Naloge iz matematike

1. Dokaži, da je enačba $(P \cap X) \cup (Q \cap X^c) = \emptyset$ rešljiva natanko tedaj, ko je $Q \subseteq P^c$.

2. Pokaži:

   - $M = N \iff M + N = \emptyset$
   - $M = N = \emptyset \iff M \cup N = \emptyset$

3. Ali obstaja tak izjavni izraz A, da bosta izraza $(p \wedge A) \vee (p \Rightarrow \neg A)$ in $(p \Rightarrow A) \Rightarrow q$ enakovredna?

4. Dokaži:

   - $(A \Rightarrow B) \sim (\neg B \Rightarrow \neg A)$
   - $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$

5. Poišči preneksno obliko formule $\exists x : P(x) \wedge \forall x : Q(x) \Rightarrow \forall x : R(x)$.

6. Vektorja $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ in $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ sta pravokotna in imata dolžino 1. Določi kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

7. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \log \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

8. Izračunaj

$$\cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{8\pi}{8}$$

9. Dokaži, da za vsa naravna števila n velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

10. Naj bo z kompleksno število, $z \neq 1$ in $|z| = 1$. Dokaži, da je število $i\,\frac{z+1}{z-1}$ realno.

11. Pokaži, da je funkcija $x \mapsto \sqrt{x}$ enakomerno zvezna na $[0, \infty)$.

12. Izračunaj limito

$$\lim_{x \to \infty} (\sin \sqrt{x + 1} - \sin \sqrt{x})$$

13. Dani sta grupi $(G, *)$ in $(H, \circ)$. V množici $G \times H$ definiramo operacijo

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \circ h_2)$$

Pokaži, da je množica $G \times H$ grupa za to operacijo.

14. Pokaži, da ima $f(x) = 3x + \sin(2x)$ inverzno funkcijo in izračunaj $(f^{-1})'(3\pi)$.

15. Izračunaj integral korenske funkcije

$$\int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\, dx$$

16. Krivulja je podana parametrično z enačbama

$$x(t) = \int_1^t \frac{\sin u}{u^2}\, du \qquad y(t) = \int_1^t \frac{\cos u}{u^2}\, du$$

Izračunaj dolžino poti od točke $x = 0$ do točke, v kateri je tangenta prvič navpična.

17. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta in $a_n \neq 1$ za $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da sta vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n} \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1 + a_n^2}$$

absolutno konvergentni.

18. Funkcijsko zaporedje $f_n : [a, b] \to [c, d]$ enakomerno konvergira na $[a, b]$ proti funkciji f. Naj bo $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Dokaži, da funkcijsko zaporedje $g \circ f_n$ enakomerno konvergina na $[a, b]$ in določi njegovo limitno funkcijo.

19. Izračunaj limito zaporedja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n - 1} + \sqrt[3]{n} + n^2}{2n^2 + \sqrt{n} + 1}$$

20. Izračunaj $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-2000}$

21. Poenostavi

$$\frac{\dfrac{3+i}{2-2i}+\dfrac{7i}{1-i}}{1+\dfrac{i-1}{4}-\dfrac{5}{2-3i}}$$

22. Za dani zaporedji preveri, ali sta konvergentni

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}} \qquad b_n = \underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin 1)\ldots))}_{n \text{ sinusov}}$$

23. Ugotovi, ali obstaja

$$\lim_{y\to 0} y\left(\frac{y+1}{y}-\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}}\right)$$

Pomagaj si z limitama funkcije $\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+1}}{x}$ v $-\infty$ in ∞.

24. Izračunaj naslednjo determinanto $2n\times 2n$, ki ima na neoznačenih mestih ničle.

$$\begin{vmatrix}
1 & & & & 1 & & & & \\
 & 2 & & & 2 & & & & \\
 & & \ddots & & \vdots & & & & \\
 & & & n-1 & n-1 & & & & \\
1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\
 & & & & n+1 & n+1 & & & \\
 & & & & n+2 & & n+2 & & \\
 & & & & \vdots & & & \ddots & \\
 & & & & 2n & & & & 2n
\end{vmatrix}$$

25. Dana je funkcija

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ a; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

- Določi parameter a tako, da bo f zvezna.
- Izračunaj parcialna odvoda $f_x(x,y)$ in $f_y(x,y)$ za $(x,y)\neq(0,0)$.

- Izračunaj parcialna odvoda $f_x(0,0)$ in $f_y(0,0)$. Če obstaja, izračunaj limito

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f_x(0,0) - f_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ali je funkcija f diferenciabilna?

26. Poišči vse rešitve enačbe

$$(1+x+x^2)\cdot(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10}) = \\ = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$$

27. Dokaži *binomsko formulo*: za vsaki realni števili a in b in za vsako naravno število n velja

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n \\ = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

28. Naj bo

$$G = \{z \in \mathbb{C};\ z = 2^k(\cos(m\pi\sqrt{2}) + i\sin(m\pi\sqrt{2})), k, m \in \mathbb{Z}\} \\ H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Pokaži, da je G podgrupa v grupi $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ neničelnih kompleksnih števil za običajno množenje.

(b) Pokaži, da je H podgrupa v aditivni grupi $(\mathbb{R}^2, +)$ ravninskih vektorjev za običajno seštevanje po komponentah.

(c) Pokaži, da je preslikava $f : H \to G$, podana s pravilom

$$(x,y) \mapsto 2^x(\cos(y\pi\sqrt{2}) + i\sin(y\pi\sqrt{2}))$$

izomorfizem grup G in H.

29. Nariši grafe funkcij:

$$y = x^2 - 3|x| + 2 \qquad y = 3\sin(\pi + x) - 2$$
$$y = \log_2(x-2) + 3 \qquad y = 2\sqrt{x^2+15} + 6$$
$$y = 2^{x-3} + 1 \qquad y = \cos(x-3) + \sin^2(x+1)$$