Теорема Нётер
для неэволюционных вариационных симметрий

М. С. Терехов

17 мая 2020 г.

1. Небольшое обобщение теоремы Нётер

Рассмотрим обобщённые векторные поля вида $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_{x_i} + \tau \partial_t$, где функции ξ_i зависят от $(t, x, \dot{x})$. Тогда, как уже было показано в работе [2]

$$\mathbf{pr}^{(1)}\,\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_{x_i} + \tau \partial_t + \sum_{i=1}^{n} (\dot{\xi}_i - \dot{\tau}\dot{x}_i)\partial_{\dot{x}_i}, \tag{1}$$

Назовём его *полем обобщённой симметрии* лагранжевой задачи $L[x] = \int L(t, x, \dot{x})\,dt$, если найдётся такая дифференциальная функция A, что

$$\mathbf{pr}^{(1)}\,\mathbf{v}(L) + L\dot{\tau} = \dot{A}. \tag{2}$$

В оправдание названия полей обобщённых симметрий мы (нестрого) заметим, что отдельно изменение времени приводит к увеличению лагранжиана на $\varepsilon\dot{\tau}L$ (забываем про $o(\varepsilon)$) и отдельно увеличение лагранжина происходит на $\varepsilon\dot{A} - L\dot{\tau}$, их совместное действие добавляет ещё что-то $o(\varepsilon)$, таким образом добавка к функционалу будет зависить лишь от значений $x(t)$ на концах отрезка, что не повлияет на стационарные точки.

Теорема (A. E. Noether ver2.0). Пусть $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_{x_i} + \tau \partial_t$ — поле обобщённой симметрии лагранжевой задачи L и

$$I(t, x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \tau\dot{x}_i)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - A + L\tau.$$

Тогда

$$\dot{I} = -\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \tau\dot{x}_i)\mathbf{E}_i(L). \tag{3}$$

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что эта теорема при $\tau = 0$ даёт нам теорему из методички [1], тем самым обобщает её. Итак, прямые вычисления показывают нам, что

$$\dot{I} = \dot{\tau}L + \tau\dot{L} + \sum_{i=1}^{n} (\dot{\xi}_i - \dot{\tau}\dot{x}_i - \tau\ddot{x}_i)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \dot{A} + \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \tau\dot{x}_i)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}.$$

Теперь распишем (3), применив выражение для $\mathbf{E}_i(L)$, и применим (1)

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \tau\dot{x}_i)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \tau \dot{x}_i) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \tau \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \tau \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} (\dot{\xi}_i - \dot{\tau} \dot{x}_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L\dot{\tau} - \dot{B},$$

учитывая, что

$$\dot{L} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial t},$$

а также

$$\sum_{i=1}^{n} \ddot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right),$$

приходим к утверждению теоремы.

□

Из теоремы непосредственно вытекает, что $\dot{I} = 0 \bmod \mathbf{E}(L) = 0$, и, следовательно, I является первым интегралом уравнений Эйлера — Лагранжа.

Список литературы

[1] `http://mech.math.msu.su/~shvetz/coronavirus/Noether.pdf`.

[2] `http://mech.math.msu.su/~shvetz/coronavirus/Prolongation.pdf`.

[3] `http://alexandr4784.narod.ru/olwer/olw_gl5_3.pdf`.