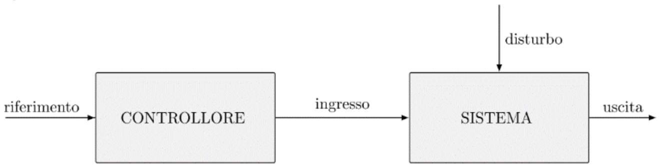
Controlli Automatici T

Autore: Urbinati Cristian
Contatto: cristian.urbinati@studio.unibo.it

INTRODUZIONE AI CONTROLLI AUTOMATICI

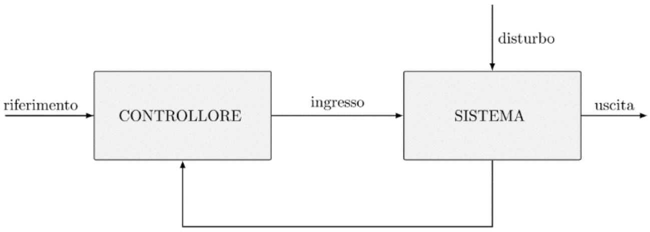
CONTROLLO IN ANELLO APERTO (FEEDFORWARD)

Il controllore utilizza solo il segnale di riferimento



CONTROLLO IN ANELLO CHIUSO (FEEDBACK)

Il controllore utilizza il segnale di riferimento e variabile controllata ad ogni istante di tempo



PROGETTO DI UN SISTEMA DI CONTROLLO

1.	Definizione delle specifiche	assegnazione comportamento desiderato
2.	Modellazione del sistema	definizione ingressi/uscite, codifica del modello
3.	Analisi del sistema	studio proprietà strutturali e fattibilità specifiche
4.	Sintesi legge di controllo	
5.	Simulazione sistema controllato	test su modello di controllo
6.	Scelta elementi tecnologici	
7.	Sperimentazione	hardware in the loop, realizzazione prototipo definitivo

FORMA DI STATO

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ equazione di stato
$y(t) = h(x(t), u(t), t)$ equazione di uscita

Essendo:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema all'istante t
$u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso del sistema all'istante t
$y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita del sistema all'istante t

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Allora l'equazione di stato diventa un'equazione differenziale ordinaria (ODE) vettoriale del primo ordine

$$\begin{matrix} \dot{x_1}(t) = f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x_n}(t) = f_n(x(t), u(t), t) \end{matrix} = \begin{matrix} \dot{x_1}(t) = f_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right) \\ \vdots \\ \dot{x_n}(t) = f_n\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right) \end{matrix}$$

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funzione di stato

L'equazione di uscita:

$$\begin{matrix} \dot{y_1}(t) = h_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ \dot{y_p}(t) = h_p(x(t), u(t), t) \end{matrix} = \begin{matrix} \dot{y_1}(t) = h_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right) \\ \vdots \\ \dot{y_p}(t) = h_p\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right) \end{matrix}$$

$h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ funzione di uscita

Se la soluzione $x(t)$ a partire da un istante t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$ con $\tau > t_0$ allora il sistema è detto **causale**.

SISTEMI LINEARI TEMPO VARIANTI (LTV)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Stato iniziale $x(t_0) = x_0$

Ingresso $u(t), t \geq t_0$

Traiettoria di stato $x(t), t \geq t_0$

<u>Solo nel caso di sistemi lineari</u> possiamo esprimere la traiettoria di stato come la somma di due componenti:

$$\mathrm{x(t) = x_l(t) + x_f(t)}$$

$\mathrm{x_l(t)} \rightarrow$ **Evoluzione libera** ottenuta per $\mathrm{x(t_0) = x_0}$ e $\mathrm{u(t) = 0}$ $\mathrm{y_l(t) = Cx_l(t)}$

$\mathrm{x_f(t)} \rightarrow$ **Evoluzione forzata** ottenuta per $\mathrm{x(t_0) = 0}$ e $\mathrm{u(t), t \geq t_0}$ $\mathrm{y_f(t) = Cx_f(t) + Du(t)}$

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI (LTI): CASO SCALARE

$$x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$ $x(0) = x_0$

$y(t) = cx(t) + du(t)$

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = ce^{at}x_0 + c\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\,d\tau + du(t)$$

Possiamo approssimare secondo Taylor $e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots$

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI (LTI): CASO GENERALE

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^p$$

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $x(0) = x_0$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + c\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

Possiamo approssimare secondo Taylor $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$

PROPRIETÀ DELLA MATRICE ESPONENZIALE e^{At}

- *Esponenziale e cambio di base*
$$e^{(TAT^{-1})t} = Te^{At}T^{-1}$$
- *Esponenziale di una matrice diagonale a blocchi*
L'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi è una matrice diagonale a blocchi in cui ogni blocco è l'esponenziale del blocco corrispondente nella matrice di partenza
$$e^{\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{A_n t} \end{bmatrix}$$

RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad\qquad x(0) = x_0$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

Effettuiamo un cambio di base mediante una matrice T invertibile:

$\hat{x}(t) = Tx(t) \qquad \equiv \qquad x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$

$\dot{\hat{x}}(t) = T\dot{x}(t) = T\big(Ax(t) + Bu(t)\big) = TAT^{-1}\hat{x}(t) + TBu(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \qquad \hat{A} = TAT^{-1} \qquad \hat{B} = TB$

$y(t) = CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \qquad \hat{C} = CT^{-1} \qquad \hat{D} = D$

$\hat{x}_l(t) = e^{\hat{A}t}\hat{x}_0\,, \qquad \hat{x}_0 = \hat{x}(0) = Tx_0 \quad \Longrightarrow \quad x_l(t) = T^{-1}e^{\hat{A}t}\hat{x}_0 = T^{-1}e^{\hat{A}t}Tx_0$

EVOLUZIONE LIBERA: CASO A DIAGONALIZZABILE

Se una matrice A possiede tutti autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ allora esistono n autovettori $v_1, \dots, v_n$ associati a ciascun autovalore tali per cui $Av_i = \lambda_i v_i$

Se A è diagonalizzabile allora $A = T^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda = TAT^{-1}}T$ dove $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sono gli autovalori di A

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$\hat{x}(t) = Tx(t) \qquad \equiv \qquad x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$

$\dot{\hat{x}}(t) = T\dot{x}(t) = T\big(Ax(t) + Bu(t)\big) = TAT^{-1}\hat{x}(t) + TBu(t) = \Lambda\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \qquad \Lambda = TAT^{-1} \qquad \hat{B} = TB$

$y(t) = CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \qquad \hat{C} = CT^{-1} \qquad \hat{D} = D$

$$\hat{x}_l(t) = e^{\Lambda t}\hat{x}_0 = e^{\Lambda t}\hat{x}(0) = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}t}\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\hat{x}_1(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}\hat{x}_n(0) \end{bmatrix}$$

$$x_l(t) = T^{-1}\hat{x}_l(t) = T^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}Tx(0)$$

Nota che per ogni condizione iniziale $x(0) = x_0$, l'evoluzione libera è sempre combinazione lineare dei **modi naturali** $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ (reali o complessi).

Nota inoltre che: $y_l(t) = CT^{-1}\hat{x}_l(t)$

MODI NATURALI: CASO MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA = MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

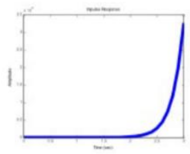
Nel caso in cui la molteplicità algebrica degli autovalori di una matrice coincidesse con la molteplicità geometrica allora significa che A è diagonalizzabile

AUTOVALORI REALI

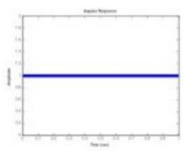
$\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$ modo naturale $e^{\lambda_i t}$

AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI

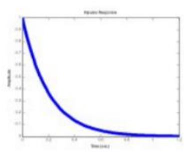
$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \; , \bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i \; \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow$ modo naturale $e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \phi_i)$



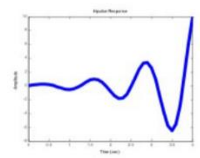
- $e^{\lambda_i t}$, $\lambda_i > 0$



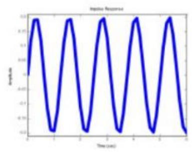
- $e^{\lambda_i t}$, $\lambda_i = 0$



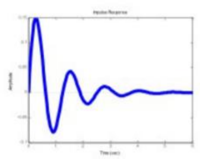
- $e^{\lambda_i t}$, $\lambda_i < 0$



- $e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i > 0$



- $e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i = 0$



- $e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i < 0$

FORMA DI JORDAN DI UNA MATRICE

Data A una matrice generica si può dimostrare che $\exists T: J = TAT^{-1}$

J è detta forma di Jordan di A ed è una matrice diagonale a blocchi dove μ è il numero di autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ di A e $n_i = \sum_{h=1}^{v_i} \eta_{ih}$ è la molteplicità algebrica di λ_i

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_\mu \end{bmatrix}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{iv_i} \end{bmatrix}$$

$$J_{ih} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}}_{\eta_{ih} \times \eta_{ih}}$$

Un esempio di matrice di Jordan con in evidenza i blocchi e i sotto-blocchi associati a ciascun autovalore è:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_i & 1 & \\ & & & & & 0 & \lambda_i & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Per ogni sotto-blocco J_{ih} il suo esponenziale è dato da:

$$e^{J_{ih}t} = e^{\lambda it} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{\eta_{ih}-1}}{(\eta_{ih}-1)!} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

MODI NATURALI: CASO MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA > MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

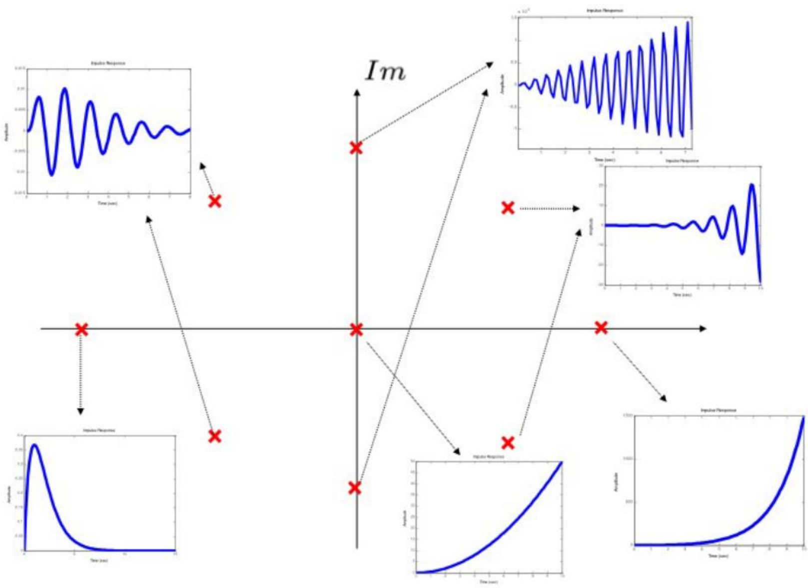
Nel caso di una matrice generica la molteplicità algebrica è generalmente maggiore di quella geometrica

AUTOVALORI REALI

$\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$ modo naturale $t^q e^{\lambda_i t}$ $\quad q \in [0, \dots, \eta_{ih} - 1]$

AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI

$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \;, \bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i \;\in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow$ modo naturale $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$ $\quad q \in [0, \dots, \eta_{ih} - 1]$



EVOLUZIONE LIBERA: CASO A GENERICA

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$\hat{x}(t) = Tx(t) \qquad \equiv \qquad x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$

$\dot{\hat{x}}(t) = T\dot{x}(t) = T\big(Ax(t) + Bu(t)\big) = TAT^{-1}\hat{x}(t) + TBu(t) = J\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \qquad J = TAT^{-1} \qquad \hat{B} = TB$

$y(t) = CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \qquad \hat{C} = CT^{-1} \qquad \hat{D} = D$

$\hat{x}_l(t) = e^{Jt}\hat{x}_0 = e^{Jt}\hat{x}(0)$

$x_l(t) = T^{-1}\hat{x}_l(t) = T^{-1}e^{Jt}Tx(0)$

Anche in questo caso per ogni condizione iniziale $x(0) = x_0$, l'evoluzione libera è sempre combinazione lineare dei modi naturali $t^q e^{\lambda_i t}$ con λ_i reale, o $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$ con $\sigma_i \pm j\omega_i$ coppia di autovalori complessi coniugati.

Nota inoltre che:

$y_l(t) = CT^{-1}\hat{x}_l(t)$

EQUILIBRI E STABILITÀ INTERNA

EQUILIBRIO (SISTEMA NON FORZATO)

Dato un sistema non forzato $\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big)$, uno stato x_e si dice **equilibrio** del sistema se

$x(t) = x_e$, $t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema

Se il sistema è tempo invariante allora $f(x_e) = 0$

COPPIA DI EQUILIBRIO

Dato il sistema $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$, la coppia (x_e, u_e) si dice **coppia di equilibrio** del sistema se

$\big(x(t), u(t)\big) = (x_e, u_e)$, $t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema

Se il sistema è tempo invariante allora $f(x_e, u_e) = 0$

STABILITÀ INTERNA

Valutiamo le conseguenze sulla traiettoria legate a variazioni dello stato iniziale con ingresso fisso e noto $u(t) = u_e$

Cioè preso il sistema $\dot{x} = f(x(t), u_e)$ esso è non forzato e si può riscrivere come $\dot{x} = f\big(x(t)\big)$. Sia ora x_e un equilibrio per tale sistema cioè $f(x_e) = 0$ vogliamo valutare cosa accade se $x(0) = x_e + \Delta x_0$:

- **Equilibrio stabile**

  Un equilibrio si dice stabile se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$: $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon \ \ \forall t \geq 0$

- **Equilibrio instabile**

  Un equilibrio si dice instabile se non è stabile

- **Equilibrio attrattivo**

  Un equilibrio si dice attrattivo se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$: $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

- **Equilibrio asintoticamente stabile**

  Un equilibrio si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo

La stabilità può essere:

- Stabilità locale

  La proprietà vale in un intorno dello stato di equilibrio x_e

- Stabilità globale

  Le proprietà di stabilità e asintotica stabilità sono globali se valgono per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

STABILITÀ INTERNA DI SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

$\dot{x}(t) = Ax(t)$

Nei sistemi lineari, preso $u = 0,\ x_e = 0$ è sempre un equilibrio.

Un sistema LTI, se è stabile localmente, lo è anche globalmente.
(Dim. calcola traiettoria di un sistema a coefficienti reali con $u(t) = u_e$)

Per i sistemi lineari si può dimostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE ASINTOTICA STABILITÀ)

Un sistema LTI $\dot{x} = Ax$ è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A sono a parte reale negativa.

Solo nel caso in cui molteplicità algebrica = molteplicità geometrica sono ammessi anche autovalori nulli.

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE ASINTOTICA INSTABILITÀ)

Se la matrice A di un sistema LTI $\dot{x} = Ax$ ha almeno un autovalore a parte reale positiva o si ha

molteplicità algebrica > molteplicità geometrica e un autovalore nullo allora il sistema è instabile.

LINEARIZZAZIONE DI SISTEMI NON LINEARI (TEMPO INVARIANTI)

Consideriamo il sistema lineare seguente nell'intorno di un equilibrio:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$$

$$y(t) = h\big(x(t), u(t)\big)$$

Sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio, applichiamo un disturbo allo stato iniziale del tipo $x(0) = x_e + \Delta x_0$. La nuova traiettoria risulterà essere:

$$x(t) = x_e + \Delta x(t)$$

$$u(t) = u_e + \Delta u(t)$$

Essendo una traiettoria vale:

$$\frac{d}{dt}\big(x_e + \Delta x(t)\big) = f\big(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)\big)$$

$$y_e + \Delta y(t) = h\big(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)\big)$$

Sviluppando in serie di Taylor f si ottiene:

$$f\big(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)\big) = \underbrace{f(x_e, u_e)}_{0} + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \cdot \Delta x(t) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \cdot \Delta u(t) + Term.\,Ordine\ Superiore$$

Nel caso generale di un sistema con più equazioni di stato ma ingresso singolo:

$$f(\bar{x}, u) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}, u) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}, u) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f(\bar{x}, u)}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}, u)}{\partial \bar{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x}, u)}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}, u)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{x}, u)}{\partial x_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_n(\bar{x}, u)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\bar{x}, u)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}, u)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x}, u)}{\partial u} \end{bmatrix}$$

In maniera analoga per h si ottiene:

$$h\big(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)\big) = \underbrace{h(x_e, u_e)}_{0} + \left.\frac{\partial h(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \cdot \Delta x(t) + \left.\frac{\partial h(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \cdot \Delta u(t) + Term.\,Ordine\ Superiore$$

Chiamando quindi $A_e := \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$, $B_e \coloneqq \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$, $C_e := \left.\frac{\partial h(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$, $D_e \coloneqq \left.\frac{\partial h(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$ possiamo riscrivere:

$f\big(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)\big) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t) + T.O.S.$

$h\big(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t)\big) = C_e \Delta x(t) + D_e \Delta u(t) + T.O.S.$

Ossia:

$\Delta\dot{x}(t) \approx A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t) \qquad\qquad \Delta x(0) = \Delta x_0$

$\Delta y(t) \approx C_e \Delta x(t) + D_e \Delta u(t)$

Il sistema linearizzato risulterà essere:

$\delta\dot{x}(t) = A_e \delta x(t) + B_e \delta u(t)$

$\delta y(t) = C_e \delta x(t) + D_e \delta u(t)$

Riconducendoci alla traiettoria iniziale possiamo riscrivere la formula come:

$x(t) = x_e + \Delta x(t) \approx x_e + \delta x(t)$

$u(t) = u_e + \Delta u(t) = u_e + \delta u(t)$

$y(t) = y_e + \Delta y(t) \approx y_e + \delta y(t)$

Per variazioni “sufficientemente piccole”

TEOREMA (ASINTOTICA STABILITÀ DI UN EQUILIBRIO x_e DI UN SISTEMA NON LINEARE)

Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, allora x_e è un equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

$$\delta\dot{x} = A_e \delta x \text{ asintoticamente stabile } \Longrightarrow \dot{x} = f(x, u_e) \text{ asintoticamente stabile per } x_e$$

RETROAZIONE DELLO STATO

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

Supponiamo che $y(t) = x(t)$ e consideriamo $u(t) = kx(t) + v(t)$

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bkx(t) + Bv(t) = (A + Bk)x(t) + Bv(t)$

Abbiamo trovato un sistema con la stessa struttura ma con matrice diversa a moltiplicare: $A_{CL} = A + Bk$

TRASFORMATA DI LAPLACE

In questo ambito consideriamo s un numero complesso:

Forma cartesiana:	$s = \sigma + j\omega$	$\sigma = \rho\cos(\varphi)$	$\omega = \rho\sin(\varphi)$
Forma polare:	$s = \rho e^{j\varphi}$	$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$	$\varphi = \text{atan}_2\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$

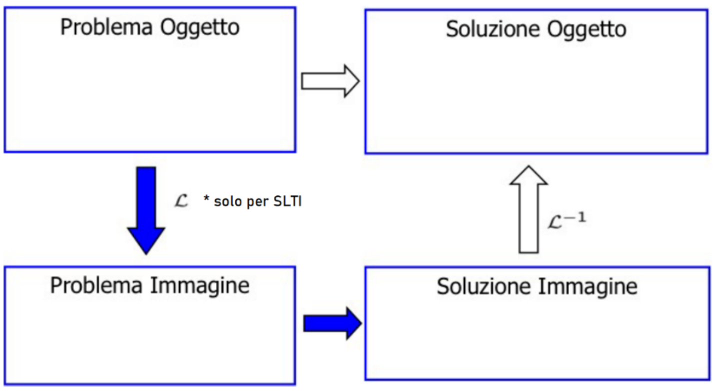
Consideriamo poi delle funzioni in generale $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Definiamo la **trasformata di Laplace** di $f(t)$ come:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

La formula di antitrasformazione è:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}\,ds \qquad \sigma > \bar{\sigma}$$



ASCISSA DI CONVERGENZA

Sia $\bar{\sigma} > -\infty$ l'estremo inferiore di $s = \sigma + j\omega$ per cui l'integrale converge, allora la trasformata di Laplace esiste nel semipiano $\Re(s) > \bar{\sigma}$.

TRASFORMATE RAZIONALI

Scriveremo spesso la trasformata come $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

Dove $N(s)$ e $D(s)$ sono due polinomi primi tra loro e le radici dei due sono dette rispettivamente **zeri** e **poli**

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

- Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)\,]=\int_0^{+\infty}(\alpha f(t)+\beta g(t)\,)e^{-st}\,dt=\alpha\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\,dt+\beta\int_0^{+\infty}g(t)e^{-st}\,dt$$

- Traslazione temporale

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty}f(t-\tau)e^{-st}\,dt\rightarrow\sigma=t-\tau\rightarrow\int_0^{+\infty}f(\sigma)e^{-s(\tau+\sigma)}\,d\sigma=e^{-s\tau}\int_0^{+\infty}f(\sigma)e^{-s\sigma}\,d\sigma=e^{-s\tau}F(s)$$

- Traslazione in s

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)]=F(s-\alpha)$$

- Derivazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}\,dt\rightarrow\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right)=f'(t)e^{-st}-sf(t)e^{-st}\rightarrow$$

$$\rightarrow f'(t)e^{-st}=\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right)+sf(t)e^{-st}\rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right)dt+\int_0^{+\infty}sf(t)e^{-st}\,dt=$$

$$=[f(t)e^{-st}]_0^{+\infty}+sF(s)=0-f(0)+sF(s)=F(s)-f(0)$$

- Derivata n-esima

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)-\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}\frac{d^{i-1}f(t)}{dt^{i-1}}\bigg|_{t=0}$$

- Integrazione nel tempo (supponendo f integrabile in $[0,+\infty]$)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

- Convoluzione nel tempo (assumendo funzioni nulle per $t<0$)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right]=F_1(s)F_2(s)$$

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

Sia f una funzione reale con trasformata $F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ razionale con $grado[D(s)]>grado[N(s)]$, allora:

$$f(0)=\lim_{s\to+\infty}sF(s)$$

TEOREMA DEL VALORE FINALE

Sia f una funzione reale con trasformata $F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ razionale con $grado[D(s)]>grado[N(s)]$ e poli nulli o a parte reale negativa, allora:

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$$

TRASFORMATE ELEMENTARI

- Delta di Dirac

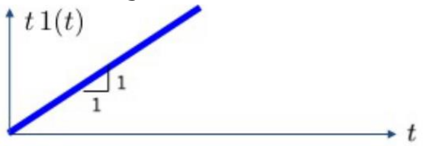
  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

- Gradino unitario

  $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$

- Rampa

  $\mathcal{L}[t1(t)] = \frac{1}{s^2}$



- Esponenziale

  $\mathcal{L}[e^{\alpha t}1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$

- Seno

  $\mathcal{L}[\sin(\omega t)\,1(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

  $\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \varphi)1(t)] = \frac{\omega\cos(\varphi) \pm s\sin(\varphi)}{s^2+\omega^2}$

- Coseno

  $\mathcal{L}[\cos(\omega t)\,1(t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

  $\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \varphi)1(t)] = \frac{s\cos(\varphi) \mp \omega\sin(\varphi)}{s^2+\omega^2}$

SISTEMI LTI E TRASFORMATA DI LAPLACE

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad\qquad x(0) = x_0$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$\Downarrow$ *TRASFORMATA DI LAPLACE* $\Downarrow$

$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$

$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{Y_l(s)} + \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)}_{Y_f(s)}$

Chiamiamo $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ **funzione di trasferimento**

$Y_f(s) = G(s)U(s)$

Nel caso poi in cui assumiamo $x(0) = 0$ allora

$Y(s) = G(s)U(s)$

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C\frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B + D$$

$\mathrm{adj}(\quad) \coloneqq$ **matrice aggiunta**

L'elemento $\mathrm{adj}(M_{ji})$ della matrice aggiunta lo si ottiene facendo il determinante della matrice ottenuta eliminando la riga i e la colonna j di M e moltiplicando per $(-1)^{i+j}$

Nel caso in cui il sistema è SISO avremo una funzione di trasferimento del tipo:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1}s^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_\nu s^\nu + \alpha_{\nu-1}s^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

- $grado[D(s)] = n$ e $grado[N(s)] \leq n$ e al più $= n$ se $D \neq 0$
- $N(s)$ e $D(s)$ possono avere radici comuni, quindi possono esserci cancellazioni (contenuto informativo minore rispetto alla forma di stato)
- $grado[N(s)] - grado[D(s)]$ è detto **grado relativo**

FORME FATTORIZZATE

$$G(s) = \frac{\rho}{s^g} \underbrace{\frac{\prod_i (s+z_i)}{\prod_i (s+p_i)}}_{radici\ reali} \underbrace{\frac{\prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{\prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}}_{radici\ complesse\ coniugate}$$

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1+\tau_i s)}{\prod_i (1+T_i s)} \frac{\prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$$

- $\rho :=$ costante di trasferimento
- $\mu :=$ guadagno
- $-z_i :=$ zeri reali
- $-p_i :=$ poli reali
- $\tau_i, T_i :=$ costanti di tempo
- $\alpha_{ni},\ \omega_{ni} :=$ pulsazioni naturali rispettivamente di zeri e poli complessi coniugati $(\alpha_{ni} > 0,\ \omega_{ni} > 0)$
- $\zeta_{ni},\ \xi_{ni} :=$ smorzamenti rispettivamente di zeri e poli complessi coniugati $(|\zeta_{ni}| < 1,\ |\xi| < 1)$
- $g :=$ tipo del sistema (per $g > 0$ ho poli nell'origine, per $g < 0$ ho zeri nell'origine)

ANTITRASFORMAZIONE

SVILUPPO DI HEAVISIDE CASO POLI REALI O COMPLESSI CONIUGATI TUTTI DISTINTI (MOLTEPLICITÀ 1)

È detto sviluppo di Heaviside o in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s+p_i}$$

$$(s+p_i)Y(s)|_{s=-p_i} = (s+p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=-p_i} = \frac{N(s)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(s+p_j)}\Bigg|_{s=-p_i} = \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{k_j(s+p_i)}{s+p_j}\Bigg|_{s=-p_i}}_{=0} + k_i$$

Vengono detti **residui** i termini:

$$k_i = (s+p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=-p_i}$$

Quindi antitrasformando otteniamo:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+p_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{-p_i t} 1(t)$$

Consideriamo ora le coppie di poli complessi coniugati e i relativi residui associati:

$$p_{i,1} = \sigma + j\omega \qquad p_{i,2} = \sigma - j\omega$$

$$k_{i,1} = Me^{-j\varphi} \qquad k_{i,2} = Me^{j\varphi}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \frac{k_{i,2}}{s+p_{i,2}}\right] = Me^{-j\varphi}e^{-p_{i,1}t}1(t) + Me^{j\varphi}e^{-p_{i,2}t}1(t) = Me^{-j\varphi}e^{-(\sigma+j\omega)t}1(t) + Me^{j\varphi}e^{-(\sigma-j\omega)t}1(t)$$

$$= Me^{-\sigma t}\left(e^{-j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+\varphi)}\right)1(t) = 2Me^{-\sigma t}\frac{e^{-j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+\varphi)}}{2}1(t) = 2Me^{-\sigma t}\cos(\omega t+\varphi)\,1(t)$$

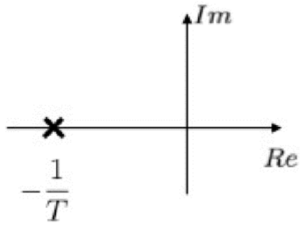
STABILITÀ ESTERNA O BIBO

Un sistema si dice BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) stabile se l'uscita forzata è limitata per ogni ingresso limitato.

Si può dimostrare che il sistema LTI SISO è BIBO stabile se tutti i poli di $G(s)$ sono a parte reale < 0.

RISPOSTA AL GRADINO DI UN SISTEMA DEL I ORDINE (un polo reale)

$$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts} = \frac{\mu}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$



$$u(t) = k1(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\frac{k}{s} = \frac{\mu k}{T}\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+\frac{1}{T}}$$

$$\mu > 0 \qquad k > 0 \qquad T > 0$$

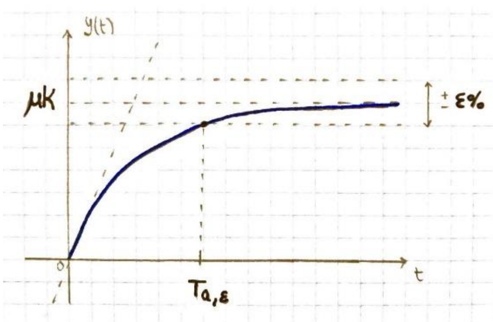
$$k_1 = sY(s)|_{s=0} = \frac{\mu k}{T}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T}\right)}\Bigg|_{s=0} = \mu k$$

$$k_2 = \left(s+\frac{1}{T}\right)Y(s)\Big|_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{\mu k}{T}\frac{1}{s}\Big|_{s=-\frac{1}{T}} = -\mu k$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu k}{s} - \frac{\mu k}{s+\frac{1}{T}}\right] = \mu k1(t) - \mu k e^{-\frac{t}{T}}1(t) = \mu k\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)1(t)$$

$$y(0) = 0 \qquad y_\infty = \mu k$$

$$\dot{y}(0) = \frac{\mu k}{T}$$



$T_{a,\varepsilon}$ ≔ **Tempo di assestamento all' ε%**. È il tempo tale per cui:

$$(1-0{,}01\varepsilon)y_\infty \le y(t) \le (1+0{,}01\varepsilon)y_\infty \quad \forall t \ge T_{a,\varepsilon}$$

Espressioni empiriche:

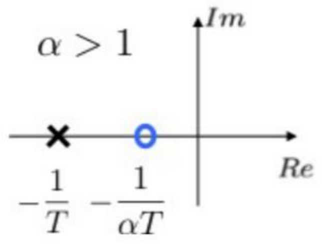
$T_{a,5} \approx 3T$

$T_{a,1} \approx 4{,}6T$

Nota: $\dot{y}(0) = \mu k\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\Big|_{t=0} = \frac{\mu k}{T}$ quindi più piccolo è T, cioè il polo è lontano dall'origine, più il sistema risponde rapidamente.

RISPOSTA AL GRADINO DI UN SISTEMA DEL I ORDINE (un polo reale e uno zero)

$$G(s) = \mu \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s}$$



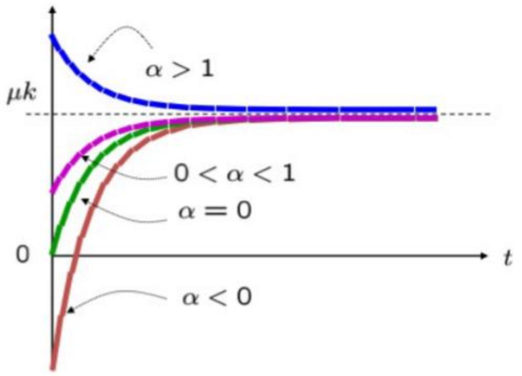
$$u(t) = k1(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s}\frac{k}{s}$$

$$\mu > 0 \qquad k > 0 \qquad T > 0$$

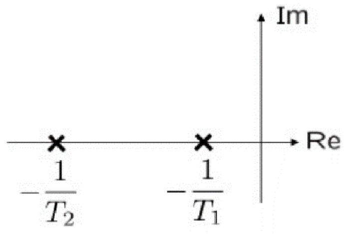
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mu k \left(1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{T}}\right)1(t)$$

$$\boxed{y(0) = \mu \alpha k \qquad y_\infty = \mu k}$$



RISPOSTA AL GRADINO DI UN SISTEMA DEL II ORDINE (2 poli reali distinti)

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = \frac{\mu}{T_1 T_2} \frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}$$



$$u(t) = k1(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{T_1 T_2} \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+\frac{1}{T_1}} + \frac{k_3}{s+\frac{1}{T_2}}$$

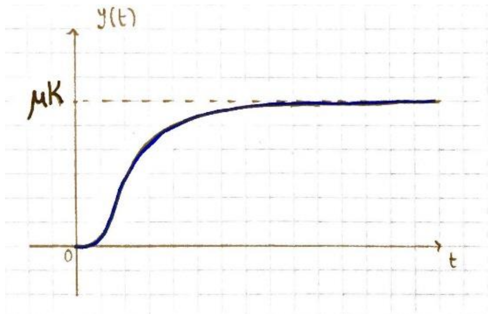
$$\mu > 0 \qquad k > 0 \qquad T_1 > T_2 > 0$$

$$k_1 = sY(s)|_{s=0} = \frac{\mu k}{T_1 T_2} \frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}\Bigg|_{s=0} = \mu k$$

$$k_2 = \left(s+\frac{1}{T_1}\right)Y(s)\Big|_{s=-\frac{1}{T_1}} = \frac{\mu k}{T_1 T_2} \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}\Bigg|_{s=-\frac{1}{T_1}} = -\frac{\mu k}{T_2\left(-\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)} = -\frac{\mu k}{\left(-\frac{T_2}{T_1}+1\right)} = -\frac{T_1}{T_1 - T_2}\mu k$$

$$k_3 = \left(s+\frac{1}{T_2}\right)Y(s)\Big|_{s=-\frac{1}{T_2}} = \frac{\mu k}{T_1 T_2} \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)}\Bigg|_{s=-\frac{1}{T_2}} = -\frac{\mu k}{T_1\left(-\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_1}\right)} = -\frac{\mu k}{\left(-\frac{T_1}{T_2}+1\right)} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}\mu k$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu k}{s} - \frac{T_1}{T_1-T_2}\frac{\mu k}{s+\frac{1}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1-T_2}\frac{\mu k}{s+\frac{1}{T_2}}\right] = \mu k\left(1 - \frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)1(t)$$



$$y(0) = 0 \qquad y_\infty = \mu k$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \frac{\mu k}{T_1 T_2}$$

SISTEMA A POLO DOMINANTE

$$T_1 \gg T_2$$

In tal caso nella risposta $e^{-\frac{t}{T_2}} \to 0$ velocemente e $\frac{T_1}{T_1 - T_2} \approx 1$ quindi:

$$y(t) \approx \mu k\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)1(t)$$

Cioè il sistema di secondo ordine si comporta come uno del primo ordine.

SVILUPPO DI HEAVISIDE CASO POLI REALI O COMPLESSI CONIUGATI MULTIPLI (MOLTEPLICITÀ > 1)

È detto sviluppo di Heaviside o in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{q}(s+p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^{q}\sum_{h=1}^{n_i}\frac{k_{i,h}}{(s+p_i)^h}$$

$$(s+p_i)^{n_i}Y(s)\big|_{s=-p_i} = (s+p_i)^{n_i}\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=-p_i} = \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q}\sum_{h=1}^{n_j}\frac{k_{j,h}(s+p_i)^{n_i}}{(s+p_j)^h}\Bigg|_{s=-p_i}}_{=0} + \underbrace{\sum_{h=1}^{n_i-1}\frac{k_{i,h}(s+p_i)^{n_i}}{(s+p_j)^h}\Bigg|_{s=-p_i}}_{=0} + k_{i,n_i}$$

Vengono detti **residui** i termini:

$$k_{i,h} = \frac{1}{(n_i-h)!}\frac{d^{n_i-h}}{ds^{n_i-h}}\left[(s+p_i)^{n_i}\frac{N(s)}{D(s)}\right]\Bigg|_{s=-p_i}$$

Quindi antitrasformando otteniamo:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^{q}\sum_{h=1}^{n_i}k_{i,h}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+p_i)^h}\right] = \sum_{i=1}^{q}\sum_{h=1}^{n_i}k_{i,h}\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}e^{-p_i t}1(t)$$

Consideriamo ora le coppie di poli complessi coniugati e i relativi residui associati:

$$p_{i,1} = \sigma_i + j\omega_i \qquad p_{i,2} = \sigma_i - j\omega_i$$

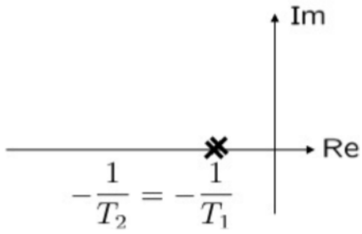
$$k_{i,h,1} = M_{i,h}e^{-j\varphi_{i,h}} \qquad k_{i,h,2} = M_{i,h}e^{j\varphi_{i,h}}$$

Allora:

$$\sum_{h=1}^{n_i}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_{i,h,1}}{(s+p_{i,1})^h} + \frac{k_{i,h,2}}{(s+p_{i,2})^h}\right] = \sum_{h=1}^{n_i}2M_{i,h}\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}e^{-\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_{i,h})\,1(t)$$

RISPOSTA AL GRADINO DI UN SISTEMA DEL II ORDINE (2 poli reali coincidenti)

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)^2} = \frac{\mu}{T_1^2}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2}$$



$$u(t) = k1(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{T_1^2}\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+\frac{1}{T_1}} + \frac{k_3}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2}$$

$$\mu > 0 \qquad k > 0 \qquad T_1 > 0$$

$$k_1 = sY(s)|_{s=0} = \frac{\mu k}{T_1^2}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2}\Bigg|_{s=0} = \mu k$$

$$k_2 = \frac{d}{ds}\left[\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2 Y(s)\right]\Bigg|_{s=-\frac{1}{T_1}} = -\frac{\mu k}{T_1^2}\frac{1}{s^2}\Bigg|_{s=-\frac{1}{T_1}} = -\mu k$$

$$k_3 = \left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2 Y(s)\Bigg|_{s=-\frac{1}{T_1}} = \frac{\mu k}{T_1^2}\frac{1}{s}\Bigg|_{s=-\frac{1}{T_1}} = -\frac{\mu k}{T_1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu k}{s} - \frac{\mu k}{s+\frac{1}{T_1}} - \frac{1}{T_1}\frac{\mu k}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2}\right] = \mu k\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{t}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}\right)1(t)$$

Nota: nel caso di poli reali coincidenti, anche con ingresso limitato, possiamo avere uscita divergente data da $te^{-\frac{t}{T_1}}$

RISPOSTA AL GRADINO DI UN SISTEMA DEL II ORDINE (2 poli reali distinti e uno zero)

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$u(t) = k1(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0 \qquad k > 0 \qquad T_1 > T_2 > 0$$

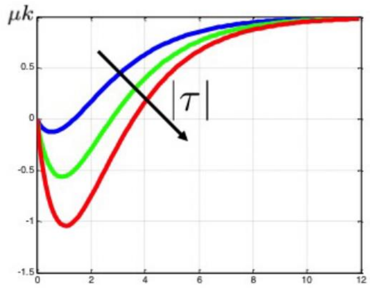
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mu k \left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) 1(t)$$

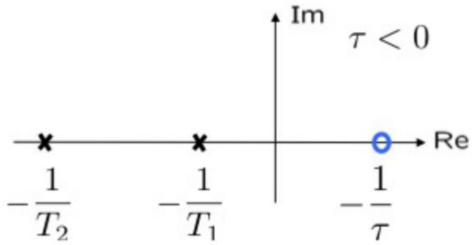
$$y(0) = 0 \qquad y_\infty = \mu k$$

$$\dot{y}(0) = \frac{\mu k \tau}{T_1 T_2}$$

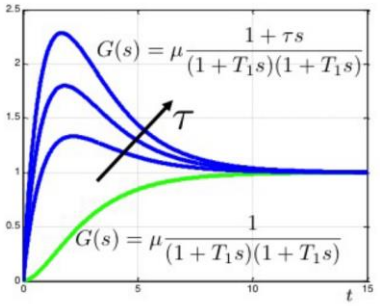
Nota: il segno della derivata dipende da τ

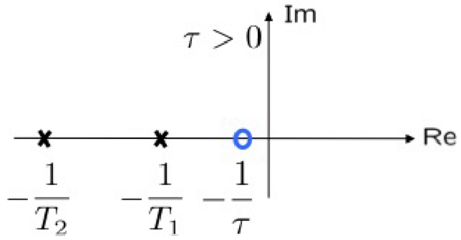
CASO $\tau < 0$ (fase NON minima)



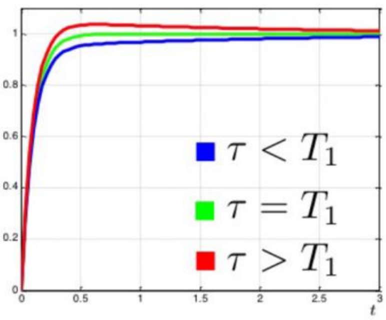


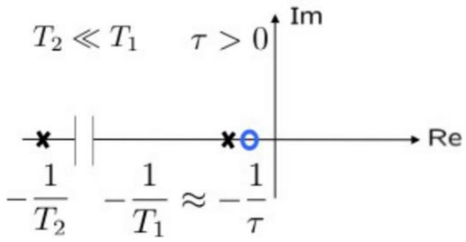
CASO $\tau > T_1 > T_2$ (fase minima → SOVRAELONGAZIONE)





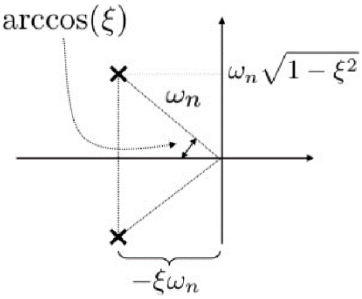
CASO $\tau \approx T_1 \gg T_2$ (fase minima → CODE DI ASSESTAMENTO)





RISPOSTA AL GRADINO DI SISTEMI DEL II ORDINE CON POLI COMPLESSI CONIUGATI

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



$$u(t) = k1(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\mu > 0 \qquad k > 0 \qquad \underbrace{|\xi| < 1}_{\text{coefficiente di smorzamento}} \qquad \underbrace{\omega_n > 0}_{\text{pulsazione naturale}}$$

$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\sigma t}\sin(\omega t + \varphi))1(t)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \sigma = \xi\omega_n \qquad \omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \qquad \varphi = \arccos(\xi)$$

$y(0) = 0$ $\qquad y_\infty = \mu k$

$\dot{y}(0) = 0$

$\ddot{y}(0) = \mu\omega_n^2$

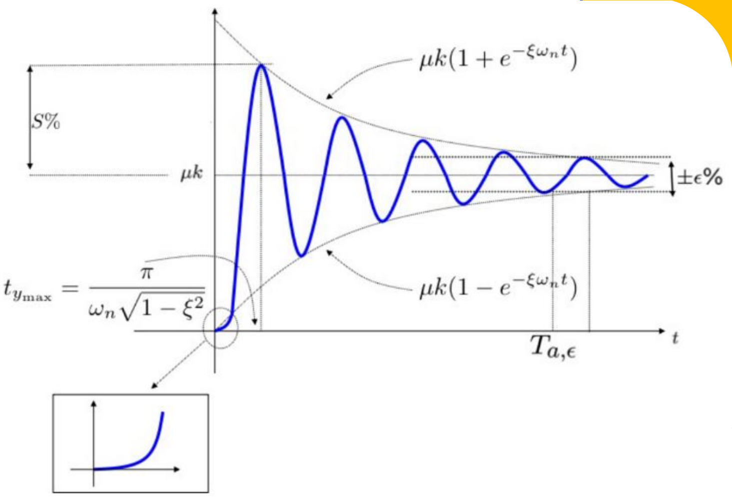
$T_{a,\varepsilon}$ ≔ **Tempo di assestamento all' ε%.** È il tempo tale per cui:

$$(1 - 0{,}01\varepsilon)y_\infty \le y(t) \le (1 + 0{,}01\varepsilon)y_\infty \quad \forall t \ge T_{a,\varepsilon}$$

Espressioni empiriche:

$$T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$T_{a,1} \approx \frac{4{,}6}{\xi\omega_n}$$

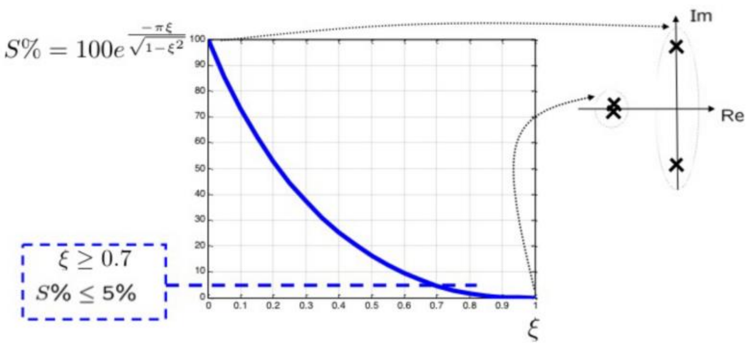


$S\%$ ≔ **Sovraelongazione percentuale**

$S\% = 100\frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$ per sistemi del II ordine:

$$S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

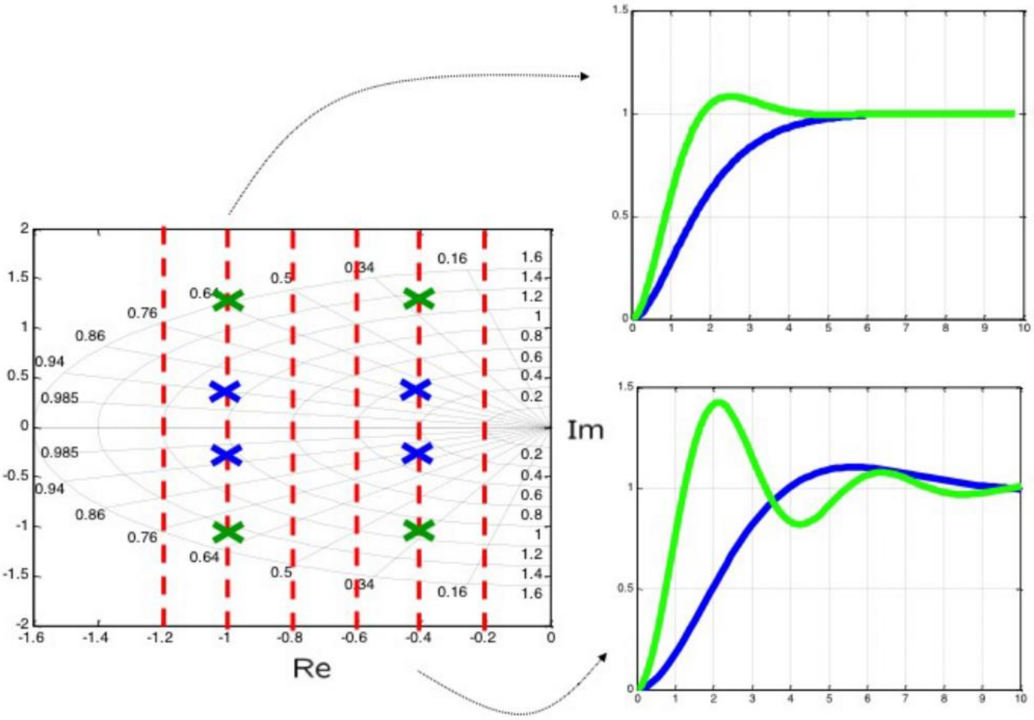
La sovraelongazione percentuale dipende solo da ξ ed è una funzione monotona decrescente



Dato che è monotona decrescente si ha che $S\% \le S^*$ per ogni $\xi \ge \xi^*$

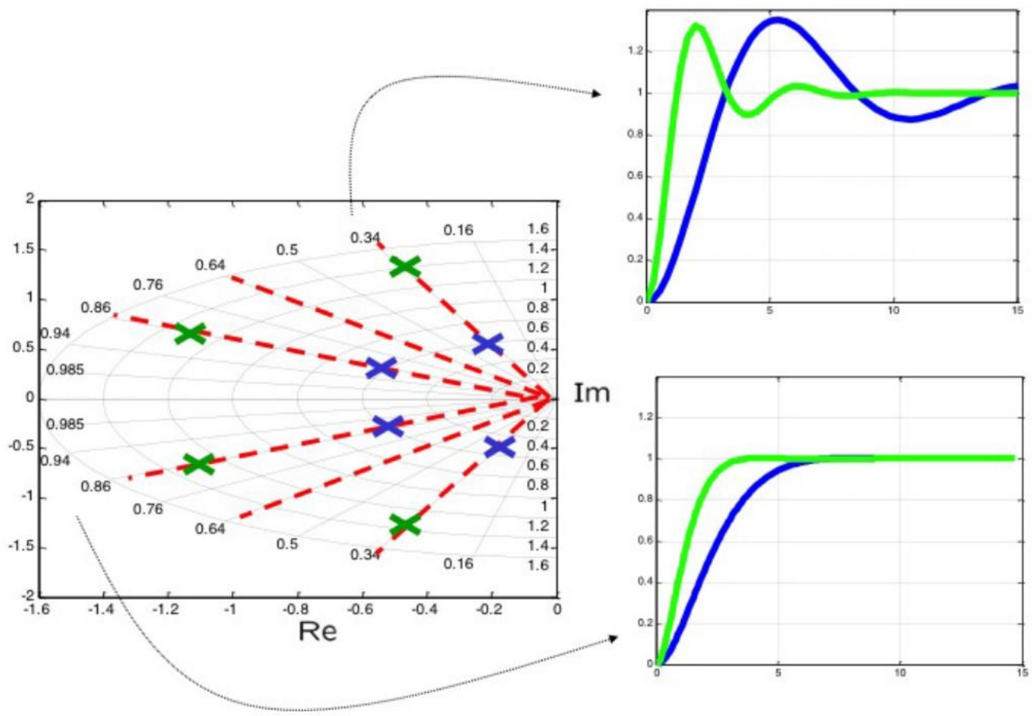
Sistemi di poli con stessa parte reale ma parte immaginaria differente avranno una risposta al gradino con stesso tempo di assestamento ma diversa sovraelongazione.

Sul piano complesso i luoghi di punti a tempo di assestamento costante sono rette parallele all'asse immaginario:



Sistemi con stesso coefficiente di smorzamento ξ avranno una risposta al gradino con stessa sovraelongazione ma diverso tempo di assestamento.

Sul piano complesso i luoghi di punti a sovraelongazione costante sono semirette uscenti dall'origine:

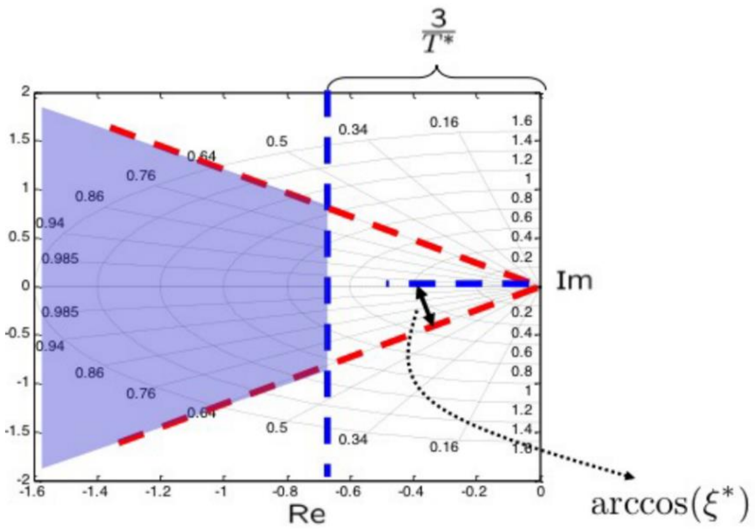


Se volessimo caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) con:

$$S\% \leq S^* \quad e \quad T_{a,5} \leq T^*$$

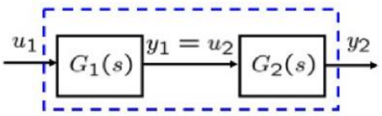
Dovremmo considerare la zona per cui:

$$\xi \geq \xi^* \quad e \quad \xi\omega_n \geq \frac{3}{T^*}$$



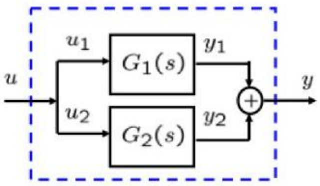
INTERCONNESSIONI DI SISTEMI DINAMICI E FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

SERIE



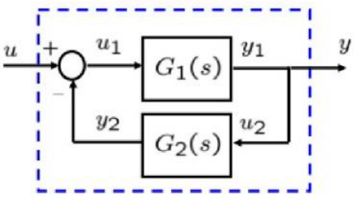
$Y_1(s) = G_1(s)U_1(s)$
$Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = \boldsymbol{G_2(s)G_1(s)}U_1(s)$

PARALLELO



$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = [\boldsymbol{G_1(s) + G_2(s)}]U(s)$

RETROAZIONE



$Y(s) = Y_1(s) = G_1(s)U_1(s) = G_1(s)[U(s) - Y_2(s)] = G_1(s)[U(s) - G_2(s)U_2(s)\,] = G_1(s)[U(s) - G_2(s)Y(s)\,]$

$$Y(s)[1 + G_1(s)G_2(s)] = G_1(s)U(s) \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{\boldsymbol{G_1(s)}}{\boldsymbol{1 + G_1(s)G_2(s)}}U(s)$$

RISPOSTA IN FREQUENZA AD UN SEGNALE DI INGRESSO SINUSOIDALE

TEOREMA DEL REGIME PERMANENTE

Se ad un sistema LTI con funzione di trasferimento $G(s)$ avente poli distinti a parte reale negativa si applica l'ingresso sinusoidale:

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$$

L'uscita a regime è data da:

$$y(t) \sim y_2(t) = U|G(j\omega)|\cos\big(\omega t + \arg\big(G(j\omega)\big) + \varphi\big) = |Y(j\omega)|\cos\big(\omega t + \arg\big(Y(j\omega)\big)\big)$$

DIMOSTRAZIONE: Dato un sistema lineare tempo invariante SISO con funzione di trasferimento $G(s)$ vogliamo calcolare l'uscita in corrispondenza di un ingresso sinusoidale.

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$$

$$U(s) = U\frac{s\cos(\varphi) - \omega\sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)U\frac{s\cos(\varphi) - \omega\sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} = G(s)U\frac{s\cos(\varphi) - \omega\sin(\varphi)}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

Supponendo che $G(s)$ abbia poli distinti a parte reale negativa (sistema BIBO stabile) allora sviluppando in fratti semplici:

$$G(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s + p_i)} \qquad\qquad Y(s) = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{k_i}{s + p_i}}_{poli\ di\ sistema} + \underbrace{\frac{k_u}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}_u}{s + j\omega}}_{radici\ ingresso}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{k_i e^{-p_i t}1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{2|k_u|\cos(\omega t + \arg(k_u))\,1(t)}_{y_2(t)}$$

Poiché i poli di $G(s)$ sono a parte reale negativa, i contributi $e^{-p_i t}1(t)$ sono tutti convergenti a zero, quindi $y_1(t) \to 0$ per $t \to \infty$.

Calcoliamo i residui $k_u = |k_u|e^{j\arg(k_u)}$ e $\bar{k}_u = |k_u|e^{-j\arg(k_u)}$:

$$k_u = (s - j\omega)Y(s)|_{s=j\omega} = UG(j\omega)\frac{j\omega\cos(\varphi) - \omega\sin(\varphi)}{j\omega + j\omega} = UG(j\omega)\frac{j\cos(\varphi) - \sin(\varphi)}{2j}$$

Poiché $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$ e $\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

$$k_u = UG(j\omega)\frac{e^{j\varphi}}{2} = \frac{U|G(j\omega)|}{2}e^{j(\arg(G(j\omega)) + \varphi)}$$

$$|k_u| = \frac{U|G(j\omega)|}{2} \qquad , \qquad \arg(k_u) = \arg\big(G(j\omega)\big) + \varphi$$

Quindi:

$$y(t) \sim y_2(t) = U|G(j\omega)|\cos\big(\omega t + \arg\big(G(j\omega)\big) + \varphi\big)$$

L'uscita avrà ampiezza amplificata/attenuata di $G(j\omega)$ e uno sfasamento di $\arg\big(G(j\omega)\big)$. $G(j\omega)$ è detta **risposta in frequenza**.

RISPOSTA IN FREQUENZA A SEGNALI SVILUPPABILI IN SERIE DI FOURIER

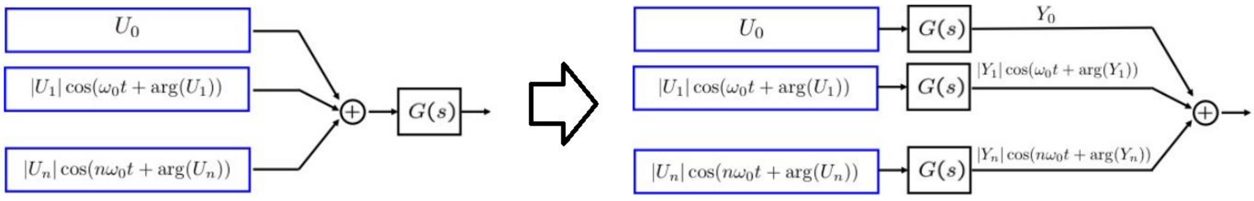
SEGNALI PERIODICI

Se il segnale d'ingresso $u(t)$ è periodico $\big(\exists T > 0 : \forall t \geq 0 \;\; u(t+T) = u(t)\big)$ ed è sviluppabile in serie di Fourier:

$$u(t) = U_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(U_n)) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad U_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad n = 0,1,\ldots$$

In base a quanto visto per un ingresso sinusoidale e sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti per sistemi BIBO stabili si può dimostrare che per t elevati:

$$y(t) \approx Y_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |Y_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(Y_n)) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad Y_n = G(jn\omega_0)U_n$$



SEGNALI NON PERIODICI

Nel caso di segnali non periodici, se questi sono dotati di trasformata di Fourier possiamo scriverli come:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2|U(j\omega)| \cos\big(\omega t + \arg\big(U(j\omega)\big)\big)\, d\omega \quad , \quad U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

In questo caso l'ingresso è scomponibile come un'infinità non numerabile di armoniche ma per sistemi BIBO stabili si può dimostrare che per t elevati:

$$y(t) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2|Y(j\omega)| \cos\big(\omega t + \arg\big(Y(j\omega)\big)\big)\, d\omega \quad , \quad Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

RISPOSTA IN FREQUENZA

Per un certo valore di ω, $G(j\omega)$ è un numero complesso. Uno dei modi più usati per rappresentare modulo e argomento della risposta in frequenza sono i **diagrammi di Bode**.

Funzione di trasferimento in forma fattorizzata	Risposta in frequenza associata
$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1+\tau_i s)}{\prod_i (1+T_i s)} \frac{\prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$	$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1+j\omega\tau_i)}{\prod_i (1+j\omega T_i)} \frac{\prod_i \left(1 + 2j\omega \frac{\zeta_i}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\prod_i \left(1 + 2j\omega \frac{\xi_i}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$

Le ascisse, a cui viene associata la frequenza, sono in scala logaritmica in base 10

Le ampiezze vengono espresse in decibel: $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$

Le fasi vengono espresse in gradi

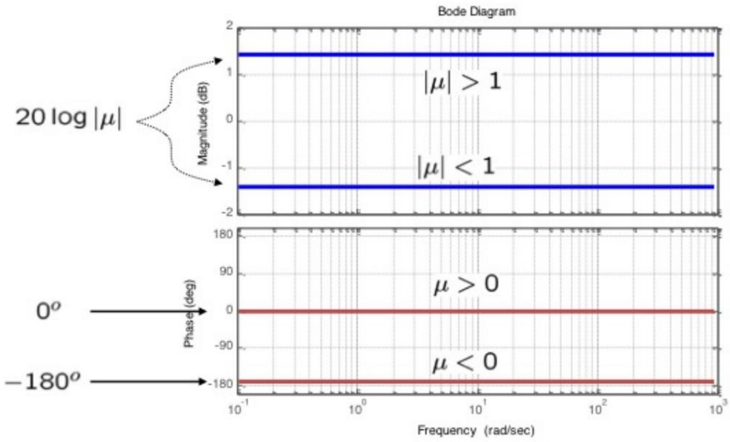
La notazione in forma logaritmica ci permette di riscrivere la risposta in frequenza come somma di termini logaritmici:

$$\begin{aligned}
|G(j\omega)|_{dB} = \quad & 20\log|\mu| - 20g\log|j\omega| \\
& + \sum_i 20\log|1 + j\omega\tau_i| + \sum_i 20\log\left|1 + 2j\omega\frac{\zeta_i}{a_{n,i}} - \frac{\omega^2}{a_{n,i}^2}\right| \\
& - \sum_i 20\log|1 + j\omega T_i| - \sum_i 20\log\left|1 + 2j\omega\frac{\xi_i}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\arg\big(G(j\omega)\big) = \quad & \arg(\mu) - g\arg(j\omega) \\
& + \sum_i \arg(1 + j\omega\tau_i) + \sum_i \arg\left(1 + 2j\omega\frac{\zeta_i}{a_{n,i}} - \frac{\omega^2}{a_{n,i}^2}\right) \\
& - \sum_i \arg(1 + j\omega T_i) - \sum_i \arg\left(1 + 2j\omega\frac{\xi_i}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2}\right)
\end{aligned}$$

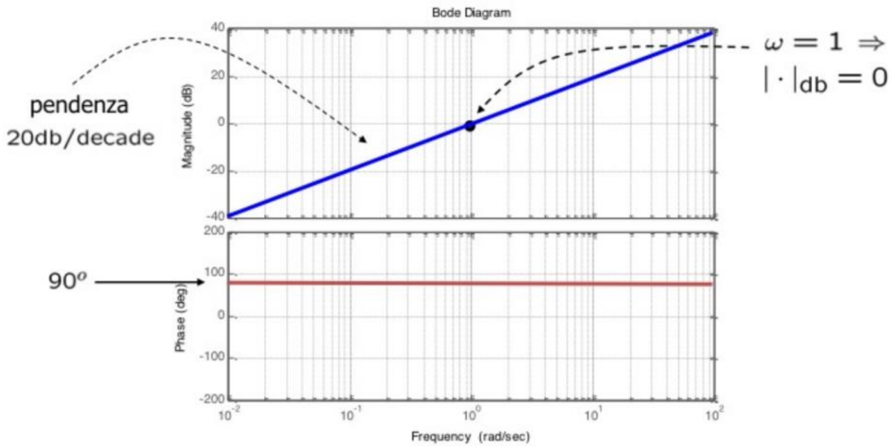
DIAGRAMMI DI BODE: guadagno statico

$$G_a(j\omega) = \mu \quad \rightarrow \quad |G_a(j\omega)|_{dB} = 20\log|\mu| \qquad \arg\big(G_a(j\omega)\big) = \arg(\mu)$$



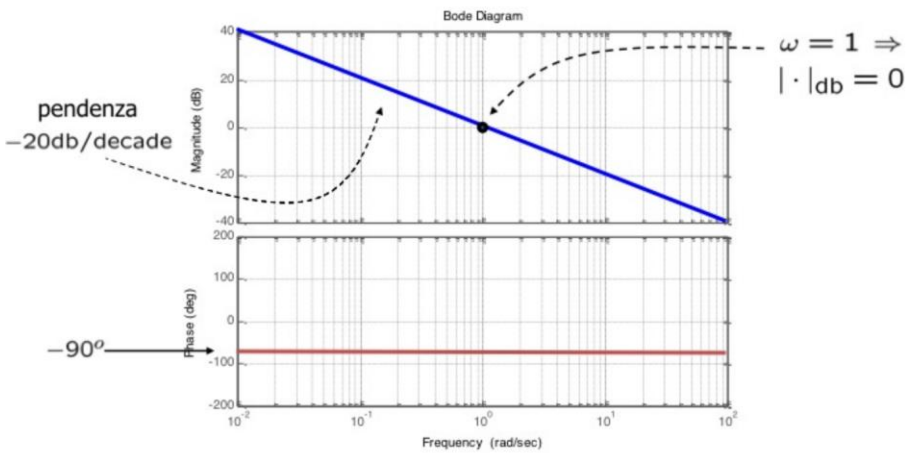
DIAGRAMMI DI BODE: zeri nell'origine ($g < 0$)

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = j\omega \quad \rightarrow \quad |G_b(j\omega)|_{dB} = -20g\log(\omega) = 20\log(\omega) \qquad \arg\big(G_b(j\omega)\big) = -g\arg(j\omega) = \arg(j\omega)$$



DIAGRAMMI DI BODE: poli nell'origine ($g > 0$)

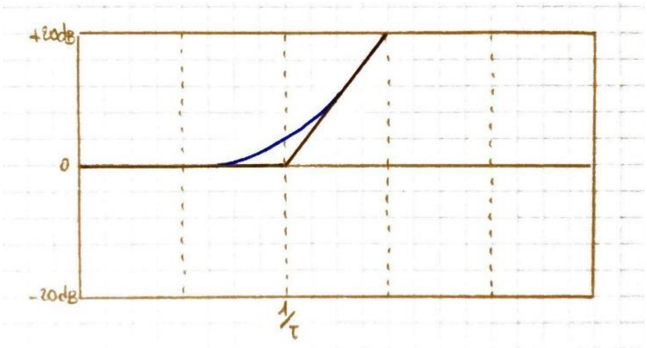
$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = \frac{1}{j\omega} \quad \rightarrow \quad |G_b(j\omega)|_{dB} = -20g\log(\omega) = -20\log(\omega) \qquad \arg\big(G_b(j\omega)\big) = -g\arg(j\omega) = -\arg(j\omega)$$



DIAGRAMMI DI BODE: zero reale

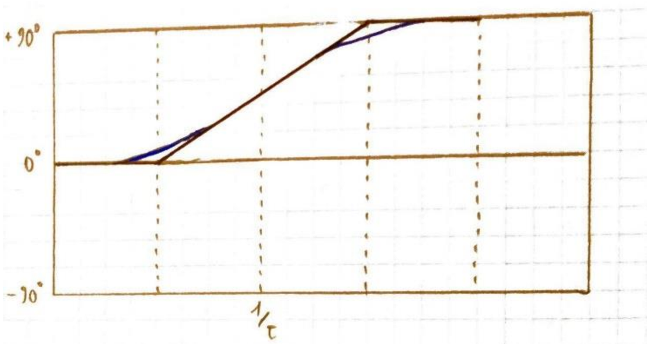
$G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \approx \begin{cases} 20\log 1 = 0 & \omega \ll \dfrac{1}{\tau} \\ 20\log|\omega\tau| & \omega \gg \dfrac{1}{\tau} \end{cases}$$



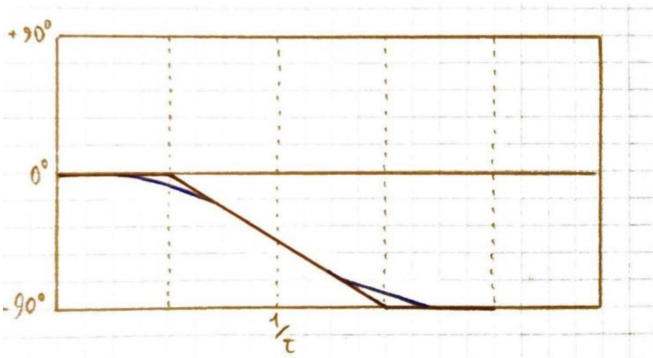
zero reale negativo ($\tau > 0$)

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0° & \omega \ll \dfrac{1}{\tau} \\ 90° & \omega \gg \dfrac{1}{\tau} \end{cases}$$



zero reale positivo ($\tau < 0$)

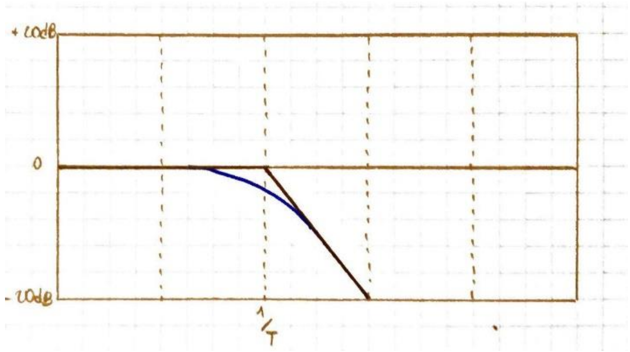
$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0° & \omega \ll \dfrac{1}{\tau} \\ -90° & \omega \gg \dfrac{1}{\tau} \end{cases}$$



DIAGRAMMI DI BODE: polo reale

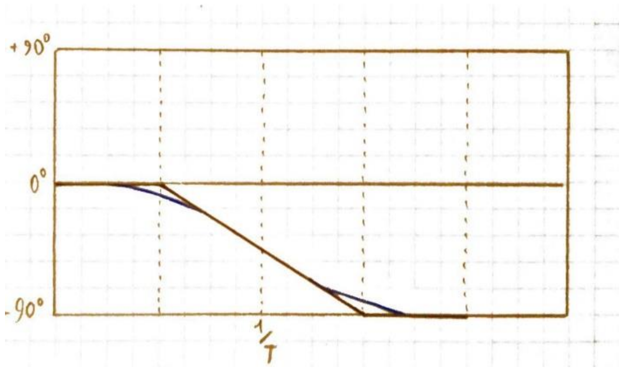
$$G_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \approx \begin{cases} -20\log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{T} \\ -20\log|\omega T| & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$



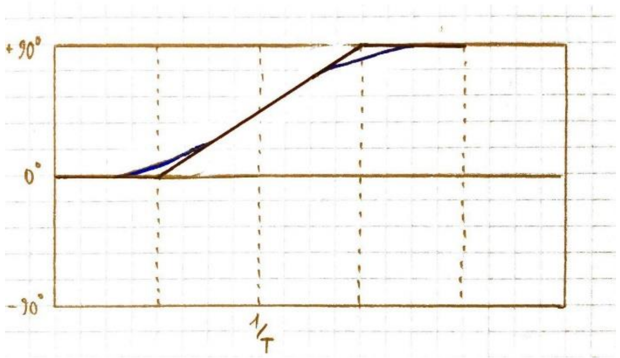
polo reale negativo ($T > 0$)

$$\arg\big(G_c(j\omega)\big) = -\arg(1 + j\omega T) \approx \begin{cases} 0° & \omega \ll \frac{1}{T} \\ -90° & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$



polo reale positivo ($T < 0$)

$$\arg\big(G_c(j\omega)\big) = -\arg(1 + j\omega T) \approx \begin{cases} 0° & \omega \ll \frac{1}{T} \\ 90° & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$



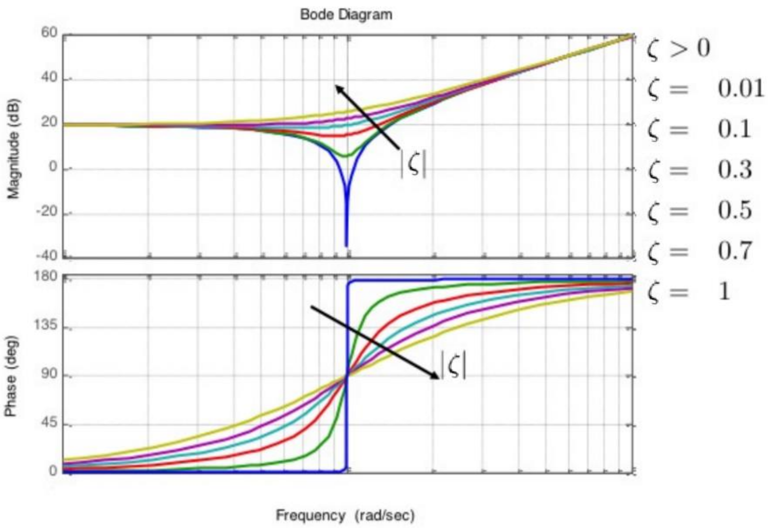
DIAGRAMMI DI BODE: zeri complessi coniugati

$$G_d(j\omega) = 1 + 2j\omega\frac{\zeta}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$$

$$|G_d(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20\log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20\log\left(\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right) & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

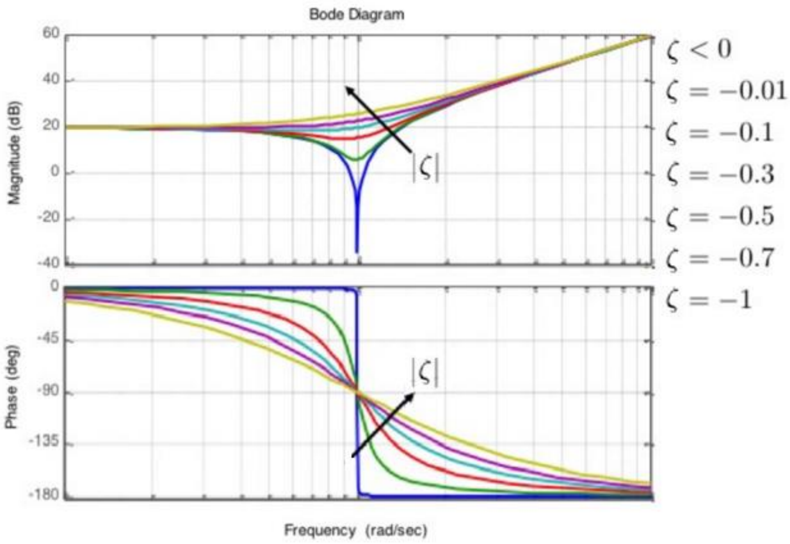
parte reale negativa ($\zeta > 0$)

$$\arg\big(G_d(j\omega)\big) \approx \begin{cases} 0° & \omega \ll \alpha_n \\ 180° & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



parte reale positiva ($\zeta < 0$)

$$\arg\big(G_d(j\omega)\big) \approx \begin{cases} 0° & \omega \ll \alpha_n \\ -180° & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



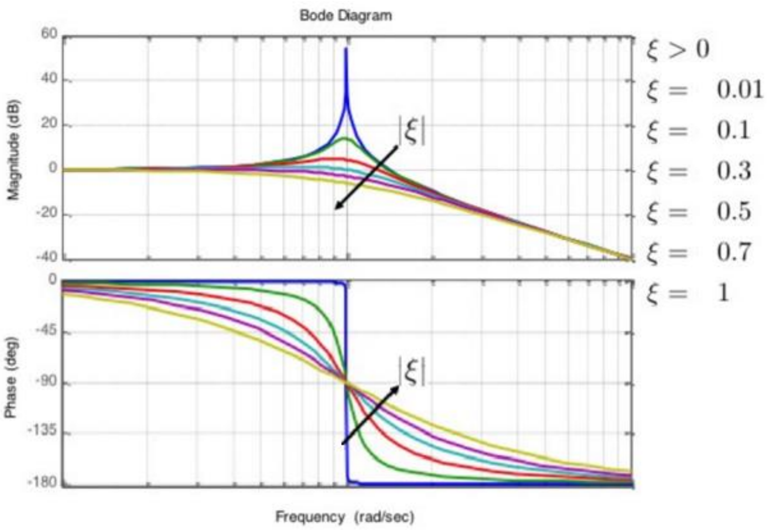
DIAGRAMMI DI BODE: poli complessi coniugati

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\omega\frac{\xi}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$|G_d(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \approx \begin{cases} 20\log(1) = 0 & \omega \ll \omega_n \\ 20\log\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

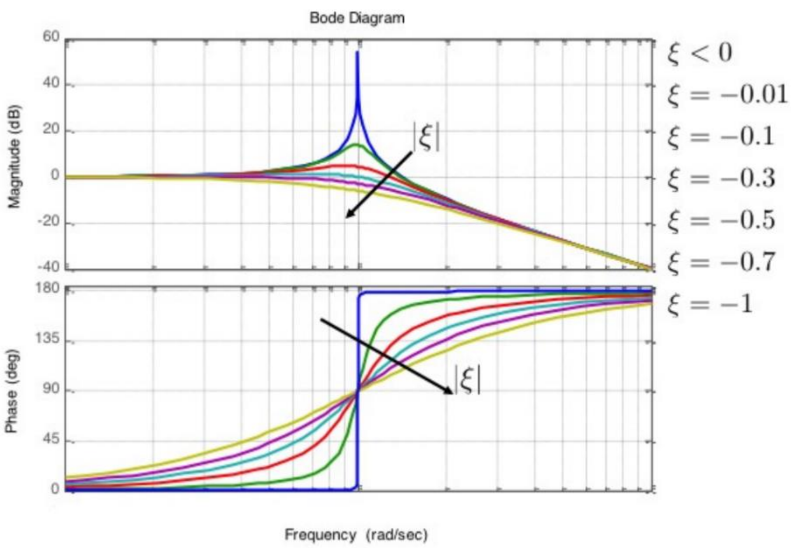
polo reale negativa ($\xi > 0$)

$$\arg\big(G_d(j\omega)\big) \approx \begin{cases} 0° & \omega \ll \omega_n \\ 180° & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$



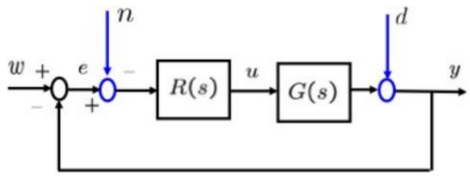
polo reale positiva ($\xi < 0$)

$$\arg\big(G_d(j\omega)\big) \approx \begin{cases} 0° & \omega \ll \omega_n \\ -180° & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$



SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE

Consideriamo il seguente schema di controllo:



$G(s)$ è il **sistema** da controllare

$u(t)$ è **l'ingresso di controllo** del sistema in anello aperto

$y(t)$ è l'**uscita controllata**

$n(t)$ è il **disturbo di misura** dato dallo strumento con cui andremo a leggere il dato in uscita

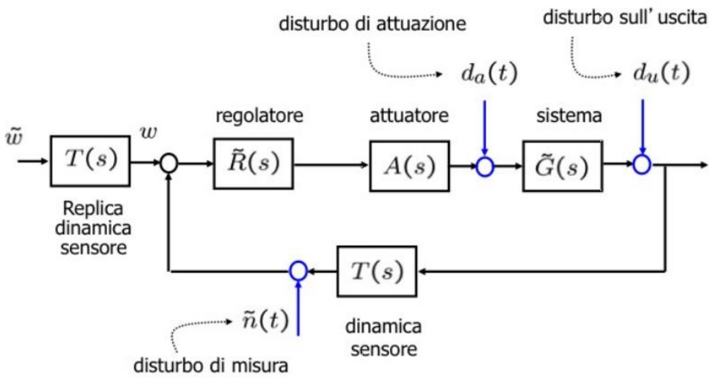
$d(t)$ è il **disturbo in uscita** dato da agenti esterni sul nostro sistema

Voglio che $y(t)$ segua il più possibile il **riferimento** $w(t)$ e per far questo è necessario progettare il **regolatore** $R(s)$

$e(t) = w(t) - y(t)$ è detto **errore di inseguimento**

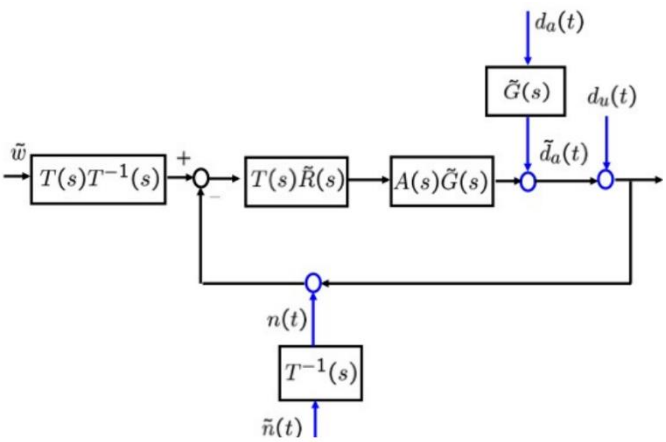
$L(s) = R(s)G(s)$ è detta **funzione di trasferimento in anello aperto**

Lo schema precedente cattura anche strutture più complesse che includono attuatori e trasduttori (schema reale):



L'attuatore trasforma una grandezza elettrica in una grandezza meccanica.

Usando le proprietà di schemi a blocchi interconnessi si può riscrivere lo schema precedente in modo equivalente:



sistemi:

$$R(s) = T(s)\tilde{R}(s)$$

$$G(s) = A(s)\tilde{G}(s)$$

segnali:

$$W(s) = \widetilde{W}(s)T(s)T^{-1}(s) = \widetilde{W}(s)$$

$$N(s) = \widetilde{N}(s)T^{-1}(s)$$

$$D(s) = D_a(s)\tilde{G}(s) + D_u(s)$$

Nota: Nelle applicazioni di interesse ingegneristico tipicamente le bande dei segnali di ingresso sono limitate in range:

- $w(t)$ e $d(t)$ hanno bande a basse frequenze (es. posizioni, rotazioni, velocità, ecc. di sistemi meccanici)
- $n(t)$ hanno bande ad alte frequenze (es. disturbi termici in componenti elettronici, accoppiamenti con campi elettromagnetici, ecc.)

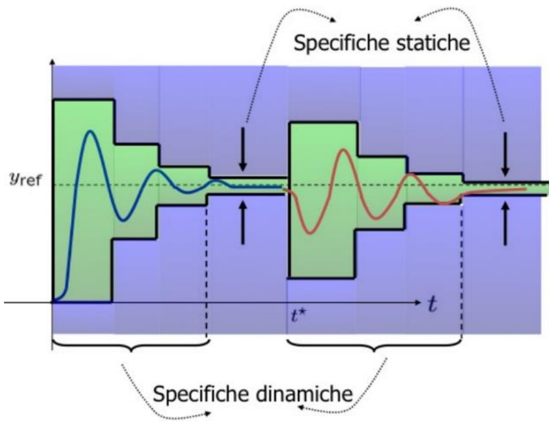
REQUISITI DI SISTEMI DI CONTROLLO

STABILITÀ

- Stabilità nominale
  Sistema asintoticamente stabile (o BIBO stabile): tutti i poli dovranno essere a parte reale < 0
- **Stabilità robusta** rispetto a incertezze
  Stabilità in presenza di errori di modello o incertezze nei parametri.
  Esempio: massimo ritardo temporale τ_{MAX} o massima incertezza sul guadagno statico $\Delta\mu_{MAX}$

PRESTAZIONI

- Prestazioni statiche: specifiche a transitorio esaurito
  - **Precisione statica**
    $$|e(t)| \le e_{MAX} \quad oppure \quad e(t) = 0 \quad per \quad t \to \infty$$
    A fronte di ingressi w, d, n con determinate caratteristiche:
    - Risposta a gradino o rampa
    - Risposta a ingressi sinusoidali a date frequenze
- Prestazioni dinamiche: specifiche su transitorio
  - **Precisione dinamica**
    Specifiche in termini di sovraelongazione e tempo di assestamento max: $S\% \le S_{MAX}$ e $T_{\alpha,\varepsilon} \le T_{MAX}$
  - **Attenuazione disturbo in uscita** $d(t)$
    Il disturbo in uscita $d(t)$ con una banda limitata in un range di pulsazioni $[\omega_{d,min}, \omega_{d,max}]$ deve essere attenuato di $A_d\ dB$. $(A_d > 0)$
  - **Attenuazione disturbo di misura** $n(t)$
    Il disturbo di misura n(t) con una banda limitata in un range di pulsazioni $[\omega_{n,min}, \omega_{n,max}]$ deve essere attenuato di $A_n\ dB$. $(A_n > 0)$
  - **Moderazione variabile di controllo** $u(t)$
    Contenimento dell'ampiezza della variabile di controllo u in ingresso al sistema fisico (per evitare saturazione attuatori, uscita da range in cui la linearizzazione è valida, costi eccessivi, ecc.)
  - **Fisica realizzabilità del regolatore** $R(s)$
    Il regolatore deve essere un sistema proprio, quindi il grado relativo (differenza $poli - zeri$) deve essere ≥ 0.



MARGINI DI FASE E AMPIEZZA

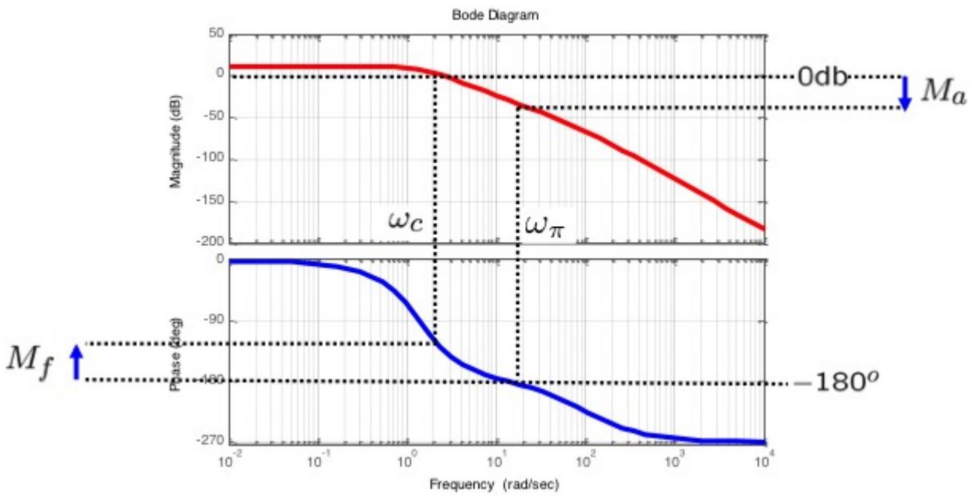
Margine di fase:

$$M_f = \arg[L(j\omega_c)] - (-180°) = 180° + \arg[L(j\omega_c)] \qquad \omega_c : |L(j\omega_c)|_{dB} = 0$$

Nota: ω_c è detta **pulsazione critica**

Margine di ampiezza:

$$M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{dB} \qquad \omega_\pi : \arg[L(j\omega_\pi)] = -180°$$



CASI PATOLOGICI

Ci sono casi in cui M_f e M_a non sono definiti o non sono informativi:

- Intersezioni multiple: il diagramma delle ampiezze $|L(j\omega)|_{dB}$ attraversa l'asse a 0_{dB} più di una volta
- Assenza di intersezioni: il diagramma delle ampiezze $|L(j\omega)|_{dB}$ non attraversa l'asse a 0_{dB}
- Segni discordi: per essere informativi M_f e M_a devono avere lo stesso segno

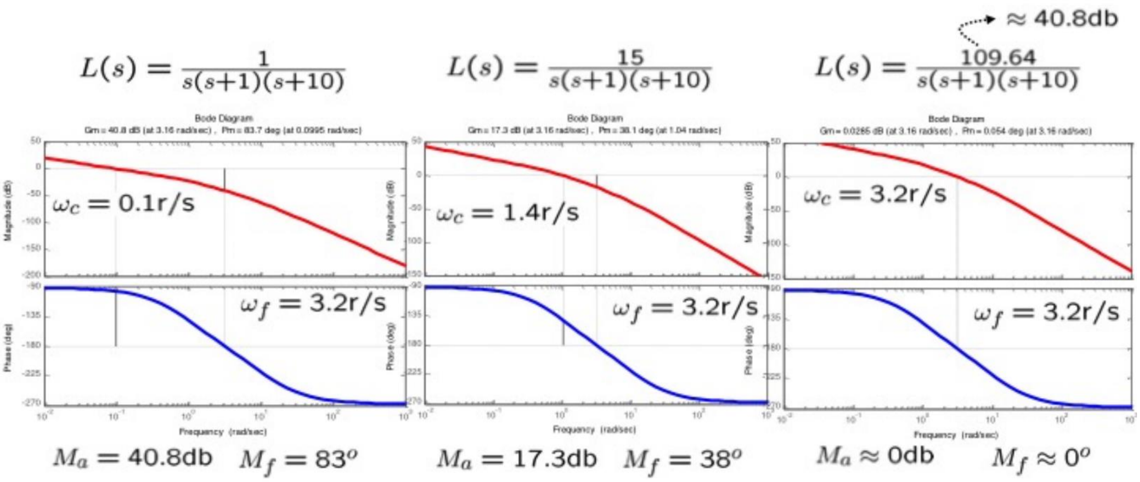
CRITERIO DI BODE

Si supponga che:

- $L(s)$ non abbia poli a parte reale (strettamente) positiva
- Il diagramma di Bode di $|L(j\omega)|_{dB}$ attraversi l'asse 0_{dB} una e una sola volta

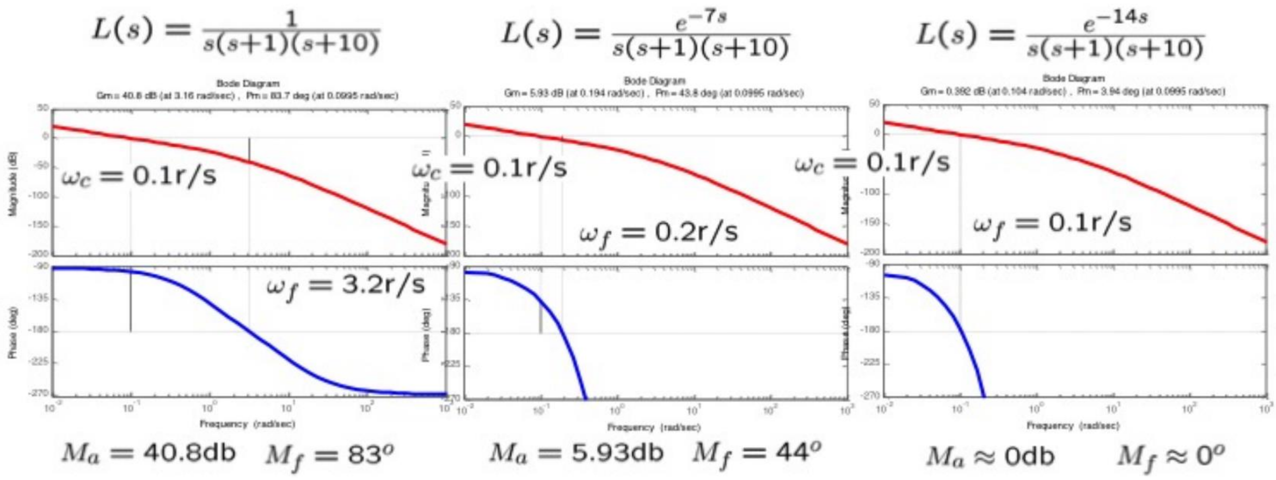
allora, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che risulti $\mu > 0$ (con μ guadagno statico di $L(j\omega)$) e $M_f > 0$ (cioè $\arg[L(j\omega_c)] > -180°$)

Il margine di ampiezza M_a rappresenta la massima incertezza tollerabile sul guadagno statico μ



Nota: variazioni di μ determinano traslazioni del diagramma delle ampiezze e non alterano il diagramma delle fasi

Il margine di fase M_f rappresenta la massima incertezza tollerabile sul ritardo τ



Nota: variazioni di τ determinano variazioni, con andamento esponenziale, del diagramma delle fasi e non alterano il diagramma delle ampiezze (per questo motivo se $L(s) = e^{-s\tau}\tilde{L}(s)$ la pulsazione critica ω_c non cambia)

Nota: un ritardo riduce quindi il margine di fase in quanto per $\omega = \omega_c$ riduce la fase, ovvero

$$\arg[L(j\omega_c)] = \arg[\tilde{L}(j\omega_c)] - \tau\omega_c$$

Quindi il massimo ritardo tollerabile τ_{MAX} deve soddisfare:

$$\tau_{MAX} < \frac{M_f}{\omega_c}$$

FUNZIONI DI SENSITIVITÀ

Ingressi:

- $\omega(t)$
- $d(t)$
- $n(t)$

Uscite:

- $e(t)$
- $y(t)$
- $u(t)$

Data la linearità del sistema possiamo riscrivere le uscite come somma dei contributi dei singoli ingressi:

$Y(s) = Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s)$

- $Y_w(s) = R(s)G(s)[W(s) - Y_w(s)] \rightarrow Y_w(s)[1 + R(s)G(s)] = R(s)G(s)W(s) \rightarrow$
$$Y_w(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} W(s) = F(s)W(s)$$
- $\begin{matrix} Y_d(s) = D(s) + E_d(s)R(s)G(s) \\ E_d(s) = -Y_d(s) \end{matrix} \rightarrow Y_d(s)\big(1 + R(s)G(s)\big) = D(s) \rightarrow$
$$Y_d(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} D(s) = S(s)D(s)$$
- $Y_n(s) = R(s)G(s)\big[-\big(N(s) + Y_n(s)\big)\big] \rightarrow Y_n(s)[1 + R(s)G(s)] = -R(s)G(s)N(s) \rightarrow$
$$Y_n(s) = -\frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} N(s) = -F(s)N(s)$$

$E(s) = E_n(s) + E_d(s) + E_n(s)$

- $E_w(s) = W(s) - Y_w(s) = W(s) - F(s)W(s) = \big(1 - F(s)\big)W(s) = S(s)W(s)$
- $E_d(s) = -Y_d(s) = -S(s)D(s)$
- $E_n(s) = -Y_n(s) = F(s)N(s)$

$U(s) = U_w(s) + U_d(s) + U_n(s)$

- $U_w(s) = R(s)[W(s) - G(s)U_w(s)] \rightarrow U_w(s)[1 + R(s)G(s)] = R(s)W(s) \rightarrow$
$$U_w(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} W(s) = Q(s)W(s)$$
- $U_d(s) = R(s)\big[-\big(D(s) + G(s)U_d(s)\big)\big] \rightarrow U_d(s)[1 + R(s)G(s)] = -R(s)D(s) \rightarrow$
$$U_d(s) = -\frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} D(s) = -Q(s)D(s)$$
- $U_n(s) = R(s)\big[-\big(N(s) + G(s)U_n(s)\big)\big] \rightarrow U_n(s)[1 + R(s)G(s)] = -R(s)N(s) \rightarrow$
$$U_n(s) = -\frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} N(s) = -Q(s)N(s)$$

Ricaviamo così le seguenti funzioni di sensitività

Funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$$

Idealmente vorrei $S(s) = 0$ per annullare l'effetto del disturbo $d(t)$

$$\boxed{F(s) + S(s) = 1}$$

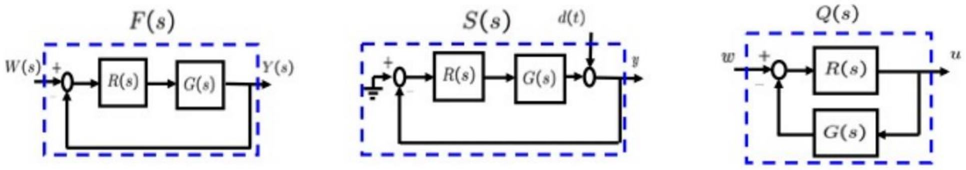
Funzione di sensitività complementare

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Idealmente vorrei $F(s) = 1$ per seguire fedelmente il riferimento $w(t)$, tuttavia così facendo il disturbo $n(t)$ non sarebbe per niente attenuato

Funzione di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$



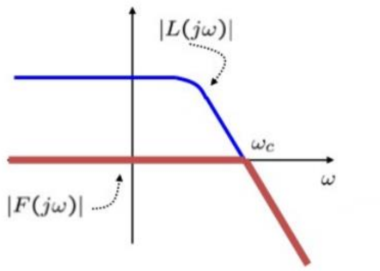
$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

Poiché le frequenze del riferimento $w(t)$ e del disturbo in uscita $d(t)$ sono a basse frequenze mentre il disturbo di misura $n(t)$ si trova ad alte frequenze, allora per $F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$ cercheremo di avere:

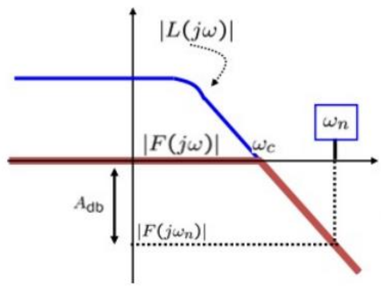
- $|F(j\omega)| \approx 1$ a basse frequenze
- $|F(j\omega)| \approx 0$ ad alte frequenze

Quindi progetteremo $R(j\omega)$ in modo che:

- $|L(j\omega)| \gg 1$ a basse frequenze
- $|L(j\omega)| \ll 1$ ad alte frequenze

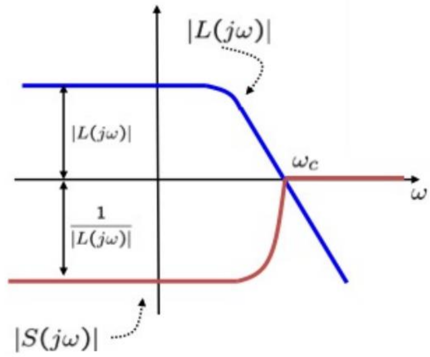


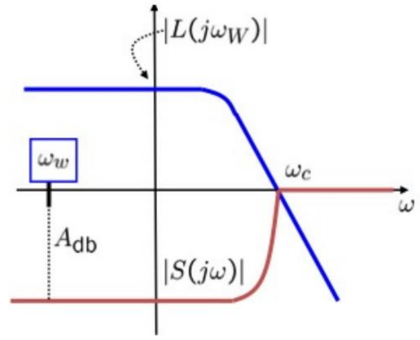
Nota: ω_c è la nostra pulsazione critica che divide le zone di alta/bassa frequenza



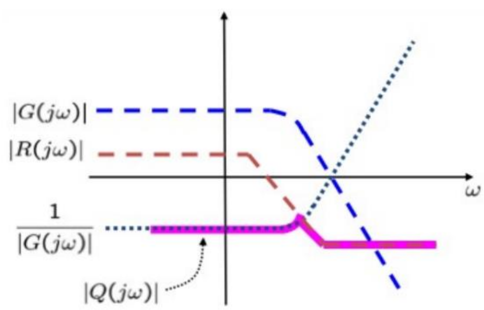
$$|F(j\omega)| = \left|\frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}\right| \approx \begin{cases} 1 & se\ \omega \leq \omega_c \rightarrow |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & se\ \omega > \omega_c \rightarrow |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

$$|S(j\omega)| = \left|\frac{1}{1+L(j\omega)}\right| \approx \begin{cases} \dfrac{1}{|L(j\omega)|} & se\ \omega \le \omega_c \to |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & se\ \omega > \omega_c \to |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$





$$|Q(j\omega)| = \left|\frac{R(j\omega)}{1+R(j\omega)G(j\omega)}\right| \approx \begin{cases} \dfrac{1}{|G(j\omega)|} & se\ \omega \le \omega_c \\ |R(j\omega)| & se\ \omega > \omega_c \end{cases}$$



Poniamoci di voler mappare delle specifiche su $y(t)$ in termini di vincoli su $L(j\omega)$

Ipotesi ricorrente è che $F(j\omega)$ abbia una coppia di poli complessi coniugati:

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} \qquad \varphi_c = \arg[L(j\omega_c)]$$

$$\frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|1 + \cos(\varphi_c) + \sin(\varphi_c)|} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos(\varphi_c))^2 + \sin^2(\varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2(\varphi_c) + 2\cos(\varphi_c) + \sin^2(\varphi_c)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos(\varphi_c))}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \cos\left(M_f^{rad}\right)\right)}} \rightarrow \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{2\sin\left(\frac{M_f^{rad}}{2}\right)}$$

Assumendo che $\omega_n \approx \omega_c$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{2\xi}$$

Dove ξ è lo smorzamento dei poli c.c.

Uguagliando le due espressioni:

$$\frac{1}{2\sin\left(\frac{M_f^{rad}}{2}\right)} = \frac{1}{2\xi} \quad \rightarrow \quad \xi = \sin\left(\frac{M_f^{rad}}{2}\right) \approx \frac{M_f^{rad}}{2} = \frac{M_f}{2}\frac{\pi}{180} \quad \rightarrow \quad \boxed{\xi \approx \frac{M_f}{100}}$$

ERRORI RELATIVI A INGRESSI TIPICI PER $w(t)$, $d(t)$

Sia:

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)} = \frac{N_L(s)}{s^g D'_L(s)} \qquad N_L(0) = \mu \quad , \quad D'_L(0) = 1$$

allora:

$$\lim_{s\to 0} S(s) = \lim_{s\to 0} \frac{D_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{s^g D'_L(s)}{N_L(s) + s^g D'_L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{s^g}{\mu + s^g}$$

Sia $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)$ con $e(t) = w(t) - y(t)$.

Per il teorema del valore finale si ha che $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$. Nel nostro caso $E_w(s) = S(s)W(s)$, quindi per:

- $w(t) = W1(t) \to W(s) = \frac{W}{s}$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{W}{s} = W \lim_{s\to 0} S(s)$$

$$e_\infty = W \lim_{s\to 0} \frac{s^g}{\mu + s^g} = \begin{cases} \dfrac{W}{1+\mu} & g = 0 \\ 0 & g > 0 \end{cases}$$

- $W(s) = \frac{W}{s^k}$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{W}{s^k} = W \lim_{s\to 0} S(s)\frac{1}{s^{k-1}}$$

$$e_\infty = W \lim_{s\to 0} \frac{s^{g-k+1}}{\mu + s^g} = \begin{cases} \infty & g < k-1 \\ \dfrac{W}{\mu} & g = k-1 \\ 0 & g > k-1 \end{cases}$$

Nota: affinché l'errore a regime sia nullo occorre che $L(s)$ abbia un numero di poli almeno pari a k

PRINCIPIO DEL MODELLO INTERNO

Affinché un segnale sinusoidale di riferimento (risp. un disturbo di misura) con una componente spettrale alla frequenza ω_0 sia inseguito (risp. neutralizzato) a regime perfettamente in uscita è necessario e sufficiente che:

- Il sistema chiuso in retroazione sia asintoticamente stabile
- Il guadagno d'anello $L(s)$ abbia una coppia di poli c.c. sull'asse immaginario con pulsazione pari a ω_0 cioè in $s = 0$

SPECIFICHE IN TERMINI DI GUADAGNO D'ANELLO

- Stabilità robusta rispetto a:
  - massima incertezza sul guadagno $\Delta\mu_{MAX}$ allora aumento ω_c, $M_a \geq M_a^*$
  - ritardo τ_{MAX} espresso come $e^{-s\tau}$ allora $\omega_c \tau_{MAX} \leq M_f \rightarrow \omega_c \leq \frac{M_f}{\tau_{MAX}}$
- Precisione statica

  Esempio1: La specifica richiede un errore $|e_\infty| \leq e^*$ in risposta a un gradino $w(t) = W1(t)$ con $|W| \leq W^*$ e con un disturbo in uscita $d(t) = D1(t)$ con $|D| \leq D^*$.

  Per le funzioni gradino vale:

$$e_{\infty,\ w} = \frac{W}{1+\mu} \qquad \text{e} \qquad e_{\infty,\ d} = \frac{D}{1+\mu}$$

  L'errore totale sarà dato quindi da:

$$e_\infty = \frac{W}{1+\mu} + \frac{D}{1+\mu} = \frac{W+D}{1+\mu} \approx \frac{W+D}{\mu}$$

$$|e_\infty| \leq e^* \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{W+D}{\mu}\right| \leq e^* \quad \rightarrow \quad \boxed{L(0) = \mu \geq \frac{W^*+D^*}{e^*}}$$

  Nota: Se gli ingressi fossero stati $W(s) = \frac{W}{s^k}$ e $D(s) = \frac{D}{s^k}$ allora, per la fisica realizzabilità del regolatore, $L(s)$ deve avere $k-1$ poli nell'origine e dunque partirà con una pendenza di $-(k-1)20\ dB/dec$. La formula del guadagno iniziale per soddisfare la specifica rimane invariato.

  Esempio2: La specifica richiede un errore $|e_\infty| = 0$ in risposta a $W(s) = \frac{W}{s^k}$ e/o $D(s) = \frac{D}{s^k}$

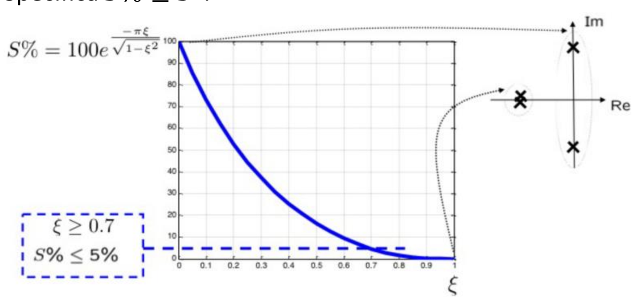
  Per la fisica realizzabilità del regolatore, $L(s)$ deve avere k poli nell'origine e dunque partirà con una pendenza di $-\ k\ 20dB/dec$.

- Precisione dinamica

  Abbiamo visto che presa $F(j\omega)$ con una coppia di poli c.c. dominanti in $\omega_n \approx \omega_c$, il coeff. di smorzamento risulta:

$$\xi \approx \frac{M_f}{100}$$

  Specifica $S\% \leq S^*$:



  Possiamo vedere dal grafico della sovraelongazione perc. che per avere $S\% \leq S^*$ deve valere $\xi \geq \xi^*$ dunque:

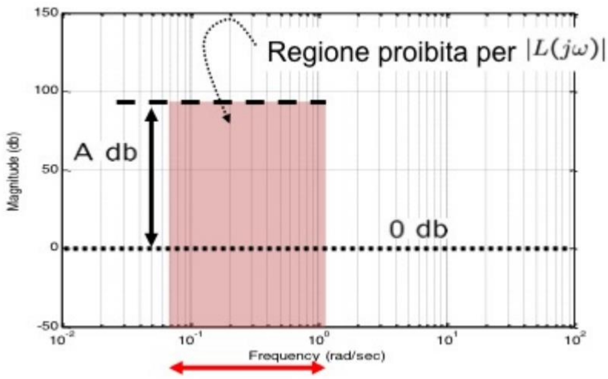
$$\boxed{S\% \leq S^* \quad \Leftrightarrow \quad M_f \geq 100\xi^*}$$

  Specifica $T_{\alpha,1} \leq T^*$:

  Per avere $T_{\alpha,1} \leq T^*$ deve valere $\xi\omega_n \geq \frac{4{,}6}{T^*}$ dunque dato che $\omega_n \approx \omega_c$ e $M_f\omega_c \geq \frac{460}{T^*}$:

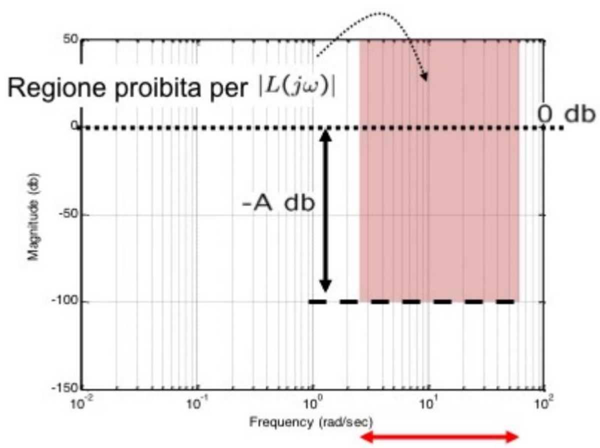
$$\boxed{T_{\alpha,1} \leq T^* \quad \Leftrightarrow \quad \omega_c \geq \frac{460}{M_f\ T^*}}$$

- Attenuazione disturbo in uscita $d(t)$
  Ricordiamo che se:
  $$d(t) = Dcos(\omega t + \varphi)$$
  allora
  $$y(t) = |S(j\omega)|D\cos(\omega t + \varphi + \arg[S(j\omega)])$$
  e
  $$|S(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{dB} & \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases}$$
  Essendo $d(t)$ un segnale a bassa freq. avremo che $\omega_{d,max} \ll \omega_c$ dunque se $d(t)$ deve essere attenuato di $A_d\ dB$:
  $$|S(j\omega)|_{dB} \approx -|L(j\omega)|_{dB} \leq -A_d \quad \rightarrow \quad \boxed{|L(j\omega)|_{dB} \geq A_d \quad \forall \omega \in [\omega_{d,min}, \omega_{d,max}]}$$



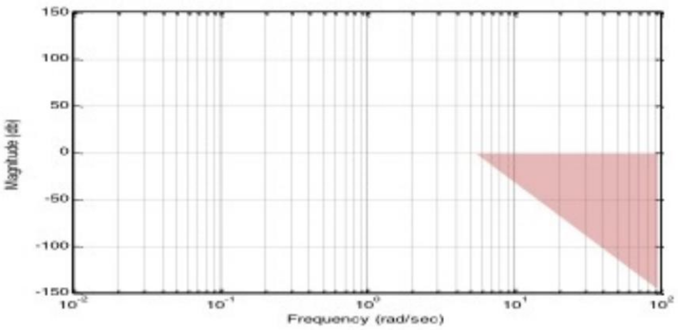
- Attenuazione disturbo di misura $n(t)$
  Ricordiamo che se:
  $$n(t) = Ncos(\omega t + \varphi)$$
  allora
  $$y(t) = |F(j\omega)|N\cos(\omega t + \varphi - \arg[F(j\omega)])$$

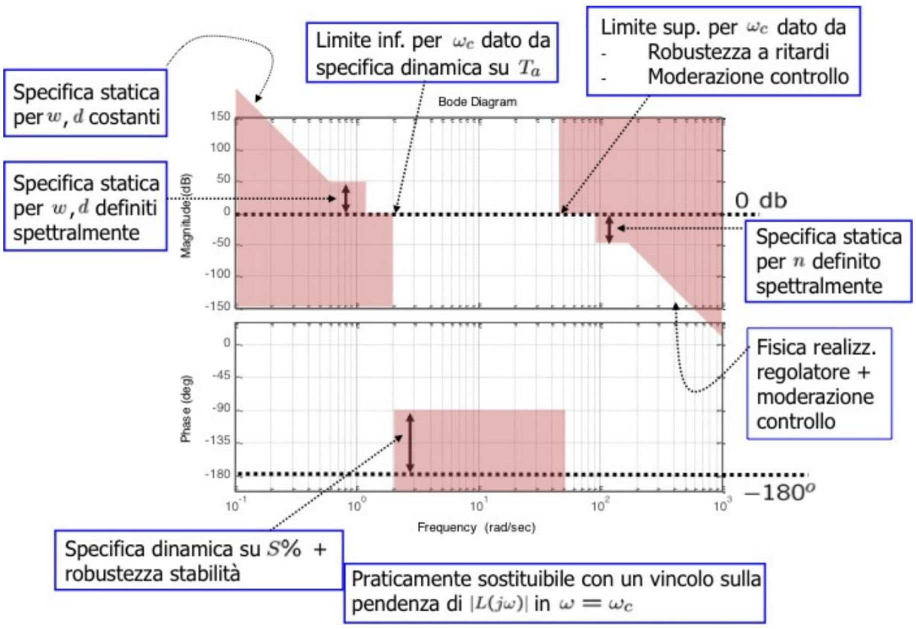
  e
  $$|F(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{dB} & \omega > \omega_c \end{cases}$$
  Essendo $n(t)$ un segnale ad alta freq. avremo che $\omega_{n,min} \gg \omega_c$ dunque se $n(t)$ deve essere attenuato di $A_n\ dB$:
  $$|F(j\omega)|_{dB} \approx |L(j\omega)|_{dB} \leq -A_n \quad \rightarrow \quad \boxed{|L(j\omega)|_{dB} \leq -A_n \quad \forall \omega \in [\omega_{n,min}, \omega_{n,max}]}$$



- Moderazione variabile di controllo $u(t)$
  Ricordiamo che se:
  $$w(t) = W cos(\omega t + \varphi)$$
  allora
  $$u(t) = |Q(j\omega)| W \cos(\omega t + \varphi + \arg[Q(j\omega)])$$

  e
  $$|Q(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|G(j\omega)|_{dB} & \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)|_{dB} & \omega > \omega_c \end{cases}$$
  Poiché vogliamo contenere $|Q(j\omega)|_{dB}$ e non abbiamo controllo su $G(j\omega)$ dobbiamo:
    - limitare ω_c
    - realizzare $R(j\omega)$ passa-basso
- Fisica realizzabilità del regolatore $R(s)$
  Il grado relativo del regolatore (differenza $poli - zeri$) deve essere ≥ 0. Questo ci fa capire che a pulsazioni elevate la pendenza sarà negativa per via della presenza di più poli rispetto a zeri.
  Se a pulsazioni elevate $|G(j\omega)|_{dB}$ ha pendenza $-k_G\ dB/dec$ allora per quanto riguarda la $|L(j\omega)|_{dB}$ avremo una pendenza di $-k_L\ dB/dec$ con
  $$-k_L \leq -k_G \qquad ossia \qquad k_L \geq k_G$$
  per via del contributo del regolatore





SINTESI DEL REGOLATORE (LOOP SHAPING)

Consiste nel “dare forma” alla $L(j\omega)$ in modo che:

- non attraversi le zone proibite in bassa e alta frequenza
- rispetti il vincolo sul margine di fase per $\omega = \omega_c$

È conveniente divedere il progetto in due fasi fattorizzando $R(s)$ come:

$$R(s) = R_s(s)R_d(s)$$

REGOLATORE STATICO

$$\boxed{R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k}}$$

Progettato per soddisfare precisione statica e attenuazione dei disturbi in uscita $d(t)$.

Per soddisfare la precisione statica possiamo scegliere

- $\boxed{R(s) = \mu_s \geq \mu^*}$ con μ^* calcolato in base all’errore e^* massimo desiderato a $+\infty$ e all’attenuazione desiderata per il disturbo $d(t)$ prendendo ovviamente il massimo tra i due
- $\boxed{R(s) = \frac{1}{s^k}}$ in modo da lasciare libero μ_d nel regolatore dinamico purché vengano poi rispettati i vincoli sull’attenuazione di $d(t)$

REGOLATORE DINAMICO

$$R_d(s) = \mu_d \frac{\prod_i (1+\tau_i s) \prod_i \left(1 + 2\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} s + \frac{s^2}{\alpha_{n,i}^2}\right)}{\prod_i (1+T_i s) \prod_i \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2}\right)}$$

Progettato per soddisfare stabilità robusta, precisione dinamica, attenuazione disturbi di misura $n(t)$, moderazione della variabile di controllo e fisica realizzabilità

Nota: μ_d può essere scelto solo se μ_s non è stato imposto

La progettazione di $R_d(s)$ mira a:

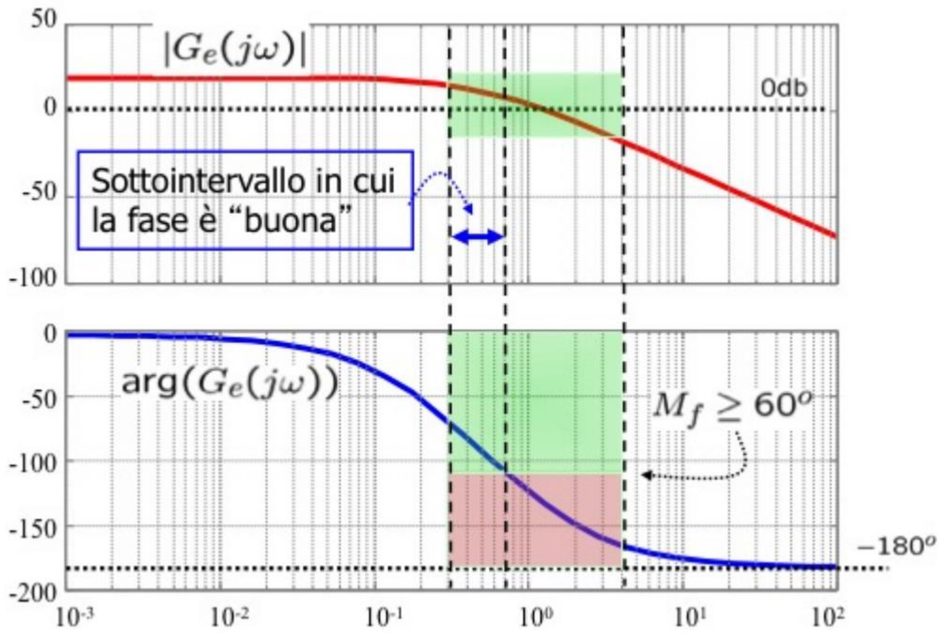
- Imporre ω_c in un certo intervallo
- Garantire un dato margine di fase M_f (ovvero garantire che $\arg[L(j\omega)] \geq -180 + M_f$)
- Garantire una certa attenuazione e pendenza di $L(j\omega)$ (e $R(j\omega)$) a pulsazioni elevate (è sufficiente introdurre poli del regolatore a pulsazioni elevate)

Procediamo individuando dei possibili scenari in base al diagramma del regolatore esteso:

$$G_e(s) = R_s(s)G(s)$$

SCENARIO A

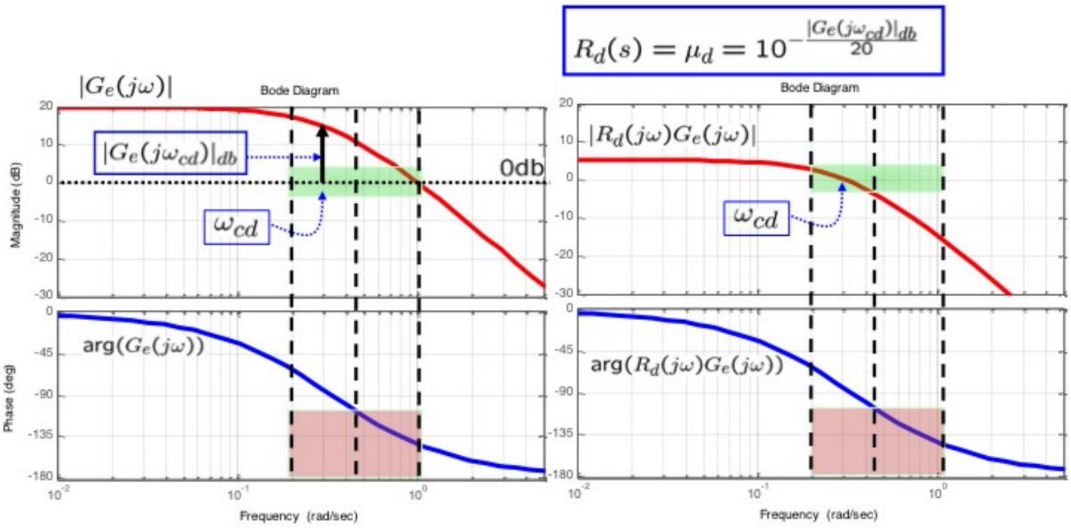
In tale scenario nell'intervallo centrale di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento ω_c esiste un sotto-intervallo in cui la fase $G_e(j\omega)$ rispetta il vincolo sul margine di fase



Obiettivo: attenuare il diagramma delle ampiezze (traslarlo verso il basso) in modo da far ricadere la pulsazione di attraversamento ω_c nel sotto-intervallo in cui il vincolo sul margine di fase è rispettato evitando di modificare la fase

Azioni possibili:

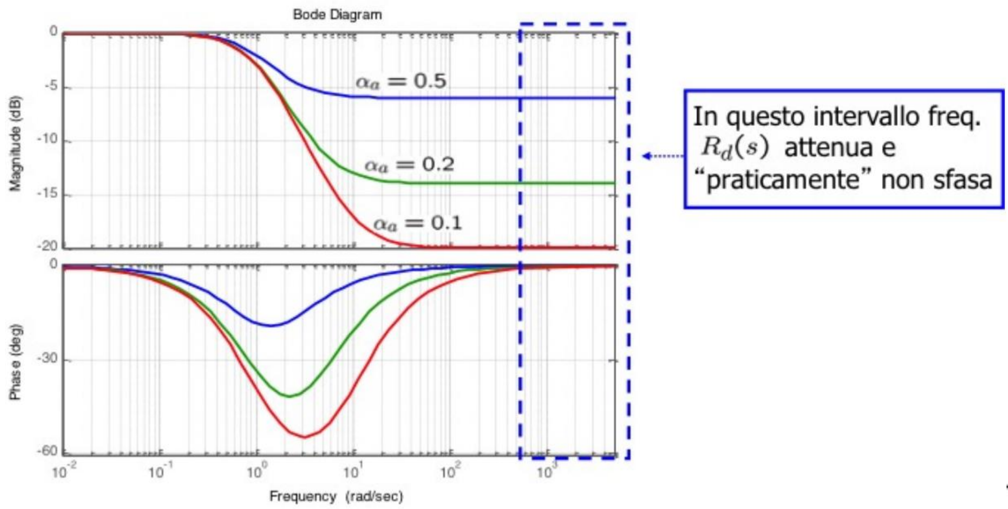
- Se μ_d è libero, allora possiamo scegliere $R_d(s) = \mu_d = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_{cd})|_{dB}}{20}}$

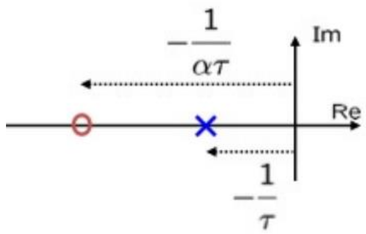


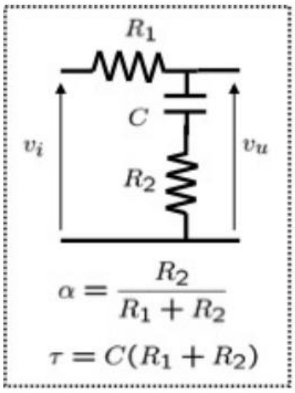
- Se μ_d è vincolato allora occorre attenuare mediante l'inserimento di poli e zeri in $R_d(s)$

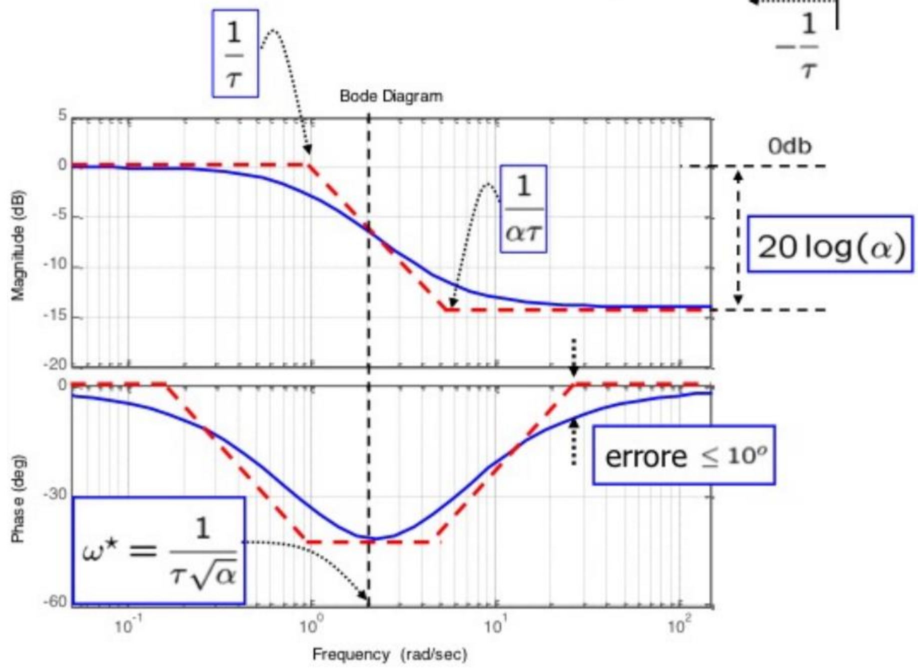
Per attenuare solo nel range di pulsazioni selezionato progettiamo la **rete ritardatrice** seguente:

$$R_d(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \qquad 0 < \alpha < 1$$









TUNING APPROSSIMATO

Obiettivo: calcolare α e τ in modo che $L(j\omega)$ abbia una pulsazione di attraversamento ω_c^* e valga

$$\arg[L(j\omega_c^*)] \approx \arg[G_e(j\omega_c^*)]$$

Procedura:

- Scegliere α tale che $20\log(\alpha) \approx -20\log|G_e(j\omega_c^*)|$
- Scegliere τ tale che $\frac{1}{\alpha\tau} \leq \frac{\omega_c^*}{10} \quad \rightarrow \quad \alpha\tau \leq \frac{10}{\omega_c^*}$

  Nota: al dividendo trovo 10 perché l'idea è quella di cominciare ad attenuare da una decade prima di ω_c^*

TUNING AVANZATO: FORMULE DI INVERSIONE

Obiettivo: calcolare α e τ in modo che alla pulsazione ω_c^* la rete ritardatrice abbia una attenuazione $M^* \in [0, 1]$ ed uno sfasamento $\varphi^* \in \left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$ ovvero:

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*}$$

Poniamo:

$$\frac{1 + j\alpha\tau\omega_c^*}{1 + j\tau\omega_c^*} = M^*[\cos(\varphi^*) + j\sin(\varphi^*)] \rightarrow 1 + j\alpha\tau\omega_c^* = M^*[\cos(\varphi^*) + j\sin(\varphi^*)](1 + j\tau\omega_c^*)$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria ricaviamo le formule di inversione:

$$\begin{cases} 1 = M^*\cos(\varphi^*) - M^*\tau\omega_c^*\sin(\varphi^*) \\ \alpha\tau\omega_c^* = M^*\tau\omega_c^*\cos(\varphi^*) + M^*\sin(\varphi^*) \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \tau = \dfrac{\cos(\varphi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^*\sin(\varphi^*)} \\[2ex] \alpha\tau = \dfrac{M^* - \cos(\varphi^*)}{\omega_c^*\sin(\varphi^*)} \end{array}}$$

Nota: Poiché vogliamo $0 < \alpha < 1$ occorre che $0 < M^* < \cos(\varphi^*)$

Procedura:

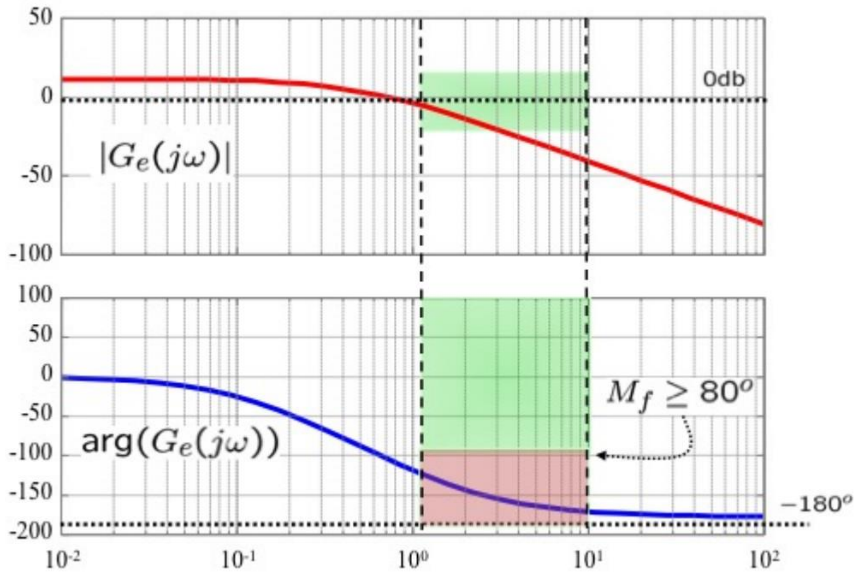
- Scegliere ω_c^* e ricavare M_f^* dalle specifiche
- Calcolare M^* e φ^* imponendo

$$\begin{cases} 20\log|G_e(j\omega_c^*)| + 20\log(M^*) = 0 \\ M_f^* = 180° + \arg[G_e(j\omega_c^*)] + \varphi^* \end{cases}$$

- Verificare che $\varphi^* \in \left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$ e $M^* \in [0, \cos(\varphi^*)]$
- Calcolare α e τ mediante le formule di inversione

SCENARIO B

Nell'intervallo di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento ω_c NON esistono pulsazioni in cui la fase di $G_e(j\omega)$ rispetta il vincolo sul margine di fase

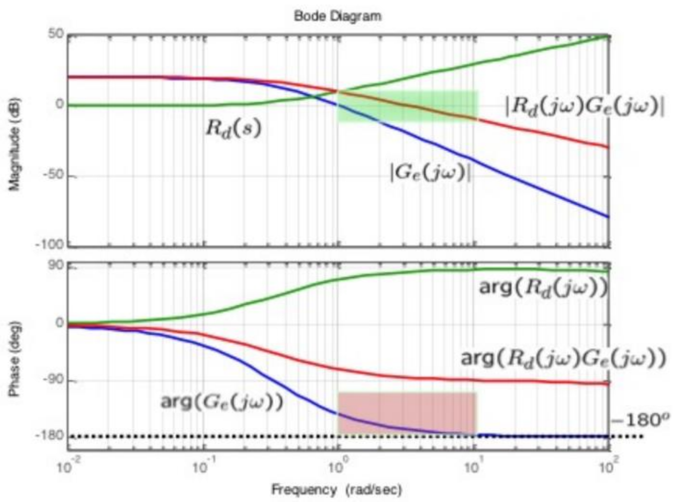


Obiettivo: modificare il diagramma delle fasi (aumentare la fase) in modo da rispettare il vincolo sul margine di fase evitando di amplificare l'ampiezza

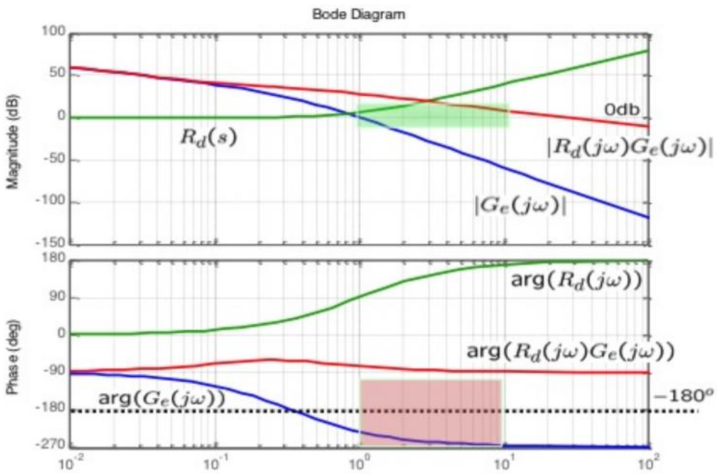
Azioni possibili

- aggiungere uno o più zeri (a pulsazioni precedenti quella di attraversamento desiderata) per aumentare la fase e successivamente aggiungere uno o più poli (a pulsazioni superiori quella di attraversamento desiderata) per la fisica realizzabilità e per evitare un'eccessiva amplificazione

Aggiunta di uno zero



Aggiunta di 2 zeri

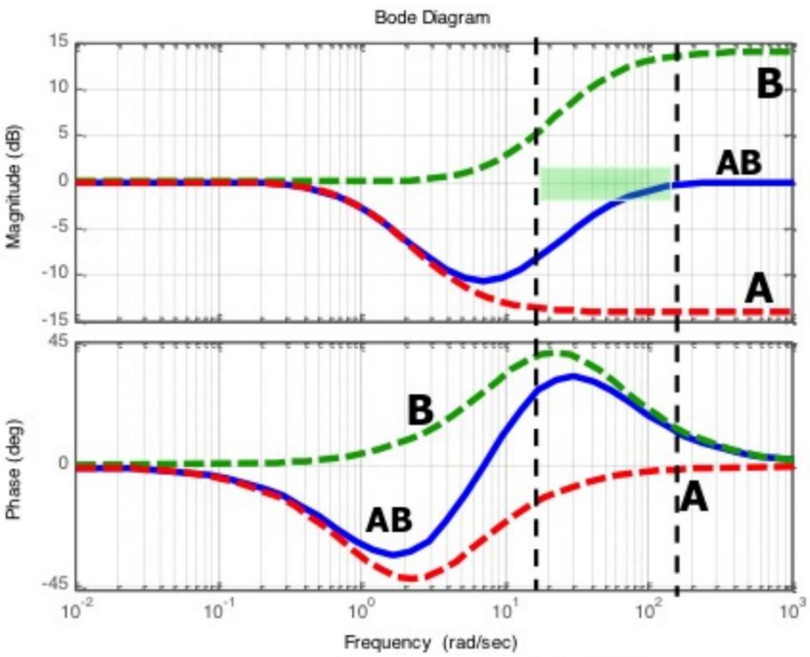


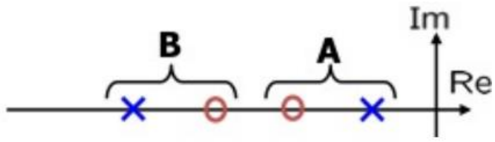
Tenendo conto dell'aggiunta di uno o due poli si può progettare la **rete anticipatrice** $R_d(s)$ seguente:

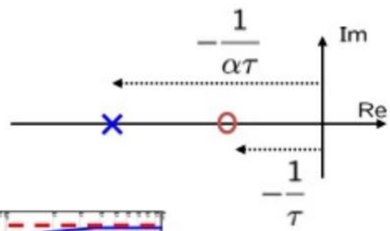
Aggiunta di uno zero	Aggiunta di due zeri
$R_d(s) = \dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \qquad 0<\alpha<1$	$R_d(s) = \dfrac{1+\tau_1 s}{1+\alpha_1\tau_1 s}\dfrac{1+\tau_2 s}{1+\alpha_2\tau_2 s} \qquad 0<\alpha_1<1\,, 0<\alpha_2<1$

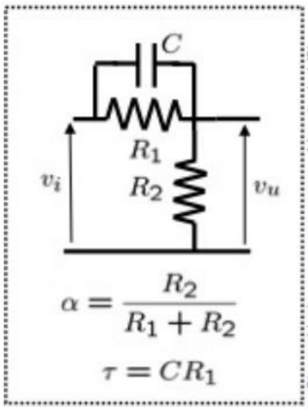
Una volta realizzata una rete anticipatrice (singola o multipla) si possono verificare due casi:

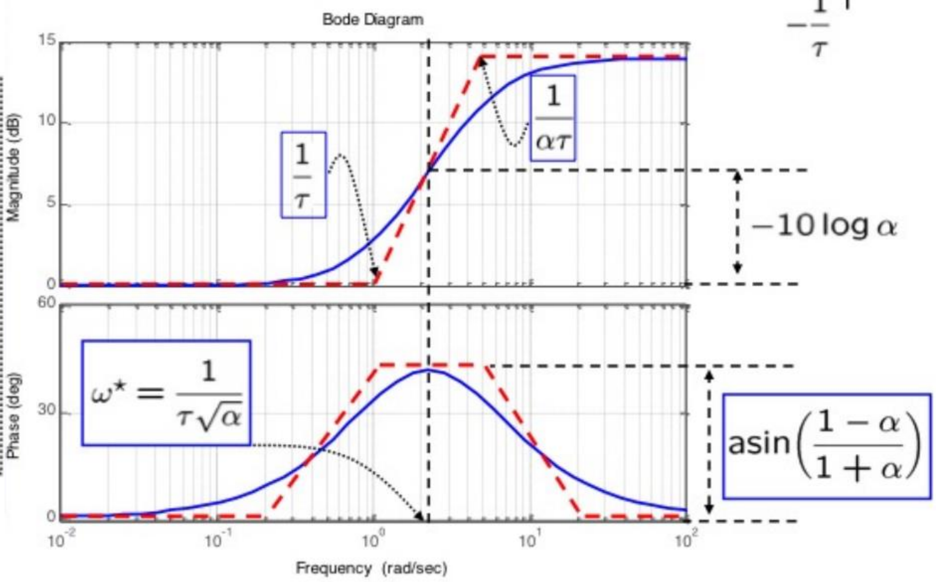
1. ω_c è nell'intervallo di specifica e il vincolo sul margine di fase è rispettato. In tal caso il progetto è terminato
2. ω_c è fuori dall'intervallo di specifica o in un intervallo in cui il vincolo sul margine di fase non è rispettato. In tal caso ci siamo ricondotti ad uno scenario A:
   - Se μ_d è libero allora scegliamo $\mu_d < 1$ per attenuare e il regolatore dinamico risulta essere:
   $$R_d(s) = \mu_d \frac{1+\tau_b s}{1+\alpha_b\tau_b s}$$
   - Se μ_d è bloccato occorre ricorrere alla **rete ritardo-anticipo**:
   $$R_d(s) = \frac{1+\alpha_a\tau_a s}{1+\tau_a s}\frac{1+\tau_b s}{1+\alpha_b\tau_b s}$$











FORMULE DI INVERSIONE

Obiettivo: calcolare α e τ in modo che alla pulsazione ω_c^* la rete anticipatrice abbia una attenuazione $M^* > 1$ ed uno sfasamento $\varphi^* \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ovvero:

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*}$$

Poniamo:

$$\frac{1 + j\tau\omega_c^*}{1 + j\alpha\tau\omega_c^*} = M^*[\cos(\varphi^*) + j\sin(\varphi^*)] \rightarrow 1 + j\tau\omega_c^* = M^*[\cos(\varphi^*) + j\sin(\varphi^*)](1 + j\alpha\tau\omega_c^*)$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria ricaviamo le formule di inversione:

$$\begin{cases} 1 = M^*\cos(\varphi^*) - M^*\alpha\tau\omega_c^*\sin(\varphi^*) \\ \tau\omega_c^* = M^*\alpha\tau\omega_c^*\cos(\varphi^*) + M^*\sin(\varphi^*) \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \tau &= \frac{M^* - \cos(\varphi^*)}{\omega_c^*\sin(\varphi^*)} \\ \alpha\tau &= \frac{\cos(\varphi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^*\sin(\varphi^*)} \end{aligned}}$$

Nota: Poiché vogliamo $\alpha > 0$ occorre che $\cos(\varphi^*) > \frac{1}{M^*}$

Procedura:

- Scegliere ω_c^* e ricavare M_f^* dalle specifiche
- Calcolare M^* e φ^* imponendo
$$\begin{cases} 20\log|G_e(j\omega_c^*)| + 20\log(M^*) = 0 \\ M_f^* = 180° + \arg[G_e(j\omega_c^*)] + \varphi^* \end{cases}$$
- Verificare che $M^* > 1$, $\varphi^* \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ e $\cos(\varphi^*) > \frac{1}{M^*}$
- Calcolare α e τ mediante le formule di inversione