Teorija upodobitev

Urban Jezernik

7. junij 2022

Kazalo

Kratek opis predmeta

Tile zapiski so kot eno drevo, ki se razraste v razne smeri. Pri vršičkih je ujame z drevesoma TGP in Expanderji.

Literatura

- E. Kowalski, *An Introduction to the Representation Theory of Groups*, American Mathematical Society, 2014.
- W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Springer GTM 129, 2004.

Poglavje 1

Temelji teorije upodobitev

V tem poglavju bomo vzpostavili temelje teorije upodobitev. Spoznali bomo koncept upodobitve in si ogledali mnogo primerov. Premislili bomo, kako upodobitve med sabo primerjamo in kako iz danih upodobitev sestavimo nove.

1.1 Osnovni pojmi

Upodobitve grup

Naj bo G grupa in V vektorski prostor nad poljem F. Upodobitev grupe G na prostoru V je delovanje G na množici V, ki upošteva dodatno strukturo množice V, namreč to, da je vektorski prostor. Natančneje, ***upodobitev*** (rekli bomo tudi ***linearno delovanje***) grupe G na prostoru V je homomorfizem grup

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V).$$

Pri tem razsežnosti prostora V rečemo ***stopnja upodobitve*** in jo označimo z $\deg(\rho)$. Ko v prostoru V izberemo bazo in torej izomorfizem $V \cong F^{\deg(\rho)}$, lahko upodobitev ρ enakovredno zapišemo kot homomorfizem

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_{\deg(\rho)}(F)$$

iz grupe G v obrnljive matrike razsežnosti $\deg(\rho)$ nad F.

Za element $g \in G$ in vektor $v \in V$ rezultat delovanja elementa g na vektorju v, se pravi $\rho(g)(v)$, včasih pišemo krajše kot $g \cdot v$ ali kar gv.

Zgled.

- Opazujmo grupo celih števil $\mathbb{Z}$ in vektorski prostor $\mathbb{C}$ nad poljem kompleksnih števil. Za vsak parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ imamo upodobitev

$$\chi_a : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*, \quad x \mapsto e^{\alpha x}.$$

- Opazujmo grupo ostankov $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ za poljubno naravno število q. Za vsak parameter $m \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ imamo upodobitev

$$\chi_m : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*, \quad x \mapsto e^{2\pi i m x/q}.$$

- Naj bo G grupa in V vektorski prostor nad poljem F. ***Trivialna upodobitev*** grupe G je homomorfizem

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V), \quad g \mapsto \mathrm{id}_V.$$

Kadar je vektorski prostor V razsežnosti 1, trivialno upodobitev in vektorski prostor sam označimo kot $\mathbf{1}$, v primerih višje razsežnosti pa ju označimo kot $\mathbf{1}^{\dim V}$.

- Naj bo V vektorski prostor in naj bo G poljubna podgrupa grupe $\mathrm{GL}(V)$. Tedaj je naravna vložitev $G \to \mathrm{GL}(V)$ upodobitev grupe G na prostoru V.

  Za konkreten zgled lahko vzamemo $V = \mathbb{C}^2$ in $G = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leq \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$. Na ta način dobimo upodobitev grupe $G \cong \mathbb{Z}$ na prostoru $\mathbb{C}^2$. Na istem prostoru lahko vzamemo tudi $G = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leq \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$. Na ta način dobimo upodobitev neskončne diedrske grupe $G \cong D_\infty$ na prostoru $\mathbb{C}^2$.

- Naj bo G poljubna grupa, opremljena z delovanjem na neki množici X. Naj bo $F[X]$ vektorski prostor z bazo $\{e_x\}_{x \in X}$. Grupa G deluje na $F[X]$ s homomorfizmom

  $$\pi: G \to \mathrm{GL}(F[X]), \quad g \mapsto (e_x \mapsto e_{g.x}),$$

  kjer je $x \in X$. To delovanje imenujemo ***permutacijska upodobitev*** grupe G na $F[X]$.

  Za konkreten zgled lahko vzamemo $G = S_n$, ki naravno deluje na množici $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Na ta način dobimo permutacijsko upodobitev grupe S_n na prostoru $F[\{1, 2, \ldots, n\}]$ razsežnosti n.

- Naj bo G grupa in F polje. Grupa G vselej deluje na sebi s Cayleyjevim delovanjem. Prirejeni permutacijski upodobitvi grupe G na $F[G]$[1] rečemo ***Cayleyjeva upodobitev*** grupe G nad F. To delovanje označimo z π_{Cay}.

- Naj bo G grupa in F polje. Naj bo $\hom(G, F)$ množica vseh funkcij iz množice G v F. Te funkcije lahko po točkah seštevamo in množimo s skalarji, na ta način je $\hom(G, F)$ vektorski prostor. Grupa G deluje na $\hom(G, F)$ s homomorfizmom

  $$\rho_{\hom}: G \to \mathrm{GL}(\hom(G, F)), \quad g \mapsto (f \mapsto (x \mapsto f(xg))),$$

  kjer je $f \in \hom(G, F)$, $x \in G$. To delovanje izhaja iz (desnega) delovanja grupe G na sebi in ga zato imenujemo ***(desna) regularna upodobitev*** grupe G nad F.

Upodobitev ρ grupe G pohvalimo s pridevnikom ***zvesta***, kadar je injektivna, se pravi $\ker \rho = 1$. Trivialna upodobitev netrivialne grupe ni zvesta, sta pa vselej zvesti Cayleyjeva in desna regularna upodobitev.

Ali tole sploh kje potrebujemo?

Kategorija upodobitev

Naj bo G grupa. Opazujmo neki njeni upodobitvi ρ_1 in ρ_2 nad vektorskima prostoroma V_1 in V_2, obema nad poljem F. Ti dve upodobitvi lahko *primerjamo* med sabo, in sicer tako, da hkrati primerjamo vektorska prostora in delovanji grupe G na teh dveh prostorih.

[1] Prostor $F[G]$ je vektorski prostor nad F, generiran z množico G. Običajno mu pravimo ***grupna algebra***, saj ta prostor na naraven način podeduje operacijo množenja iz grupe G.

Natančneje, ***spletična***[2] med upodobitvama ρ_1 in ρ_2 je linearna preslikava $\Phi\colon V_1 \to V_2$, za katero za vsak $g \in G$ in $v \in V_1$ velja[3]

$$\Phi(\rho_1(g)\cdot v) = \rho_2(g)\cdot\Phi(v).$$

Zgled. Opazujmo grupo $\mathbb{Z}$ in dve njeni upodobitvi, ki smo jih že videli. Prva naj bo upodobitev

$$\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2), \quad x \mapsto \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^x,$$

druga pa naj bo kar trivialna upodobitev $\mathbf{1}$ na prostoru $\mathbb{C}$. Predpišimo linearno preslikavo $\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ v standardni bazi z matriko $\left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$. Tedaj za vsak vektor $v \in \mathbb{C}$ in vsako število $x \in \mathbb{Z}$ velja

$$\Phi(x\cdot v) = \left(\begin{smallmatrix}xv\\ 0\end{smallmatrix}\right) = x\cdot\left(\begin{smallmatrix}v\\ 0\end{smallmatrix}\right) = x\cdot\Phi(v),$$

zato je Φ spletična med $\mathbf{1}$ in ρ.

Množica vseh spletičen med ρ_1 in ρ_2 je podmnožica množice linearnih preslikav $\hom(V_1, V_2)$, za katero uporabimo oznako $\hom_G(\rho_1, \rho_2)$ ali kar $\hom_G(V_1, V_2)$.

Za dano upodobitev ρ grupe G na vektorskem prostoru V je identična preslikava id_V seveda spletična med ρ in ρ. Prav tako lahko vsaki dve spletični Φ_1 med ρ_1 in ρ_2 ter Φ_2 med ρ_2 in ρ_3 skomponiramo do spletične $\Phi_2 \circ \Phi_1$ med ρ_1 in ρ_3. Množica vseh upodobitev dane grupe G nad poljem F torej tvoji ***kategorijo upodobitev***, katere objekti so upodobitve grupe G nad F, morfizmi pa so spletične med upodobitvami. To kategorijo označimo z Rep_G.

Izomorfnost upodobitev

Naj bo G grupa in F polje. Kadar je spletična $\Phi\colon V_1 \to V_2$ med ρ_1 in ρ_2 obrnljiva kot linearna preslikava, je tudi njen inverz Φ^{-1} spletična med ρ_2 in ρ_1. V tem primeru spletični Φ rečemo ***izomorfizem*** upodobitev ρ_1 in ρ_2.

Zgled. Opazujmo ciklično grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ za poljuben $n > 1$. Ta grupa naravno deluje na množici $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$,[4] od koder izhaja permutacijska upodobitev

$$\pi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}[\Omega]).$$

Grupa $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ima tudi Cayleyjevo upodobitev,

$$\pi_{\mathrm{Cay}}\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]).$$

Ti dve upodobitvi sta izomorfni. Vektorska prostora lahko namreč naravno primerjamo z bijektivno linearno preslikavo

$$\Phi\colon \mathbb{C}[\Omega] \to \mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}], \quad e_i \mapsto e_{\bar{i}},$$

kjer je $i \in \Omega$. Preslikava Φ je spletična, saj za vsak $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in $i \in \Omega$ velja

$$\Phi(\bar{x}\cdot e_i) = \Phi(e_{x+i}) = e_{\overline{x+i}} = \bar{x}\cdot e_{\bar{i}} = \bar{x}\cdot\Phi(e_i).$$

---

[2] Angleško *intertwiner*.

[3] Z opustitvijo eksplicitnih oznak za delovanja lahko ta pogoj pišemo krajše kot $\Phi(gv) = g\Phi(v)$.

[4] Generator $\bar{1} = 1 + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ deluje kot cikel $(1\ 2\ \cdots\ n)$.

V to kratko zgodbo lahko vključimo še desno regularno upodobitev

$$\rho_{\mathrm{hom}} \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C})).$$

Vektorski prostor $\hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ lahko na naraven način opremimo z bazo iz karakterističnih funkcij

$$1_{\bar{x}} \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad \bar{y} \mapsto \begin{cases} 1 & \bar{y} = \bar{x}, \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

za $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Predpišimo linearno preslikavo[5]

$$\Phi' \colon \mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \to \hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \quad e_{\bar{x}} \mapsto 1_{-\bar{x}}.$$

Jasno je Φ' bijektivna. Preverimo še, da je res spletična. Za vsaka $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ velja

$$\Phi'(\bar{x} \cdot e_{\bar{y}}) = \Phi'(e_{\overline{x+y}}) = 1_{-\overline{x+y}}.$$

Po drugi strani za vsak $\bar{z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ velja

$$(\bar{x} \cdot \Phi'(e_{\bar{y}}))(\bar{z}) = (\bar{x} \cdot 1_{-\bar{y}})(\bar{z}) = 1_{-\bar{y}}(\bar{z} + \bar{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{z} = -\overline{x+y} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Torej je res $\Phi'(\bar{x} \cdot e_{\bar{y}}) = \bar{x} \cdot \Phi'(e_{\bar{y}})$. S tem je Φ' izomorfizem med Cayleyjevo upodobitvijo in desno regularno upodobitvijo.

Eden pomembnih ciljev teorije upodobitev je razumeti vse upodobitve dane grupe do izomorfizma natančno. Kasneje bomo spoznali, kako lahko to v določenih[6] primerih *precej dobro* uresničimo.

1.2 Fundamentalne konstrukcije

Naj bo ρ upodobitev grupe G na prostoru V nad poljem F. Premislili bomo, kako lahko prostor, grupo ali polje modificiramo na različne načine in tako dobimo neko drugo, novo upodobitev, oziroma kako lahko dano upodobitev vidimo kot rezultat kakšne od teh fundamentalnih konstrukcij.

Podupodobitve

Naj bo G grupa z upodobitvijo $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Denimo, da obstaja vektorski podprostor $W \le V$, ki je *invarianten* za delovanje grupe G, se pravi $g \cdot w \in W$ za vsak $g \in G$, $w \in W$. V tem primeru upodobitev ρ inducira upodobitev $\tilde{\rho} \colon G \to \mathrm{GL}(W)$ in vložitev vektorskih prostorov $\iota \colon W \to V$ je spletična. Upodobitvi $\tilde{\rho}$ rečemo ***podupodobitev*** upodobitve ρ.

Tule bi morali podati kakšen bolj osnoven, konkreten primer.

Zgled.

- Naj bo G grupa in ρ njena upodobitev na prostoru V. Opazujmo množico vseh fiksnih vektorjev te upodobitve,

  $$V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G \colon\ g \cdot v = v\}.$$

  Množica V^G je vektorski podprostor prostora V, ki je invarianten za delovanje grupe G. Torej je $\tilde{\rho} \colon G \to \mathrm{GL}(V^G)$ podupodobitev upodobitve ρ. Na prostoru V^G po definiciji grupa G deluje trivialno, torej je $\tilde{\rho}$ izomorfna trivialni upodobitvi $\mathbf{1}^{\dim V^G}$.

[5] Pozor, karakteristična funkcija je zasidrana pri *inverzu* elementa $\bar{x}$ v $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[6] Na primer, *precej dobro* bomo opisali upodobitve poljubne končne grupe nad poljem kompleksnih števil.

Domača naloga. Naj bo G grupa in F polje. Določi upodobitvi $F[G]^G$ in $\hom(G,F)^G$.

Prostor V^G lahko razumemo še na naslednji alternativen način, ki nam bo prišel zelo prav v nadaljevanju. Iz vsakega vektorja $v \in V^G$ izhaja injektivna spletična

$$\Phi_v : \mathbf{1} \to V, \quad x \mapsto xv$$

med $\mathbf{1}$ in ρ. S tem je določena preslikava $V^G \to \hom_G(\mathbf{1}, V)$. Ta preslikava ima jasen inverz, ki spletični $\Phi \in \hom_G(\mathbf{1}, V)$ priredi $\Phi(1)$. Na ta način lahko identificiramo prostor V^G z množico spletičen $\hom_G(\mathbf{1}, V)$.

- Naj bo G grupa in ρ njena upodobitev na prostoru V. Predpostavimo, da obstaja vektor $v \in V$, ki je lastni vektor vsake linearne preslikave $\rho(g)$ za $g \in G$.

  Torej za vsak $g \in G$ obstaja $\chi(g) \in F$, da je $\rho(g) \cdot v = \chi(g)v$. Na ta način dobimo funkcijo $\chi : G \to F$, se pravi element prostora $\hom(G,F)$. Ta funkcija ni čisto poljubna; ker je ρ upodobitev, je χ nujno *homomorfizem* iz grupe G v grupo F^*. Torej je χ pravzaprav upodobitev grupe G na prostoru F razsežnosti 1.[7]

  Zdaj kot v zadnjem zgledu s predpisom

  $$\Phi : F \to V, \quad x \mapsto xv$$

  dobimo injektivno spletično med χ in ρ, torej lahko vidimo χ kot enorazsežno podupodobitev upodobitve ρ. Hkrati lahko iz te spletične obnovimo podatek o skupnem lastnem vektorju v in upodobitvi χ.[8]

  Torej smo vzpostavili bijektivno korespondenco med množico enorazsežnih podupodobitev upodobitve ρ in skupnimi lastnimi vektorji vseh preslikav $\rho(g)$ za $g \in G$.

  Poseben primer te korespondence je zadnji zgled. Množico enorazsežnih trivialnih podupodobitev upodobitve ρ lahko identificiramo z množico neničelnih spletičen $\hom_G(\mathbf{1}, V) \setminus \{x \mapsto 0\}$, ta pa ustreza skupnim lastnim vektorjem $\rho(g)$ za $g \in G$ z lastno vrednostjo 1, kar je ravno množica $V^G \setminus \{0\}$.

- Naj bo G grupa in F polje. Opazujmo Cayleyjevo upodobitev π_{Cay} na $F[G]$ in desno regularno upodobitev ρ_{hom} na $\hom(G,F)$. Trdimo, da je π_{Cay} podupodobitev upodobitve ρ_{hom}.

  V ta namen predpišimo linearno preslikavo[9]

  $$\Phi : F[G] \to \hom(G,F), \quad e_g \mapsto 1_{g^{-1}}$$

  za $g \in G$. Jasno je Φ injektivna preslikava. Hkrati za vse $g,h,x \in G$ velja

  $$\Phi(\pi_{\mathrm{Cay}}(g) \cdot e_h) = \Phi(e_{gh}) = 1_{h^{-1}g^{-1}}$$

[7] Kadar je $\chi(g) = 1$ za vsak $g \in G$, je ta upodobitev izomorfna $\mathbf{1}$. Kadar je $\chi(g) \neq 1$ za vsaj kak $g \in G$, pa ta upodobitev *ni* trivialna.

[8] Namreč, $v = \Phi(1)$ in $\chi(g) = \rho(g) \cdot 1$.

[9] Poseben primer te preslikave smo videli za grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, kjer smo premislili, da je celo bijektivna.

in

$$(\rho_{\text{hom}}(g)\cdot\Phi(e_h))(x) = 1_{h^{-1}}(xg) = 1_{g^{-1}h^{-1}}(x),$$

zato je Φ tudi spletična.

Kadar je grupa G *končna*, sta prostora $F[G]$ in $\hom(G,F)$ enake razsežnosti, zato sta v tem primeru upodobitvi π_{Cay} in ρ_{hom} izomorfni. Kadar je grupa G *neskončna*, pa preslikava Φ vsekakor ni bijektivna.[10] V tem primeru upodobitvi nista izomorfni.[11]

Domača naloga. Naj bo G grupa z upodobitvijo ρ na prostoru V. Naj bo N podgrupa edinka v G. Premisli, da množica fiksnih točk

$$V^N = \{v \in V \mid \forall n \in N\colon\ \rho(n)\cdot v = v\}$$

tvori podupodobitev upodobitve ρ, ki jo lahko identificiraš z množico $\hom_N(\mathbf{1},V)$.

Jedro, slika, kvocient

Naj bo G grupa z upodobitvijo ρ na prostoru V. Ogledali smo si že, kako za vsak G-invarianten podprostor $W \le V$ dobimo podupodobitev upodobitve ρ. Sorodno lahko za vsak G-invarianten podprostor $W \le V$ tvorimo ***kvocient*** V/W, na njem linearno deluje grupa G s predpisom

$$G \to \mathrm{GL}(V/W), \quad g \mapsto (v+W \mapsto \rho(g)\cdot v + W)$$

za $v \in V$.

Na vse do zdaj omenjene konstrukcije lahko gledamo na skupen način, in sicer s pomočjo spletične Φ, ki vlaga prostor W v V. Ni težko preveriti, da so standardne konstrukcije, ki jih lahko uporabimo na spletičnah vektorskih prostorov, na naraven način opremljene z linearnim delovanjem grupe G.

Trditev. *Naj bo Φ spletična upodobitev grupe G. Tedaj prostori* $\ker\Phi$, $\operatorname{im}\Phi$, $\operatorname{coker}\Phi$ *podedujejo linearno delovanje grupe G.*

Tule bi morali podati kakšen bolj osnoven, konkreten primer.

Zgled. Naj bo G grupa in ρ njena upodobitev na prostoru V. Podprostor prostora V, na katerem grupa G deluje trivialno, je vselej G-invarianten. Največji tak podprostor je ravno prostor vseh fiksnih vektorjev V^G. Videli smo že, da lahko ta prostor identificiramo z množico spletičen $\hom_G(\mathbf{1},V)$.

Oglejmo si sedaj še dual zgodnje konstrukcije. Naj bo $V_1 = \langle \rho(g)\cdot v - v \mid v \in V,\ g \in G\rangle$. Prostor V_1 je G-invarianten podprostor prostora V, zato kvocient V/V_1 podeduje linearno delovanje grupe G. Po konstrukciji je to delovanje trivialno in prostor V/V_1 je največji kvocient prostora V, na katerem grupa G deluje trivialno. Kvocient V/V_1 označimo z V_G in mu pravimo ***prostor koinvariant*** upodobitve ρ.

Prostor koinvariant je po konstrukciji dualen prostoru fiksnih vektorjev, zato lahko nanj prenesemo tudi interpretacijo s spletičnami. Opazujmo množico $\hom_G(V,\mathbf{1})$. Spletične iz te množice so ravno homomorfizmi

[10] Slika $\operatorname{im}\Phi$ namreč sestoji iz funkcij, ki so neničelne le v končno mnogo elementih grupe G.

[11] To sledi na primer iz dejstva, da prostora $F[G]^G$ in $\hom(G,F)^G$ nista izomorfna.

$\lambda: V \to F$ z lastnostjo $\lambda(\rho(g)\cdot v) = \lambda(v)$ za vsaka $v \in V$, $g \in G$, kar je ekvivalentno pogoju $\lambda(V_1) = 0$. Vsako tako spletično lahko zato interpretiramo kot linearno preslikavo iz $V/V_1 = V_G$ v F. Na ta način je vzpostavljena bijektivna korespondenca med množico spletičen $\hom_G(V, \mathbf{1})$ in množico linearnih preslikav $\hom_F(V_G, F)$, slednja množica pa je ravno dual V_G^* prostora koinvariant V_G.

Direktna vsota

Naj ima grupa G družino upodobitev $\{\rho_i\}_{i\in I}$ na vektorskih prostorih $\{V_i\}_{i\in I}$. Tedaj lahko tvorimo direktno vsoto vektorskih prostorov $\bigoplus_{i\in I} V_i$, ki je opremljena z linearnim delovanjem

$$\bigoplus_{i\in I} \rho_i : G \to \mathrm{GL}(\bigoplus_{i\in I} V_i), \quad g \mapsto \left(\sum_{i\in I} v_i \mapsto \sum_{i\in I} \rho_i(g)\cdot v_i\right).$$

Na ta način dobimo ***direktno vsoto*** upodobitev $\bigoplus_{i\in I} \rho_i$. Pri tem je vsaka od upodobitev ρ_i podupodobitev te direktne vsote.

Zgled. Opazujmo permutacijsko upodobitev simetrične grupe S_3 na prostoru $\mathbb{R}[\{1,2,3\}] = \mathbb{R}^3$. Delovanje grupe S_3 ohranja vektor $e_1 + e_2 + e_3$, zato ima ta upodobitev trivialno enorazsežno podupodobitev, dano s podprostorom $\langle e_1 + e_2 + e_3\rangle$. Eden od komplementov tega podprostora je $\langle e_1 - e_2, e_2 - e_3\rangle$, ki je hkrati S_3-invariaten podprostor.[12] Če označimo $u_1 = e_1 - e_2$ in $u_2 = e_2 - e_3$, lahko slednjo upodobitev opišemo s homomorfizmom

$$\rho: S_3 \to \mathrm{GL}(\langle u_1, u_2\rangle), \quad (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1\ 2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Permutacijska upodobitev S_3 je zato direktna vsota enorazsežne podupodobitve $\mathbf{1}$ in dvorazsežne podupodobitve ρ.

Premislimo, da upodobitve ρ *ne* moremo zapisati kot direktne vsote svojih pravih podupodobitev. V ta namen opazujmo njene morebitne enorazsežne podupodobitve. Premislili smo že, da te ustrezajo skupnim lastnim vektorjem vseh preslikav $\rho(x)$ za $x \in S_3$. Lastna vektorja $\rho((1\ 2))$ sta u_1 in $u_1 + 2u_2$. Noben od teh dveh vektorjev ni hkrati lastni vektor $\rho((1\ 2\ 3))$. Torej je upodobitev ρ stopnje 2, hkrati pa nima enorazsežnih podupodobitev in je torej ne moremo nadalje razstaviti.

Direktna vsota je najbolj preprost način, kako lahko iz danih upodobitev sestavimo novo upodobitev. V nadaljevanju bomo zato veliko časa posvetili obratnemu problemu: dano upodobitev bomo kot v zadnjem zgledu skušali razstaviti na direktno vsoto čim bolj enostavnih podupodobitev.

Tenzorski produkt

Naj ima grupa G upodobitvi ρ_1 in ρ_2 na prostorih V_1 in V_2. Tedaj lahko tvorimo ***tenzorski produkt*** vektorskih prostorov $V_1 \otimes V_2$, ki je naravno opremljen z linearnim delovanjem

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2), \quad g \mapsto (v_1 \otimes v_2 \mapsto \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2).$$

[12] Velja na primer $(1\ 3\ 2)\cdot(e_1 - e_2) = e_3 - e_1 = -(e_1 - e_2) - (e_2 - e_3)$.

Zgled. Opazujmo simetrično grupo S_3. Ogledali smo si že njeno permutacijsko upodobitev na prostoru $\mathbb{R}^3$, ki smo jo razstavili na direktno vsoto trivialne upodobitve $\mathbf{1}$ in dvorazsežne upodobitve ρ. Poleg teh dveh ima grupa S_3 še eno zanimivo upodobitev, ki izračuna predznak dane permutacije, se pravi

$$\mathrm{sgn}\colon S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*, \quad \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma).$$

To je netrivialna enorazsežna upodobitev.

Tvorimo tenzorski produkt upodobitev ρ in sgn. Dobimo upodobitev na vektorskem prostoru $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}^2$, ki ga lahko naravno identificiramo s prostorom $\mathbb{R}^2$. V tem smislu je upodobitev $\mathrm{sgn}\otimes\rho$ izomorfna dvorazsežni upodobitvi

$$S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2), \quad \sigma \mapsto (v \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\rho(\sigma)\cdot v).$$

Domača naloga. Dokaži, da sta upodobitvi ρ in $\mathrm{sgn}\otimes\rho$ izomorfni.

Naj ima grupa G upodobitev na prostoru V. Tedaj lahko tvorimo ***tenzorske potence*** $V^{\otimes n}$ za $n \in \mathbb{N}_0$. Vsaka od teh tvori upodobitev grupe G. Na prostoru $V^{\otimes n}$ deluje simetrična grupa S_n, in sicer na dva načina. Prvi način izhaja iz permutacijske upodobitve grupe S_n, in sicer dobimo delovanje

$$\pi\colon S_n \to \mathrm{GL}(V^{\otimes n}), \quad \sigma \mapsto \big(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n \mapsto v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(n)}\big).$$

Drugi način delovanja grupe S_n na tenzorski potenci pa je $\mathrm{sgn}\otimes\pi$, pri katerem delovanje π še utežimo s predznakom delujoče permutacije. Prostor koinvariant upodobitve π je

$$\mathrm{Sym}^n(V) = \frac{V^{\otimes n}}{\big\langle v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n - v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(n)} \,\big|\, v_i \in V,\ \sigma\in S_n\big\rangle},$$

imenujemo ga ***simetrična potenca*** upodobitve G na V. Analogno prostor koinvariant upodobitve $\mathrm{sgn}\otimes\pi$ označimo z $\bigwedge^n(V)$ in imenujemo ***alternirajoča potenca***. Obe potenci sta seveda upodobitvi grupe G. Vse potence hkrati zajamemo z direktnima vsotama

$$\mathrm{Sym}(V) = \textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0}\mathrm{Sym}^n(V) \quad \text{in} \quad \bigwedge V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0}\bigwedge^n(V).$$

Domača naloga. Naj bo G grupa s kompleksno upodobitvijo ρ na prostoru V razsežnosti $\deg(\rho) < \infty$. Dokaži, da je upodobitev G na alternirajoči potenci $\bigwedge^{\deg(\rho)} V$ izomorfna enorazsežni upodobitvi $G \to \mathbb{C}^*$, $g \mapsto \det(\rho(g))$.

Dual

Naj bo G grupa z upodobitvijo ρ na prostoru V nad poljem F. Tvorimo lahko ***dualen prostor*** $V^* = \hom(V,F)$, ki je naravno opremljen z linearnim delovanjem

$$\rho^*\colon G \to \mathrm{GL}(V^*), \quad g \mapsto \big(\lambda \mapsto \big(v \mapsto \lambda(\rho(g^{-1})\cdot v)\big)\big)$$

za $\lambda \in V^*$, $v \in V$. Na ta način dobimo ***dualno upodobitev*** ρ^* upodobitve ρ.

Za funkcional $\lambda \in V^*$ in vektor $v \in V$ včasih uporabimo oznako $\langle\lambda, v\rangle$ za aplikacijo $\lambda(v)$. S to oznako lahko zapišemo definicijo dualne upodobitve kot

$$\langle\rho^*(g)\cdot\lambda, v\rangle = \langle\lambda, \rho(g^{-1})\cdot v\rangle.$$

Zgled. Opazujmo grupo $\mathbb{Z}$ in za parameter $a \in \mathbb{C}$ njeno upodobitev

$$\chi_a : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}), \quad x \mapsto e^{ax}.$$

Za dualno upodobitev χ_a^*, funkcional $\lambda \in \mathbb{C}^*$ in vektor $z \in \mathbb{C}$ velja

$$\langle \chi_a^*(x) \cdot \lambda, z \rangle = \langle \lambda, \chi_a(-x) \cdot z \rangle = \lambda(e^{-ax} \cdot z).$$

Funkcionali v dualnem prostoru $\mathbb{C}^*$ so skalarna množenja s kompleksnimi števili. Če funkcionalu λ ustreza število $l \in \mathbb{C}$, dobimo torej

$$\chi_a^*(x) \cdot l = e^{-ax} \cdot l.$$

Dualna upodobitev χ_a^* je torej enorazsežna upodobitev, ki je izomorfna upodobitvi χ_{-a}.

Domača naloga.

- Naj bosta ρ_1, ρ_2 upodobitvi grupe G. Dokaži, da je

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)^* \cong \rho_1^* \oplus \rho_2^* \quad \text{in} \quad (\rho_1 \otimes \rho_2)^* \cong \rho_1^* \otimes \rho_2^*.$$

- Naj bo ρ upodobitev grupe G z $\deg(\rho) < \infty$. Tedaj je $(\rho^*)^* \cong \rho$.

Naj bo zdaj G grupa z dvema upodobitvama ρ in σ na prostorih V in W. ***Prostor linearnih preslikav*** $\hom(V,W)$ je naravno opremljen z linearnim delovanjem

$$\hom(\rho,\sigma) : G \to \mathrm{GL}(\hom(V,W)), \quad g \mapsto \big(\Phi \mapsto \big(v \mapsto \sigma(g) \cdot \Phi \cdot \rho(g^{-1}) \cdot v\big)\big).$$

Invariante tega delovanja sestojijo iz linearnih preslikav, ki so invariantne glede na predpisano delovanje grupe G, se pravi ravno iz spletičen med ρ in σ. S simboli je torej $\hom(V,W)^G = \hom_G(V,W)$.

Trditev. *Naj bo G grupa z upodobitvama ρ in σ. Predpostavimo, da je* $\deg(\sigma) < \infty$. *Tedaj je* $\hom(\rho,\sigma) \cong \rho^* \otimes \sigma$.

Dokaz. Naj bo ρ upodobitev na prostoru V in σ upodobitev na prostoru W. Izomorfizem med vektorskima prostoroma $V^* \otimes W$ in $\hom(V,W)$ podaja linearna preslikava

$$V^* \otimes W \to \hom(V,W), \quad \lambda \otimes w \mapsto (v \mapsto \lambda(v) \cdot w).$$

Ni težko preveriti, da je ta preslikava spletična. □

Skalarji

Naj bo G grupa z upodobitvijo ρ na prostoru V nad poljem F. Naj bo E razširitev polja F. Tedaj je prostor $E \otimes V$ naravno opremljen z linearnim delovanjem

$$E \otimes \rho : G \to \mathrm{GL}(E \otimes V), \quad g \mapsto (e \otimes v \mapsto e \otimes \rho(g) \cdot v).$$

Ta postopek konstrukcije prostora $E \otimes V$ imenujemo ***razširitev skalarjev***. Dano upodobitev lahko razširimo do ugodnejših skalarjev[13], lahko pa tudi

[13] Na primer polja kompleksnih števil.

dano upodobitev nad velikim poljem E gledamo kot razširitev skalarjev neke upodobitve nad preprostejšim poljem F.[14] V tem slednjem primeru rečemo, da je dana upodobitev ***definirana nad poljem*** F. Včasih nam uspe najti celo preprost *podkolobar* polja F, nad katerim je definirana dana upodobitev.

Zgled. Opazujmo grupo S_3 in njeno permutacijsko upodobitev na realnem prostoru $\mathbb{R}[\{1,2,3\}]$. Poznamo že njeno dvorazsežno upodobitev ρ na podprostoru $\langle e_1 - e_2, e_2 - e_3\rangle$, ki *nima* enorazsežnih podupodobitev. Ta je definirana z matrikami, ki imajo zgolj celoštevilske koeficiente. Upodobitev ρ je zato definirana nad *kolobarjem* $\mathbb{Z}$. To upodobitev lahko zato *projiciramo* s homomorfizmom kolobarjev $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ za poljubno praštevilo p do upodobitve

$$S_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1\ 2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ki je definirana nad *končnim* poljem $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Pri $p = 3$ ima ta projicirana upodobitev enorazsežen invarianten podprostor $\langle e_1 + e_2 + e_3\rangle$. Projekcije nam lahko torej dano upodobitev dodatno razstavijo.

Kadar imamo opravka s konkretnim poljem F, lahko dano upodobitev modificiramo tudi z ***avtomorfizmi polja***. Te si najlažje predstavljamo po izbiri baze vektorskega prostora. Če je $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$, dobimo iz dane upodobitve $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$ modificirano upodobitev

$$\rho^\sigma : G \to \mathrm{GL}_n(F), \quad g \mapsto \rho(g)^\sigma,$$

pri kateri vsak člen matrike $\rho(g)$ preslikamo z avtomorfizmom σ.

Zgled. Naj bo G grupa s kompleksno upodobitvijo ρ. Kompleksno konjugiranje je avtomorfizem polja $\mathbb{C}$, zato lahko s konjugiranjem členov matrik tvorimo ***konjugirano upodobitev*** $\overline{\rho}$.

Restrikcija

Naj bo G grupa z upodobitvijo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Kadar je na voljo še ena grupa H s homomorfizmom $\phi : H \to G$, lahko upodobitev ρ sklopimo s ϕ in dobimo upodobitev $\rho \circ \phi$ grupe H na prostoru V. Temu postopku pridobivanja upodobitev grupe H iz upodobitev grupe G pravimo ***restrikcija***, pri tem pa novo upodobitev $\rho \circ \phi$ označimo kot $\mathrm{Res}_H^G(\rho)$. Predstavljamo si, da smo upodobitev ρ *potegnili nazaj* vzdolž homomorfizma ϕ. Restrikcija je funktor iz kategorije Rep_G v kategorijo Rep_H.

Zgled. Naj bo G grupa s podgrupo edinko N. Tvorimo kvocientni homomorfizem $\phi : G \to G/N$. Vsaki upodobitvi grupe G/N lahko z restrikcijo priredimo upodobitev grupe G. Vsaka taka pridobljena upodobitev grupe G vsebuje podgrupo N v svojem jedru. Na ta način dobimo bijektivno korespondenco med upodobitvami grupe G/N in upodobitvami grupe G, ki so trivialne na N.

Običajno ni res, da je vsaka upodobitev grupe G trivialna na N, se pa to lahko zgodi v kakšnih posebnih primerih. Na primer, *enorazsežne* upodobitve grupe G nad poljem F so homomorfizmi iz G v F^*, kar

[14] Na primer $E = \mathbb{C}$ in $F = \mathbb{Q}$.

ravno ustreza homomorfizmom iz abelove grupe $G/[G,G]$ v F^*. Vsaka enorazsežna upodobitev grupe G je torej trivialna na $[G,G]$.

Za konkreten primer si oglejmo simetrično grupo S_n. Njene kompleksne enorazsežne upodobitve ustrezajo homomorfizmom $S_n \to \mathbb{C}^*$. Ker je $[S_n, S_n] = A_n$, opazujemo torej homomorfizme $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$. Na voljo sta le dva taka homomorfizma: trivialen in netrivialen (ki preslika generator grupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ v $-1 \in \mathbb{C}^*$). Prvi ustreza trivialni upodobitvi $\mathbf{1}$, drugi pa ustreza predznačni upodobitvi sgn.

Kadar imamo na voljo tri grupe, povezane s homomorfizmoma $\phi_2 : H_2 \to H_1$ in $\phi_1 : H_1 \to G$, lahko restrikcijo izvedemo dvakrat zaporedoma. Upodobitvi ρ v Rep_G tako priredimo upodobitev $\mathrm{Res}^{H_1}_{H_2}(\mathrm{Res}^G_{H_1}(\rho))$ v Rep_{H_2}. Od grupe H_2 do G imamo neposredno povezavo prek homomorfizma $\phi_1 \circ \phi_2$, s čimer dobimo upodobitev $\mathrm{Res}^G_{H_2}(\rho)$. Ni težko preveriti, da sta dobljeni upodobitvi izomorfni. Tej lastnosti restrikcije pravimo ***tranzitivnost***.

Indukcija

Naj bo kot zgoraj G grupa in H še ena grupa s homomorfizmom $\phi : H \to G$. ***Indukcija*** je postopek, ki s pomočjo homomorfizma ϕ upodobitvi ρ grupe H priredi upodobitev grupe G. Indukcija torej deluje ravno v obratno smer kot restrikcija in nam omogoča, da upodobitev ρ *potisnemo naprej* vzdolž homomorfizma ϕ. Ta postopek je nekoliko bolj zapleten kot restrikcija.

Začnimo z upodobitvijo $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$. Konstruirali bomo prostor, na katerem deluje grupa G. Odskočna deska za to bo regularna upodobitev grupe G, katere vektorski prostor je prostor funkcij $\hom(G, F)$. Ta prostor razširimo s prostorom V do prostora funkcij

$$\hom(G,V) = \{f \mid f : G \to V\},$$

na katerem linearno deluje grupa G z analogom regularne upodobitve, in sicer kot

$$g \cdot f = (x \mapsto f(xg))$$

za $g \in G$, $f \in \hom(G,V)$. Po drugi strani na tej množici deluje tudi grupa H, in sicer na dva načina: prvič prek homomorfizma ϕ in pravkar opisanega delovanja grupe G, drugič pa prek svojega delovanja ρ na prostoru V. Ko ti dve delovanji združimo, dobimo delovanje grupe H na prostoru funkcij $\hom(G,V)$ s predpisom

$$h \cdot f = \left(x \mapsto \rho(h) \cdot f\left(\phi(h^{-1}) \cdot x\right)\right)$$

za $h \in H$, $f \in \hom(G,V)$.[15] Opazujmo invariantni podprostor

$$\hom(G,V)^H = \{f \in \hom(G,V) \mid \forall h \in H, x \in G.\ \rho(h) \cdot f(x) = f(\phi(h) \cdot x)\}.$$

Ker grupa G deluje na $\hom(G,V)$ prek množenja z *desne*, pogoj pripadnosti invariantam $\hom(G,V)^H$ pa je izražen prek množenja z *leve*, je podprostor $\hom(G,V)^H$ avtomatično G-invarianten. S tem smo dobili upodobitev grupe G na prostoru $\hom(G,V)^H$. To je želena ***inducirana upodobitev***. Zanjo uporabimo oznako $\mathrm{Ind}^G_H(\rho)$.

[15] Delovanje H na $\hom(G,V)$ je konstruirano analogno delovanju grupe na prostoru linearnih preslikav.

Zgled. Naj bo G grupa z vložitvijo $\phi\colon 1\to G$ trivialne podgrupe. Vsaka upodobitev trivialne grupe nad poljem F je trivialna. Iz enorazsežne trivialne upodobitve $\mathbf{1}$ dobimo prostor funkcij $\hom(G,F)$, na katerem grupa G deluje z regularno upodobitvijo. Inducirana upodobitev je v tem primeru torej kar regularna, se pravi $\mathrm{Ind}_1^G(\mathbf{1}) = \rho_{\hom}$.

Inducirano upodobitev $\mathrm{Ind}_H^G(\rho) = \hom(G,V)^H$ smo konstruirali z invariantami grupe H. To pomeni, da vektorji v tem prostoru niso poljubne funkcije v $\hom(G,V)$, temveč zadoščajo določenim restriktivnim pogojem. Te funkcije so določene z vrednostmi, ki jih zavzamejo na predstavnikih desnih odsekov $\operatorname{im}\phi\backslash G$,[16] in te vrednosti pripadajo podprostoru $V^{\ker\phi}$.[17]

Zgled. Naj bo G grupa z upodobitvijo ρ in naj bo $\phi = \mathrm{id}_G$. Tedaj je vsaka funkcija $f\in\hom(G,V)^G$ določena že z vrednostjo $f(1)$. Dodatnih restrikcij za to vrednost ni, zato dobimo izomorfizem vektorskih prostorov

$$\hom(G,V)^G \to V, \quad f\mapsto f(1),$$

ki je spletična glede na regularno delovanje G na $\hom(G,V)$. S tem imamo torej izomorfizem upodobitev $\mathrm{Ind}_G^G(\rho)\cong\rho$.

Domača naloga. Naj bo G grupa z upodobitvijo ρ na prostoru V in naj bo $\phi\colon G\to G/N$ kvocientna projekcija za neko podgrupo edinko N v G. Dokaži, da je $\mathrm{Ind}_G^{G/N}(\rho)$ izomorfna upodobitvi G/N na prostoru V^N, ki izhaja iz upodobitve ρ.

Najpomembnejši primer indukcije, čeravno ne tudi najbolj preprost, je ***indukcija iz podgrupe končnega indeksa***. Naj bo G grupa s podgrupo H in naj bo ϕ vložitev H v G. Predpostavimo, da je $|G:H|<\infty$. Naj bo ρ upodobitev grupe G na prostoru V. Premislimo, kako izgleda upodobitev $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$.

Naj bo R neka izbrana množica predstavnikov desnih odsekov H v G. Vsaka funkcija $f\in\hom(G,V)^H$ je določena z vrednostmi $f(r)$ za $r\in R$ in dodatnih restrikcij za te vrednosti ni, zato dobimo izomorfizem vektorskih prostorov[18]

$$\Phi\colon \hom(G,V)^H \to \hom(R,V), \quad f\mapsto (r\mapsto f(r)).$$

Da dobimo spletično, moramo posplošitev regularnega delovanja G na $\hom(G,V)$ prenesti prek linearnega izomorfizma Φ na desno stran. V ta namen naj bo $v\in V$ in $f\in\hom(G,V)^H$ z lastnostjo $f(r_0)=v$ in $f(r)=0$ za $r\in R\backslash\{r_0\}$. Za vsak $g\in G$ mora tako veljati

$$g\cdot\left(r\mapsto\begin{cases} v & r=r_0\\ 0 & r\neq r_0\end{cases}\right) = \Phi(g\cdot f) = \Phi(x\mapsto f(xg)).$$

Za $x\in R$ z lastnostjo $xg\in Hr_0$, se pravi $x = hr_0g^{-1}$ za nek $h\in H$, velja $f(xg) = f(hr_0) = \rho(h)\cdot v$. Seveda je $|R\cap Hrg^{-1}|=1$, torej obstaja natanko

[16] Če je R množica predstavnikov desnih odsekov $\operatorname{im}\phi$ v G in če že poznamo vrednosti $f\in\hom(G,V)$ na množici R, potem lahko vsako drugo vrednost f izračunamo kot $f(x\cdot r) = \rho(y)\cdot f(r)$ za $x=\phi(y)\in\operatorname{im}\phi$.

[17] Če je $f\in\hom(G,V)^H$, potem pogoj H-invariantnosti uporabimo z elementi $h\in\ker\phi$ in dobimo $\rho(h)\cdot f(x) = f(x)$, torej je $f\in V^h$.

[18] Množico funkcij $\hom(R,V)$ lahko vidimo kot direktno vsoto prostorov V, indeksirano z množico R.

en tak x. Za $x \in R$ z lastnostjo $xg \notin Hr_0$ pa velja $f(xg) = 0$. S tem je

$$g \cdot \left(r \mapsto \begin{cases} v & r = r_0 \\ 0 & r \neq r_0 \end{cases} \right) = \left(r \mapsto \begin{cases} \rho(h) \cdot v & r = hr_0 g^{-1} \text{ za nek } h \in H \\ 0 & r \notin Hr_0 g^{-1} \end{cases} \right).$$

Da bo preslikava Φ spletična, moramo na $\hom(R, V)$ torej uvesti tako delovanje grupe G, ki dan vektor v pri vnosu $r_0 \in R$ preslika tako, da najprej izračuna odsek elementa $r_0 g^{-1}$ po H, ta element zapiše kot $r_0 g^{-1} = h^{-1} r$ za $h \in H$, $r \in R$, nato pa na vektor v deluje z $\rho(h)$ in ga hkrati prestavi k vnosu r.

Opisan postopek si lahko nekoliko lažje predstavljamo tako, da množico $\hom(R, V)$ identificiramo z direktno vsoto $\bigoplus_{r \in R} Vr$, kjer je Vr kopija vektorskega prostora V pri komponenti r. Element $g \in G$ deluje na vektorju $vr_0 \in Vr_0$ kot g^{-1} z desne. V teh domačih oznakah izračunamo

$$g \cdot vr_0 = vr_0 g^{-1} = vh^{-1} r = (h \cdot v) r = (\rho(h) \cdot v) r,$$

kar ravno ustreza bolj zakompliciranemu zapisu zgoraj.

Poseben primer opisane indukcije dobimo z enorazsežnimi upodobitvami grupe H. Vsak homomorfizem $\rho : H \to F^*$ porodi prostor $\hom(G, F)^H$ razsežnosti $|G : H|$, ki je podprostor prostora funkcij $\hom(G, F)$ in na katerem torej grupa G deluje z regularno upodobitvjo. Inducirana upodobitev je v tem primeru podupodobitev regularne upodobitve ρ_{hom}. Na ta način lahko dobimo mnogo različnih upodobitev grupe G.

Zgled. Opazujmo grupo S_n in njeno podgrupo A_n indeksa 2. Za $n \geq 5$ je grupa A_n enostavna, zato je $A_n = [A_n, A_n]$ in ni netrivialnih enorazsežnih upodobitev. Oglejmo si inducirano upodobitev $\text{Ind}_{A_n}^{S_n}(\mathbf{1})$. A priori vemo, da je to dvorazsežna upodobitev. Za množico predstavnikov odsekov vzamemo $R = \{(), (1\,2)\}$. V domačih oznakah je vektorski prostor upodobitve enak $F() \oplus F(1\,2)$, na katerem deluje grupa S_n s predpisom

$$g \cdot x\sigma = x\sigma g^{-1} = \begin{cases} x\sigma & g \in A_n \\ x((1\,2)\sigma) & g \notin A_n \end{cases}$$

za $g \in S_n$, $x \in F$, $\sigma \in R$. To delovanje lahko zapišemo še enostavneje. Vektorski prostor identificiramo z dvorazsežnim prostorom F^2, delovanje pa opišemo kot

$$g \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & g \in A_n \\ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} & g \notin A_n \end{cases}$$

za $x, y \in F$, $g \in S_n$. Alternirajoča grupa A_n je v jedru te upodobitve, ki zato izhaja iz kvocienta $S_n / A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Opisana upodobitev je natanko permutacijska upodobitev grupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ na prostoru $F[\{1, 2\}]$, inducirana upodobitev pa je ravno restrikcija te upodobitve vzdolž kvocientne projekcije $S_n \to S_n / A_n$. Inducirano upodobitev lahko zapišemo kot vsoto dveh enorazsežnih podupodobitev. Prva je podupodobitev z diagonalnim prostorom $\{(x, x) \mid x \in F\} \leq F^2$, ta je izomorfna trivialni upodobitvi $\mathbf{1}$. Druga pa je podupodobitev z antidiagonalnim prostorom $\{(x, -x) \mid x \in F\} \leq F^2$. Ta ni trivialna, saj element $(1\,2)$ deluje na $(1, -1)$ kot množenje z $-1 \in F$. Ta podupodobitev je zato izomorfna predznačni upodobitvi sgn. Nazadnje je torej $\text{Ind}_{A_n}^{S_n}(\mathbf{1}) \cong \mathbf{1} \oplus \text{sgn}$.

Naj bosta G,H grupi s homomorfizmom $\phi\colon H\to G$. Ni težko preveriti, da indukcija naravno presene spletično med dvema upodobitvama grupe H v spletično med induciranima upodobitvama. Indukcija je torej funktor iz kategorije Rep_H v kategorijo Rep_G.

Kadar imamo na voljo tri grupe, povezane s homomorfizmoma $\phi_2\colon H_2\to H_1$ in $\phi_1\colon H_1\to G$, lahko indukcijo izvedemo dvakrat zaporedoma. Upodobitvi ρ v Rep_{H_2} tako priredimo upodobitev $\mathrm{Ind}_{H_1}^G(\mathrm{Ind}_{H_2}^{H_1}(\rho))$ v Rep_G. Od grupe H_2 do G imamo neposredno povezavo prek homomorfizma $\phi_1\circ\phi_2$, s čimer dobimo upodobitev $\mathrm{Ind}_{H_2}^G(\rho)$. Ni težko preveriti, da sta dobljeni upodobitvi izomorfni. Tej lastnosti indukcije pravimo ***tranzitivnost***.

Domača naloga. Dokaži tranzitivnost indukcije.

S tranzitivnostjo indukcije lahko vsako indukcijo vzdolž homomorfizma $\phi\colon H\to G$ razdelimo na tri korake: najprej induciramo vzdolž kvocientne projekcije $H\to H/\ker\phi$, nato vzdolž izomorfizma $H/\ker\phi\to\mathrm{im}\,\phi$ in nazadnje vzdolž vložitve $\mathrm{im}\,\phi\to G$. Vsako od teh posameznih indukcij razumemo precej dobro in zato lahko to znanje uporabimo pri razumevanju indukcije vzdolž ϕ. Na primer, iz povedanega in razmiselekov o preprostejših indukcijah, ki smo jih že naredili, sledi, da je razsežnost inducirane upodobitve ρ grupe H na prostoru V enaka

$$\deg(\mathrm{Ind}_H^G(\rho)) = |G:\mathrm{im}\,\phi|\cdot\dim(V^{\ker\phi}).$$

Adjunkcija restrikcije in indukcije

Indukcija in restrikcija vsekakor nista inverzna funktorja. Na primer, če je $H\le G$ in ϕ vložitev, potem za upodobitev ρ v Rep_G velja $\deg(\mathrm{Res}_H^G(\rho)) = \deg(\rho)$ in zato $\deg(\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(\rho))) = |G:H|\cdot\deg(\rho)$, kar je lahko mnogo večje od $\deg(\rho)$. Sta pa funktorja restrikcije in indukcije vendarle tesno povezana. Tvorita namreč ***adjungiran par*** funktorjev.[19]

Trditev. *Naj bosta G,H grupi s homomorfizmom $\phi\colon H\to G$. Za vsako upodobitev ρ v Rep_G in upodobitev σ v Rep_H velja*

$$\hom_H(\mathrm{Res}_H^G(\rho),\sigma)\cong\hom_G(\rho,\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)).$$

Dokaz. Naj bo ρ upodobitev na prostoru V in σ upodobitev na prostoru W. Naj bo $\Phi\in\hom_H(\mathrm{Res}_H^G(\rho),\sigma)=\hom_H(V,W)$. Sestavimo pripadajočo spletično $\Psi\in\hom_G(\rho,\mathrm{Ind}_H^G(\sigma))=\hom_G(V,\hom(G,W)^H)$. Za vektor $v\in V$ definirajmo

$$\Psi(v) = (x\mapsto\Phi(\rho(x)\cdot v))\in\hom(G,W).$$

Ni težko (je pa sitno) preveriti, da opisano prirejanje vzpostavi izomorfizem med prostoroma spletičen $\hom_H(V,W)$ in $\hom_G(V,\hom(G,W)^H)$. □

Zgled. Naj bo G grupa s podgrupo H končnega indeksa. Grupa G deluje na množici desnih odsekov $H\backslash G$ s homomorfizmom

$$G\to\mathrm{Sym}(H\backslash G),\quad g\mapsto\big(Hx\mapsto Hxg^{-1}\big).$$

[19] V nadaljevanju bomo spoznali presenetljivo uporabnost tega navidez naključnega dejstva.

Iz tega delovanja izhaja permutacijska upodobitev π grupe G na prostoru $F[H\backslash G]$. Po konstrukciji je $\pi \cong \mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1})$. Iz adjunkcije med restrikcijo in indukcijo za trivialni upodobitvi grup G in H od tod izpeljemo izomorfizem

$$\hom_H(\mathbf{1},\mathbf{1}) \cong \hom_G(\mathbf{1},\pi) \cong F[H\backslash G]^G.$$

Prostor $\hom_H(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \hom(F,F)$ sestoji zgolj iz skalarnih množenj in je torej enorazsežen. Zato je enorazsežen tudi prostor invariant $F[H\backslash G]^G$. Vektor, ki ga razpenja, lahko dobimo kot sliko $\mathrm{id}_F \in \hom_H(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Tej spletični po adjunkciji ustreza spletična

$$\Psi : F \to F[H\backslash G], \quad 1 \mapsto \sum_{Hx \in H\backslash G} e_{Hx},$$

od koder sledi

$$F[H\backslash G]^G = \left\langle \sum_{Hx \in H\backslash G} e_{Hx} \right\rangle.$$

Domača naloga. Naj bosta G,H grupi s homomorfizmom $\phi : H \to G$. Za vsako upodobitev ρ v Rep_G in upodobitev σ v Rep_H velja

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(\rho) \otimes \sigma) \cong \rho \otimes \mathrm{Ind}_H^G(\sigma).$$

Domača naloga. Premisli, kako se restrikcija in indukcija ujameta z dualom, direktno vsoto in tenzorskim produktom.

Poglavje 2

Upodobitev pod mikroskopom

V tem poglavju bomo pribili upodobitev dane grupe in se ji tesno približali, kot da bi jo pogledali pod mikroskopom. Pri tem bomo najprej uzrli osnovne kose, iz katerih je sestavljena upodobitev. Ti osnovni kosi ustrezajo celicam, ki jih vidimo pod mikroskopom. Za tem se bomo približali še sestavi teh osnovnih kosov: vsak je dan s homomorfizmom v matrike, zato bomo raziskali koeficiente te matrike. Ti ustrezajo organelom, ki jih v celici vidimo pod mikroskopom. Nazadnje bomo premislili, da so te upodobitvene celice dovolj diferencirane med sabo, da za njihovo identifikacijo zadošča poznavanje le nekaterih njihovih organelov.

2.1 Razstavljanje upodobitve

Pogosto nas zanima, ali lahko dano upodobitev ρ grupe G na prostoru V zapišemo kot direktno vsoto nekih podupodobitev in na ta način upodobitev ρ *razstavimo* na preprostejše upodobitve, podobno kot razstavimo števila na manjše faktorje.

Nerazcepnost

Naj bo G grupa z upodobitvijo ρ na prostoru $V \neq 0$. Kadar *ne* obstaja noben G-invarianten podprostor prostora V (razen prostorov 0 in V), tedaj rečemo, da je upodobitev ρ ***nerazcepna***.[1] V tem primeru upodobitve seveda ne moremo razstaviti na enostavnejše v smislu direktne vsote.

Zgled. Opazujmo permutacijsko upodobitev simetrične grupe S_3 na prostoru $\mathbb{R}[\{1,2,3\}] = \mathbb{R}^3$. Premislili smo že, da je ta upodobitev direktna vsota enorazsežne podupodobitve $\mathbf{1}$ in dvorazsežne podupodobitve ρ, pri čemer slednja nima nobene enorazsežne podupodobitve. S tem je permutacijska upodobitev razstavljena kot direktna vsota dveh nerazcepnih upodobitev.

Preverimo, da so nerazcepne upodobitve dane grupe med sabo *neprimerljive*, tudi če so enake razsežnosti. Zatorej si jih lahko predstavljamo kot neodvisne osnovne kose kategorije upodobitev dane grupe.[2]

[1] Rečemo tudi, da je V ***enostavna*** upodobitev. Te terminologija izhaja iz alternativne obravnave upodobitev kot *modulov nad grupnimi algebrami*.

[2] Po analogiji s faktorizacijo števil si nerazcepne upodobitve lahko predstavljamo kot praštevila.

Lema (Schurova lema)**.** *Naj bo G grupa z upodobitvijo ρ in nerazcepno upodobitvijo π. Tedaj je vsaka spletična v* $\hom_G(\pi,\rho)$ *bodisi injektivna bodisi ničelna in vsaka spletična v* $\hom_G(\rho,\pi)$ *je bodisi surjektivna bodisi ničelna. V posebnem je vsaka spletična med dvema nerazcepnima upodobitvama grupe G bodisi izomorfizem bodisi ničelna.*

Dokaz. Naj bo $\Phi \in \hom_G(\pi,\rho)$. Tedaj je $\ker\Phi$ podupodobitev π, zato je po nerazcepnosti bodisi $\ker\Phi = 0$ bodisi $\Phi = 0$. Prvi primer ustreza možnosti, da je Φ injektivna, v drugem primeru pa je Φ ničelna. Soroden razmislek dokaže trditev o spletičnah v $\hom_G(\rho,\pi)$. □

Nad algebraično zaprtimi polji lahko to neprimerljivost raztegnemo do ene same upodobitve: osnovni kosi nimajo netrivialnih simetrij.

Posledica. *Naj bo G grupa z nerazcepno upodobitvijo π končne razsežnosti nad* algebraično zaprtim poljem*. Tedaj je* $\dim\hom_G(\pi,\pi) = 1$*. Povedano še drugače: množica* $\hom_G(\pi,\pi)$ *sestoji le iz skalarnih večkratnikov identitete.*

Dokaz. Naj bo $0 \neq \Phi \in \hom_G(\pi,\pi)$. Ker je polje algebraično zaprto, ima linearna preslikava Φ vsaj kakšno lastno vrednost, recimo λ. Preslikava $\Phi - \lambda\cdot\mathrm{id} \in \hom_G(\pi,\pi)$ zato ni injektivna, s čimer mora biti po Schurovi lemi ničelna, se pravi $\Phi = \lambda\cdot\mathrm{id}$. □

Zgled. Naj bo G grupa z nerazcepno upodobitvijo π končne razsežnosti nad poljem kompleksnih števil. Spletične $\hom_G(\pi,\pi) = \hom(\pi,\pi)^G$ so endomorfizmi vektorskega prostora, ki so G-invariatni, se pravi komutirajo z delovanjem grupe G. Zglede takih endomorfizmov lahko dobimo iz delovanj centralnih elementov grupe G; za vsak $z \in Z(G)$ je $\pi(z) \in \hom_G(\pi,\pi)$. Po Schurovi lemi je zato $\pi(z) = \omega(z)\cdot\mathrm{id}$ za nek skalar $\omega(z)$. Ker je π homomorfizem, je $\omega\colon Z(G) \to \mathbb{C}^*$ enorazsežna upodobitev centra grupe G. Tej upodobitvi rečemo ***centralni karakter*** upodobitve π.

Še posebej zanimiv je primer, ko je G *abelova* grupa. Takrat za vsako nerazcepno upodobitev π končne razsežnosti nad poljem $\mathbb{C}$ velja $\pi(g) = \omega(g)\cdot\mathrm{id}$ za *vsak* $g \in G$. Vsak enorazsežen podprostor je zato avtomatično podupodobitev. Ker je π nerazcepna, od tod sklepamo $\deg(\pi) = 1$ in s tem $\pi = \omega$. Upodobitev π je tako *enorazsežna*.

Domača naloga. Podaj konkreten primer abelove grupe in njene nerazcepne upodobitve razsežnosti > 1 nad poljem $\mathbb{Q}$.

Komplementarna podupodobitev

Predpostavimo zdaj, da ima dana upodobitev ρ grupe G na prostoru V neko podupodobitev $\tilde{\rho}$ na podprostoru $W \leq V$. Seveda lahko vselej najdemo vektorski prostor $U \leq V$, za katerega je $V = U \oplus W$, vsekakor pa ni jasno, če lahko najdemo tak podprostor U, ki je celo G-invarianten. Kadar je temu tako, rečemo, da smo našli ***komplementarno podupodobitev*** podupodobitve $\tilde{\rho}$.[3] Ni vsaka podupodobitev komplementirana.

[3] Če komplementarna podupodobitev obstaja, potem je enolično določena (do izomorfizma upodobitev), saj je izomorfna kvocientu $\rho/\tilde{\rho}$.

Zgled. Naj grupa $\mathbb{R}$ deluje na realnem prostoru $\mathbb{R}^2$ s homomorfizmom

$$\rho: \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oglejmo si enorazsežne podupodobitve. Premislili smo že, da te ustrezajo skupnim lastnim vektorjem vseh preslikav $\rho(x)$ za $x \in \mathbb{R}$. Pri $x = 1$ imamo linearno preslikavo $\rho(1)$ z enim samim lastnim vektorjem, in sicer $e_1 \in \mathbb{R}^2$. Hkrati je e_1 lastni vektor vseh preslikav $\rho(x)$ za $x \in \mathbb{R}$. Torej ima ρ *eno samo* enorazsežno podupodobitev, in sicer je to $\mathbb{R} \cdot e_1 \leq \mathbb{R}^2$. Ta vektorski podprostor ima mnogo komplementov v $\mathbb{R}^2$, noben od teh pa ni hkrati enorazsežna podupodobitev ρ.

Ni težko preveriti, da obstoj komplementirane podupodobitve vselej izhaja iz projekcijskih[4] spletičen.

Trditev. *Naj bo G grupa z upodobitvijo ρ na prostoru V in naj bo $\tilde{\rho}$ njena podupodobitev na prostoru $W \leq V$. Tedaj ima $\tilde{\rho}$ komplementirano podupodobitev, če in samo če obstaja spletična $\Phi \in \hom_G(V, V)$, ki je projekcija na W. V tem primeru je $\ker \Phi$ komplementirana upodobitev.*

Polenostavnost

Vrnimo se k začetni ideji o *razstavljanju* dane upodobitve. Kadar lahko dano upodobitev ρ zapišemo kot direktno vsoto *nerazcepnih* upodobitev $\bigoplus_{i \in I} \rho_i$, tedaj rečemo, da je ρ ***polenostavna*** upodobitev. Če so pri tem vse podupodobitve ρ_i izomorfne med sabo, upodobitev ρ imenujemo ***izotipična*** upodobitev.

Zgled. Permutacijska upodobitev grupe S_3 na $\mathbb{R}^3$ je polenostavna.

Vseh upodobitev žal ne moremo razstaviti na direktno vsoto nerazcepnih.[5] Polenostavnost dane upodobitve je namreč tesno povezana z obstojem komplementiranih podupodobitev.

Trditev. *Upodobitev grupe G je polenostavna, če in samo če ima vsaka njena podupodobitev komplementirano podupodobitev.*

Dokaz. ($\Rightarrow$): Naj bo najprej $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ polenostavna upodobitev, pri kateri je $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ in upodobitve G na podprostorih V_i so nerazcepne. Naj bo $W \leq V$ poljuben G-invarianten podprostor. Po Zornovi lemi obstaja maksimalen G-invarianten podprostor $U \leq V$ z lastnostjo $U \cap W = 0$. Izberimo poljuben $i \in I$. Presek $(U \oplus W) \cap V_i$ je G-invarianten podprostor prostora V_i, zato je po nerazcepnosti bodisi trivialen bodisi enak V_i. Če bi bil trivialen, bi lahko U povečali do prostora $U \oplus V_i$, kar je v nasprotju z maksimalnostjo izbire U. Zatorej je $(U \oplus W) \cap V_i = V_i$ in tako $(U \oplus W) \geq V_i$. Ker je bil i poljuben, od tod sledi $U \oplus W = V$. Podupodobitev W ima torej komplementirano podupodobitev U. ✓

($\Leftarrow$): Naj bo $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ upodobitev, v kateri je vsaka podupodobitev komplementirana. Dokazati želimo, da je ρ polenostavna. Uporabili bomo naslednjo pomožno trditev, ki je ni težko preveriti.

---

[4]Linearna preslikava $A: X \to X$ je projekcija na podprostor $Y \leq X$, če je $A^2 = A$ in $\operatorname{im} A = Y$.

[5]V nadaljevanju bomo pokazali, da so upodobitve *končnih* grup nad poljem karakteristike 0 vselej poenostavne.

Domača naloga. Naj bo ρ upodobitev, v kateri je vsaka podupodobitev komplementirana. Tedaj ima ρ nerazcepno podupodobitev.

Naj bo W vsota vseh G-invariantnih podprostorov v V, ki so nerazcepne upodobitve, se pravi $W = \sum_{i \in I} V_i$, a ta vsota ni nujno direktna. Po pomožni trditvi je $W \neq 0$. Po predpostavki je W komplementirana z G-invariantnim podprostorom U. Po pomožni trditvi ima tudi U nerazcepno podupodobitev, zato je ta vsebovana v W, kar implicira $W = V$. Dokažimo zdaj še, da je W *direktna* vsota podprostorov V_i. V ta namen naj bo J maksimalna podmnožica indeksne množice I, za katero je $\sum_{j \in J} V_j$ direktna vsota. Taka podmnožica obstaj po Zornovi lemi. Označimo $\tilde{V} = \bigoplus_{j \in J} V_j$. Če velja $\tilde{V} \neq V$, potem mora za nek $i \in I \backslash J$ po nerazcepnosti veljati $V_i \cap \tilde{V}$, kar pa je v nasprotju z maksimalnostjo množice J. Tako je res $\tilde{V} = V$ in upodobitev V je polenostavna. $\checkmark$ $\square$

Zgled. Eničnozgornjetrikotna upodobitev grupe $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^2$ *ni* nerazcepna, hkrati pa njena podupodobitev $\mathbb{R} \cdot e_1 \cong \mathbf{1}$ *ni* komplementirana. Ta upodobitev zatorej *ni* polenostavna.

Z uporabo zadnjega kriterija lahko dokažemo, da je polenostavnost zaprta za osnovne konstrukcije z upodobitvami.

Posledica. *Podupodobitve, kvocienti in direktne vsote polenostavnih upodobitev dane grupe so polenostavne.*

Dokaz. Preverimo le zaprtost za podupodobitve. Naj bo ρ polenostavna upodobitev grupe G na prostoru V in naj bo $W \leq V$ podupodobitev. Naj bo $U \leq W$ poljubna podupodobitev upodobitve na W. Po polenostavnosti obstaja komplementirana podupodobitev $\tilde{U} \leq V$ upodobitve $U \leq V$. Tedaj je $\tilde{U} \cap W$ podupodobitev, ki je komplementirana podupodobitvi U v W. $\square$

Nazadnje lahko s pomočjo projekcijskih spletičen naredimo še en korak naprej pri razumevanju simetrij upodobitev. Premislili smo že, da so osnovni kosi brez netrivialnih simetrij. V primeru polenostavnih upodobitev drži tudi obratno.

Posledica. *Naj bo G grupa s* polenostavno *upodobitvijo ρ končne razsežnosti nad* algebraično zaprtim poljem. *Če je* $\dim \hom_G(\rho, \rho) = 1$, *potem je ρ nerazcepna.*

Dokaz. Naj ρ upodablja grupo G na prostoru V. Naj bo $W \leq V$ nerazcepna podupodobitev in naj bo U njena komplementirana podupodobitev. Naj bo $\Phi: V \to V$ pripadajoča projekcija na podprostor W z jedrom U. Ker je $\Phi \in \hom_G(\rho, \rho)$, iz predpostavke sledi, da je Φ skalarni večkratnik identitete. To je mogoče le v primeru, ko je $V = W$ in $U = 0$, torej je ρ nerazcepna. $\square$

Kompozicijska vrsta

Vsake upodobitve ne moremo razstaviti kot direktno vsoto nerazcepnih upodobitev. Kljub temu pa je res, da lahko vsako upodobitev (na končno razsežnem prostoru) razstavimo na nerazcepne upodobitve, le da moramo pri tem poseči po nekoliko zahtevnejšem načinu razstavljanja.

Naj bo G grupa z upodobitvijo na prostoru V. Predpostavimo, da obstaja zaporedje G-invariantnih podprostorov

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \cdots \leq V_n = V,$$

pri čemer so vsi zaporedni kvocienti V_i/V_{i-1} za $1 \leq i \leq n$, gledani kot upodobitve grupe G, *nerazcepni*. Tako zaporedje imenujemo ***kompozicijska vrsta*** upodobitve na prostoru V. Kvocienti V_i/V_{i-1} se pri tem imenujejo ***kompozicijski faktorji***.

Zgled. Naj bo ρ eničnozgornjetrikotna upodobitev grupe $\mathbb{R}$ na $V = \mathbb{R}^2$. Ta upodobitev ima podupodobitev $V_1 = \mathbb{R} \cdot e_1$. Kvocient V/V_1 je enorazsežen in na njem grupa $\mathbb{R}$ deluje trivialno. Dobimo torej kompozicijsko vrsto

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq V,$$

katere kompozicijska faktorja sta kot upodobitvi izomorfna $\mathbf{1}$. Sama upodobitev grupe $\mathbb{R}$ na V pa seveda ni trivialna.

Izrek (Jordan-Hölder-Noether)**.** *Vsaka upodobitev na končno razsežnem prostoru ima kompozicijsko vrsto. Vsaki dve kompozicijski vrsti imata enako število členov in do permutacije natančno enake kompozicijske faktorje.*

Dokaz. Naj grupa deluje linearno na končno razsežnem prostoru V. Da kompozicijska vrsta res obstaja, ni težko preveriti. Najprej izberemo neko nerazcepno podupodobitev V_1. Če je $V_1 < V$, potem izberemo podupodobitev V_2, ki vsebuje V_1 in je med vsemi takimi minimalne razsežnosti. S tem je V_2/V_1 nerazcepna. Induktivno nadaljujemo z grajenjem kompozicijske vrste. Ker je V končno razsežen, se ta postopek ustavi.

Premislimo še, kako lahko vsaki dve kompozicijski vrsti povežemo med sabo. Opazujmo dve taki vrsti,

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq \cdots \leq V_n = V \quad \text{in} \quad 0 = W_0 \leq W_1 \leq \cdots \leq W_m = V.$$

S pomočjo druge vrste bomo skušali *pofiniti* prvo vrsto in obratno.[6] Za $0 \leq i < n$ in $0 \leq j \leq m$ naj bo

$$V_{i,j} = V_i + (V_{i+1} \cap W_j),$$

S tem dobimo verigo

$$V_i = V_{i,0} \leq V_{i,1} \leq \cdots V_{i,m} = V_{i+1}$$

med V_i in V_{i+1}. Ker je kvocient V_{i+1}/V_i nerazcepen in je vsak $V_{i,j}$ podupodobitev, mora za natanko en indeks j veljati $V_i = V_{i,j}$ in $V_{i+1} = V_{i,j+1}$. Kompozicijski faktor V_{i+1}/V_i je tedaj izomorfen kvocientu

$$\frac{V_i + (V_{i+1} \cap W_{j+1})}{V_i + (V_{i+1} \cap W_j)}.$$

[6] Ta argument je soroden premisleku o obstoju Hirschove dolžine v policikličnih grupah iz (Teorija grup).

Zgodbo zdaj ponovimo še za drugo verigo. Pofinimo jo s pomočjo prve, definiramo $W_{j,i} = W_j + (W_{j+1} \cap V_i)$. Kvocient W_{j+1}/W_j je enak

$$\frac{W_j + (W_{j+1} \cap V_{i+1})}{W_j + (W_{j+1} \cap V_i)}.$$

Domača naloga. Prepričaj se, da velja

$$\frac{V_i + (V_{i+1} \cap W_{j+1})}{V_i + (V_{i+1} \cap W_j)} \cong \frac{W_j + (W_{j+1} \cap V_{i+1})}{W_j + (W_{j+1} \cap V_i)}.$$

S tem smo za vsak $0 \le i < n$ našli natanko določen j, da je $V_{i+1}/V_i \cong W_{j+1}/W_j$. Premislimo še, da je to prirejanje injektivno. Indeks j je enolično določen s pogojem, da je $V_{i,j+1}/V_{i,j} \neq 0$, kar je po gornjem izomorfizmu enakovredno pogoju $W_{j,i+1}/W_{j,i} \neq 0$. Ker je W_{j+1}/W_j nerazcepen, je slednji pogoj lahko izpolnjen le za *en* indeks i. □

Po izreku je za dano upodobitev ρ in nerazcepno upodobitev π število kompozicijskih faktorjev, ki so izomorfni π, neodvisno od kompozicijske vrste. Temu številu pravimo ***večkratnost*** π v ρ in ga označimo z $\mathrm{mult}_\pi(\rho)$. Kadar je dana upodobitev *polenostavna*, je do izomorfizma natančno enolično določena s svojimi večkratnostmi.

Zgled.

- Za eničnozgornjetrikotno upodobitev ρ grupe $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^2$ je $\mathrm{mult}_{\mathbf{1}}(\rho) = 2$. Ker ta upodobitev ni trivialna, ne more biti polenostavna, saj bi sicer bila izomorfna $\mathbf{1}^2$.

- Opazujmo permutacijsko upodobitev π grupe S_3 na $\mathbb{R}^3$. To upodobitev smo že razstavili na direktno vsoto $\mathbf{1} \oplus \rho$, kjer je ρ dvorazsežna nerazcepna upodobitev na podprostoru $\langle u_1 = e_1 - e_2, u_2 = e_2 - e_3 \rangle$. Premislili smo, kako lahko to upodobitev projiciramo do upodobitve $\tilde{\rho}$ grupe S_3 na prostoru $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ nad končnim poljem $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

  Upodobitev $\tilde{\rho}$ *ni* nerazcepna, saj ima invarianten podprostor $\langle u_1 - u_2 = e_1 + e_2 + e_3 \rangle$. Na tem podprostoru grupa S_3 deluje trivialno. V kvocientu $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2/\langle u_1 - u_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ generatorja $(1\ 2)$ in $(1\ 2\ 3)$ grupe S_3 preslikata odsek vektorja u_1 v odsek $-u_1$ oziroma u_1. V tem prepoznamo predznačno upodobitev, interpretirano kot homomorfizem $\mathrm{sgn}\colon S_3 \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \{1, -1\}$. Nad poljem $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ za permutacijsko upodobitev π tako velja $\mathrm{mult}_{\mathbf{1}}(\pi) = 2$ in $\mathrm{mult}_{\mathrm{sgn}}(\pi) = 1$.

  Premislimo, da upodobitev π nad $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *ni* polenostavna. Če bi namreč bila, bi po zgornjem morala biti izmorfna direktni vsoti $\mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathrm{sgn}$. Prostor $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ bi zatorej imel bazo, v kateri bi matriki za $\pi((1\ 2))$ in $\pi((1\ 2\ 3))$ bili hkrati diagonalni. Ti dve matriki bi zato komutirali, kar pomeni, da bi morali komutirati tudi linearni preslikavi $\pi((1\ 2))$ in $\pi((1\ 2\ 3))$. Temu pa ni tako, saj na primer velja $\pi((1\ 2\ 3)(1\ 2))e_1 = e_3$ in $\pi((1\ 2)(1\ 2\ 3))e_1 = e_1$.

Izotipične komponente

[Proposition 2.7.9]

2.2 Matrični koeficienti

- povezava med zgornje bločno trikotno matriko in bločno (polenostavnost) [Example 2.7.8.]

Neodvisnost koeficientov

- Theorem 2.7.24 (Burnsides irreducibility criterion) - matrix coefficients, linear independence,

Povezava z regularno upodobitvijo

-Corollary 2.7.30 (Matrix coefficients as subrepresentations of the regular representation). - Proposition 2.7.34 (Isotypic component of the regular representation).

Karakterji

- characters of finite dimensional representations - (?, najbrž ne) some clifford theory

Theorem 2.6.7 Baumslag-Solitar grupa je končno prezentirana, ni pa linearna (ampak za to bi potrebovali končno prezentirane grupe ...) Ta dokaz bi lahko dodali v del o RASTi, kjer že imamo vse potrebno razvito! Dodaj referenco o obstoju grupe, ki nima upodobitve, tukaj. Po tem lahko še omenimo rezultat Lubotzky o random grupah.

Poglavje 3

Upodobitve končnih grup

3.1 Polenostavnost in regularna upodobitev

3.2 Karakterji

3.3 Konkretni primeri

Abelove grupe

Razširjeni zgled $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$

Razširjeni zgled S_n

- Maschke (projektor) - dekompozicija regularne upodobitve - nerazcepne upodobitve končnih abelovih grup - število karakterjev - ortogonalnost karakterjev - večkratnosti - kje najti upodobitve - projektorji na izo komponente - malo harmonične analize - abelove grupe, Dirichletov izrek - tabela karakterjev - $\mathrm{GL}_2(\mathcal{F}_p)$ - burnside two primes theorem (najbrž izpustimo, brez veze) - simetrične grupe (!!!, napiši tabelo za S_5) - ? mixing in simetrične grupe (konkreten primer, simetrična grupa S_5, matrika sosednosti (katero mešanje?), spletična, lastne vrednosti po komponentah, kako dolgo moramo mešati?)

Poglavje 4

Upodobitve linearnih grup

4.1 Ozaljšane upodobitve

Zvezne upodobitve

Unitarne upodobitve

- topološke grupe (zvezne upodobitve) - unitarne na hilbertovih prostorih (končne smo že, SU_2)

Razširjeni zgled S^1

fourier

4.2 Liejeve grupe in mreže

Razširjeni zgled $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Mreža $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

- obravnavamo kot Liejevo grupo - pokažemo povezavo z sl_2 (lahko eksplicitno opišemo vse nerazcepne, pokažemo kako so bijektivno (!) povezane z gladkimi upodobitvami SL_2, glej Fulton-Harris) - naštejemo upodobitve SL_2 - dokažemo, da so nerazcepne (potrebujemo izotipične komponente) - diferencial teh upodobitev nam da upodobitve sl_2 - dokažemo, da so to vse upodobitve sl_2 (Fulton-Harris) - zvezne upodobitve SL_2: te plus konjugiranke (samo rezultat) - abstraktne upodobitve: divji avtomorfizmi $\mathbb{C}$ - dokažemo Clebsch-Gordan (najbrž izpustimo ...) - $SL_2(Z)$? (-> https://math.stackexchange.com/questions/786303/the-presentation-of-sl2-mathbbz, glej zadnji odgovor, kjer poda prezentacijo, napiši na primer enačbe za raznoterost dvorazsežnih realnih upodobitev) - random groups, model Gromova https://arxiv.org/abs/1810.01529 - $SL_n(Z)$? (-> The representation theory of SLn(Z), Andrew Putman, povezano s p-adičnimi števili – Lubotzky)

4.3 Kompaktne grupe

Razširjeni zgled $SU_2(\mathbb{C})$

- lahko bi geometrijsko iz sl_2, ampak pokažemo alternativen pristop, ker je kompaktna - naštejemo upodobitve, so nerazcepne: isti dokaz kot za SL_2 bolj ali manj deluje tudi tukaj - Clebsch-Gordan je trivialen iz karakterjev - dokažemo, da so to vse zvezne nerazcepne: rabimo karakterje - Peter-Weyl na tem primeru (samo izrek, da smo s tem pokrili vse unitarne upodobitve)

p-adične grupe. Omenimo lahko na primer rezultat Jaikin (representation growth) in Aizenbud-Avni (Representation Growth and Rational Singularities of the Moduli Space of Local Systems).

- ? lastnost (T), dodaj referenco na TGP in expanderje