(x) \leq x$ , a zatem począwszy od  $n = 2$  będziemy mieli

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n.$$

Ciąg  $a_n$  jest zatem nierosnący począwszy od  $n = 2$  i jednocześnie ograniczony z dołu (na przykład przez 0, ale też przez  $\sqrt{5}$ ), więc zbieżny. Jego granicą jest oczywiście  $g = \sqrt{5}$  wyznaczone wcześniej.

Na koniec dwie uwagi. Ciekawym pomysłem bywa często zamiana badanego ciągu  $a_n$  na ciąg  $a_n - g$  lub  $\frac{a_n}{g}$ , gdzie  $g$  jest kandydatem na granicę. W rozważanej sytuacji  $b_n := \frac{a_n}{\sqrt{5}}$  spełnia rekurencję

$$b_n = \frac{1}{2} \left( b_n + \frac{1}{b_n} \right)$$

---

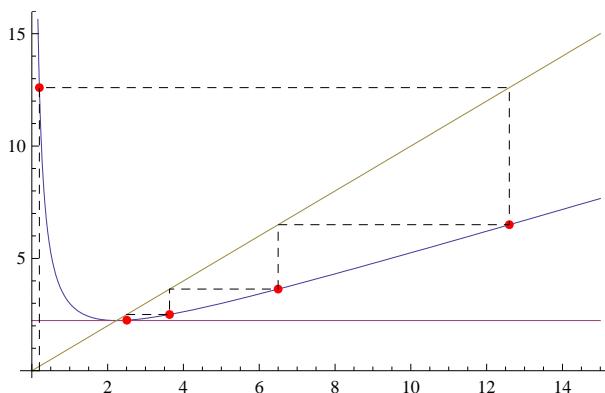
<sup>4</sup>Wynika to z ciągłości  $f$ .

<sup>5</sup>Ponownie obserwacja empiryczna może tutaj pomóc – spróbuj wypisać początkowe wyrazy ciągu z większą dokładnością numeryczną.

o analogicznych własnościach jak poprzednio, ale nieco prostszą do badania.

Często warto także zwizualizować sobie przebieg funkcji zadającej rekurencję na wykresie (więcej na ten temat w podrozdziale B.3.1).

```
wykres = Plot[{f[x], Sqrt[5], x}, {x, 0, 15}].
```



Wyznaczone wcześniej własności funkcji ( $f(x) > \sqrt{5}$ ,  $f(x) > x$  dla  $x > \sqrt{5}$ ) dość łatwo zinterpretować na powyższym rysunku. Zaznaczyliśmy też tam dodatkowo punkty o współrzędnych  $(a_n, a_{n+1} = f(a_n))$  dla kilku początkowych wyrazów ciągu. Układają się one na łamanej zbiegającej do punktu  $(\sqrt{5}, \sqrt{5} = f(\sqrt{5}))$ . Czy potrafisz zinterpretować tę łamana?

### Zadanie B.5. Zbadać zbieżność ciągu

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 4a_n + 5$$

w zależności od parametru  $a$ .

#### Rozwiążanie:

Mając już pewne obycie z podobnymi ciągami obserwujemy, że nasz ciąg ma postać  $a_{n+1} = f(a_n)$ , gdzie  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ . Spodziewamy się, że ciąg ten będzie zbieżny do pewnego punktu stałego  $f$ , tzn. że granica  $g$  będzie spełniać  $g = f(g)$ . Oczywiście jeśli  $a_n$  jest zbieżny do skończonej granicy  $g$ , to musi zachodzić równość<sup>6</sup>  $g = f(g)$ .

```
Solve[x^2 - 4x + 5 == x, x].
```

Mamy dwa rozwiązania, czyli dwóch kandydatów na granicę

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \simeq 1.38 \quad \text{oraz} \quad \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \simeq 3.61.$$

Oczekujemy, że ustalając wartość  $a_0 = a$  pomiędzy tymi dwoma liczbami uzyskamy ciąg zbieżny do jednej z nich. Postępując standardowo musimy pokazać, że nasz ciąg jest ograniczony i monotoniczny. Żeby oszczędzić sobie trudu, wypiszmy kilka pierwszych wyrazów  $a_n$  dla  $a_0 = 1,5$

---

<sup>6</sup>Wynika to z ciągłości  $f$ .

```
a[0]=1.5
f[x_]:=x^2 - 4x + 5
For[i=1, i<15, i++, a[i]=f[a[i-1]]]
For[i=0, i<15, i++, Print[a[i]]].
```

W wyniku dostaniemy następujący ciąg liczb

```
1.5
1.25
1.5625
1.19141
1.65382
1.11984
1.77469
1.05077
1.90104
1.00979
1.98051
1.00038
1.99924
1.
2.
```

Widać teraz, że nasz ciąg nie jest monotoniczny. Obserwując pierwsze 15 wyrazów możemy ponadto wyciągnąć wniosek, że ciąg  $a_n$  oscyluje pomiędzy wartością 1 i 2. Zmieniając wartość  $a_0$  możemy obserwować co się dzieje jeśli startujemy z innego miejsca.

**Zadanie B.6.** Obliczyć wartość pierwszych 20 wyrazów ciągu  $a_n$  dla

- $a_0 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}) - 0.01$
- $a_0 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}) + 0.01$
- $a_0 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) - 0.01$
- $a_0 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) + 0.01$
- $a_0 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) - 1 - 0.01$
- $a_0 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) - 1 + 0.01$

*Uwaga 1.* Przy wypisywaniu wartości liczbowych warto skorzystać z funkcji N[...].

W wyniku poczynionych obserwacji możemy pokusić się o następujące

### Stwierdzenie.

- *Jeśli  $a_0 = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})$ , to ciąg  $a_n$  jest stały.*
- *Jeśli  $a_0 \in (\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) - 1, \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})) \cup (\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}), \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}))$ , to ciąg  $a_n$  ma dwa zbieżne podciągi  $a_{2n}$  oraz  $a_{2n-1}$ . Jeden z tych podciągów zbiega do 1, a drugi do 2.*

- Jeśli  $a_0 < \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) - 1$  bądź  $a_0 > \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$ , to ciąg  $a_n$  rozbiega do  $+\infty$ .

Oczywiście nie mamy jeszcze dowodu, a jedynie empiryczne obserwacje. Ścisłe uzasadnienie powyższego stwierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi. Przydatne mogą być następujące uwagi:

- Chcąc badać ciągi  $a_{2n}$  i  $a_{2n-1}$  warto wykonać następujące operacje

```
f[x_] := x^2 - 4x + 5
Simplify[f[f[x]]]
Solve[f[f[x]] == x, x].
```

Pomoże nam to udowodnić monotoniczność podciągów  $a_{2n}$  i  $a_{2n-1}$ .

- Dla  $a_0$  w przedziale  $(\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) - 1, 1)$  warto obliczyć  $a_1$  i w ten sposób sprowadzić ten przypadek do wcześniejszej rozpatrzonych.

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie B.7.** Rozważmy ciąg Fibonacciego  $F_n$  zadany rekurencyjnie

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

dla wartości początkowych  $F_1 = F_2 = 1$ . Zbadać zbieżność ciągu  $x_n := \frac{F_n}{F_{n+1}}$ .

**Zadanie B.8.** Zbadać zachowanie ciągu

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 9a_n + 20$$

w zależności od parametru  $a$ .

**Zadanie B.9.** Zbadać zachowanie ciągu

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n^2 + \frac{11}{2}a_n - 2$$

w zależności od parametru  $a$ .

**Zadanie B.10.** Zbadać zachowanie ciągu

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n^2 - \frac{13}{2}a_n + 8$$

w zależności od parametru  $a$ .

**Zadanie B.11.** Zbadać zachowanie ciągu

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n^2 - \frac{1}{2}a_n - 1$$

w zależności od parametru  $a$ .

### B.2.3 Rekurencje liniowe

**Nowe umiejętności:** rozwiązywanie ogólnych rekurencji liniowych.

**Skrypt:** Rozdział 2.

Poniższe zadanie posłuży nam jako pretekst do dość ogólnych rozważań i wyciągania wniosków na temat rekurencji liniowych.

**Zadanie B.12.** Znaleźć wzór jawnego na  $n$ -ty wyraz ciągu rekurencyjnego

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n, \quad (\text{B.2})$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 4. \quad (\text{B.3})$$

**Rozwiązanie:**

Jeśli nie dysponujemy lepszym pomysłem możemy zacząć od wypisania kilkunastu początkowych wyrazów ciągu. Być może patrząc na wyniki wpadnie nam coś do głowy.

```
a[1]=1, a[2]=4
For[i=2, i<15, i++, a[i+1] =2 a[i]+2 a[i-1];Print[a[i]]].
```

Podstawową obserwacją jaka się nasuwa jest to, że ciąg  $a_n$  szybko rośnie. Spróbujmy zbadać charakter tego wzrostu: czy ciąg zachowuje się podobnie do ciągu  $n^\alpha$ , czy raczej jak ciąg geometryczny  $q^n$ ? Ciekawego spostrzeżenia możemy dokonać badając na przykład ilorazy sąsiednich wyrazów:

```
For[i=2, i<15, i++, Print[N[a[i]/a[i-1]]]].
```

Okazuje się, że wartości tych ilorazów dość szybko stają się bliskie liczbie 2,73205. Wiemy zatem, że nasz ciąg zachowuje się podobnie do ciągu geometrycznego o przyroście 2,73205. Postawmy zatem pytanie czy ciąg geometryczny  $a_n = q^n$  może spełniać rekurencję postaci (B.2)? Wstawiając  $a_n$  w powyższej postaci do (B.2) dostaniemy równanie  $q^{n+2} = 2q^{n+1} + q^n$ . Po odrzuceniu mało interesującego przypadku  $q = 0$  otrzymamy równanie kwadratowe<sup>7</sup>

$$q^2 = 2q + 2,$$

którego pierwiastkami są  $q_1 = 1 - \sqrt{3} \approx -0,73205$  oraz  $q_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2,73205$  (oczywiście to równanie także można rozwiązać za pomocą programu *Mathematica* używając funkcji *Solve*). Drugi ze znalezionych pierwiastków wygląda znajomo – to liczba wyznaczona doświadczalnie przy badaniu ilorazów sąsiednich wyrazów w ciągu! Zobaczmy zatem jak bardzo podobny jest ciąg  $a_n$  do ciągu geometrycznego  $(1 + \sqrt{3})^n$ ?

```
For[i=2, i<15, i++, Print[N[a[i]/(1+Sqrt[3])^i]]].
```

<sup>7</sup>Równanie to nazywamy *równaniem charakterystycznym* rekurencji (B.2).

Jak widzimy powyższe ilorazy robią się coraz bliższe liczbie  $\frac{1}{2}$ . Zbadajmy zatem jak zachowuje się ciąg  $b_n := a_n - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})^n$  powtarzając rozumowanie użyte do badania ciągu  $a_n$ .

```
b[n_]:=a[n]-1/2(1+.Sqrt[3])^n
For[i=2, i<15, i++, Print[N[b[i]]]]
For[i=2, i<15, i++, Print[N[b[i]/b[i-1]]]].
```

Co ciekawe, ciąg  $b_n$  zachowuje się podobnie jak ciąg geometryczny o postępie  $-0.732051 \approx 1 - \sqrt{3}$ ! Sprawdźmy jak wygląda odpowiedni iloraz:

```
For[i=2, i<15, i++, Print[N[b[i]/(1-Sqrt[3])^i]]].
```

Z uzyskanych wyników można wnioskować, że  $b_n = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})^n$ , skąd oczywiście

$$a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})^n. \quad (\text{B.4})$$

Rzecz jasna przeprowadzone wyżej obliczenia nie są dowodem matematycznym, tylko procedurą pozwalającą wyrobić sobie pewne intuicje i znaleźć odpowiedniego kandydata na rozwiązanie. Czytelnik zechce samodzielnie przeprowadzić prosty dowód indukcyjny, że ciąg opisany wzorem (B.4) faktycznie spełnia warunki (B.2) i (B.3).

Warto jednak przyjrzeć się postaci wyniku i pewnym elementom naszego rozumowania. To, co wykazaliśmy ściśle, to fakt, że ciągi  $q_1^n$  i  $q_2^n$  spełniają rekurencję (B.2). Natomiast rozwiązanie (B.4), które spełnia dodatkowo warunki początkowe (B.3), jest pewną kombinacją liniową  $aq_1^n + bq_2^n$  tych szczególnych ciągów. Chwila zastanowienia wystarczy, by wszystko wyjaśnić – ponieważ rekurencja (B.2) jest liniowa, więc jeżeli dwa ciągi  $a_n$  i  $a'_n$  ją spełniają, to każda ich kombinacja liniowa też będzie ją spełniać. Wystarczy teraz znaleźć taką kombinację, która będzie spełniała warunki początkowe (B.3)!

Dysponując powyższą wiedzą możemy rozwiązać pokrewne problemy znacznie szybciej. Dla przykładu rozwiążmy rekurencję

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} + 2a_n, \\ a_1 &= 1 \quad a_2 = 2. \end{aligned}$$

Wiemy już, że rozwiązania należy szukać w postaci  $a_n = a(1 + \sqrt{3})^n + b(1 - \sqrt{3})^n$ , a współczynniki  $a$  i  $b$  należy dobrać tak, żeby spełnione były warunki początkowe.

```
Solve[{a(1+.Sqrt[3])+b(1-Sqrt[3])==1,
       a(1+.Sqrt[3])^2+b(1-Sqrt[3])^2==2},{a,b}] .
```

Rozwiązaniem jest  $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{3})}$  i  $b = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$ , a więc

$$a_n = \frac{3 + \sqrt{3}}{6(1 + \sqrt{3})}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{-1}{2\sqrt{3}}(1 - \sqrt{3})^n.$$

W istocie to co zrobiliśmy wyżej można zgrabnie uogólnić w następujący sposób.

**Twierdzenie 1.** Założmy, że ciąg  $x_n$  spełnia rekurencję

$$x_{n+2} = Ax_{n+1} + Bx_n$$

z warunkami początkowymi  $x_1$  i  $x_2$ . Założmy, że równanie charakterystyczne

$$q^2 = Aq + B$$

ma dokładnie dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $q_1$  i  $q_2$ . Wówczas  $n$ -ty wyraz ciągu  $x_n$  dany jest wzorem

$$x_n = aq_1^n + bq_2^n,$$

gdzie liczby  $a$  i  $b$  są rozwiązaniami układu równań liniowych

$$\begin{aligned} aq_1 + bq_2 &= x_1 \\ aq_1^2 + bq_2^2 &= x_2. \end{aligned}$$

### Problemy do samodzielnego rozwiązymania:

**Zadanie B.13.** Znaleźć wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu Fibonacciego

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \\ F_1 &= F_2 = 1. \end{aligned}$$

Korzystając z wyniku obliczyć granice ciągu  $x_n := \frac{F_n}{F_{n+1}}$ . Porównać wynik z wynikiem zadania z poprzedniego podrozdziału.

**Zadanie B.14.** Rozwiązać rekurencję

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= 2b_{n+1} + 2b_n - 3, \\ b_1 &= 2 \quad b_2 = 5. \end{aligned}$$

Wskazówka: Rozważyć ciąg  $a_n = b_n + c$  i dobrać  $c$  tak, aby pozbyć się wyrazu wolnego w zależności rekurencyjnej. Zaproponować ogólną metodę rozwiązywania rekurencji postaci

$$x_{n+2} = Ax_{n+1} + Bx_n + C.$$

**Zadanie B.15.** Udowodnić twierdzenie 1.

**Zadanie B.16.** Co się stanie, gdy w twierdzeniu 1 równanie charakterystyczne ma pierwiastek podwójny (na przykład dla rekurencji  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ )? Czy można wtedy zawsze rozwiązać równanie na współczynniki  $a$  i  $b$ ? Dlaczego nie? Spróbuj znaleźć ogólną postać rozwiązań w takiej sytuacji. Co się dzieje gdy równanie charakterystyczne ma pierwiastki zespolone (na przykład dla rekurencji  $b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$ )?

**Zadanie B.17.** Powtórzyć rachunki z rozwiązywania zadania ze strony 305 wypisując więcej wyrazów ciągów  $a_n$  i  $b_n$  (powiedzmy 50). Zaobserwować, że ilorazy  $\frac{b_n}{b_{n-1}}$  przestają być bliskie  $-0.732051$  dla  $n > 20$ . Dzieje się tak dlatego, że liczby  $b_n$  obliczane są z pewną skończoną dokładnością. Ponieważ ciąg  $b_n$  zbiega do 0 (i to szybko), w pewnym momencie dokładność staje się porównywalna z rzeczywistymi wartościami  $b_n$  i drobne błędy w wartości  $b_n$  przekładają się na duże błędy w ilorazie. Zobacz, że numeryczne wartości ilorazu zmieniają znak z ujemnego na dodatni, co oczywiście nie powinno mieć miejsca. Warto pamiętać o problemach tego typu i nie ufać bezkrytycznie liczbom podawanym przez komputer.

**Zadanie B.18.** *Mathematica* dysponuje procedurą `RSolve[równanie,ciąg,indeks]`, która służy do rozwiązywania rekurencji. Przykładowo, do obliczenia wzoru ogólnego na rekurencję rozważaną na początku tego rozdziału składnia powinna wyglądać następująco:

```
RSolve[{a[n+2] == 2 a[n+1]+2 a[n], a[1]==1, a[2]==4}, a[n], n].
```

Użyć powyższej funkcji do sprawdzenia, czy wyniki uzyskane w poprzednich zadaniach są prawidłowe. Spróbować użyć tej funkcji do wyliczenia ogólnych wzorów na rekurencje rozważane w poprzednim rozdziale.

## B.2.4 Fraktale

**Nowe umiejętności:** okruchy wiedzy o fraktalach.

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Maxima	Komentarz
<code>While[test,body]</code>	<code>for zmienna: start while test do body; done</code>	pętla while
<code>Table[expr,{min,max,krok}]</code>	<code>makelist(expr, zmienna, min, max)</code>	tworzenie tabeli z wynikami operacji
<code>ArrayPlot[tabela]</code>	<code>Plot2d([discrete,lista], ...)</code>	wykres na podstawie danych z tabeli/listy

*Zbiory fraktalne* (albo *fraktale*) to obiekty cechujące się pewnym samopodobieństwem. Jednym z najbardziej znanych przykładów takich zbiorów jest *krzywa trójkątowa Sierpińskiego* – będąca symbolem polskich Olimpiad Matematycznych. Teoria zbiorów fraktalnych zaczęła rozwijać się w latach 70tych w dużej mierze dzięki możliwościom obliczeniowym komputerów. W tym podrozdziale pokażemy jak tworzyć takie zbiory z użyciem oprogramowania CAS. Więcej informacji na temat fraktali znajdzie Czytelnik w monografii [3].

W podrozdziale B.2.2 widzieliśmy jak badać zbieżność ciągów zadanych rekurencyjnie, tzn. zadanych w postaci

$$a_0 = a, \quad a_n = f(a_{n-1}), \quad (\text{B.5})$$

gdzie  $f$  jest pewną funkcją. Pracując z takimi ciągami można się zastanawiać czy jest jakaś ogólna reguła rządząca ich zachowaniem. Jednym z nasuwających się pytań jest: *jak zmienia się zachowanie ciągu, gdy zmieniamy wartość początkową  $a_0 = a$ ?* Do tej pory badaliśmy ciągi o wartościach rzeczywistych ale najciekawsze rzeczy dzieją się gdy przejdziemy do ciągów o wartościach zespolonych.

Na początek ustalmy funkcję  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Niech to będzie wielomian stopnia 2, np.

$$f(z) = z^2 + c.$$

Liczba  $c \in \mathbb{C}$  jest parametrem, który będziemy zmieniać. Dla ustalenia uwagi położymy  $c = 1 - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ . W programie *Mathematica* definiujemy powyższą funkcję następująco

```
c=1-0.5*(1+Sqrt[5])
f[z_]:=z^2+c .
```

Pytamy się: *dla jakich wartości  $a_0$  ciąg rekurencyjny dany przez (B.5) będzie zbieżny?* W podrozdziale B.2.2 widzieliśmy, że w ogólności takie ciągi nie muszą być zbieżne ale mogą oscylować wokół pewnych wartości. Mogliśmy się też przekonać, że przyjmując za  $a_0$  różne wartości ciąg albo oscylował albo był rozbieżny do nieskończoności. W takim razie lepiej zmienić nasze pytanie na: *dla jakich wartości  $a_0$  ciąg  $a_n$  jest ograniczony?* By na nie odpowiedzieć zastosujemy pewną heurystykę<sup>8</sup>. Obliczymy kilka (np. 10) pierwszych wyrazów ciągu  $a_n$  i uznamy, że jest on ograniczony jeśli moduł wszystkich dziesięciu kolejnych wyrazów jest mniejszy niż np. 10. Zdefiniujemy teraz w *Mathematica* funkcję, która będzie sprawdzać, czy dla danego  $a_0 = a$  otrzymamy ciąg ograniczony

```
ogr[a_]:=(z=a; n=0;
While[Abs[z]<10 && n<10, z=N[f[z]]; ++n];
1-Min[{Abs[z],10}]/10) .
```

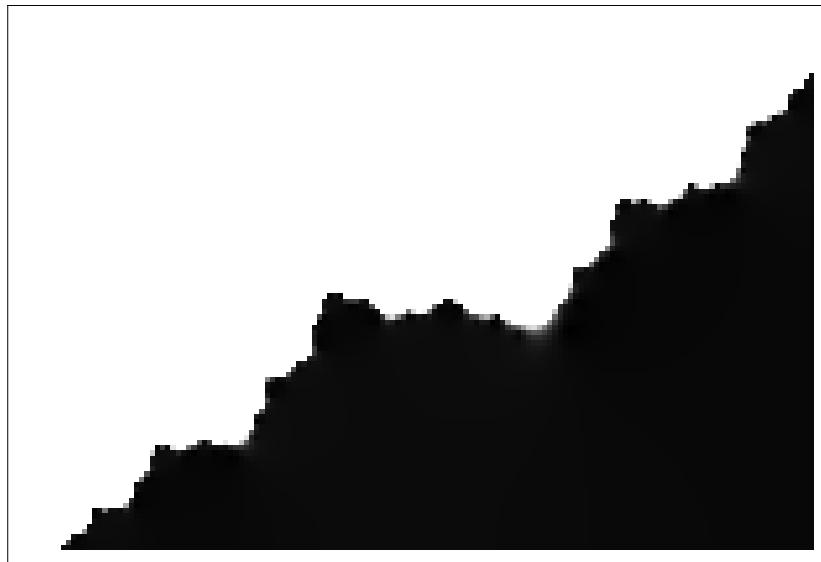
Przyjrzyjmy się powyższemu poleceniu. Definiujemy funkcję *ogr* zmiennej *a*. Funkcja ta wykorzystuje dodatkową zmienną *z*, która będzie przechowywać kolejne obliczone wartości ciągu oraz zmienną *n*, która kontroluje ilość iteracji pętli. Następnie wykonujemy pętlę, w której dokonujemy podstawienia  $z = N[f[z]]$  tak długo aż *z* będzie miało moduł większy od 10 lub aż wykonamy 10 powtórzeń. Na koniec funkcja *ogr* zwraca wartość  $1 - \text{Min}[\{\text{Abs}[z], 10\}] / 10$ , czyli 1 minus minimum z modułu *z* i 10 podzielone przez 10. Taka definicja zapewnia, że *ogr[a]* zawsze zwróci wartość z przedziału  $(0, 1)$ . Wartość bliska 0 oznacza, że ciąg jest ograniczony, a wartość bliska 1 oznacza, że jest nieograniczony.

Żeby zobaczyć co się dzieje dla poszczególnych punktów na płaszczyźnie zespolonej wygenerujemy obrazek. W tym celu posłużymy się funkcjami programu *Mathematica* *ArrayPlot* oraz *Table*. Pierwsza z nich rysuje obrazek na podstawie danych przekazanych jako tablica, a druga generuje tablicę.

```
ArrayPlot[Table[ogr[x + I*y], {y, -1, 0, 0.01}, {x, -1.5, 0, 0.01}]] .
```

Polecenie *Table[ogr[x + I\*y], {y, -1, 0, 0.01}, {x, -1.5, 0, 0.01}]* generuje dwuwymiarową tablicę, zawierającą wartości funkcji *ogr[x + I\*y]*. Parametry  $\{y, -1, 0, 0.01\}$  oraz  $\{x, -1.5, 0, 0.01\}$  wskazują, w jakich przedziałach zmieniają się *x* i *y*. Tutaj wartości *x* zmieniają się w przedziale  $[-1, 5; 0]$ , a wartości *y* w przedziale  $[-1; 0]$ . Liczba 0.01 określa, o ile zmienia się wartość *x* i *y*, gdy przesuwamy się o jeden piksel na obrazku. Ten sposób generowania obrazków jest wysoce nieefektywny i zanim komputer skończy pracować, może minąć dobrych kilka minut. Niemniej jednak po pewnym czasie na ekranie powinien pojawić się Rysunek B.1. Brzeg zaciemionego obszaru jest bardzo nieregularny. Zmieniając parametry  $\{y, -1, 0, 0.01\}$  i  $\{x, -1.5, 0, 0.01\}$  na  $\{y, -1, 0, 0.001\}$  oraz  $\{x, -1.5, 0, 0.001\}$  możemy zwiększyć dokładność (oczywiście kosztem czasu obliczeń). Zbiór widoczny na rysunku nazywa się, w naukowej nomenklaturze, *wypełnionym zbiorem Julii* wielomianu  $f(z)$ .

<sup>8</sup>Heurystyka w informatyce to metoda znajdowania rozwiązań, dla której nie ma gwarancji znalezienia rozwiązania optymalnego, a często nawet prawidłowego. Heurystyki używa się jej często, gdy algorytm wyliczania pełnego rozwiązania nie jest znany, albo jest zbyt kosztowny obliczeniowo.



Rysunek B.1: Punkt  $(0, 0)$  znajduje się w prawym dolnym rogu. Startując z punktów w ciemnym obszarze ciąg  $a_n$  pozostaje ograniczony.

Zainteresowany Czytelnik może dowiedzieć się więcej na temat tych zbiorów wybierając się na wykład z Układów Dynamicznych lub zaglądając do monografii [3]. Tutaj sygnalizujemy jedynie, że temat jest ciekawy i wysoce nietrywialny.

Spróbujmy zmienić nieco parametry. Ustawmy  $c = (\phi - 2) + (\phi - 1)i$ , gdzie  $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  i wykonajmy nasz program od początku.

```
phi = 0.5*(1 + Sqrt[5])
c = (phi - 2) + (phi - 1)*I
f[z_] := z^2 + c
ogr[a_] := (z = a; n = 0;
  While[Abs[z] < 10 && n < 10, z = N[f[z]]; ++n];
  1 - Min[{Abs[z], 10}] / 10)
ArrayPlot[Table[ogr[x + I*y], {y, -1, 1, 0.01}, {x, -1.5, 1.5, 0.01}]] .
```

Na ekranie powinien pojawić się Rysunek B.2.

Czytelnik może poeksperymentować z innymi wartościami parametru  $c$ . Proponujemy wypróbować następujące wartości

$$\begin{aligned} c &= -0,8 + 0,156i, \\ c &= 0,285 + 0,01i, \\ c &= -1,5, \\ c &= i. \end{aligned}$$

W tym kontekście wypada jeszcze wspomnieć znanym *zbiorze Mandelbrota*. Jest to podzbiór płaszczyzny zespolonej  $\mathbb{C}$  zawierający te liczby  $c \in \mathbb{C}$ , dla których ciąg (B.5) z warunkiem początkowym  $a_0 = 0$  pozostaje ograniczony.

### **Problemy do samodzielnego rozwiązania:**



Rysunek B.2: Kolejny przykład fraktala.

**Zadanie B.19.** Narysować zbiory Julii dla wartości parametru  $c$  sugerowanych wyżej.

**Zadanie B.20.** Poeksperymentować z pakietami *fractals* oraz *dynamics* w programie *Maxima*.

**Zadanie B.21.** Przy pomocy funkcji *julia* z pakietu *dynamics* wygenerować obraz zbioru Julii dla wartości parametru  $c$  sugerowanych wyżej.

**Zadanie B.22.** Za pomocą oprogramowania CAS narysować zbiór Mandelbrota.

## B.3 Badanie funkcji rzeczywistych

### B.3.1 Wykresy funkcji

**Nowe umiejętności:** rysowanie wykresów krzywych zadanych na różne sposoby.

**Nowe funkcje:**

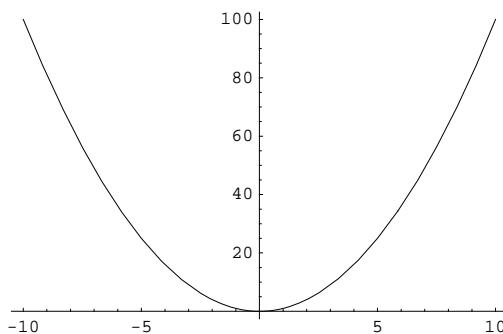
<i>Mathematica</i>	<i>Maxima</i>	Komentarz
<code>Plot[funkcja, zakres]</code>	<code>plot2d</code>	wykres funkcji
<code>ParametricPlot</code>	<code>plot2d([parametric, ...])</code>	wykres funkcji danej parametrycznie
<code>PolarPlot</code>	<code>plot2d([parametric, ...])</code>	wykres funkcji danej we współrzędnych biegunkowych
<code>ContourPlot</code>	<code>contour_plot</code>	wykres poziomów funkcji (funkcje uwikłane)
<code>Animate[wykres, param.]</code>	<code>brak</code>	dynamiczne wykresy

Graficzne przedstawienie obiektów matematycznych pozwala często lepiej zrozumieć ich naturę. W tej części zajmiemy się obrazowaniem krzywych.

Prosty wykres tworzymy za pomocą polecenia `Plot [funkcja, zakres]`. Przykładowo

```
Plot[x^2, {x, -10, 10}]
```

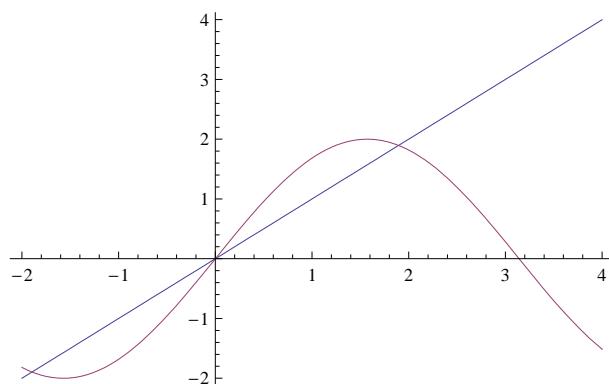
daje następujący efekt:



Na jednym obrazku możemy umieścić kilka wykresów, np. wykonując komendę

```
Plot[{x, 2 Sin[x]}, {x, -2, 4}].
```

Wynik wygląda następująco:

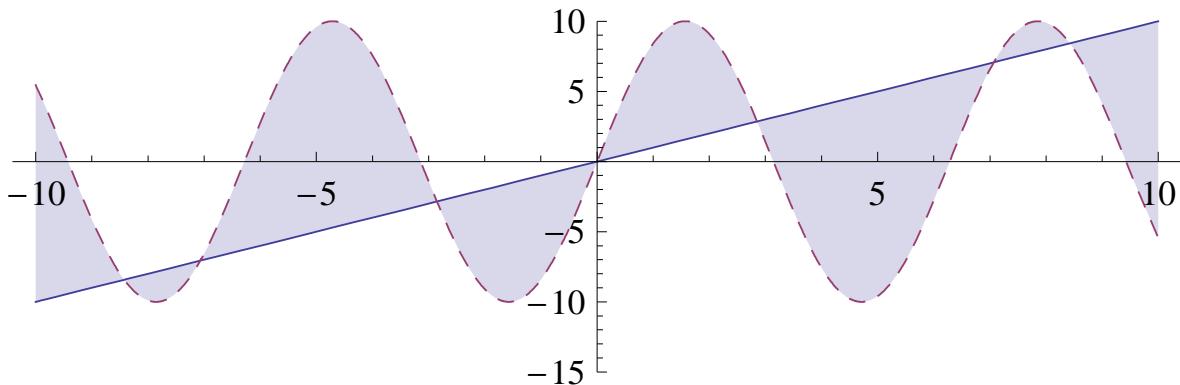


Ten sam efekt uzyskalibyśmy także za pomocą sekwencji komend:

```
wyk1=Plot[x,{x,-2,4}];  
wyk2=Plot[2 Sin[x],{x,-2,4}];  
Show[wyk1,wyk2].
```

Jeśli zależy nam na bardziej wyrafinowanym wyglądzie rysunku, możemy nakazać *Mathematica* zmienić podstawowe parametry wykresu. Oto kilka ważniejszych: `PlotRange` określa zakres wartości jaki ma być pokazany, `AspectRatio` definiuje stosunek wysokości do szerokości rysunku, `Filling` definiuje kolorowanie, natomiast `PlotStyle` określa styl formatowania wykresu. Szczegółowe informacje, w tym także omówienie wielu dodatkowych opcji wraz z przykładami, można znaleźć w obszernej dokumentacji programu *Mathematica* [5].

Np. efekt



uzyskamy za pomocą komendy

```
Plot[{x, 10 Sin[x]}, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-15, 10},
AspectRatio -> 0.3, Filling -> {1 -> {2}}, PlotStyle -> {Automatic, Dashed}].
```

W praktycznych zastosowaniach nie zawsze mamy do czynienia z wykresami funkcji opisywalnych prostym wzorem. Czasami chcemy narysować krzywą daną w postaci parametrycznej, albo uwikłanej. *Mathematica* dysponuje odpowiednimi narzędziami aby poradzić sobie również w takiej sytuacji. Omówimy teraz kilka prostych przykładów.

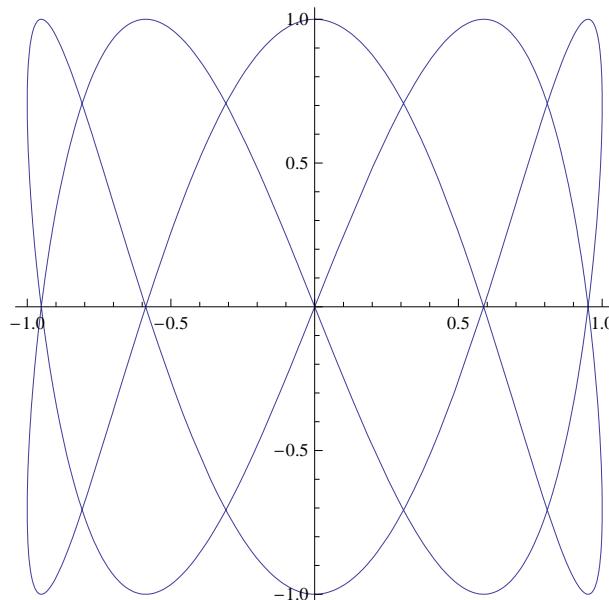
Krzywą w postaci parametrycznej nazywamy zbiór

$$C = \{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\},$$

gdzie  $x$  i  $y$  są pewnymi funkcjami zmiennej  $t$ . Do opisu tego typu zbiorów *Mathematica* dysponuje funkcją ParametricPlot. Przykładowo

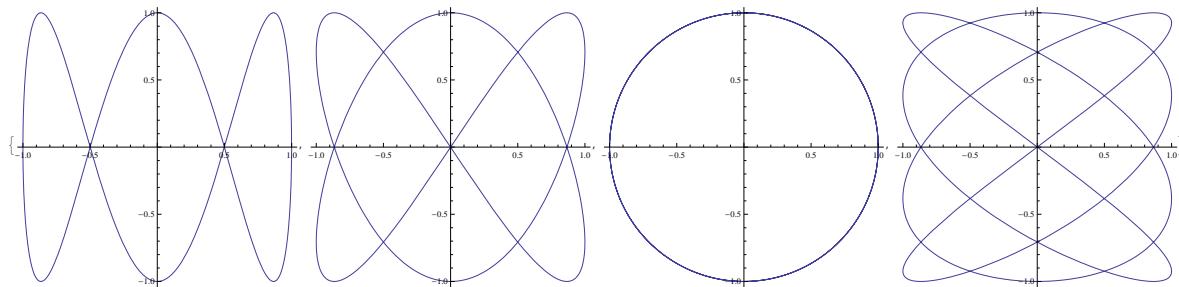
```
ParametricPlot[{Sin[2 t], Cos[5 t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```

i końcowy efekt:



Powyższa krzywa to szczególny przypadek tak zwanych *krzywych Lissajous*, które pojawiają się w naturalny sposób w opisie drgań harmonicznych. Ogólnie zbiory takie mają postać  $x(\phi) = A \sin(a\phi)$  i  $y(\phi) = B \cos(b\phi + \phi_0)$ . Odpowiada to nałożeniu na siebie dwóch drgań o różnych częstotliwościach  $a$  i  $b$ , różnych amplitudach  $A$  i  $B$  oraz przesunięciu w fazie o  $\frac{\pi}{2} + \phi_0$ . Krzywą zamkniętą uzyskujemy wtedy i tylko wtedy, gdy stosunek częstotliwości  $\frac{a}{b}$  jest liczbą wymierną. Porównajmy kilka krzywych tego typu

```
Table[ParametricPlot[{Sin[k t], Cos[3 t]}, {t, 0, 2 Pi}], {k, 1, 4, 1}] .
```



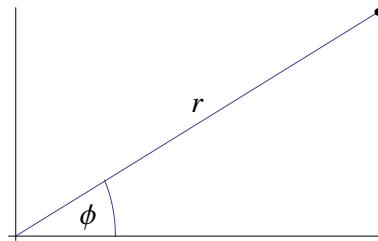
Użyliśmy do tego celu polecenia Table. Sekwencja  $\{k, 1, 4, 1\}$  określa zakres jaki przebiega parametr  $k$ . Są to kolejne liczby od 1 do 4 rosnące co 1.

Przy okazji warto wspomnieć o funkcji Animate. Czytelnik zechce wpisać komendę

```
Animate[ParametricPlot[{Sin[k t], Cos[3 t]}, {t, 0, 4 Pi}], {k, 1, 4}] .
```

Za pomocą suwaka możemy teraz zmieniać wartość parametru  $k$  na przedziale  $[1, 4]$  i obserwować jak reaguje na to wykres krzywej.

Innym sposobem opisu krzywej jest postać biegunowa  $r = r(\phi)$ , gdzie  $r$  jest odlegością danego punktu od środka układu współrzędnych, natomiast  $\phi$  to kąt pod jakim dany punkt widzimy względem osi OX.



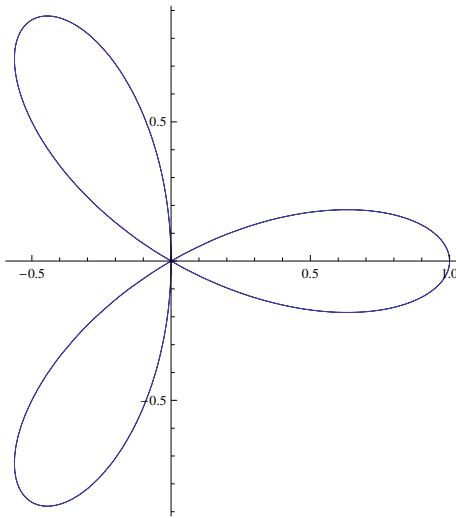
Postać biegunowa jest specjalną formą postaci parametrycznej, gdzie parametryzujemy za pomocą kąta  $\phi$ :

$$\begin{aligned} x(\phi) &= r(\phi) \cos(\phi), \\ y(\phi) &= r(\phi) \sin(\phi). \end{aligned}$$

Najprostszym przykładem krzywej tego typu jest okrąg. Odpowiednie równanie to oczywiście  $r = \text{const.}$

Krzywą zadaną w postaci biegunowej rysujemy za pomocą polecenia PolarPlot. Jako przykład użycia rozważmy *trójkątnik*:

```
PolarPlot[ Cos[3 Phi], {Phi, 0, 2 Pi}] .
```

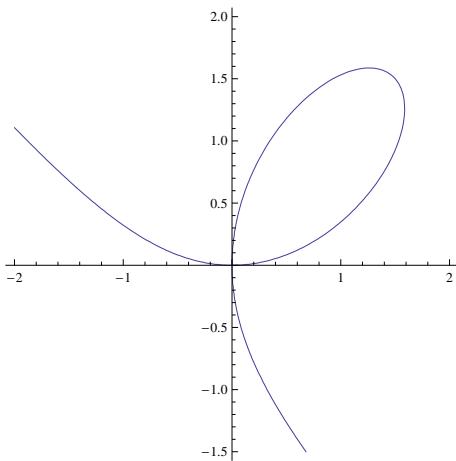


Na koniec zobaczymy jak można wykreszczać krzywe zadane w sposób uwikłany jako rozwiązania pewnego równania

$$f(x, y) = c.$$

Służy do tego funkcja ContourPlot. Z jej pomocą możemy narysować na przykład krzywą nazywaną *liściem Kartezjusza*:

```
ContourPlot[y^3 + x^3 - 3 x y == 0, {x, -2, 2}, {y, -1.5, 2},
Axes->True, Frame->False]
```



### Problemy do samodzielnego rozwiązańia:

**Zadanie B.23.** Narysować wykres *cykloidy* (krzywej jaką zakreśla punkt na kole toczącym się po prostej), danej w postaci parametrycznej

$$x(t) = a(t - \lambda \sin(t)), \quad y(t) = a(1 - \lambda \cos(t)).$$

Wielkość  $a$  odpowiada promieniowi toczącego się koła, natomiast  $\lambda \cdot a$  oznacza odległość rozważanego punktu od środka koła. Dla  $\lambda > 1$  mówimy o cykloidzie wydłużonej a dla  $\lambda < 1$  o skróconej.

**Zadanie B.24.** Znaleźć postać parametryczną i narysować wykres *epicykloidy*, czyli krzywej jaką zakreśla punkt koła toczącego się po zewnętrznej krawędzi innego koła. Zaobserwować, że krzywą zamkniętą otrzymamy tylko wtedy, gdy stosunek promieni obu kół jest liczbą wymierną. Czy potrafisz to udowodnić?

**Zadanie B.25.** Narysować *ślimak Pascala* dany w postaci biegunowej równaniem  $r = a \cos(\phi) + l$ . Ślimak Pascala dla parametrów  $a = l$  nazywamy *kardiodą*. Wykazać, że kardioidea to epicykloida powstała przez toczenie punktu na brzegu koła o promieniu  $a$  po zewnętrznej krawędzi koła o takim samym promieniu.

**Zadanie B.26.** Narysować krzywą stożkową zadaną biegunowo zależnością  $r = \frac{p}{1+e \cos(\phi)}$ , gdzie  $e > -1$  i  $p > 0$  są parametrami. Zbadać jak zmienia się charakter krzywych w zależności od parametru  $e$ . Spróbuj inaczej opisać te krzywe dla  $e = -1$ ,  $e \in (-1, 0)$  i  $e = 0$ .

**Zadanie B.27.** Przedstawić liść Kartezjusza w postaci parametrycznej. Wykazać, że prosta  $x + y + 1 = 0$  jest asymptotą tej krzywej.

### B.3.2 Przebieg zmienności funkcji

**Nowe umiejętności:** różniczkowanie funkcji, badanie ich przebiegu, wyznaczanie ekstreów, punktów przegięcia, asymptot, itp..

**Skrypt:** Rozdziały 5 i 6.

Mathematica	Maxima	Komentarz
<code>D[f[x],x]</code>	<code>diff(f(x),x)</code>	pochodna funkcji
<code>Factor[expr]</code>	<code>factor(expr)</code>	rozkład na czynniki
<code>Select[list, pred]</code>	<code>lreduce(lambda([l,e], if pred then cons(e,l) else l), lista, []);</code>	wybiera z listy te elementy, które spełniają predykat <i>pred</i>

Przy badaniu przebiegu zmienności funkcji, oprogramowanie typu CAS okazuje się bardzo przydatne. Dla sporej klasy funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  możemy automatycznie obliczyć pochodne, znaleźć pierwiastki równań  $f(x) = 0$ , czy  $f'(x) = 0$ , a nawet znaleźć ekstrema lokalne i obliczyć granice w nieskończoności. Wymienione operacje możemy wykonać zarówno symbolicznie jak i numerycznie. Niezmiernie przydatne okazuje się często naszkicowanie wykresu rozpatrywanej funkcji. Przy tym wszystkim trzeba jednak pamiętać, że programy typu CAS to tylko narzędzia, z których trzeba intelligentnie korzystać. Należy mieć na uwadze, że obliczenia na komputerze są zawsze obarczone pewnym błędem, wynikającym z ograniczonej dokładności rachunków. W szczególności wykresy funkcji rysowane na ekranie monitora należy zawsze traktować jako pewne przybliżenie, które choć

zazwyczaj pozwala budować prawidłową intuicję, czasem może być zwodnicze. Zaczniemy od prostego przykładu.

**Zadanie B.28.** Zbadać przebieg zmienności funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{64 - 120x + 70x^2 - 15x^3 + x^4}{-54 + 45x - 12x^2 + x^3}.$$

### Rozwiążanie:

Dla ustalenia uwagi przypomnijmy co należy zrobić:

- znaleźć maksymalny podzbiór  $\mathbb{R}$ , na którym można określić  $f$  powyższym wzorem,
- znaleźć zera  $f$ ,
- znaleźć granice w krańcach przedziałów określoności,
- znaleźć zbiór, w którym  $f$  jest różniczkowalna,
- znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne
- znaleźć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia,
- znaleźć asymptoty jeśli istnieją,
- naszkicować wykres.

Funckja  $f$  jest ilorazem dwóch wielomianów, więc maksymalną dziedziną funkcji będzie zbiór tych  $x$ , dla których mianownik się nie zeruje. Należy zatem znaleźć pierwiastki równania

$$-54 + 45x - 12x^2 + x^3 = 0.$$

Wystarczy wykonać polecenie:

```
Solve[-54 + 45x - 12x^2 + x^3 == 0, x].
```

Dowiemy się, że są dwa rozwiązania  $x = 3$  oraz  $x = 6$ , przy czym  $x = 3$  jest podwójne. Maksymalną dziedziną naszej funkcji jest zatem zbiór

$$\text{Dom}_f = (-\infty, 3) \cup (3, 6) \cup (6, \infty).$$

Do znalezienia miejsc zerowych naszej funkcji możemy posłużyć się poleceniem Factor

```
Factor[64 - 120x + 70x^2 - 15x^3 + x^4].
```

Dowiemy się stąd, że  $f(x) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = 1, x = 2, x = 4$  lub  $x = 8$ .

Do obliczenia granic na krańcach przedziałów określoności posłuży nam znane już polecenie Limit<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup>Uwaga! Przypomnijmy, że parametr Direction  $\rightarrow 1$  oznacza granicę lewostronną, a Direction  $\rightarrow -1$  granicę prawostronną.

```
Limit[f[x],x -> -Infinity]
Limit[f[x],x -> 3, Direction -> 1]
Limit[f[x],x -> 3, Direction -> -1]
Limit[f[x],x -> 6, Direction -> 1]
Limit[f[x],x -> 6, Direction -> -1]
Limit[f[x],x -> Infinity].
```

Stąd mamy

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty. \end{array}$$

Dla wyznaczenia punktów różniczkowalności  $f$  należy obliczyć pochodną i zobaczyć gdzie jest dobrze określona. W *Mathematica* wyliczanie pochodnej funkcji jednej zmiennej jest bardzo proste. Wystarczy napisać

$f'[x]$  albo  $D[f[x], x]$

Wynik może nie być zbyt czytelny, dlatego skorzystamy z funkcji *Simplify*

```
fp[x_] := Simplify[f'[x]]
fp[x]
```

i dowiemy się, że pochodna jest opisana wzorem

$$f'(x) = \frac{-1200 + 1608x - 780x^2 + 182x^3 - 21x^4 + x^5}{(-6 + x)^2(-3 + x)^3}.$$

Od razu widać, że pochodna istnieje wszędzie poza punktami  $x = 6$  oraz  $x = 3$ , czyli  $f$  jest różniczkowalna w całej swojej dziedzinie.

Ponieważ  $f$  jest różniczkowalna wszędzie gdzie jest określona, więc do zbadania monotoniczności możemy posłużyć się pochodną. Szukamy miejsc zerowych pochodnej

```
Solve[fp[x] == 0, x]
```

co niestety nie daje satysfakcjonującego rezultatu. W naszym przypadku pierwiastki równania  $f'(x) = 0$  nie wyrażają się żadnym ładnym wzorem. Pozostaje nam zatem operować na numerycznych przybliżeniach. Piszemy

```
N[Solve[fp[x] == 0, x]]
```

i dowiadujemy się, że jest dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty, równy w przybliżeniu  $x_0 = 1,62937$ . Możemy go wyłuskać z listy wszystkich rozwiązań przy pomocy polecenia

```
x0 = Select[x /. N[Solve[fp[x] == 0, x]], Element[#, Reals] &][[1]].
```

Zbadamy znak pochodnej na przedziałach  $(-\infty, x_0)$ ,  $(x_0, 3)$ ,  $(3, 6)$  oraz  $(6, \infty)$ . Wiemy, że  $f'$  jest ciągła w swojej dziedzinie i zmienia znak tylko w  $x_0$ , wystarczy więc wybrać pojedynczym punkcie z każdego z przedziałów  $(-\infty, x_0)$ ,  $(x_0, 3)$ ,  $(3, 6)$  oraz  $(6, \infty)$  i sprawdzić jaki znak ma  $f'$  w każdym z tych punktów. Weźmy punkty 1, 2, 5 i 7. Wykonujemy polecenia

```
fp[1] > 0
fp[2] > 0
fp[5] > 0
fp[7] > 0
```

i uzyskujemy odpowiedzi

```
True
False
True
True.
```

W takim razie  $f$  jest rosnąca na przedziale  $(-\infty, x_0)$ , ma maksimum lokalne w  $x_0$ , a później maleje do  $-\infty$ , gdy  $x \rightarrow 3$ . Następnie, na przedziale  $(3, 6)$ , rośnie od  $-\infty$  do  $+\infty$ , przecinając oś OX w punkcie 4. Podobnie, na przedziale  $(6, \infty)$  rośnie od  $-\infty$  do  $+\infty$ , przecinając oś OX w punkcie 8.

W następnej kolejności badamy wypukłość i wklęsłość. Obliczamy w tym celu drugą pochodną (jeśli istnieje). Wykonujemy komendy

```
fb[x_] := Simplify[f'', [x]]
fb[x]
```

i natychmiast dostajemy odpowiedź

$$f''(x) = \frac{144 + 2040x - 1284x^2 + 282x^3 - 22x^4}{(-6 + x)^3(-3 + x)^4}.$$

Widzimy, że druga pochodna jest dobrze określona wszędzie poza punktami 3 i 6, więc badana funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna w całej swojej dziedzinie i możemy posłużyć się drugą pochodną do wyznaczania przedziałów wypukłości i wklęsłości. Jak poprzednio, wykonujemy

```
{x1, x2} = Select[x /. N[Solve[fb[x] == 0, x]], Element[#, Reals]&]
```

i znajdujemy w ten sposób dwa rzeczywiste miejsca zerowe drugiej pochodnej równe w przybliżeniu  $x_1 = -0,0676635$  oraz  $x_2 = 4,49721$ . Polecenia

```
fb[-1] > 0
fb[1] > 0
fb[4] > 0
fb[5] > 0
fb[7] > 0
```

dają odpowiedzi

```
True
False
False
True
False
```

więc funkcja  $f$  jest wypukła na przedziale  $(-\infty, x_1)$ , wklęsła na  $(x_1, 3) \cup (3, x_2)$ , ponownie wypukła na  $(x_2, 6)$  i wklęsła na  $(6, \infty)$ . Ponieważ pierwiastki równania  $f''(x) = 0$  były jednokrotne (każdy występował tylko raz na liście rozwiązań), więc od razu możemy wnioskować, że punkty przegięcia znajdują się w  $x_1$  i  $x_2$ .

Wiemy już o istnieniu dwóch asymptot pionowych w punktach  $x = 3$  i  $x = 6$ . Pozostaje sprawdzić, czy  $f$  ma asymptoty w  $\pm\infty$ . Obliczamy w tym celu granice

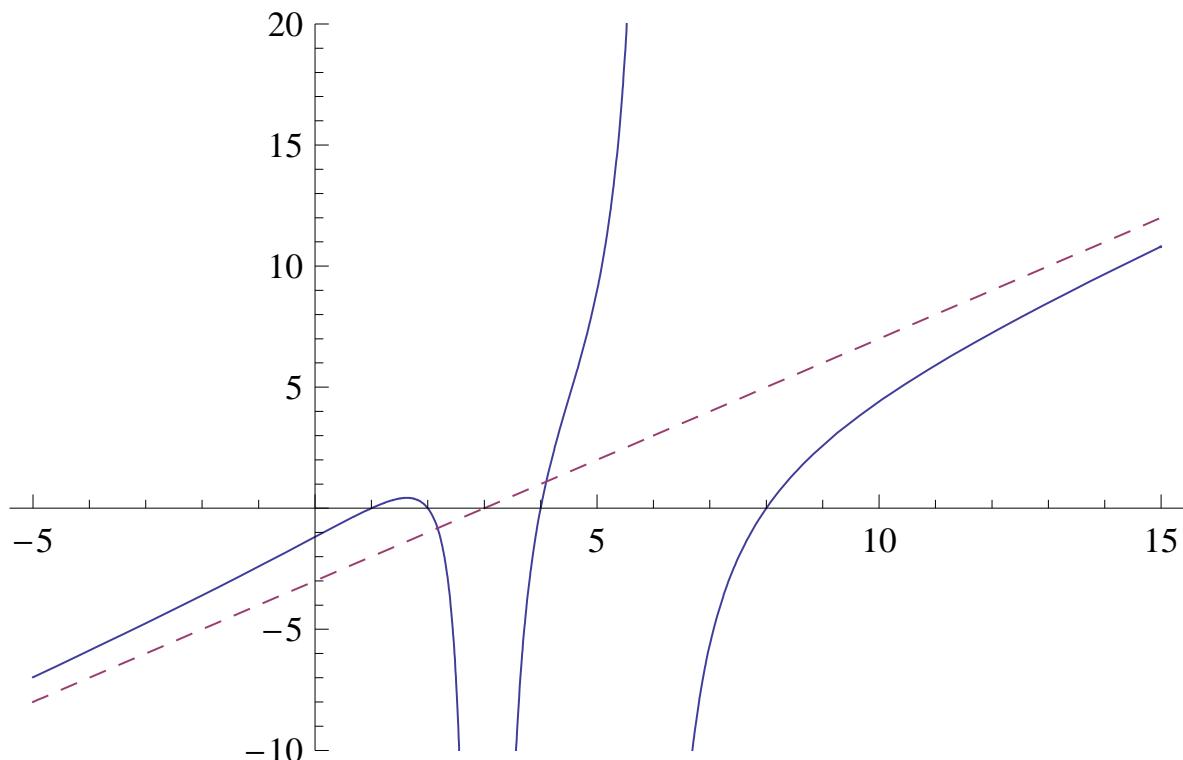
```
Limit[f[x]/x, x -> -Infinity]
Limit[f[x]/x, x -> Infinity]
```

i dowiadujemy się, że obie istnieją<sup>10</sup> i są równe 1. Dalej obliczamy

```
Limit[f[x] - x, x -> -Infinity]
Limit[f[x] - x, x -> Infinity]
```

uzyskując w obu przypadkach odpowiedź  $-3$ . W takim razie obie asymptoty istnieją i są opisane równaniem

$$y = x - 3.$$



Rysunek B.1: Wykres funkcji  $f(x)$  wraz z asymptotą.

Na koniec naszkicujemy wykres badanej funkcji. Zaznaczmy na nim również obliczoną asymptotę  $y = x - 3$ . W *Mathematicze* wystarczy napisać

---

<sup>10</sup>Uwaga! Przypominamy, że z istnienia granicy  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$  nie wynika jeszcze istnienie asymptoty, np.  $f(x) = \sin(x)$ .

```
Plot[{f[x], x - 3}, {x, -5, 15}, PlotRange -> {-10, 20},
      PlotStyle -> {Automatic, Dashed}, Exclusions -> {3, 6}]
```

by uzyskać szkic wykresu (zobacz Rysunek B.1). Dodatkowe parametry zostały wprowadzone po to aby poprawić czytelność rysunku. Drobnym mankamentem jest to, że z wykresu trudno byłoby wnioskować o istnieniu punktu przegięcia w  $x_1$ . Poza tymi drobiazgami<sup>11</sup>, wykres jaki uzyskaliśmy dobrze odpowiada temu co wiemy o funkcji  $f$ .

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie B.29.** Zbadać przebieg zmienności funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{18x^3 + 39x^2 - 51x + 12}{3x^2 + 7x - 6}.$$

**Zadanie B.30.** Zbadać przebieg zmienności funkcji danej wzorem

$$f(x) = \sqrt{|x|}(x^2 + x - 2).$$

**Zadanie B.31.** Zbadać przebieg zmienności funkcji danej wzorem

$$f(x) = e^x(x - 5)(x - 2)(x^2 + x + 1).$$

*Uwaga 1:* Ze względu na ograniczoną dokładność obliczeń, niektóre wyliczone przez komputer wartości numeryczne mogą mieć małą część urojoną podczas gdy powinny być rzeczywiste. Trzeba mieć to na uwadze, interpretując podawane wyniki. W takim przypadku pomocna może być funkcja Chop. Proszę zaobserwać jej działania na następującym przykładzie:

```
N[Sqrt[5] Coth[2^10 ArcCoth[1/Sqrt[5]]]]
Chop[%].
```

*Uwaga 2:* Przy szkicowaniu wykresu należy umiejętnie posłużyć się parametrami PlotRange oraz AspectRatio, by na wykonanym rysunku można było zaobserwować ekstrema lokalne i zmiany w monotoniczności.

**Zadanie B.32.** Zbadać przebieg zmienności funkcji danej wzorem

$$f(x) = |x - 1|^{1/3}(2 - |x - 2|^{3/2})(-|x - 3|^{3/4})x(x - 4).$$

*Wskazówka:* W *Mathematicie*, zamiast używać standardowej funkcji Abs, która jest zbyt ogólna<sup>12</sup>, warto napisać własną funkcję obliczającą wartość bezwzględną z liczby rzeczywistej

```
abs[x_] := If[x < 0, -x, x].
```

Wtedy *Mathematica* nie będzie już miała problemów z upraszczaniem wyrażeń. Czytelnik sam może sprawdzić jaka jest różnica wykonując polecenia

---

<sup>11</sup>Aby zaobserwować punkt przegięcia można narysować mniejszy fragment wykresu:  
Plot[f[x], {x, 3, 6}, PlotRange -> {-20, 30}].

<sup>12</sup>Funkcja Abs jest zdefiniowana jako zespolony moduł.

```
Simplify[abs[x-1]*abs[x-2], 1 < x < 2]
Simplify[Abs[x-1]*Abs[x-2], 1 < x < 2].
```

**Zadanie B.33.** Dla funkcji z poprzedniego zadania wykonać polecenia

```
Minimize[{f[x], 0 < x < 1}, x]
Maximize[{f[x], 0 < x < 1}, x].
```

Wykonać te same polecenia dla funkcji  $f$  zdefiniowanej przy pomocy standardowej funkcji `Abs`. Jaka jest różnica?

*Uwaga:* Wykonanie powyższych komend może zająć kilka minut.

**Zadanie B.34.** Zbadać przebieg zmienności funkcji danej przez

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}) \exp(-(x-1)^{-2}) & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty), \\ 0 & \text{jeśli } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

### B.3.3 Aproksymacja funkcji ciągłych wielomianami

**Nowe umiejętności:** przybliżanie funkcji wielomianami.

**Skrypt:** Rozdział 7.3.

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Maxima	Komentarz
<code>InterpolatingPolynomial</code>	<code>lagrange</code> (wymaga załadowania biblioteki <code>interpol</code> )	przybliżenie wielomianowe

Na wykładach z analizy matematycznej Czytelnik dowiedział się, że każdą funkcję ciągłą na przedziale domkniętym można przybliżać wielomianami w sposób jednostajny (Twierdzenia 7.15 i 7.16). W tym celu posługiwieliśmy się tak zwanyimi *wielomianami Bernsteina*. Dla funkcji ciągłej  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiujemy przybliżający ją ciąg wielomianów

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Powysze wyrażenie jest dość zawiłe. Również dowód, że ciąg  $B_n(f)$  jest zbieżny jednoznacznie do  $f$  jest dość skomplikowany. Czytelnik może zastanawiać się czy nie można tego zrobić jakoś prościej. Narzucającym się pomysłem jest tzw. interpolacja przez punkty wykresu.

Wiadomo, że wielomian stopnia  $k$  jest wyznaczony jednoznacznie przez swoje wartości w  $k+1$  różnych punktach. Istotnie, weźmy  $k+1$  punktów  $x_0, \dots, x_k$  i ustalmy  $k+1$  wartości  $y_0, \dots, y_k$ . Każdy wielomian stopnia  $k$  ma  $k+1$  współczynników i może być zapisany jako  $W(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$ . Istnieje dokładnie jeden wielomian  $W(x)$  spełniający zależność  $W(x_i) = y_i$  dla wszystkich  $i = 0, \dots, k$ . Każde z  $k+1$  równań  $W(x_i) = y_i$  jest

równaniem liniowym względem współczynników  $a_0, \dots, a_k$ . Istnienie rozwiązania wynika teraz z tego, że odpowiedni wyznacznik Vandermonde'a jest niezerowy o ile tylko  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ .

W programach CAS istnieją gotowe funkcje, które potrafią znaleźć wielomian o zadanych wartościach w zadanych punktach. Przykładowo, wykonując w programie *Mathematica* polecenie

```
InterpolatingPolynomial[{{0,0},{1,-1},{2,0}},x]
```

dostajemy odpowiedź

$$(-2+x)x$$

Łatwo sprawdzić, że jest to poprawna odpowiedź – wykres wielomianu  $W(x) = x(x - 2)$  rzeczywiście przechodzi przez punkty  $(0,0)$ ,  $(1, -1)$  i  $(2,0)$ . W *Maximie* ten sam efekt uzyskamy wpisując

```
load(interpoly);
lagrange([[0,0],[1,-1],[2,0]]).
```

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie B.35.** Napisać w *Mathematica* procedurę `intpoly[f_, n_]`, która przyjmuje dwa argumenty: pewną funkcję  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz liczbę naturalną  $n$ , a w wyniku daje odpowiedni wielomian interpolacyjny stopnia  $n$ , którego wykres przechodzi przez punkty  $(\frac{k}{n}, f(\frac{k}{n}))$  dla każdego  $k = 0, \dots, n$ .

*Wskazówka:* Warto posłużyć się tutaj poleceniem `Table`, by wygenerować automatycznie długą listę postaci  $\{\{0, f[0]\}, \{1/n, f[1/n]\}, \dots, \{1, f[1]\}\}$ .

**Zadanie B.36.** Za pomocą zdefiniowanej wyżej procedury `intpoly` wygenerować wielomian stopnia  $n$  dla wymienionych niżej funkcji. Korzystając z polecenia `Plot` stworzyć wykres funkcji  $f$  oraz odpowiedniego wielomianu interpolacyjnego. Czy wielomian dobrze przybliża daną funkcję? Czy jakość przybliżenia staje się coraz lepsza wraz ze wzrostem  $n$ ?

- $f(x) = \sin(\pi x)$  dla  $n = 3, 5, 10, 20$ ,
- $f(x) = \sin(3\pi x)$  dla  $n = 3, 5, 10, 20$ ,
- $f(x) = (x + 0.01)^{-1}$  dla  $n = 2, 5, 10, 20, 30$ ,
- $f(x) = |x - 0.5|$  dla  $n = 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30$ ,
- $f(x) = |x - 0.5|^{3/2}$  dla  $n = 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30$ ,
- $f(x) = \exp(1 - 1/x^2)$  dla  $n = 2, 3, 4, 5, 10, 20$ .

**Zadanie B.37.** Napisać w *Mathematica* procedurę `bernstein[f_, n_]`, która przyjmuje dwa argumenty: pewną funkcję  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  oraz liczbę naturalną  $n$ , a w wyniku daje wielomian Bernsteina stopnia  $n$  dla funkcji  $f$ .

**Zadanie B.38.** Za pomocą zdefiniowanej wyżej procedury `bernstein` wygenerować wielomian stopnia  $n$  dla wymienionych niżej funkcji. Korzystając z polecenia `Plot` stworzyć wykres funkcji  $f$  oraz odpowiedniego wielomianu Bernsteina. Czy wielomian dobrze przybliża daną funkcję? Czy jakość przybliżenia staje się coraz lepsza wraz ze wzrostem  $n$ ?

- $f(x) = \sin(\pi x)$  dla  $n = 3, 5, 10, 20,$
- $f(x) = \sin(3\pi x)$  dla  $n = 3, 5, 10, 20,$
- $f(x) = (x + 0.01)^{-1}$  dla  $n = 2, 5, 10, 20, 30,$
- $f(x) = |x - 0.5|$  dla  $n = 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30,$
- $f(x) = |x - 0.5|^{3/2}$  dla  $n = 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30,$
- $f(x) = \exp(1 - 1/x^2)$  dla  $n = 2, 3, 4, 5, 10, 20.$

*Uwaga!* Zauważ, że kolejne wielomiany Bernsteina nie muszą pokrywać się z przybliżaną funkcją w coraz większej liczbie punktów. Inaczej ma się sprawia z wielomianami interpolacyjnymi, które z definicji pokrywają się z przybliżaną funkcją na coraz większym zbiorze. Na tym właśnie polega różnica między *interpolacją*, a *aproksymacją*. Funkcje aproksymujące zadawaną funkcję są blisko tejże funkcji (w odpowiednio dobranym sensie) ale mogą się z nią nie pokrywać w żadnym punkcie.

### B.3.4 Znajdowanie miejsc zerowych funkcji ciągły

**Nowe umiejętności:** implementacja standardowych metod obliczania miejsc zerowych funkcji ciągły.

**Skrypt:** Rozdział 5.3 i dodatek 6.A.

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Maxima	Komentarz
<code>FindRoot[f[x], {x,start}]</code>	<code>find_root(f(x),x, start,end)</code>	numeryczne przybliżanie pierwiastka równania

Z wykładu analizy (Twierdzenie 5.39) wiemy, że każda funkcja ciągła ma tzw. *własność Darboux*: jeśli w punkcie  $x$  mamy  $f(x) = a$ , a w punkcie  $y$  mamy  $f(y) = b$  oraz  $a < b$ , to dla każdej liczby  $c$  spełniającej  $a < c < b$  znajdziemy punkt  $z$  leżący pomiędzy  $x$  i  $y$  tak, że  $f(z) = c$ . Innymi słowy, jeśli funkcja ciągła przyjmuje w jakiś punktach wartości  $a$  i  $b$ , to musi też przyjąć każdą wartość pośrednią. Obserwacja ta pozowała przybliżać miejsca zerowe dowolnej funkcji ciągłej. Jeśli tylko potrafimy znaleźć dwa punkty  $x$  i  $y$  takie, że  $f(x) > 0$  i jednocześnie  $f(y) < 0$ , to gdzieś pomiędzy  $x$  i  $y$  musi być taki punkt  $z$ , że  $f(z) = 0$ . Możemy teraz zbliżyć się do liczby  $z$  wybierając pewien punkt  $w$  leżący pomiędzy  $x$  i  $y$ . Jeśli  $f(w) > 0$ , to punkt  $z$  musi leżeć pomiędzy  $w$  i  $y$ , a jeśli  $f(w) < 0$ , to  $z$  leży pomiędzy  $x$  i  $w$ . W każdym z tych dwóch przypadków zmniejszyliśmy długość

przedziału, w którym szukamy punktu  $z$ . Powtarzając tę procedurę możemy zbliżyć się do  $z$  na dowolnie małą odległość.

W zależności od tego w jaki sposób będziemy wybierać punkt  $w$ , nasza metoda może zbiegać do  $z$  szybciej lub wolniej. Jeśli za każdym razem punkt  $w$  wybierzemy w środku przedziału, tzn. przyjmiemy

$$w = \frac{1}{2}(x + y),$$

to rozpatrywany przedział będzie się kurczył w każdym kroku dwukrotnie, czyli geometrycznie. Metoda ta nazywa się metodą *bisekcji* i jest całkiem szybko zbieżna, ale istnieją metody od niej lepsze.

Przykładowo, możemy poprowadzić *sieczną* wykresu funkcji przez punkty  $(x, f(x))$  i  $(y, f(y))$  i ustalić punkt  $w$  w miejscu przecięcia się tej siecznej z osią OX. Daje to następujący wzór

$$w = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}.$$

Jeśli funkcja  $f$  jest nie tylko ciągła ale też różniczkowalna, to możemy postępować inaczej. Zaczynając z punktu  $x_0$  (o którym powinniśmy wiedzieć a priori, że jest blisko miejsca zerowego), wyznaczamy styczną do wykresu przechodzącą przez punkt  $(x_0, f(x_0))$ , a następnie ustalamy punkt  $x_1$  w miejscu przecięcia się tej stycznej z osią OX. Dalej powtarzamy tę operację wyznaczając kolejne punkty  $x_2, x_3, \dots$ . Procedura ta definiuje następujący ciąg rekurencyjny

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Oczywiście możemy tak robić tylko jeśli pochodna  $f'(x_n)$  jest różna od zera, czyli wtedy gdy styczna do wykresu nie jest równoległa do osi OX. Metoda ta nazywa się *metodą Newtona*.

O wielu innych metodach znajdowania miejsc zerowych funkcji ciągłych można poczytać na stronach Wolfram MathWorld [6]. Czytelnik dowie się też o nich więcej z wykładu z Matematyki Obliczeniowej lub Metod Numerycznych prowadzonych na naszym wydziale. Polecamy też zajrzeć do podręczników [1], [4], [8].

W programie *Mathematica* mamy do dyspozycji funkcję *FindRoot*, która przybliża miejsca zerowe danej funkcji metodą Newtona. Można też użyć metody siecznych przekazując dodatkowy parametr postaci *Method* → "Secant".

**Zadanie B.39.** Znaleźć (w przybliżeniu) wszystkie pierwiastki równania  $2^x = x^2$ .

Łatwo zobaczyć, że równanie spełnione jest dla  $x = 2$  oraz  $x = 4$ . Czytelnik zapewne potrafi udowodnić, że nie ma więcej dodatkowych rozwiązań. W punkcie  $x = 0$  mamy  $2^0 = 1$  oraz  $0^2 = 0$ , więc lewa strona jest większa, ale już dla  $x < -1$  mamy  $2^x < x^2$ , więc pomiędzy  $-1$  i  $0$  musi być jeszcze jeden pierwiastek. Pomocny może być w tym momencie wykres. Definiujemy funkcję

```
f[x_] := x^2 - 2^x
```

i wykonujemy komendy

```
FindRoot[f[x], {x, 0}]
FindRoot[f[x], {x, -1, 0}, Method -> "Secant"] .
```

Uzyskujemy odpowiedź

```
{x -> -0.766665}
{x -> -0.766665} .
```

Można skorzystać z opcji WorkingPrecision oraz AccuracyGoal, żeby uzyskać dokładniejszy wynik:

```
FindRoot[f[x], {x, 0}, WorkingPrecision -> 20, AccuracyGoal -> 20]
```

```
{x -> -0.76666469596212309311} .
```

Co ciekawe, metoda siecznych zaimplementowana w funkcji FindRoot nie zawsze daje wynik z przedziału podanego na początku. By się o tym przekonać, wystarczy wykonać

```
FindRoot[f[x], {x, -1, 1.9}, Method -> "Secant"] .
```

### Problemy do samodzielnego rozwiązań:

**Zadanie B.40.** Obliczyć liczbę  $\pi$  z dokładnością do 20 miejsc po przecinku wykorzystując funkcję FindRoot. Wynik można porównać z wartością numeryczną używaną przez program Mathematica N[Pi, 20].

**Zadanie B.41.** Znaleźć (w przybliżeniu) wszystkie rozwiązania równania

$$(x - 1)(x + 1) = \frac{1}{5} \sin(10x) .$$

**Zadanie B.42.** Znaleźć (w przybliżeniu) wszystkie rozwiązania równania

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) = \frac{1}{2} \sin(13x) .$$

**Zadanie B.43.** Znaleźć (w przybliżeniu) wszystkie rozwiązania równania

$$\arctg(50 \sin(x)) = 2 \cos(x) .$$

**Zadanie B.44.** Napisać funkcję odw[f\_, s\_], która przyjmie dwa argumenty: różniczkowalną i różnowartościową funkcję  $f$  oraz argument  $s$ , a zwraca wartość  $f^{-1}(s)$ .

Wskazówka:  $f^{-1}(s) = t \iff f(t) = s$ .

**Zadanie B.45.** Przy pomocy funkcji odw zdefiniować funkcję odwrotną do funkcji

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

Narysować wykres tak zdefiniowanej funkcji i porównać z wykresem funkcji arcsinh.

**Zadanie B.46.** Punkty zbiory  $A \in \mathbb{R}^2$  spełniają równanie  $(y - x)^2 = x^5$ . Wykorzystując FindRoot zdefiniować funkcję  $y(x)$  parametryzującą zbiór  $A$  w otoczeniu punktu  $(1, 0)$ . Narysować wykres. Porównać z wykresem uzyskanym za pomocą funkcji ContourPlot (por. rozdział B.3.1)

**Zadanie B.47.** Dana jest funkcja dwóch zmiennych  $F(x, y) = \exp(xy)(x + y)$ . Wykorzystując FindRoot zdefiniować funkcję  $y(x)$  parametryzującą poziomicę  $F^{-1}(1)$  w otoczeniu punktu  $(0, 1)$ . Narysować wykres.

## B.4 Ciągi i szeregi funkcyjne

### B.4.1 Szeregi liczbowe

**Nowe umiejętności:**

**Skrypt:** Rozdział 4.

**Nowe funkcje:**

Mathematica	Maxima	Komentarz
Sum[wyr, zakres]	sum(wyr,zmienna, od,do)	suma
NSum[wyr, zakres]	brak	sumowanie numeryczne

Rozdział poświęcony badaniu ciągów i szeregów funkcyjnych zaczniemy od krótkiego omówienia możliwości programu *Mathematica* w zakresie obróbki sum skończonych i szeregów liczbowych.

Podstawową komendą służącą do obliczania sum jest `Sum[wyrażenie, zakres]`. Zaczniemy od rozwiązyania słynnego zadania Gaussa<sup>13</sup> znalezienia sumy wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100:

```
Sum[i, {i, 1, 100}].
```

To samo zadanie możemy także rozwiązać od razu w większej ogólności:

```
Sum[i, {i, 1, n}],
```

podobnie jak inne zadania podobnego typu, na przykład problem obliczenia sumy kolejnych piątych potęg  $1 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5$ :

```
Sum[i^5, {i, 1, n}].
```

*Mathematica* poradzi sobie także doskonale z innymi problemami. Bez trudu pozwoli nam na przykład wyznaczyć sumy

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{(4i-1)(4i+3)}, \quad \sum_1^n i^2 q^i, \quad \text{czy} \quad \sum_{k=1}^n \sin(kx).$$

Wystarczy wpisać

```
Sum[1/((4 i - 1) (4 i + 3)), {i, 2, n}]
Sum[i^2 q^i, {i, 1, n}]
Sum[Sin[k x], {k, 1, n}]
```

<sup>13</sup>Podobno mały Gauss musiał rozwiązać to zadanie za karę.

i odczytać odpowiedź.

*Uwaga!* W niektórych przypadkach wynik może zastać wyrażony za pomocą funkcji specjalnych.

Całkiem dobrze poradzimy sobie również z sumami zawierającymi symbole Newtona, na przykład  $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$  obliczymy bez trudu pisząc

```
Sum[k^2 Binomial[n, k], {k, 1, n}].
```

Jednak już w przypadku bardziej skomplikowanej sumy  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$  wynik zostanie zapisany w terminach funkcji  $\Gamma$ , zamiast w prostszej formie  $\binom{2n}{n} + 1$  (Czytelnik może spróbować samodzielnie udowodnić tę równość).

*Mathematica* pozwala także na obliczanie sum szeregów. W tym celu wystarczy użyć omówionego wcześniej polecenia `Sum` ustawiając zakres sumowania na nieskończoność (`Infinity`). Jako ilustrację obliczymy kilka prostych sum:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}.$$

Odpowiednie polecenia to:

```
Sum[n^2 q^n, {n, 1, Infinity}]
Sum[1/n^4, {n, 1, Infinity}]
Sum[Sin[n]/n, {n, 1, Infinity}].
```

Zobaczmy jak *Mathematica* zareaguje w przypadku szeregu harmonicznego  $\sum \frac{1}{n}$

```
Sum[1/n, {n, 1, Infinity}].
```

Odpowiedzią jest komunikat, że podana suma jest rozbieżna.

Przy bardziej skomplikowanych szeregach *Mathematica* zazwyczaj nie potrafi podać sumy, co zresztą nie powinno nas bardzo dziwić jako że, poza paroma prostymi przypadkami, my także nie potrafimy tego zazwyczaj zrobić. W takim wypadku program zwróci po prostu wyjściową formułę. Dotyczy to zarówno szeregów zbieżnych jak i rozbieżnych, przykładowo

```
Sum[Sin[1/n^2], {n, 1, Infinity}]
Sum[1/(n Log[n]), {n, 2, Infinity}].
```

W takiej sytuacji pomocne może być polecenie `NSum`, które służy do obliczania przybliżonej wartości sumy. W większości przykładów, z którymi Czytelnik spotka się na ćwiczeniach z analizy, `NSum` zwróci skończoną wartość w przypadku szeregu zbieżnego i informację o błędzie w przypadku szeregu rozbieżnego. W tym ostatnim przypadku również uzyskamy wynik liczbowy – będzie to liczba, którą program uzyskał w momencie zastosowania algorytmu sumującego. Dwa poprzednio rozpatrywane szeregi dobrze oddają tę prawidłowość

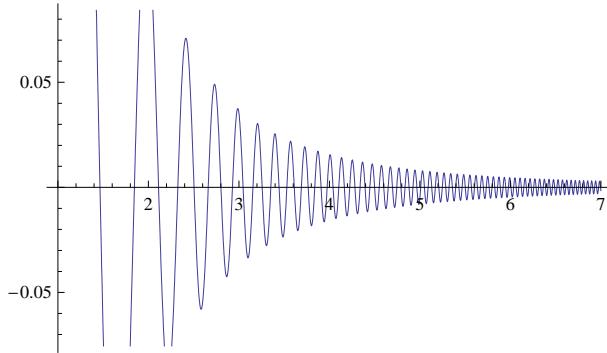
```
NSum[Sin[1/n^2], {n, 1, Infinity}]
NSum[1/(n Log[n]), {n, 2, Infinity}].
```

Chociaż odpowiedzi NSum w większości przypadków pokrywają się z tym, co wiemy o zbieżności rozpatrywanych szeregów, należy je w najlepszym razie traktować jedynie jako wskazówki, a nie jako dowody zbieżności bądź rozbieżności badanych szeregów. Bardzo wiele zależy od tego jak opisane są składniki naszego szeregu. Generalnie jeśli są to liczby postaci  $f(n)$ , gdzie  $f$  jest dość regularną funkcją (na przykład monotoniczną) wówczas możemy oczekiwać, że odpowiedzi programu będą prawidłowe. Ale w przypadku funkcji gorzej uwarunkowanych numerycznie program może nie być w stanie obliczyć ewidentnie zbieżnej sumy. Dotyczy to szczególnie szeregów postaci  $\sum f(n)$ , gdzie  $f$  jest funkcją „szybko oscylującą”. Dobrym przykładem może być szereg  $\sum \frac{\sin(n^3)}{n^3}$ . Zobaczmy jak będzie wyglądać odpowiedź programu na zadanie obliczenia jego sumy:

```
NSum[Sin[n^3]/n^3, {n, 1, Infinity}]
```

i jak wygląda „szybko oscylująca” funkcja  $\frac{\sin(x^3)}{x^3}$ :

```
Plot[Sin[x^3]/x^3, {x, 1, 7}]
```



Podsumowując, do obliczeń programu *Mathematica* dotyczących szeregów należy podchodzić z ograniczonym zaufaniem. Nie znaczy to oczywiście, że nie da się użyć komputera, aby zbadać zbieżność konkretnego szeregu. Przykłady takiego postępowania podamy w kolejnym podrozdziale.

#### B.4.2 Wzór Taylora, szeregi potęgowe

**Nowe umiejętności:** Rozwijanie funkcji w szereg Taylor'a, operacje na szeregach potęgowych.

**Skrypt:** Rozdziały [6.4](#) i [8](#)

**Nowe funkcje:**

<i>Mathematica</i>	<i>Maxima</i>	Komentarz
<code>Series[f[x], {x, x0, 10}]</code>	<code>taylor(f(x), x, x0, 10)</code>	rozwija funkcję $f$ w szereg wokół $x_0$ do wyrazów zadanego rzędu
<code>Normal[szereg]</code>	<code>taylorat(szereg)</code>	ucina resztę szeregu (wyrazy $o(x^n)$ )
<code>SeriesCoefficient</code>	<i>brak</i>	podaje ustalony współczynnik rozwinięcia
<code>InverseSeries</code>	<code>revert</code>	rozwinięcie funkcji odwrotnej
<code>ComposeSeries</code>	<i>brak</i>	składanie szeregów

*Mathematica* dysponuje bardzo przydatnym poleceniem `Series` służącym do znajdowania rozwinięcia danej funkcji w szereg potęgowy. Jego działanie prześledźmy na prostym przykładzie – rozwińmy funkcję wykładniczą do wyrazów 10 rzędu:

```
Series[Exp[x], {x, 0, 10}].
```

Polecenie `Series` pozwala na znalezienie rozwinięcia danej funkcji tylko do wyrazów ustalonego skończonego rzędu, a więc zastąpienie liczby 10 w powyższym poleceniu wielkością `Infinity` albo `k` nie da żadnych rezultatów. Czy nie ma zatem sposobu na znalezienie wyrazu ogólnego rozwinięcia funkcji  $\exp(x)$ ? Okazuje się, że takim narzędziem jest polecenie `SeriesCoefficient`, które pozwala znaleźć interesujący nas wyraz ustalonego rzędu rozwinięcia danej funkcji. Przykładowo

```
SeriesCoefficient[Exp[x], {x, 0, k}]
```

zwróci współczynnik  $\frac{1}{k!}$ . Zobaczmy jeszcze jaki będzie efekt, gdy zapytamy się o 5-ty współczynnik rozwinięcia wokół 1 niesprecyzowanej a priori funkcji  $f(x)$ :

```
SeriesCoefficient[f[x], {x, 1, 5}].
```

W wyniku otrzymaliśmy  $\frac{1}{120}f^{(5)}(1)$ , a więc ogólny wzór na 5-ty współczynnik rozwinięcia Taylora funkcji  $f(x)$ .

*Mathematica* pozwala wykonywać wiele operacji na szeregach potęgowych, takich jak ich mnożenie, składanie, czy znajdowanie rozwinięcia funkcji odwrotnej. Zobaczmy to na kilku prostych przykładach. Na początek pomóżmy przez siebie dwa szeregi: szereg  $x + 2x^2 - 5x^4 + o(x^4)$  i rozwinięcie  $\sin(x)$  wokół 0 do wyrazów rzędu 10:

```
(x + 2 x^2 - 5 x^4 + 0[x]^5) Series[Sin[x], {x, 0, 10}].
```

Program zwrócił wynik  $x^2 + 2x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{16x^5}{3} + o(x^6)$ , a więc automatycznie zwinął wszystkie wyrazy wyższych rzędów do wyrazu  $o(x^6)$ .

Zobaczmy co się stanie gdy zastosujemy polecenie `InverseSeries` do rozwinięcia funkcji  $\exp(x)$  do wyrazów rzędu 7 wokół punktu 0.

```
Series[Exp[x], {x, 0, 7}];  
InverseSeries[%].
```

W wyniku uzyskaliśmy szereg potęgowy o wyrazach rzędu 7 wokół punktu 1. Rzut oka wystarcza by stwierdzić, że to fragment rozwinięcia logarytmu, a więc funkcji odwrotnej do  $\exp$  wokół punktu  $\exp(0) = 1$ .

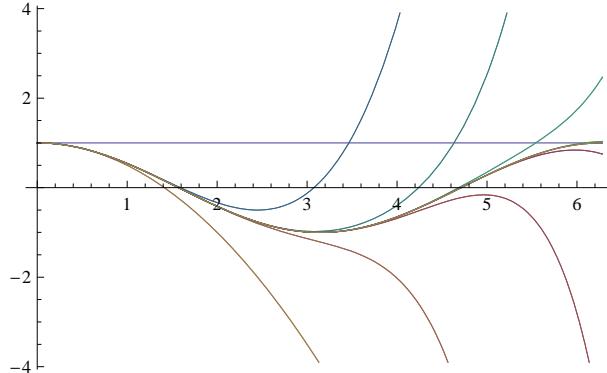
Kolejną przydatną funkcją jest polecenie `+ComposeSeries+`, służące do znajdowania rozwinięcia złożenia dwóch szeregów. Przykładowo, rozwinięcie złożenia  $\sin(\tan(x))$  możemy wyznaczyć albo znanym nam już poleceniem `Series`, albo składając rozwinięcia sinusu i tangensa:

```
Series[Sin[Tan[x]], {x, 0, 5}]
ComposeSeries[Series[Sin[y], {y, 0, 5}], Series[Tan[x], {x, 0, 5}]].
```

Na koniec warto omówić bardzo przydatną funkcję `Normal`. Ucina ona resztę danego szeregu i zostawia zwykły wielomian. Dzięki temu możemy na przykład narysować jego wykres. Zobaczmy, jak wygląda pierwszych 20 wielomianów Taylora funkcji  $\cos$ :

```
Plot[
Evaluate[
Table[Normal[Series[Cos[x], {x, 0, n}]], {n, 20}],
{x, 0, 2 Pi}]]
```

Oto efekt końcowy:



**Zadanie B.48.** Wyznaczyć wszystkie liczby  $a, b \in \mathbb{R}$ , dla których granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a + b \cos x) \sin x}{x^5}$$

jest skończona.

### Rozwiążanie:

Koncepcyjnie zadanie nie powinno nastręczać żadnych problemów. Wystarczy tak dobrać liczby  $a$  i  $b$ , aby w rozwinięciu licznika wokół zera występowały wyrazy rzędu co najmniej piątego. Zobaczmy do jakich warunków to prowadzi

```
Series[x - (a + b Cos[x]) Sin[x], {x, 0, 5}].
```

W wyniku dostaliśmy szereg

$$(1 - a - b)x + \frac{1}{6}(a + 4b)x^3 + \left(-\frac{a}{120} - \frac{2b}{15}\right)x^5 + o(x^5).$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym jest zatem zerowanie się współczynników przy potęgach pierwszej i trzeciej w powyższym wyrażeniu. Można to zrobić elegancko w następujący sposób:

```
Series[x - (a + b Cos[x]) Sin[x], {x, 0, 5}] == 0[x]^5;
Solve[%, {a, b}].
```

Rozwiązaniem jest  $a = \frac{4}{3}$  i  $b = -\frac{1}{3}$ .

Zajmiemy się teraz zadaniem z kombinatoryki, z pozoru nie związanym z tematem szeregu Taylora.

**Zadanie B.49.** Na ile sposobów, dysponując monetami 1, 2 i 5-cio groszowymi, można wydać 99 groszy reszty?

Oczywiście jednym ze sposobów rozwiązania powyższego problemu będzie rozważenie wszystkich możliwości, a więc 99 groszy można przedstawić jako 99 razy 1 grosz, 97 razy 1 grosz i 1 raz 2 grosze, itd. Będzie z tym sporo pracy, ale w końcu pewnie znajdziemy odpowiedź. Niemniej, powtórzenie tego rozumowania dla większej różnorodności dostępnych monet, albo większej kwoty byłoby już bardzo żmudne. Spróbujmy więc pojeść do sprawy bardziej metodycznie. Tłumacząc zadanie na bardziej abstrakcyjny język stawiamy pytanie na ile sposobów możemy przedstawić liczbę 99 w postaci kombinacji

$$99 = k \cdot 1 + l \cdot 2 + m \cdot 5, \quad (\text{B.6})$$

gdzie  $k, l, m$  są elementami zbioru  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Zapomnijmy na chwilę o ograniczeniu na sumę powyższej kombinacji i rozważmy wszystkie możliwe wyrażenia postaci  $k \cdot 1 + l \cdot 2 + m \cdot 5$ . Dokładniej, rozważmy szereg potęgowy zmiennej  $x$  następującej postaci

$$S(x) = \sum_{k,l,m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} x^{k \cdot 1 + l \cdot 2 + m \cdot 5}.$$

Wobec oczywistej równości  $x^{k \cdot 1 + l \cdot 2 + m \cdot 5} = x^{k \cdot 1} \cdot x^{l \cdot 2} \cdot x^{m \cdot 5}$ , bez trudu dostajemy, że  $S(x)$  jest iloczynem Cauchy'ego trzech szeregów (patrz Definicja 4.47 i Twierdzenie 4.48):

$$S(x) = \left( \sum_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} x^{k \cdot 1} \right) \cdot \left( \sum_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}} x^{l \cdot 2} \right) \cdot \left( \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} x^{m \cdot 5} \right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5}.$$

Czynniki w powyższym iloczynie to szeregi geometryczne zbieżne jednostajnie w kole  $|x| < 1$ , a więc również  $S(x)$ , jako iloczyn Cauchy'ego, jest zbieżny jednostajnie dla  $|x| < 1$ . Zauważmy teraz, że wyraz stopnia 99 w  $S(x)$  to dokładnie

$$\sum_{\substack{k,l,m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ k \cdot 1 + l \cdot 2 + m \cdot 5 = 99}} x^{k \cdot 1 + l \cdot 2 + m \cdot 5} = a_{99} x^{99},$$

gdzie  $a_{99}$  jest liczbą wszystkich trójk ( $k, l, m$ ) spełniających (B.6), a więc interesującą nas wielkością. Proszę zauważać, że mamy do czynienia z ciekawą (i jednocześnie dość częstą) sytuacją: rozważanie ogólniejszych trójk nieograniczonych warunkiem (B.6) pozwoliło nam rozwiązać problem dla specyficznej wartości 99.

Oczywiście nasze rozwiązanie jest na razie czysto teoretyczne: liczba sposobów to współczynnik przy wyrazach odpowiedniego stopnia w rozwinięciu funkcji

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}.$$

Szczęśliwie mamy jednak w zanadrzu maszynerię programu *Mathematica*:

```
f[x_]:=1/((1-x)(1-x^2)(1-x^5));
s=Series[f[x], {x, 0, 99}];
SeriesCoefficient[s, 99].
```

W wyniku dostaliśmy 530. Jako ciekawostkę możemy dodać, że funkcję  $f$  można zdefiniować także następującą elegancką komendą

```
f[x_]:= 1/Apply[Times, 1 - x^{1, 2, 5}].
```

Stosujemy tutaj (Apply) operator mnożenia (Times) do wyrazów postaci  $1 - x^a$ , gdzie  $a$  jest elementem listy {1, 2, 5}.

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie B.50.** Wiedząc, że

$$f(x) = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{12} + o(x^6)$$

znajdź piąty wielomian Taylora funkcji  $g(x)$  jeśli

$$\bullet g(x) = f(\sin(x)), \quad \bullet g(x) = f(x)\arcsin(x), \quad \bullet g(x) = \operatorname{tg}(f(x)).$$

**Zadanie B.51.** Obliczyć na ile sposobów można przedstawić 100 złotych za pomocą dostępnych w polskim obiegu monet. Uwaga, obliczenia mogą zająć trochę czasu. Ilokrotnie otrzymana liczba przewyższa odległość od Ziemi do Słońca wyrażoną w milimetrach? Ilokrotnie zmniejszy się ta liczba, gdy wycofamy z obiegu monety pięciozłotowe, a ilokrotnie gdy wycofamy monety jednogroszowe?

**Zadanie B.52.** Na ile sposobów można przedstawić 99 groszy za pomocą monet 1, 2 i 5-cio groszowych mając do dyspozycji tylko 5 monet jednogroszowych?

### B.4.3 Badanie zbieżności punktowej i jednostajnej

**Nowe umiejętności:** Badanie zbieżności jednostajnej i punktowej ciągów i szeregów funkcyjnych, używanie kryterium Weierstrassa, używanie twierdzenia o różniczkowaniu ciągów i szeregów funkcyjnych.

**Skrypt:** Rozdział 7.

---

Spróbujemy teraz użyć programu *Mathematica* aby wspomóc proces badania zbieżności jednostajnej i punktowej ciągów i szeregów funkcyjnych.

**Zadanie B.53.** Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji

$$f_n(x) = nx \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$$

na zbiorze  $[0, +\infty)$ .

**Rozwiązanie:**

Zacznijmy od zdefiniowania funkcji  $f_n$ :

```
f[n_,x_]:=n x Exp[-n x^2/2].
```

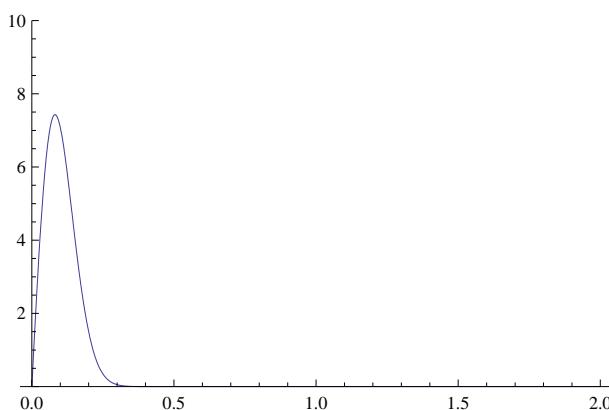
Zbieżność punktową możemy bez trudu zbadać korzystając ze znanego nam już polecenia **Limit**:

```
Limit[f[n,x], n->Infinity, Assumptions->Element[x,Reals]].
```

Wynikiem jest 0 niezależne od  $x$ , co oznacza, że  $f_n(x)$  jest zbieżny punktowo do funkcji stałej  $f_0 \equiv 0$ . Jest to oczywiście także naturalny kandydat na granicę jednostajną. Spróbujmy zwizualizować sobie zachowanie funkcji  $f_n$ . Wygodnie będzie posłużyć się znanym nam już poleceniem **Animate**.

```
Animate[Plot[f[n, x], {x, 0, 2}, PlotRange -> {0, 10}], {n, 1, 500}].
```

Zmieniając wartość  $n$  w zakresie od 1 do 500 możemy obserwować zachowanie funkcji  $f_n$ .



Jak widać mamy do czynienia z „wędrującym pagórkiem”: wraz ze wzrostem  $n$  maksima funkcji  $f_n$  rosną i przesuwają się w stronę 0. Takie zachowanie w oczywisty sposób wyklucza zbieżność jednostajną funkcji  $f_n$  do  $f_0$ . Spróbujmy to teraz formalnie udowodnić. W tym celu zbadamy funkcję  $f_n$ . Rozważmy nierówność  $f'_n(x) > 0$ .

```
Reduce[{D[f[n,x],x]>0,x>=0},x].
```

Okazuje się, że  $f'_n(x) > 0$  dla  $x$ -ów z przedziału  $(0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ . Wynika stąd, że  $f_n$  rośnie na przedziale  $(0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ , osiąga maksimum równe  $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{e}}$  w punkcie  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  i maleje (do zera) na przedziale  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty)$ . Ponieważ  $f_n(x) \geq 0$  dla  $x > 0$ , zatem

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{e}} = \sup_{x \in [0,+\infty)} f_n(x) = \sup_{x \in [0,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,+\infty)} |f_n(x) - 0| = \|f_n - 0\|.$$

Wynika stąd, że  $\|f_n - 0\| \rightarrow +\infty$  przy  $n \rightarrow \infty$ , czyli ciąg  $f_n$  nie ma granicy jednostajnej.

### Rozwiązań (sposób 2):

Wykluczyć zbieżność jednostajną możemy także prościej o ile nieco wnikliwiej przyjrzymy się funkcjom  $f_n$ . Zauważmy mianowicie, że

$$f_n(x) = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}x \exp\left(-\frac{(\sqrt{n}x)^2}{2}\right) = \sqrt{n}g(\sqrt{n}x),$$

gdzie  $g(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ . Oznaczmy  $a := \sup_{y \in [0,+\infty)} g(y)$ . Mamy teraz

$$\sup_{x \in [0,+\infty)} f_n(x) = \sqrt{n} \sup_{x \in [0,+\infty)} g(\sqrt{n}x) = \sqrt{n} \sup_{y \in [0,+\infty)} g(y) = \sqrt{n} \cdot a.$$

Wobec tego, skoro  $a > 0$ , mamy  $\sup_{x \in [0,+\infty)} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Zadanie B.54.** Wykazać, że funkcja  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x} \exp(-n^2 x)$  jest dobrze określona i ciągła na przedziale  $(0, +\infty)$ . Rozstrzygnąć, czy  $F$  jest ciągłą w zerze.

### Rozwiązań:

Podobnie jak w poprzednim zadaniu zacznijmy od zdefiniowania rodziny funkcji  $f_n(x) = \sqrt{x} \exp(-n^2 x)$

```
f[n_,x_]:=Sqrt[x] Exp[-n^2 x].
```

Naturalną strategią w tego typu zadaniach jest użycie twierdzenia mówiącego, że granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Funkcje  $f_n$  są ciągłe, spróbujmy zatem zbadać zbieżność jednostajną szeregu  $\sum f_n$  na przedziale  $(0, +\infty)$ . Narzucającym się podejściem jest użycie kryterium Weierstrassa (patrz Stwierdzenie 7.13). Obliczmy więc normy  $\|f_n\|$  dla poszczególnych składników. Zbadamy w tym celu kiedy pochodna  $f'_n$  jest dodatnia. Zastosowanie polecenia Reduce do nierówności  $f'_n(x) > 0$  nie przynosi rezultatu, wobec tego musimy postępować na raty:

```
Simplify[D[f[n,x],x]>0].
```

Otrzymujemy  $\exp(-n^2 x) \frac{(1-2n^2 x)}{\sqrt{x}} > 0$ . Ponieważ  $x > 0$ , a funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie, wystarczy że zbadamy nierówność  $(1 - 2n^2 x) > 0$ :

```
Reduce[(1 - 2 n^2 x) > 0, x].
```

Z otrzymanych wyników wynika, że  $f_n$  rośnie na przedziale  $(0, \frac{1}{2n^2})$ , osiąga maksimum w punkcie  $\frac{1}{2n^2}$ , które wynosi  $\frac{1}{\sqrt{2n}} \exp(-\frac{1}{2})$  i maleje (do zera) na przedziale  $(\frac{1}{2n^2}, +\infty)$ . Wynika stąd, że szereg  $\sum \|f_n\|$  zachowuje się jak szereg harmoniczny, a więc nie jest zbieżny. Podejście poprzez twierdzenie Weierstrassa nie udało się zatem.

Zauważmy jednak, że tak naprawdę obliczyliśmy normę  $\|f_n\|$  na całym przedziale  $[0, +\infty)$ , podczas gdy interesuje nas tylko ciągłość na przedziale  $(0, +\infty)$ . Wystarczy więc, że pokażemy zbieżność jednostajną na zbiorach postaci  $[a, +\infty)$ , gdzie  $a$  jest dowolną (ale ustaloną) liczbą dodatnią. Wówczas będziemy mogli wywnioskować, że  $F$  jest dobrze określone i ciągłe na przedziałach  $[a, +\infty)$ , a ponieważ zbiorami tej postaci można pokryć cały przedział  $(0, +\infty)$ , wynikać stąd będzie także ciągłość  $F$  na  $(0, +\infty)$ .

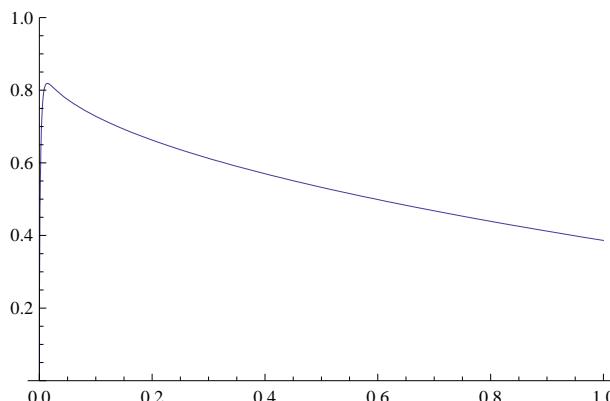
Z przeprowadzonej wcześniej analizy znaku pochodnej wynika, że

$$\sup_{x \in [a, +\infty)} f_n(x) = \begin{cases} f_n(\frac{1}{2n^2}) & \text{gdy } \frac{1}{2n^2} \in [a, +\infty) \\ f_n(a) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ponieważ przy ustalonym  $a > 0$  prawie wszystkie liczby naturalne  $n$  spełniają zależność  $\frac{1}{2n^2} < a$ , mamy  $\|f_n\|_{[a, +\infty)} = f_n(a)$  dla prawie wszystkich  $n$ . Wobec tego zbieżność szeregu norm  $\sum \|f_n\|_{[a, +\infty)}$  i szeregu  $\sum f_n(a) = \sum \sqrt{a} \exp(-n^2a)$  są równoważne. Ostatni szereg jest oczywiście zbieżny a zatem, na mocy twierdzenia Weierstrassa, szereg  $\sum f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie nie zbiorach postaci  $[a, +\infty)$ , gdzie  $a > 0$ . W szczególności funkcja  $F(x)$  jest ciągła na  $[a, +\infty)$  jako granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych.

Zajmijmy się z kolei ciągłością  $F$  w zerze. Oczywiście  $F(0) = 0$ . Jak wiemy, poprzednio nie udało się nam użyć twierdzenia Weierstrassa aby dowieść ciągłości w zerze. Powodem był fakt, że funkcje  $f_n$  miały maksima rzędu  $\frac{1}{n}$  które wysumowane tworzą szereg rozbieżny. Maksima te są zlokalizowane w punktach  $\frac{1}{2n^2}$ , a więc skupiają się w zerze. Musimy rozstrzygnąć, czy wkład funkcji  $f_n$  do sumy jest na tyle mały, żeby  $F(x)$  było bliskie 0 o ile  $x$  jest dostatecznie bliskie 0. Ponieważ odpowiedź nie wydaje się oczywista spróbujmy przyjrzeć się badanemu szeregowi. Narysujemy w tym celu wykresy ciągu sum częściowych  $F_n$  szeregu  $F$ . Użycie funkcji `Animate` pozwoli nam zaobserwować zachowanie się tego ciągu dla różnych  $n$ .

```
F[n_, x_] := Sum[f[k, x], {k, 1, n}];
Animate[Plot[F[n, x], {x, 0, 1}, PlotRange -> {0, 1}], {n, 1, 100}] .
```



Z wykresu widać, że sumy częściowe  $F_n(x)$  dla  $x$ -ów bliskich zera stabilizują się blisko wartości 0,8, żeby potem gwałtownie spaść do zera. Takie zachowanie sugeruje, że w granicy będziemy mieli do czynienia ze skokiem wartości funkcji, a więc  $F$  nie będzie ciągła w zerze.

Spróbujmy to udowodnić. W tym celu wystarczy skonstruować ciąg  $x_k$  zbieżny do 0 i znaleźć liczbę  $a > 0$  taką aby  $F(x_k) > a$  dla każdego  $k$ . Zauważmy, że funkcja  $f_n(x)$  jest iloczynem czynnika  $\sqrt{x}$ , który jest mały dla  $x$  bliskich zera i czynnika  $\exp(-n^2x)$ , który dla małych  $x$  jest bliski jedności (dokładniej  $\exp(-n^2x) \approx 1$  dla  $x = o(\frac{1}{n^2})$ ). Wobec tego wydaje się dość naturalne aby dobrąć  $x_k$  w taki sposób, żeby  $\exp(-n^2x_k)$  było bliskie 1 dla dużej liczby  $n$ -ów. Wówczas do  $F(x_k)$  wkład będzie miało wiele małych przyczynków rzędu  $\sqrt{x_k}$ , które w sumie dadzą duży wkład. Tę strategię łatwo zrealizować biorąc na przykład ciąg  $x_k = \frac{1}{k^2}$ . Wówczas<sup>14</sup> możemy łatwo oszacować:

$$F(x_k) > \sum_{n=1}^k f_n(x_k) = \sum_{n=1}^k \sqrt{\frac{1}{k^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{k^2}\right) \geq \sum_1^k \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} > 0.$$

Ponieważ  $x_k \rightarrow 0$  ale  $F(x_k)$  nie zbiega do  $F(0) = 0$  przy  $k \rightarrow +\infty$ , udowodniliśmy, że  $F$  nie jest ciągła w zerze.

**Zadanie B.55.** Wykazać, że funkcja  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+n^4}$  jest dobrze określona i klasy  $C^1$  na całej prostej rzeczywistej  $\mathbb{R}$ .

### Rozwiązań:

Jak wiadomo z wykładu (patrz Twierdzenie 7.19), jeżeli szereg funkcyjny  $F(x) = \sum f_n(x)$  jest zbieżny w jednym punkcie i szereg pochodnych  $\sum f'_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie, wówczas szereg  $\sum f_n(x)$  jest również zbieżny jednostajnie i ponadto funkcja  $F$  jest różniczkowalna oraz zachodzi równość  $F'(x) = \sum f'_n(x)$  (inaczej mówiąc można różniczkować wyjściowy szereg „wyraz po wyrazie”).

Spróbujmy zastosować powyższe twierdzenie do szeregu w zadaniu. Ze zbieżnością badanego szeregu w punkcie  $x = 0$  nie ma najmniejszych problemów, bowiem  $F(0) = \sum 0 = 0$ . Zajmijmy się teraz szeregiem pochodnych.

```
f[n_, x_] := x^2/(x^4 + n^4);
D[f[n, x], x];
Simplify[%].
```

Jak widzimy zachodzi równość  $f'_n(x) = \frac{2x(n^4-x^4)}{(n^4+x^4)^2}$ . Spróbujmy zbadać zbieżność jednostajną korzystając z twierdzenia Weierstrassa. W tym celu zbadajmy przebieg funkcji  $f'_n(x)$ :

```
pf[n_, x_] := (2 x (n^4 - x^4))/(n^4 + x^4)^2;
Reduce[D[pf[n, x], x] > 0, x].
```

Z analizy znaku drugiej pochodnej  $f''_n(x)$  łatwo wywnioskować, że pochodna  $f'_n(x)$  ma dwa lokalne maksima – w punktach  $x_n := -\left(2 + \sqrt{\frac{11}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} n$  i  $y_n := (2 - \sqrt{\frac{11}{3}})^{\frac{1}{4}} n$ . Wartości w

---

<sup>14</sup>Tak naprawdę dowolny ciąg zbieżny do zera z prawej strony będzie dobry. Wynika to, oczywiście, z ciągłości  $F$  na przedziale  $(0, +\infty)$ .

tych punktach są postaci  $c \cdot \frac{1}{n^3}$ , gdzie  $c$  to stała liczbową niezależną od  $n$  (najprościej wyliczyć to za pomocą komend `Simplify[pf[n, xn], n>0]` i `Simplify[pf[n, yn], n>0]`, gdzie  $x_n$  i  $y_n$  to odpowiednio punkty  $x_n$  i  $y_n$ ). Ponieważ pochodna  $f'_n(x)$  jest funkcją antysymetryczną i jej granice w plus i minus nieskończoności wynoszą zero wnioskujemy, że  $\|f'_n\| = c \cdot \frac{1}{n^3}$ . Szereg norm  $\sum \|f'_n\|$  jest zatem zbieżny, a zatem  $\sum f'_n$  jest zbieżny jednostajnie. Ponieważ  $f'_n$  są funkcjami ciągłymi, więc także  $\sum f'_n(x) = F'(x)$  jest funkcją ciągłą.

*Uwaga!* W powyższym rozwiązyaniu główną korzyścią korzystania z komputera było ominięcie dość pracochłonnych rachunków potrzebnych do znalezienia maksimum pochodnej  $f'_n$ , a w konsekwencji normy  $\|f'_n\|$ . Można jednak w prosty sposób obejść się bez tych wyliczeń, za pomocą oszacowania:

$$\left| f'_n(x) \right| = \left| \frac{2x(n^4 - x^4)}{(n^4 + x^4)^2} \right| \leq \frac{2|x|(n^4 + x^4)}{(n^4 + x^4)^2} = \frac{2|x|}{(n^4 + x^4)} \leq \frac{2}{n^3}.$$

Ostatnią nierówność zostawiamy jako ćwiczenie dla Czytelnika. Ponieważ uzyskane oszacowanie nie zależy od  $x$  wnioskujemy, że

$$\|f'_n\| \leq \frac{2}{n^3}.$$

Zbieżność szeregu  $\sum \|f'_n\|$  wynika teraz z kryterium porównawczego (porównujemy z szeregiem  $\sum \frac{2}{n^3}$ ).

### Problemy do samodzielnego rozwiązymania:

**Zadanie B.56.** Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągów

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{n}{n+x^2} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \\ f_n(x) &= \frac{n^2}{(n+x)^2} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}_+, \\ f_n(x) &= \exp\left(-\sqrt{n}(x - \frac{1}{n})^2\right) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Zadanie B.57.** Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu na  $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cos(nx) - n \sin(x) + \cos(x) + n \sin\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

**Zadanie B.58.** Zbadać, czy funkcja dana wzorem

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\sqrt{n} \exp((nx-1)^2)}$$

jest dobrze określona i ciągła na całej osi  $\mathbb{R}$ . Czy jest klasy  $C^1$ ?

## B.5 Całka

### B.5.1 Całkowanie

**Nowe umiejętności:** obliczanie całek oznaczonych i nieoznaczonych, całkowanie numeryczne.

**Skrypt:** Rozdział 9.

**Nowe funkcje:**

<i>Mathematica</i>	<i>Maxima</i>	Komentarz
Integrate[f[x],x]	integrate(f(x),x)	całka nieoznaczona
Integrate[f[x],{x,a,b}]	integrate(f(x),x,a,b)	całka oznaczona
NIntegrate[f[x],{x,a,b}]	romberg(f(x),x,a,b)	całkowanie numeryczne

Obliczanie całek oznaczonych i nieoznaczonych w programie *Mathematica* nie nastręcza większych trudności. Przykładowo wyrażenia

$$\int x^5 \cos x \, dx \quad \text{i} \quad \int_1^3 e^{-x} x^3 \, dx$$

obliczymy wpisując polecenia

```
Integrate[x^5 Cos[x],x]
Integrate[Exp[-x] x^3, {x,1,3}].
```

Jak wiadomo, obliczenie całek nieoznaczonych z funkcji elementarnych często wyprowadza poza klasę funkcji elementarnych. Przykładem takiej sytuacji jest całka

$$\int \exp(-x^2) \, dx.$$

Programy typu CAS często potrafią podać poprawną wartość całki wyrażoną poprzez tka zwane *funkcje specjalne*. Przykładowo, wpisując w *Mathematicce*

```
Integrate[2/Sqrt[Pi]Exp[-x^2],x]
```

otrzymamy odpowiedź  $\text{Erf}(x)$ . Funkcja Erf to tak zwana *funkcja błędu Gaussa*, która jest zdefiniowana jako funkcja pierwotna dla  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$ . W trakcie pracy z programami CAS Czytelnik może spotkać jeszcze wiele innych funkcji tego rodzaju – między innymi poznane na wykładzie funkcje gamma i beta Eulera (Rozdział 10). Funkcje te są dobrze zbadane i pewne ich własności są „zaszyte” w oprogramowaniu CAS. W szczególności daje się obliczać przybliżone (czasem też dokładne) wartości danej funkcji. Przykładowo wpisać w *Mathematicce*

```
Integrate[Exp[-x^2],{x,-Infinity,Infinity}]
```

co da poprawny wynik  $\sqrt{\pi}$ . *Maxima* również poradzi sobie z tą całką – wystarczy wpisać

```
integrate(exp(-x^2),x,-minf,inf) .
```

Czasem zdarza się jednak, że poszukiwana całka nie wyraża się żadnym sensownym wzorem zawierającym jakiekolwiek funkcje znane naszemu programowi. Próbując obliczyć taką całkę, dostaniemy w odpowiedzi dokładnie to co wpisaliśmy<sup>15</sup>. Do obliczania

<sup>15</sup>Mamy do czynienia z analogczną sytuacją jak w przypadku szeregów liczbowych

konkretnych wartości całek oznaczonych można się wówczas posłużyć całkowaniem numerycznym. Przykładowo, do obliczenia całki

$$\int_0^1 \sin(\cos(x)) \, dx$$

możemy użyć polecenia

```
NIntegrate[Sin[Cos[x]], {x, 0, 1}] .
```

W *Maximie* analogiczne polecenie wygląda następująco

```
load(romberg);
romberg(sin(cos(x)), x, 0, 1); .
```

Trzeba mieć jednak świadomość, że nie wszystkie całki daje się obliczać w ten sposób. Całkowanie numeryczne wykorzystuje pewien algorytm, który liczy pole pod wykresem danej funkcji przy pomocy sumowania pól małych prostokątów lub innych, prostych figur. Funkcje, które bardzo szybko oscylują nie dają się scałkować w ten sposób<sup>16</sup>. Czytelnik może przeprowadzić test próbując obliczyć wartości całek

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, dx \quad \text{oraz} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(\exp(x))}{x} \, dx .$$

**Zadanie B.59.** Oblicz całkę

$$\int_0^\pi \frac{\sin kx}{\sin x} \, dx ,$$

gdzie  $k \in \mathbb{N}$ .

**Rozwiążanie (sposób 1):**

*Mathematica* nie jest w stanie obliczyć tej całki dla ogólnego  $k$ , nawet przy dodatkowych założeniach. Polecenie

```
Assuming[Element[k, Integers], Integrate[Sin[k x]/Sin[x], {x, 0, Pi}]]
```

nie daje żadnych rezultatów – program nie jest w stanie skończyć wyliczeń. Spróbujmy zatem zmienić sposób postępowania i wypisać rezultaty dla kilkunastu różnych wartości  $k$ :

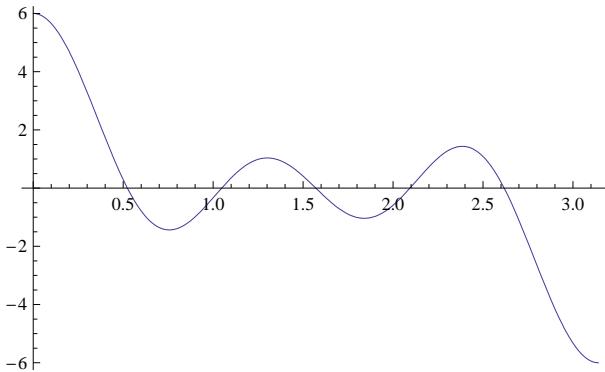
```
Table[Integrate[Sin[k x]/Sin[x], {x, 0, Pi}], {k, 1, 15, 1}] .
```

W odpowiedzi dostaliśmy naprzemienny ciąg składający się z liczb  $\pi$  i 0. Spodziewamy się zatem, że wartość całki dla nieparzystych  $k$  wynosi  $\pi$ , natomiast dla  $k$  parzystych 0. Ten drugi fakt dość prosto wykazać. Naszkicujmy wykres jednej z rozpatrywanych funkcji

```
Plot[Sin[6 x]/Sin[x], {x, 0, Pi}] .
```

---

<sup>16</sup>Znów nasuwa się analogia z numerycznym sumowaniem



Widzimy, że jest on antysymetryczny względem punktu  $\frac{\pi}{2}$ . Jest to również prawdą dla dowolnego parzystego  $k$

```
f[k_,x_]:=Sin[k x]/Sin[x];
Simplify[f[2 k, x] + f[2 k, Pi - x], Element[k, Integers]].
```

Stąd wprost wynika, że całka z funkcji  $\frac{\sin(2kx)}{\sin(x)}$  po odcinku  $[0, \pi]$  da zero.

Aby wykazać, że całka dla nieparzystych  $k$  daje  $\pi$  spróbujmy przeprowadzić dowód indukcyjny. Początek indukcji nie nastręcza problemów:

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{\sin(x)} dx = \int_0^\pi 1 dx = \pi.$$

Porównajmy teraz dwa kolejne wyrażenia przekształcając wyrażenie za pomocą funkcji TrigFactor służącej do rozkładania wyrażenia na iloczyn czynników trygonometrycznych

```
TrigFactor[f[2 k + 3, x] - f[2 k + 1, Pi - x]].
```

W wyniku dostaliśmy iloczyn trzech czynników

$$-2 \cos\left(\frac{1}{2}(1+2k)(\pi-x) + \frac{1}{2}(3+2k)x\right) \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(1+2k)(\pi-x) - \frac{1}{2}(3+2k)x\right).$$

Przekształćmy teraz dwa skrajne czynniki za pomocą funkcji Simplify<sup>17</sup>

```
Simplify[-2 Cos[1/2 (1+2 k) (Pi-x) + 1/2 (3+2 k) x], Element[k, Integers]]
Simplify[Sin[1/2 (1+2 k) (Pi-x) - 1/2 (3+2 k) x], Element[k, Integers]] .
```

Okazuje się, że pierwsze z nich to po prostu  $(-1)^k \sin(x)$ , a drugie  $(-1)^k \cos(2(k+1)x)$ . W konsekwencji badana różnica kolejnych wyrażeń to po prostu  $\cos(2(k+1)x)$ . Łatwo sprawdzić, że odpowiednia całka znika

$$\int_0^\pi \cos(2(k+1)x) dx = 0.$$

---

<sup>17</sup>Użycie Simplify bezpośrednio do całego wyrażenia zwija je do postaci początkowej.

**Rozwiążanie (sposób 2):**

Drugi sposób rozwiązyania jest nieco bardziej pomysłowy i wymaga użycia liczb zespolonych. Rachunki będą na tyle elementarne, że nie będziemy potrzebować pomocy komputera. Przypomnijmy mianowicie, że  $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ . Wobec tego

$$\frac{\sin(kx)}{\sin(x)} = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{e^{ix} - e^{-ix}}.$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy

$$\frac{\sin(kx)}{\sin(x)} = e^{i(k-1)x} + e^{i(k-3)x} + e^{i(k-5)x} + \dots + e^{-i(k-1)x}.$$

Grupując teraz wyrazy parami i korzystając z tego, że  $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  otrzymamy

$$\frac{\sin(kx)}{\sin(x)} = \cos((k-1)x) + \cos((k-3)x) + \cos((k-5)x) + \dots,$$

gdzie ostatnim wyrazem jest  $\cos(kx)$  lub  $1 = \cos(0x)$  w zależności od parzystości  $k$ . Całkując ostatnią równość stronami łatwo dowiedziemy, że wynikiem jest 0 dla  $k$  parzystych i  $\pi$  dla  $k$  nieparzystych.

**Problemy do samodzielnego rozwiązania:**

**Zadanie B.60.** Wykorzystując oprogramowanie CAS spróbować obliczyć funkcje pierwotne następujących funkcji

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{oraz} \quad g(x) = \operatorname{tg} \sin(x).$$

**Zadanie B.61.** Obliczyć całkę

$$\int \exp(5x) \cos(x+3)x^3 \, dx.$$

**Zadanie B.62.** Obliczyć całkę

$$\int (\sin(2x) + \cos(x))(\operatorname{tg}(x) + 5) \, dx.$$

**Zadanie B.63.** Niech  $k, l \in \mathbb{N}$ . Obliczyć

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) \, dx \quad \text{oraz} \quad \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(lx) \, dx.$$

## B.5.2 Zastosowania rachunku całkowego

**Nowe umiejętności:** obliczanie długości krzywych, pól powierzchni i objętości brył.

**Skrypt:** Rozdział 9.4.

**Zadanie B.64.** Oblicz pole i długość kardioidy danej we współrzędnych biegunowych równaniem  $r(\phi) = 1 + \cos(\phi)$ .

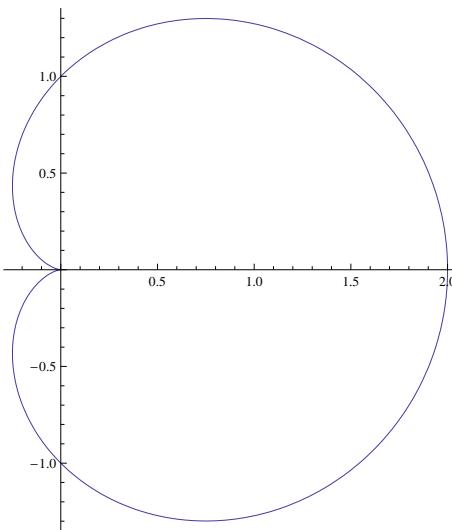
**Rozwiązanie (sposób 1):**

Rozwiązywanie zacznijmy od zdefiniowania pomocniczych funkcji

```
r[Phi_]:=1+Cos[Phi]
x[Phi_]:=r[Phi] Cos[Phi]
y[Phi_]:=r[Phi] Sin[Phi]
```

i narysowania wykresu kardioidy

```
PolarPlot[r[Phi],{Phi,0,2 Pi}] .
```



Z rysunku widać od razu, że kardioida jest symetryczna względem osi OX. Wystarczy zatem, że obliczymy interesujące nas wielkości dla jej górnej połowy – jest to część sparametryzowana przez kąt  $\phi \in [0, \pi]$ .

Długość możemy łatwo wyliczyć ze wzoru na długość krzywej zadanej parametrycznie

$$L = 2 \int_0^\pi \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2} d\phi,$$

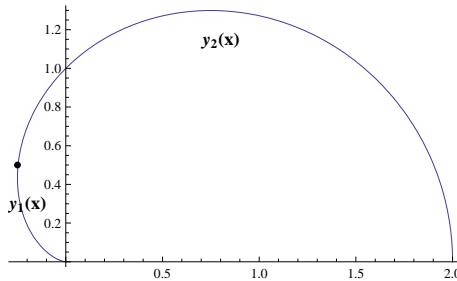
gdzie różniczkujemy względem  $\phi$ . W *Mathematicze*:

```
L=2 Integrate[Sqrt[D[x[Phi],Phi]^2+D[y[Phi],Phi]^2],{Phi,0,Pi}] .
```

Wynikiem jest  $L = 8$ .

Nieco bardziej skomplikowanie przedstawia się sprawa z polem powierzchni. Spróbowajmy najpierw wyrazić  $y$  jako funkcję  $x$ . Widzimy, że dla pewnych wartości  $x$  zależność ta nie jest jednoznaczna. Będziemy mieli do czynienia z dwoma gałęziami funkcji  $y(x)$  (Rysunek B.1)

Z zależności  $x(\phi) = (1 + \cos(\phi)) \cos(\phi)$  łatwo się przekonać, że  $x(\phi)$  jest malejącą funkcją kosinusa dla  $\cos(\phi) \in [-1, -\frac{1}{2}]$  i rosnącą funkcją kosinusa dla  $\cos(\phi) \in [-\frac{1}{2}, 1]$ . Punkt

Rysunek B.1: Dwie gałęzie funkcji  $y(x)$ .

graniczny  $\cos(\phi) = -\frac{1}{2}$  to oczywiście wierzchołek paraboli  $(z+1)z$ . Odpowiada on  $\phi = \frac{2}{3}\pi$  oraz  $x(\phi) = -\frac{1}{4}$ . Ogólniej  $x \in [2, -\frac{1}{4}]$  dla  $\phi \in [0, \frac{2}{3}\pi]$  oraz  $x \in [-\frac{1}{4}, 0]$  dla  $\phi \in [\frac{2}{3}\pi, \pi]$ .

W celu wyznaczenia zależności  $y(x)$  wyliczymy najpierw kosinus kąta  $\phi$  jako funkcję  $x$ .

`Solve[x == (1 + Cos[Phi]) Cos[Phi], Cos[Phi]]`.

Otrzymane rozwiązanie  $\cos(\phi) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4x})$  dla  $x \in [-\frac{1}{4}, 2]$  opisuje górną gałąź, natomiast  $\cos(\phi) = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+4x})$  dla  $x \in [0, -\frac{1}{4}]$  dolną gałąź wykresu. Korzystając z jedynki trygonometrycznej i wstawiając wyliczone wartości  $\cos(\phi)$  do zależności  $y(\phi) = (1 + \cos(\phi)) \sin(\phi)$  otrzymamy:

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4x}) \sqrt{1 - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1+4x})^2}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4x}) \sqrt{1 - \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1+4x})^2}.$$

Pole otrzymamy jako różnicę odpowiednich całek nieprzyjemnych rachunki (po uprzednim zdefiniowaniu funkcji  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$ ) zostawiając komputerowi

`S=-2 Integrate[y1[x],{x,-1/4,0}]+2 Integrate[y2[x],{x,-1/4,2}]; Simplify[%]`.

Wynikiem jest  $S = \frac{3}{2}\pi$ .

### Rozwiązań (sposób 2):

Jak widzimy powyższe rozwiązanie jest dość skomplikowane ze względu na konieczność wyliczania  $y$  jako funkcji  $x$  z uwikłanej zależności. Dużo prościej jest potraktować  $y(\phi)$  i  $x(\phi)$  jak swego rodzaju zamianę zmiennych. Zależność  $y(\phi)$  możemy traktować jako złożenie nieznanej zależności  $y = y(x)$  z podstawieniem  $x = x(\phi)$ . Teraz pole wyliczamy jako

$$\begin{aligned} S &= -2 \int_{-\frac{1}{4}}^0 y_1(x) dx + 2 \int_{-\frac{1}{4}}^2 y_2(x) dx = \\ &= -2 \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} y_1(x(\phi)) x'(\phi) d\phi + 2 \int_{\frac{2}{3}\pi}^0 y_2(x(\phi)) x'(\phi) d\phi = \\ &= -2 \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} y(\phi) x'(\phi) d\phi + 2 \int_{\frac{2}{3}\pi}^0 y(\phi) x'(\phi) d\phi = 2 \int_{\pi}^0 y(\phi) x'(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

Zauważmy, że tym razem nie musimy przejmować się już jednoznacznością funkcji  $y(x)$ . W tym przypadku jednoznaczna jest parametryzacja za pomocą kąta  $\phi$ . Zauważmy również, że pochodna  $x'(\phi)$  jest dla kątów z przedziału  $\phi \in (\frac{2}{3}\pi, \pi)$  ujemna, co odpowiada „cofaniu się” wartości  $x$  i w rezultacie braniu odpowiedniego pola ze znakiem minus – por. rysunek B.1.

Sprawdźmy jeszcze czy wartość pola obliczonego drugą metodą zgadza się z tą obliczoną wcześniej:

```
2 Integrate[y[Phi] D[x[Phi],Phi],{Phi,Pi,0}] .
```

**Zadanie B.65.** Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót pętli danej parametrycznie

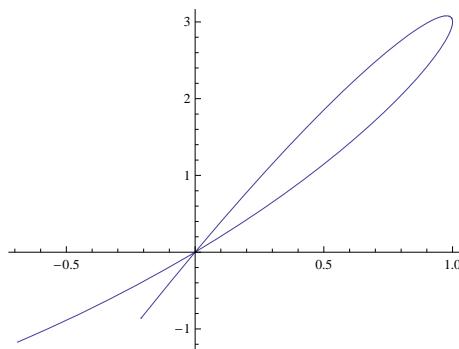
$$\begin{aligned} x(t) &= 2t - t^2, \\ y(t) &= 4t - t^3, \end{aligned} \tag{B.7}$$

wokół osi OX.

### Rozwiążanie:

Zacznijmy od zdefiniowania odpowiednich funkcji i narysowania wspomnianej pętli

```
x[t_]:=2 t-t^2;
y[t_]:=4 t- t^3;
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, -0.3, 2.1}, AspectRatio -> 0.75]
```



Optycznie widać, że krzywa zadana równaniem (B.7) ma jedyne samoprzecięcie w punkcie  $(0, 0)$ . Faktycznie łatwo sprawdzić, że ów punkt odpowiada dwóm wartościom parametru  $t = 0$  i  $t = 2$  (oczywiście może to też za nas obliczyć komputer). Przypomnijmy, że objętość bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji  $f(x)$  określonej na odcinku  $[a, b]$  wokół osi OX zadana jest wzorem

$$\pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

W rozważanym problemie moglibyśmy wyznaczyć dwie gałęzie funkcji  $y = y(x)$  rozwiązując zależność uwikłaną (B.7) a następnie odjąć od siebie odpowiednie całki jak w

pierwszym rozwiążaniu poprzedniego zdania. Zamiast tego potraktujmy parametryzację (B.7) jako zmianę zmiennych. Wówczas

$$V = \pi \int_0^2 y^2(t) x'(t) dt.$$

Odpowiedni rachunek

```
Pi Integrate[y[t]^2 D[x[t], t], {t, 0, 2}]
```

prowadzi do wyniku  $V = -\frac{64}{34}\pi$ .

Oczywiście otrzymany wynik nie ma sensu – objętość nie może być przecież liczbą ujemną. Błąd który popełniliśmy łatwo jednak wyjaśnić. Parametr  $t \in [0, 1]$  odpowiada  $x$  rosnącemu od 0 do 1 wzdłuż dolnej gałęzi pętli, natomiast  $t \in [1, 2]$  malejącym  $x$  od 1 do 0 wzdłuż górnej gałęzi. Wobec tego obliczona całka obejmuje objętość bryły otrzymanej przez obrót dolnej gałęzi z plusem i objętość analogicznej bryły dla górnej gałęzi z minusem. W świetle tych spostrzeżeń łatwo stwierdzić, że  $-\frac{64}{34}\pi$  to minus objętości.

Zajmijmy się teraz obliczaniem pola powierzchni rozważanej bryły. Przypomnijmy, że pole powierzchni bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji  $y(x)$  nad  $[a, b]$  wokół osi  $x$  wyraża się wzorem

$$S = \pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(t)^2} dt.$$

Czytelnik może łatwo sprawdzić, że podstawienie dane przez parametryzację  $(x(t), y(t))$  prowadzi do wzoru

$$S = \pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Numeryczna wartość tej całki dla parametryzacji (B.7)

```
Pi NIntegrate[y[t] Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2], {t, 0, 2}]
```

wynosi około  $10.0269\pi$ .

### Problemy do samodzielnego rozwiązania:

**Zadanie B.66.** Obliczyć całki  $\int_0^{2\pi} \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2} d\phi$  i  $\int_0^{2\pi} r(\phi)^2 d\phi$  dla krzywych zadanych parametrycznie: okręgu  $r(\phi) = r_0$  i kardioidy  $r(\phi) = 1 + \cos(\phi)$ . Porównać wyniki ze znanyimi długościami i polami tych krzywych. Spróbuj wykazać, że powyższe wzory opisują długość krzywej i pole zakreślane przez każdą krzywą zamkniętą daną w postaci parametrycznej  $r = r(\phi)$ .

**Zadanie B.67.** Sprawdzić, że kardioidę można opisać następującym równaniem

$$(x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) = y^2.$$

Można użyć programu *Mathematica* do wyliczenia  $y$  jako funkcji  $x$  i porównania ze wzorem wyliczonym wcześniej. Można również sprawdzić, że punkty zadane biegunowo  $r = 1 + \cos(\phi)$  spełniają powyższe równanie. Narysować wykres krzywej zadanej w powyższy sposób korzystając z funkcji *ContourPlot* (por. rozdział B.3.1).

**Zadanie B.68.** Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej torusa powstałego przez obrót okręgu  $(x - R)^2 + y^2 = r^2$  wokół osi OY. Zakładamy, że  $R > r$ .

## Bibliografia dodatku B.

- [1] Å. Björck, G. Dahlquist. Metody numeryczne. PWN, 1987.
- [2] Wikipedia: Comparison of computer algebra systems.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison\\_of\\_computer\\_algebra\\_systems](http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_computer_algebra_systems).
- [3] K.J. Falconer. Techniques in fractal geometry. Wiley, 1997.
- [4] J.M. Jankowscy, M. Dryja. Przegląd metod i algorytmów numerycznych, tom I i II. Biblioteka inżynierii oprogramowania. WNT, 1995.
- [5] Mathematica, dokumentacja programu. <http://reference.wolfram.com/>
- [6] Mathworld: Root-Finding Algorithm.  
<http://mathworld.wolfram.com/Root-FindingAlgorithm.html>.
- [7] Maxima, podręcznik do programu.  
<http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/en/maxima.html>.
- [8] A. Ralston. Wstęp do analizy numerycznej. PWN, 1971.
- [9] WolframAlpha, <http://www.wolframalpha.com/>.