

Теорема Нётер

для неэволюционных вариационных симметрий

М. С. Терехов

17 мая 2020 г.

1. Небольшое обобщение теоремы Нётер

Рассмотрим обобщённые векторные поля вида $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i} + \tau \partial_t$, где функции ξ_i зависят от (t, x, \dot{x}) . Тогда, как уже было показано в работе [2],

$$\mathbf{pr}^{(1)} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i} + \tau \partial_t + \sum_{i=1}^n (\dot{\xi}_i - \dot{x}_i \tau) \partial_{\dot{x}_i}, \quad (1)$$

Назовём его *полем обобщённой симметрии* лагранжевой задачи $L[x] = \int L(t, x, \dot{x}) dt$, если найдётся такая дифференциальная функция A , что

$$\mathbf{pr}^{(1)} \mathbf{v}(L) + L\dot{\tau} = \dot{A}. \quad (2)$$

В оправдание названия полей обобщённых симметрий мы (не строго) заметим, что отдельно изменение времени приводит к увеличению лагранжиана на $\varepsilon \dot{t} L$ (забываем про $o(\varepsilon)$) и отдельно увеличение лагранжиана происходит на $\varepsilon \dot{A} - L\dot{t}$, их совместное действие добавляет ещё что-то $o(\varepsilon)$, таким образом добавка к функционалу будет зависеть лишь от значений $x(t)$ на концах отрезка, что не повлияет на стационарные точки.¹

Теорема (А. Е. Noether ver2.0). Пусть $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{x_i} + \tau \partial_t$ — поле обобщённой симметрии лагранжевой задачи L и

$$I(t, x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tau \dot{x}_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - A + L\tau.$$

Тогда

$$\dot{I} = - \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tau \dot{x}_i) \mathbf{E}_i(L). \quad (3)$$

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что эта теорема при $\tau = 0$ даёт нам теорему из методички [1], тем самым обобщает её. Итак, прямые вычисления показывают нам, что

$$\dot{I} = \dot{t}L + \tau \dot{L} + \sum_{i=1}^n (\dot{\xi}_i - \dot{x}_i \tau - \ddot{x}_i \tau) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \dot{A} + \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tau \dot{x}_i) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}.$$

¹В этом абзаце есть ошибки. — А. Ш.

Теперь распишем (3), применив выражение для $\mathbf{E}_i(L)$, и применим (1)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tau \dot{x}_i) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = \\ = \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tau \dot{x}_i) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_{i=1}^n \tau \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \tau \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (\xi_i - \tau \dot{x}_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L\dot{t} - \dot{B}, \end{aligned}$$

учитывая, что

$$\dot{L} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial t},$$

а также

$$\sum_{i=1}^n \ddot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right),$$

приходим к утверждению теоремы.

□

Из теоремы непосредственно вытекает, что $\dot{I} = 0 \bmod \mathbf{E}(L) = 0$, и, следовательно, I является первым интегралом уравнений Эйлера — Лагранжа.

Список литературы

[1] <http://mech.math.msu.su/~shvetz/coronavirus/Noether.pdf>.

[2] <http://mech.math.msu.su/~shvetz/coronavirus/Prolongation.pdf>.

[3] http://alexandr4784.narod.ru/olwer/olw_gl5_3.pdf.