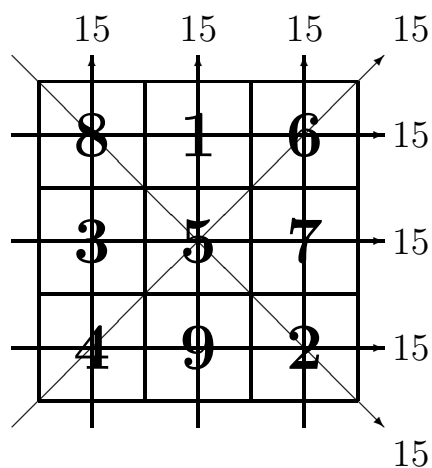


Magični kvadrati

Prirejeno iz virov:

- <http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square



Kazalo

1	Uvod	2
2	Zgodovina	2
2.1	Kvadrat »Lo Shu«	2
2.2	Kulturna pomembnost	2
2.3	Zgodnji kvadrati reda 4	3
3	Osnovne lastnosti	3
4	Primeri	4

1 Uvod

Definicija 1. MAGIČNI KVADRAT reda n je nabor n^2 različnih števil, ki so razvrščena v kvadratno tabelo tako, da vedno dobimo enako vsoto, če seštejemo vsa števila poljubne vrstice, vsa števila poljubnega stolpca ali vsa števila v katerikoli od glavnih diagonal.

Primer magičnega kvadrata reda 3 je prikazan v tabeli ??.

Magični kvadrat reda 3

Magični kvadrat reda ?? je normalen, če v njem nastopajo števila ??

Magični kvadrat v tabeli ?? je normalen. To je tudi najmanjši netrivialni magični kvadrat. Poleg normalnih magičnih kvadratov so zanimivi tudi magični kvadrati praštevil.

2 Zgodovina

2.1 Kvadrat »Lo Shu«

Kitajska literatura iz časa vsaj 2800 let pred našim štetjem govori o legendi Lo Shu – »zvitke reke Lo«. V antični Kitajski je prišlo do silne poplave. Ljudje so skušali rečnemu bogu narasle reke Lo ponuditi daritev, da bi pomirili njegovo jezo. Iz vode se je prikazala želva z zanimivim vzorcem na oklepu: v tabeli velikosti tri krat tri so bila predstavljena števila, tako da je bila vsota števil v katerikoli vrstici, kateremkoli stolpcu in na obeh glavnih diagonalah enaka: 15. To število je tudi enako številu dni v 24 ciklih kitajskega sončnega leta. Ta vzorec so na določen način uporabljali upravljalci reke.

Kvadrat Lo Shu

2.2 Kulturna pomembnost

Magični kvadrati so fascinirali človeštvo skozi vso zgodovino. Najdemo jih v številnih kulturah, npr. v Egiptu in Indiji, vklesane v kamen ali kovino, uporabljane kot talismane za dolgo življensko dobo in v izogib boleznim.

Kubera-Kolam je talna poslikava, ki se uporablja v Indiji, in je v obliki magičnega kvadrata reda 3. Ta je v bistvu enak kot kvadrat Lo Shu, vendar je vsako število povečano za 19.

Kvadrat Kubera-Kolam

Z magičnimi kvadrati so se ukvarjali tudi najbolj znani matematiki kot na primer Euler, glej ??.

2.3 Zgodnji kvadrati reda 4

Najzgodnejši znani magični kvadrat reda 4 je bil odkrit na napisu v Khajurahu v Indiji in v Enciklopediji Bratovščine Čistosti iz enajstega ali dvanajstega stoletja. Vrh vsega gre celo za »panmagični kvadrat«. V Evropi sta morda najbolj znana naslednja magična kvadrata reda 4:

Magični kvadrat v litografiji Melancholia I (glej sliko ?? za izsek s kvadratom) Albrechta Dürerja naj bi bil najzgodnejši magični kvadrat v evropski umetnosti. Zelo podoben je kvadratu Yang Huija, ki je nastal na Kitajskem približno 250 let pred Dürerjevim časom.

Vsoto 34 je mogoče najti pri seštevanju števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu, na vsaki diagonali, v vsakem od štirih kvadrantov, v sredinskih štirih poljih, v štirih kotih, v štirih sosedih kotov v smeri urinega kazalca (??), v štirih sosedih kotov v nasprotni smeri urinega kazalca (??), v dveh naborih simetričnih parov (?? in ??), in še na nekaj drugih načinov. Števili na sredini spodnje vrstici tvorita letnico litografije: 1514.

Dürerjev magični kvadrat ??

Dürerjev magični kvadrat

Pasijonska fasada na katedrali Sagrada família v Barceloni (glej sliko ?? za fotografijo) vsebuje magični kvadrat reda 4.

Pasijonska fasada, Sagrada Família

Magični kvadrat na Sagradi Família

Vsota števil v vrsticah, stolpcih oziroma na diagonalah je 33 – Jezusova starost v času pasijona. Strukturno je kvadrat podoben Dürerjevemu, vendar so števila v štirih poljih zmanjšana za 1. Posledica je, da sta števili 10 in 14 podvojeni in zato kvadrat ni normalen.

3 Osnovne lastnosti

Definicija 2. Vsoto ene vrstice, enega stolpca ali ene od glavnih diagonal v magičnem kvadratu imenujemo magična konstanta.

Izrek 1. *Magična konstanta normalnega magičnega kvadrata reda n je enaka $n(n+1)/2$.*

Dokaz. *V normalnem magičnem kvadratu reda n je vsota vseh nastopajočih števil (glej ?? na strani ??) enaka $n(n+1)/2$. Ker imamo v kvadratu ?? vrstic z enako vsoto, je vsota števil v eni vrstici enaka številu $n(n+1)/2$.*

Preprost račun pokaže, da je konstanti ?? analogna konstanta ?? za magični kvadrat, v katerem so nameščena števila ??, ??, ??, ??, ??, enaka ?? Kvadratu v tabeli ?? ustrezata konstanti ?? in ??.

Če vsako od števil v normalnem magičnem kvadratu reda n odštejemo od števila n^2 , dobimo nov magični kvadrat, ki je prvotnemu komplementaren.

Na primer, magičnemu kvadratu Lo Shu (glej tabelo 1.1) priredimo komplementarni kvadrat, prikazan v tabeli 1.2.

Kvadratu Lo Shu komplementarni kvadrat

Vidimo, da je dobljeni kvadrat moč dobiti iz kvadrata Lo Shu tudi z zasukom za 180 stopinj okrog središča, kvadrat iz tabele 1.2 pa je mogoče dobiti iz kvadrata Lo Shu z zrcaljenjem preko sredinske vodoravne črte.

Število različnih normalnih magičnih kvadratov

Pravimo, da sta dva magična kvadrata različna, če enega ni mogoče dobiti iz drugega s pomočjo zasukov oziroma zrcaljenj.

Števila različnih normalnih magičnih kvadratov se nahajajo v tabeli 1.3.

Število različnih normalnih magičnih kvadratov točna vrednost približek red
1 2 3 4 5 6 število kvadratov 1 0 1 880 275305224 1

Vse normalne magične kvadrate reda 4 je oštevilčil Frénicle de Bessy leta 1693, glej 1.1, in jih je moč najti v knjigi 1.2 iz leta 1982. Število normalnih kvadratov reda 5 je izračunal R. Schroepel leta 1973 (glej Gardner 1.3). Natančno število vseh različnih normalnih magičnih kvadratov reda 6 ni znano. Avtorja navedenega približka sta Pinn in Wierczerkowski (glej 1.4), ki sta za oceno uporabila simulacijo Monte Carlo in metode statistične mehanike.

4 Primeri

V tabelah 4.1, 4.2 in 4.3 so prikazani magični kvadrati redov 5, 6 in 9.

Magični kvadrat reda 5

Magični kvadrat reda 6

Magični kvadrat reda 9