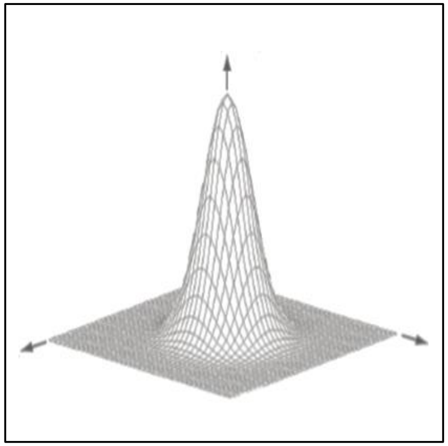
UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za elektrotehniko

PRIPRAVA NA LABORATORIJSKE VAJE
Vaja 10: Filtriranje slik v frekvenčni domeni

Obdelava slik in videa

prof. dr. Tomaž Vrtovec



LABORATORIJ ZA SLIKOVNE TEHNOLOGIJE
LABORATORY OF IMAGING TECHNOLOGIES

FILTRIRANJE SLIK V FREKVENČNI DOMENI

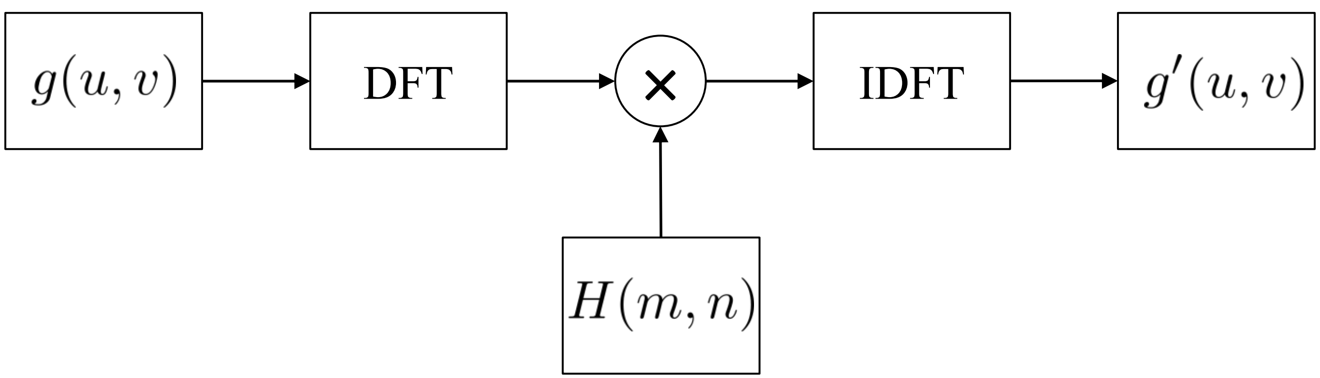
Namen

Filtriranje slike v prostorski domeni je enako konvoluciji slike $g(u,v)$ z jedrom filtra $h(u,v)$:

$$g'(u,v) = g(u,v) * h(u,v)$$

V frekvenčni domeni je filtriranje slike enako množenju spektra slike $G(m,n)$ s spektrom jedra filtra $H(m,n)$:

$$G'(m,n) = G(m,n) \cdot H(m,n)$$

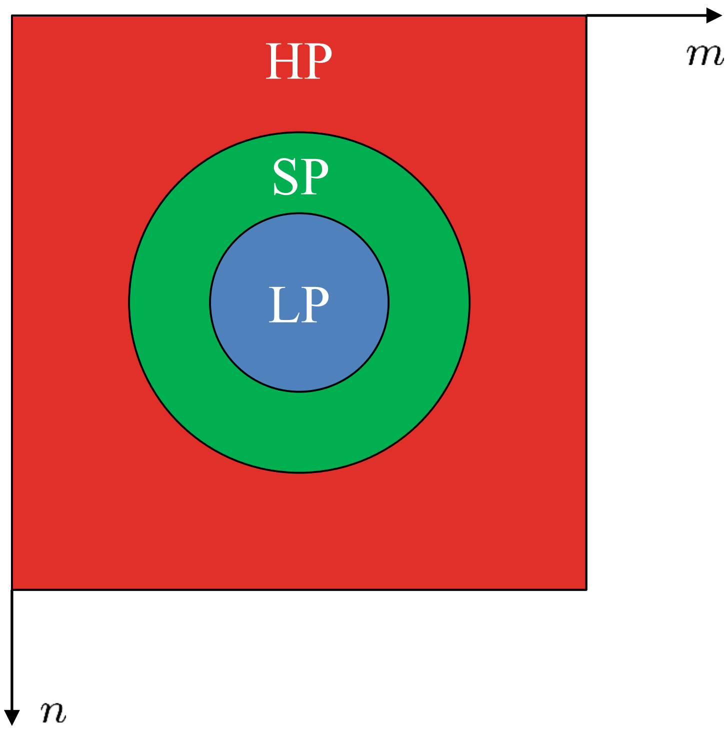


FILTRIRANJE SLIK V FREKVENČNI DOMENI

Vrste filtrov

Vrste filtrov oz. sit v frekvenčni domeni:

- **nizkoprepustni** (*angl*. lowpass)
- **visokoprepustni** (*angl*. highpass)
- **selektivno prepustni** (*angl*. selective-pass)



NIZKOPREPUSTNI FILTRI

Namen

Nizkoprepustni filtri oz. **sita** (*angl.* lowpass filters) ohranjajo nizkofrekvenčne spektralne komponente in oslabijo visokofrekvenčne.

Izvaja se dejansko **glajenje slike**!

Načrtovanje nizkoprepustnih filtrov v frekvenčni domeni:

$$H_{\mathrm{LP}}(m,n) = \ ?$$

Nizkoprepustni filtri v frekvenčni domeni:

- **idealni filter (ILPF)**
- **Butterworthov filter (BLPF)**
- **Gaussov filter (GLPF)**

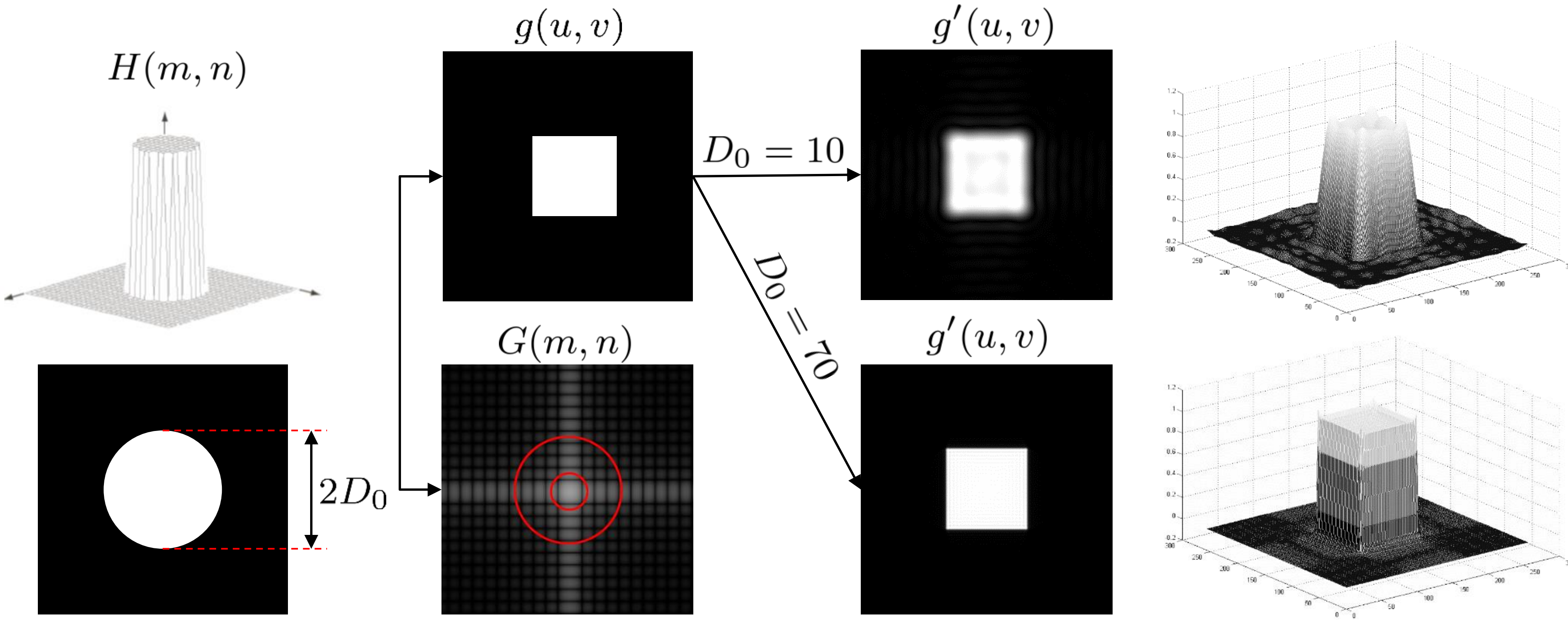
NIZKOPREPUSTNI FILTRI

Idealni nizkoprepustni filter – ILPF

$$H(m,n) = \begin{cases} 1; & 0 < D_{m,n} \leq D_0 \\ 0; & D_0 < D_{m,n} \leq 1 \end{cases}$$

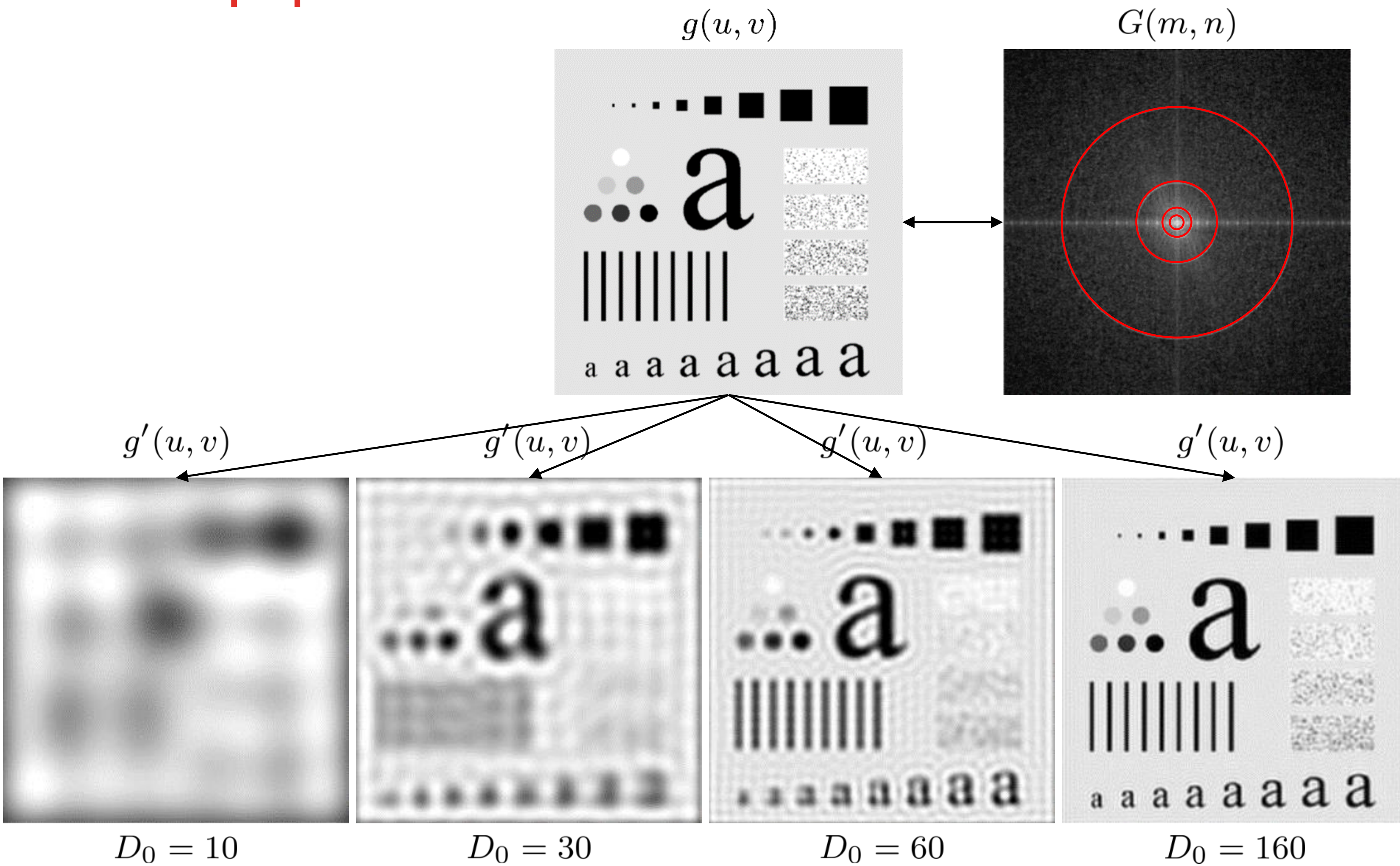
D_0 … mejna frekvenca (*angl.* cut-off frequency)

$$\left(D_m = \frac{m - M/2}{M/2}; \quad D_n = \frac{n - N/2}{N/2}; \quad D_{m,n} = \sqrt{D_m^2 + D_n^2} \right)$$



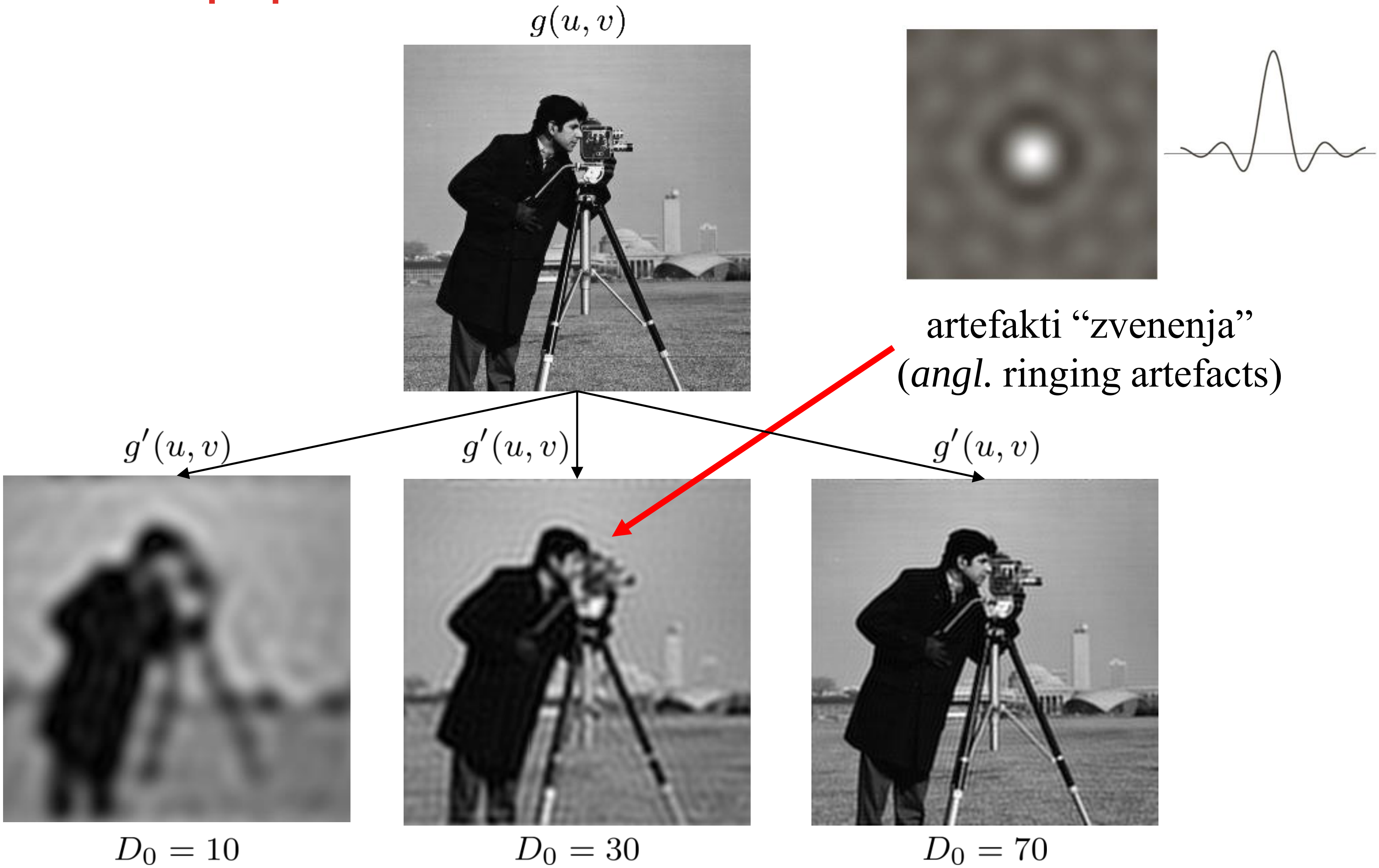
NIZKOPREPUSTNI FILTRI

Idealni nizkoprepustni filter – ILPF



NIZKOPREPUSTNI FILTRI

Idealni nizkoprepustni filter – ILPF



NIZKOPREPUSTNI FILTRI

Butterworthov nizkoprepustni filter – BLPF

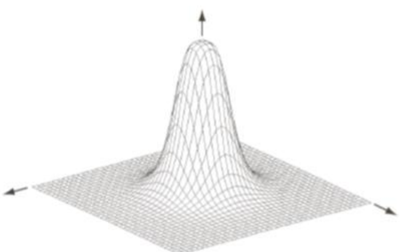
$$H(m,n) = \frac{1}{1 + (D_{m,n}/D_0)^{2q}}$$

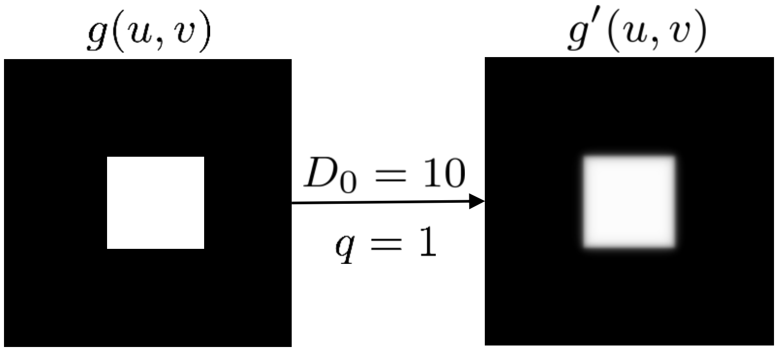
D_0 … mejna frekvenca

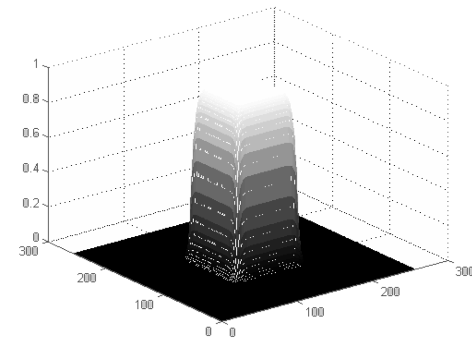
q … red filtra

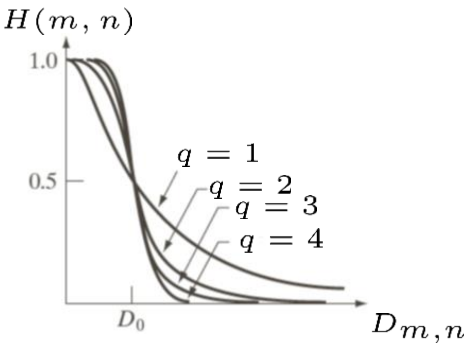
$$\left(D_m = \frac{m - M/2}{M/2}; \quad D_n = \frac{n - N/2}{N/2}; \quad D_{m,n} = \sqrt{D_m^2 + D_n^2} \right)$$

$H(m,n)$



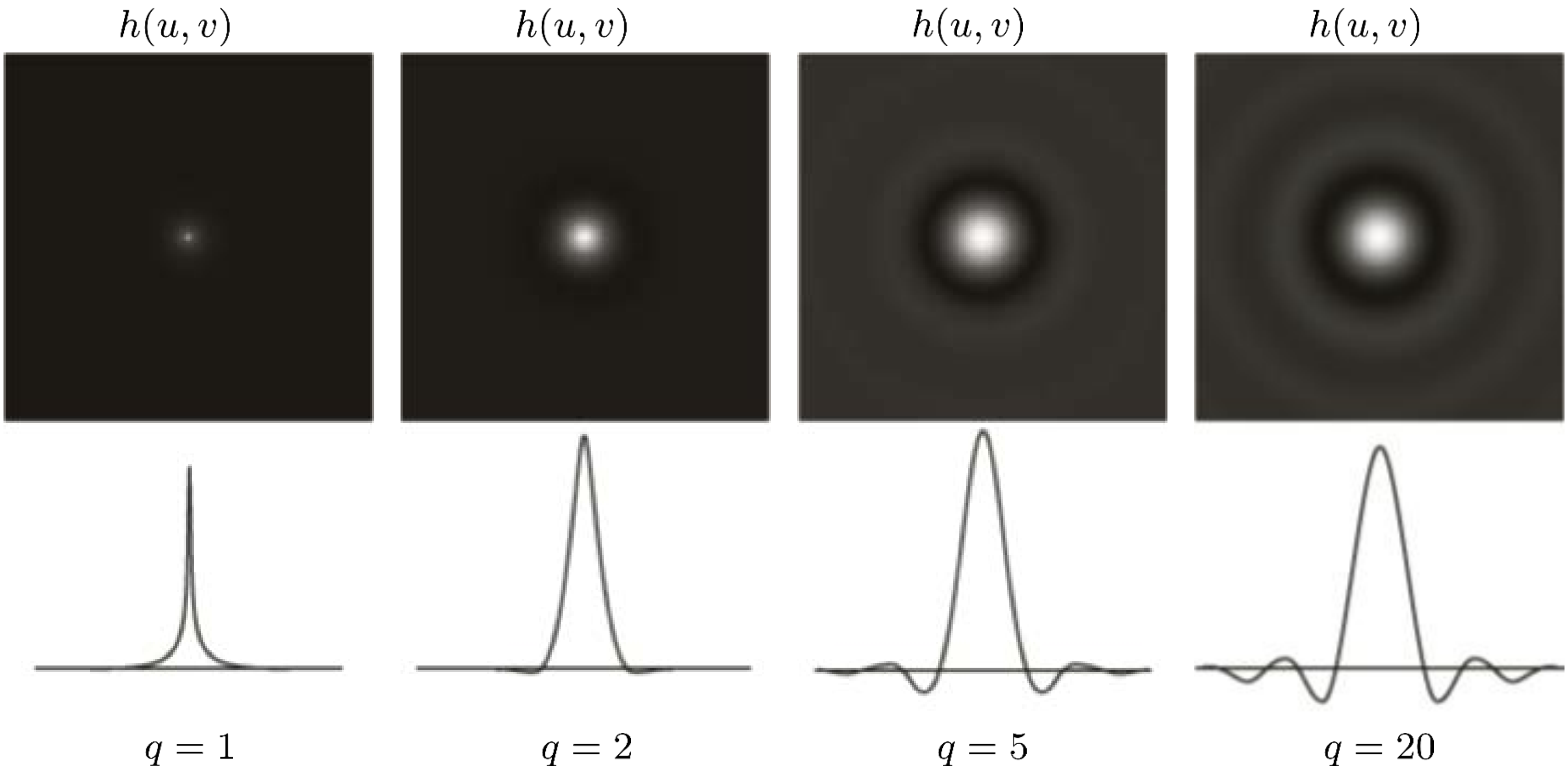






NIZKOPREPUSTNI FILTRI

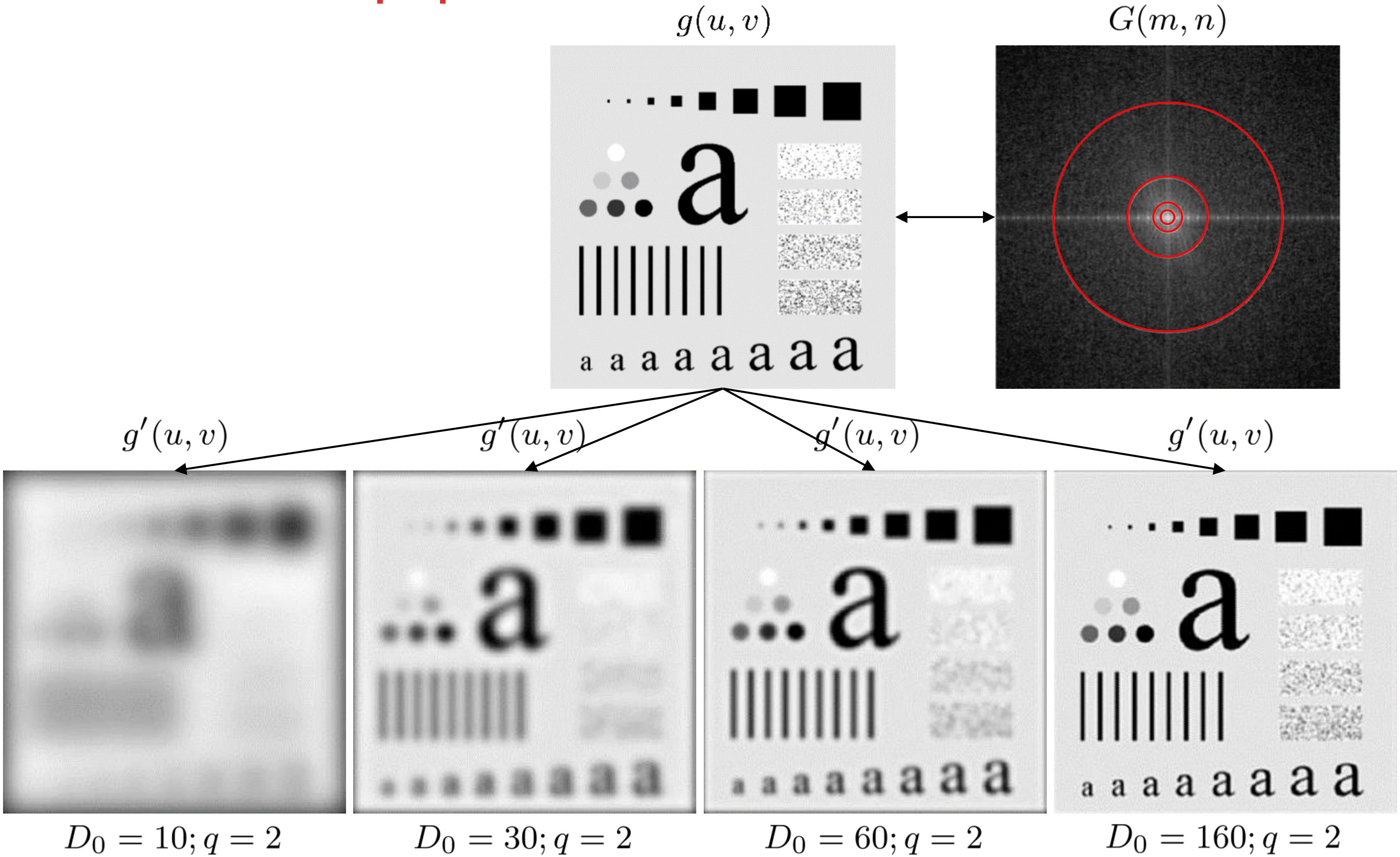
Butterworthov nizkoprepustni filter – BLPF



$$M \times N = 1000 \times 1000 \qquad D_0 = 5$$

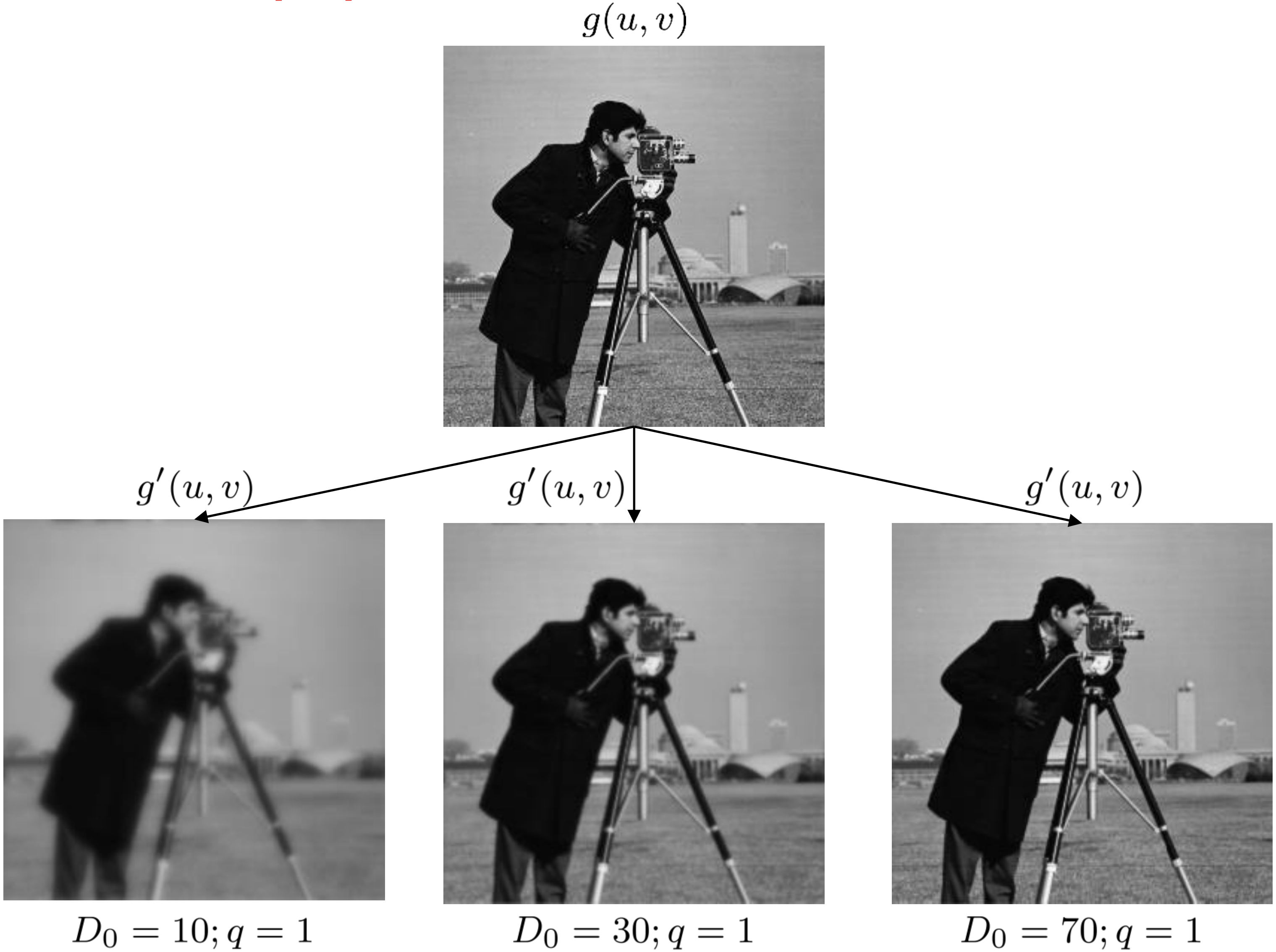
NIZKOPREPUSTNI FILTRI

Butterworthov nizkoprepustni filter – BLPF



NIZKOPREPUSTNI FILTRI

Butterworthov nizkoprepustni filter – BLPF



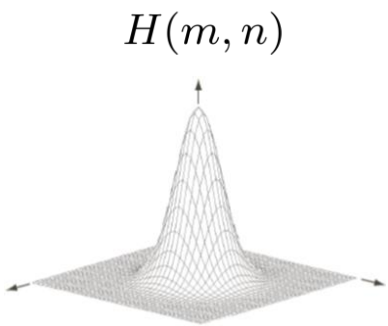
NIZKOPREPUSTNI FILTRI

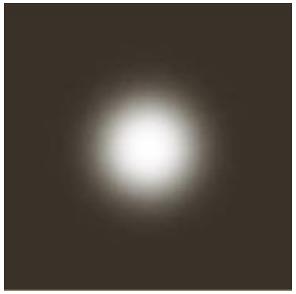
Gaussov nizkoprepustni filter – GLPF

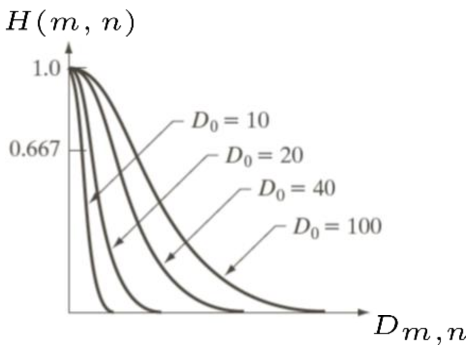
$$H(m,n) = e^{-\frac{D_{m,n}^2}{2D_0^2}}$$

D_0 … mejna frekvenca

$$\left(D_m = \frac{m - M/2}{M/2}; \quad D_n = \frac{n - N/2}{N/2}; \quad D_{m,n} = \sqrt{D_m^2 + D_n^2} \right)$$

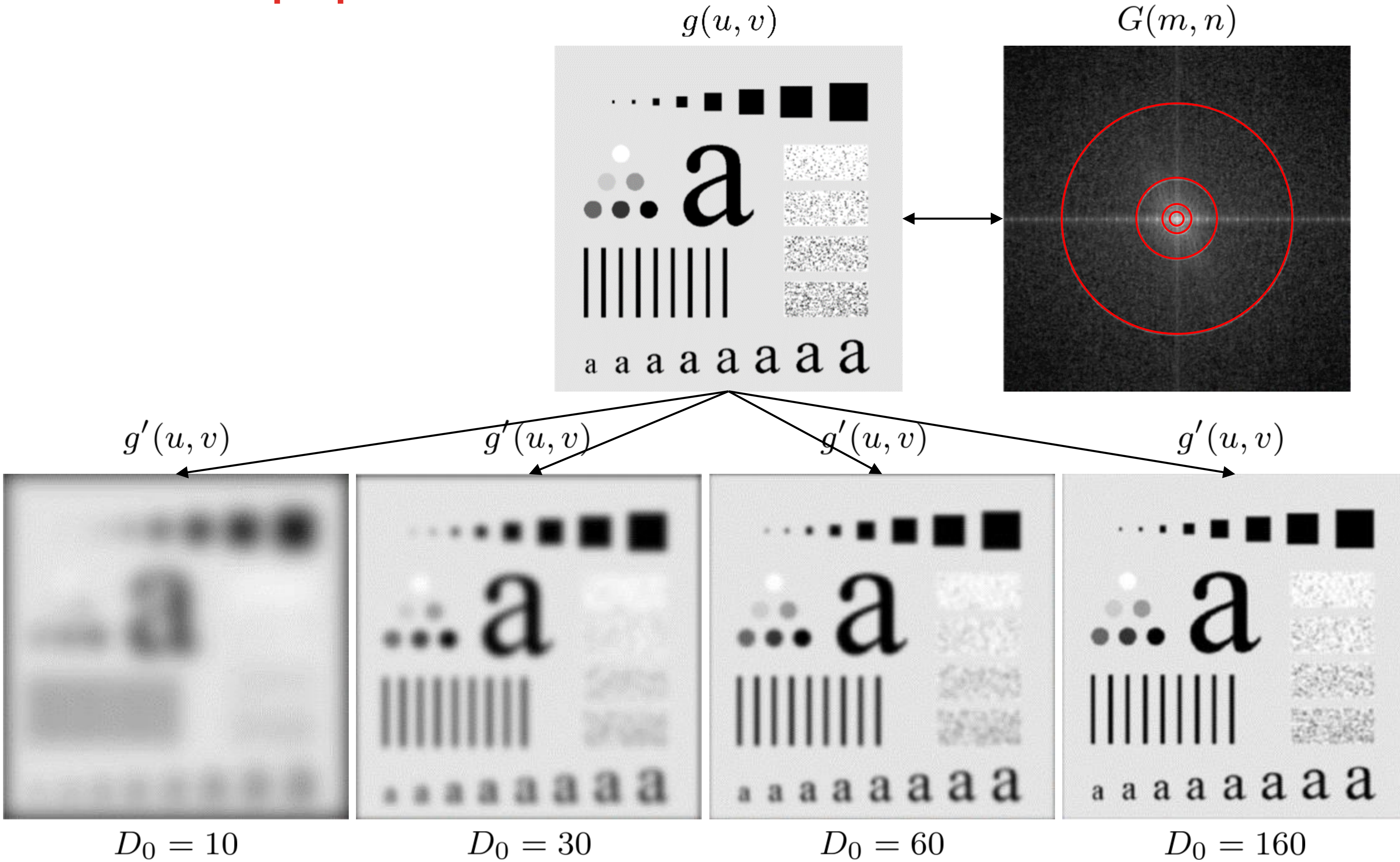






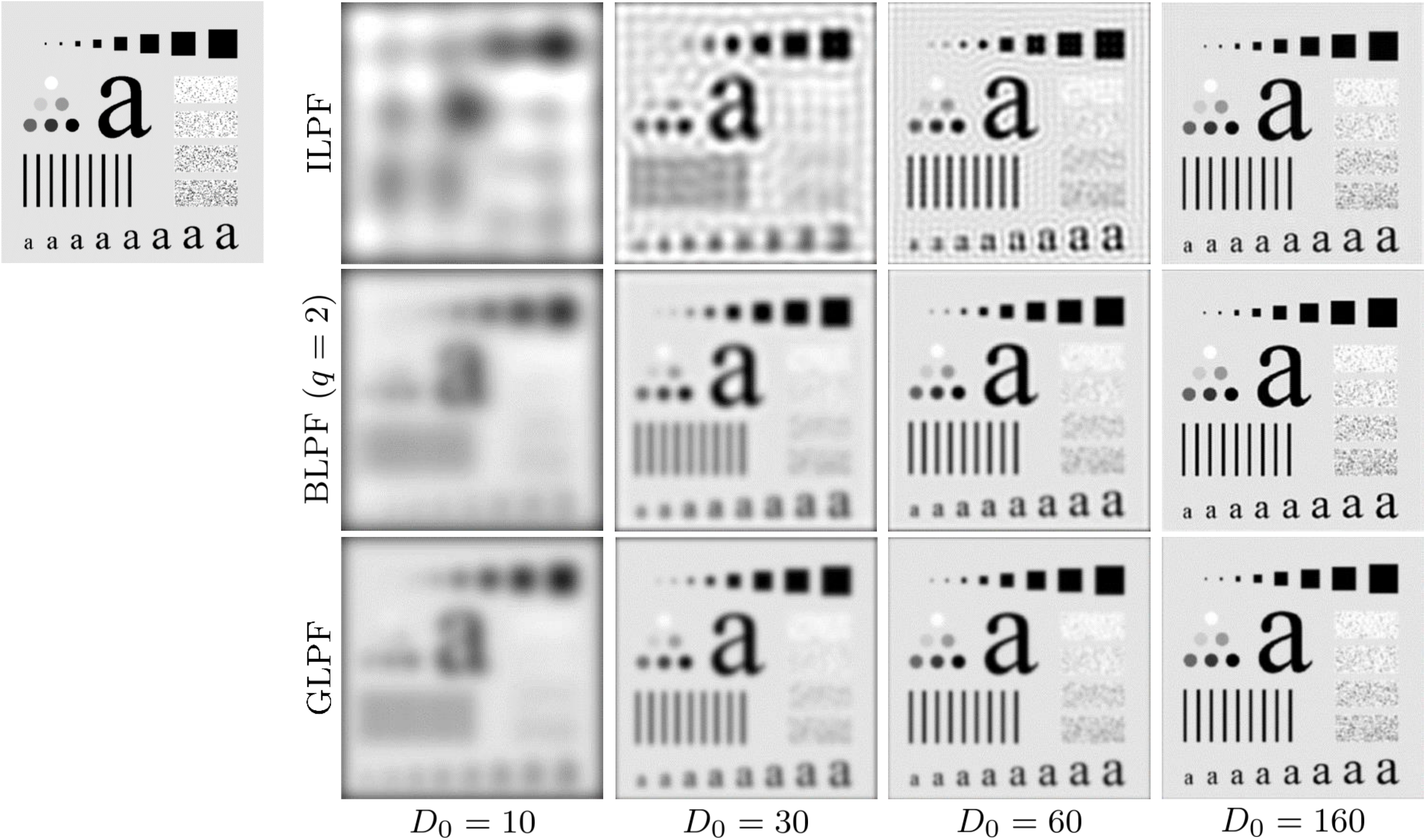
NIZKOPREPUSTNI FILTRI

Gaussov nizkoprepustni filter – GLPF



NIZKOPREPUSTNI FILTRI

Nizkoprepustni filtri: primerjava



VISOKOPREPUSTNI FILTRI

Namen

Visokoprepustni filtri oz. **sita** (*angl.* highpass filters) ohranjajo visokofrekvenčne spektralne komponente in oslabijo nizkofrekvenčne.

Izvaja se **iskanje robov**! (→ **ostrenje slike**)

Načrtovanje visokoprepustnih filtrov v frekvenčni domeni:

$$H_{\mathrm{HP}}(m,n) = \ ?$$

$$\downarrow$$

$$H_{\mathrm{HP}}(m,n) = 1 - H_{\mathrm{LP}}(m,n)$$

Visokoprepustni filtri v frekvenčni domeni:

- **idealni filter (IHPF)**
- **Butterworthov filter (BHPF)**
- **Gaussov filter (GHPF)**

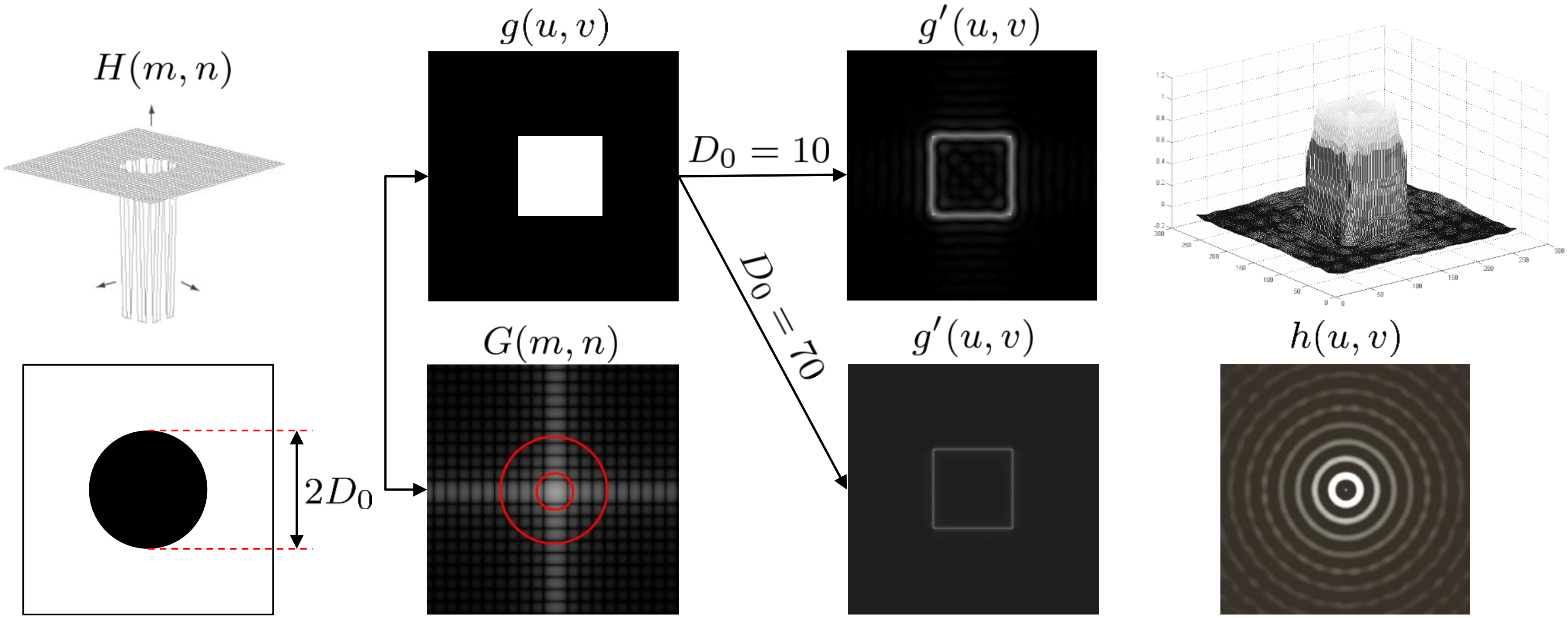
VISOKOPREPUSTNI FILTRI

Idealni visokoprepustni filter – IHPF

$$H(m,n) = \begin{cases} 0; & 0 < D_{m,n} \leq D_0 \\ 1; & D_0 < D_{m,n} \leq 1 \end{cases}$$

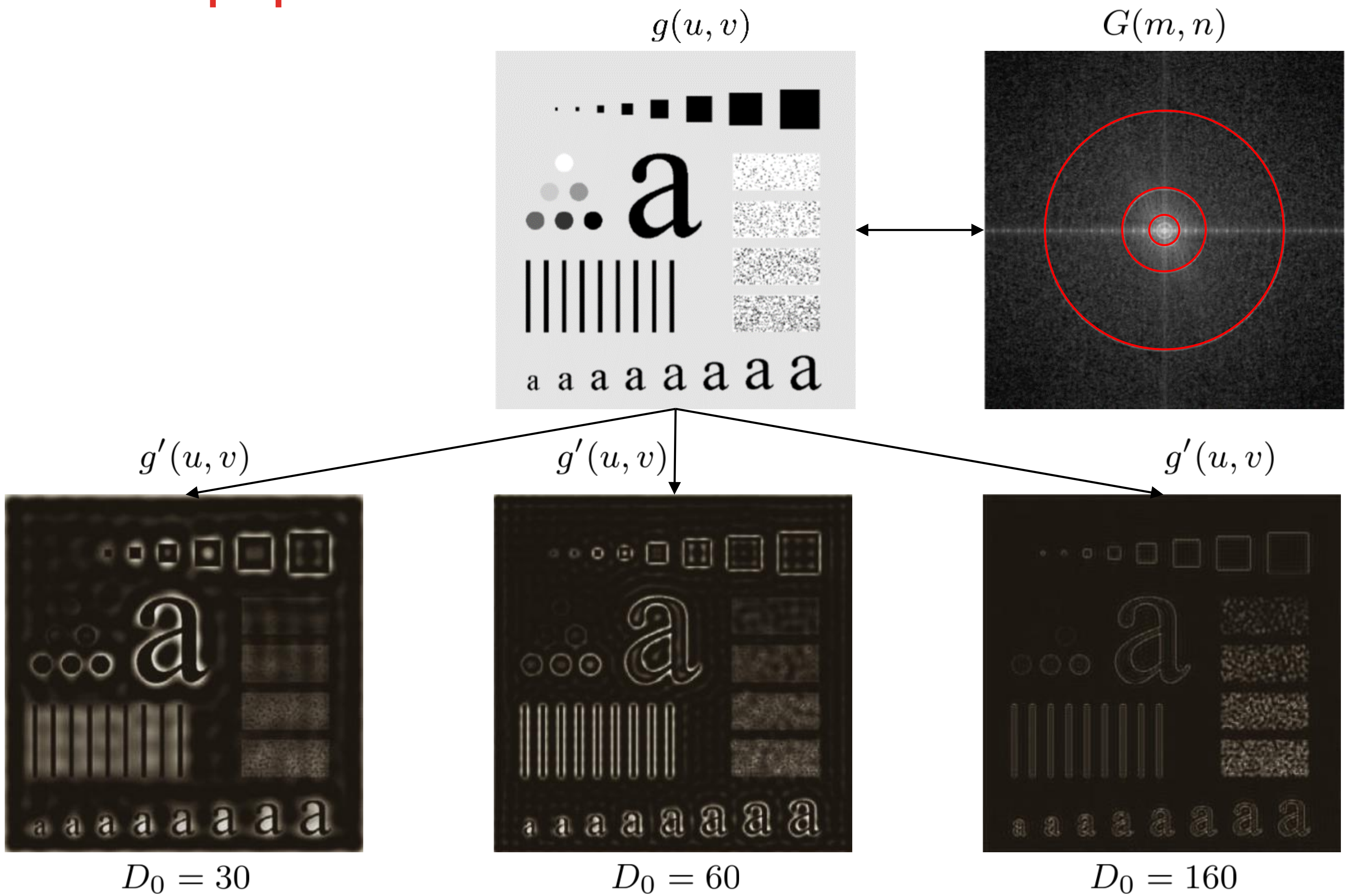
D_0 … frekvenca mejna

$$\left(D_m = \frac{m - M/2}{M/2}; \quad D_n = \frac{n - N/2}{N/2}; \quad D_{m,n} = \sqrt{D_m^2 + D_n^2} \right)$$



VISOKOPREPUSTNI FILTRI

Idealni visokoprepustni filter – IHPF



VISOKOPREPUSTNI FILTRI

Butterworthov visokoprepustni filter – BHPF

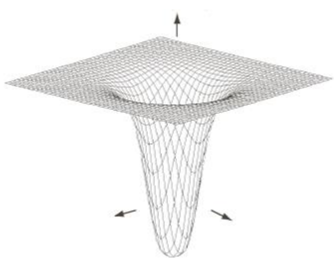
$$H(m,n) = \frac{1}{1 + (D_0/D_{m,n})^{2q}}$$

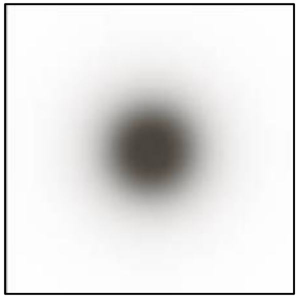
D_0 … mejna frekvenca

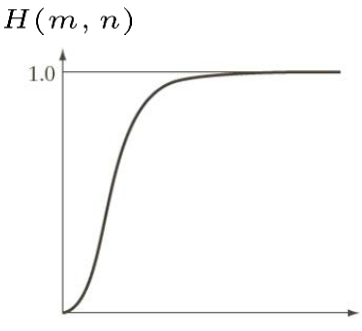
q … red filtra

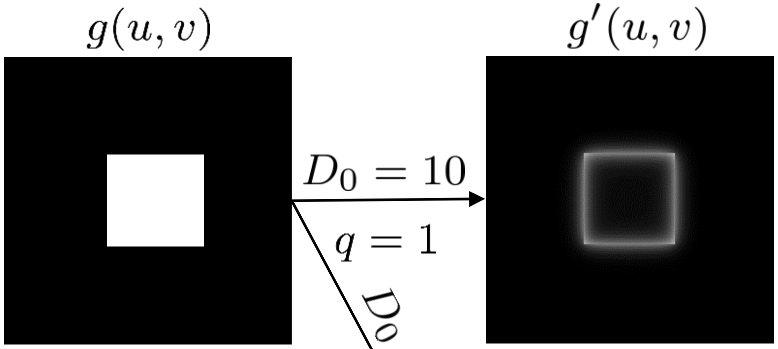
$$\left(D_m = \frac{m - M/2}{M/2}; \quad D_n = \frac{n - N/2}{N/2}; \quad D_{m,n} = \sqrt{D_m^2 + D_n^2} \right)$$

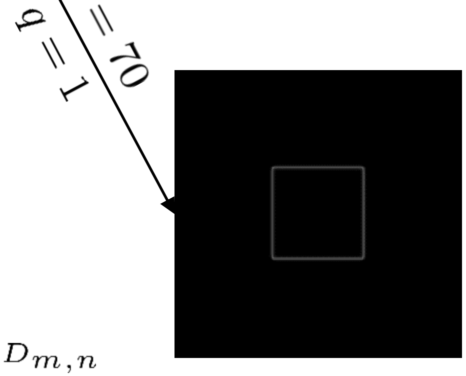
$H(m,n)$

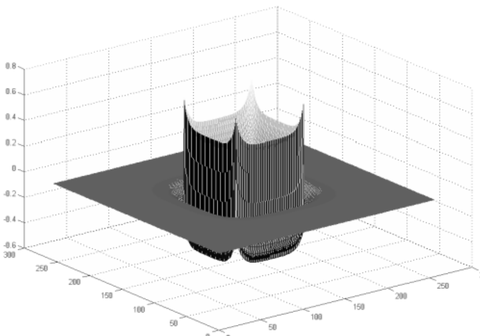




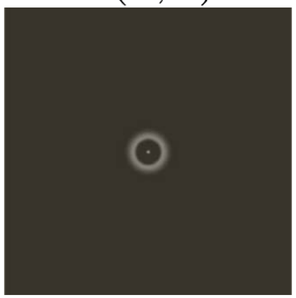






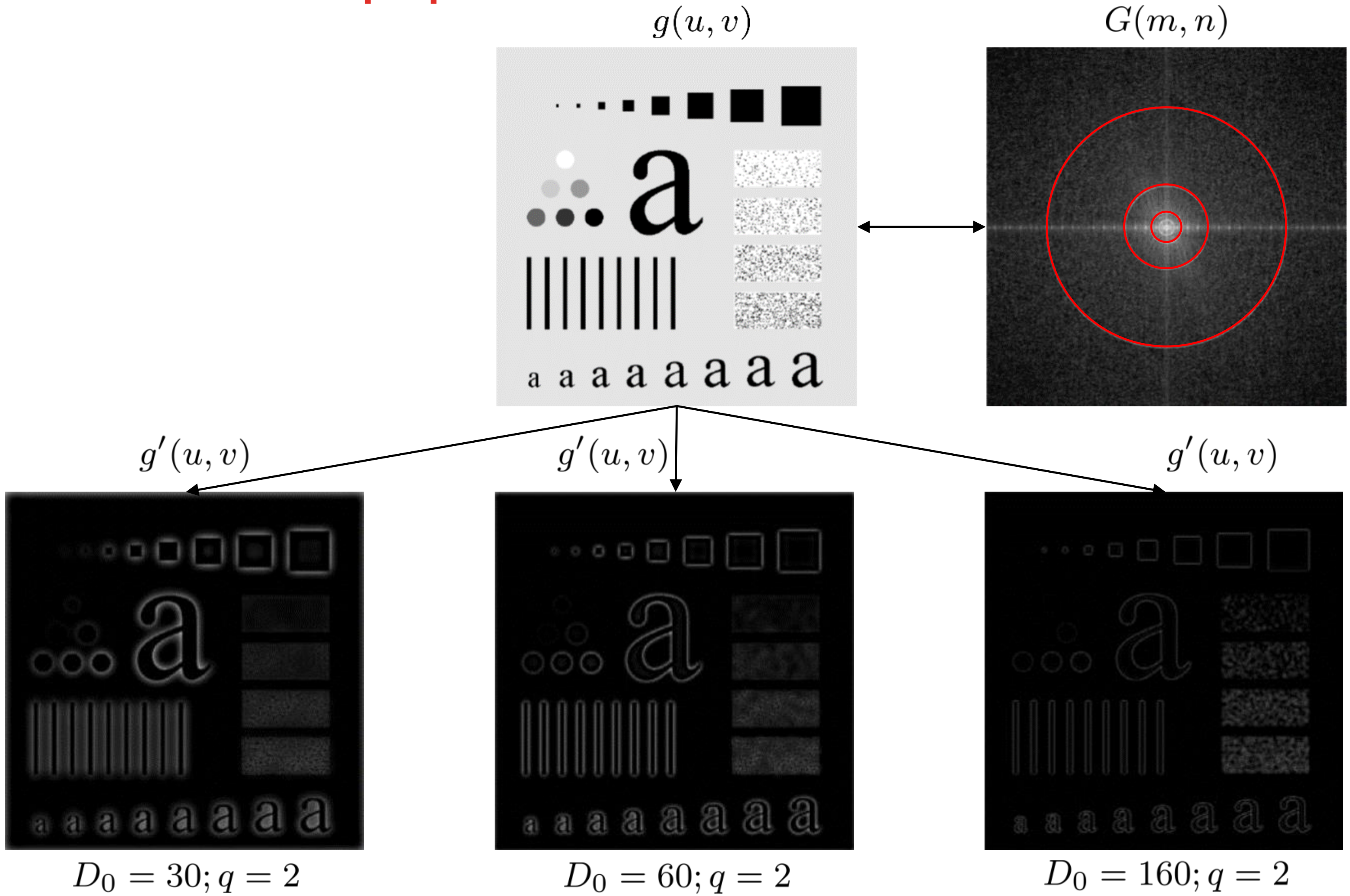


$h(u,v)$



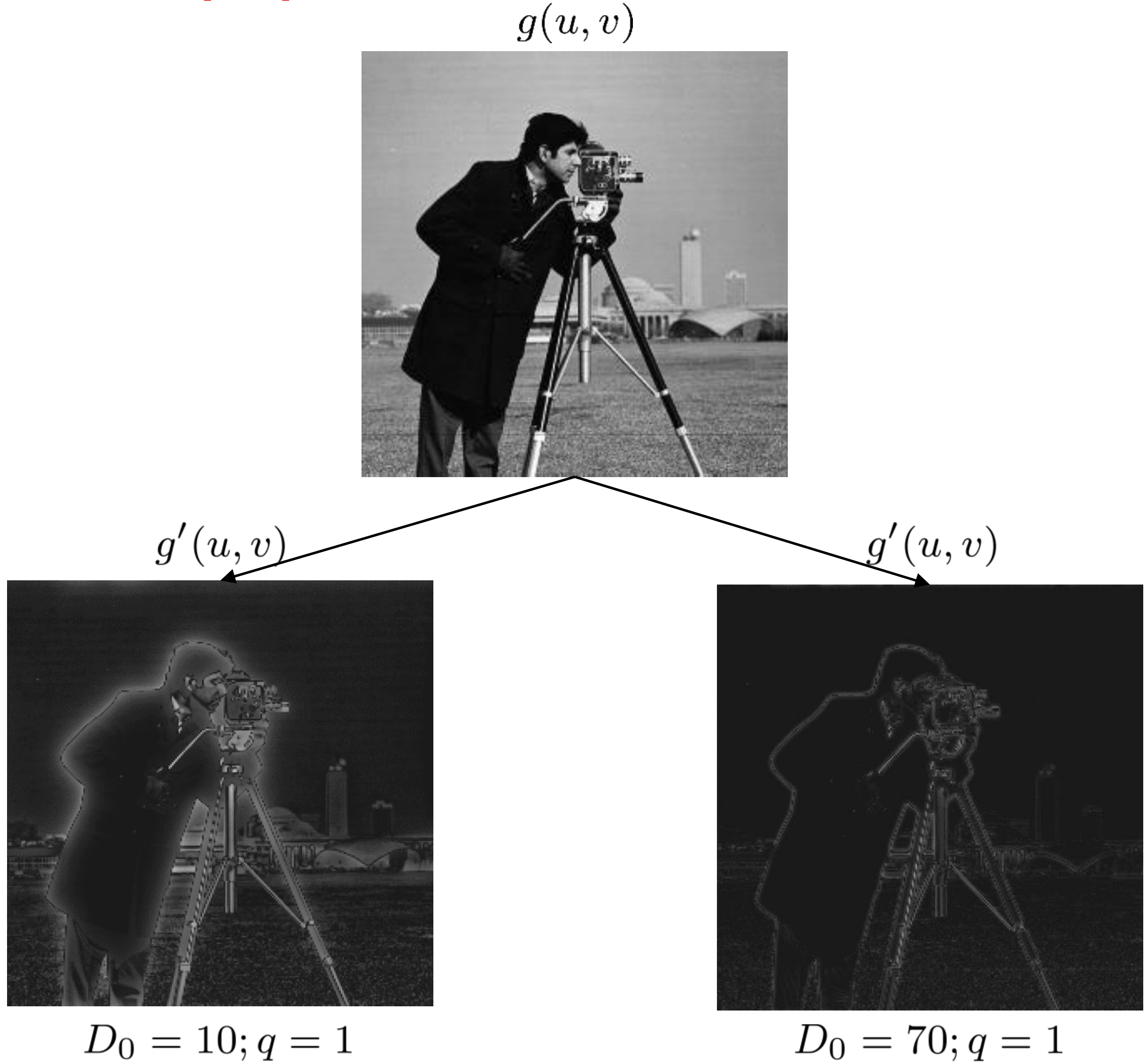
VISOKOPREPUSTNI FILTRI

Butterworthov visokoprepustni filter – BHPF



VISOKOPREPUSTNI FILTRI

Butterworthov visokoprepustni filter – BHPF



VISOKOPREPUSTNI FILTRI

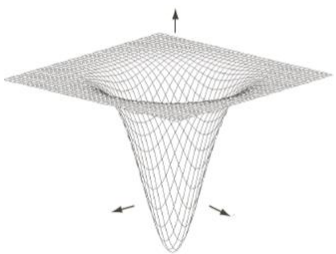
Gaussov visokoprepustni filter – GLPF

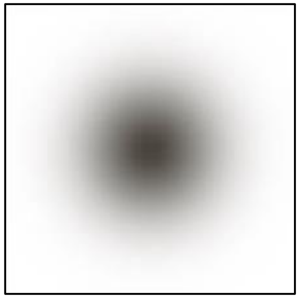
$$H(m,n) = 1 - e^{-\frac{D^2_{m,n}}{2D_0^2}}$$

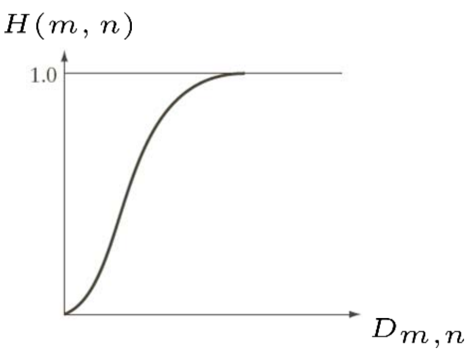
D_0 … mejna frekvenca

$$\left(D_m = \frac{m - M/2}{M/2}; \quad D_n = \frac{n - N/2}{N/2}; \quad D_{m,n} = \sqrt{D_m^2 + D_n^2} \right)$$

$H(m,n)$

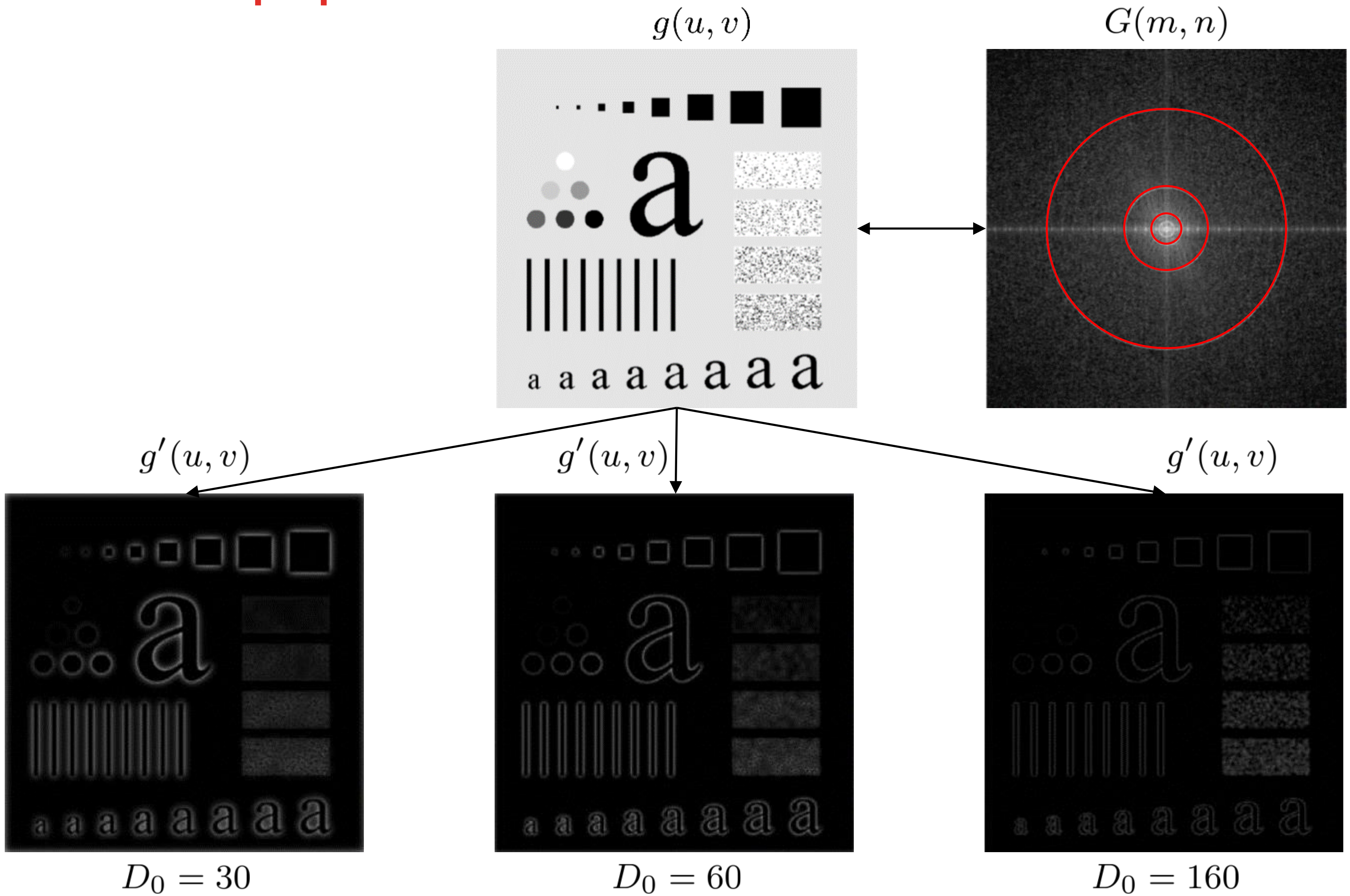






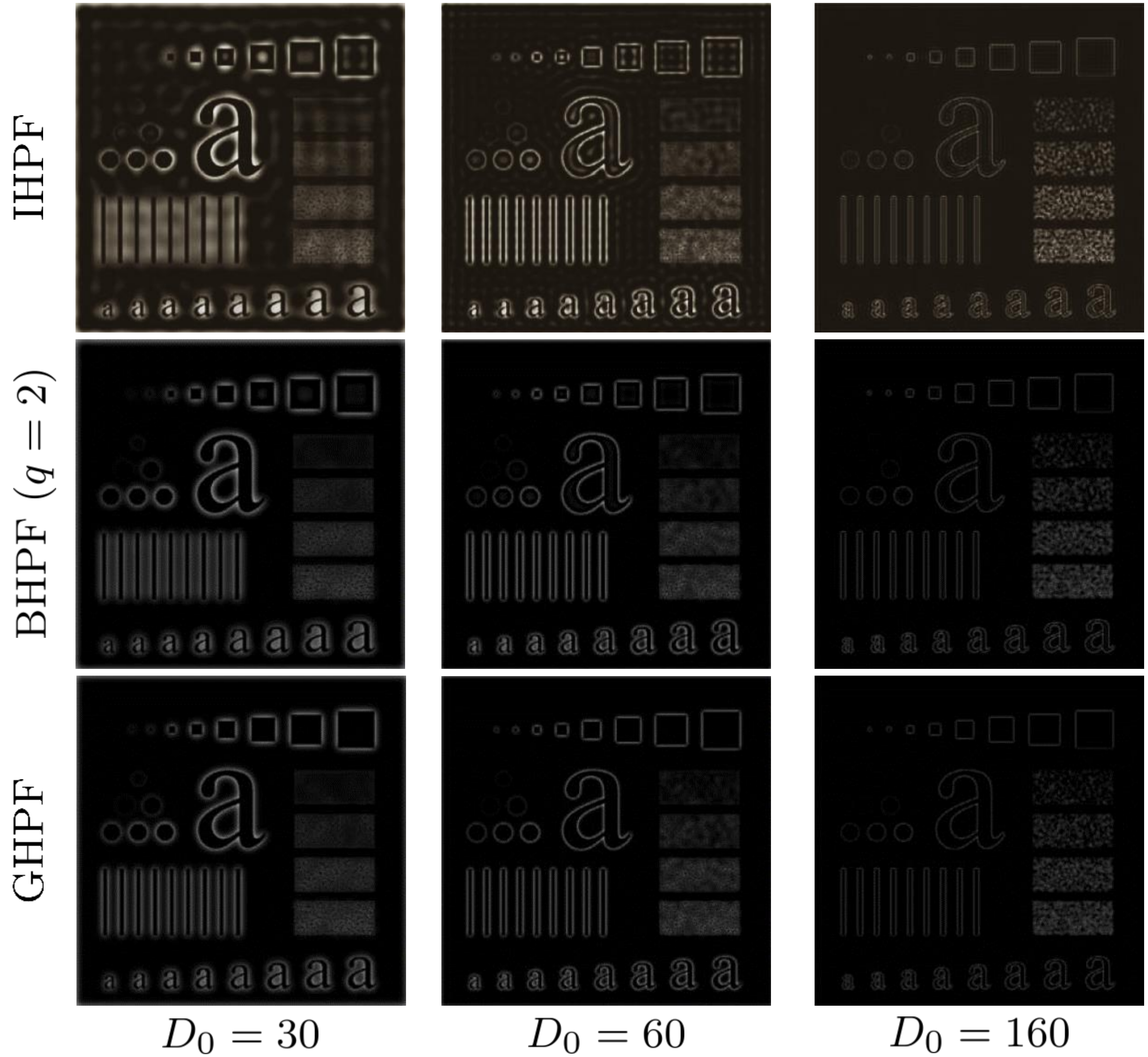
VISOKOPREPUSTNI FILTRI

Gaussov visokoprepustni filter – GHPF



VISOKOPREPUSTNI FILTRI

Visokoprepustni filtri: primerjava



SELEKTIVNI FILTRI

Namen

Selektivni filtri oz. **sita** se osredotočajo na:

- ohranjanje oz. slabljenje izbranih spektralnih komponent oz. pasov:
  - pasovno neprepustni filtri (*angl*. bandreject filters)
  - pasovno prepustni filtri (*angl*. bandpass filters)
- ohranjanje oz. slabljenje izbranih področij v frekvenčni domeni:
  - področno neprepustni filtri (*angl*. notch reject filters)
  - področno prepustni filtri (*angl*. notch pass filters)

$$H_{\mathrm{BR}}(m,n) = \ ?$$
$$H_{\mathrm{BP}}(m,n) = \ ?$$

$$\downarrow$$

$$H_{\mathrm{BP}}(m,n) = 1 - H_{\mathrm{BR}}(m,n)$$

$$H_{\mathrm{NR}}(m,n) = \ ?$$
$$H_{\mathrm{NP}}(m,n) = \ ?$$

$$\downarrow$$

$$H_{\mathrm{NP}}(m,n) = 1 - H_{\mathrm{NR}}(m,n)$$

SELEKTIVNI FILTRI

Pasovno (ne)prepustni filtri

Pasovno neprepustne filtre oz. **sita** konstruiramo na podlagi nizkoprepustnih in visokoprepustnih filtrov:

- idealni pasovno neprepustni filter – IBRF:

$$H(m,n) = \begin{cases} 0; & D_0 - \frac{W}{2} \leq D_{m,n} \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1; & \text{sicer} \end{cases}$$

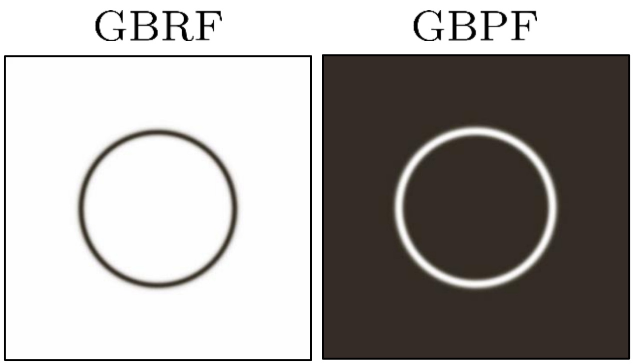
D_0 … mejna frekvenca
W … širina pasu

- Butterworthov pasovno neprepustni filter – BBRF:

$$H(m,n) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_{m,n} W}{D_{m,n}^2 - D_0^2}\right)^{2q}}$$

- Gaussov pasovno neprepustni filter – GBRF:

$$H(m,n) = 1 - e^{-\left(\frac{D_{m,n}^2 - D_0^2}{D_{m,n} W}\right)^2}$$



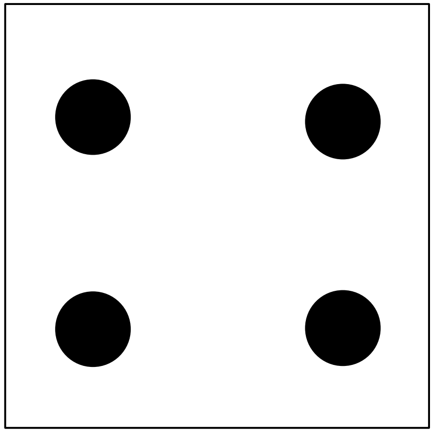
SELEKTIVNI FILTRI

Področno (ne)prepustni filtri

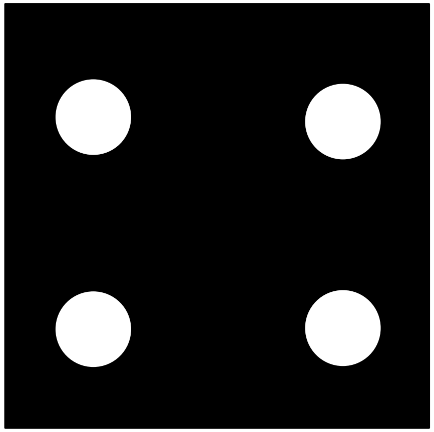
Področno neprepustne filtre oz. **sita** konstruiramo na podlagi množenja "premaknjenih" visokoprepustnih filtrov:

$$H_{\mathrm{NR}}(m,n) = \prod_{k=1}^{K} \underbrace{H_{\mathrm{HP},k}(m,n)}_{\substack{\text{središče v} \\ (m_k,\, n_k)}} \cdot \underbrace{H_{\mathrm{HP},-k}(m,n)}_{\substack{\text{središče v} \\ (-m_k,\, -n_k)}}$$

INRF



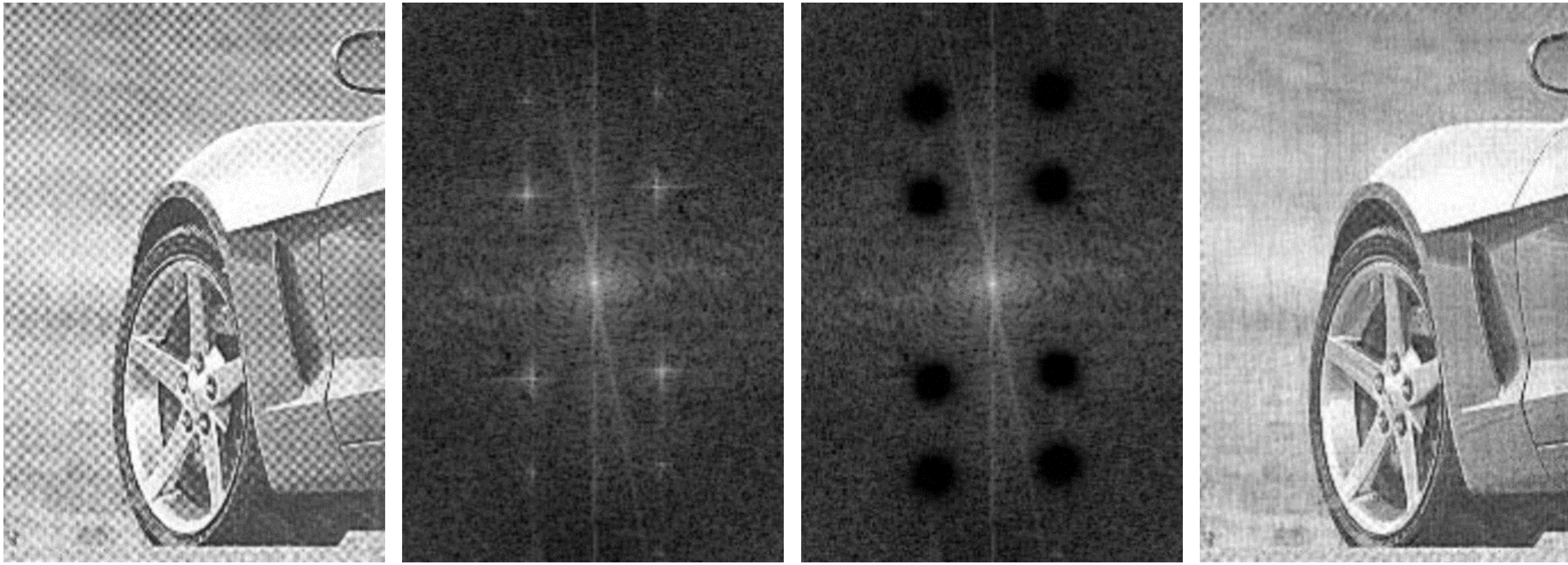
INPF



SELEKTIVNI FILTRI

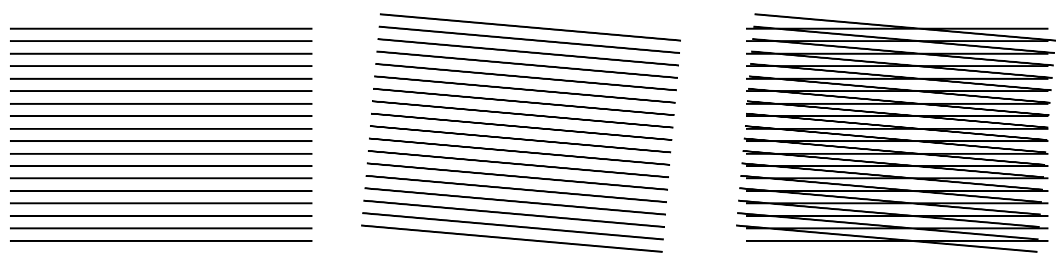
Področno (ne)prepustni filtri

$g(u,v)$ $G(m,n)$ $G(m,n) \cdot H(m,n)$ $g'(u,v)$



BNRF
$(D_0 = 3; \ n = 4)$

Moiré vzorci kot posledica rastrskega (poltonskega) tiska!



IMPLEMENTACIJA DFT

Osnove

Neposredna implementacija 1D DFT (na podlagi osnovnih enačb) je računsko zahtevna, saj za vektor dolžine M potrebuje M^2 operacij (množenj in seštevanj).

Računsko učinkovitost lahko izboljšamo:

- ker se izračun sinusov in kosinusov ponavlja (potrebujemo namreč samo M različnih vrednosti), jih lahko izračunamo enkrat in **shranimo v tabelo**
- **hitra Fourierova preslikava – FFT** (*angl.* fast Fourier transform)
    - temelji na enkratnem izračunu vmesnih rezultatov, ki se nato optimalno uporabijo čim večkrat
    - za vektor dolžine M potrebuje $M \log_2 M$ operacij

IMPLEMENTACIJA DFT

Razdružljivost 2D DFT

2D DFT lahko implementiramo **neposredno**:

$$G(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u,v)\, e^{-j2\pi\left(\frac{mu}{M}+\frac{nv}{N}\right)}$$

Lahko pa upoštevamo **razdružljivost** 2D DFT na dva 1D DFT:

1D DFT stolpca $g(u,\cdot)$

$$G(m,n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=0}^{N-1} g(u,v) e^{-j2\pi\frac{nv}{N}} \right\} e^{-j2\pi\frac{mu}{M}}$$

$$G(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1} \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j2\pi\frac{mu}{M}} \left\{ \sum_{v=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi\frac{nv}{N}} g(u,v) \right\}$$

$$\left.\begin{aligned} w_M(m,u) &= \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j2\pi\frac{mu}{M}} \\ w_N(n,v) &= \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi\frac{nv}{N}} \end{aligned}\right\} G(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1} w_M(m,u) \sum_{v=0}^{N-1} w_N(n,v) g(u,v)$$

IMPLEMENTACIJA DFT

Razdružljivost 2D DFT

$$G(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1} w_M(m,u) \sum_{v=0}^{N-1} w_N(n,v) g(u,v)$$

$$G'(u,n) = \sum_{v=1}^{N-1} w_N(n,v) g(u,v); \quad 0 \le n < N$$

$$G(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1} w_M(m,u) G'(u,n); \quad 0 \le m < M$$

2D DFT lahko torej izvedemo kot zaporedje dveh 1D DFT:

- najprej naredimo 1D DFT u-tega stolpca slike $g(u,v)$ in dobimo delno preslikavo $G'(u,n)$;
- nato naredimo 1D DFT n-te vrstice delne preslikave $G'(u,n)$ in dobimo končno preslikavo $G(m,n)$.

IMPLEMENTACIJA DFT

Razdružljivost 2D DFT

Zapis koeficientov $w_N(n,v)$ oz. $w_M(m,u)$ v matrični obliki omogoča hitrejši izračun 2D DFT:

$$w_M(m,u) = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j2\pi\frac{mu}{M}} \longrightarrow \text{matrika koeficientov } W_M$$

$$w_N(n,v) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi\frac{nv}{N}} \longrightarrow \text{matrika koeficientov } W_N$$

$$W_M = \begin{bmatrix} w_M(0,0) & \dots & w_M(m,0) & \dots & w_M(M-1,0) \\ w_M(0,1) & \dots & w_M(m,1) & \dots & w_M(M-1,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0,u) & \dots & w_M(m,u) & \dots & w_M(M-1,u) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_M(0,M-1) & \dots & w_M(m,M-1) & \dots & w_M(M-1,M-1) \end{bmatrix}$$

$$W_N = \begin{bmatrix} w_N(0,0) & \dots & w_N(n,0) & \dots & w_N(N-1,0) \\ w_N(0,1) & \dots & w_N(n,1) & \dots & w_N(N-1,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0,v) & \dots & w_N(n,v) & \dots & w_N(N-1,v) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0,N-1) & \dots & w_N(n,N-1) & \dots & w_N(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

IMPLEMENTACIJA DFT

Razdružljivost 2D DFT

Najprej opravimo preslikavo stolpcev in dobimo delno preslikavo glede na v-to vrstico, tako da naredimo 1D DFT u-tega stolpca slike $g(u,v)$:

$$\begin{bmatrix} G'(u,0) \\ G'(u,1) \\ \vdots \\ G'(u,n) \\ \vdots \\ G'(u,N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_N(0,0) & \dots & w_N(n,0) & \dots & w_N(N-1,0) \\ w_N(0,1) & \dots & w_N(n,1) & \dots & w_N(N-1,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0,v) & \dots & w_N(n,v) & \dots & w_N(N-1,v) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0,N-1) & \dots & w_N(n,N-1) & \dots & w_N(N-1,N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(u,0) \\ g(u,1) \\ \vdots \\ g(u,v) \\ \vdots \\ g(u,N-1) \end{bmatrix}$$

$$G'(u,\cdot) = W_N(n,v)g(u,\cdot) \xrightarrow{0 \leq u < M} G'(u,n) = W_N\; g(u,v)$$

Nato opravimo preslikavo vrstic in dobimo končno preslikavo glede na u-ti stolpec, tako da naredimo 1D DFT n-te vrstice delne preslikave $G'(u,n)$:

$$\begin{bmatrix} G(0,n) \\ G(1,n) \\ \vdots \\ G(m,n) \\ \vdots \\ G(M-1,n) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} G'(0,n) \\ G'(1,n) \\ \vdots \\ G'(m,n) \\ \vdots \\ G'(M-1,n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_M(0,0) & \dots & w_M(m,0) & \dots & w_M(M-1,0) \\ w_M(0,1) & \dots & w_M(m,1) & \dots & w_M(M-1,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0,u) & \dots & w_M(m,u) & \dots & w_M(M-1,u) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_M(0,M-1) & \dots & w_M(m,M-1) & \dots & w_M(M-1,M-1) \end{bmatrix}$$

$$G(\cdot,n) = G'(\cdot,n)W_M(m,u) \xrightarrow{0 \leq n < N} G(m,n) = G'(u,n)\; W_M$$

IMPLEMENTACIJA DFT

Razdružljivost 2D DFT

2D DFT lahko torej sestavimo iz dveh 1D DFT (najprej dobimo delno preslikavo z preslikavo stolpcev in nato končno preslikavo s preslikavo vrstic). V matrični obliki je to enako:

$$G(m,n) = G'(u,n)\ W_M \longleftarrow G'(u,n) = W_N\ g(u,v)$$

$$G(m,n) = W_N\ g(u,v)\ W_M = \mathrm{DFT}\left\{g(u,v)\right\}$$

Inverzni 2D DFT (IDFT) pa po pravilu matričnega množenja dobimo kot:

$$g(u,v) = W_N^*\ G(m,n)\ W_M^* = \mathrm{IDFT}\left\{G(m,n)\right\}$$

kjer sta W_M^* in W_N^* konjugirani matriki koeficientov.

LABORATORIJSKE VAJE

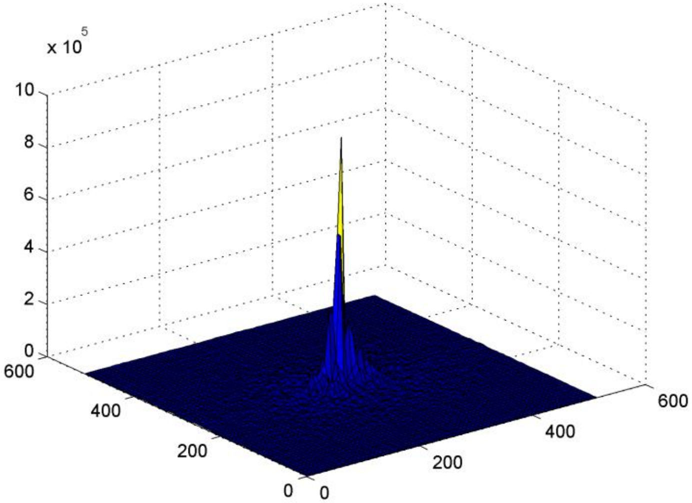
Filtriranje slik v frekvenčni domeni

Na laboratorijskih vajah boste:

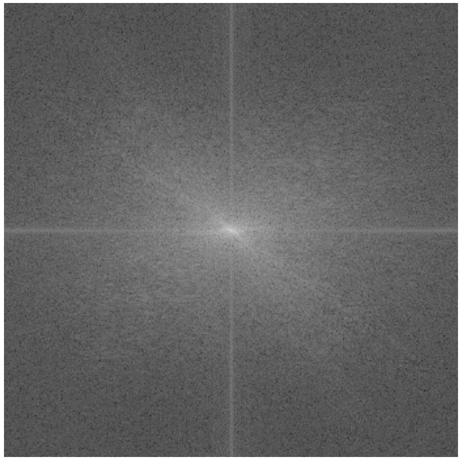
- implementirali 2D DFT in 2D IDFT
- ustrezno prikazovali spektre v frekvenčnem prostoru
- izvajali filtriranje 2D slik v frekvenčnem prostoru

$g(u,v)$

$|G(m,n)|$



$\log|G(m,n)|$



Viri slik: *R. C. Gonzalez, R. E. Woods: Digital Image Processing, 3. izdaja, Pearson Prentice Hall, 2008*