

# **Teorija upodobitev**

Urban Jezernik

13. junij 2022



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Temelji teorije upodobitev</b>	<b>5</b>
1.1	Osnovni pojmi . . . . .	5
1.2	Fundamentalne konstrukcije . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Upodobitev pod mikroskopom</b>	<b>21</b>
2.1	Razstavljanje upodobitve . . . . .	21
2.2	Matrični koeficienti . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Upodobitve končnih grup</b>	<b>31</b>
3.1	Polenostavnost in regularna upodobitev . . . . .	31
3.2	Karakterji . . . . .	31
3.3	Konkretni primeri . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Upodobitve linearnih grup</b>	<b>33</b>
4.1	Ozaljšane upodobitve . . . . .	33
4.2	Liejeve grupe in mreže . . . . .	33
4.3	Kompaktne grupe . . . . .	34

## Kratek opis predmeta

Tile zapiski so kot eno drevo, ki se razraste v razne smeri. Pri vršičkih je ujame z drevesoma TGP in Expanderji.

## Literatura

- E. Kowalski, *An Introduction to the Representation Theory of Groups*, American Mathematical Society, 2014.
- W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Springer GTM 129, 2004.

# Poglavje 1

## Temelji teorije upodobitev

V tem poglavju bomo vzpostavili temelje teorije upodobitev. Spoznali bomo koncept upodobitve in si ogledali mnogo primerov. Premislili bomo, kako upodobitve med sabo primerjamo in kako iz danih upodobitev sestavimo nove.

### 1.1 Osnovni pojmi

#### Upodobitve grup

Naj bo  $G$  grupa in  $V$  vektorski prostor nad poljem  $F$ . Upodobitev grupe  $G$  na prostoru  $V$  je delovanje  $G$  na množici  $V$ , ki upošteva dodatno strukturo množice  $V$ , namreč to, da je vektorski prostor. Natančneje, **upodobitev** (rekli bomo tudi **linearno delovanje**) grupe  $G$  na prostoru  $V$  je homomorfizem grup

$$\rho: G \rightarrow \text{GL}(V).$$

Pri tem razsežnosti prostora  $V$  rečemo **stopnja upodobitve** in jo označimo z  $\deg(\rho)$ . Ko v prostoru  $V$  izberemo bazo in torej izomorfizem  $V \cong F^{\deg(\rho)}$ , lahko upodobitev  $\rho$  enakovredno zapišemo kot homomorfizem

$$\rho: G \rightarrow \text{GL}_{\deg(\rho)}(F)$$

iz grupe  $G$  v obrnljive matrike razsežnosti  $\deg(\rho)$  nad  $F$ .

Za element  $g \in G$  in vektor  $v \in V$  rezultat delovanja elementa  $g$  na vektorju  $v$ , se pravi  $\rho(g)(v)$ , včasih pišemo krajše kot  $g \cdot v$  ali kar  $gv$ .

#### Zgled.

- Opazujmo grupo celih števil  $\mathbb{Z}$  in vektorski prostor  $\mathbb{C}$  nad poljem kompleksnih števil. Za vsak parameter  $\alpha \in \mathbb{C}$  imamo upodobitev

$$\chi_\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*, \quad x \mapsto e^{\alpha x}.$$

- Opazujmo grupo ostankov  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  za poljubno naravno število  $q$ . Za vsak parameter  $m \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  imamo upodobitev

$$\chi_m: \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*, \quad x \mapsto e^{2\pi i m x / q}.$$

- Naj bo  $G$  grupa in  $V$  vektorski prostor nad poljem  $F$ . **Trivialna upodobitev** grupe  $G$  je homomorfizem

$$\rho: G \rightarrow \text{GL}(V), \quad g \mapsto \text{id}_V.$$

Kadar je vektorski prostor  $V$  razsežnosti 1, trivialno upodobitev in vektorski prostor sam označimo kot  $\mathbf{1}$ , v primerih višje razsežnosti pa ju označimo kot  $\mathbf{1}^{\dim V}$ .

- Naj bo  $V$  vektorski prostor in naj bo  $G$  poljubna podgrupa grupe  $\mathrm{GL}(V)$ . Tedaj je naravna vložitev  $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  upodobitev grupe  $G$  na prostoru  $V$ .

Za konkreten zgled lahko vzamemo  $V = \mathbb{C}^2$  in  $G = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ . Na ta način dobimo upodobitev grupe  $G \cong \mathbb{Z}$  na prostoru  $\mathbb{C}^2$ . Na istem prostoru lahko vzamemo tudi  $G = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ . Na ta način dobimo upodobitev neskončne diedrske grupe  $G \cong D_\infty$  na prostoru  $\mathbb{C}^2$ .

- Naj bo  $G$  poljubna grupa, opremljena z delovanjem na neki množici  $X$ . Naj bo  $F[X]$  vektorski prostor z bazo  $\{e_x\}_{x \in X}$ . Grupa  $G$  deluje na  $F[X]$  s homomorfizmom

$$\pi: G \rightarrow \mathrm{GL}(F[X]), \quad g \mapsto (e_x \mapsto e_{g.x}),$$

kjer je  $x \in X$ . To delovanje imenujemo **permutacijska upodobitev** grupe  $G$  na  $F[X]$ .

Za konkreten zgled lahko vzamemo  $G = S_n$ , ki naravno deluje na množici  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Na ta način dobimo permutacijsko upodobitev grupe  $S_n$  na prostoru  $F[\{1, 2, \dots, n\}]$  razsežnosti  $n$ .

- Naj bo  $G$  grupa in  $F$  polje. Grupa  $G$  vselej deluje na sebi s Cayleyjevim delovanjem. Prirejani permutacijski upodobitvi grupe  $G$  na  $F[G]$ <sup>1</sup> rečemo **Cayleyjeva upodobitev** grupe  $G$  nad  $F$ . To delovanje označimo z  $\pi_{\mathrm{Cay}}$ .
- Naj bo  $G$  grupa in  $F$  polje. Naj bo  $\mathrm{hom}(G, F)$  množica vseh funkcij iz množice  $G$  v  $F$ . Te funkcije lahko po točkah seštevamo in množimo s skalarji, na ta način je  $\mathrm{hom}(G, F)$  vektorski prostor. Grupa  $G$  deluje na  $\mathrm{hom}(G, F)$  s homomorfizmom

$$\rho_{\mathrm{hom}}: G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{hom}(G, F)), \quad g \mapsto (f \mapsto (x \mapsto f(xg))),$$

kjer je  $f \in \mathrm{hom}(G, F)$ ,  $x \in G$ . To delovanje izhaja iz (desnega) delovanja grupe  $G$  na sebi in ga zato imenujemo **(desna) regularna upodobitev** grupe  $G$  nad  $F$ .

Upodobitev  $\rho$  grupe  $G$  pohvalimo s pridevnikom **zvesta**, kadar je injektivna, se pravi ker  $\rho = 1$ . Trivialna upodobitev netrivialne grupe ni zvesta, sta pa vselej zvesti Cayleyjeva in desna regularna upodobitev.

Ali tole sploh kje potrebujemo?

## Kategorija upodobitev

Naj bo  $G$  grupa. Opazujmo neki njeni upodobitvi  $\rho_1$  in  $\rho_2$  nad vektorskima prostoroma  $V_1$  in  $V_2$ , obema nad poljem  $F$ . Ti dve upodobitvi lahko *primerjamo* med sabo, in sicer tako, da hkrati primerjamo vektorska prostora in delovanji grupe  $G$  na teh dveh prostorih.

<sup>1</sup>Prostor  $F[G]$  je vektorski prostor nad  $F$ , generiran z množico  $G$ . Običajno mu pravimo **grupna algebra**, saj ta prostor na naraven način podeduje operacijo množenja iz grupe  $G$ .

Natančneje, **spletična**<sup>2</sup> med upodobitvama  $\rho_1$  in  $\rho_2$  je linearna preslikava  $\Phi: V_1 \rightarrow V_2$ , za katero za vsak  $g \in G$  in  $v \in V_1$  velja<sup>3</sup>

$$\Phi(\rho_1(g) \cdot v) = \rho_2(g) \cdot \Phi(v).$$

**Zgled.** Opazujemo grupo  $\mathbb{Z}$  in dve njeni upodobitvi, ki smo jih že videli. Prva naj bo upodobitev

$$\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^x,$$

druga pa naj bo kar trivialna upodobitev **1** na prostoru  $\mathbb{C}$ . Predpišimo linearno preslikavo  $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$  v standardni bazi z matriko  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Tedaj za vsak vektor  $v \in \mathbb{C}$  in vsako število  $x \in \mathbb{Z}$  velja

$$\Phi(x \cdot v) = \begin{pmatrix} xv \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \Phi(v),$$

zato je  $\Phi$  spletična med **1** in  $\rho$ .

Množica vseh spletičen med  $\rho_1$  in  $\rho_2$  je podmnožica množice linearnih preslikav  $\mathrm{hom}(V_1, V_2)$ , za katero uporabimo oznako  $\mathrm{hom}_G(\rho_1, \rho_2)$  ali kar  $\mathrm{hom}_G(V_1, V_2)$ .

Za dano upodobitev  $\rho$  grupe  $G$  na vektorskem prostoru  $V$  je identična preslikava  $\mathrm{id}_V$  seveda spletična med  $\rho$  in  $\rho$ . Prav tako lahko vsaki dve spletični  $\Phi_1$  med  $\rho_1$  in  $\rho_2$  ter  $\Phi_2$  med  $\rho_2$  in  $\rho_3$  skomponiramo do spletične  $\Phi_2 \circ \Phi_1$  med  $\rho_1$  in  $\rho_3$ . Množica vseh upodobitev dane grupe  $G$  nad poljem  $F$  torej tvoji **kategorijo upodobitev**, katere objekti so upodobitve grupe  $G$  nad  $F$ , morfizmi pa so spletične med upodobitvami. To kategorijo označimo z  $\mathrm{Rep}_G$ .

## Izomorfnost upodobitev

Naj bo  $G$  grupa in  $F$  polje. Kadar je spletična  $\Phi: V_1 \rightarrow V_2$  med  $\rho_1$  in  $\rho_2$  obrnljiva kot linearna preslikava, je tudi njen inverz  $\Phi^{-1}$  spletična med  $\rho_2$  in  $\rho_1$ . V tem primeru spletični  $\Phi$  rečemo **izomorfizem** upodobitev  $\rho_1$  in  $\rho_2$ .

**Zgled.** Opazujemo ciklično grupo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  za poljuben  $n > 1$ . Ta grupa naravno deluje na množici  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ ,<sup>4</sup> od koder izhaja permutacijska upodobitev

$$\pi: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}[\Omega]).$$

Grupa  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ima tudi Cayleyjevo upodobitev,

$$\pi_{\mathrm{Cay}}: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]).$$

Ti dve upodobitvi sta izomorfni. Vektorska prostora lahko namreč naravno primerjamo z bijektivno linearno preslikavo

$$\Phi: \mathbb{C}[\Omega] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}], \quad e_i \mapsto e_{\bar{i}},$$

kjer je  $i \in \Omega$ . Preslikava  $\Phi$  je spletična, saj za vsak  $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  in  $i \in \Omega$  velja

$$\Phi(\bar{x} \cdot e_i) = \Phi(e_{x+i}) = e_{\overline{x+i}} = \bar{x} \cdot e_{\bar{i}} = \bar{x} \cdot \Phi(e_i).$$

<sup>2</sup>Angleško *intertwiner*.

<sup>3</sup>Z opustitvijo eksplisitnih oznak za delovanja lahko ta pogoj pišemo krajše kot  $\Phi(gv) = g\Phi(v)$ .

<sup>4</sup>Generator  $\bar{1} = 1 + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  deluje kot cikel  $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ .

V to kratko zgodbo lahko vključimo še desno regularno upodobitev

$$\rho_{\text{hom}}: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(\text{hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C})).$$

Vektorski prostor  $\text{hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  lahko na naraven način opremimo z bazo iz karakterističnih funkcij

$$1_{\bar{x}}: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \bar{y} \mapsto \begin{cases} 1 & \bar{y} = \bar{x}, \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

za  $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Predpišimo linearno preslikavo<sup>5</sup>

$$\Phi': \mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \rightarrow \text{hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \quad e_{\bar{x}} \mapsto 1_{-\bar{x}}.$$

Jasno je  $\Phi'$  bijektivna. Preverimo še, da je res spletična. Za vsaka  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  velja

$$\Phi'(\bar{x} \cdot e_{\bar{y}}) = \Phi'(e_{\overline{x+y}}) = 1_{-\overline{x+y}}.$$

Po drugi strani za vsak  $\bar{z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  velja

$$(\bar{x} \cdot \Phi'(e_{\bar{y}}))(\bar{z}) = (\bar{x} \cdot 1_{-\bar{y}})(\bar{z}) = 1_{-\bar{y}}(\bar{z} + \bar{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{z} = -\bar{x} + \bar{y} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Torej je res  $\Phi'(\bar{x} \cdot e_{\bar{y}}) = \bar{x} \cdot \Phi'(e_{\bar{y}})$ . S tem je  $\Phi'$  izomorfizem med Cayleyjevo upodobitvijo in desno regularno upodobitvijo.

Eden pomembnih ciljev teorije upodobitev je razumeti vse upodobitve dane grupe do izomorfizma natančno. Kasneje bomo spoznali, kako lahko to v določenih<sup>6</sup> primerih *precej dobro* uresničimo.

## 1.2 Fundamentalne konstrukcije

Naj bo  $\rho$  upodobitev grupe  $G$  na prostoru  $V$  nad poljem  $F$ . Premislili bomo, kako lahko prostor, grupo ali polje modificiramo na različne načine in tako dobimo neko drugo, novo upodobitev, oziroma kako lahko dano upodobitev vidimo kot rezultat kakšne od teh fundamentalnih konstrukcij.

### Podupodobitve

Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Denimo, da obstaja vektorski podprostor  $W \leq V$ , ki je *invarianten* za delovanje grupe  $G$ , se pravi  $g \cdot w \in W$  za vsak  $g \in G$ ,  $w \in W$ . V tem primeru upodobitev  $\rho$  inducira upodobitev  $\tilde{\rho}: G \rightarrow \text{GL}(W)$  in vložitev vektorskih prostorov  $\iota: W \rightarrow V$  je spletična. Upodobitvi  $\tilde{\rho}$  rečemo **podupodobitev** upodobitve  $\rho$ .

**Zgled.**

- Naj bo  $n$  naravno število. Opazujmo permutacijsko delovanje grupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  na množici  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ , ki porodi permutacijsko upodobitev na prostoru  $\mathbb{C}[\Omega]$  z baznimi vektorji  $e_i$  za  $i \in \Omega$ . Naj bo še  $e_0 = e_n$ .

<sup>5</sup>Pozor, karakteristična funkcija je zasidrana pri inverzu elementa  $\bar{x}$  v  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

<sup>6</sup>Na primer, *precej dobro* bomo opisali upodobitve poljubne končne grupe nad poljem kompleksnih števil.



Naj bo  $\zeta \in \mathbb{C}$  primitiven  $n$ -ti koren enote. Za  $j \in \Omega$  naj bo

$$f_j = \sum_{i \in \Omega} \zeta^{ij} e_i \in \mathbb{C}[\Omega].$$

Za vsak  $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  velja

$$\bar{x} \cdot f_j = \sum_{i \in \Omega} \zeta^{ij} e_{\overline{x+i}} = \sum_{i \in \Omega} \zeta^{(i-\bar{x})j} e_i = \zeta^{-\bar{x}j} \cdot f_j,$$

zato je vsak podprostor  $\mathbb{C} \cdot f_j \leq \mathbb{C}[\Omega]$  invarianten za delovanje grupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  in podupodobitev na tem podprostoru  $\mathbb{C} \cdot f_j$  je očitno izomorfna upodobitvi  $\chi_{-j}$  grupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Na ta način smo sestavili  $n$  podupodobitev permutacijske in s tem regularne upodobitve ciklične grupe moči  $n$ .

- Naj bo  $G$  grupa in  $\rho$  njena upodobitev na prostoru  $V$ . Opazujmo množico vseh fiksnih vektorjev te upodobitve,

$$V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G: g \cdot v = v\}.$$

Množica  $V^G$  je vektorski podprostor prostora  $V$ , ki je invarianten za delovanje grupe  $G$ . Torej je  $\tilde{\rho}: G \rightarrow \text{GL}(V^G)$  podupodobitev upodobitve  $\rho$ . Na prostoru  $V^G$  po definiciji grupa  $G$  deluje trivialno, torej je  $\tilde{\rho}$  izomorfna trivialni upodobitvi  $\mathbf{1}^{\dim V^G}$ .

**Domača naloga.** Naj bo  $G$  grupa in  $F$  polje. Določi upodobitvi  $F[G]^G$  in  $\text{hom}(G, F)^G$ .

Prostor  $V^G$  lahko razumemo še na naslednji alternativen način, ki nam bo prišel zelo prav v nadaljevanju. Iz vsakega vektorja  $v \in V^G$  izhaja injektivna spletična

$$\Phi_v: \mathbf{1} \rightarrow V, \quad x \mapsto xv$$

med  $\mathbf{1}$  in  $\rho$ . S tem je določena preslikava  $V^G \rightarrow \text{hom}_G(\mathbf{1}, V)$ . Ta preslikava ima jasen inverz, ki spletični  $\Phi \in \text{hom}_G(\mathbf{1}, V)$  priredi  $\Phi(1)$ . Na ta način lahko identificiramo prostor  $V^G$  z množico spletičen  $\text{hom}_G(\mathbf{1}, V)$ .

- Naj bo  $G$  grupa in  $\rho$  njena upodobitev na prostoru  $V$ . Predpostavimo, da obstaja vektor  $v \in V$ , ki je lastni vektor vsake linearne preslikave  $\rho(g)$  za  $g \in G$ .

Torej za vsak  $g \in G$  obstaja  $\chi(g) \in F$ , da je  $\rho(g) \cdot v = \chi(g)v$ . Na ta način dobimo funkcijo  $\chi: G \rightarrow F$ , se pravi element prostora  $\text{hom}(G, F)$ . Ta funkcija ni čisto poljubna; ker je  $\rho$  upodobitev, je  $\chi$  nujno *homomorfizem* iz grupe  $G$  v grupo  $F^*$ . Torej je  $\chi$  pravzaprav upodobitev grupe  $G$  na prostoru  $F$  razsežnosti 1.<sup>7</sup>

Zdaj kot v zadnjem zgledu s predpisom

$$\Phi: F \rightarrow V, \quad x \mapsto xv$$

dobimo injektivno spletično med  $\chi$  in  $\rho$ , torej lahko vidimo  $\chi$  kot eno-razsežno podupodobitev upodobitve  $\rho$ . Hkrati lahko iz te spletične obnovimo podatek o skupnem lastnem vektorju  $v$  in upodobitvi  $\chi$ .<sup>8</sup>

<sup>7</sup>Kadar je  $\chi(g) = 1$  za vsak  $g \in G$ , je ta upodobitev izomorfna  $\mathbf{1}$ . Kadar je  $\chi(g) \neq 1$  za vsaj kak  $g \in G$ , pa ta upodobitev ni trivialna.

<sup>8</sup>Namreč,  $v = \Phi(1)$  in  $\chi(g) = \rho(g) \cdot 1$ .

Torej smo vzpostavili bijektivno korespondenco med množico enorazsežnih podupodobitev upodobitve  $\rho$  in skupnimi lastnimi vektorji vseh preslikav  $\rho(g)$  za  $g \in G$ .

Poseben primer te korespondence je zadnji zgled. Množico enorazsežnih trivialnih podupodobitev upodobitve  $\rho$  lahko identificiramo z množico neničelnih spletičen  $\text{hom}_G(\mathbf{1}, V) \setminus \{x \mapsto 0\}$ , ta pa ustreza skupnim lastnim vektorjem  $\rho(g)$  za  $g \in G$  z lastno vrednostjo 1, kar je ravno množica  $V^G \setminus \{0\}$ .

- Naj bo  $G$  grupa in  $F$  polje. Opazujmo Cayleyjevo upodobitev  $\pi_{\text{Cay}}$  na  $F[G]$  in desno regularno upodobitev  $\rho_{\text{hom}}$  na  $\text{hom}(G, F)$ . Trdimo, da je  $\pi_{\text{Cay}}$  podupodobitev upodobitve  $\rho_{\text{hom}}$ .

V ta namen predpišimo linearno preslikavo<sup>9</sup>

$$\Phi: F[G] \rightarrow \text{hom}(G, F), \quad e_g \mapsto 1_{g^{-1}}$$

za  $g \in G$ . Jasno je  $\Phi$  injektivna preslikava. Hkrati za vse  $g, h, x \in G$  velja

$$\Phi(\pi_{\text{Cay}}(g) \cdot e_h) = \Phi(e_{gh}) = 1_{h^{-1}g^{-1}}$$

in

$$(\rho_{\text{hom}}(g) \cdot \Phi(e_h))(x) = 1_{h^{-1}}(xg) = 1_{g^{-1}h^{-1}}(x),$$

zato je  $\Phi$  tudi spletična.

Kadar je grupa  $G$  končna, sta prostora  $F[G]$  in  $\text{hom}(G, F)$  enake razsežnosti, zato sta v tem primeru upodobitvi  $\pi_{\text{Cay}}$  in  $\rho_{\text{hom}}$  izomorfni. Kadar je grupa  $G$  neskončna, pa preslikava  $\Phi$  vsekakor ni bijektivna.<sup>10</sup> V tem primeru upodobitvi nista izomorfni.<sup>11</sup>

**Domača naloga.** Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$ . Naj bo  $N$  podgrupa edinka v  $G$ . Premisli, da množica fiksnih točk

$$V^N = \{v \in V \mid \forall n \in N: \rho(n) \cdot v = v\}$$

tvori podupodobitev upodobitve  $\rho$ , ki jo lahko identificiraš z množico  $\text{hom}_N(\mathbf{1}, V)$ .

## Jedro, slika, kvocient

Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$ . Ogledali smo si že, kako za vsak  $G$ -invarianten podprostor  $W \leq V$  dobimo podupodobitev upodobitve  $\rho$ . Sorodno lahko za vsak  $G$ -invarianten podprostor  $W \leq V$  tvorimo **kvocient**  $V/W$ , na njem linearno deluje grupa  $G$  s predpisom

$$G \rightarrow \text{GL}(V/W), \quad g \mapsto (v + W \mapsto \rho(g) \cdot v + W)$$

za  $v \in V$ .

Na vse do zdaj omenjene konstrukcije lahko gledamo na skupen način, in sicer s pomočjo spletične  $\Phi$ , ki vlaga prostor  $W$  v  $V$ . Ni težko preveriti, da so standardne konstrukcije, ki jih lahko uporabimo na spletičnih vektorskih prostorov, na naraven način opremljene z linearnim delovanjem grupe  $G$ .

<sup>9</sup>Poseben primer te preslikave smo videli za grupo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , kjer smo premislili, da je celo bijektivna.

<sup>10</sup>Slika  $\text{im } \Phi$  namreč sestoji iz funkcij, ki so neničelne le v končno mnogo elementih grupe  $G$ .

<sup>11</sup>To sledi na primer iz dejstva, da prostora  $F[G]^G$  in  $\text{hom}(G, F)^G$  nista izomorfna.

**Trditev.** Naj bo  $\Phi$  spletična upodobitev grupe  $G$ . Tedaj prostori  $\ker \Phi$ ,  $\operatorname{im} \Phi$ , coker  $\Phi$  podedujejo linearno delovanje grupe  $G$ .

**Zgled.** Naj bo  $G$  grupa in  $\rho$  njena upodobitev na prostoru  $V$ . Podprostor prostora  $V$ , na katerem grupa  $G$  deluje trivialno, je vselej  $G$ -invarianten. Največji tak podprostor je ravno prostor vseh fiksnih vektorjev  $V^G$ . Videli smo že, da lahko ta prostor identificiramo z množico spletičen  $\operatorname{hom}_G(\mathbf{1}, V)$ .

Oglejmo si sedaj še dual zgodnje konstrukcije. Naj bo  $V_1 = \langle \rho(g) \cdot v - v \mid v \in V, g \in G \rangle$ . Prostor  $V_1$  je  $G$ -invarianten podprostor prostora  $V$ , zato kvocient  $V/V_1$  podeduje linearno delovanje grupe  $G$ . Po konstrukciji je to delovanje trivialno in prostor  $V/V_1$  je največji kvocient prostora  $V$ , na katerem grupa  $G$  deluje trivialno. Kvocient  $V/V_1$  označimo z  $V_G$  in mu pravimo **prostor koinvariant** upodobitve  $\rho$ .

**Domača naloga.** Izračunaj prostor koinvariant regularne upodobitve ciklične grupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Prostor koinvariant je po konstrukciji dualen prostoru fiksnih vektorjev, zato lahko nanj prenesemo tudi interpretacijo s spletičnimi. Opazujmo množico  $\operatorname{hom}_G(V, \mathbf{1})$ . Spletične iz te množice so ravno homomorfizmi  $\lambda: V \rightarrow F$  z lastnostjo  $\lambda(\rho(g) \cdot v) = \lambda(v)$  za vsaka  $v \in V, g \in G$ , kar je ekvivalentno pogoju  $\lambda(V_1) = 0$ . Vsako tako spletično lahko zato interpretiramo kot linearno preslikavo iz  $V/V_1 = V_G$  v  $F$ . Na ta način je vzpostavljena bijektivna korespondenca med množico spletičen  $\operatorname{hom}_G(V, \mathbf{1})$  in množico linearnih preslikav  $\operatorname{hom}_F(V_G, F)$ , slednja množica pa je ravno dual  $V_G^*$  prostora koinvariant  $V_G$ .

## Direktna vsota

Naj ima grupa  $G$  družino upodobitev  $\{\rho_i\}_{i \in I}$  na vektorskih prostorih  $\{V_i\}_{i \in I}$ . Tedaj lahko tvorimo direktno vsoto vektorskih prostorov  $\bigoplus_{i \in I} V_i$ , ki je opremljena z linearnim delovanjem

$$\bigoplus_{i \in I} \rho_i: G \rightarrow \operatorname{GL}\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right), \quad g \mapsto \left( \sum_{i \in I} v_i \mapsto \sum_{i \in I} \rho_i(g) \cdot v_i \right).$$

Na ta način dobimo **direktno vsoto** upodobitev  $\bigoplus_{i \in I} \rho_i$ . Pri tem je vsaka od upodobitev  $\rho_i$  podupodobitev te direktne vsote.

**Zgled.**

- Opazujmo permutacijsko upodobitev  $\pi$  grupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  na prostoru  $\mathbb{C}[\Omega]$ , kjer je  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ . Premislili smo že, da ima ta upodobitev  $n$  podupodobitev. Za vsak  $j \in \Omega$  imamo upodobitev na podprostoru  $\mathbb{C} \cdot f_j$ , ki je izomorfna upodobitvi  $\chi_{-j}$ . Ker je množica vektorjev  $\{f_j \mid j \in \Omega\}$  linearno neodvisna,<sup>12</sup> lahko permutacijsko upodobitev torej zapišemo kot direktno vsoto  $\pi = \bigoplus_{j \in \Omega} \chi_j$ .

**Domača naloga.** Prepričaj se, da so upodobitve  $\chi_j$  za  $j \in \Omega$  grupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  med sabo paroma neizomorfne.

<sup>12</sup>Prehodna matrika iz baze  $e_i$  v bazo  $f_j$  je ravno Vandermondova matrika.

- Opazujemo permutacijsko upodobitev simetrične grupe  $S_3$  na prostoru  $\mathbb{R}[\{1, 2, 3\}] = \mathbb{R}^3$ . Delovanje grupe  $S_3$  ohranja vektor  $e_1 + e_2 + e_3$ , zato ima ta upodobitev trivialno enorazsežno podupodobitev, dano s podprostorom  $\langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ . Eden od komplementov tega podprostora je  $\langle e_1 - e_2, e_2 - e_3 \rangle$ , ki je hkrati  $S_3$ -invarianten podprostor.<sup>13</sup> Če označimo  $u_1 = e_1 - e_2$  in  $u_2 = e_2 - e_3$ , lahko slednjo upodobitev opišemo s homomorfizmom

$$\rho: S_3 \rightarrow \text{GL}(\langle u_1, u_2 \rangle), \quad (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1\ 2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Permutacijska upodobitev  $S_3$  je zato direktna vsota enorazsežne podupodobitve  $\mathbf{1}$  in dvorazsežne podupodobitve  $\rho$ .

Premislimo, da upodobitve  $\rho$  ne moremo zapisati kot direktne vsote svojih pravih podupodobitev. V ta namen opazujemo njene morebitne enorazsežne podupodobitve. Premislili smo že, da te ustrezajo skupnim lastnim vektorjem vseh preslikav  $\rho(x)$  za  $x \in S_3$ . Lastna vektorja  $\rho((1\ 2))$  sta  $u_1$  in  $u_1 + 2u_2$ . Noben od teh dveh vektorjev ni hkrati lastni vektor  $\rho((1\ 2\ 3))$ . Torej je upodobitev  $\rho$  stopnje 2, hkrati pa nima enorazsežnih podupodobitev in je torej ne moremo nadalje razstaviti.

Direktna vsota je najbolj preprost način, kako lahko iz danih upodobitev sestavimo novo upodobitev. V nadaljevanju bomo zato veliko časa posvetili obratnemu problemu: dano upodobitev bomo kot v zadnjem zgledu skušali razstaviti na direktno vsoto čim bolj enostavnih podupodobitev.

## Tenzorski produkt

Naj ima grupa  $G$  upodobitvi  $\rho_1$  in  $\rho_2$  na prostorih  $V_1$  in  $V_2$ . Tedaj lahko tvorimo **tenzorski produkt** vektorskih prostorov  $V_1 \otimes V_2$ , ki je naravno opremljen z linearnim delovanjem

$$\rho_1 \otimes \rho_2: G \rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2), \quad g \mapsto (v_1 \otimes v_2 \mapsto \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2).$$

**Zgled.** Opazujemo simetrično grupo  $S_3$ . Ogledali smo si že njeno permutacijsko upodobitev na prostoru  $\mathbb{R}^3$ , ki smo jo razstavili na direktno vsoto trivialne upodobitve  $\mathbf{1}$  in dvorazsežne upodobitve  $\rho$ . Poleg teh dveh ima grupa  $S_3$  še eno zanimivo upodobitev, ki izračuna predznak dane permutacije, se pravi

$$\text{sgn}: S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*, \quad \sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma).$$

To je netrivialna enorazsežna upodobitev.

Tvorimo tenzorski produkt upodobitev  $\rho$  in  $\text{sgn}$ . Dobimo upodobitev na vektorskem prostoru  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^2$ , ki ga lahko naravno identificiramo s prostorom  $\mathbb{R}^2$ . V tem smislu je upodobitev  $\text{sgn} \otimes \rho$  izomorfna dvorazsežni upodobitvi

$$S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^2), \quad \sigma \mapsto (v \mapsto \text{sgn}(\sigma) \cdot \rho(\sigma) \cdot v).$$

**Domača naloga.** Dokaži, da sta upodobitvi  $\rho$  in  $\text{sgn} \otimes \rho$  izomorfni.

<sup>13</sup>Velja na primer  $(1\ 3\ 2) \cdot (e_1 - e_2) = e_3 - e_1 = -(e_1 - e_2) - (e_2 - e_3)$ .

Naj ima grupa  $G$  upodobitev na prostoru  $V$ . Tedaj lahko tvorimo **tenzorske potence**  $V^{\otimes n}$  za  $n \in \mathbb{N}_0$ . Vsaka od teh tvori upodobitev grupe  $G$ . Na prostoru  $V^{\otimes n}$  deluje simetrična grupa  $S_n$ , in sicer na dva načina. Prvi način izhaja iz permutacijske upodobitve grupe  $S_n$ , in sicer dobimo delovanje

$$\pi: S_n \rightarrow \text{GL}(V^{\otimes n}), \quad \sigma \mapsto (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}).$$

Drugi način delovanja grupe  $S_n$  na tenzorski potenci pa je  $\text{sgn} \otimes \pi$ , pri katerem delovanje  $\pi$  še utežimo s predznakom delujoče permutacije. Prostor koinvariant upodobitve  $\pi$  je

$$\text{Sym}^n(V) = \frac{V^{\otimes n}}{\langle v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \mid v_i \in V, \sigma \in S_n \rangle},$$

imenujemo ga **simetrična potenca** upodobitve  $G$  na  $V$ . Analogno prostor koinvariant upodobitve  $\text{sgn} \otimes \pi$  označimo z  $\wedge^n(V)$  in imenujemo **alternirajoča potenca**. Obe potenci sta seveda upodobitvi grupe  $G$ . Vse potence hkrati zajamemo z direktnima vsotama

$$\text{Sym}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \text{Sym}^n(V) \quad \text{in} \quad \wedge V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \wedge^n(V).$$

**Domača naloga.** Naj bo  $G$  grupa s kompleksno upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$  razsežnosti  $\deg(\rho) < \infty$ . Dokaži, da je upodobitev  $G$  na alternirajoči potenci  $\wedge^{\deg(\rho)} V$  izomorfna enorazsežni upodobitvi  $G \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $g \mapsto \det(\rho(g))$ .

## Dual

Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$  nad poljem  $F$ . Tvorimo lahko **dualen prostor**  $V^* = \text{hom}(V, F)$ , ki je naravno opremljen z linearnim delovanjem

$$\rho^*: G \rightarrow \text{GL}(V^*), \quad g \mapsto (\lambda \mapsto (v \mapsto \lambda(\rho(g^{-1}) \cdot v)))$$

za  $\lambda \in V^*$ ,  $v \in V$ . Na ta način dobimo **dualno upodobitev**  $\rho^*$  upodobitve  $\rho$ .

Za funkcional  $\lambda \in V^*$  in vektor  $v \in V$  včasih uporabimo oznako  $\langle \lambda, v \rangle$  za aplikacijo  $\lambda(v)$ . S to oznako lahko zapišemo definicijo dualne upodobitve kot

$$\langle \rho^*(g) \cdot \lambda, v \rangle = \langle \lambda, \rho(g^{-1}) \cdot v \rangle.$$

**Zgled.** Opazujmo grupo  $\mathbb{Z}$  in za parameter  $a \in \mathbb{C}$  njeno upodobitev

$$\chi_a: \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}), \quad x \mapsto e^{ax}.$$

Za dualno upodobitev  $\chi_a^*$ , funkcional  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  in vektor  $z \in \mathbb{C}$  velja

$$\langle \chi_a^*(x) \cdot \lambda, z \rangle = \langle \lambda, \chi_a(-x) \cdot z \rangle = \lambda(e^{-ax} \cdot z).$$

Funkcionalni v dualnem prostoru  $\mathbb{C}^*$  so skalarna množenja s kompleksnimi števili. Če funkcionalu  $\lambda$  ustreza število  $l \in \mathbb{C}$ , dobimo torej

$$\chi_a^*(x) \cdot l = e^{-ax} \cdot l.$$

Dualna upodobitev  $\chi_a^*$  je torej enorazsežna upodobitev, ki je izomorfna upodobitvi  $\chi_{-a}$ .

### Domača naloga.

- Naj bosta  $\rho_1, \rho_2$  upodobitvi grupe  $G$ . Dokaži, da je

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)^* \cong \rho_1^* \oplus \rho_2^* \quad \text{in} \quad (\rho_1 \otimes \rho_2)^* \cong \rho_1^* \otimes \rho_2^*.$$

- Naj bo  $\rho$  upodobitev grupe  $G$  z  $\deg(\rho) < \infty$ . Tedaj je  $(\rho^*)^* \cong \rho$ .

Naj bo zdaj  $G$  grupa z dvema upodobitvama  $\rho$  in  $\sigma$  na prostorih  $V$  in  $W$ . **Prostor linearnih preslikav**  $\text{hom}(V, W)$  je naravno opremljen z linearnim delovanjem

$$\text{hom}(\rho, \sigma): G \rightarrow \text{GL}(\text{hom}(V, W)), \quad g \mapsto (\Phi \mapsto (v \mapsto \sigma(g) \cdot \Phi \cdot \rho(g^{-1}) \cdot v)).$$

Invariante tega delovanja sestojijo iz linearnih preslikav, ki so invariantne glede na predpisano delovanje grupe  $G$ , se pravi ravno iz spletičen med  $\rho$  in  $\sigma$ . S simboli je torej  $\text{hom}(V, W)^G = \text{hom}_G(V, W)$ .

**Trditev.** Naj bo  $G$  grupa z upodobitvama  $\rho$  in  $\sigma$ . Predpostavimo, da je  $\deg(\sigma) < \infty$ . Tedaj je  $\text{hom}(\rho, \sigma) \cong \rho^* \otimes \sigma$ .

*Dokaz.* Naj bo  $\rho$  upodobitev na prostoru  $V$  in  $\sigma$  upodobitev na prostoru  $W$ . Izomorfizem med vektorskima prostoroma  $V^* \otimes W$  in  $\text{hom}(V, W)$  podaja linearna preslikava

$$V^* \otimes W \rightarrow \text{hom}(V, W), \quad \lambda \otimes w \mapsto (v \mapsto \lambda(v) \cdot w).$$

Ni težko preveriti, da je ta preslikava spletična. □

## Skalarji

Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$  nad poljem  $F$ . Naj bo  $E$  razširitev polja  $F$ . Tedaj je prostor  $E \otimes V$  naravno opremljen z linearnim delovanjem

$$E \otimes \rho: G \rightarrow \text{GL}(E \otimes V), \quad g \mapsto (e \otimes v \mapsto e \otimes \rho(g) \cdot v).$$

Ta postopek konstrukcije prostora  $E \otimes V$  imenujemo **razširitev skalarjev**. Dano upodobitev lahko razširimo do ugodnejših skalarjev<sup>14</sup>, lahko pa tudi dano upodobitev nad velikim poljem  $E$  gledamo kot razširitev skalarjev neke upodobitve nad preprostejšim poljem  $F$ .<sup>15</sup> V tem slednjem primeru rečemo, da je dana upodobitev **definirana nad poljem**  $F$ . Včasih nam uspe najti celo preprost *podkolobar* polja  $F$ , nad katerim je definirana dana upodobitev.

**Zgled.** Opazujmo grupo  $S_3$  in njeno permutacijsko upodobitev na realnem prostoru  $\mathbb{R}[\{1, 2, 3\}]$ . Poznamo že njeno dvorazsežno upodobitev  $\rho$  na podprostoru  $\langle e_1 - e_2, e_2 - e_3 \rangle$ , ki nima enorazsežnih podupodobitev. Ta je definirana z matrikami, ki imajo zgolj celoštevilске koeficiente. Upodobitev  $\rho$  je zato definirana nad *kolobarjem*  $\mathbb{Z}$ . To upodobitev lahko zato

<sup>14</sup>Na primer polja kompleksnih števil.

<sup>15</sup>Na primer  $E = \mathbb{C}$  in  $F = \mathbb{Q}$ .

projiciramo s homomorfizmom kolobarjev  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  za poljubno praštevilo  $p$  do upodobitve

$$S_3 \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1\ 2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ki je definirana nad *končnim* poljem  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Pri  $p = 3$  ima ta projicirana upodobitev enorazsežen invarianten podprostor  $\langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ . Projekcije nam lahko torej dano upodobitev dodatno razstavijo.

Kadar imamo opravka s konkretnim poljem  $F$ , lahko dano upodobitev modificiramo tudi z **avtomorfizmi polja**. Te si najlažje predstavljamo po izbiri baze vektorskega prostora. Če je  $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$ , dobimo iz dane upodobitve  $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_n(F)$  modificirano upodobitev

$$\rho^\sigma: G \rightarrow \mathrm{GL}_n(F), \quad g \mapsto \rho(g)^\sigma,$$

pri kateri vsak člen matrike  $\rho(g)$  preslikamo z avtomorfizmom  $\sigma$ .

**Zgled.** Naj bo  $G$  grupa s kompleksno upodobitvijo  $\rho$ . Kompleksno konjugiranje je avtomorfizem polja  $\mathbb{C}$ , zato lahko s konjugiranjem členov matrik tvorimo **konjugirano upodobitev**  $\bar{\rho}$ .

## Restrikcija

Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ . Kadar je na voljo še ena grupa  $H$  s homomorfizmom  $\phi: H \rightarrow G$ , lahko upodobitev  $\rho$  sklopimo s  $\phi$  in dobimo upodobitev  $\rho \circ \phi$  grupe  $H$  na prostoru  $V$ . Temu postopku pridobivanja upodobitev grupe  $H$  iz upodobitev grupe  $G$  pravimo **restrikcija**, pri tem pa novo upodobitev  $\rho \circ \phi$  označimo kot  $\mathrm{Res}_H^G(\rho)$ . Predstavljamo si, da smo upodobitev  $\rho$  *potegnili nazaj vzdolž* homomorfizma  $\phi$ . Restrikcija je funktor iz kategorije  $\mathrm{Rep}_G$  v kategorijo  $\mathrm{Rep}_H$ .

**Zgled.** Naj bo  $G$  grupa s podgrupo edinko  $N$ . Tvorimo kvocientni homomorfizem  $\phi: G \rightarrow G/N$ . Vsaki upodobitvi grupe  $G/N$  lahko z restrikcijo priredimo upodobitev grupe  $G$ . Vsaka taka pridobljena upodobitev grupe  $G$  vsebuje podgrupo  $N$  v svojem jedru. Na ta način dobimo bijektivno korespondenco med upodobitvami grupe  $G/N$  in upodobitvami grupe  $G$ , ki so trivialne na  $N$ .

Običajno ni res, da je vsaka upodobitev grupe  $G$  trivialna na  $N$ , se pa to lahko zgodi v kakšnih posebnih primerih. Na primer, *enorazsežne* upodobitve grupe  $G$  nad poljem  $F$  so homomorfizmi iz  $G$  v  $F^*$ , kar ravno ustreza homomorfizmu iz abelove grupe  $G/[G, G]$  v  $F^*$ . Vsaka enorazsežna upodobitev grupe  $G$  je torej trivialna na  $[G, G]$ .

Za konkreten primer si oglejmo simetrično grupo  $S_n$ . Njene kompleksne enorazsežne upodobitve ustrezajo homomorfizmu  $S_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Ker je  $[S_n, S_n] = A_n$ , opazujemo torej homomorfizme  $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Na voljo sta le dva taka homomorfizma: trivialen in netrivialen (ki preslika generator grupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  v  $-1 \in \mathbb{C}^*$ ). Prvi ustreza trivialni upodobitvi  $\mathbf{1}$ , drugi pa ustreza predznačni upodobitvi  $\mathrm{sgn}$ .

Kadar imamo na voljo tri grupe, povezane s homomorfizmoma  $\phi_2: H_2 \rightarrow H_1$  in  $\phi_1: H_1 \rightarrow G$ , lahko restrikcijo izvedemo dvakrat zaporedoma. Upodobitvi  $\rho$  v  $\mathrm{Rep}_G$  tako priredimo upodobitev  $\mathrm{Res}_{H_2}^{H_1}(\mathrm{Res}_{H_1}^G(\rho))$  v  $\mathrm{Rep}_{H_2}$ . Od grupe  $H_2$  do  $G$  imamo neposredno povezavo prek homomorfizma  $\phi_1 \circ \phi_2$ , s čimer dobimo upodobitev  $\mathrm{Res}_{H_2}^G(\rho)$ . Ni težko preveriti, da sta dobljeni upodobitvi izomorfni. Tej lastnosti restrikcije pravimo **tranzitivnost**.



## Indukcija

Naj bo kot zgoraj  $G$  grupa in  $H$  še ena grupa s homomorfizmom  $\phi: H \rightarrow G$ . **Indukcija** je postopek, ki s pomočjo homomorfizma  $\phi$  upodobitvi  $\rho$  grupe  $H$  priredi upodobitev grupe  $G$ . Indukcija torej deluje ravno v obratno smer kot restrikcija in nam omogoča, da upodobitev  $\rho$  *potisnemo naprej vzdolž* homomorfizma  $\phi$ . Ta postopek je nekoliko bolj zapleten kot restrikcija.

Začnimo z upodobitvijo  $\rho: H \rightarrow \text{GL}(V)$ . Konstruirali bomo prostor, na katerem deluje grupa  $G$ . Odskočna deska za to bo regularna upodobitev grupe  $G$ , katere vektorski prostor je prostor funkcij  $\text{hom}(G, V)$ . Ta prostor razširimo s prostorom  $V$  do prostora funkcij

$$\text{hom}(G, V) = \{f \mid f: G \rightarrow V\},$$

na katerem linearno deluje grupa  $G$  z analogom regularne upodobitve, in sicer kot

$$g \cdot f = (x \mapsto f(xg))$$

za  $g \in G$ ,  $f \in \text{hom}(G, V)$ . Po drugi strani na tej množici deluje tudi grupa  $H$ , in sicer na dva načina: prvič prek homomorfizma  $\phi$  in pravkar opisanega delovanja grupe  $G$ , drugič pa prek svojega delovanja  $\rho$  na prostoru  $V$ . Ko ti dve delovanji združimo, dobimo delovanje grupe  $H$  na prostoru funkcij  $\text{hom}(G, V)$  s predpisom

$$h \cdot f = (x \mapsto \rho(h) \cdot f(\phi(h^{-1}) \cdot x))$$

za  $h \in H$ ,  $f \in \text{hom}(G, V)$ .<sup>16</sup> Opazujemo invariantni podprostor

$$\text{hom}(G, V)^H = \{f \in \text{hom}(G, V) \mid \forall h \in H, x \in G. \rho(h) \cdot f(x) = f(\phi(h) \cdot x)\}.$$

Ker grupa  $G$  deluje na  $\text{hom}(G, V)$  prek množenja z *desne*, pogoj pripadnosti invariantam  $\text{hom}(G, V)^H$  pa je izražen prek množenja z *leve*, je podprostor  $\text{hom}(G, V)^H$  avtomatično  $G$ -invarianten. S tem smo dobili upodobitev grupe  $G$  na prostoru  $\text{hom}(G, V)^H$ . To je zelena **inducirana upodobitev**. Zanj uporabimo oznako  $\text{Ind}_H^G(\rho)$ .

**Zgled.** Naj bo  $G$  grupa z vložitvijo  $\phi: 1 \rightarrow G$  trivialne podgrupe. Vsaka upodobitev trivialne grupe nad poljem  $F$  je trivialna. Iz enorazsežne trivialne upodobitve **1** dobimo prostor funkcij  $\text{hom}(G, F)$ , na katerem grupa  $G$  deluje z regularno upodobitvijo. Inducirana upodobitev je v tem primeru torej kar regularna, se pravi  $\text{Ind}_1^G(\mathbf{1}) = \rho_{\text{hom}}$ .

Inducirano upodobitev  $\text{Ind}_H^G(\rho) = \text{hom}(G, V)^H$  smo konstruirali z invariantami grupe  $H$ . To pomeni, da vektorji v tem prostoru niso poljubne funkcije v  $\text{hom}(G, V)$ , temveč zadoščajo določenim restriktivnim pogojem. Te funkcije so določene z vrednostmi, ki jih zavzamejo na predstavnikih desnih odsekov  $\text{im } \phi \backslash G$ ,<sup>17</sup> in te vrednosti pripadajo podprostoru  $V^{\ker \phi}$ .<sup>18</sup>

<sup>16</sup>Delovanje  $H$  na  $\text{hom}(G, V)$  je konstruirano analogno delovanju grupe na prostoru linearnih preslikav.

<sup>17</sup>Če je  $R$  množica predstavnikov desnih odsekov  $\text{im } \phi \backslash G$  in če že poznamo vrednosti  $f \in \text{hom}(G, V)$  na množici  $R$ , potem lahko vsako drugo vrednost  $f$  izračunamo kot  $f(x \cdot r) = \rho(y) \cdot f(r)$  za  $x = \phi(y) \in \text{im } \phi$ .

<sup>18</sup>Če je  $f \in \text{hom}(G, V)^H$ , potem pogoj  $H$ -invariantnosti uporabimo z elementi  $h \in \ker \phi$  in dobimo  $\rho(h) \cdot f(x) = f(x)$ , torej je  $f \in V^{\ker \phi}$ .



**Zgled.** Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  in naj bo  $\phi = \text{id}_G$ . Tedaj je vsaka funkcija  $f \in \text{hom}(G, V)^G$  določena že z vrednostjo  $f(1)$ . Dodatnih restrikcij za to vrednost ni, zato dobimo izomorfizem vektorskih prostorov

$$\text{hom}(G, V)^G \rightarrow V, \quad f \mapsto f(1),$$

ki je spletična glede na regularno delovanje  $G$  na  $\text{hom}(G, V)$ . S tem imamo torej izomorfizem upodobitev  $\text{Ind}_G^G(\rho) \cong \rho$ .

**Domača naloga.** Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$  in naj bo  $\phi: G \rightarrow G/N$  kvocientna projekcija za neko podgrupo edinko  $N$  v  $G$ . Dokaži, da je  $\text{Ind}_G^{G/N}(\rho)$  izomorfna upodobitvi  $G/N$  na prostoru  $V^N$ , ki izhaja iz upodobitve  $\rho$ .

Najpomembnejši primer indukcije, čeravno ne tudi najbolj preprost, je **indukcija iz podgrupe končnega indeksa**. Naj bo  $G$  grupa s podgrupo  $H$  in naj bo  $\phi$  vložitev  $H$  v  $G$ . Predpostavimo, da je  $|G:H| < \infty$ . Naj bo  $\rho$  upodobitev grupe  $G$  na prostoru  $V$ . Premisljmo, kako izgleda upodobitev  $\text{Ind}_H^G(\rho)$ .

Naj bo  $R$  neka izbrana množica predstavnikov desnih odsekov  $H$  v  $G$ . Vsaka funkcija  $f \in \text{hom}(G, V)^H$  je določena z vrednostmi  $f(r)$  za  $r \in R$  in dodatnih restrikcij za te vrednosti ni, zato dobimo izomorfizem vektorskih prostorov<sup>19</sup>

$$\Phi: \text{hom}(G, V)^H \rightarrow \text{hom}(R, V), \quad f \mapsto (r \mapsto f(r)).$$

Da dobimo spletično, moramo posplošitev regularnega delovanja  $G$  na  $\text{hom}(G, V)$  prenesti prek linearne izomorfizma  $\Phi$  na desno stran. V ta namen naj bo  $v \in V$  in  $f \in \text{hom}(G, V)^H$  z lastnostjo  $f(r_0) = v$  in  $f(r) = 0$  za  $r \in R \setminus \{r_0\}$ . Za vsak  $g \in G$  mora tako veljati

$$g \cdot \left( r \mapsto \begin{cases} v & r = r_0 \\ 0 & r \neq r_0 \end{cases} \right) = \Phi(g \cdot f) = \Phi(x \mapsto f(xg)).$$

Za  $x \in R$  z lastnostjo  $xg \in Hr_0$ , se pravi  $x = hr_0g^{-1}$  za nek  $h \in H$ , velja  $f(xg) = f(hr_0) = \rho(h) \cdot v$ . Seveda je  $|R \cap Hr_0g^{-1}| = 1$ , torej obstaja natanko en tak  $x$ . Za  $x \in R$  z lastnostjo  $xg \notin Hr_0$  pa velja  $f(xg) = 0$ . S tem je

$$g \cdot \left( r \mapsto \begin{cases} v & r = r_0 \\ 0 & r \neq r_0 \end{cases} \right) = \left( r \mapsto \begin{cases} \rho(h) \cdot v & r = hr_0g^{-1} \text{ za nek } h \in H \\ 0 & r \notin Hr_0g^{-1} \end{cases} \right).$$

Da bo preslikava  $\Phi$  spletična, moramo na  $\text{hom}(R, V)$  torej uvesti tako delovanje grupe  $G$ , ki dan vektor  $v$  pri vnosu  $r_0 \in R$  preslika tako, da najprej izračuna odsek elementa  $r_0g^{-1}$  po  $H$ , ta element zapiše kot  $r_0g^{-1} = h^{-1}r$  za  $h \in H$ ,  $r \in R$ , nato pa na vektor  $v$  deluje z  $\rho(h)$  in ga hkrati prestavi k vnosu  $r$ .

Opisan postopek si lahko nekoliko lažje predstavljamo tako, da množico  $\text{hom}(R, V)$  identificiramo z direktno vsoto  $\bigoplus_{r \in R} Vr$ , kjer je  $Vr$  kopija vektorskega prostora  $V$  pri komponenti  $r$ . Element  $g \in G$  deluje na vektorju  $vr_0 \in Vr_0$  kot  $g^{-1}$  z desne. V teh domačih oznakah izračunamo

$$g \cdot vr_0 = vr_0g^{-1} = vh^{-1}r = (h \cdot v)r = (\rho(h) \cdot v)r,$$

<sup>19</sup>Množico funkcij  $\text{hom}(R, V)$  lahko vidimo kot direktno vsoto prostorov  $V$ , indeksirano z množico  $R$ .

kar ravno ustreza bolj zakompliciranemu zapisu zgoraj.

Poseben primer opisane indukcije dobimo z enorazsežnimi upodobitvami grupe  $H$ . Vsak homomorfizem  $\rho: H \rightarrow F^*$  porodi prostor  $\text{hom}(G, F)^H$  razsežnosti  $|G: H|$ , ki je podprostor prostora funkcij  $\text{hom}(G, F)$  in na katerem torej grupa  $G$  deluje z regularno upodobitvjo. Inducirana upodobitev je v tem primeru podupodobitev regularne upodobitve  $\rho_{\text{hom}}$ . Na ta način lahko dobimo mnogo različnih upodobitev grupe  $G$ .

**Zgled.** Opazujmo grupo  $S_n$  in njeno podgrupo  $A_n$  indeksa 2. Za  $n \geq 5$  je grupa  $A_n$  enostavna, zato je  $A_n = [A_n, A_n]$  in ni netrivialnih enorazsežnih upodobitev. Oglejmo si inducirano upodobitev  $\text{Ind}_{A_n}^{S_n}(\mathbf{1})$ . A priori vemo, da je to dvorazsežna upodobitev. Za množico predstavnikov odsekov vzamemo  $R = \{(), (1\ 2)\}$ . V domačih oznakah je vektorski prostor upodobitve enak  $F() \oplus F(1\ 2)$ , na katerem deluje grupa  $S_n$  s predpisom

$$g \cdot x\sigma = x\sigma g^{-1} = \begin{cases} x\sigma & g \in A_n \\ x((1\ 2)\sigma) & g \notin A_n \end{cases}$$

za  $g \in S_n$ ,  $x \in F$ ,  $\sigma \in R$ . To delovanje lahko zapišemo še enostavneje. Vektorski prostor identificiramo z dvorazsežnim prostorom  $F^2$ , delovanje pa opišemo kot

$$g \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & g \in A_n \\ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} & g \notin A_n \end{cases}$$

za  $x, y \in F$ ,  $g \in S_n$ . Alternirajoča grupa  $A_n$  je v jedru te upodobitve, ki zato izhaja iz kvocienta  $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Opisana upodobitev je natanko permutacijska upodobitev grupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  na prostoru  $F[\{1, 2\}]$ , inducirana upodobitev pa je ravno restrikcija te upodobitve vzdolž kvocientne projekcije  $S_n \rightarrow S_n/A_n$ . Inducirano upodobitev lahko zapišemo kot vsoto dveh enorazsežnih podupodobitev. Prva je podupodobitev z diagonalnim prostorom  $\{(x, x) \mid x \in F\} \leq F^2$ , ta je izomorfna trivialni upodobitvi  $\mathbf{1}$ . Druga pa je podupodobitev z antidiagonalnim prostorom  $\{(x, -x) \mid x \in F\} \leq F^2$ . Ta ni trivialna, saj element  $(1\ 2)$  deluje na  $(1, -1)$  kot množenje z  $-1 \in F$ . Ta podupodobitev je zato izomorfna predznačni upodobitvi  $\text{sgn}$ . Nazadnje je torej  $\text{Ind}_{A_n}^{S_n}(\mathbf{1}) \cong \mathbf{1} \oplus \text{sgn}$ .

Naj bosta  $G, H$  grupi s homomorfizmom  $\phi: H \rightarrow G$ . Ni težko preveriti, da indukcija naravno presene spletično med dvema upodobitvama grupe  $H$  v spletično med induciranimi upodobitvama. Indukcija je torej funktor iz kategorije  $\text{Rep}_H$  v kategorijo  $\text{Rep}_G$ .

Kadar imamo na voljo tri grupe, povezane s homomorfizmoma  $\phi_2: H_2 \rightarrow H_1$  in  $\phi_1: H_1 \rightarrow G$ , lahko indukcijo izvedemo dvakrat zaporedoma. Upodobitvi  $\rho \in \text{Rep}_{H_2}$  tako priredimo upodobitev  $\text{Ind}_{H_1}^G(\text{Ind}_{H_2}^{H_1}(\rho))$  v  $\text{Rep}_G$ . Od grupe  $H_2$  do  $G$  imamo neposredno povezavo prek homomorfizma  $\phi_1 \circ \phi_2$ , s čimer dobimo upodobitev  $\text{Ind}_{H_2}^G(\rho)$ . Ni težko preveriti, da sta dobljeni upodobitvi izomorfni. Tej lastnosti indukcije pravimo **tranzitivnost**.

**Domača naloga.** Dokaži tranzitivnost indukcije.

S tranzitivnostjo indukcije lahko vsako indukcijo vzdolž homomorfizma  $\phi: H \rightarrow G$  razdelimo na tri korake: najprej induciramo vzdolž kvocientne projekcije  $H \rightarrow H/\ker \phi$ , nato vzdolž izomorfizma  $H/\ker \phi \rightarrow \text{im } \phi$

in nazadnje vzdolž vložitve  $\text{im } \phi \rightarrow G$ . Vsako od teh posameznih indukcij razumemo precej dobro in zato lahko to znanje uporabimo pri razumevanju indukcije vzdolž  $\phi$ . Na primer, iz povedanega in razmislekov o preprostejših indukcijah, ki smo jih že naredili, sledi, da je razsežnost inducirane upodobitve  $\rho$  grupe  $H$  na prostoru  $V$  enaka

$$\deg(\text{Ind}_H^G(\rho)) = |G : \text{im } \phi| \cdot \dim(V^{\ker \phi}).$$

## Adjunkcija restrikcije in indukcije

Indukcija in restrikcija vsekakor nista inverzna funktorja. Na primer, če je  $H \leq G$  in  $\phi$  vložitev, potem za upodobitev  $\rho$  v  $\text{Rep}_G$  velja  $\deg(\text{Res}_H^G(\rho)) = \deg(\rho)$  in zato  $\deg(\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(\rho))) = |G : H| \cdot \deg(\rho)$ , kar je lahko mnogo večje od  $\deg(\rho)$ . Sta pa funktorja restrikcije in indukcije vendarle tesno povezana. Tvorita namreč **adjungiran par** funktorjev.<sup>20</sup>

**Trditev.** Naj bosta  $G, H$  grupi s homomorfizmom  $\phi: H \rightarrow G$ . Za vsako upodobitev  $\rho$  v  $\text{Rep}_G$  in upodobitev  $\sigma$  v  $\text{Rep}_H$  velja

$$\text{hom}_H(\text{Res}_H^G(\rho), \sigma) \cong \text{hom}_G(\rho, \text{Ind}_H^G(\sigma)).$$

*Dokaz.* Naj bo  $\rho$  upodobitev na prostoru  $V$  in  $\sigma$  upodobitev na prostoru  $W$ . Naj bo  $\Phi \in \text{hom}_H(\text{Res}_H^G(\rho), \sigma) = \text{hom}_H(V, W)$ . Sestavimo pripadajočo spletično  $\Psi \in \text{hom}_G(\rho, \text{Ind}_H^G(\sigma)) = \text{hom}_G(V, \text{hom}(G, W)^H)$ . Za vektor  $v \in V$  definirajmo

$$\Psi(v) = (x \mapsto \Phi(\rho(x) \cdot v)) \in \text{hom}(G, W).$$

Ni težko (je pa sitno) preveriti, da opisano prirejanje vzpostavi izomorfizem med prostoroma spletičen  $\text{hom}_H(V, W)$  in  $\text{hom}_G(V, \text{hom}(G, W)^H)$ .  $\square$

**Zgled.** Naj bo  $G$  grupa s podgrupo  $H$  končnega indeksa. Grupa  $G$  deluje na množici desnih odsekov  $H \backslash G$  s homomorfizmom

$$G \rightarrow \text{Sym}(H \backslash G), \quad g \mapsto (Hx \mapsto Hxg^{-1}).$$

Iz tega delovanja izhaja permutacijska upodobitev  $\pi$  grupe  $G$  na prostoru  $F[H \backslash G]$ . Po konstrukciji je  $\pi \cong \text{Ind}_H^G(\mathbf{1})$ . Iz adjunkcije med restrikcijo in indukcijo za trivialni upodobitvi grup  $G$  in  $H$  od tod izpeljemo izomorfizem

$$\text{hom}_H(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \cong \text{hom}_G(\mathbf{1}, \pi) \cong F[H \backslash G]^G.$$

Prostor  $\text{hom}_H(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \text{hom}(F, F)$  sestoji zgolj iz skalarnih množenj in je torej enorazsežen. Zato je enorazsežen tudi prostor invariant  $F[H \backslash G]^G$ . Vektor, ki ga razpenja, lahko dobimo kot sliko  $\text{id}_F \in \text{hom}_H(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ . Tej spletični po adjunkciji ustreza spletična

$$\Psi: F \rightarrow F[H \backslash G], \quad 1 \mapsto \sum_{Hx \in H \backslash G} e_{Hx},$$

od koder sledi

$$F[H \backslash G]^G = \left\langle \sum_{Hx \in H \backslash G} e_{Hx} \right\rangle.$$

<sup>20</sup>V nadaljevanju bomo spoznali presenetljivo uporabnost tega navidez naključnega dejstva.

**Domača naloga.** Naj bosta  $G, H$  grupi s homomorfizmom  $\phi: H \rightarrow G$ . Za vsako upodobitev  $\rho$  v  $\text{Rep}_G$  in upodobitev  $\sigma$  v  $\text{Rep}_H$  velja

$$\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(\rho) \otimes \sigma) \cong \rho \otimes \text{Ind}_H^G(\sigma).$$

**Domača naloga.** Premisli, kako se restrikcija in indukcija ujameta z dualom, direktno vsoto in tenzorskim produktom.

## Poglavje 2

# Upodobitev pod mikroskopom

V tem poglavju bomo približali upodobitev dane grupe in se ji tesno približali, kot da bi jo pogledali pod mikroskopom. Pri tem bomo najprej uzrli osnovne kose, iz katerih je sestavljena upodobitev. Ti osnovni kosi ustrezajo celicam, ki jih vidimo pod mikroskopom. Za tem se bomo približali še sestavi teh osnovnih kosov: vsak je dan s homomorfizmom v matrike, zato bomo raziskali koeficiente te matrike. Ti ustrezajo organelom, ki jih v celici vidimo pod mikroskopom. Nazadnje bomo premislili, da so te upodobitvene celice dovolj diferencirane med sabo, da za njihovo identifikacijo zadošča poznavanje le nekaterih njihovih organelov.

### 2.1 Razstavljanje upodobitve

Pogosto nas zanima, ali lahko dano upodobitev  $\rho$  grupe  $G$  na prostoru  $V$  zapišemo kot direktno vsoto nekih podupodobitev in na ta način upodobitev  $\rho$  razstavimo na preprostejše upodobitve, podobno kot razstavimo števila na manjše faktorje.

#### Nerazcepnost

Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V \neq 0$ . Kadar *ne* obstaja noben  $G$ -invarianten podprostor prostora  $V$  (razen prostorov  $0$  in  $V$ ), tedaj rečemo, da je upodobitev  $\rho$  **nerazcepna**.<sup>1</sup> V tem primeru upodobitve seveda ne moremo razstaviti na enostavnejše v smislu direktne vsote.

**Zgled.** Opazujmo permutacijsko upodobitev simetrične grupe  $S_3$  na prostoru  $\mathbb{R}[\{1, 2, 3\}] = \mathbb{R}^3$ . Premislili smo že, da je ta upodobitev direktna vsota enorazsežne podupodobitve  $1$  in dvorazsežne podupodobitve  $\rho$ , pri čemer slednja nima nobene enorazsežne podupodobitve. S tem je permutacijska upodobitev razstavljena kot direktna vsota dveh nerazcepnih upodobitev.

Preverimo, da so nerazcepne upodobitve dane grupe med sabo *nepri-merljive*, tudi če so enake razsežnosti. Zatorej si jih lahko predstavljamo kot neodvisne osnovne kose kategorije upodobitev dane grupe.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Rečemo tudi, da je  $V$  **enostavna** upodobitev. Te terminologija izhaja iz alternativne obravnave upodobitev kot *modulov nad grupnimi algebrami*.

<sup>2</sup>Po analogiji s faktorizacijo števil si nerazcepne upodobitve lahko predstavljamo kot praštevila.

**Lema** (Schurova lema). Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  in nerazcepno upodobitvijo  $\pi$ . Tedaj je vsaka spletična v  $\text{hom}_G(\pi, \rho)$  bodisi injektivna bodisi ničelna in vsaka spletična v  $\text{hom}_G(\rho, \pi)$  je bodisi surjektivna bodisi ničelna. V posebnem je vsaka spletična med dvema nerazcepnima upodobitvama grupe  $G$  bodisi izomorfizem bodisi ničelna.

*Dokaz.* Naj bo  $\Phi \in \text{hom}_G(\pi, \rho)$ . Tedaj je  $\ker \Phi$  podupodobitev  $\pi$ , zato je po nerazcepčnosti bodisi  $\ker \Phi = 0$  bodisi  $\Phi = 0$ . Prvi primer ustreza možnosti, da je  $\Phi$  injektivna, v drugem primeru pa je  $\Phi$  ničelna. Soroden razmislek dokaže trditev o spletičnih v  $\text{hom}_G(\rho, \pi)$ .  $\square$

Nad algebraično zaprtimi polji lahko to neprimerljivost raztegnemo do ene same upodobitve: osnovni kosi nimajo netrivialnih simetrij.

**Posledica.** Naj bo  $G$  grupa z nerazcepno upodobitvijo  $\pi$  končne razsežnosti nad algebraično zaprtim poljem. Tedaj je  $\dim \text{hom}_G(\pi, \pi) = 1$ . Povedano še drugače: množica  $\text{hom}_G(\pi, \pi)$  sestoji le iz skalarnih večkratnikov identitete.

*Dokaz.* Naj bo  $0 \neq \Phi \in \text{hom}_G(\pi, \pi)$ . Ker je polje algebraično zaprto, ima linearna preslikava  $\Phi$  vsaj kakšno lastno vrednost, recimo  $\lambda$ . Preslikava  $\Phi - \lambda \cdot \text{id} \in \text{hom}_G(\pi, \pi)$  zato ni injektivna, s čimer mora biti po Schurovi lemi ničelna, se pravi  $\Phi = \lambda \cdot \text{id}$ .  $\square$

**Zgled.** Naj bo  $G$  grupa z nerazcepno upodobitvijo  $\pi$  končne razsežnosti nad poljem kompleksnih števil. Spletične  $\text{hom}_G(\pi, \pi) = \text{hom}(\pi, \pi)^G$  so endomorfizmi vektorskega prostora, ki so  $G$ -invariantni, se pravi komutirajo z delovanjem grupe  $G$ . Zglede takih endomorfizmov lahko dobimo iz delovanj centralnih elementov grupe  $G$ ; za vsak  $z \in Z(G)$  je  $\pi(z) \in \text{hom}_G(\pi, \pi)$ . Po Schurovi lemi je zato  $\pi(z) = \omega(z) \cdot \text{id}$  za nek skalar  $\omega(z)$ . Ker je  $\pi$  homomorfizem, je  $\omega: Z(G) \rightarrow \mathbb{C}^*$  enorazsežna upodobitev centra grupe  $G$ . Tej upodobitvi rečemo **centralni karakter** upodobitve  $\pi$ .

Še posebej zanimiv je primer, ko je  $G$  abelova grupa. Takrat za vsako nerazcepno upodobitev  $\pi$  končne razsežnosti nad poljem  $\mathbb{C}$  velja  $\pi(g) = \omega(g) \cdot \text{id}$  za vsak  $g \in G$ . Vsak enorazsežen podprostor je zato avtomatično podupodobitev. Ker je  $\pi$  nerazcepna, od tod sklepamo  $\deg(\pi) = 1$  in s tem  $\pi = \omega$ . Upodobitev  $\pi$  je tako enorazsežna.

**Domača naloga.** Podaj konkreten primer abelove grupe in njene nerazcepne upodobitve razsežnosti  $> 1$  nad poljem  $\mathbb{Q}$ .

## Komplementarna podupodobitev

Predpostavimo zdaj, da ima dana upodobitev  $\rho$  grupe  $G$  na prostoru  $V$  neko podupodobitev  $\tilde{\rho}$  na podprostoru  $W \leq V$ . Seveda lahko vselej najdemo vektorski prostor  $U \leq V$ , za katerega je  $V = U \oplus W$ , vsekakor pa ni jasno, če lahko najdemo tak podprostor  $U$ , ki je celo  $G$ -invarianten. Kadar je temu tako, rečemo, da smo našli **komplementarno podupodobitev** podupodobitve  $\tilde{\rho}$ .<sup>3</sup> Ni vsaka podupodobitev komplementirana.

<sup>3</sup>Če komplementarna podupodobitev obstaja, potem je enolično določena (do izomorfizma upodobitev), saj je izomorfna kvocientu  $\rho/\tilde{\rho}$ .

**Zgled.** Naj grupa  $\mathbb{R}$  deluje na realnem prostoru  $\mathbb{R}^2$  s homomorfizmom

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oglejmo si enorazsežne podupodobitve. Premislili smo že, da te ustrezajo skupnim lastnim vektorjem vseh preslikav  $\rho(x)$  za  $x \in \mathbb{R}$ . Pri  $x = 1$  imamo linearno preslikavo  $\rho(1)$  z enim samim lastnim vektorjem, in sicer  $e_1 \in \mathbb{R}^2$ . Hkrati je  $e_1$  lastni vektor vseh preslikav  $\rho(x)$  za  $x \in \mathbb{R}$ . Torej ima  $\rho$  *eno samo* enorazsežno podupodobitev, in sicer je to  $\mathbb{R} \cdot e_1 \leq \mathbb{R}^2$ . Ta vektorski podprostor ima mnogo komplementov v  $\mathbb{R}^2$ , noben od teh pa ni hkrati enorazsežna podupodobitev  $\rho$ .

Ni težko preveriti, da obstoj komplementirane podupodobitve vselej izhaja iz projekcijskih<sup>4</sup> spletičen.

**Trditev.** Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$  in naj bo  $\tilde{\rho}$  njena podupodobitev na prostoru  $W \leq V$ . Tedaj ima  $\tilde{\rho}$  komplementirano podupodobitev, če in samo če obstaja spletična  $\Phi \in \mathrm{hom}_G(V, V)$ , ki je projekcija na  $W$ . V tem primeru je  $\ker \Phi$  komplementirana upodobitev.

## Polenostavnost

Vrnimo se k začetni ideji o razstavljanju dane upodobitve. Kadar lahko dano upodobitev  $\rho$  zapišemo kot direktno vsoto *nerazcepnih* upodobitev  $\bigoplus_{i \in I} \rho_i$ , tedaj rečemo, da je  $\rho$  **polenostavna** upodobitev. Če so pri tem vse podupodobitve  $\rho_i$  izomorfne med sabo, upodobitev  $\rho$  imenujemo **izotipična** upodobitev.

**Zgled.**

- Permutacijska upodobitev grupe  $S_3$  na  $\mathbb{R}^3$  je polenostavna.
- Regularna upodobitev ciklične grupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  nad  $\mathbb{C}$  je polenostavna.

Vseh upodobitev žal ne moremo razstaviti na direktno vsoto nerazcepnih.<sup>5</sup> Polenostavnost dane upodobitve je namreč tesno povezana z obstojem komplementiranih podupodobitev.

**Trditev.** Upodobitev grupe  $G$  je polenostavna, če in samo če ima vsaka njena podupodobitev komplementirano podupodobitev.

*Dokaz.* ( $\Rightarrow$ ): Naj bo najprej  $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  polenostavna upodobitev, pri kateri je  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  in upodobitve  $G$  na podprostorih  $V_i$  so nerazcepne. Naj bo  $W \leq V$  poljuben  $G$ -invarianten podprostor. Po Zornovi lemi obstaja maksimalen  $G$ -invarianten podprostor  $U \leq V$  z lastnostjo  $U \cap W = 0$ . Izberimo poljuben  $i \in I$ . Presek  $(U \oplus W) \cap V_i$  je  $G$ -invarianten podprostor prostora  $V_i$ , zato je po nerazcepnosti bodisi trivialen bodisi enak  $V_i$ . Če bi bil trivialen, bi lahko  $U$  povečali do prostora  $U \oplus V_i$ , kar je v nasprotju z maksimalnostjo izbire  $U$ . Zatorej je  $(U \oplus W) \cap V_i = V_i$  in tako  $(U \oplus W) \geq V_i$ .

<sup>4</sup>Linearna preslikava  $A: X \rightarrow X$  je projekcija na podprostor  $Y \leq X$ , če je  $A^2 = A$  in  $\mathrm{im} A = Y$ .

<sup>5</sup>V nadaljevanju bomo pokazali, da so upodobitve *končnih* grup nad poljem karakteristike 0 vselej poenostavne.



Ker je bil  $i$  poljuben, od tod sledi  $U \oplus W = V$ . Podupodobitev  $W$  ima torej komplementirano podupodobitev  $U$ . ✓

( $\Leftarrow$ ): Naj bo  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  upodobitev, v kateri je vsaka podupodobitev komplementirana. Dokazati želimo, da je  $\rho$  polenostavna. Uporabili bomo naslednjo pomožno trditev, ki je ni težko preveriti.

**Domača naloga.** Naj bo  $\rho$  upodobitev, v kateri je vsaka podupodobitev komplementirana. Tedaj ima  $\rho$  nerazcepno podupodobitev.

Naj bo  $W$  vsota vseh  $G$ -invariantnih podprostorov v  $V$ , ki so nerazcepne upodobitve, se pravi  $W = \sum_{i \in I} V_i$ , a ta vsota ni nujno direktna. Po pomožni trditvi je  $W \neq 0$ . Po predpostavki je  $W$  komplementirana z  $G$ -invariantnim podprostorom  $U$ . Po pomožni trditvi ima tudi  $U$  nerazcepno podupodobitev, zato je ta vsebovana v  $W$ , kar implicira  $W = V$ . Dokažimo zdaj še, da je  $W$  direktna vsota podprostorov  $V_i$ . V ta namen naj bo  $J$  maksimalna podmnožica indeksne množice  $I$ , za katero je  $\sum_{j \in J} V_j$  direktna vsota. Taka podmnožica obstaja po Zornovi lemi. Označimo  $\tilde{V} = \bigoplus_{j \in J} V_j$ . Če velja  $\tilde{V} \neq V$ , potem mora za nek  $i \in I \setminus J$  po nerazcepnosti veljati  $V_i \cap \tilde{V}$ , kar pa je v nasprotju z maksimalnostjo množice  $J$ . Tako je res  $\tilde{V} = V$  in upodobitev  $V$  je polenostavna. ✓

**Zgled.** Eničnozgorjetrikotna upodobitev grupe  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}^2$  ni nerazcepna, hkrati pa njena podupodobitev  $\mathbb{R} \cdot e_1 \cong \mathbb{1}$  ni komplementirana. Ta upodobitev zato ni polenostavna.

Z uporabo zadnjega kriterija lahko dokažemo, da je polenostavnost zaprta za osnovne konstrukcije z upodobitvami.

**Posledica.** Podupodobitve, kvocienti in direktne vsote polenostavnih upodobitev dane grupe so polenostavne.

*Dokaz.* Preverimo le zaprtost za podupodobitve. Naj bo  $\rho$  polenostavna upodobitev grupe  $G$  na prostoru  $V$  in naj bo  $W \leq V$  podupodobitev. Naj bo  $U \leq W$  poljubna podupodobitev upodobitve na  $W$ . Po polenostavnosti obstaja komplementirana podupodobitev  $\tilde{U} \leq V$  upodobitve  $U \leq V$ . Tedaj je  $\tilde{U} \cap W$  podupodobitev, ki je komplementirana podupodobitvi  $U$  v  $W$ . □

Nazadnje lahko s pomočjo projekcijskih spletičen naredimo še en korak naprej pri razumevanju simetrij upodobitev. Premislili smo že, da so osnovni kosi brez netrivialnih simetrij. V primeru polenostavnih upodobitev drži tudi obratno.

**Posledica.** Naj bo  $G$  grupa s polenostavno upodobitvijo  $\rho$  končne razsežnosti nad algebraično zaprtim poljem. Če je  $\dim \text{hom}_G(\rho, \rho) = 1$ , potem je  $\rho$  nerazcepna.

*Dokaz.* Naj  $\rho$  upodablja grupo  $G$  na prostoru  $V$ . Naj bo  $W \leq V$  nerazcepna podupodobitev in naj bo  $U$  njena komplementirana podupodobitev. Naj bo  $\Phi: V \rightarrow V$  pripadajoča projekcija na podprostor  $W$  z jedrom  $U$ . Ker je  $\Phi \in \text{hom}_G(\rho, \rho)$ , iz predpostavke sledi, da je  $\Phi$  skalarni večkratnik identitete. To je mogoče le v primeru, ko je  $V = W$  in  $U = 0$ , torej je  $\rho$  nerazcepna. □



## Kompozicijska vrsta

Vsake upodobitve ne moremo razstaviti kot direktno vsoto nerazcepnih upodobitev. Kljub temu pa je res, da lahko vsako upodobitev (na končno razsežnem prostoru) razstavimo na nerazcepne upodobitve, le da moramo pri tem poseči po nekoliko zahtevnejšem načinu razstavljanja.

Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo na prostoru  $V$ . Predpostavimo, da obstaja zaporedje  $G$ -invariantnih podprostorov

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V_n = V,$$

pri čemer so vsi zaporedni kvocienti  $V_i/V_{i-1}$  za  $1 \leq i \leq n$ , gledani kot upodobitve grupe  $G$ , *nerazcepni*. Tako zaporedje imenujemo **kompozicijska vrsta** upodobitve na prostoru  $V$ . Kvocienti  $V_i/V_{i-1}$  se pri tem imenujejo **kompozicijski faktorji**.

**Zgled.** Naj bo  $\rho$  eničnozgornjetrikotna upodobitev grupe  $\mathbb{R}$  na  $V = \mathbb{R}^2$ . Ta upodobitev ima podupodobitev  $V_1 = \mathbb{R} \cdot e_1$ . Kvocient  $V/V_1$  je enorazsežen in na njem grupa  $\mathbb{R}$  deluje trivialno. Dobimo torej kompozicijsko vrsto

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq V,$$

katere kompozicijska faktorja sta kot upodobitvi izomorfna **1**. Sama upodobitev grupe  $\mathbb{R}$  na  $V$  pa seveda ni trivialna.

**Izrek (Jordan-Hölder-Noether).** Vsaka upodobitev na končno razsežnem prostoru ima kompozicijsko vrsto. Vsaki dve kompozicijski vrsti imata enako število členov in do permutacije natančno enake kompozicijske faktorje.

*Dokaz.* Naj grupa deluje linearno na končno razsežnem prostoru  $V$ . Da kompozicijska vrsta res obstaja, ni težko preveriti. Najprej izberemo neko nerazcepno podupodobitev  $V_1$ . Če je  $V_1 < V$ , potem izberemo podupodobitev  $V_2$ , ki vsebuje  $V_1$  in je med vsemi takimi minimalne razsežnosti. S tem je  $V_2/V_1$  nerazcepna. Induktivno nadaljujemo z grajenjem kompozicijske vrste. Ker je  $V$  končno razsežen, se ta postopek ustavi.

Premislimo še, kako lahko vsaki dve kompozicijski vrsti povežemo med sabo. Opazujmo dve taki vrsti,

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_n = V \quad \text{in} \quad 0 = W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_m = V.$$

S pomočjo druge vrste bomo skušali *pofiniti* prvo vrsto in obratno.<sup>6</sup> Za  $0 \leq i < n$  in  $0 \leq j \leq m$  naj bo

$$V_{i,j} = V_i + (V_{i+1} \cap W_j),$$

S tem dobimo verigo

$$V_i = V_{i,0} \leq V_{i,1} \leq \dots \leq V_{i,m} = V_{i+1}$$

med  $V_i$  in  $V_{i+1}$ . Ker je kvocient  $V_{i+1}/V_i$  nerazcepen in je vsak  $V_{i,j}$  podupodobitev, mora za natanko en indeks  $j$  veljati  $V_i = V_{i,j}$  in  $V_{i+1} = V_{i,j+1}$ . Kompozicijski faktor  $V_{i+1}/V_i$  je tedaj izomorfen kvocientu

$$\frac{V_i + (V_{i+1} \cap W_{j+1})}{V_i + (V_{i+1} \cap W_j)}.$$

<sup>6</sup>Ta argument je soroden premisleku o obstoju Hirschove dolžine v policikličnih grupah iz (Teorija grup).

Zgodbo zdaj ponovimo še za drugo verigo. Pofinimo jo s pomočjo prve, definiramo  $W_{j,i} = W_j + (W_{j+1} \cap V_i)$ . Kvocien  $W_{j+1}/W_j$  je enak

$$\frac{W_j + (W_{j+1} \cap V_{i+1})}{W_j + (W_{j+1} \cap V_i)}.$$

**Domača naloga.** Prepričaj se, da velja

$$\frac{V_i + (V_{i+1} \cap W_{j+1})}{V_i + (V_{i+1} \cap W_j)} \cong \frac{W_j + (W_{j+1} \cap V_{i+1})}{W_j + (W_{j+1} \cap V_i)}.$$

S tem smo za vsak  $0 \leq i < n$  našli natanko določen  $j$ , da je  $V_{i+1}/V_i \cong W_{j+1}/W_j$ . Premislimo še, da je to prirejanje injektivno. Indeks  $j$  je enolično določen s pogojem, da je  $V_{i,j+1}/V_{i,j} \neq 0$ , kar je po gornjem izomorfizmu enakovredno pogoju  $W_{j,i+1}/W_{j,i} \neq 0$ . Ker je  $W_{j+1}/W_j$  nerazcepen, je slednji pogoj lahko izpolnjen le za en indeks  $i$ .  $\square$

Iz izreka sledi, da lahko za vsako upodobitev  $\rho$  grupe  $G$  na končno razsežnem prostoru najdemo bazo prostora, v kateri imajo vse matrike  $\rho(g)$  za  $g \in G$  *bločnozgornjetrikotno* obliko. Po drugi strani lahko za *polenostavno* upodobitev najdemo bazo prostora, v kateri imajo vse matrike *bločnodiagonalno* obliko.

## Izotipične komponente

Po zadnjem izreku je za dano upodobitev  $\rho$  in nerazcepno upodobitev  $\pi$  število kompozicijskih faktorjev, ki so izomorfni  $\pi$ , neodvisno od kompozicijske vrste. Temu številu pravimo **večkratnost**  $\pi$  v  $\rho$  in ga označimo z  $\text{mult}_\rho(\pi)$ .

Kadar je dana upodobitev *polenostavna*, je do izomorfizma natančno enolično določena s svojimi večkratnostmi. Če je  $\rho = \bigoplus_{i \in I} \rho_i$ , potem je

$$\text{hom}_G(\pi, \rho) = \bigoplus_{i \in I} \text{hom}_G(\pi, \rho_i).$$

Po Schurovi lemi je (nad algebraično zaprtim poljem) vsak od zadnjih prostorov spletičen bodisi trivialen bodisi enorazsežen. Večkratnost  $\pi$  v  $\rho$  lahko zatorej izračunamo kot

$$\text{mult}_\rho(\pi) = \dim \text{hom}_G(\pi, \rho).$$

## Zgled.

- Za eničnozgornjetrikotno upodobitev  $\rho$  grupe  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}^2$  je  $\text{mult}_\rho(\mathbf{1}) = 2$ . Ker ta upodobitev ni trivialna, ne more biti polenostavna, saj bi sicer bila izomorfna  $\mathbf{1}^2$ .
- Opazujmo permutacijsko upodobitev  $\pi$  grupe  $S_3$  na  $\mathbb{R}^3$ . To upodobitev smo že razstavili na direktno vsoto  $\mathbf{1} \oplus \rho$ , kjer je  $\rho$  dvorazsežna nerazcepna upodobitev na podprostoru  $\langle u_1 = e_1 - e_2, u_2 = e_2 - e_3 \rangle$ . Premislili smo, kako lahko to upodobitev projiciramo do upodobitve  $\tilde{\rho}$  grupe  $S_3$  na prostoru  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$  nad končnim poljem  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

Upodobitev  $\tilde{\rho}$  ni nerazcepna, saj ima invarianten podprostor  $\langle u_1 - u_2 = e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ . Na tem podprostoru grupa  $S_3$  deluje trivialno. V kvocientu  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 / \langle u_1 - u_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  generatorja  $(1 \ 2)$  in  $(1 \ 2 \ 3)$

grupe  $S_3$  preslikata odsek vektorja  $u_1$  v odsek  $-u_1$  oziroma  $u_1$ . V tem prepoznamo predznačno upodobitev, interpretirano kot homomorfizem  $\text{sgn}: S_3 \rightarrow \text{GL}_1(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \{1, -1\}$ . Nad poljem  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  za permutacijsko upodobitev  $\pi$  tako velja  $\text{mult}_\pi(1) = 2$  in  $\text{mult}_\pi(\text{sgn}) = 1$ .

Premislamo, da upodobitev  $\pi$  nad  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ni polenostavna. Če bi namreč bila, bi po zgornjem morala biti izmorfna direktni vsoti  $1 \oplus 1 \oplus \text{sgn}$ . Prostor  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$  bi zatorej imel bazo, v kateri bi matriki za  $\pi((1\ 2))$  in  $\pi((1\ 2\ 3))$  bili hkrati diagonalni. Ti dve matriki bi zato komutirali, kar pomeni, da bi morali komutirati tudi linearni preslikavi  $\pi((1\ 2))$  in  $\pi((1\ 2\ 3))$ . Temu pa ni tako, saj na primer velja  $\pi((1\ 2\ 3)(1\ 2))e_1 = e_3$  in  $\pi((1\ 2)(1\ 2\ 3))e_1 = e_1$ .

Čeravno so kompozicijski faktorji upodobitve enolično določeni do permutacije natančno, pa ni res, da so enolično določeni tudi členi kompozicijske vrste, niti kadar je dana upodobitev polenostavna. Lahko se namreč zgodi, da neka nerazcepna podupodobitev nastopa z večkratnostjo vsaj 2.<sup>7</sup>

Oglejmo si tako situacijo še podrobneje. Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$ . Naj bo  $\pi$  neka *nerazcepna* upodobitev grupe  $G$ . Opazujmo vse  $G$ -invariantne podprostore v  $V$ , ki so kot upodobitve izomorfni  $\pi$ . Vsota (ne nujno direktna) vseh teh podprostorov

$$\text{Izotip}_\rho(\pi) = \sum_{W \leq V, W \cong \pi} W$$

je  **$\pi$ -izotipična komponenta** upodobitve  $\rho$ . Ta je sicer definirana za vsako upodobitev, a jo je za polenostavne upodobitve še posebej lahko določiti.

**Trditev.** Naj bo  $G$  grupa s polenostavno upodobitvijo  $\rho = \bigoplus_{i \in I} \rho_i$  na prostoru  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ , kjer je vsak  $\rho_i$  nerazcepna podupodobitev. Za vsako nerazcepno upodobitev  $\pi$  grupe  $G$  je

$$\text{Izotip}_\rho(\pi) = \bigoplus_{i \in I: \rho_i \cong \pi} V_i.$$

*Dokaz.* Naj bo  $W$  direktna vsota podprostorov  $V_i$ , ki so kot upodobitev izomorfni  $\pi$ . Seveda je  $W \leq \text{Izotip}_\rho(\pi)$ . Dokažimo, da velja tudi obratna neenakost. Naj bo  $U$  direktna vsota tistih prostorov  $V_i$ , ki kot upodobitev niso izomorfni  $\pi$ . Velja  $V = W \oplus U$ . Opazujmo projekcijo  $p: V \rightarrow U$  z jedrom  $W$ . Naj bo  $Z \leq \text{Izotip}_\rho(\pi)$  podprostor, ki je kot upodobitev izomorfen  $\pi$ . Zožitev  $p|_Z$  je spletična v  $\text{hom}_G(Z, U)$ , ki je po Schurovi lemi ničeln prostor. Torej je  $p(Z) = 0$  in s tem  $Z \leq W$ . Ker je bil  $Z$  poljuben, smo s tem dokazali  $\text{Izotip}_\rho(\pi) \leq W$ .  $\square$

Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$  in nerazcepno upodobitvijo  $\pi$  na prostoru  $W$ . Vsak  $G$ -invarianten podprostor v  $V$ , ki je kot upodobitev izomorfen  $\pi$ , lahko dobimo kot sliko prostora  $W$  z neko spletično v  $\text{hom}_G(\pi, \rho)$ .<sup>8</sup> Vsoto vseh takih  $G$ -invariantnih podprostorov lahko torej zajamemo kot sliko linearne preslikave

$$\Sigma_{\pi, \rho}: \text{hom}_G(\pi, \rho) \otimes W \rightarrow V, \quad \Phi \otimes w \mapsto \Phi(w).$$

<sup>7</sup>Na primer, kadar je upodobitev trivialna, se pravi  $V = \mathbf{1}^k$  za nek  $k > 1$ , lahko izberemo poljubno bazo prostora  $V$  in prek nje dobimo nek drug izomorfizem  $V \cong \mathbf{1}^k$ .

<sup>8</sup>Vsaka neničelna spletična v  $\text{hom}_G(\pi, \rho)$  je namreč injektivna.

S tem je  $\text{im } \Sigma_{\pi, \rho} = \text{Izotip}_\rho \pi$ . Grupa  $G$  deluje na  $\text{hom}_G(\pi, \sigma) = \text{hom}(W, V)^G$  trivialno, na  $W$  pa prek  $\pi$ . Na ta način je  $\Sigma_{\pi, \rho}$  celo spletična upodobitev.

**Trditev.** *Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  in nerazcepno upodobitvijo  $\pi$  nad algebraično zaprtim poljem. Predpostavimo, da je  $\dim \text{hom}_G(\pi, \rho) < \infty$ . Tedaj je  $\Sigma_{\pi, \rho}$  injektivna.*

*Dokaz.* Naj bo  $\{\Phi_i\}_{i \in I}$  baza prostora  $\text{hom}_G(\pi, \rho)$ . Premislimo, da prostori  $\text{im } \Phi_i$  tvorijo notranjo direktno vsoto v  $V$ . Injektivnost  $\Sigma_{\pi, \rho}$  od tod neposredno sledi.

Dokazujemo s protislovjem. Naj bo  $J \subseteq I$  množica najmanjše moči, za katero prostori  $\text{im } \Phi_j$  za  $j \in J$  ne tvorijo direktne vsote. Obstaja torej  $k \in J$ , da je

$$\text{im } \Phi_k \cap \sum_{j \in J \setminus \{k\}} \text{im } \Phi_j \neq 0.$$

Po nerazcepčnosti  $\pi$  je spletična  $\Phi_k$  injektivna, zato je  $\text{im } \Phi_k$  nujno vsebovana v vsoti  $\sum_{j \in J \setminus \{k\}} \text{im } \Phi_j$ . Po minimalnosti  $J$  je zadnja vsota direktna, zato je

$$\Phi_k \in \text{hom}_G(W, \bigoplus_{j \in J \setminus \{k\}} \text{im } \Phi_j).$$

Slednji prostor je direktna vsota prostorov  $\text{hom}_G(W, \text{im } \Phi_j)$ . Po Schurovi lemi je vsak od teh bodisi ničeln bodisi enorazsežen. V neničelnem primeru je seveda  $\text{hom}_G(W, \text{im } \Phi_j)$  generiran s spletično  $\Phi_j$ . Od tod sledi, da je  $\Phi_k$  linearna kombinacija spletičen  $\Phi_j$  za  $j \in J \setminus \{k\}$ . To je protislovno z dejstvom, da je  $\{\Phi_i\}_{i \in I}$  baza prostora  $\text{hom}_G(\pi, \rho)$ .  $\square$

**Posledica.** *Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  in nerazcepno upodobitvijo  $\pi$  nad algebraično zaprtim poljem. Predpostavimo, da je  $\text{hom}_G(\pi, \rho) < \infty$ . Izotipična komponenta  $\text{Izotip}_\rho(\pi)$  je polenostavna,  $\pi$ -izotipična in vsebuje  $\pi$  z večkratnostjo  $\dim \text{hom}_G(\pi, \rho)$ .*

*Dokaz.* Iz injektivnosti  $\Sigma_{\pi, \rho}$  sledi  $\text{Izotip}_\rho(\pi) \cong \text{hom}_G(\pi, \sigma) \otimes W$ . Ker grupa  $G$  deluje trivialno na  $\text{hom}_G(\pi, \sigma)$ , je prostor  $\text{hom}_G(\pi, \sigma) \otimes W$  kot upodobitev izomorfen direktni vsoti  $\dim \text{hom}_G(\pi, \sigma)$  kopij prostora  $W$ , na katerem  $G$  deluje s  $\pi$ .  $\square$

**Domača naloga.** Naj bo  $G$  grupa s končnorazsežno upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$ . Premisli, da se izotipične komponente, ki pripadajo paroma neizomorfnim nerazcepnim upodobitvam, sekajo trivialno.

**Zgled.**

- Naj bo  $G$  grupa s polenostavno upodobitvijo  $\rho = \bigoplus_{i \in I} \rho_i$  na prostoru  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ , v kateri vsaka nerazcepna podupodobitev nastopa z večkratnostjo 1. Upodobitve  $\rho_i$  so torej paroma neizomorfne. Izotipične komponente so torej kar enake podprostorom  $V_i$ . Ker so te komponente neodvisne od izbire dekompozicije, so torej podprostor  $V_i$  polenostavne dekompozicije enolično določeni.

Naj bo  $W \leq V$  nek  $G$ -invarianten podprostor. Upodobitev  $G$  na tem podprostoru je tudi polenostavna. Vsaka njena nerazcepna podupodobitev je hkrati podupodobitev  $\rho$ , zato po enoličnosti podprostorov

$V_i$  sestoji iz nekaterih teh podprostorov. Prostor  $W$  je zato enak  $\bigoplus_{i \in J} V_i$  za neko podmnožico  $J \subseteq I$ .

Za konkreten zgled lahko vzamemo ciklično grupo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  in njeno regularno upodobitev, ki smo jo razcepili na direktno vsoto upodobitev  $\bigoplus_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \chi_j$ . Po zadnjem komentarju je vsaka podupodobitev regularne upodobitve torej enaka direktni vsoti nekaterih od upodobitev  $\chi_j$ .

- Naj bo  $G$  grupa z upodobitvijo  $\rho$  na prostoru  $V$  in naj bo  $\pi$  neka njena enorazsežna upodobitev. Taka upodobitev je seveda nerazcepna. Vektor  $v \in V$  pripada izotopični komponenti  $\text{Izotip}_\rho(\pi)$ , če in samo če grupa  $G$  na prostoru  $\langle v \rangle$  deluje kot s  $\pi$ , se pravi

$$\text{Izotip}_\rho(\pi) = \{v \in V \mid \forall g \in G: \rho(g) \cdot v = \pi(g)v\}.$$

Kadar je grupa  $G$  abelova, je vsaka njena nerazcepna upodobitev nad algebraično zaprtim poljem enorazsežna. Vsaka polenostavna upodobitev take grupe je zato direktna vsota podprostorov, na katerih grupa deluje s skalarnimi množenji prek svojih enorazsežnih upodobitev.

## 2.2 Matrični koeficienti

Vsaka upodobitev dane grupe je homomorfizem v grupo obrnljivih matrik  $\text{GL}(V)$ . Do sedaj smo na upodobitve gledali z bolj konceptualnega stališča: govorili smo o strukturi prostora  $V$  in o njegovi morebitni dekompoziciji na nerazcepne upodobitve. Zdaj si bomo z vsako od teh umazali roke in jo pogledali še podrobneje.

Predpostavimo, da je prostor  $V$  končnorazsežen. Izberimo bazo prostora  $V$  in s tem izomorfizem  $V \cong F^n$  za nek  $n$ , tako da je upodobitev dana s homomorfizmom  $\rho: G \rightarrow \text{GL}_n(F)$ . Vsak tak homomorfizem je po komponentah podan s svojimi **matričnimi koeficienti**; to so funkcije

$$f_{i,j}: G \rightarrow F, \quad g \mapsto \langle e_i^*, \rho(g) \cdot e_j \rangle = \rho(g)_{i,j}$$

za  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

O matričnih koeficientih upodobitve  $\rho$  lahko abstraktnije govorimo tudi brez izbire baze prostora. Za vsak vektor  $v \in V$  in kovektor  $\lambda \in V^*$  definiramo  $f_{v,\lambda}: G \rightarrow F$ ,  $g \mapsto \langle \lambda, \rho(g) \cdot v \rangle$ . To so **posplošeni matrični koeficienti**. Kadar je prostor  $V$  končnorazsežen, lahko vsak vektor razvijemo po izbrani bazi in vsak kovektor po dualni bazi, s čimer splošeni matrični koeficient razvijemo po običajnih matričnih koeficientih.

### Koeficienti in regularna upodobitev

Matrične koeficiente lahko vidimo kot elemente vektorskega prostora funkcij  $\text{hom}(G, F)$  iz  $G$  v  $F$ . Na tem prostoru deluje grupa  $G$  z regularno upodobitvijo  $\rho_{\text{hom}}$ . Naj bo  $\text{MK}(\pi) \leq \text{hom}(G, F)$  podprostor, ki ga razpenjajo matrični koeficienti neke končnorazsežne nerazcepne upodobitve  $\pi$ .<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Prostor  $\text{MK}(\pi)$  je enak prostoru, ki ga razpenjajo splošeni matrični koeficienti upodobitve  $\pi$ , zato je neodvisen od izbire baze.

**Trditev.**  $\text{MK}(\pi)$  je  $G$ -invarianten podprostor.

*Dokaz.* Naj bo  $g \in G$  in  $f_{v,\lambda}$  posplošen matrični koeficient. Velja

$$g \cdot f_{v,\lambda} : x \mapsto f_{v,\lambda}(xg) = \langle \lambda, \pi(xg) \cdot v \rangle = f_{\pi(g) \cdot v, \lambda}(x),$$

zato je  $g \cdot f_{v,\lambda} = f_{\pi(g) \cdot v, \lambda} \in \text{MK}(\pi)$ .  $\square$

Matrični koeficienti upodobitve  $\pi$  nam torej dajejo podupodobitev na prostoru  $\text{MK}(\pi)$  znotraj regularne upodobitve  $\rho_{\text{hom}}$  na  $\text{hom}(G, F)$ . Ni presenetljivo, da je ta podupodobitev v resnici tesno povezana s  $\pi$ .

**Izrek.** Naj bo  $G$  grupa s končnorazsežno nerazcepno upodobitvijo  $\pi$ . Tedaj je

$$\text{MK}(\pi) = \text{Izotip}_{\rho_{\text{hom}}}(\pi)$$

in večkratnost  $\pi$  v slednji upodobitvi je enaka  $\deg(\pi)$ .

*Dokaz.* Naj bo  $\pi$  upodobitev na prostoru  $W$ . Spomnimo se, da  $\pi$ -izotipična komponenta v  $\rho_{\text{hom}}$  sestoji iz vektorjev oblike  $\Phi(w)$  za  $\Phi \in \text{hom}_G(\pi, \rho_{\text{hom}})$  in  $w \in W$ . Regularno upodobitev predstavimo kot inducirano upodobitev  $\rho_{\text{hom}} = \text{Ind}_1^G(\mathbf{1})$ . Po adjunkciji med restrikcijo in indukcijo je

$$\text{hom}_G(\pi, \rho_{\text{hom}}) \cong \text{hom}_1(\text{Res}_1^G(\pi), \mathbf{1}) = \text{hom}(\mathbf{1}^{\deg(\pi)}, \mathbf{1}).$$

Standardna dualna baza  $\{e_i^* \mid 1 \leq i \leq \deg(\pi)\}$  v zadnjem vektorskem prostoru nam po tej adjunkciji porodi bazo

$$\Phi_i : W \rightarrow \text{hom}(G, F), \quad w \mapsto (g \mapsto \langle e_i^*, \pi(g) \cdot w \rangle) = f_{e_i^*, w}(x)$$

za  $1 \leq i \leq \deg(\pi)$  prostora spletičen  $\text{hom}_G(\pi, \rho_{\text{hom}})$ . Ko te bazne spletične evalviramo na neki izbrani bazi  $\{f_j \mid 1 \leq j \leq \deg(\pi)\}$  prostora  $W$ , dobimo bazo<sup>10</sup>

$$\Phi_i(f_j) = f_{i,j}$$

prostora  $\text{Izotip}_{\rho_{\text{hom}}}(\pi)$ . V izbranih bazah torej matrični koeficienti tvorijo bazo za  $\pi$ -izotipično komponento regularne upodobitve. Večkratnost  $\pi$  v njej je enaka  $\dim \text{hom}_G(\pi, \rho_{\text{hom}}) = \deg(\pi)$ .  $\square$

V posebnem smo tekom dokaza zadnje trditve izpeljali, da so po izbiri baze matrični koeficienti končnorazsežne nerazcepne upodobitve  $\pi$  vselej linearno neodvisni.<sup>11</sup> Vseh je ravno  $\deg(\pi)^2$  in znotraj regularne upodobitve tvorijo podupodobitev  $\text{MK}(\pi)$ , ki sestoji iz  $\deg(\pi)$  mnogo kopij upodobitve  $\pi$ .

## Karakterji

- characters of finite dimensional representations - (? , najbrž ne) some clifford theory

Theorem 2.6.7 Baumslag-Solitar grupa je končno prezentirana, ni pa linearna (ampak za to bi potrebovali končno prezentirane grupe ...) Ta dokaz bi lahko dodali v del o RASTi, kjer že imamo vse potrebno razvito! Dodaj referenco o obstoju grupe, ki nima upodobitve, tukaj. Po tem lahko še omenimo rezultat Lubotzky o random grupah.

<sup>10</sup>Preslikava  $\Sigma_{\pi, \rho_{\text{hom}}}$  je injektivna, ker je  $\dim \text{hom}_G(\pi, \rho_{\text{hom}}) = \deg(\pi) < \infty$ .

<sup>11</sup>Temu dejstvu včasih pravimo *Burnsideov izrek o neracepnosti*.

## Poglavje 3

# Upodobitve končnih grup

### 3.1 Polenostavnost in regularna upodobitev

### 3.2 Karakterji

### 3.3 Konkretni primeri

#### Abelove grupe

#### Razširjeni zgled $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$

#### Razširjeni zgled $S_n$

- Maschke (projektor) - dekompozicija regularne upodobitve - nerazcepne upodobitve končnih abelovih grup - število karakterjev - ortogonalnost karakterjev - večkratnosti - kje najti upodobitve - projektorji na izo komponente - malo harmonične analize - abelove grupe, Dirichletov izrek - tabela karakterjev -  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$  - burnside two primes theorem (najbrž izpustimo, brez veze) - simetrične grupe (!!!, napiši tabelo za  $S_5$ ) - ? mixing in simetrične grupe (konkreten primer, simetrična grupa  $S_5$ , matrika sosednosti (katero mešanje?), spletična, lastne vrednosti po komponentah, kako dolgo moramo mešati?)





## Poglavje 4

# Upodobitve linearnih grup

### 4.1 Ozaljšane upodobitve

#### Zvezne upodobitve

#### Unitarne upodobitve

- topološke grupe (zvezne upodobitve) - unitarne na hilbertovih prostorih (končne smo že,  $SU_2$ )

#### Razširjeni zgled $S^1$

fourier

### 4.2 Liejeve grupe in mreže

#### Razširjeni zgled $SL_2(\mathbb{C})$

#### Mreža $SL_2(\mathbb{Z})$

- obravnavamo kot Liejevo grupo - pokažemo povezavo z  $sl_2$  (lahko eksplicitno opišemo vse nerazcepne, pokažemo kako so bijektivno (!) povezane z gladkimi upodobitvami  $SL_2$ , glej Fulton-Harris) - naštejemo upodobitve  $SL_2$  - dokažemo, da so nerazcepne (potrebujemo izotopične komponente) - diferencial teh upodobitev nam da upodobitve  $sl_2$  - dokažemo, da so to vse upodobitve  $sl_2$  (Fulton-Harris) - zvezne upodobitve  $SL_2$ : te plus konjugiranke (samo rezultat) - abstraktne upodobitve: divji avtomorfizmi  $\mathbb{C}$  - dokažemo Clebsch-Gordan (najbrž izpustimo ...) -  $SL_2(\mathbb{Z})$ ? (-> <https://math.stackexchange.com/questions/786303/the-presentation-of-sl2-mathbbz>, glej zadnji odgovor, kjer poda prezentacijo, napiši na primer enačbe za raznoterost dvorazsežnih realnih upodobitev) - random groups, model Gromova <https://arxiv.org/abs/1810.01529> -  $SL_n(\mathbb{Z})$ ? (-> The representation theory of  $SL_n(\mathbb{Z})$ , Andrew Putman, povezano s  $p$ -adičnimi števili – Lubotzky)

## 4.3 Kompaktne grupe

### Razširjeni zgled $SU_2(\mathbb{C})$

- lahko bi geometrijsko iz  $sl_2$ , ampak pokažemo alternativen pristop, ker je kompaktna - naštejemo upodobitve, so nerazcepne: isti dokaz kot za  $SL_2$  bolj ali manj deluje tudi tukaj - Clebsch-Gordan je trivialen iz karakterjev - dokažemo, da so to vse zvezne nerazcepne: rabimo karakterje - Peter-Weyl na tem primeru (samo izrek, da smo s tem pokrili vse unitarne upodobitve)

$p$ -adične grupe. Omenimo lahko na primer rezultat Jaikin (representation growth) in Aizenbud-Avni (Representation Growth and Rational Singularities of the Moduli Space of Local Systems).

- ? lastnost  $(T)$ , dodaj referenco na TGP in expanderje