Хаос в гамильтоновых системах

А. Н. Швец

8 мая 2020 г.

Как мы знаем, фазовый поток гамильтоновой системы за время θ осуществляет каноническое преобразование фазового пространства. Многие наши задачи были посвящены интегрируемым лагранжевым/гамильтоновым системам, обладающим $2n$ первыми интегралами (n — число степеней свободы), определёнными почти всюду в расширенном фазовом пространстве. Фазовые кривые таких систем лежат в пересечении постоянных уровней первых интегралов, что обеспечивает их регулярное и скучное, предсказуемое поведение.

Но регулярная динамика в гамильтоновых системах является скорее исключением, нежели правилом. Существование достаточного количества первых интегралов гарантируется, согласно теореме о выпрямлении векторного поля, лишь локально, и то лишь в окрестности неособой точки поля.

Хорошее представление о хаосе в гамильтоновых системах даёт популярный модельный пример, придуманный физиком Б. В. Чириковым в качестве упрощённой модели явлений, происходящих в кольцевых ускорителях элементарных частиц.

Рассмотрим преобразование тора ($q \bmod 2\pi, p \bmod 2\pi$), заданное формулой

$$(q, p) \mapsto (q + p + \varepsilon \sin q, p + \varepsilon \sin q).$$

Его называют *стандартным отображением Чирикова.* Как легко убедиться, отображение является каноническим при любом значении параметра ε (убедитесь!). Если бы существовал первый интеграл данного преобразования, то есть функция (q, p), постоянная на орбитах преобразования, фазовое пространство оказалось бы расслоенным на инвариантные кривые, несущие орбиты. Сами орбиты были бы при этом либо периодическими, либо *условно-периодическими,* либо асимптотическими к указанным. В первом случае инвариантные кривые были бы составлены из разнообразных периодических орбит, во втором орбиты заполняли бы кривые всюду плотно, а в третьем служили бы сепаратрисами. Так или иначе, движение в целом оказалось бы вполне регулярным и предсказуемым благодаря первому интегралу.

Именно так обстоят дела при $\varepsilon = 0$. Первым интегралом служит p, а фазовый тор расслоен на кривые $p = \text{const}$. Однако всё меняется при положительных ε.

Наше демонстрационное приложение показывает построение орбиты одной-единственной начальной точки, выбранной более-менее случайно. Самые свежие 10000 точек орбиты показаны красным для удобства наблюдения, $\varepsilon = 1$. Наберитесь терпения, подождите минут 20. Хорошо видно, что орбита заполняет густую сеть *(стохастическую паутину)*, пронизанную многочисленными дырками — *островами устойчивости.* Орбиты с начальными условиями внутри дырок (их не видно) — это как раз уцелевшие периодические или условно-периодические. Острова пока ещё демонстрируют регулярную динамику.

Что-то похожее на отображение Чирикова происходит на фазовой плоскости математического маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания: в этом случае берётся отображение фазовым потоком за период колебаний точки подвеса. Детальное описание происходящих процессов имеется в учебнике четырёх авторов, раздел 15.3.3.

Другая точка зрения на описанное явление показана на нашем медитативном видео. При равномерно меняющемся ε от 0 до 4 оттенками серого подсвечены точки фазового тора в зависимости от «хаотичности» соответствующих орбит — более хаотические темнее. Это хорошая иллюстрация всеобщего торжества хаоса и разрушения; скоро мы всё это увидим IRL. Картина лишний раз подтверждает тезис В. И. Арнольда о хрупкости и редкости всего хорошего и обыденности всего плохого.

«Хаотичность» орбит при создании видео измерялась следующим образом. Она пропорциональна положительному времени n, в течение которого точка орбиты $T^n(q,p)$ сближается с точкой $T^{2n}(q,p)$ той же орбиты на малое расстояние ρ (T — отображение Чирикова). В основе этого подхода к определению хаотичности орбит лежат идеи, связанные с гениальным в своей простоте *алгоритмом Флойда,* называемым также *алгоритмом черепахи и зайца.* Читателям, интересующимся возникающими алгоритмическими вопросами, предлагаем наш текст, написанный по другому поводу и для другой аудитории. Применение того же подхода к визуализации другой очень известной динамической системы (не гамильтоновой) описано ещё в одном тексте.

Спасибо за внимание. *Вы держитесь здесь, вам всего доброго, хорошего настроения и здоровья!*