



Analiza omrežij

6. Zgradba omrežij otoki in gruč

Vladimir Batagelj

Magistrski program Uporabna statistika
Ljubljana, maj 2024



Kazalo

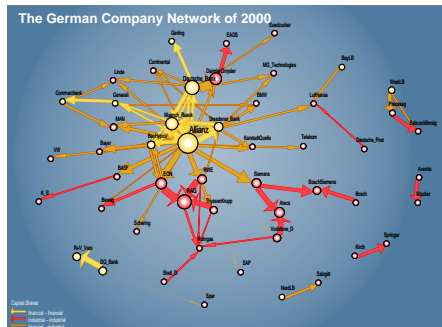
Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

- 1 Otoki
- 2 Gruče



L. Krempf, MPI.

prof. Vladimir Batagelj: vladimir.batagelj@fmf.uni-lj.si
prosojnice (PDF)

30. april 2024 ob 03:05/ april 2013

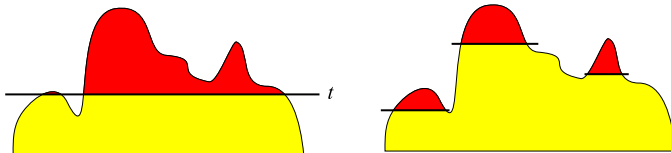


Otoki

Otoki

Gruče

Če dano lastnost/utež vozlišč/povezav predstavimo kot njihovo višino, nam naše omrežje določa nekakšno pokrajino s hribi in dolinami. Če to pokrajino potopimo v vodo do izbrane višine, dobimo kot izrez *otoke*. S spreminjanjem višine vode dobivamo različne otoke. V uporabah nas običajno zanimajo ne preveliki in ne premajhni otoki – le otoki velikosti med izbranimi k in K . Postopek 'otoki' začne s pokrajino popolnoma potopljeno v vodo. Nato znižujemo višino, dokler se ne pojavi otok prave velikosti ...



Otoki so zelo splošen in učinkovit postopek za določanje 'pomembnih' podomrežij v danem omrežju. □ ◀ ▶ 🔍



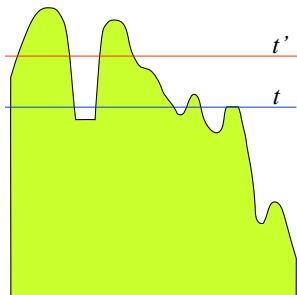
... otoki

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V omrežju $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, p)$, $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo **pravi vozliščni otok** skupino vozlišč $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$, ki poraja povezan podgraf in so vozlišča v skupini 'višje' od sosednjih vozlišč

$$\max_{u \in N(\mathcal{C})} p(u) < \min_{v \in \mathcal{C}} p(v)$$

V omrežju $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, w)$, $w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo **pravi povezavni otok** skupino vozlišč $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$, ki poraja povezan podgraf in so vozlišča v skupini 'močnejše' povezana, kot s sosedji – v podgrafu porojenem s \mathcal{C} obstaja vpeto drevo \mathcal{T} , tako da je

$$\max_{(u,v) \in \mathcal{L}, u \notin \mathcal{C}, v \in \mathcal{C}} w(u, v) < \min_{(u,v) \in \mathcal{T}} w(u, v)$$

Vpeljemo lahko tudi pojem **enostavnih** otokov z enim samim 'vrhom'.





Lastnosti vozliščnih otokov

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

- Množica vozlišč posamezne komponente vozliščnega izreza na izbrani ravni t določa pravi vozliščni otok.
- Množica $\mathcal{H}_p(\mathcal{N})$ vseh vozliščnih otokov omrežja \mathcal{N} je polna razslojitev:
 - otoka sta ali ločena ali pa je en vsebovan v drugem;
 - vsako vozlišče pripada vsaj enemu otoku.
- Vozliščni otoki so invariantni za strogo naraščajoče transformacije lastnosti p .
- Krajišči iste povezave ne moreta pripadati dvem različnim otokoma.



Postopek za določanje vozliščnih otokov

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

- Omrežje potopimo v celoti v vodo in jo postopno spuščamo.
- Vsakič, ko se prikaže novo vozlišče v iz vode, pogledamo, s katerimi od že vidnih otokov je povezano.
- Vozlišče v in z njim povezane otoke združimo v nov, večji otok. Otoki, ki so pri tem združeni, so njegovi podotoki. Vozlišče v je pristanišče novega otoka (vozlišče z najmanjšo vrednostjo).
- To je mogoče izvesti v času $\mathcal{O}(\max(n \log n, m))$.

Operations/Network+Vector/Islands/Vertex Property



Enostavni vozliščni otoki

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

- Množica vozlišč $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ je (lokalni) **vozliščni vrh**, če je pravi vozliščni otok in imajo vsa njegova vozlišča isto vrednost.
- Vozliščni otok je **enostaven**, če ima en sam vrh.
- Obstajajo tri vrste vozliščnih otokov:
 - PLOSKI – vsa njegova vozlišča imajo isto vrednost;
 - ENOVRŠNI – otok ima en sam vrh;
 - VEČVRŠNI – otok ima več vrhov.
- PLOSKI ali ENOVRŠNI otoki so enostavni.



Lastnosti povezavnih otokov

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

- Množice vozlišč povezanih komponent poveznega izreza na izbrani ravni t so pravi povezavni otoki.
- Množica $\mathcal{H}_w(\mathcal{N})$ vseh pravih povezavnih otokov omrežja \mathcal{N} je razslojitev (ne nujno polna):
 - dva otoka sta ali ločena ali pa je en vsebovan v drugem.
- Povezavni otoki so invariantni za strogo naraščajoče transformacije uteži w .
- Krajišči povezave lahko pripadata dvema ločenima pravima povezavnima otokoma.



Algoritem določitve pravih povezavnih otokov

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

- Omrežje potopimo v celoti v vodo in jo postopno spuščamo.
- Vsakič, ko se prikaže nova povezava e iz vode, pogledamo, s katerimi od že vidnih otokov je povezana (obstajata največ dva).
- Združimo ta otoka s povezavo ali dodamo povezavo otoku. Dobimo večji otok. Združeni otoki so podotoki tega otoka. Povezava e je **pristanišče** novega otoka (najmanjša vrednost v minimalnem vpetem drevesu).
- Prave povezavne otoke je mogoče določiti v času $\mathcal{O}(m \log n)$.

Network/Create Partition/Islands/Line Weights



Enostavni povezavni otoki

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

- Množica vozlišč $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ določa *povezavni vrh*, če je pravi povezavni otok, ki vsebuje minimalno vpeto drevo, v katerem imajo vse povezave enako vrednost, kot je največja vrednost povezave v otoku.
- Povezavni otok je *enostaven*, če ima en sam vrh.
- Obstajajo tri vrste povezavnih otokov:
 - PLOSKI – minimalno vpeto drevo, v katerem imajo vse povezave enako vrednost, kot je največja vrednost povezave v otoku;
 - ENOVRŠNI – otok ima en sam povezavni vrh;
 - VEČVRŠNI – otok ima več povezavnih vrhov.
- PLOSKI ali ENOVRŠNI otoki so enostavni.



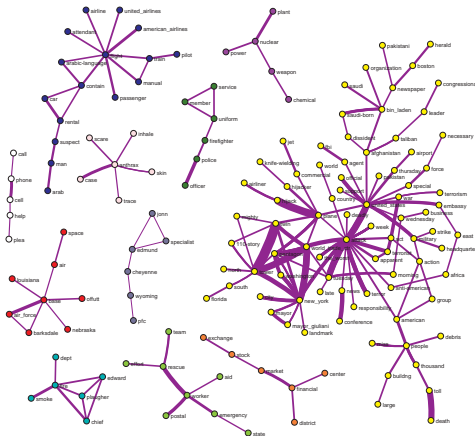
Otoki - Reuters terror news

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



S postopkom **CRA** sta S. Corman in K. Dooley ustvarila omrežje **Reuters terror news**, ki povzema vse novice, ki jih je izdalo novičarsko podjetje Reuters v 66 zaporednih dnevih po 11. septembru in so se nanašali na ta dogodek. Vozlišča omrežja so besede (izrazi); besedi sta povezani, če se so-pojavljata v enoti besedila. Utež povezave je pogostost so-pojavljanja. Omrežje ima $n = 13332$ vozlišč in $m = 243447$ povezav.



Primer: Ameriški patenti

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Omrežje ameriških patentov (**Nber**, **US Patents**) ima 3774768 vozlišč in 16522438 usmerjenih povezav (1 zanka). Če zanko odstranimo, je omrežje aciklično. Za uteži povezav smo vzeli delež različnih poti od začetkov do koncev, ki vodijo skozi povezavo in določili vse (2,90)-otoke. Z otoki porojeno omrežje ima 470137 vozlišč, 307472 povezav in za različne k : $C_2 = 187610$, $C_5 = 8859$, $C_{30} = 101$, $C_{50} = 30$ otokov. **Rolex**

[1]	0	139793	29670	9288	3966	1827	997	578	362	250
[11]	190	125	104	71	47	37	36	33	21	23
[21]	17	16	8	7	13	10	10	5	5	5
[31]	12	3	7	3	3	3	2	6	6	2
[41]	1	3	4	1	5	2	1	1	1	1
[51]	2	3	3	2	0	0	0	0	0	1
[61]	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0
[71]	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
[81]	2	0	0	0	0	1	2	0	0	7



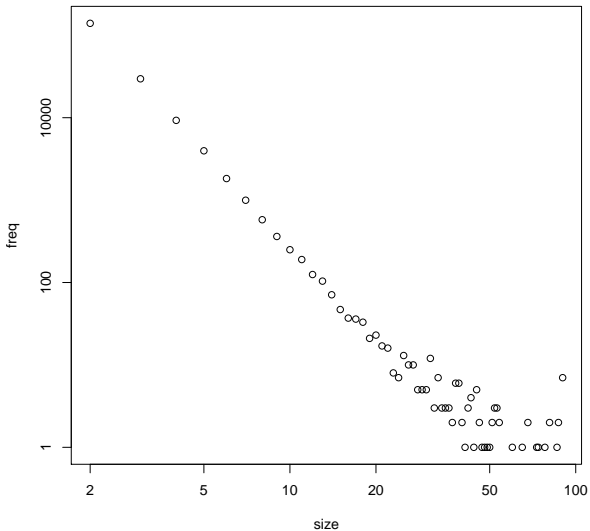
Porazdelitev velikosti otokov

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





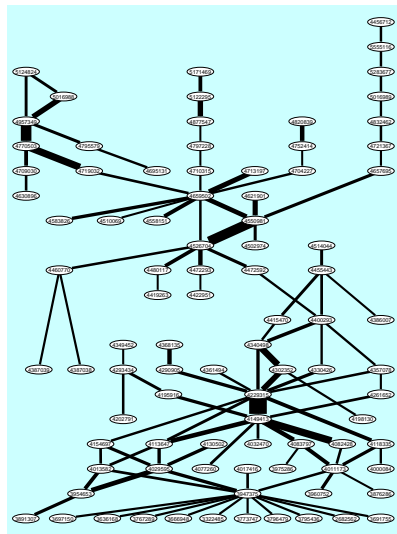
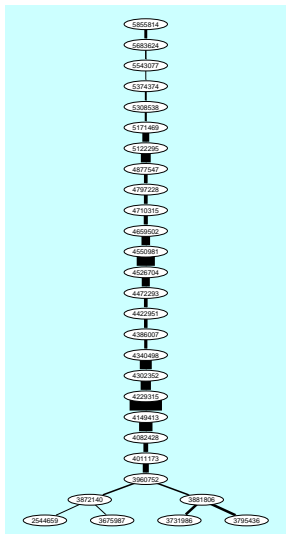
Glavna pot in glavni otok v US Patents

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj

Analiza omrežij



Glavni otok – Liquid crystal display

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Table 1: Patents on the liquid-crystal display

patent	date	author(s) and title
2714869	Mar 24, 1984	Shiroi, T. Active matrix pixel-driving circuit and the use and the formation and use thereof
2682562	Jun 29, 1984	Winder, et al. Reduction of aromatic carbonds
3322480	Mar 30, 1967	Williams. Electro-optical elements utilizing an organic aromatic compound
3036108	Jan 18, 1972	Josephson. Preparation of polynuclear aromatic compounds having an undistorted image on a distorted background
3099398	Mar 30, 1972	Radwin. Liquid crystal composition and device
3670887	Jul 11, 1972	Girard. Check with digital display
3601755	Oct 10, 1972	Wysocki. Electro-optic system in which an electrochromatic or dye-like material is dispersed throughout a liquid crystal to reduce the turn-off time
3731996	May 8, 1973	Ferguson. Display device utilizing liquid crystal light modulation
3767280	Oct 23, 1973	Astruc, et al. Class of stable trans-azobenzene compounds, some displaying nematic mesophase at or near room temperature and others in a range up to 100°C
3773747	Nov 20, 1973	Schneiderman. Substituted azine benzene compounds
3759436	Mar 5, 1974	Buller, et al. Nematic liquid material which exhibits the Kerr effect at isotropic temperature
3766475	Mar 12, 1974	Helfrich, et al. Electro-optic light modulation cell utilizing a nematic liquid material which exhibits the Kerr effect at isotropic temperature
3672140	Mar 18, 1973	Kleinman, et al. Liquid crystalline compositions and method
3676296	Apr 8, 1973	Deutscher, et al. Use of nematic liquid crystalline substances
3801806	Jun 6, 1973	Sunka. Electro-optical display device
3601387	Jun 24, 1973	Tokumoto, et al. Phase control of the voltage applied to organic electrodes for a cholesteric to nematic phase transition display
3947375	Mar 30, 1976	Gray, et al. Liquid crystal materials and devices
3954653	May 4, 1976	Vismarello. Liquid crystal composition having high dielectric anisotropy and display device incorporating same
3907052	Jun 1, 1976	Kleinman, et al. Liquid crystal compositions
3977296	Aug 17, 1976	Oh. Low voltage actuated field effect liquid crystals composition and method of synthesis
4000084	Dec 28, 1976	Blah, et al. Liquid crystal materials for electro-optical display devices
4011173	Mar 8, 1977	Schneiderman. Modified nematic mixtures with positive dielectric anisotropy
4013362	Mar 22, 1977	Schneiderman. Liquid crystal compositions and electro-optic display devices incorporating them
4017416	Apr 12, 1977	Uchida, et al. Polyazobenzene 4-alkyl-4'-hydroxy-carboxylic acid, method for preparing same and liquid crystal compositions
4025995	Jun 14, 1977	Ross, et al. Novel liquid crystalline compositions and electro-optic display devices incorporating them
4024270	Jun 28, 1977	Bliss, et al. Electro-optic device
4077289	Mar 7, 1979	Gray, et al. Optically active cyano-biphenyl compounds and liquid crystal materials containing them
4083428	Apr 4, 1979	Hsu. Liquid crystal composition and method

Table 2: Patents on the liquid-crystal display

patent	date	author(s) and title
4082499	Apr 11, 1978	Oh. Nematic liquid crystal compositions
4113847	Sep 12, 1978	Coutts, et al. Liquid crystalline materials
4118335	Oct 3, 1978	Krause, et al. Liquid crystalline materials of reduced viscosity
4230262	Dec 10, 1978	Edelshaink, et al. Liquid crystalline cyclohexanone derivatives
4104413	Apr 17, 1979	Gray, et al. Optically active liquid crystal mixtures and liquid crystal devices containing them
4154467	May 15, 1979	Edelshaink, et al. Liquid crystalline benzylidenebiphenyl derivatives
4255216	May 1, 1979	Coutts, et al. Liquid crystal compounds
4195120	Apr 15, 1980	Bellor, et al. Liquid crystal mixtures
4202770	May 13, 1980	Sato, et al. Nematic liquid crystalline materials
4229315	Oct 21, 1980	Krause, et al. Liquid crystalline cyclohexanone derivatives
4261652	Apr 14, 1981	Gray, et al. Liquid crystal compounds and materials and devices containing them
4290905	Sep 22, 1981	Kashe, Ester compound
4255434	Oct 6, 1981	Deutscher, et al. Liquid crystal compounds
4302352	Nov 24, 1981	Edelshaink, et al. Fluorophenylcyclohexanones, the preparation thereof and their use as components of liquid crystal dielectrics
4330426	Mar 18, 1982	Edelshaink, et al. Cyclohexylbiphenyls, their preparation and use in dielectric and electro-optical display elements
4340498	Jul 20, 1982	Schneiderman. Halogenated opto derivatives
4349452	Jul 13, 1982	Oman, et al. Cyclohexylbiphenyl compounds
4325785	Nov 2, 1982	Carr, et al. Liquid crystal compounds containing an alkylic ring and exhibiting a low dielectric anisotropy and liquid crystalline materials and devices incorporating such compounds
4361404	Nov 30, 1982	Oman, et al. Anisotropic cyclohexyl cyclohexylisothiol ethers
4360135	Jul 11, 1983	Oman, Anisotropic compounds with negative or positive DC-anisotropy and low optical anisotropy
4380807	May 31, 1983	Oman, et al. Liquid crystalline naphthalene derivatives
4387038	Jun 7, 1983	Fukui, et al. 4-(Trans-4'-alkylcyclohexyl) benzoic acid
4387039	Jun 7, 1983	Fukui, et al. Trans-4-(trans-4'-alkylcyclohexyl)-cyclohexanone
4400293	Aug 23, 1983	Schneiderman. Liquid crystalline cyclohexylbiphenyl derivatives
4415470	Nov 15, 1983	Edelshaink, et al. Liquid crystalline fluorine-containing cyclohexylbiphenyls and dielectric and electro-optical display elements based thereon
4419363	Dec 6, 1983	Prud'homme, et al. Liquid crystalline cyclohexylcarboxylic acid derivatives
4422951	Dec 27, 1983	Schneiderman. et al. Liquid crystal biphenyl derivatives
4455443	Jun 19, 1984	Taketai, et al. Nematic liquid compound
4456712	Jun 26, 1984	Edelshaink, et al. Hexamethylene triamine composition
4460770	Jul 17, 1984	Petrizka, et al. Liquid crystal mixture
4472283	Sep 18, 1984	Gray, et al. High temperature liquid crystal compositions of low viscosity and liquid crystal compositions containing the same
4472295	Sep 18, 1984	Taketai, et al. Nematic liquid crystalline compounds
4500217	Oct 30, 1984	Gray, et al. Novel liquid crystalline compounds
4500217	May 5, 1985	Gray, et al. High temperature liquid-crystalline ester compounds
4510069	Apr 9, 1985	Edelshaink, et al. Cyclohexanone derivatives

Table 3: Patents on the liquid-crystal display

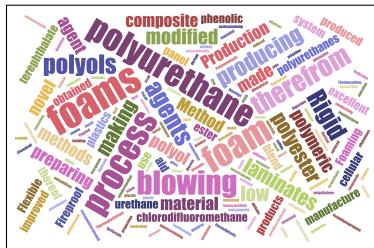
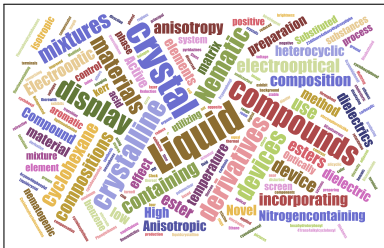
patent	date	author(s) and title
4114891	Apr 26, 1988	Petrizka, et al. 11-trimethyl-4-alkyl-4'-alkyl-1,1'-bis(4-(p-tert-butyl-styryl)phenyl)cyclohexylcarbazone and liquid crystal mixture
4326794	Jul 2, 1985	Petrizka, et al. Multilayer liquid crystal mixtures
4350981	Nov 5, 1985	Petrizka, et al. Liquid crystalline esters and mixtures
4351511	Dec 10, 1985	Taketai, et al. Nematic liquid crystalline compounds
4353828	Apr 22, 1986	Petrizka, et al. Phenylbiphenyls
4421391	Nov 11, 1986	Petrizka, et al. Novel liquid crystal mixtures
4438988	Dec 23, 1986	Petrizka, et al. Benzocyclobutenes
4491151	Apr 14, 1987	Sato, et al. Substituted pyridazines
4495652	Apr 21, 1987	Furuta, et al. Ethane derivatives
4607073	Sep 22, 1987	Balch, et al. Disubstituted ethanes and their use in liquid crystal materials and devices
4704227	Nov 3, 1987	Krause, et al. Liquid crystal compounds
4709038	Nov 24, 1987	Petrizka, et al. Novel liquid crystalline mixtures
4710315	Dec 1, 1987	Schick, et al. Anisotropic compounds and liquid crystal mixtures therefrom
4712137	Dec 15, 1987	Edelshaink, et al. Nitrogen-containing heterocyclic compounds
4719032	Jan 12, 1988	Wachler, et al. Cyclohexanone derivatives
4721367	Jan 26, 1988	Yoshinaga, et al. Liquid crystal device
4721410	Jan 21, 1988	Edelshaink, et al. Nitrogen-containing heterocyclic compounds
4770551	Sep 13, 1988	Rudolpher, et al. Liquid crystalline compounds
4795579	Jan 3, 1989	Vander, et al. 2,2'-difluoro-4-bis(4'-hydroxyphenyl) ether and their derivatives, their production process and their use in liquid crystal display devices
4797228	Jan 10, 1989	Goto, et al. Cyclohexanone derivatives and liquid crystal compositions containing same
4820829	Apr 11, 1989	Krause, et al. Nitrogen-containing heterocyclic esters
4824622	May 23, 1989	Clark, et al. Liquid crystal devices
4875447	Aug 22, 1989	Weber, et al. Liquid crystal display element
4877349	May 18, 1989	Chee, et al. Active matrix screen for the color display of television pictures, control system and process for producing said screen
5005989	May 21, 1991	Imura. Liquid crystal display device with a liquidcrystal compensator
5005989	May 21, 1991	Chen. Liquid crystal element with improved contrast and response
5122295	Jun 16, 1992	Weber, et al. Matrix liquid crystal display
5124824	Jun 23, 1992	Kozaki, et al. Liquid crystal display device comprising a retardation compensation layer having a maximum principal refractive index in the thickness direction
5137440	Dec 15, 1992	Hirak, et al. Liquid-crystal matrix device
5137677	Feb 1, 1993	Sugita, et al. Liquid crystal display with great regions between terminal groups
5208238	Mar 3, 1994	Weber, et al. Superliquid liquid-crystal display
5274374	Dec 20, 1994	Weber, et al. Superliquid liquid-crystal display
5406072	Aug 6, 1996	Hayes, et al. Nematic liquid-crystal composition
5555118	Sep 10, 1996	Hirak, et al. Liquid crystal display having adjacent substrate terminals set equal in length
5603624	Nov 4, 1997	Schneiderman. Liquid crystal composition
5655541	Nov 5, 1999	Mazard, et al. Liquid crystal compositions and liquid crystal display elements



V. Batagelj

Otoki

Gruče





Otoki – The Edinburgh Associative Thesaurus

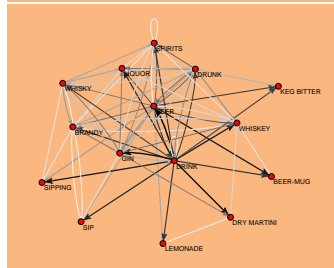
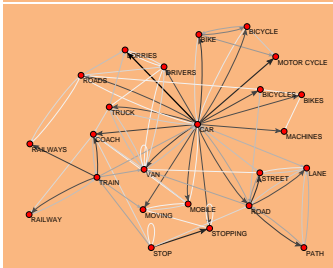
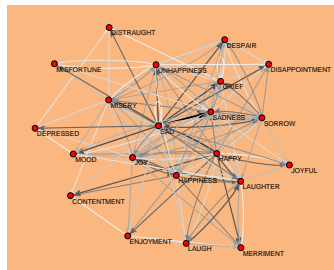
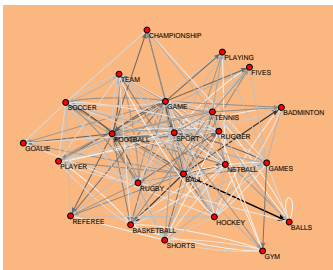
$n = 23219$, $m = 325624$, tranzitivnostna utež

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





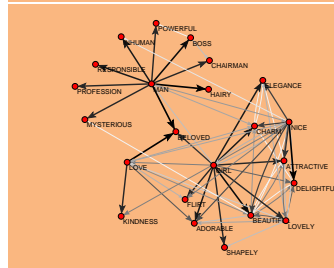
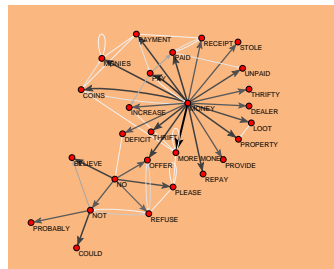
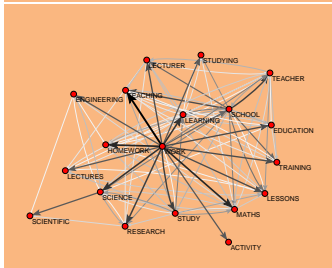
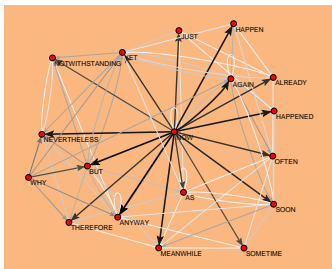
... Otoki – The Edinburgh Associative Thesaurus

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





Predlaganih je bilo več pojmov, ki opisujejo zgoščene skupine ali gruč v omrežjih.

Klika reda k v grafu je maksimalni polni (izomorfen K_k) podgraf, $k \geq 3$.

s-klika je maksimalni podgraf \mathcal{H} , v katerem najkrajša pot med poljubnima njenima vozliščema ne presega s .

$$\forall u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{H}) : d(u, v) \leq s.$$

s-klan je s-klika s premerom s . $\forall u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{H}) : d_{\mathcal{H}}(u, v) \leq s$.

s-pleksi, množice LS, množice lambda, sredice, ...

Za vse, razen za sredice, se je pokazalo, da jih je težko določiti.



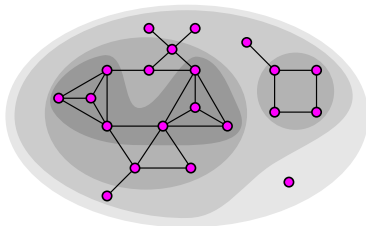
Sredice in posplošene sredice

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



Pojem sredice je vpeljal Seidman leta 1983. Podgraf $\mathcal{H} = (\mathcal{W}, \mathcal{L}(\mathcal{W}))$ grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ porojen z množico \mathcal{W} je *k-sredica* ali *sredica reda k* ntk. $\forall v \in \mathcal{W} : \deg_{\mathcal{H}}(v) \geq k$ in je \mathcal{H} maksimalni podgraf s to lastnostjo.

Sredici največjega reda v grafu pravimo tudi *glavna* sredica.

Sredičnost vozlišča v je enaka največjemu redu sredice, ki še vsebuje to vozlišče.

Stopnja $\deg(v)$ v definiciji sredice je lahko: vhodna, izhodna, celotna, itd., kar da različne vrste sredic.



Lastnosti sredic

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

S slike na prejšnji prosojnici, ki prikazuje sredice redov 0, 1, 2 in 3, vidimo:

- Sredice so gnezdene – določajo razslojitev:
$$i < j \implies \mathcal{H}_j \subseteq \mathcal{H}_i$$
- Sredice danega reda niso vselej povezani podgrafi.

Učinkovit postopek za določitev sredic temelji na lastnosti:

Če iz danega grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ zaporedoma odstranjujemo vsa vozlišča (in pripadajoče povezave), ki imajo stopnjo manjšo od k , bo podgraf, ki bo ostal, sredica reda k .



Postopek določanja sredič

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Input: Graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ predstavljen s seznami sosedov

Output: Tabela $core[\mathcal{V}]$ sredičnosti vozlišč

Določi stopnje vozlišč $degree$

Uredi množico vozlišč \mathcal{V} v naraščajočem vrstnem redu njihovih stopenj

for $v \in \mathcal{V}$ glede na tekočo urejenost **do**

$core[v] = degree[v]$

for $u \in N(v)$ **do**

if $degree[u] > degree[v]$ **then**

$degree[u] = degree[u] - 1$

$\mathcal{V} = \mathcal{V} \setminus \{v\}$; Preuredi \mathcal{V}



... postopek določanja sredic

Pri razdelavi postopka je potrebno poskrbeti za hitro urejanje tabele *degree* in njeno preurejanje. Ker so vrednosti stopenj med 0 in $n - 1$ lahko s postopkom 'kupčkanja' to naredimo v času $O(n)$; urejenost lahko popravljamo v konstantnem času. Celoten postopek lahko izvedemo v času $O(m)$.

Sredice so eden od redkih učinkovitih pristopov za določanje gostih delov grafa. Uporabimo jih lahko tudi za pohitritve drugih, zahtevnejših postopkov saj so na primer k -komponente in klike reda k vsebovane v sredici reda k . Velja tudi naslednja ocena za barvnost grafa \mathcal{G}

$$\chi(\mathcal{G}) \leq 1 + \text{core}(\mathcal{G})$$



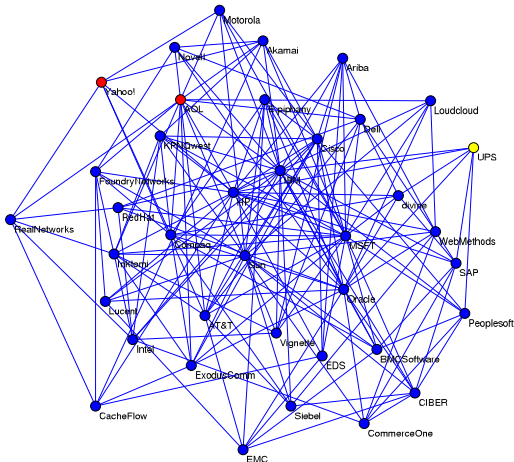
Sredica reda 6 za Krebsova Internetna podjetja

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





Posplošene sredice

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Pojem sredice lahko posplošimo na omrežja. Naj bo \mathcal{N} omrežje nad grafom $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$. Privzemimo, da imamo na \mathcal{N} določeno funkcijo $p(v, \mathcal{U})$, $v \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ z realnimi vrednostmi – *p-funkcija*.

Označimo $N_{\mathcal{U}}(v) = N(v) \cap \mathcal{U}$. Poleg stopenj so *p-funkcije* npr. še:

$$p_S(v, \mathcal{U}) = \sum_{u \in N_{\mathcal{U}}(v)} w(v, u), \text{ kjer je } w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$p_M(v, \mathcal{U}) = \max_{u \in N_{\mathcal{U}}(v)} w(v, u), \text{ kjer je } w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_t(v, \mathcal{U}) = \frac{|\mathcal{L}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}(K(N^+(v)))|}{|\mathcal{L}(K(N^+(v)))|}$$

$$p_k(v, \mathcal{U}) = \text{števílo ciklov dolžine } k \text{ skozi vozlišče } v \text{ v } (\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{U}))$$

Podgraf $\mathcal{H} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}(\mathcal{C}))$ porojen z množico $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ je *p-sredica* na ravni $t \in \mathbb{R}$ ntk. $\forall v \in \mathcal{C} : t \leq p(v, \mathcal{C})$ in je \mathcal{C} maksimalna taka množica.



Še nekaj p -funkcij

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

relativna gostota

$$p_\gamma(v, \mathcal{C}) = \frac{\deg(v, \mathcal{C})}{\max_{u \in N(v)} \deg(u)}, \text{ če je } \deg(v) > 0; 0, \text{ sicer}$$

raznolikost

$$p_\delta(v, \mathcal{C}) = \max_{u \in N^+(v, \mathcal{C})} \deg(u) - \min_{u \in N^+(v, \mathcal{C})} \deg(u)$$

povprečna utež

$$p_a(v, \mathcal{C}) = \frac{1}{|N(v, \mathcal{C})|} \sum_{u \in N(v, \mathcal{C})} w(v, u), \text{ če je } N(v, \mathcal{C}) \neq \emptyset; 0, \text{ sicer}$$



Postopek za posplošene sredice

Funkcija p je **monotona** ntk. zanjo velja

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \forall v \in \mathcal{V} : (p(v, \mathcal{C}_1) \leq p(v, \mathcal{C}_2))$$

Stopnje in funkcije p_S , p_M , p_t ter p_k so monotone.

Za monotone funkcije lahko ustrezno p -sredico na ravni t določimo, kot pri navadnih sredicah, z zaporednim odmetavanjem vozlišč z vrednostjo p manjšo od t . Sredice na različnih ravneh so gnezdene

$$t_1 < t_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{t_2} \subseteq \mathcal{H}_{t_1}$$

p -funkcija je **lokalna** ntk. $p(v, \mathcal{U}) = p(v, N_{\mathcal{U}}(v))$.

Stopnje, p_S , p_M in p_t so lokalne; toda p_k **ni** lokalna za $k \geq 4$. Za lokalno p -funkcijo obstaja postopek reda $O(m \max(\Delta, \log n))$ za določitev razslojitve na p -sredice, če le lahko $p(v, N_{\mathcal{C}}(v))$ določimo v času $O(\deg_{\mathcal{C}}(v))$.



Omrežje sodelovanj GeomBib

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Iz B. Jones-ove bibliografije računalniške geometrije *Computational geometry database* (2002), *FTP*, *Geom.net*. smo sestavili omrežje sodelovanj. Avtorja določata povezavo, če sta napisala skupno delo. Utež povezave je enaka številu skupnih del.

To omrežje je zahtevalo veliko 'čiščenja' zaradi težav z razpoznavanjem posameznih avtorjev. Tako na primer: Pankaj K. Agarwal, P. Agarwal, Pankaj Agarwal in P.K. Agarwal določajo isto osebo.

$$n = 9072, m = 13567/22577 \rightarrow n' = 7343, m' = 11898.$$



Sredice in posplošene sredice / ukazi Pajek

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

```
File/Network/Read [Geom.net]
Network/Create Partition/k-Core/All
Info/Partition
Operations/Network+Partition/Extract Subnetwork [13-*]
Draw/Network+First Partition
Layout/Energy/Kamada-Kawai
Options/Values of lines/Similarities
Layout/Energy/Kamada-Kawai
Operations/Network+Partition/Extract Subnetwork [21]
Draw/Network
Layout/Energy/Kamada-Kawai
Options/Values of lines/Forget
Layout/Energy/Kamada-Kawai
[select Geom.net]
Network/Create Vector/Generalized Cores/Sum/All
Info/Vector
Vector/Make Partition/by Intervals/Selected Thresholds [45]
Info/Partition
Operations/Network+Partition/Extract Subnetwork [2]
Draw/Network
Options/Values of lines/Similarities
Layout/Energy/Fruchterman-Reingold
```



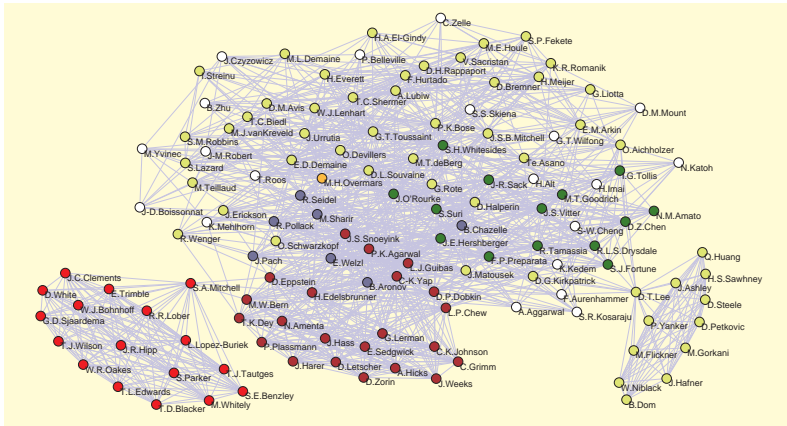
Navadne sredice redov 10–21 v Computational Geometry

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





Gruče



Analiza omrežij