

## Naloge iz matematike

1. Dokaži, da je enačba  $(P \cap X) \cup (Q \cap X^c) = \emptyset$  rešljiva natanko tedaj, ko je  $Q \subseteq P^c$ .

2. Pokaži:

- $M = N \iff M + N = \emptyset$
- $M = N = \emptyset \iff M \cup N = \emptyset$

3. Ali obstaja tak izjavni izraz  $A$ , da bosta izraza  $(p \wedge A) \vee (p \Rightarrow \neg A)$  in  $(p \Rightarrow A) \Rightarrow q$  enakovredna?

4. Dokaži:

- $(A \Rightarrow B) \sim (\neg B \Rightarrow \neg A)$

5. Poišči preneksno obliko formule  $\exists x : P(x) \wedge \forall x : Q(x) \Rightarrow \forall x : R(x)$ .

6. Vektorja  $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$  in  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$  sta pravokotna in imata dolžino 1. Določi kot med vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

7. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \log \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

8. Izračunaj

$$\cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{8\pi}{8}$$

9. Dokaži, da za vsa naravna števila  $n$  velja:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

10. Naj bo  $z$  kompleksno število,  $z \neq 1$  in  $|z| = 1$ . Dokaži, da je število  $i \frac{z+1}{z-1}$  realno.

11. Pokaži, da je funkcija  $x \mapsto \sqrt{x}$  enakomerno zvezna na  $[0, \infty)$ .

12. Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

13. Dani sta grupi  $(G, *)$  in  $(H, \circ)$ . V množici  $G \times H$  definiramo operacijo

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \circ h_2)$$

Pokaži, da je množica  $G \times H$  grupa za to operacijo.

14. Pokaži, da ima  $f(x) = 3x + \sin(2x)$  inverzno funkcijo in izračunaj  $(f^{-1})(3\pi)$ .

15. Izračunaj integral korenske funkcije

$$\int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$$

16. Krivulja je podana parametrično z enačbama

$$x(t) = \int_1^t \frac{\sin u}{u^2} du \quad y(t) = \int_1^t \frac{\cos u}{u^2} du$$

Izračunaj dolžino poti od točke  $x = 0$  do točke, v kateri je tangenta prvič navpična.

17. Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolutno konvergentna vrsta in  $a_n \neq 1$  za  $n \in \mathbb{N}$ . Dokaži, da sta vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1 + a_n^2}$$

absolutno konvergentni.

18. Funkcijsko zaporedje  $f_n : [a, b] \rightarrow [c, d]$  enakomerno konvergira na  $[a, b]$  proti funkciji  $f$ . Naj bo  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Dokaži, da funkcijsko zaporedje  $g \circ f_n$  enakomerno konvergira na  $[a, b]$  in določi njegovo limitno funkcijo.

19. Izračunaj limito zaporedja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n - 1} + \sqrt[3]{n} + n^2}{2n^2 + \sqrt{n} + 1}$$

20. Izračunaj  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-2000}$

21. Poenostavi

$$\frac{\frac{3+i}{2-2i} + \frac{7i}{1-i}}{1 + \frac{i-1}{4} - \frac{5}{2-3i}}$$

22. Za dani zaporedji preveri, ali sta konvergentni

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}} \quad b_n = \underbrace{\sin(\sin(\dots \sin 1))}_{n \text{ sinusov}}$$

23. Ugotovi, ali obstaja

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \left( \frac{y+1}{y} - \sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}} \right)$$

Pomagaj si z limitama funkcije  $\frac{x+1-\sqrt{x^2+1}}{x}$  v  $-\infty$  in  $\infty$ .

24. Izračunaj naslednjo determinanto  $2n \times 2n$ , ki ima na neoznačenih mestih ničle.

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ & 2 & & 2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdot & \end{vmatrix}$$

25. Dana je funkcija  $f(x,y)$ . Določi parameter  $a$  tako, da bo  $f$  zvezna. Izračunaj parcialna odvoda  $f$  in  $f$  za  $(1,1)$ . Izračunaj parcialna odvoda  $f$  in  $f$ . Če obstaja, izračunaj limito  $f$ . Ali je funkcija  $f$  diferenciable?

26. Poišči vse rešitve enačbe  $f(x) = 0$

27. Dokaži binomsko formulo: za vsaki realni števili  $x$  in  $y$  in za vsako naravno število  $n$  velja  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

28. Naj bo  $G$  grupa. Pokaži, da je  $\{0\}$  podgrupa v grupi  $G$  neničelnih kompleksnih števil za običajno množenje. Pokaži, da je  $\{0\}$  podgrupa v aditivni grupi  $G$  ravninskih vektorjev za običajno seštevanje po komponentah. Pokaži, da je preslikava  $f$ , podana s pravilom  $f(x,y) = (x+y, x-y)$  izomorfizem grup  $G \times G$  in  $G$ .

29. Nariši grafe funkcij:  $f(x) = \sin(x)$  in  $f(x) = \cos(x)$