Классификация двумерных алгебр Ли

С. Осинский

12.05.2020

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная комплексная(или вещественная) двумерная алгебра Ли. Попытаемся определить общий вид как её самой, так и соответствующей односвязной группы Ли. Для этого, для начала выберем в ней некоторый базис $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Тогда для произвольных элементов алгебры $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, используя свойства скобки, имеем:

$$\mathbf{X} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \quad \mathbf{Y} = c\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим произвольную скобку:

$$\begin{aligned}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] &= [a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, c\mathbf{v} + d\mathbf{w}] = a[\mathbf{v}, c\mathbf{v} + d\mathbf{w}] + b[\mathbf{w}, c\mathbf{v} + d\mathbf{w}] = \\ &= ac[\mathbf{v}, \mathbf{v}] + ad[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + bc[\mathbf{w}, \mathbf{v}] + bd[\mathbf{w}, \mathbf{w}] = (ad - bc)[\mathbf{v}, \mathbf{w}].\end{aligned}$$

Получаем, что любая скобка пропорциональна скобке базисных элементов. Если $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{0}$, то нулю равна любая скобка и получается, что наша алгебра абелева. Соответствующей односвязной группой Ли очевидно является $\mathbb{C}^2$ (или $\mathbb{R}^2$). Пусть теперь $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \neq \mathbf{0}$. Обозначим $\mathbf{w}_1 = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ Имеем:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g} : [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \lambda \mathbf{w}_1.$$

В частности, для любого $\mathbf{v}_1$ такого, что $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{w}_1$ линейно независимы, получаем:

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1] = \lambda_0 \mathbf{w}_1.$$

Заменяя $\mathbf{v}_1 \to \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{v}_1$, получаем базис $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1\}$ в $\mathfrak{g}$, для которого выполняется $[\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1] = \mathbf{w}_1$. Это выражение полностью определяет алгебру Ли, и мы получаем общий вид с точностью до изоморфизма двумерной неабелевой алгебры Ли. Теперь хочется получить его матричное представление. Рассмотрим отображение:

$$\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}), \quad \phi\colon a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{w}_1 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что это отображение является изоморфизмом алгебр Ли. Для начала проверим, что оно является гомоморфизмом алгебр Ли:

$$\phi([a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{w}_1, c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{w}_1]) = \phi((ad - bc)\mathbf{w}_1) = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В то же время:

$$[\phi(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{w}_1), \phi(c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{w}_1)] = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, данное отображение, очевидно, инъективно (равенство элементов матриц влечет равенство коэффициентов и соответственно равенство элементов алгебры). Получили, что $\mathfrak{g} \simeq \phi(\mathfrak{g})$, где:

$$\phi(\mathfrak{g}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \colon\, a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Далее нам потребуются некоторые дополнительные сведения из книги [1]).

Теорема 1. Экспоненциальное отображение $\exp \colon \mathfrak{g} \to G$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность нуля в алгебре $\mathfrak{g}$ в некоторую окрестность единицы группы G.

Таким образом, чтобы попасть в группу Ли соответствующую нашей алгебре нам нужно применить экспоненциальное отображение, в данном случае совпадающее с классической матричной экспонентой (опять же см. [1]). Вычислим матричную экспоненту, пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$, найдем общий вид степени:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем:

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & \frac{(e^a-1)b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, попадая в группу Ли, мы получаем:

$$G_0 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \colon\, a \neq 0 \right\} \subset GL_2(\mathbb{C}).$$

Это одномерная аффинная группа. Мы хотим найти односвязную группу Ли, алгеброй которой является двумерная неабелева алгебра Ли, для этого нам нужно найти односвязное накрытие данной группы (их алгебры Ли совпадают, см. [1]). Топологически эта группа устроена как $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, для нахождения односвязного накрытия запишем ее произвольный элемент в виде:

$$\begin{pmatrix} e^t & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведение двух таких матриц имеет вид:

$$\begin{pmatrix} e^t & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t_1} & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t+t_1} & s + e^t s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому можно рассматривать универсальное накрытие G как группу пар $(t, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ с групповым законом $(t, s) \cdot (t_1, s_1) = (t + t_1, s + e^t s_1)$. Накрывающий гомоморфизм $f \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ по сути устроен так:

$$(t, s) \mapsto (e^t, s),$$

из чего вытекает, что $\ker f = \{(2\pi i n, 0)\} \simeq \mathbb{Z}$, $G_0 \simeq G / \ker f$ (см. [1]). В вещественном случае, пойдя по тому же пути, мы сразу после экспоненцирования попадаем в односвязную группу Ли, в чем легко убедиться, заметив, что соответствующее ядро накрывающего гомоморфизма нулевое. Стоит также заметить, что все связные группы Ли с такой алгеброй будут факторами односвязной группы Ли по ее нормальным дискретным подгруппам. Таким образом, в вещественном случае можно довольно легко классифицировать с точностью до изоморфизма все связные двумерные группы Ли.

Список литературы

[1] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, Основы теории групп Ли.