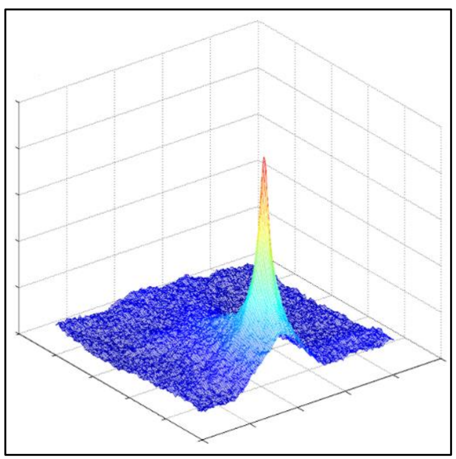
UNIVERZA V LJUBLJANI | FE Fakulteta za elektrotehniko

PRIPRAVA NA LABORATORIJSKE VAJE
Vaja 9: Geometrijska poravnava slik

Obdelava slik in videa

prof. dr. Tomaž Vrtovec

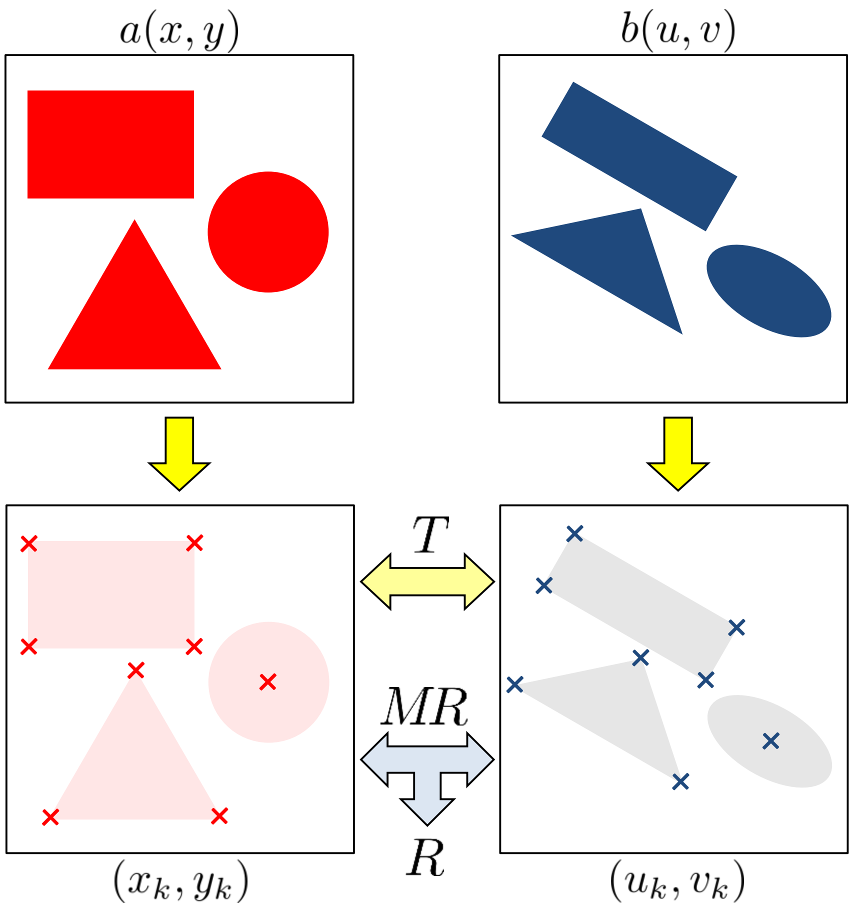


LABORATORIJ ZA SLIKOVNE TEHNOLOGIJE
LABORATORY OF IMAGING TECHNOLOGIES

GEOMETRIJSKA PORAVNAVA SLIK

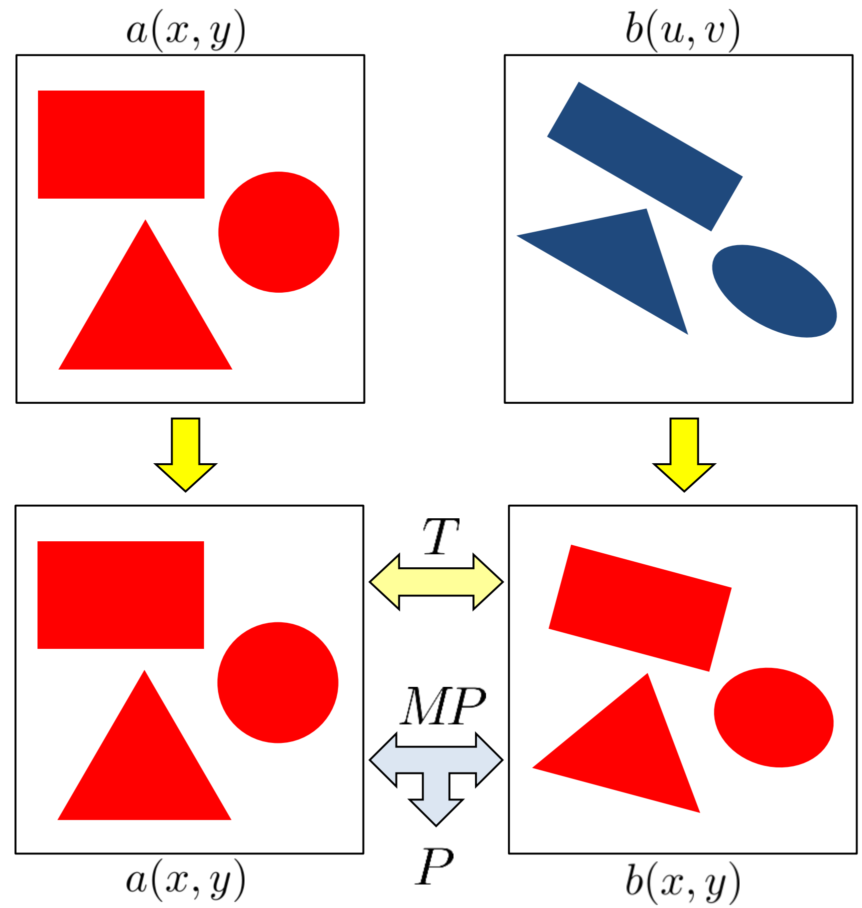
Osnovna pristopa

Poravnava kontrolnih točk



Minimizacija razdalje med vsemi kontrolnimi točkami

Poravnava z optimizacijo podobnosti



Maksimizacija podobnosti med vsemi slikovnimi elementi

GEOMETRIJSKA PORAVNAVA SLIK

Optimizacija podobnosti

Poravnava kontrolnih točk (*angl.* point set registration):

- minimizacija geometrijske razdalje med vsemi pari korespondenčnih kontrolnih točk
- kontrolne točke lahko v določenih primerih določimo samodejno (z avtomatskim postopkom)

Poravnava z optimizacijo podobnosti (*angl.* similarity-based registration):

- maksimizacija podobnosti med sivinskimi vrednostmi vseh istoležnih slikovnih elementov
- zelo splošna
- ne zahteva določanja parov kontrolnih točk
- lahko jo relativno preprosto avtomatiziramo

PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Osnove

Na razpolago imamo znano **množico parov** pripadajočih kontrolnih točk na referenčni sliki $a(x, y)$ in vhodni sliki $b(u, v)$:

$$(x_k, y_k) \leftrightarrow (u_k, v_k)$$

Pripadajoči pari točk (*angl.* corresponding point pairs) morajo predstavljati iste objekte na obeh slikah:

- določimo jih lahko **ročno** → označimo izrazite značilnosti objektov, ki jih lahko zanesljivo razpoznamo in določimo (npr. oglišča, središča majhnih objektov, razcepišča, velike ukrivljenosti črt in robov)
    - povezava s t. i. **oslonilnimi točkami** (*angl.* landmarks)
- obstajajo tudi posebni **samodejni in polsamodejni postopki** za iskanje pripadajočih (oz. oslonilnih) točk

PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Mera razdalje

Mera razdalje (MR) je metrika, ki mora imeti naslednje lastnosti:

- **nenegativnost**:

$$MR(a,b) \geq 0$$

- **identiteta**:

$$MR(a,b) = 0 \quad \text{pri} \quad a = b$$

- **simetričnost**:

$$MR(a,b) = MR(b,a)$$

- **trikotniška neenakost**:

$$MR(a,c) \geq MR(a,b) + MR(b,c)$$

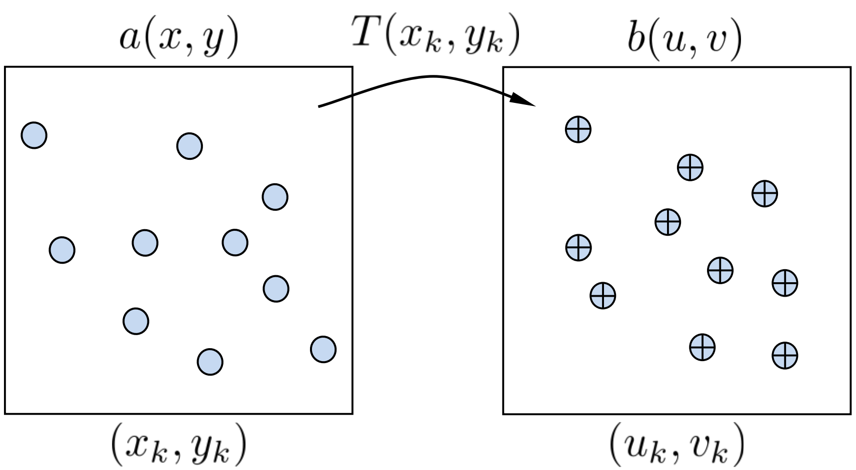
PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Vrste poravnav kontrolnih točk

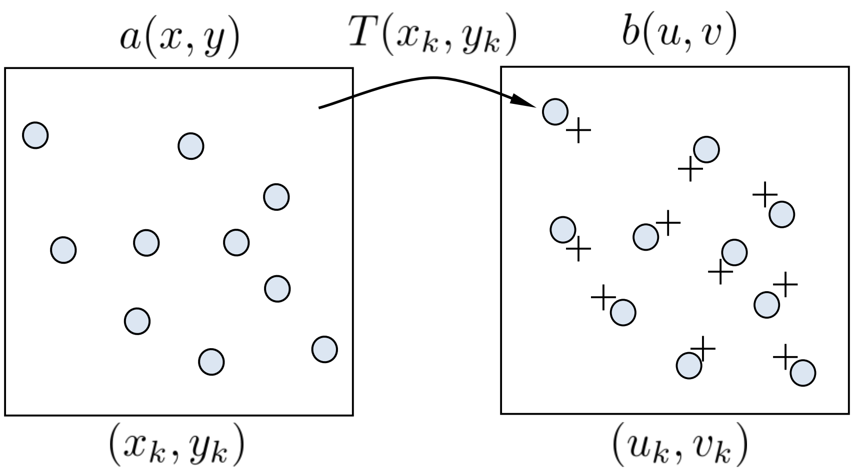
Iščemo preslikavo T, ki bo kontrolne točke čim boljše prekrila:

$$T(x_k, y_k) \leftrightarrow (u_k, v_k)$$

Interpolacijska poravnava



Aproksimacijska poravnava



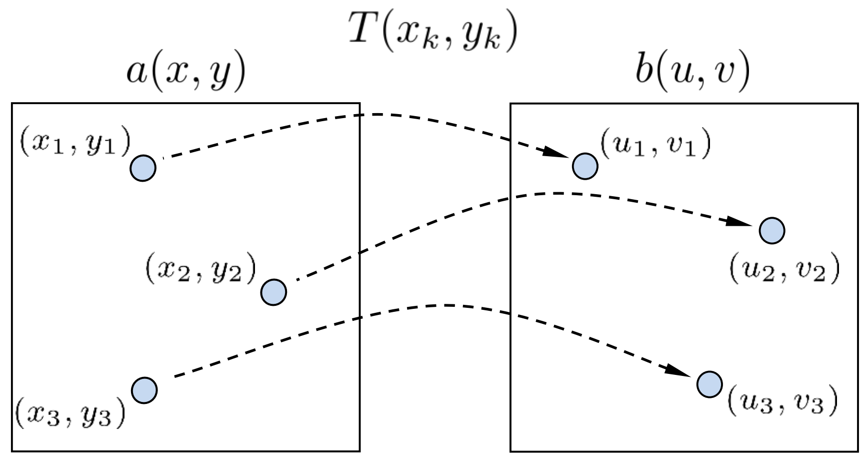
PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Afina interpolacijska poravnava (v 2D)

Afina preslikava:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

6 parametrov $\rightarrow$
$\rightarrow$ potrebujemo 3 pare kontrolnih točk



Sistem 6 enačb za 6 neznanih parametrov:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev $\rightarrow$ matrika parametrov preslikave T:

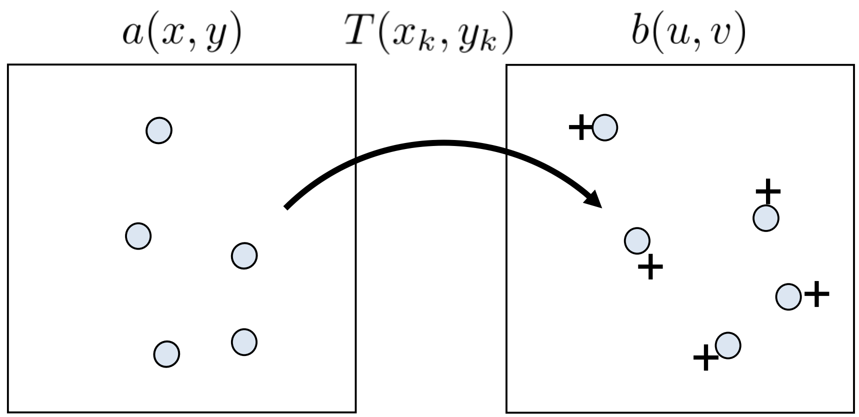
$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Afina aproksimacijska poravnava (v 2D)

Afina preslikava:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Če imamo več kot 3 pare kontrolnih točk dobimo predoločen sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_K \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_K \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_K \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_K \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Kontrolne točke z afino preslikavo ne moremo popolnoma poravnati → lahko jih le približno poravnamo.

Iščemo preslikavo T, ki bo **minimizirala povprečno kvadratno razdaljo** R^2 :

$$R^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \Big(T(x_k, y_k) - (u_k, v_k) \Big)^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \Big((a_{11}x_k + a_{12}y_k + t_x - u_k)^2 + (a_{21}x_k + a_{22}y_k + t_y - v_k)^2 \Big)$$

PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Afina aproksimacijska poravnava (v 2D)

Prileganje po postopku najmanjših kvadratov (*angl.* least squares fitting):

$$R^2 = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left((a_{11}x_k + a_{12}y_k + t_x - u_k)^2 + (a_{21}x_k + a_{22}y_k + t_y - v_k)^2\right)$$

Odvajamo po vseh parametrih in odvode postavimo na nič :

$$\frac{\partial R^2}{\partial a_{11}} = 0 \quad \frac{\partial R^2}{\partial a_{12}} = 0 \quad \frac{\partial R^2}{\partial t_x} = 0 \quad \frac{\partial R^2}{\partial a_{21}} = 0 \quad \frac{\partial R^2}{\partial a_{21}} = 0 \quad \frac{\partial R^2}{\partial t_y} = 0$$

Dobimo sistem 6 enačb za 6 neznanih parametrov:

$$\begin{bmatrix} \overline{xx} & \overline{xy} & \overline{x} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{xy} & \overline{yy} & \overline{y} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{x} & \overline{y} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{xx} & \overline{xy} & \overline{x} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{xy} & \overline{yy} & \overline{y} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{x} & \overline{y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ t_x \\ a_{21} \\ a_{22} \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{ux} \\ \overline{uy} \\ \overline{u} \\ \overline{vx} \\ \overline{vy} \\ \overline{v} \end{bmatrix}$$

Rešitev:
$\rightarrow$ parametri preslikave $\mathbf{t}$

$$\mathbf{P}_{xy} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{p}_{uv}$$

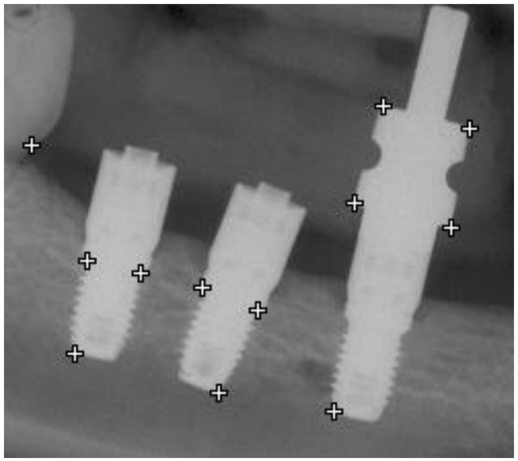
$$\mathbf{t} = \mathbf{P}_{xy}^{-1} \cdot \mathbf{p}_{uv}$$

$$\overline{xx} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_k x_k; \quad \overline{xy} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_k y_k; \quad \overline{x} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_k; \quad \ldots$$

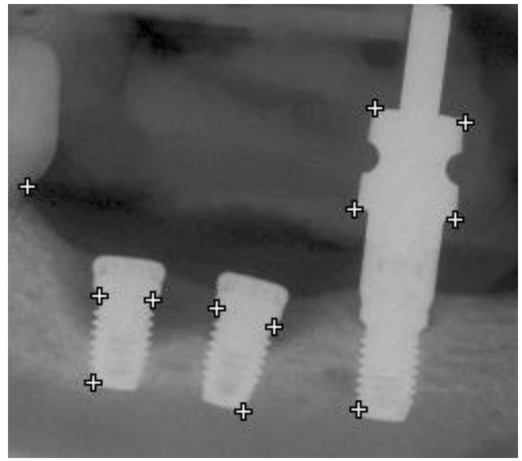
PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Afina aproksimacijska poravnava (v 2D)

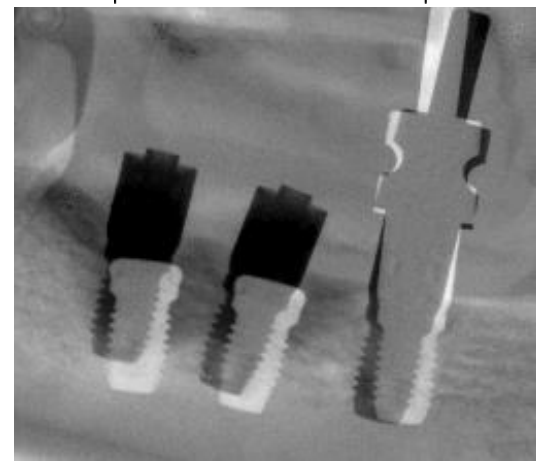
$a(x,y)$



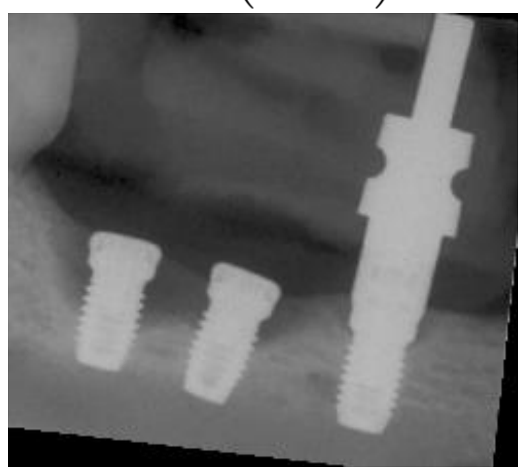
$b(u,v)$



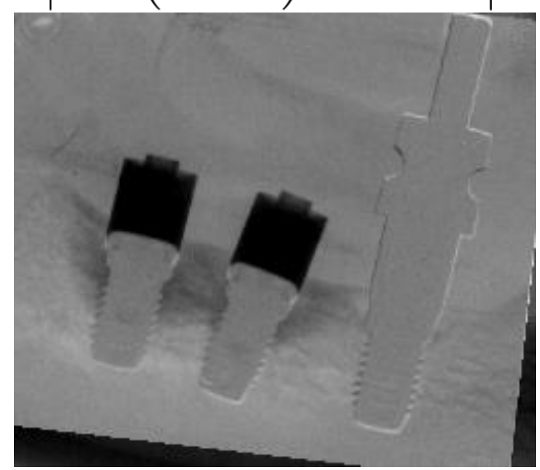
$\left|b(x,y)-a(x,y)\right|$



$T^{-1}\Big(b(u,v)\Big)$



$\left|T^{-1}\Big(b(u,v)\Big)-a(x,y)\right|$



PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Toga interpolacijska poravnava (v 2D)

Toga preslikava:

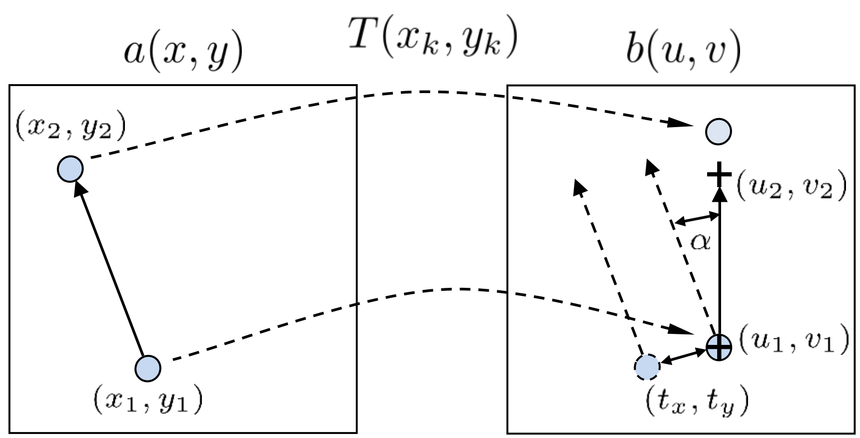
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & t_x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 parametri → **interpolacija ni možna**:

- 1 par kontrolnih točk je premalo → 2 parametra
- 2 para kontrolnih točk je preveč → 4 parametri

2 para kontrolnih točk:

- s prvim parom določimo parametra translacije in točki interpoliramo
- z drugim parom določimo vektor za kot rotacije in točki aproksimiramo



PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Toga aproksimacijska poravnava (v 2D)

Če imamo več kot 1 par kontrolnih točk dobimo predoločen sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_K \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_K \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & t_x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_K \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_K \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Iščemo preslikavo T, ki bo **minimizirala povprečno kvadratno razdaljo** R^2:

$$R^2 = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\Big((x_k\cos\alpha - y_k\sin\alpha + t_x - u_k)^2 + (x_k\sin\alpha + y_k\cos\alpha + t_y - v_k)^2\Big)$$

Odvajamo po vseh parametrih in odvode postavimo na nič :

$$\frac{\partial R^2}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial R^2}{\partial t_x} = 0 \quad \frac{\partial R^2}{\partial t_y} = 0$$

Rešitev sistema enačb $\rightarrow$ parametri preslikave

$$\alpha = -\mathrm{arctg}\frac{\overline{uy} - \overline{vx} - \overline{u}\cdot\overline{y} + \overline{v}\cdot\overline{x}}{\overline{ux} + \overline{vy} - \overline{u}\cdot\overline{x} - \overline{v}\cdot\overline{y}}$$

$$t_x = \overline{u} - \overline{x}\cos\alpha + \overline{y}\sin\alpha$$

$$t_y = \overline{v} - \overline{x}\sin\alpha - \overline{y}\cos\alpha$$

PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Poravnava z radialnimi funkcijami (v 2D)

Preslikava z radialnimi funkcijami:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U_k(x,y) \qquad U_k(x,y) = U_k\Big(\|(x_k, y_k) - (x,y)\|\Big)$$

$$v = b_0 + b_1 x + b_2 y + \sum_{k=1}^{K} \beta_k U_k(x,y) \qquad U(r) = -r^2 \log r, \qquad U(r) = \mathrm{e}^{-(r/\sigma)^2}$$

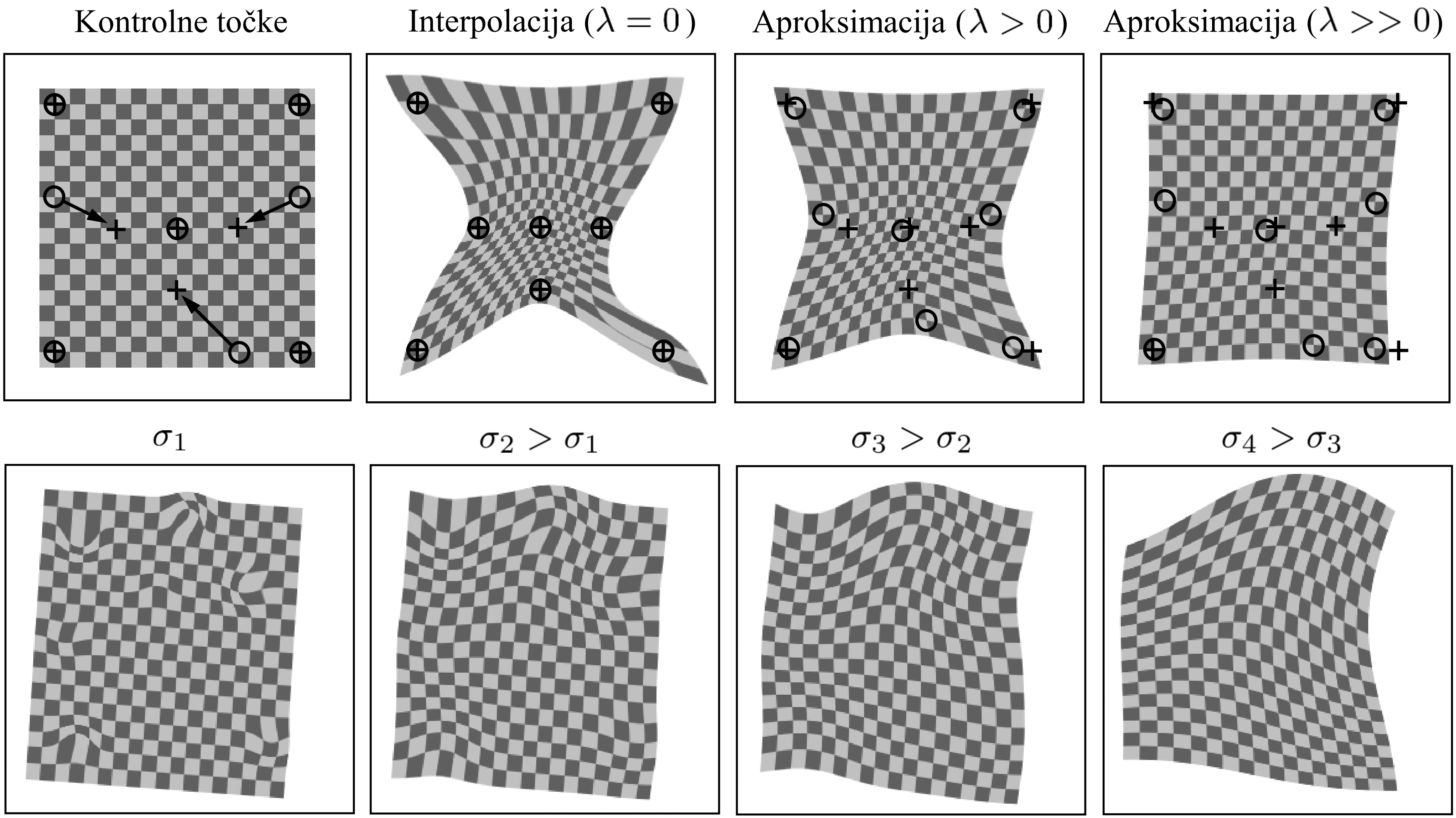
- poravnava **poljubnega števila parov** pripadajočih kontrolnih točk
- lahko izvedemo **interpolacijo** $(\lambda = 0)$ ali **aproksimacijo** $(\lambda > 0)$

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_K & v_K \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(r_{11}) + \lambda_1 & U(r_{12}) & \cdots & U(r_{1K}) & 1 & x_1 & y_1 \\ U(r_{21}) & U(r_{22}) + \lambda_2 & \cdots & U(r_{2K}) & 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U(r_{K1}) & U(r_{K2}) & \cdots & U(r_{KK}) + \lambda_K & 1 & x_K & y_K \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_K & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_K & \beta_K \\ a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{W} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{W} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{Y}}$$

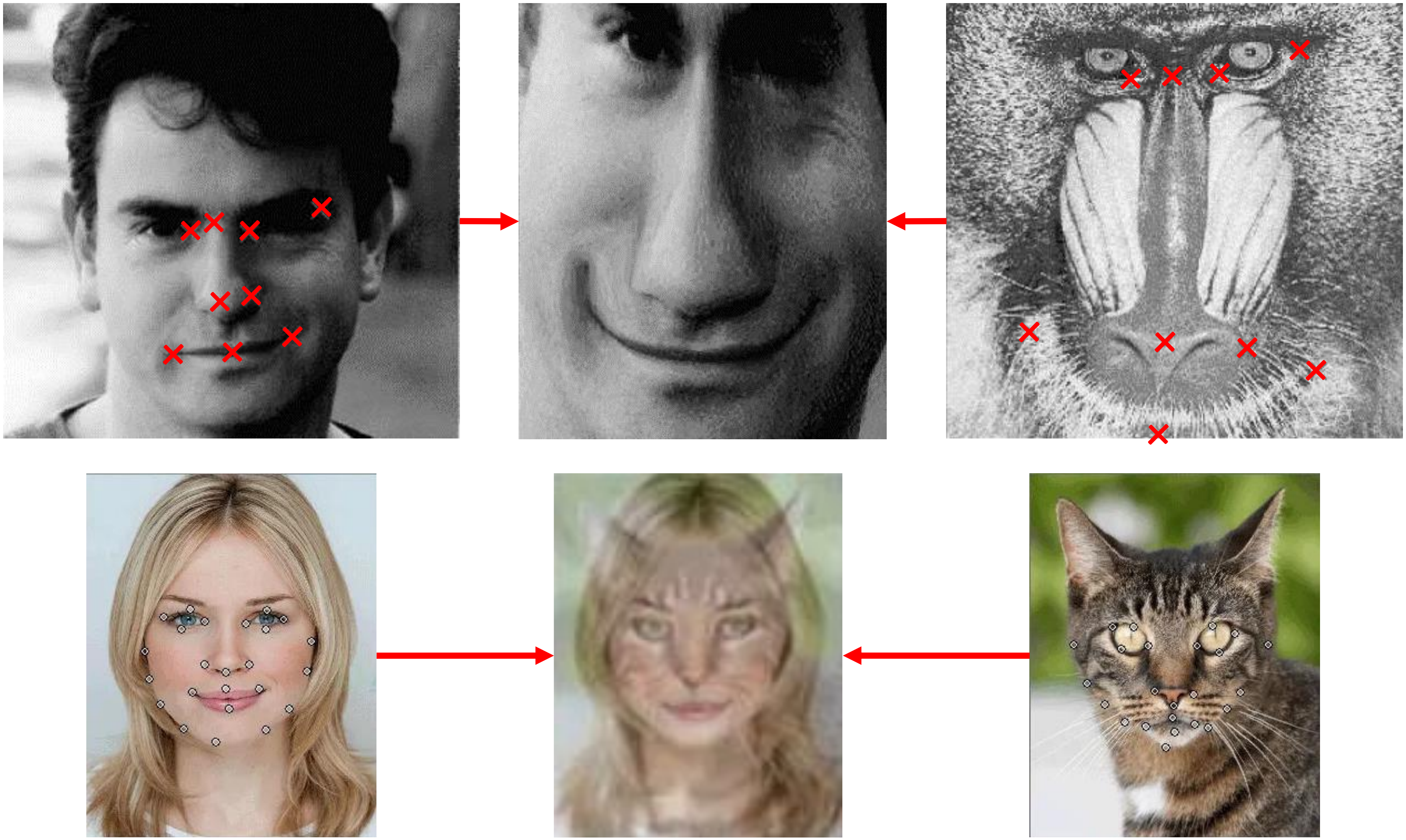
PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Poravnava z radialnimi funkcijami (v 2D)



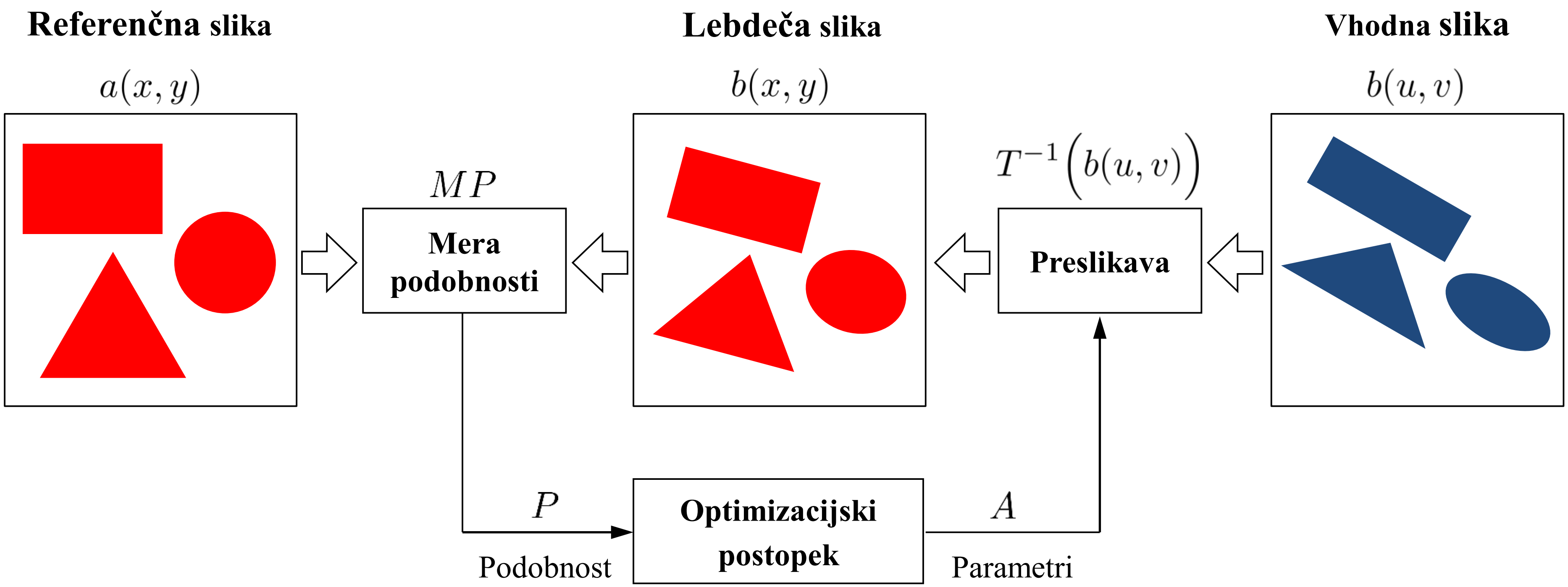
PORAVNAVA KONTROLNIH TOČK

Poravnava z radialnimi funkcijami (v 2D)



PORAVNAVA SLIK

Poravnava z optimizacijo podobnosti



Dejanska geometrijska neskladja:
- deformacije, premikanje,…

Motilna geometrijska neskladja:
- nepravilnosti, šum,…

Mera podobnosti:
- občutljiva na dejanska neskladja
- neobčutljiva na motilna neskladja

Prožnost (stopnja svobode) preslikave:
- primerna glede na dejanska neskladja in
- glede na motilna neskladja

PORAVNAVA SLIK

Mera podobnosti

Mera podobnosti (MP) je poljubna skalarna funkcija, določena nad vsemi istoležnimi slikovnimi elementi referenčne $a(x, y)$ in lebdeče slike $b(x, y)$:

- čim bolj občutljiva na geometrijska neskladja
- čim manj občutljiva na motilna neskladja
- smiselne, a ne nujne lastnosti so zveznost, metričnost in v nekaterih primerih neobčutljivost na specifične preslikave

Mera podobnosti ima lahko **vse ali pa nobene** od lastnosti metrike MR (nenegativnost, identiteta, simetričnost, trikotniška neenakost).

PORAVNAVA SLIK

Mera podobnosti (monomodalna)

Srednja kvadratna napaka – **MSE** (*angl.* mean square error) (občutljiva zaradi kvadrata):

$$\mathrm{MSE}(a,b) = \frac{1}{XY}\sum_{x=1}^{X}\sum_{y=1}^{Y}\Big(a(x,y)-b(x,y)\Big)^2$$

Srednja absolutna napaka – **MAE** (*angl.* mean absolute error) (manj občutljiva kot MSE):

$$\mathrm{MAE}(a,b) = \frac{1}{XY}\sum_{x=1}^{X}\sum_{y=1}^{Y}\Big|a(x,y)-b(x,y)\Big|$$

Korelacijski koeficient – CC (*angl.* correlation coefficient) (neobčutljiv na linearne intenzitetne preslikave):

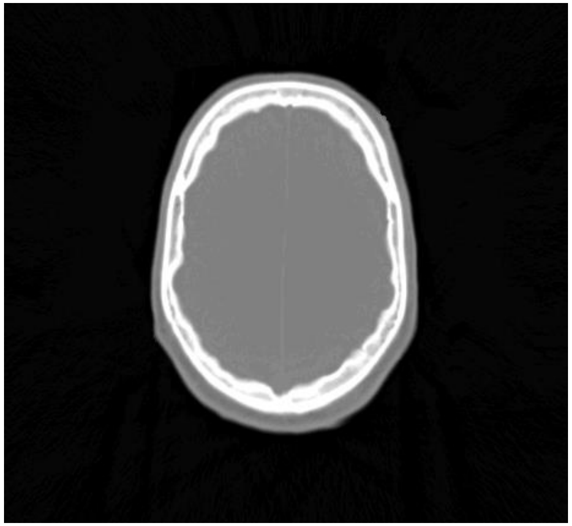
$$\mathrm{CC}(a,b) = \frac{\sum_{x=1}^{X}\sum_{y=1}^{Y}\Big(a(x,y)-\bar{a}\Big)\Big(b(x,y)-\bar{b}\Big)}{\sqrt{\sum_{x=1}^{X}\sum_{y=1}^{Y}\Big(a(x,y)-\bar{a}\Big)^2\sum_{x=1}^{X}\sum_{y=1}^{Y}\Big(b(x,y)-\bar{b}\Big)^2}}$$

PORAVNAVA SLIK

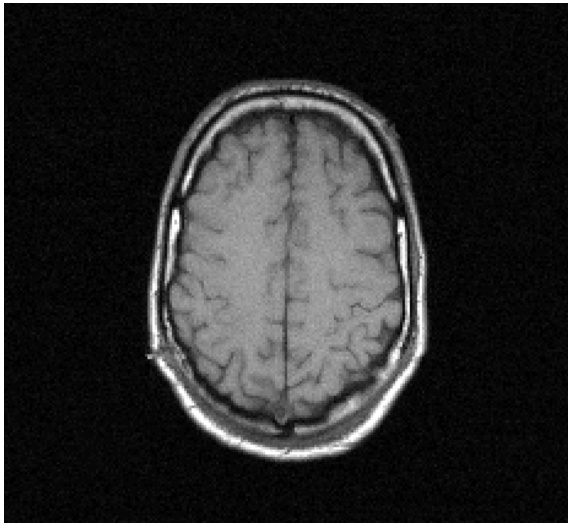
Mera podobnosti (multimodalna)

Pri večmodalni poravnavi slik (npr. pri poravnavi CT, MR in PET slik), sivinske vrednosti slik niso funkcijsko, ampak so samo statistično odvisne, zato monomodalne mere podobnosti odpovedo.

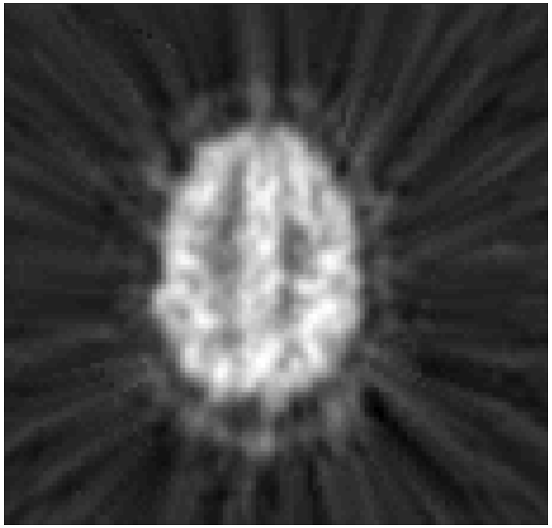
CT



MR



PET



PORAVNAVA SLIK

Mera podobnosti (multimodalna)

Uveljavile so se mere podobnosti, ki izvirajo iz teorije informacij, med njimi je še najbolj razširjena **medsebojna informacija** – **MI** (*angl.* mutual information):

$$MI(a,b) = H(a) + H(b) - H(a,b)$$

Marginalni entropiji:

$$H(a) = -\sum_{s_a=0}^{L-1} p_a(s_a) \log p_a(s_a)$$

$$H(b) = -\sum_{s_b=0}^{L-1} p_b(s_b) \log p_b(s_b)$$

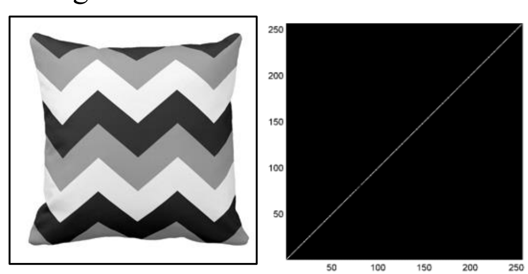
Skupna entropija:

$$H(a,b) = -\sum_{s_a=0}^{L-1} \sum_{s_b=0}^{L-1} p_{ab}(s_a, s_b) \log p_{ab}(s_a, s_b)$$

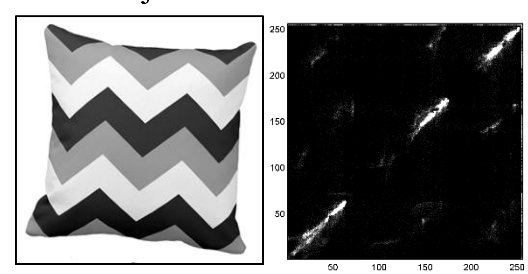
Ocena skupne verjetnosti iz skupnega histograma:

$$p_{ab}(s_a, s_b) = \frac{h_{ab}(s_a, s_b)}{XY}$$

Originalna slika

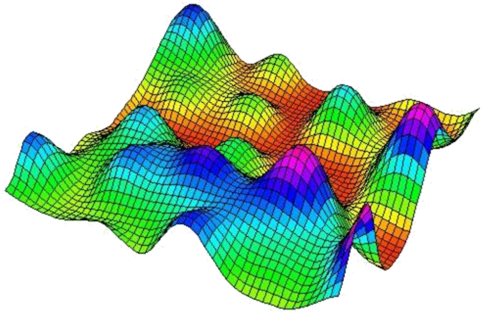


Rotacija +5º



PORAVNAVA SLIK

Optimizacija mere podobnosti



Optimizacija mere podobnosti predstavlja postopek iskanja tistih parametrov preslikave, ki maksimizirajo podobnost med slikama.

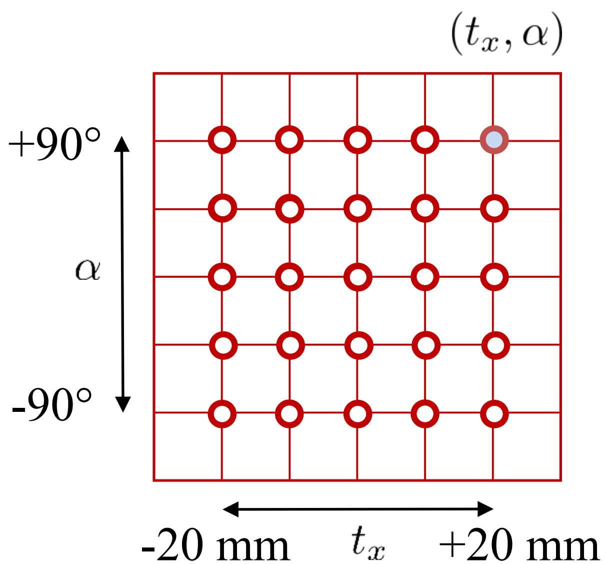
- cilj je poiskati optimalno podobnost oz. parametre v čim manj iteracijah:
  - podobnost je odvisna od vsebine in lastnosti slik
  - vpliv izvedbenih podrobnosti in numeričnih napak
  - lokalni optimumi → podoptimalne poravnave slik
- lokalni in globalni optimizacijski postopki:
  - globalni imajo večjo verjetnost, da najdejo pravi optimum, vendar so računsko zahtevnejši
- izbira pravega optimizacijskega postopka:
  - pomembno vpliva na hitrost in zanesljivost poravnav
  - temeljiti mora na analizi lastnosti mer podobnosti (točnost, število lokalnih optimumov, konvergenčno področje)

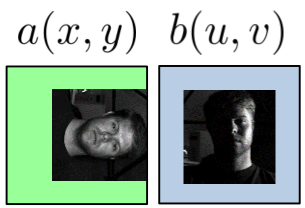
PORAVNAVA SLIK

Globalna optimizacija

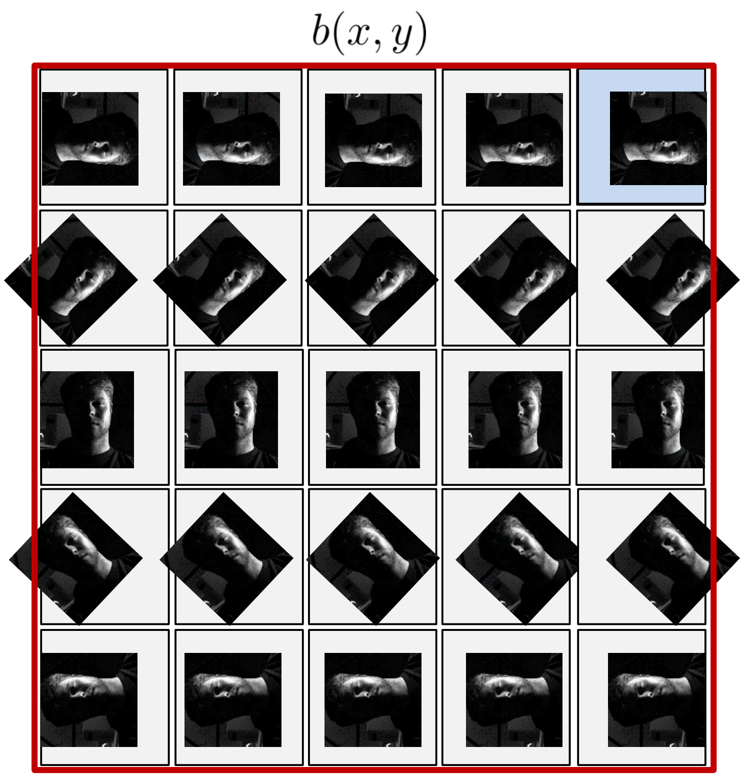
Izčrpno iskanje (*angl.* exhaustive search) po parametričnem prostoru predstavlja sistematično diskretno vzorčenje parametričnega prostora in izbiro tistih parametrov, pri katerih je podobnost med slikami največja.

Primer:





(0,0)
(-10,0)
(-10,45)
(-20,45)



→ računsko zelo zahtevno
→ le za preslikave z malo parametri

PORAVNAVA SLIK

Lokalna optimizacija

Postopek najstrmejšega spusta oz. dviga (*angl.* gradient descent/ascent):

- izračunamo prvi odvod MP pri začetnih parametrih preslikave $\mathbf{x}_0(t_x, \alpha)$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial MP(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}_0}$$

- spremenimo parametre:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - k\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$$

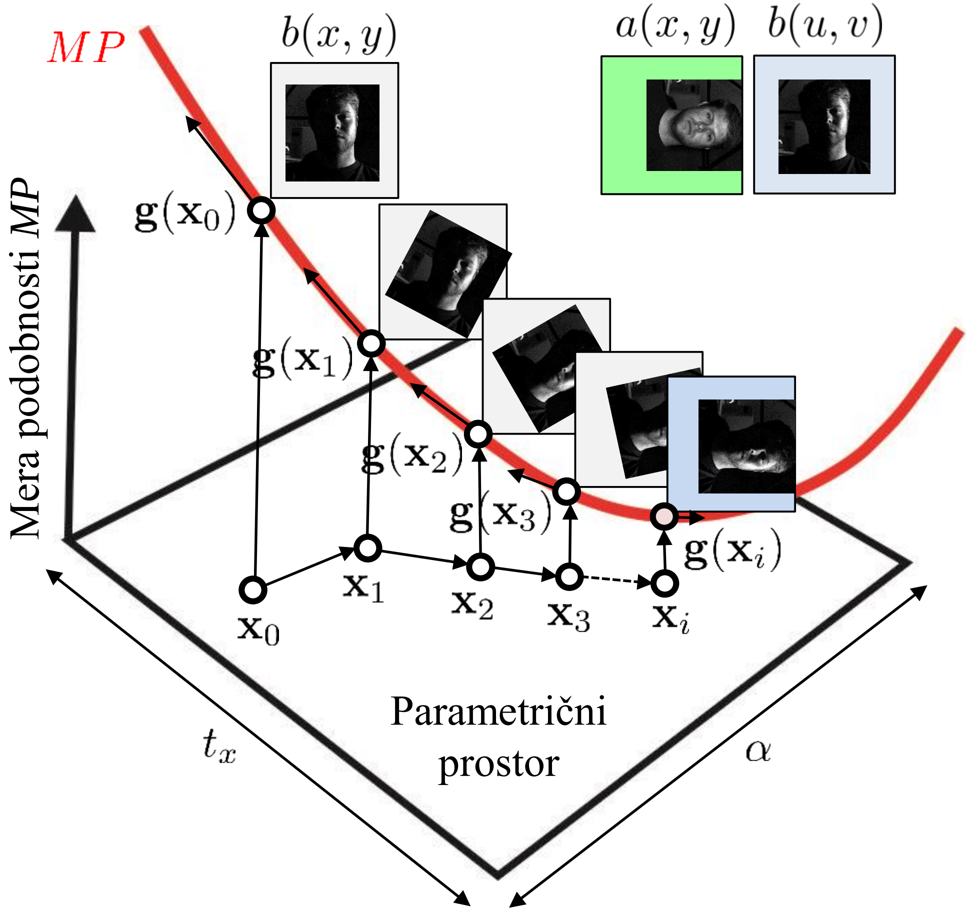
- ponavljamo postopek:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - k\mathbf{g}(\mathbf{x}_i)$$

- vse dokler:

$$\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\| < \varepsilon \quad \text{oz.} \quad i < i_{\max}$$

→ odvod *MP* izračunamo analitično
→ če to ni mogoče ga ocenimo numerično

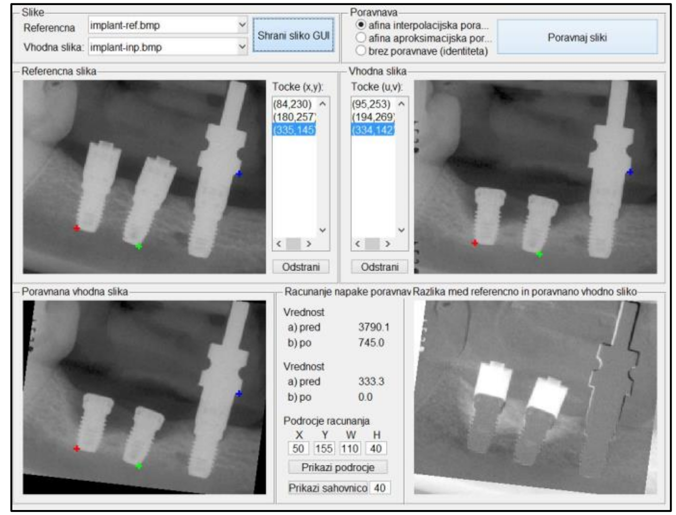


LABORATORIJSKE VAJE

Geometrijska poravnava slik

Poravnava na podlagi **kontrolnih točk**:

- afina interpolacijska preslikava in afina aproksimacijska preslikava
- izračun mere razdalje R^2 oz. mere podobnosti MSE



Poravnava na podlagi (optimizacije) **mere podobnosti**:

- izčrpno iskanje po parametričnem prostoru